

Tilastotieteen pro gradu -tutkielma

# Silmänliikkeen fiksaatioiden tilastollinen mallintaminen

Anna-Kaisa Ylitalo

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
8. joulukuuta 2009

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO  
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

**Ylitalo, Anna-Kaisa:** Silmänliikkeen fiksaatioiden tilastollinen mallintaminen

Pro gradu -tutkielma, 62 s.  
Tilastotiede  
Joulukuu 2009

---

### Tiivistelmä

Silmänliikkeen mittaamiseen on kehitetty erityisiä katseenseurantalaitteita, silmänliikekameroita. Kameroiden avulla silmänliikkeestä voidaan erotella muun muassa fiksaatiot eli pysähdykset ja sakkadit eli siirtymät näiden fiksaatioiden välillä. Tässä työssä keskitytään fiksaatioihin ja niiden mallintamiseen. Fiksaatioita kuvataan hyppyprosessiesityksellä, josta nähdään esimerkiksi fiksaatioiden kestot ja järjestys. Tutkimuksessa käytetty tarkastelutapa edellyttää, että spatioaalinen avaruus diskretisoidaan eli katseltava kohde jaetaan alueisiin eli tiloihin, joita on äärellinen määrä.

Tutkielmassa esitetään stokastisiin prosesseihin perustuvia malleja, joilla silmänliikeaineistoja voidaan analysoida. Ratkaisuksi silmänliikeaineistojen mallintamiseen esitetään erityisesti semi-Markov-prosessia ja tämän variaatiota, jota nimitän viivästetyksi prosessiksi. Nämä kaksi mallia sallivat silmänliikkeen pysähdysten eli fiksaatioiden riippuvuuden, joten ne saattavat olla käyttökelpoisia useiden aineistojen kohdalla. Riippumattomille tilanteille esitetään myös kaksi mallia. Malleihin tutustutaan esimerkkien avulla.

Tilastollisen mallin avulla päästään käsiksi tunnuslukujen otantajakaumiin ja sitä kautta aineiston analysointiin. Tunnuslukuja on mahdollista laskea myös suoraan hyppyprosessiesityksestä. Otantajakaumasta saadaan selville esimerkiksi tunnusluvun keskivirhe. Tunnuslukujen otantajakaumien määrääminen tehdään simuloimalla Monte Carlo -menetelmällä, mikäli se on analyttisesti vaikeaa tai mahdotonta.

Tutkielmassa esitetyt malleja sovitetaan taideaineistoon, joka koostuu silmänliikkeistä maalauksissa. Maalauksien kuvat on esitetty koehenkilöille tietokoneen ruudulta. Tässä työssä kehitettyä analyysimenetelmää voidaan kuitenkin soveltaa myös muunlaisiin silmänliikeaineistoihin pienillä muutoksilla.

**Avainsanat:** silmänliike, silmänliiketutkimus, fiksaatio, sakkadi, semi-Markov-prosessi.

# Sisältö

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Johdanto</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Silmänliike</b>   | <b>3</b>  |
| 2.1      | Fiksaatiot . . . . .   | 4         |
| 2.2      | Sakkadit . . . . .   | 4         |
| 2.3      | Sovellusalueita ja tutkimustuloksia . . . . .                    | 4         |
| <b>3</b> | <b>Fiksaatioiden mallinnus</b>                                   | <b>7</b>  |
| 3.1      | Fiksaatioiden mallintaminen stokastisella prosessilla . . . . .  | 7         |
| 3.2      | Kestot riippumattomia siirtymistä . . . . .                      | 8         |
| 3.2.1    | Homogeenisten fiksaatioiden malli . . . . .                      | 9         |
| 3.2.2    | Lähtötilasta riippuvien fiksaatioiden malli . . . . .            | 10        |
| 3.3      | Kestot riippuvia siirtymistä . . . . .                           | 12        |
| 3.3.1    | Lähtö- ja lopputiloista riippuvien fiksaatioiden malli . . . . . | 12        |
| 3.3.2    | Viivästetty malli . . . . .                                      | 13        |
| 3.4      | Homogeenisen prosessin luonnehdintoja . . . . .                  | 14        |
| 3.5      | Esimerkki . . . . .  | 16        |
| <b>4</b> | <b>Tila-avaruuden konstruointi</b>                               | <b>25</b> |
| <b>5</b> | <b>Estimointi</b>  | <b>27</b> |
| 5.1      | Siirtymätodennäköisyydet . . . . .                               | 27        |
| 5.1.1    | SU-estimaattori multinomijakauman parametrille . . . . .         | 27        |
| 5.2      | Fiksaatioiden kestot . . . . .                                   | 28        |
| 5.2.1    | Estimaattorit eksponenttijakauman parametreille . . . . .        | 28        |
| 5.2.2    | Simuloitu esimerkki . . . . .                                    | 29        |
| 5.2.3    | Estimaattorit gammajakauman parametreille . . . . .              | 31        |
| 5.2.4    | Elinaikamallinnus . . . . .                                      | 34        |
| <b>6</b> | <b>Sovellus taideaineistoon</b>                                  | <b>37</b> |
| 6.1      | Mittaus . . . . .  | 37        |
| 6.2      | Mallin sovitus aineistoon . . . . .                              | 38        |
| 6.3      | Prosessien vertailua . . . . .                                   | 42        |
| 6.3.1    | Kaplan-Meier-estimaatit . . . . .                                | 42        |
| 6.3.2    | Uskottavuusosamäärän testi . . . . .                             | 50        |
| <b>7</b> | <b>Mallien käyttö</b>  | <b>55</b> |
| 7.1      | Parametrit ja niiden estimaattorit . . . . .                     | 55        |
| 7.1.1    | Yleinen parametri . . . . .                                      | 55        |
| 7.1.2    | Otantajakauma . . . . .  | 55        |
| 7.1.3    | Tunnuslukujen prosessikarakterisointeja . . . . .                | 56        |
| 7.2      | Monte Carlo -testi ja p-arvo . . . . .                           | 57        |
| 7.3      | Sovellus . . . . .   | 58        |
|          | <b>Kiitokset</b>   | <b>60</b> |
|          | <b>Viitteet</b>  | <b>61</b> |

# 1 Johdanto

Lukiessasi tätä tekstiä, katseesi liikkuu tahtosi mukaan rivejä pitkin. Katseesi saattaa kuitenkin harhautua ulkopuolisiin ärsykkeisiin ja lukemisesi keskeytyy. Voit siis kohdistaa katsetta oman mielesi mukaan, mutta osan ajasta se harhailee ympäristössä ja reagoi ärsykkeisiin. Katseen paikalleen kohdistumisia kutsutaan *fiksaatioiksi* ja siirtymiä fiksaatioiden välillä kutsutaan *sakkadeiksi*. Tässä pro gradu -työssä keskitytään ainoastaan fiksaatioiden tutkimiseen, sillä suurin osa näköaistin kautta saadusta informaatiosta kertyy juuri fiksaatioiden aikana.

Tällä hetkellä ollaan Raynerin [17] mukaan siirtymässä silmänliiketutkimuksen neljännelle aikakaudelle, jolle on ominaista silmänliikettä mittaavien sovellusten kehitys. Jo ensimmäisen aikakauden aikana, 1800–1900-lukujen vaihteessa, eroteltiin silmänliikkeestä sakkadit ja fiksaatiot. Toisen vaiheen aikana silmänliiketutkimuksen alalla ei tapahtunut juuri mitään: luultiin että kaikki oli jo keksitty. Varsinaisena kehityksen aikana voidaan pitää kolmatta aikakautta, 1970-lukua, jonka jälkeen katseenseurantalaitteet kehittyivät ja aineiston käsittely ja analysointi tehostuivat tietokoneiden ansiosta.

Psykologia, kasvatustiede ja markkinointitutkimus ovat soveltaneet paljon silmänliikettä tutkimuksissaan. Esimerkiksi lukemista on ehditty tutkia useissa silmänliiketutkimuksissa jo vuosikymmenten ajan. Ongelmana on kuitenkin se, että useimmat alat ovat käyttäneet analyyseissään yleensä vain yksinkertaisimpia tilastollisia menetelmiä. Esimerkiksi lukututkimuksissa saatetaan tutkia, kuinka monta fiksaatiota tapahtuu yhtä lausetta lukiessa tai kuinka monesti tekstiä lukiessa katse palaa taaksepäin. Tämän tutkielman tarkoituksena on tutkia silmänliikkeitä tilastollisten mallien avulla ja näin syventää aineistosta saatavaa informaatiota.

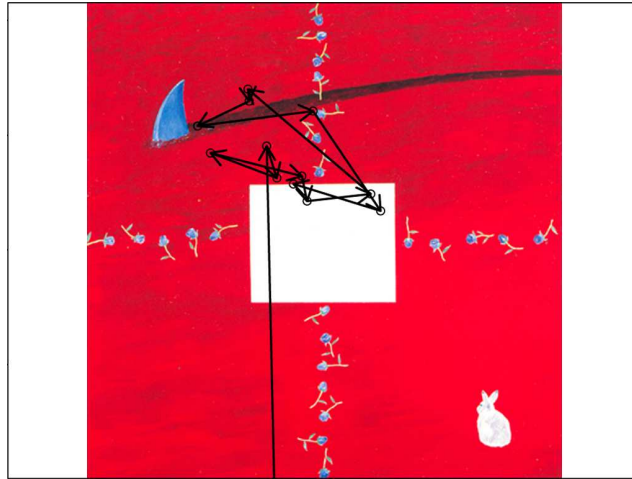
Silmänliiketutkimus on hyvä apuväline muiden tiedonkeruumenetelmien ohella, sillä se tuottaa kvantitatiivista dataa, joka täydentää muun muassa laadullisella tutkimusotteella kerättyä havaintoaineistoa. Katseenseurannalla saadaan tietoa niistäkin silmänliikkeistä, joita käyttäjä itse ei huomaa. Ongelmana silmänliiketutkimuksissa on vielä laitteiden herkkyys olosuhteille, mikä yleensä karsii koehenkilöitä lopullisesta aineistosta. Laitteet ovat myös teknisesti kömpelöitä, joten silmänliikkeiden tutkimisen luonnollisessa ympäristössä on hankalaa.

Tilastollisessa mielessä silmänliike on prosessi, johon liittyy satunnaisuutta. Tätä satunnaisuutta on luonnollista mallintaa tilassa ja ajassa määriteltynä stokastisena prosessina. Fiksaatioiden paikat kuvaruudulla ovat tiloja ja kestot aikoja. Oleellista on selvittää, ovatko siirtymät (hyppäykset tilasta toiseen) riippuvia kestoista. Tämän selvittämiseen tarvitaan tilastollisia malleja.

Tutkielmassani on tarkoitus löytää mahdollisimman yksinkertainen silmänliikeprosessia kuvaava tilastollinen malli kontrolloimaan satunnaisvaihtelua. Tätä mallia monimutkaistetaan tarpeen mukaan vastaamaan paremmin aineistoa. Mallien avulla saadaan uusia työkaluja aineiston tiivistämiseen ja tulkintaan: esimerkiksi simulointi mahdollistuu. Tilastollisten mallien avulla voidaan myös tarkastella jo käytettyjä menetelmiä ja todeta niiden toimivuus tai virheellisyys. Tässä työssä malleja sovitetaan yhden koehenkilön aineistoon, mutta menetelmät voidaan yleistää myös ryhmävertailuihin tai muihin mutkikkaampiin koeasetelmiin.

Tässä työssä silmänliikettä pyritään kuvaamaan muun muassa semi-Markov-prosessilla, jonka mukaan fiksaation kesto riippuu siitä, mihin katse kohdistuu fiksaation alkuhetkellä ja mihin se kohdistuu fiksaation päätyttyä. Toinen mielenkiintoinen prosessi on viivästetty prosessi. Tällöin fiksaation keston oletetaan riippuvan edellisestä tilasta ja siitä tilasta, missä ollaan. Fiksaation keston vaikuttaa siis näiden mallien mukaan joko tulevaisuus tai historia, mallista riippuen.

Tutkielman teoriaa sovelletaan aineistoon, jossa koehenkilöt ovat katselleet taidemaalauksia. Sovellusosuudessa huomataan, miksi soveltajat ovat tilastotieteilijälle tärkeitä. Vaikka teoria on kunnossa ja aineisto oikein mitattu, saatetaan silti törmätä odottamattomiin ongelmiin. Missä on vika, jos katse ei kuljekaakaan siellä missä sen pitäisi tutkijan oletusten mukaan kulkea? Katseen kulkua koehenkilön tarkastellussa maalauksessa voi nähdä kuvassa 1.1, johon on piirretty viidentoista fiksaation ketju. Tarkkaavainen lukija huomaa, että fiksaatioita on kuvassa kuitenkin vain kaksitoista: kolme ensimmäistä fiksaatiota on sattunut ruudun ulkopuolelle.



Kuva 1.1: Koehenkilön 15 ensimmäistä fiksaatiota ruudulla.

Tutkielman rakenne on seuraavanlainen: Aluksi luvussa 2 tutustutaan silmänliikkeeseen yleisesti sekä joihinkin sovellusalueisiin, joissa katseenseurantamenetelmää on käytetty. Tarkoituksena on saada käsitys siitä, mitä silmänliiketutkimuksen parissa on tähän mennessä saavutettu.

Luvussa 3 esitellään fiksaatioiden malleja ja prosesseja, jotka on jaoteltu riippuvuusrakenteen mukaisesti. Malleihin tutustutaan myös simuloidun esimerkin kautta. Jotta tästä voidaan edetä aineistoanalyysiä kohti, täytyy määrittellä tila-avaruus. Tilojen määrittelyyn perehdytään luvussa 4. Tilamäärittelyn jälkeen on mahdollista suorittaa estimointeja siirtymille ja fiksaatioiden kestoille. Luvussa 5 esitellään estimointimenetelmiä esitettyjen jakaumien parametreille.

Luvussa 6 tutustutaan taideaineistoon ja sovelletaan siihen esitettyä teoriaa. Aineisto on koottu kahdenkymmenen koehenkilön silmänliikkeistä heidän katsellessaan maalauksia tietokoneen ruudulta. Tutkimuksen kohteena on tässä tapauksessa vain yksi koehenkilö ja yksi maalaus. Mallin käyttömahdollisuuksia esitellään viimeisessä luvussa 7.

## 2 Silmänliike

Silmänliiketutkimuksessa pyritään analysoimaan kohdehenkilön reagoitua ärsykkeeseen tarkkailemalla silmän pupillin liikettä. Tutkimusvälineenä toimii silmänliikekamera, josta on useita versioita eri käyttötarkoituksiin. Kamera tallentaa tietoja silmänliikkeestä, esimerkiksi räpäytyksistä ja pupillien koosta ja tietenkin katseen kulusta. Analysoinnin kannalta tärkeimmät silmänliikkeen osat ovat pysähdykset eli *fixaatiot* ja siirtymät eli *sakkadit*. Katseen kohdistumisesta käytetään jatkossa nimitystä fiksoituminen.

Koeasetelma silmänliiketutkimuksessa liittyy joko staattiseen tai dynaamiseen ympäristöön. Staattisessa tapauksessa katseltava kohde pysyy paikallaan, dynaamisessa tilanteessa kohde liikkuu. Staattinen asetelma on tutkijan kannalta helpompi, sillä kohteen liikkuminen aiheuttaa omat ongelmansa silmänliikkeen analysoinnissa. Piirrettäessä katseen polkua jälkeenpäin tulee olla selvillä, mitä kuvaa tai taustaa milläkin hetkellä on katsottu.

Tutkimuskohteeksi voidaan valita joko havainnoitsija ja hänen ominaisuutensa, tai katseltava kohde. Jos koehenkilöiden tuloksia pyritään vertailemaan keskenään, on koehenkilöitä oltava useampi. Tällöin tutkimuskohteena on havainnoijat. Toinen vaihtoehto on vertailla eri kohteita, jolloin samalle koehenkilölle voidaan tehdä useita toistoja ja vertailla näitä keskenään. Tutkimuskohde ja koehenkilön rooli määrittävät tutkimustavan, joka voi olla esimerkiksi ryhmävertailu, diagnostiikka tai kohteen analysointi.

Ryhmävertailussa halutaan verrata kahden tai useamman ryhmän silmänliikkeitä toisiinsa. Tämän tutkimustavan toimivuutta voidaan kritisoida, sillä silmänliikkeessä on luultavasti suuri yksilöllinen vaihtelu, joten ryhmän sisäinen vaihtelu on myös suurta. Tutkimusten mukaan silmänliike vaihtelee ainakin eri tehtävien mukaan, esimerkiksi sisustussuunnittelija katsoo asunnossa eri asioita kuin murtovarkautta suunnitteleva. Muun muassa Baillet ja Keenan [1] ovat saaneet tutkimuksissaan selville, että koehenkilöt raportoivat asuntojen teksti- ja kuvauksista eri asioita riippuen heille annetusta perspektiivistä.

Diagnostisessa tarkastelussa kiinnostuksen kohteena on koehenkilön silmänliikkeiden mahdollinen poikkeavuus, jonka perusteella voidaan määrittellä esimerkiksi lukihäiriön tyypillisiä piirteitä. Tavoitteena on luoda populaatiotason normatiivinen malli, johon yksilön silmänliikkeitä verrataan.

Kohteen analyysissä kiinnostus kohdistuu siihen, mitä koehenkilö katselee. Halutaan siis tietää, mihin katse maalauksessa, verkkosivulla tai muussa kohteessa osuu. Nämä ovat markkinoinnin ja mainonnan kannalta tärkeitä analyyseja. Esimerkiksi lehden sivuilla olevilla mainoksilla on tarkasti harkitut paikat: kallein mainos on siellä, minne katse ensimmäisenä osuu, kun lehti avataan. Myös ravintolassa ruokalistan tuottavin annos on monesti sijoitettu strategisesti listan keskiosaan.

Seuraavaksi esitettävät termit ja tutkimustulokset perustuvat Raynerin [17] artikkeliin, jollei toisin mainita. Artikkelia pidetään keskeisenä lähteenä silmänliiketutkimuksen saralla.

## 2.1 Fiksaatiot

Fiksaatiot ovat silmänliikkeen pysähtyneitä jaksoja eli katseen paikallaan pysymistä. Kovin tarkasti katse ei paikallaan pysy, sillä silmänliikkeessä on aina pientä värinää, niin sanottua kohinaa. Tämän vuoksi laitteistot laskevat fiksaatioiden sijainnit yleensä keskiarvona pienessä aikaikkunassa niistä pikseleistä, joissa katse käy. Tässä puhutaan pikseleistä, koska silmänliikettä mitataan usein niin, että kohde esitetään tietokoneen ruudulla. Tarkan näön eli *fovean* alue on suhteellisen pieni, vain pari prosenttia näkökentästä, mutta siihen mahtuu silti useita pikseleitä.

Fiksaatioiden kestot ovat lyhyitä, yleensä korkeintaan puolen sekunnin mittaisia, siksi mittayksikkönä aineistoissa käytetään yleensä millisekunteja ( $1s = 1000ms$ ). Näköinformaatiota saadaan nimenomaan fiksaatioiden aikana, jolloin katse on kohdistunut kohteen johonkin osaan. Tämä ilmenee muun muassa Duchowskin [6] tutkimuksessa, jonka mukaan fiksaatiopisteiden katseluun kuluu 90 % katseluajasta, muu aika käytetään siirtymiin.

## 2.2 Sakkadit

Sakkadit ovat nopeita siirtymiä fiksaatiopisteistä toisiin. Niiden kestot ovat vieläkin lyhyempiä kuin fiksaatioiden, yleensä noin 10 % pysähdysten kestoista. Fiksoituminen eli katseen kohdistuminen mahdollistaa kohteen tarkan näkemisen ja sakkadin tehtävä on tuoda uusi kohde tarkan näön alueelle. Siirtymän aikana silmänliikkeen suunta ei muutu. Sakkadien pituudet kertovat katselutavasta: Pitkät sakkadit kertovat alueen silmäilystä, lyhyet puolestaan yksityiskohtaisemmasta tarkastelusta, jota tarvitaan esimerkiksi lukiessa. Sakkadin kesto riippuu luonnollisesti objektien etäisyydestä eli katseen kulkemasta matkasta. Suomenkielistä tekstiä lukiessa sakkadin pituus on noin 11 merkkiä (1.2 sanaa), eli pysähdyksiä tapahtuu keskimäärin sanan välein (Hyönä [11]).

## 2.3 Sovellusalueita ja tutkimustuloksia

Lukututkimus on yksi eniten katseenseurantaa tutkimusmenetelmänä käyttänyt sovellusala. Fiksaatioiden ja sakkadien lisäksi tutkimuksissa on kiinnitetty huomiota myös *regressioihin*, joilla tarkoitetaan takaisinpaluita. Regressiot ovat joko siirtymiä rivillä oikealta vasemmalle tai siirtymiä taaksepäin tekstissä jo luetulle alueelle. Noin 10–15 % sakkadeista on regressioita. Ne ovat tärkeitä lukututkimuksessa siksi, että ne kertovat silmänliikkeen poikkeamista. Jos lukeminen onnistuu hyvin, silmä liikkuu tekstissä koko ajan eteenpäin, eikä tee hyppäyksiä taaksepäin. Kun teksti on vaikeaa, fiksaatioiden kestot pitenevät, sakkadien pituudet lyhenevät ja regressioiden määrä kasvaa.

Lukututkimuksessa on kehitetty useita tunnuslukuja, joilla silmänliikeaineistoa on yritetty kuvata. Samoja ja samankaltaisia tunnuslukuja käytetään myös muilla sovellusaloilla. Sanakohtaisia tunnuslukuja ovat esimerkiksi sanan *keskimääräinen fiksaatioiden kesto*, *ensimmäisen fiksaation kesto* tai *fiksaatioiden kestojen summa*. Lukemisprosessia tutkiessa on pyritty useilla tavoilla mittaamaan kognitiivista proses-

sointiaikaa sanaa kohti. Ongelmana on kuitenkin se, että sanoja prosessoidaan myös silloin, kun niitä ei katsota eli kun niihin ei fiksoiduta. Tämän vuoksi on tehty useita tutkimuksia siitä, minkä kokoiselta alueelta katse informaatiota kerää tai kuinka kaukaa fiksaation ulkopuolelta sanoja tunnistetaan.

Katseen kiinnittymiskohtaa on myös tutkittu paljon. Lukijoilla on tapana kohdistaa ensimmäinen fiksaatio sanan alkuosan ja keskiosan puoliväliin. Paikkaa kutsutaan termillä *preferred viewing location* eli vapaasti suomennettuna *suosittu katsomiskohta*. Toinen fiksaatioiden määrään vaikuttava sanan osa nimeltään *optimal landing position* eli *optimaalinen katsomiskohta*. Se sijaitsee noin 1–2 kirjainta vasemmalle sanan keskikohdasta. Optimaalinen katsomiskohta on se kohta sanasta, jossa sana tunnustetaan nopeimmin, kun fiksaatio siihen kohtaan osuu. Mitä kauemmaksi fiksaatio tästä alueesta sijoittuu, sitä todennäköisempää on, että sanaan liittyy myös toinen fiksaatio. Noin 15 prosentissa sanoista esiintyy useampi fiksaatio peräkkäin eli niiden tunnistamiseen vaaditaan useampi kuin yksi fiksoituminen.

Eritasoisilla lukijoilla on eroa silmänliikkeissä. Nopeilla lukijoilla fiksaatiot ovat lyhyempiä, sakkadit pidempiä ja paluita eli regressioita on vähemmän kuin hitailla lukijoilla. Heikoilla lukijoilla, kuten lukihäiriöisillä ja aloittelevilla lukijoilla, fiksaatiot ovat pidempiä ja niitä on enemmän kuin normaaleilla lukijoilla. Lisäksi sakkadit ovat lyhyempiä ja regressioita on enemmän. Tutkimuksissa on huomattu, että lukihäiriöisten silmänliikkeet eroavat normaalien ihmisten silmänliikkeistä tekstiä lukiessa. Ei ole kuitenkaan saatu selkeää näyttöä siitä, ovatko lukihäiriöisten silmänliikkeet poikkeavia myös muissa kuin lukuprosesseissa. Silmänliikkeet eivät kuitenkaan ole syy lukuvaikeuksille, vaan ne ovat heijastuksia piilevistä ongelmista.

Nuotinlukututkimus (*sight-reading*) on hyvin samankaltaista kuin lukututkimus. Erona on lähinnä se, että nuotinnusta katsoessa regressioita on yleensä enemmän kuin lukiessa. Tämä johtuu yleensä siitä, että musiikin tuntija soittaessaan tai laullessaan lukee nuotteja hieman edeltävästi. Tällöin katse joutuu välillä palaamaan taaksepäin soitettavaan tai laulettavaan kohtaan. Nuotinlukututkimusta ovat tehneet muun muassa Penttinen, Huovinen, Mikkilä-Erdmann, Salonen, Silander ja Ylitalo [15].

Silmänliiketutkimusta on käytetty hyväksi myös simulaattoreiden yhteydessä. Duchowski [6] kertoo artikkelissaan lentosimulaattoreista ja autolla ajosta. Tutkimuksissa on mitattu reaktioaikoja ja koehenkilöiden suoriutumisenopeuksia. Jyväskylän yliopiston tutkimuskeskuksessa Agora Centerissä on puolestaan tekeillä tutkimus siitä, miten elektronisten laitteiden (kuten matkapuhelimen) käyttö vaikuttaa liikenteen seuraamiseen autolla ajon aikana.

Shimojo, Simion, Shimojo ja Scheier [18] tutkivat koehenkilöiden katseen liikkumista valintapäätöstä tehtäessä. Tutkimuksessa koehenkilöiden tuli valita kahdesta kasvosta viehättävämpi. Tulosten mukaan aluksi katse jakautui tasaisesti molempiin kasvoihin, mutta päätöksenteon lähestyessä katse kiinnittyi useammin kasvoihin, jotka valittiin miellyttävimmiksi. Päätöksentekotutkimuksia voidaan hyödyntää mainonnassa ja markkinoinnissa, jotka ovat tärkeitä silmänliiketutkimuksen sovellusalueita.

Duffy, Keir, Rayner, Rotello ja Stewart [7] saivat mainontatutkimuksessaan tukea aiemmille tuloksille, joiden mukaan mainoksia katsoessaan ihmisillä on tapana ensin lukea suurin teksti, sen jälkeen pienempi teksti ja lopuksi vasta katsoa kuvaa. Lisäksi



huomattiin, että annetulla tehtävällä on vaikutusta siihen, mihin mainoksessa kiinnitetään huomiota. Markkinoinnissa tärkeää on mainoksen sijoitus, jotta katsoja sen varmasti huomaa. Myös mainoksen koolla, väreillä ja ulkoasulla on vaikutusta siihen, tuleeko se havaituksi vai ei.

Muita silmänliiketutkimuksen tärkeitä sovellusalueita ovat esimerkiksi käytettävyysetutkimus ja käyttöliittymätutkimus. Katseenseurantaa käytetään hyväksi verkkosivujen suunnittelussa, katseella ohjattavien käyttöliittymien kehittämisessä ja esimerkiksi verkkokauppojen toimivuuden parantamisessa. Verkkokaupalle on oleellista, että tarvittavat toiminnot on esitetty selkeästi ja ne löytyvät sieltä, mistä katse niitä ensimmäisenä etsii.

Katseella ohjattavissa käyttöjärjestelmissä pyritään silmänliikkeellä valitsemaan tietokoneen toimintoja hiiren, näppäimistön tai kosketuksen sijaan. Katse liikkuu nopeammin kuin hiiren kursori, mutta hiirellä valitseminen on helpompaa. Katseella ohjattavissa käyttöjärjestelmissä valinta tapahtuu yleensä joko ajastimella tai erillisellä painikkeella: kohde tulee valituksi, jos siihen fiksoidutaan tarpeeksi kauan tai kohdetta katsottuaan käyttäjä katsoo seuraavaksi erityistä valitsemispainiketta. Katseella ohjaamisessa yleinen ongelma on niin sanottu Midaksen kosketus eli käyttöjärjestelmän herkkyys valita kohteita, joita käyttäjä ei tarkoita valita. Katsetta ei voi pysäyttää ja jättää käyttämättömäksi kuten hiiren kursoria. Fiksoituminen voi tapahtua vahingossa, ei aina tarkoituksellisesti. Katseenseurannan soveltamisesta käyttöliittymätutkimuksessa voi lukea lisää esimerkiksi artikkelista [10] (Hardoon, Shawe-Taylor, Ajanki, Puolamäki, Kaski).

Tässä tutkielmassa esitettävää teoriaa sovelletaan taideaineistoon. Taidemaalauksen analysointia silmänliikkeiden avulla on tehnyt muun muassa Locher [14]. Hän on ollut mukana kehittämässä kaksitasoista mallia, jonka mukaan kuvan tai maalauksen tutkimus aloitetaan yleissilmäyksellä, jossa saadaan kokonaiskuva rakenteesta ja semantiikasta. Tämän yleiskatsauksen pohjalta siirrytään toiseen vaiheeseen, jossa tarkastellaan ja analysoidaan lähemmin maalauksen kiinnostavia piirteitä esteettiseltä kannalta. Malli saa tukea Locherin tutkimuksessa, jossa koehenkilöt kuvailevat maalausta katsoessaan sitä. Tutkimuksen mukaan henkilöt alkoivat kuvata maalausta ääneen vasta kahden sekunnin tarkastelun jälkeen. Ennen puhetta tapahtui noin kuusi fiksaatiota, joten voitiin olettaa, että esteettinen katselutapahtuma alkaa holistisen käsityksen luomisella kuvasta.

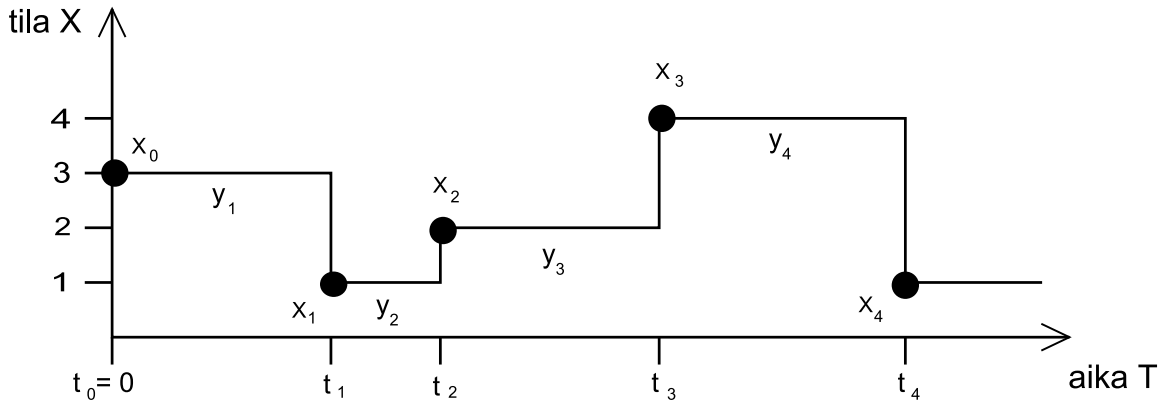
## 3 Fiksaatioiden mallinnus

### 3.1 Fiksaatioiden mallintaminen stokastisella prosessilla

Silmänliikettä kuvataan tässä tutkimuksessa stokastisella tila-aika-prosessilla. Stokastinen prosessi on joukko satunnaismuuttujia  $\{X_\alpha; \alpha \in I\}$ , missä  $I$  on jokin indeksijoukko. Ajassa kehittyville prosesseille käytetään myös merkintää  $X(t)$ , missä  $t$  merkitsee ajanhetkeä. Tila-aika-prosessin  $X(t)$  arvot ovat tila-avaruudesta ja parametrijoukko eli  $t$ :n arvojen joukko aika-avaruudesta.

Sakkadit ovat kestoiltaan todella lyhyitä, sillä ne kestävät vain noin kymmenesosan fiksaatioiden kestoista. Sakkadien aikana ei myöskään tapahdu juurikaan informaation keruuta. Jos ajatellaan nyt sakkadit ongelmanasettelun kannalta epäoleellisiksi ja jätetään ne tarkastelun ulkopuolelle, voidaan fiksaatiota ja niiden kestoja kuvata *hyppyprosessilla* (*jump process*). Käsitteellä hyppyprosessi tarkoitetaan sellaista stokastista prosessia, joka tekee diskreettejä hyppäyksiä. Prosessi lähtee jostain tilasta, pysyy siinä satunnaisen ajan ja sen jälkeen siirtyy seuraavaan tilaan. Oletetaan lisäksi, että paluuta samaan tilaan ei tapahdu ennen vierailua jossain muussa tilassa, jolloin fiksaation keston määrittely tulee yksikäsitteiseksi. *Siirtymällä* tarkoitetaan hyppäystä tilasta toiseen eli silmänliikkeessä katseen siirtymistä paikasta toiseen paikkaan.

Siirretään nyt spatiaalinen silmänliike yksiulotteiseen avaruuteen numeroimalla alueita kohteesta. Merkitään diskretisoitua prosessin tilaa muuttujalla  $X$ , siirtymän ajankohtaa muuttujalla  $T$  ja fiksaation kestoja muuttujalla  $Y$ . Numeroidaan spatiaaliset alueet luvuilla  $1, \dots, k$ , jolloin  $x_i \in (1, \dots, k)$  ovat tila-avaruuden mahdolliset arvot. Nämä sijoitetaan nyt kuvaajan y-akselille, x-akselille sijoitetaan aika. Parametrijoukon eli ajanhetkien mahdollisia arvoja ovat positiiviset reaaliluvut,  $t_i \in \mathbb{R}_+$ . Myös kestojen joukko  $y_{i+1} \in \mathbb{R}_+$  kuuluu parametrijoukkoon, sillä  $y_{i+1} = t_{i+1} - t_i$ . Tässä  $t_{i-1}$  tarkoittaa  $i$ :nnen fiksaation alkamisajankohtaa; sitä kutsutaan *fiksaatiohetkeksi*. Prosessi alkaa hetkestä  $t_0 = 0$ . Merkintä  $y_i$  tarkoittaa fiksaation  $i$  kestoja. Merkintä  $x_i$  tarkoittaa tilaa, jossa ollaan aikavälillä  $[t_i, t_{i+1})$ . Huomaa, että aika alkaa hetkestä  $t_0$  ja ensimmäinen tila on  $x_0$ , mutta ensimmäinen fiksaation kesto on  $y_1$ . Kuvassa 3.1 havainnollistetaan prosessin merkintöjä.



Kuva 3.1: Hyppyprosessiesitys, jossa muuttujat merkittyinä.

Määritellään seuraavaksi hyppyprosessi. Olkoon  $t_0 < t_1 < \dots$  järjestetty numeroituva joukko positiivisia reaalinumeroita, jotka ovat satunnaisia. Hyppyprosessi on

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n I_{[t_n, t_{n+1})}(t), \quad \text{missä}$$

$$I_{[t_n, t_{n+1})}(t) = \begin{cases} 1 & \text{kun } t \in [t_n, t_{n+1}) \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Fiksaation kesto on tällöin

$$y_{n+1} = \int_0^{\infty} I_{[t_n, t_{n+1})}(t) dt$$

ja siirtymä tilasta  $x_n$  tilaan  $x_{n+1}$  on  $(X(t_n), X(t_{n+1}))$ . Hyppäys tapahtuu hetkellä  $t$ , mikäli on määritelty

$$X(t_+) = \lim_{u \downarrow t} X(u),$$

$$X(t_-) = \lim_{u \uparrow t} X(u)$$

ja  $X(t_+) \neq X(t_-)$ .

Kestot ja siirtymät yhdistämällä voidaan muodostaa edellä määritelty hyppyprosessi. Nyt  $X(t)$  kertoo missä tilassa ollaan hetkellä  $t$ . Tällöin  $X([0, t])$  kertoo prosessin historian alkuhetkestä hetkeen  $t$  asti. Prosessi sisältää siis tiedot siitä, mihin tilaan hypätään kullakin fiksaatiohetkellä ja kuinka kauan tässä tilassa viivytään. Siirtymien hetket eli fiksaatiohetket  $\{t_1, \dots, t_n\}$  muodostavat yksiulotteisen pisteprosessin.

Silmänliikkeen hyppyprosessi koostuu siis kahdesta tekijästä, fiksaatioiden kestoista ja siirtymistä. Siirtymät voivat olla toisistaan riippumattomia tai ne voivat riippua lähtötilasta eli ne ovat Markovin ketjuja, mutta myös yleisemmät riippuvuusrakenteet ovat mahdollisia. Kestojen jakaumat voivat olla samat kaikille tiloille tai ne voivat riippua lähtötilasta, seuraavasta tilasta tai lähtötilaa edeltävästä tilasta. Näiden ominaisuuksien perusteella muodostetaan fiksaatioiden malleja ja fiksaatiohetkiä kuvaavia pisteprosesseja. Seuraavat teoriat perustuvat Gillin [8] artikkeliin ja Lindseyn [13], Coxin ja Ishamin [3] sekä Coxin ja Lewisin [4] teoksiin.

Seuraavaksi esitettävillä malleilla siirtymät ovat joko riippumattomia toisistaan tai niillä on Markov-ominaisuus. Fiksaatioiden kestojen riippuvuus siirtymistä vaihtelee. Ensimmäisessä mallissa kestot eivät riipu siirtymistä. Toisessa mallissa lisätään kestoille riippuvuus lähtötilasta. Viimeisissä malleissa kestot riippuvat lähtötilasta ja seuraavasta tilasta tai edellisestä tilasta.

### 3.2 Kestot riippumattomia siirtymistä

Tarkastellaan aluksi yksinkertaista tapausta, jossa siirtymät ja kestot ovat toisistaan riippumattomia. Kestot ja siirtymät voivat kuitenkin riippua tilasta, jossa ollaan.

Olkoon  $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$  jono satunnaismuuttujia, jotka saavat arvoja diskreetissä tila-avaruudessa  $S = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ , missä  $k \in \mathbb{N}_+$ . Ilmaisun  $X_n = i$  tarkoittaa,

että prosessi on ajanhetkellä  $t_n$  tilassa  $i$ , ja ilmaisu  $X_{n+1} = j$  uutta tilaa  $j$ , johon siirytään ajanhetkellä  $t_{n+1}$ . Fiksaatioiden kesto tilassa  $i$  olkoon  $Y_{i+1}$ . Huomaa edelleen, että satunnaismuuttujaa  $X_i$  eli tilaa välillä  $[t_i, t_{i+1})$  vastaava fiksaation kesto on  $Y_{i+1}$ .

### 3.2.1 Homogeenisten fiksaatioiden malli

Yksinkertaisin malli fiksaatioille on *homogeenisten fiksaatioiden malli*, jossa fiksaatioiden siirtymät ja kestot ovat toisistaan riippumattomia, ja jokaisella hetkellä  $n$  tila valitaan joukosta  $S$  riippumatta siirtymien historiasta. Merkintöjen lyhentämiseksi määritellään nyt  $\mathbf{X}_{n-1} = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$  ja  $\mathbf{x}_{n-1} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ . Tällöin siirtymien todennäköisyyksiä kuvaavat siirtymätodennäköisyydet ovat

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) \\ = P(X_{n+1} = j), \end{aligned}$$

missä  $\mathbf{Y}_n = (Y_1, \dots, Y_n)$  ja  $\mathbf{y}_n = (y_1, \dots, y_n)$ . Siis  $\mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}$  ja  $\mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n$  kertovat prosessin kulun hetkeen  $t_n$  asti ennen siirtymää  $x_n$ . Käytetään todennäköisyydelle  $P(X_{n+1} = j)$  vastaisuudessa lyhyempää merkintää  $p_j(n)$ . Jos siirtymät ovat homogeenisia, niin siirtymätodennäköisyys on  $p_j$  kaikille  $n > 0$ .

Tehdään oletus, että myöskään kestot eivät riipu lähtötilasta. Oletetaan, että tiedetään prosessin kulku fiksaatiohetkeen  $t_n$  saakka. Tällöin siirtymien ja kestojen ehdollinen yhteisjakauma ehdolla että prosessin historia tunnetaan hetkeen  $t_n$  saakka, on

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j, Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) \\ = P(X_{n+1} = j \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i)P(Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) \\ = P(X_{n+1} = j)P(Y_{n+1} \leq y) \\ = p_j(n)F_{n+1}(y), \end{aligned}$$

missä siis  $P(Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) = F_{n+1}(y)$ . Tässä  $F_{n+1}(y)$  on fiksaation  $X_n$  keston  $Y_{n+1}$  kertymäfunktio. Jos kestot ovat homogeenisia, niin kestojen jakauma on sama jokaisella hetkellä  $n > 0$ .

Oletetaan homogeeninen tilanne. Yhteisjakauma jonolle  $X_0, Y_1, X_1, Y_2, \dots$  on tällöin

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, Y_1 \leq y_1, \dots, Y_n \leq y_n) \\ = P(X_0 = x_0) \prod_{t=1}^n P(X_t = x_t)P(Y_t \leq y_t) \\ = p_0 \prod_{t=1}^n p_{x_t} F(y_t), \end{aligned}$$

missä  $F(y_t)$  on fiksaation keston kertymäfunktio parametrivektorilla  $\mu$ . Tästä saadaan derivoimalla uskottavuusfunktio

$$L_{yht}(p, \mu) = p_0 \prod_{t=1}^n p_{x_t} f(y_t; \mu).$$

Fiksaatioiden kestojen ajatellaan olevan tapausten välisiä aikoja pisteprosessissa. Jos nyt fiksaatioiden kestot ovat riippumattomia ja noudattavat eksponenttijakaumaa, niin fiksaatiohetkiä voidaan kuvata *Poisson-prosessilla*, joka on yksinkertaisin pisteprosessi. Poisson-prosessi on jatkuvassa ajassa määritelty stokastinen prosessi ja ainoa jatkuva-aikainen prosessi, jolla on muistittomuusominaisuus.

*Homogeeniselle Poisson-prosessille* fiksaatiohetkien väliset ajat eli fiksaatioiden kestot ovat keskenään riippumattomia ja noudattavat eksponenttijakaumaa

$$f(t; \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

missä  $\lambda$  on vakio. *Epähomogeenisessa Poisson-prosessissa*  $\lambda$  riippuu ajanhetkestä  $t$ , joten kestot noudattavat jakaumaa

$$f(t; \lambda_t) = \lambda_t e^{-\lambda_t t}, \quad t > 0.$$

Jos fiksaatioiden kestojen jakauma voi olla muu kuin eksponenttijakauma ja ne ovat edelleen riippumattomia siirtymistä, on kyseessä *uusitumisprosessi*. Uusiutumisprosessiksi kutsutaan sellaista prosessia, jossa tapahtumien väliset ajat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Yleisimpiä tapausten välisten aikojen jakaumia ovat gammajakauma, Weibull-jakauma ja sekoitettu eksponenttijakauma, jotka ovat tuttuja elinaikamallinnuksesta. Uusiutumisprosessi on eräs Poisson-prosessin yleistys. Uusiutumisprosessi palauttaa kestojen analyysin elinaikamallinnukseen.

### 3.2.2 Lähtötilasta riippuvien fiksaatioiden malli

Kun siirtymään vaikuttaa tila, jossa ollaan, niin mallissa on mukana riippuvuutta ja siirtymät muodostavat tällöin *Markovin ketjun*. Olkoon nyt siirtymillä Markovominaisuus eli lähtötila vaikuttaa siihen, mihin siirrytään seuraavaksi. Kestot ja siirtymät ovat kuitenkin edelleen riippumattomia toisistaan. Siirtymätodennäköisyydet ovat

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) \\ = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i). \end{aligned}$$

Tässäkin todennäköisyydelle  $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$  käytetään lyhyempää merkintää  $p_{ij}(n)$ , vastaavasti kuten edellä.

Jos siirtymätodennäköisyydet  $p_{ij}(n)$  eivät riipu  $n$ :stä, sanotaan ketjua homogeeniseksi. Tässä tapauksessa Markovin ketjun uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned} L_{siirt}(p) &= P(X_0 = x_0) \prod_{t=1}^n P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}) \\ &= p_0 \prod_{t=1}^n p_{x_{t-1}x_t} = p_0 \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^k p_{ij}^{n_{ij}}, \end{aligned}$$

missä  $n_{ij}$  on tilasta  $i$  tilaan  $j$  siirtymien lukumäärä. Parametri  $k$  tarkoittaa tilojen määrää.

Lähtötilasta riippuvien fiksaatioiden mallille siirtymien ja kestojen ehdollinen yhteisjakauma ehdolla, että prosessin historia tunnetaan hetkeen  $t_n$  asti, on

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = j, Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) \\ &= P(X_{n+1} = j \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i)P(Y_{n+1} \leq y \mid X_n = i, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) \\ &= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)P(Y_{n+1} \leq y \mid X_n = i) \\ &= p_{ij}(n)F_i^{n+1}(y), \end{aligned}$$

missä edelleen  $P(Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) = F_i^{n+1}(y)$ , ja  $F_i^{n+1}(y)$  on keston kertymäfunktio parametrivektorilla  $\mu_i^{n+1}$ , kun lähtötila on  $i$ . Homogeenisessa tapauksessa kestojen jakauma ei riipu ajanhetkestä  $n$ . Mikäli siirtymät ovat homogeenisia, niin  $p_{ij}(n) = p_{ij}$  kaikilla  $n > 0$  ja  $F_i^{n+1}(y) = F_i(y)$ .

Olkoon tilanne homogeeninen. Koska edellä mainittujen mallien tapauksissa siirtymät ja kestot ovat toisistaan riippumattomia, voidaan ne mallintaa erikseen. Tämän vuoksi fiksaatiohetkiä voidaan molemmissa tapauksissa kuvata pisteprosessilla, joka ei ota huomioon mistä siirrytään ja minne siirrytään. On muistettava kuitenkin, että kestot voivat riippua tilasta, jossa ollaan.

Kun siirtymien lisäksi kestot riippuvat lähtötilasta, voidaan malli kirjoittaa todennäköisyyksien avulla. Yhteisjakauma tiloille  $X$  ja kestojen  $Y$  kertymäfunktioille on

$$\begin{aligned} & P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, Y_1 \leq y_1, \dots, Y_n \leq y_n) \\ &= P(X_0 = x_0) \prod_{t=1}^n P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1})P(Y_t \leq y_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}) \\ &= p_0 \prod_{t=1}^n p_{x_{t-1}x_t} F_{x_{t-1}}(y_t), \end{aligned}$$

missä  $F_{x_{t-1}}(y_t)$  on kestojen jakauman kertymäfunktio parametrivektorilla  $\mu_i$ . Järjestetään kestojen joukko  $\{y_i, i = 1, \dots, n\}$  siten, että ensimmäisenä ovat kestot, joiden lähtötila on 1, seuraavana ovat kestot, joiden lähtötila on 2 ja niin edelleen. Kestoja, joiden lähtötilana on tila  $i$  olkoon  $m_i$  kappaletta. Näin saadaan uusi permutaatio kestoille,  $(\tilde{y}_{11}, \dots, \tilde{y}_{1m_1}, \tilde{y}_{21}, \dots, \tilde{y}_{2m_2}, \tilde{y}_{31}, \dots, \tilde{y}_{3m_3}, \dots, \tilde{y}_{k1}, \dots, \tilde{y}_{km_k})$ . Tällöin edellä esitetty yhteisjakauma voidaan kirjoittaa uudelleen

$$\begin{aligned} & p_0 \prod_{t=1}^n p_{x_{t-1}x_t} F_{x_{t-1}}(y_t) \\ &= p_0 \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^k p_{ij}^{m_{ij}} \prod_{s=1}^{m_i} F_i(\tilde{y}_{is}). \end{aligned}$$

Tästä saadaan derivoimalla uskottavuusfunktio kestoille ja se on

$$L_{yht}(p, \mu) = p_0 \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^k p_{ij}^{m_{ij}} \prod_{s=1}^{m_i} f_i(\tilde{y}_{is}; \mu_i).$$

Mikäli fiksaation keston jakauma  $F_i$  on eksponenttijakauma parametrilla  $\alpha_i$ , on prosessi *jatkuvaa-aikainen Markovin prosessi*.

### 3.3 Kestot riippuvia siirtymistä

#### 3.3.1 Lähtö- ja lopputiloista riippuvien fiksaatioiden malli

Jos fiksaatioiden kestot ja siirtymät ovat toisistaan riippuvia, yksinkertainen malli on *lähtö- ja lopputiloista riippuvien fiksaatioiden malli* eli *semi-Markov-malli*. Tässä mallissa fiksaation kesto tilassa  $i$  riippuu sekä tästä lähtötilasta että seuraavasta tilasta  $j$ .

Oletetaan, että siirtymien ja kestojen ehdollinen yhteisjakauma ehdolla, että prosessin historia tunnetaan hetkeen  $t_n$  asti, on

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = j, Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) \\ &= P(X_{n+1} = j, Y_{n+1} \leq y \mid X_n = i) \\ &= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)P(Y_{n+1} \leq y \mid X_n = i, X_{n+1} = j) \\ &= p_{ij}(n)F_{ij}^{n+1}(y), \end{aligned}$$

missä  $P(Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) = F_{ij}^{n+1}(y)$ . Mikäli tilanne on homogeeninen, niin keston kertymäfunktio on sama kaikilla  $n > 0$  ja  $p_{ij}(n) = p_{ij}$ . Nyt fiksaatioiden keston jakaumia ja siirtymätodennäköisyyksiä ei voida kirjoittaa tulomuodossa. Sen sijaan tuloavaruudessa jonolla  $\{(X_n, Y_{n+1})\}$  on Markov ominaisuus.

Semi-Markov-prosessissa oletetaan, että on olemassa  $k(k-1)$  siirtymää, kun siirtymiä tilojen sisällä ei tapahdu. Siirtymiin liittyvät kestot ovat riippumattomia, mutta niistä jokaisella voi olla oma jakaumansa kuvattuna tiheysfunktiolla  $f_{ij}$ , missä  $i, j = \{1, \dots, k\}$ . Siis fiksaatioiden kestot riippuvat sekä tilasta missä ollaan että tilasta mihin ollaan seuraavaksi menossa.

Oletetaan siirtymien ja kestojen homogeenisuus. Tilojen  $X$  ja kestojen  $Y$  kertymäfunktioiden yhteisjakauma on tällöin

$$\begin{aligned} & P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, Y_1 \leq y_1, \dots, Y_n \leq y_n) \\ &= P(X_0 = x_0) \prod_{t=1}^n P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1})P(Y_t \leq y_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t) \\ &= P(X_0 = x_0) \prod_{t=1}^n p_{x_{t-1}x_t} P(Y_t \leq y_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t) \\ &= p_0 \prod_{t=1}^n p_{x_{t-1}x_t} F_{x_{t-1}x_t}(y_t) \\ &= p_0 \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^k p_{ij}^{m_{ij}} \prod_{s=1}^{m_{ij}} F_{ij}(\tilde{y}_{ijs}), \end{aligned}$$

missä kestojen joukko  $\{y_i, i = 1, \dots, n\}$  on permutoitu uudelleen niin, että on saatu joukko  $(\tilde{y}_{121}, \dots, \tilde{y}_{12m_{12}}, \dots, \tilde{y}_{k,k-1,1}, \dots, \tilde{y}_{k,k-1,m_{k,k-1}})$ . Tässä joukossa ensimmäisenä ovat tilan 1 kestot, kun seuraava tila on 2, seuraavana tilan 1 kestot, kun seuraava tila on 3 ja niin edelleen. Huomaa, että siirtymiä samojen tilojen välillä ei ole, esimerkiksi

$m_{11} = 0$ , joten ei ole olemassa tilan 1 kestoja, joille edellinen tila olisi 1. Kestojen lukumäärät  $m_{ij}$  saadaan siirtymien lukumäärien matriisista. Semi-Markov-prosessin uskottavuusfunktio saadaan nyt derivoimalla

$$L_{yht}(p, \mu) = p_0 \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^k p_{ij}^{m_{ij}} \prod_{s=1}^{m_{ij}} f_{ij}(\tilde{y}_{ijs}; \mu_{ij}).$$

Semi-Markov-prosessi on Markovin prosessin ja uusiutumisprosessin yleistys. Uusiutumispromessit ovat eräs erikoistapaus yksitilaisesta semi-Markov-prosessista. Siis fiksaatiohetket ovat uusiutumispromessi, kun ei oteta huomioon, mihin siirrytään. Semi-Markov-prosessia voidaan myös pitää yleistyksenä Markovin prosessista, jossa tietyssä tilassa vietetty aika ei ole eksponenttisesti jakautunut.

### 3.3.2 Viivästetty malli

Jos fiksaation keston vaikuttaa lähtötila sekä lähtötilaa edeltävä tila, voidaan puhua *viivästetystä mallista*. Selkeyden vuoksi merkitään edellistä tilaa kirjaimella  $h$ , kun lähtötilaa on merkitty kirjaimella  $i$ . Siirtymät ovat edelleen riippuvia tilasta, jossa ollaan. Tällöin siirtymien ja kestojen ehdollinen yhteisjakauma ehdolla, että prosessin historia tunnetaan hetkeen  $t_n$  saakka, on

$$\begin{aligned} & P(X_n = i, Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{X}_{n-2} = \mathbf{x}_{n-2}, X_{n-1} = h, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) \\ &= P(X_n = i, Y_{n+1} \leq y \mid X_{n-1} = h) \\ &= P(X_n = i \mid X_{n-1} = h)P(Y_{n+1} \leq y \mid X_{n-1} = h, X_n = i) \\ &= p_{hi}(n)F_{hi}^{n+1}(y), \end{aligned}$$

missä  $P(Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{X}_{n-2} = \mathbf{x}_{n-2}, X_{n-1} = h, X_n = i, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) = F_{hi}^{n+1}(y)$ . Homogeenisessä tilanteessa kertymäfunktio on sama kaikilla  $n > 0$  ja  $p_{hi}(n) = p_{hi}$ .

Viivästetyssä prosessissa fiksaation keston vaikuttaa sen hetkisen tilan  $i$  lisäksi edellinen tila  $h$ , mutta ei seuraava tila  $j$ . Verrattuna semi-Markov-prosessiin, siirtymätodennäköisyydet pysyvät nyt samoina, mutta kestojen jakaumien parametrit ovat erilaiset.

Olkoot siirtymät ja kestot homogeenisia. Viivästetyn prosessin tilojen  $X$  ja kestojen  $Y$  kertymäfunktioiden yhteisjakauma saadaan todennäköisyyksien tulona

$$\begin{aligned} & P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, Y_1 \leq y_1, \dots, Y_n \leq y_n) \\ &= P(X_0 = x_0, X_1 = x_1) \prod_{t=2}^n P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1})P(Y_t \leq y_t \mid X_{t-2} = x_{t-2}, X_{t-1} = x_{t-1}) \\ &= P(X_0 = x_0, X_1 = x_1) \prod_{t=2}^n p_{x_{t-1}x_t} P(Y_t \leq y_t \mid X_{t-1} = x_{t-2}, X_{t-2} = x_{t-1}) \\ &= p_0 p_{x_0x_1} \prod_{t=2}^n p_{x_{t-1}x_t} F_{x_{t-2}x_{t-1}}(y_t) \end{aligned}$$



$$= p_0 \prod_{h=1}^k \prod_{i=1}^k p_{hi}^{m_{hi}} \prod_{s=1}^{m_{hi}} F_{hi}(\tilde{y}_{his}),$$

missä  $F_{hi}(\tilde{y}_{his})$  on fiksaation keston kertymäfunktio parametrivektorilla  $\mu_{hi}$ . Joukko  $\{\tilde{y}_{ijs}, i, j = 1, \dots, k, s = 1, \dots, m_{hi}, i \neq j, j \neq s\}$  on saatu kuten edellä, mutta nyt on permutoitu joukkoa  $(y_2, \dots, y_n)$ . Tämä johtuu siitä, että kesto  $y_1$  on täytynyt jättää pois, sillä mallin mukaisesti keston pitää riippua lähtötilasta ja edellisestä tilasta, mutta kestolle  $y_1$  on olemassa vain lähtötila. Uskottavuusfunktio saadaan derivoimalla,

$$L_{yht}(p, \mu) = p_0 \prod_{h=1}^k \prod_{i=1}^k p_{hi}^{m_{hi}} \prod_{s=1}^{m_{hi}} f_{hi}(\tilde{y}_{his}; \mu_{hi}).$$

Mahdollinen prosessi silmänliikkeen kuvaamiseen on myös sellainen, jossa fiksaatioiden kestot riippuvat kolmesta tilasta: edellisestä, nykyisestä ja seuraavasta. Tässä tutkimuksessa ei perehdytä näin monimutkaiseen malliin, sillä aineistossa ei riittäisi siirtymiä, kun mahdollisia siirtymäkolmikkoja on niin paljon.

### 3.4 Homogeenisen prosessin luonnehdintoja

Silmänliikeprosessin malliin liittyy kaksi oleellista matriisia: siirtymien lukumäärien odotusarvojen matriisi ja siirtymätodennäköisyyksien matriisi. Siirtymien lukumäärien odotusarvojen matriisissa lukumäärät ovat aikaväliltä  $[0, 1]$ . Tällöin matriisi kertoo eri tilojen välisten siirtymien lukumäärät, siis niiden siirtymien lukumäärät, jotka ovat tapahtuneet tilasta  $i$  tilaan  $j$  aikavälillä  $[0, 1]$ . Siirtymätodennäköisyyksien matriisi saadaan muodostettua tämän matriisin avulla. Olkoon tiloja  $k$  kappaletta. Siirtymien lukumäärien odotusarvojen matriisi on

$$M = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1k} \\ m_{21} & 0 & m_{23} & \dots & m_{2k} \\ m_{31} & m_{32} & 0 & \dots & m_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & m_{k2} & m_{k3} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että siirtymä tilasta samaan tilaan on mahdoton, jolloin  $m_{ii} = 0$  kaikille  $i = (1, \dots, k)$ . Tästä saadaan siirtymätodennäköisyydet  $p_{ij}$  ehdollistamalla rivisummilla  $m_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}$  eli

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} = \frac{m_{12}}{m_1} & \dots & p_{1n} = \frac{m_{1n}}{m_1} \\ p_{21} = \frac{m_{21}}{m_2} & 0 & \dots & p_{2n} = \frac{m_{2n}}{m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} = \frac{m_{n1}}{m_n} & p_{n2} = \frac{m_{n2}}{m_n} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

missä  $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, n$ .

*Stationaarisuudella* tarkoitetaan sitä, että prosessin rakenne pysyy samana, vaikka siirrytään aika-akselilla eri kohtaan. Siis prosessi voi alkaa muullakin hetkellä kuin hetkellä nolla. Jos siirtymätodennäköisyyksille pätee  $p_{ij}(s, t) = p_{ij}(|t - s|)$ , missä  $t$  ja  $s$  ovat erillisiä ajanhetkiä, sanotaan että prosessilla on stationaariset siirtymätodennäköisyydet (Guttorp [9]). Stationaarisuushypoteesi siirtymätodennäköisyyksille

$$H_0 : P_t = P, \text{ ts. } p_{ij}(t) = p_{ij} \quad \forall t \geq 0, \text{ kaikille } i, j.$$

Aikahomogeenisuushypoteesi kestojen jakaumille on

$$H_0 : f_t(y) = f(y) \quad \forall t \geq 0.$$

Silmänliikeaineiston tapauksessa stationaarisuus tarkoittaa, että siirtymätodennäköisyydet ja fiksaatioiden kestojen jakaumat pysyvät samoina koko ajanjakson. Stationaarisuus ei voi olla ennalta asetettu vaatimus: esimerkiksi taideaineiston kohdalla on syytä epäillä, että prosessi ei ole stationaarinen. Perustellaan tätä sillä, että ihminen luultavasti silmäilee kohdetta eri tavalla eri aikoina. Aluksi katse saattaa kiertää nopeasti koko näkyvillä olevan alueen, sen jälkeen katse pysähtyy kiinnostaviin kohteisiin pidemmäksi aikaa, ja lopuksi ihminen ehkä kyllästyy näkemäänsä ja katse alkaa harhailla. Stationaarisuutta voi testata esimerkiksi jakamalla aineisto ajan suhteen osiin ja tutkimalla, ovatko osat keskenään samanlaisia.

*Symmetrisyyden* testauksessa tutkitaan, ovatko edellä mainittujen matriisit symmetrisiä diagonaalien suhteen. Onko siirtymiä tilasta  $i$  tilaan  $j$  keskimäärin saman verran kuin tilasta  $j$  tilaan  $i$ ? Symmetrisyyshypoteesit ovat siirtymätodennäköisyyksille

$$\begin{aligned} H_0 : p_{ij} &= p_{ji} & \forall i, j, i \neq j \\ H_1 : p_{ij} &\neq p_{ji} & \forall i, j, i \neq j \end{aligned}$$

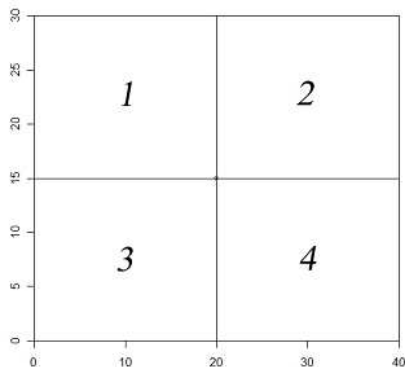
ja siirtymien lukumäärien odotusarvojen matriisille

$$\begin{aligned} H_0 : m_{ij} &= m_{ji} & \forall i, j, i \neq j \\ H_1 : m_{ij} &\neq m_{ji} & \forall i, j, i \neq j. \end{aligned}$$

Siirtymien lukumäärien odotusarvojen matriisi  $M$  on aina homogeeninen marginaalien suhteen: lähtöjä tilasta  $i$  tapahtuu saman verran kuin saapumisia tilaan  $i$ , poikkeamia tapahtuu vain ketjun ensimmäisen ja viimeisen tilan kohdalla. Kun siirtymien lukumäärien odotusarvojen matriisi ehdollistetaan rivimarginaalilla, saadaan siirtymätodennäköisyyksien matriisi. Tämä matriisi ei enää olekaan homogeeninen marginaalien suhteen, sillä rivien tulee summautua ykkösiksi, mutta sarakkeiden ei. Matriisin symmetrisyyden testauksessa on siis otettava huomioon marginaalien mahdollinen epähomogeenisuus. Siirtymätodennäköisyysmatriisin symmetrisyys tarkoittaa, että todennäköisyys siirtyä tilasta  $i$  tilaan  $j$  on sama kuin todennäköisyys siirtyä tilasta  $j$  tilaan  $i$ .

### 3.5 Esimerkki

Tutustutaan edellä esitettyyn teoriaan esimerkin kautta. Laskennat on tässä luvussa sekä jatkossa suoritettu R-ohjelmalla [16]. Oletetaan, että kuviteltu ruutu on jaettu neljään osaan eli tilaan. Yksinkertainen tilajako on nähtävissä kuvassa 3.2. Tilavaruuus on  $S=\{1,2,3,4\}$ .



Kuva 3.2: Kuvan osittaminen neljään tilaan.

Siirtymämatriisissa  $P$  ovat todennäköisyydet siirtyä tilasta  $i$  tilaan  $j$ . Diagonaalilla olevat nollat varmistavat sen, että samassa tilassa ei pysytä kuin yhden fiksaation ajan. Ollaan siis kiinnostuneita tilanteista, joissa tila vaihtuu. Olkoon siirtymätodennäköisyysmatriisi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.500 & 0.375 & 0.125 \\ 0.250 & 0 & 0.625 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisista nähdään, että tiloihin 2 ja 3 siirrytään todennäköisimmin, kun taas tiloihin 1 ja 4 siirtyminen on epätodennäköisempää.

Siirtymämatriisista voidaan laskea tasapainojakauma, joka kertoo, mikä on todennäköisyys siirtyä tilaan  $j$  mistä tahansa tilasta  $i$ , kun simulointeja on tehty  $n$  kappaletta ja  $n$  on suuri. Tässä tapauksessa tasapainojakauma on likimain

$$\pi_j = [0.185 \quad 0.308 \quad 0.356 \quad 0.151].$$

Tasapainojakauman laskemisen voi tehdä monella tavalla, eräs tapa on määrittää se globaalista tasapainoehdosta ominaisarvojen avulla

$$\pi P = \pi.$$

#### Malli 1

Homogeenisten fiksaatioiden mallissa siirtyminen tilaan  $j$  ei riipu tilasta  $i$  eli

$$P(X_{n+1} = j \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j) = p_j.$$

Oletetaan nyt, että fiksaatiohetket ovat pisteprosessi yksiulotteisessa ajassa ja tämä pisteprosessi Poisson-prosessi. Tällöin simuloidaan fiksaatioiden kestot  $Y$  eksponenttisesta jakaumasta,  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Oletetaan vielä, että prosessi on homogeeninen eli kestot eivät riipu tilasta, jossa ollaan. Tällöin eksponenttijakaumassa parametri  $\lambda$  on sama kaikille tiloille  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Eksponenttijakauman tiheysfunktio on tässä tapauksessa

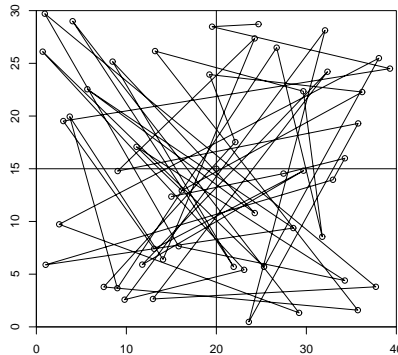
$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad \lambda > 0,$$

missä keskimääräinen kesto on  $1/\lambda$ .

Konstruoidaan 50 simulaatiota mallista, kun siirtymätodennäköisyysmatriisiin  $P$  kaikki rivit ovat samoja, mutta diagonaalilla on nolliä,

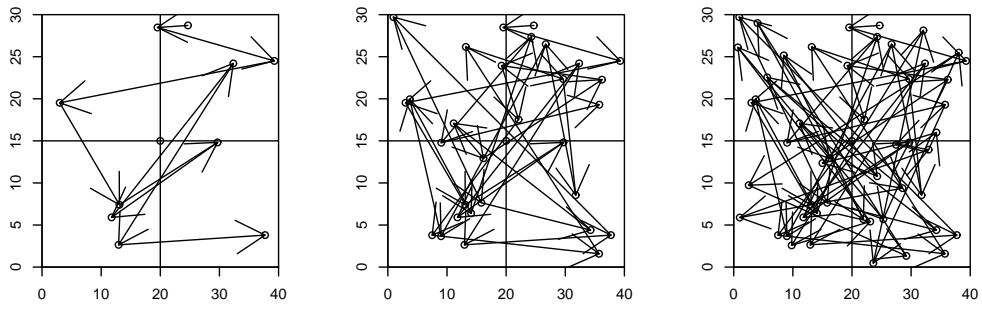
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.333 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & 0 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 & 0 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 & 0 \end{bmatrix}.$$

Spatiaalinen esitys simulaatioista on nähtävissä kuvassa 3.3. Kuvan piirroksessa fiksaation paikka tilassa on generoitu kahden tasajakauman avulla, jotta simulaatiosta saadaan selkeä. Esimerkiksi tilassa 1 olevan fiksaation koordinaatit on simuloitu  $\text{Tas}(0, 20)$  ja  $\text{Tas}(15, 30)$  jakaumista.

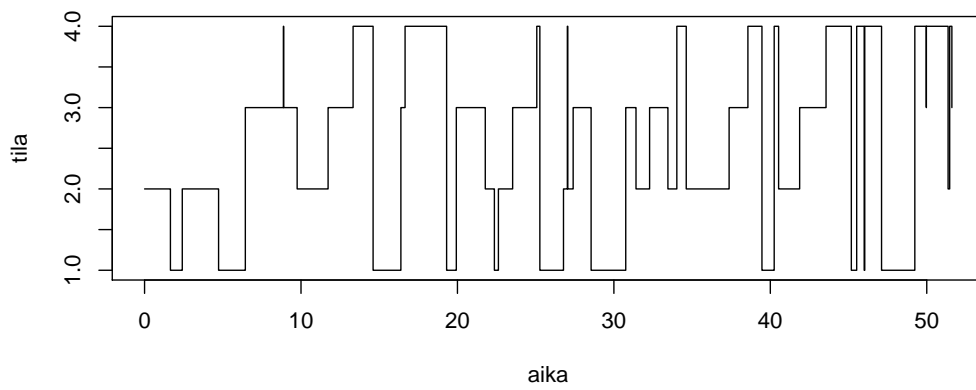


Kuva 3.3: Homogeenisten fiksaatioiden malli, fiksaatioiden spatiaalinen esitys.

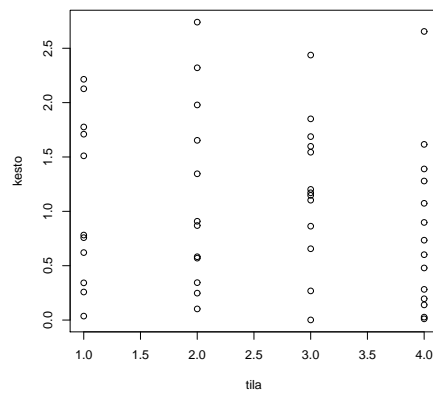
Kuvasta 3.4 nähdään katseen kulku vaiheittain, nuolet kuvaavat siirtymien suuntia. Kuvassa on siirtymiä tasaisesti eri tilojen välillä, sillä siirtymätodennäköisyydet olivat samoja kaikille siirtymille. Kuvan 3.5 hyppyprosessi kuvaa silmänliikettä spatiaalista esitystä paremmin, sillä siinä on mukana myös fiksaatioiden kestot. Ne on simuloitu tässä tapauksessa jakaumasta  $\text{Exp}(1)$ . Hyppyprosessista voidaan laskea useita tunnuslukuja esimerkiksi tietyssä tilassa vierailujen määrä, eri tilaparien  $(i, j)$  siirtymien määrä tai tiloissa viipymisten kestot. Kuvasta 3.6 nähdään vielä kestojen jakautuminen tilakohtaisesti. Koska kaikki kestot simuloitiin samasta jakaumasta, tulisi keston jakauman olla likipitäen tasajakauma. Keston odotusarvo on  $1/\lambda = 1$  jokaisen tilan kestolle.



Kuva 3.4: Homogeenisten fiksaatioiden malli, fiksaatioiden spatiaalinen esitys vaiheittain.



Kuva 3.5: Homogeenisten fiksaatioiden malli, fiksaatioiden hyppyprosessiesitys.



Kuva 3.6: Homogeenisten fiksaatioiden malli, fiksaatioiden kestojen jakautuminen.

## Malli 2

Lähtötilasta riippuvien fiksaatioiden mallissa siirtyminen tilaan  $j$  riippuu edellisestä tilasta  $i$ , eli

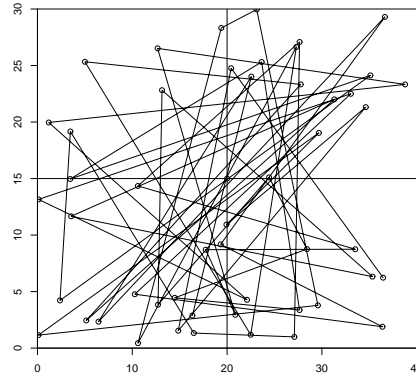
$$P(X_{n+1} = j \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}.$$

Fiksaatioiden kestojen  $Y_i$  oletetaan riippuvan myös tilasta  $i$ , joten jokaisella tilalla voi olla oma kestojen jakauma,  $Y \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ . Eksponenttisen jakauman tiheysfunktio on nyt

$$f_i(y) = \lambda_i e^{-\lambda_i y}, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Olkoon  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (2, 0.7, 0.5, 2.5)$ .

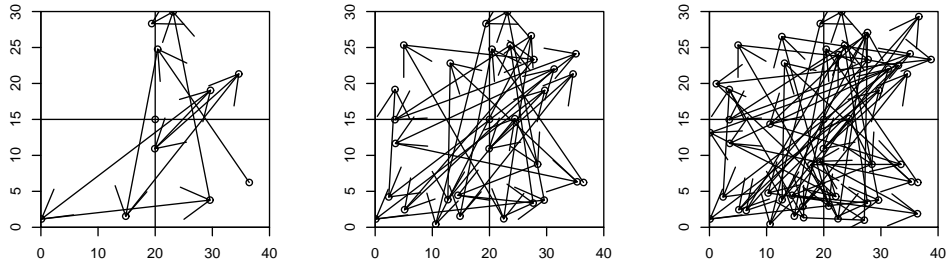
Mallista tehdyt 50 simulointia ovat nähtävissä spatiaalisena esityksenä kuvassa 3.7 ja vaiheittain kuvassa 3.8.



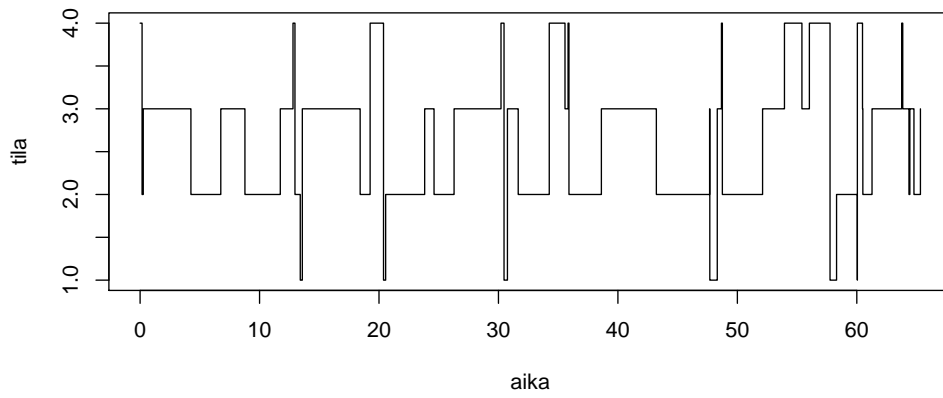
Kuva 3.7: Lähtötilasta riippuvien fiksaatioiden malli, fiksaatioiden spatiaalinen esitys

Hyppyprosessista (Kuva 3.9) nähdään, miten kestot ovat erilaisia tilojen suhteen. Koska eksponenttijakauman odotusarvo on  $1/\lambda$ , parametrivektorista  $\lambda_i$  voidaan nähdä, että odotusarvoisesti tiloissa 2 ja 3 pysytään kauemmin kuin tiloissa 1 ja 4. Hyppyprosessi tukee tätä oletusta.

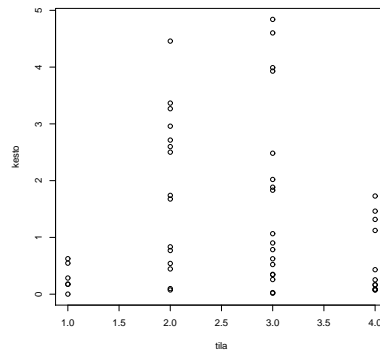
Kuvasta 3.10 nähdään, kuinka kestot jakautuvat nyt epätasaisemmin kuin riippumattomuusmallin tapauksessa, jossa kestot eri tiloille simuloitiin aina samasta jakaumasta.



Kuva 3.8: Lähtötilasta riippuvien fiksaatioiden malli, fiksaatioiden spatiaalinen esitys vaiheittain.



Kuva 3.9: Lähtötilasta riippuvien fiksaatioiden malli, fiksaatioiden hyppyprosessiesitys.



Kuva 3.10: Lähtötilasta riippuvien fiksaatioiden malli, fiksaatioiden kestojen jakautuminen.

### Malli 3

Lähtö- ja lopputiloista riippuvien fiksaatioiden mallin eli semi-Markov-mallin ehdollinen yhteisjakauma on

$$\begin{aligned} P_{ij}(y) &= P(X_{n+1} = j, Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}, X_n = i, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) \\ &= P(X_{n+1} = j, Y_{n+1} \leq y \mid X_n = i). \end{aligned}$$

Siirtyminen tilaan  $j$  riippuu siis edellisestä tilasta  $i$  ja fiksaation kesto  $Y_i$  riippuu nyt molemmista tiloista. Kestojen odotetaan noudattavan eksponenttijakaumaa, jonka parametri  $\lambda_{ij}$  riippuu tämänhetkisestä tilasta  $i$  ja seuraavasta tilasta  $j$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\lambda_{ij})$ . Jakauma saa nyt muodon

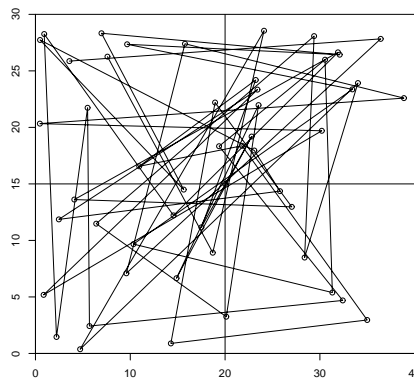
$$f_{ij}(y) = \lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij} y}, \quad \lambda_{ij} > 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Jokaisella erilaisella siirtymällä  $(i, j)$  on siis erilainen kestojen jakauman parametri  $\lambda_{ij}$ , jonka arvot näkyvät alla. Diagonaalilla on nollia, sillä samassa tilassa pysymisiä ei tapahdu, koska siirtymätodennäköisyysmatriisiin  $P$  diagonaalilla on myös nollia. Olkoon

$$[\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2.1 & 2.2 & 1.7 \\ 1.1 & 0 & 1.2 & 1.5 \\ 1.2 & 0.5 & 0 & 1.6 \\ 0.3 & 2.1 & 2.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisista voi nähdä odotetun tilassa  $i$  viipymisen keston ennen kuin siirrytään johonkin tiettyyn tilaan  $j$ . Esimerkiksi tilassa 4 viivytään odotusarvoisesti pidempään, jos seuraavaksi ollaan menossa tilaan 1, kuin jos seuraavaksi oltaisiin menossa tilaan 2.

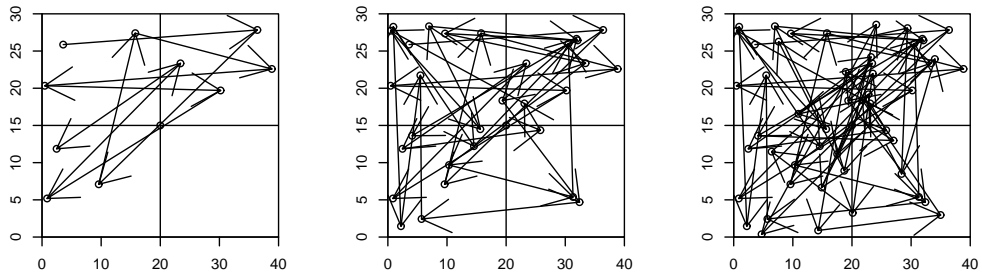
Mallin 50 simulaatiota spatiaalisena esityksenä on nähtävissä kuvasta 3.11 ja vaihteittain kuvassa 3.12.



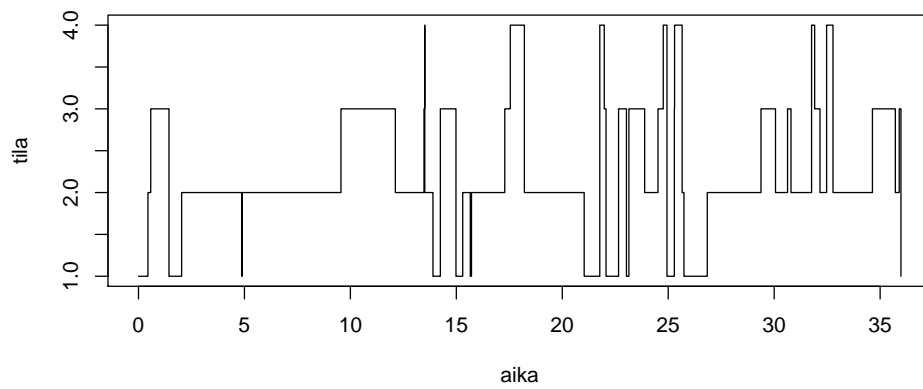
Kuva 3.11: Semi-Markov-malli, fiksaatioiden spatiaalinen esitys.

Semi-Markov-mallin hyppyprosessi (Kuva 3.13) ja kestojen jakauma (Kuva 3.14) näyttävät taas hieman erilaisilta kuin homogeenisten fiksaatioiden mallin ja lähtötilasta riippuvien fiksaatioiden mallin vastaavat esitykset.

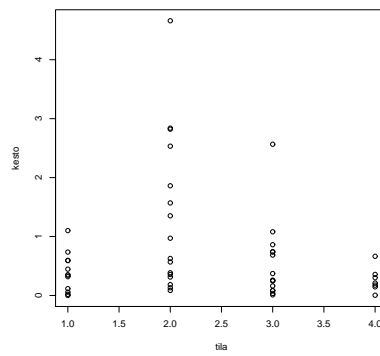




Kuva 3.12: Semi-Markov-malli, fiksaatioiden spatiaalinen esitys vaiheittain.



Kuva 3.13: Semi-Markov-malli, fiksaatioiden hyppyprosessiesitys.



Kuva 3.14: Semi-Markov-malli, fiksaatioiden kestojen jakautuminen.

## Malli 4

Demonstroidaan vielä viivästetty malli, jossa kesto tilassa  $i$  riippuu tilasta  $i$  ja edellisestä tilasta  $h$ . Olkoon siirtymätodennäköisyysmatriisi  $P$  ja parametrimatriisi  $[\lambda_{ij}]$  samat kuin edellä, muutetaan vain indeksit merkintöjä vastaaviksi. Siis  $\lambda_{ij} = \lambda_{hi}$  eli tilan  $i$  kestoon vaikuttaa edellinen tila, ei seuraava tila. Yhteisjakauma on viivästetyn mallin tapauksessa

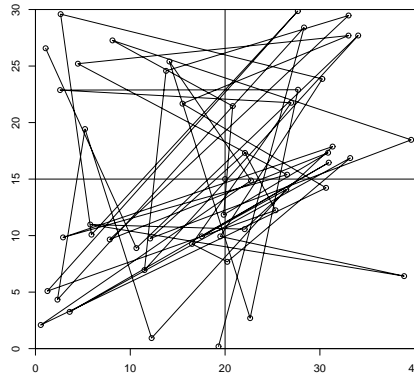
$$\begin{aligned} P(X_n = i, Y_{n+1} \leq y \mid \mathbf{X}_{n-2} = \mathbf{x}_{n-2}, X_{n-1} = h, \mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_n) \\ = P(X_n = i, Y_{n+1} \leq y \mid X_{n-1} = h). \end{aligned}$$

Jokaisella siirtymällä  $(h, i)$  on jälleen siirtymälle tyypillinen kestojauman parametri  $\lambda_{hi}$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\lambda_{hi})$ . Kestojen jakauman tiheysfunktio on tällöin

$$f_{hi}(y) = \lambda_{hi} e^{-\lambda_{hi} y}, \quad \lambda_{hi} > 0, \quad h, i = 1, 2, 3, 4.$$

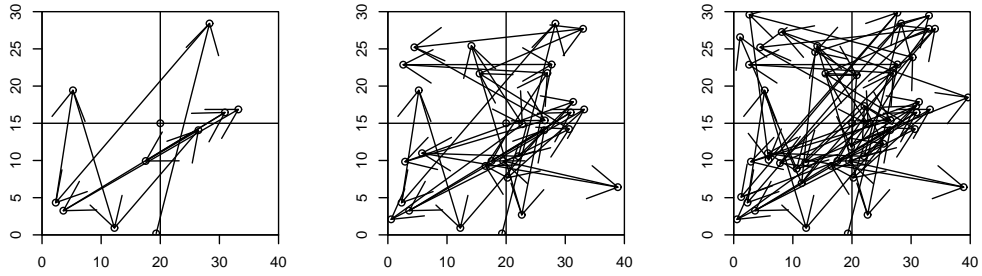
Siirtymätodennäköisyysmatriisista voi nyt nähdä odotetun tilassa  $i$  viipymisen keston kun on tultu tilasta  $h$ . Esimerkiksi tilassa 1 viivytään odotusarvoisesti pidempään, jos siihen on tultu tilasta 4 ( $EY = \frac{1}{0.3}$ ), kuin jos siihen oltaisiin tultu tilasta 3 ( $EY = \frac{1}{1.2}$ ).

Viivästetyn mallin 50 simulaatiota spatiaalisena esityksenä on nähtävissä kuvasta 3.15 ja vaiheittain kuvassa 3.16.

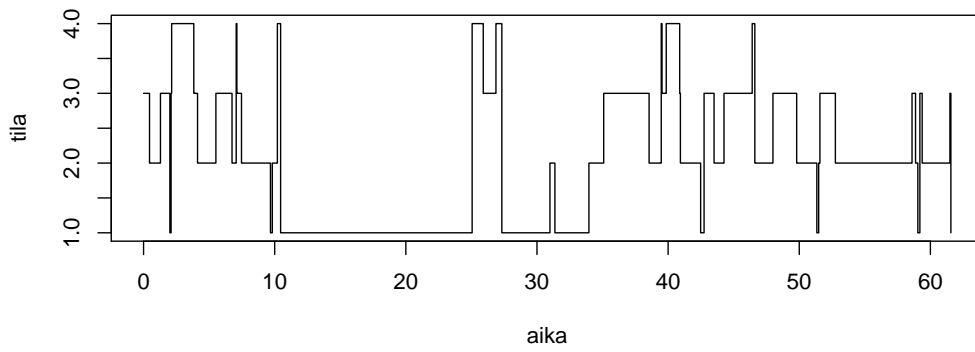


Kuva 3.15: Viivästetty malli, fiksaatioiden spatiaalinen esitys.

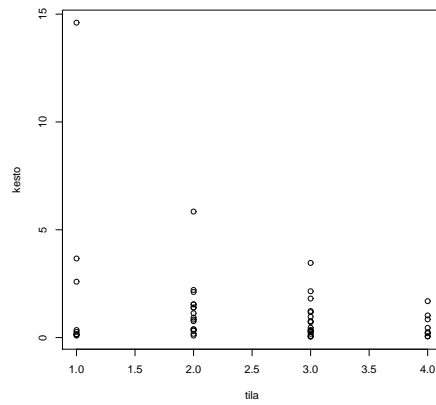
Viivästetyn mallin hyppyprosessi (Kuva 3.17) ja kestojen jakauma (Kuva 3.18) näyttävät samanlaisilta kuin semi-Markov-mallissa. Tilaan 1 on sattunut yksi poikkeuksellisen pitkä kesto, muuten kestot siinä tilassa ja tilassa 4 ovat lyhyitä, kuten semi-Markov-mallin tilanteessakin.



Kuva 3.16: Viivästetty malli, fiksaatioiden spatiaalinen esitys vaiheittain.



Kuva 3.17: Viivästetty malli, fiksaatioiden hyppyprosessiesitys.



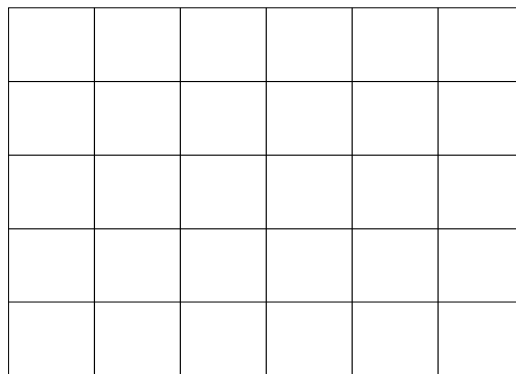
Kuva 3.18: Viivästetty malli, fiksaatioiden kestojen jakautuminen.

## 4 Tila-avaruuden konstruointi

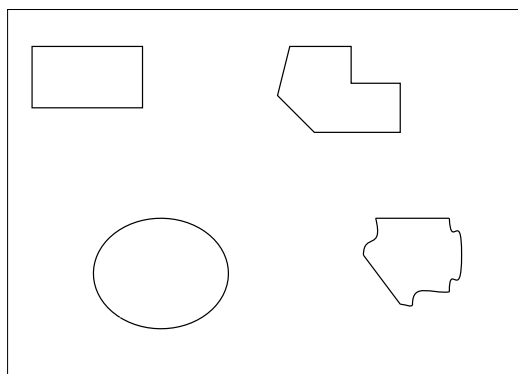
Tila-avaruuden määrittely on keskeinen osa edellä esitettyä silmänliikeprosessin mallintamista. Jotta tilastollisia prosesseja voidaan soveltaa silmänliikeaineistoon, täytyy tutkittava kohde jakaa osa-alueisiin. Alueet muodostavat tällöin tila-avaruuden, jossa jokainen alue on oma tilansa. Silmänliiketutkimuksessa käytetään kiinnostavista alueista termejä *area of interest (AOI)* ja *region of interest*. Tässä tutkimuksessa AOI:sta käytetään nimitystä tila, jotta muistettaisiin silmänliikeprosessin tilastollinen luonne.

Tila-avaruus voidaan määritellä joko konfirmatorisesti tai eksploratiivisesti, etukäteen tai tutkimuksen aikana. Jos tilat määritellään etukäteen, on tutkijalla oltava käsitys siitä, mitkä alueet ovat kiinnostavia ja mitä hän haluaa tutkia. Esimerkiksi kasvokuvassa silmät voidaan jo etukäteen määritellä omaksi tilakseen, sillä niihin kiinnitetään huomiota suurella todennäköisyydellä. Toinen vaihtoehto on määritellä alueet mittauksen jälkeen sen mukaan, missä fiksaatioita tai sakkadeja on. Jälkimmäinen tapa ei siis ole niin sidoksissa tutkijan mielikuviin, vaan määräytyy aineiston pohjalta. Tilojen määrittely vaikuttaa luonnollisesti myöhempiin analyyseihin, sillä erilaisilla tilajaoilla on mahdollista saada toisistaan poikkeavia tuloksia. Tämä ei kuitenkaan ole tilastollinen ongelma, joten siihen ei kiinnitetä tässä suurempaa huomiota.

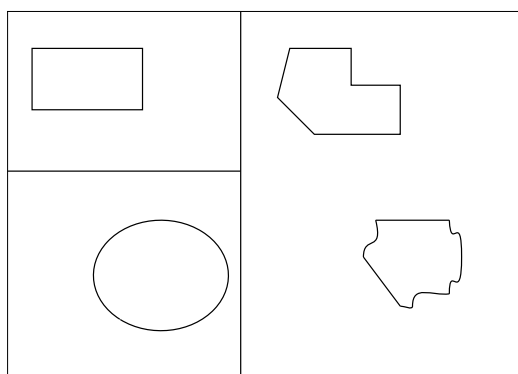
Ensimmäinen ja yksinkertaisin tapa tilojen muodostamiselle on hila (*grid*) eli alue jaetaan samankokoisiin nelikulmioihin vaak- ja pystyviivoituksella (Kuva 4.1). Toinen tapa on vapaampi ja usein käytännöllisempi: erotetaan alueesta vain tärkeät kohteet tiloiksi (Kuva 4.2). Rajaus voidaan tehdä suorakulmioilla, ympyröillä tai muilla sopiviksi katsomillaan tavoilla. Tällöin yli jäänyt osa voidaan määritellä yhdeksi tilaksi. Näiden lisäksi tilat voidaan muodostaa yhdistämällä edellä mainittuja tapoja. Esimerkiksi jaetaan alue muutamaaan suurempaan osaan ja näiden osien sisältä erotetaan vielä mielenkiintoisimmat alueet erikseen omiksi tiloikseen (Kuva 4.3). Tällöin analyysi voidaan tehdä hierarkkisen mallin mukaan eli voidaan tarkastella fiksaatioita isompien alueiden välillä ja tarvittaessa tutkia katseen kulkua tarkemmin alueen sisällä.



Kuva 4.1: Hilamuotoinen tilajako.



Kuva 4.2: Vapaamuotoinen tilajako.



Kuva 4.3: Yhdistelty tilajako.

Lukututkimuksissa yleensä yksi sana muodostaa tilan. Fiksoitumista ei tapahdu edes jokaiseen sanaan, vaan joidenkin lyhyiden ja tuttujen sanojen yli hypätään tekstiä lukiessa. Kirjaimen kokoisia tiloja ei siis yleensä kannata määritellä, sillä todennäköisyys fiksoitua yhteen kirjaimeseen on hyvin pieni ja tiloja tulisi analysoinnin kannalta liikaa. Lauseessa puolestaan on tilaksi liian paljon erilaisia ominaisuuksia, joten niiden analysointi on vaikeampaa.

Tilojen määrittelyä ei saa lukututkimuksessa tehdä liian tiukasti, sillä katse saattaa kulkea hieman tekstin ala- tai yläpuolella. Rivit eivät siis saa olla liian lähellä toisiaan, jotta eri riveille kuuluvat fiksaatiot eivät ole päällekkäin. Lukututkimusten eräs ongelma onkin, että tietokoneen näytölle ei mahdu kovin paljoa luettavaa tekstiä kerralla tekstin väljyyden vuoksi. Liian tiukka tilojen rajausta ei ole muissakaan aineistoissa hyväksi, kuten sovellusosuudessa voidaan huomata.

Nuotinlukututkimuksessa tilana saattaa olla mikä tahansa nuotinnuksen osa. Yksi nuotti kertoo enemmän kuin tekstissä yksi kirjain, joten sen voi perustellusti määrittää tilaksi. Kannattavampaa on ehkä kuitenkin määritellä tilaksi kokonainen tahti. Sointumerkit, nuottiavaimet ja muut merkinnät voi määritellä omiksi tiloikseen, jos analyysi sitä vaatii. Tilarajauksessa tärkeintä on, että tutkimuksen kannalta oleelliset osat ovat omina tiloinaan.

## 5 Estimointi

### 5.1 Siirtymätodennäköisyydet

Määritellään nyt matriisi  $Z = (z_{ij})$ , missä  $z_{ij}$  on siirtymien tilasta  $i$  tilaan  $j$  havaittu frekvenssi. Matriisin  $Z$  yhden rivin ajatellaan noudattavan multinomijakaumaa, jossa luokkien määrä  $r$  on sama kuin tilojen määrä. Tarkastellaan vain yhtä riviä eli yhtä tilaa, jolta siirtymien todennäköisyydet ovat  $p = (p_1, p_2, \dots, p_r)$  ja havaintojen lukumäärät  $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ . Toinen alaindeksi on jätetty pois, sillä se on aina sama, kun tarkastellaan vain yhtä lähtötilaa (esimerkiksi  $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ir})$ ). Tällöin

$$f(z; p) = \frac{n!}{z_1! \cdots z_r!} p_1^{z_1} \cdots p_r^{z_r}, \quad 0 \leq z_i \leq n, \quad i = 1, \dots, r,$$

missä  $\sum_{i=1}^r z_i = n$  ja  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ .

#### 5.1.1 SU-estimaattori multinomijakauman parametrille

Lasketaan suurimman uskottavuuden estimaattori  $\hat{p}$  Guttorpin [9] kirjan mukaan. Tarkoituksena on maksimoida logaritminen uskottavuusfunktio

$$l(p) = \log L(p) = \log \left( \frac{n!}{z_1! \cdots z_r!} \right) + \sum_{i=1}^r z_i \log p_i.$$

Nyt ensimmäinen termi ei riipu parametrista  $p$ , joten riittää, että maksimoidaan jälkimmäinen termi. Käytetään avuksi Lagrangen menetelmää ja maksimoidaan

$$l^*(p, \lambda) = \sum_{i=1}^r z_i \log p_i + \lambda \left( 1 - \sum_{i=1}^r p_i \right).$$

Laskemalla osittaisderivaatat saadaan

$$(5.1) \quad \frac{\partial}{\partial p_i} l^*(p, \lambda) = \frac{z_i}{p_i} - \lambda, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} l^*(p, \lambda) = 1 - \sum_{i=1}^r p_i.$$

Kun asetetaan yhtälöt (5.1) ja (5.2) nolliksi, saadaan

$$p_i = \frac{z_i}{\lambda} \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1,$$

ja edelleen

$$\frac{\sum_{i=1}^r z_i}{\lambda} = 1 \quad \text{tai} \quad \lambda = \sum_{i=1}^r z_i = n,$$

$$\text{joten } \hat{p}_i = \frac{z_i}{n}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Odotusarvo on

$$E(\hat{p}_i) = E\left(\frac{z_i}{n}\right) = \frac{np_i}{n} = p_i,$$

joten estimaattori on harhaton. Estimaattorin varianssi on

$$\text{Var}(\hat{p}_i) = \frac{\text{Var}(z_i)}{n^2} = \frac{np_i(1-p_i)}{n^2} = \frac{p_i(1-p_i)}{n}.$$

Momentit löytyvät Sorensenin [19] kirjasta.

Siirrytään tarkastelemaan koko matriisia. Multinomijakauman SU-estimaattori  $\hat{p}_i$  on tällöin havaintojen  $z_i$  suhteellinen osuus kaikista havainnoista  $n$ . Kun laajennetaan tämä koskemaan koko siirtymätodennäköisyysmatriisia  $P$ , siirtymätodennäköisyyden  $p_{kl}$  estimaattori

$$\hat{p}_{kl} = \frac{z_{kl}}{n_k},$$

missä  $z_{kl}$  kertoo, montako siirtymää tilasta  $k$  on tapahtunut tilaan  $l$ . Muuttuja  $n_k$  ilmaisee, kuinka monta siirtymää tilasta  $k$  on yhteensä tapahtunut. Varianssi on nyt

$$\text{Var}(\hat{p}_{kl}) = \frac{\text{Var}(z_{kl})}{n_k^2} = \frac{n_k p_{kl}(1-p_{kl})}{n_k^2} = \frac{p_{kl}(1-p_{kl})}{n_k}.$$

Koska samaan tilaan siirtyminen on tässä tutkimuksessa mahdotonta, määritellään rajoite  $p_{kk} = 0$  kaikille  $k = 1, \dots, r$ . Toisaalta aina havaitaan  $z_{kk} = 0$ , joten myös  $\hat{p}_{kk} = 0$  kaikille  $k = 1, \dots, r$ .

## 5.2 Fiksaatioiden kestot

### 5.2.1 Estimaattorit eksponenttijakauman parametreille

Jos fiksaatiohetket ovat Poisson-prosessista, niin kestot noudattavat eksponenttijakaumaa. Sen tiheysfunktio on

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad \lambda > 0.$$

Uskottavuusfunktio ja logaritminen uskottavuusfunktio ovat eksponenttijakauman tapauksessa

$$L(\lambda; y) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n y_i}$$

ja

$$(5.3) \quad l(\lambda) = \log L(\lambda) = n \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n y_i.$$

Derivoidaan yhtälö 5.3 parametrin  $\lambda$  suhteen ja ratkaistaan nollakohdat. Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n y_i =: 0 \\ \hat{\lambda} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i} = \frac{1}{\bar{y}}. \end{aligned}$$

Nyt  $\hat{\lambda}$  on suurimman uskottavuuden estimaattori. Estimaattori on harhainen, sillä

$$E(\hat{\lambda}) = \frac{n}{n-1}\lambda = \lambda + \frac{1}{n-1}\lambda.$$

Kun  $n \rightarrow \infty$ , harha  $\frac{1}{n-1}\lambda \rightarrow 0$ . Estimaattorin asymptoottinen varianssi on yhden parametrin tapauksessa Fisherin informaatiomatriisin käänteisluku. Yhtälön 5.3 toinen derivaatta on

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} l(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2},$$

joten Fisherin informaatiomatriisi on

$$I(\lambda) = -\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} l(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Asymptoottinen varianssi on siis

$$\text{Var}(\hat{\lambda}) = \frac{1}{\frac{n}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{n}.$$

Jos silmänliikeaineiston tapauksessa jokaisella fiksaatioparilla on oma jakauma kestoille, niin estimaattori ja sen varianssi ovat

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}} = \frac{1}{\bar{y}_{ij}},$$

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_{ij}) = \frac{\lambda_{ij}^2}{n_{ij}}.$$

## 5.2.2 Simuloitu esimerkki

Jatketaan luvun 3.5 esimerkkiä hieman pidemmälle. Siinä näyttö oli jaettu neljään osaan, jolloin tila-avaruus on  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ . Simuloidaan tuhannen fiksaation ketju semi-Markov-mallin mukaisesti, missä kestot simuloidaan eksponenttijakaumasta. Simulointi tapahtuu siten, että ensiksi konstruoidaan Markovin ketju ja sen jälkeen fiksaatiopareja vastaavat kestot. Siirtymät ja kestot voidaan siis simuloida erikseen, kunhan muistaa, että eri siirtymäpareille kestot on simuloitava eri jakaumista.

Olkoon siirtymätodennäköisyysmatriisi ja eksponenttijakaumien parametrit samat kuin luvun 3.5 esimerkissä eli

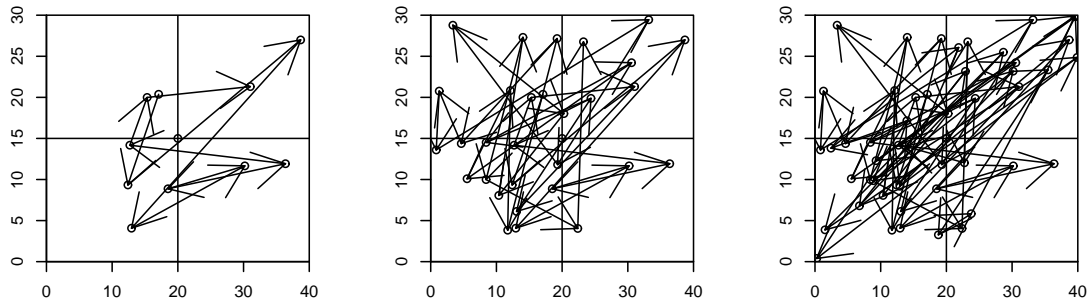
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.500 & 0.375 & 0.125 \\ 0.250 & 0 & 0.625 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 2.1 & 2.2 & 1.7 \\ 1.1 & 0 & 1.2 & 1.5 \\ 1.2 & 0.5 & 0 & 1.6 \\ 0.3 & 2.1 & 2.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

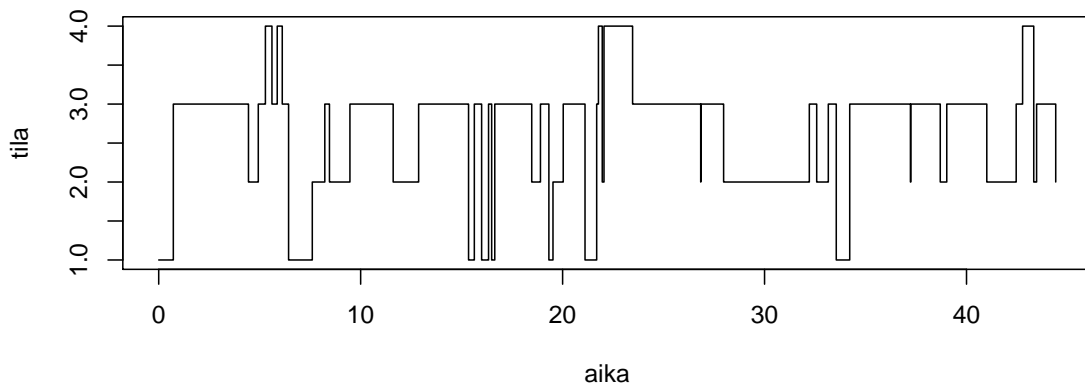


Ensimmäisten kymmenen, kolmenkymmenen ja viidenkymmenen fiksaatioiden paikat ja siirtymäsuunnat on nähtävissä kuvassa 5.1. Fiksaatioiden paikat tilojen sisällä määritellään kahden tasajakauman avulla: toinen määrittää x-akselin koordinaatin ja toinen y-akselin koordinaatin. Kuvasta nähdään, että nuolia on paljon tilojen 2 ja 3 välillä, sillä siirtymätodennäköisyydet näihin tiloihin ovat suurimpia.



Kuva 5.1: Ensimmäisten viidenkymmenen fiksaation paikat ja katseen kulku esitettyinä kolmen kuvan sarjana.

Hyppyprosessiesitys viidellekymmenelle ensimmäiselle fiksaatiolle on näkyvissä kuvassa 5.2. Siitä voidaan nähdä fiksaatioiden kestot eri tiloissa. Huomataan, että tiloissa 2 ja 3 on viivytty pisimpään. Tiloista 1 ja 4 on siirrytty nopeasti tiloihin 2 ja 3.



Kuva 5.2: Ensimmäisten viidenkymmenen fiksaation kestot hyppyprosessiesityksenä.

Siirytään estimoimaan siirtymätodennäköisyyksiä ja jakaumaparametreja. Estimoinnit suoritetaan suurimman uskottavuuden menetelmällä. Siirtymien havaitut lu-

kumäärät simuloidussa aineistossa ovat

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 84 & 69 & 26 \\ 65 & 0 & 194 & 44 \\ 97 & 178 & 0 & 86 \\ 17 & 41 & 98 & 0 \end{bmatrix}.$$

Estimoidaan siirtymätodennäköisyydet siirtymien lukumäärien perusteella. Saadaan siirtymätodennäköisyyksien estimaateiksi

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.469 & 0.385 & 0.145 \\ 0.214 & 0 & 0.640 & 0.145 \\ 0.269 & 0.493 & 0 & 0.238 \\ 0.109 & 0.263 & 0.628 & 0 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla estimaattien varianssit ja keskihajonnat voidaan myös määritellä 95%:n estimaattorikohtaiset luottamusvälit. Ala- ja ylärajat ovat

$$\begin{bmatrix} - & (0.396, 0.542) & (0.314, 0.457) & (0.094, 0.197) \\ (0.168, 0.261) & - & (0.586, 0.649) & (0.106, 0.185) \\ (0.223, 0.314) & (0.442, 0.545) & - & (0.194, 0.282) \\ (0.060, 0.158) & (0.194, 0.332) & (0.552, 0.704) & - \end{bmatrix}.$$

Nyt kaikki alkuperäiset siirtymätodennäköisyydet kuuluvat vastaaville luottamusväleille, joten voidaan päätellä, että estimointi on onnistunut.

Estimoidut  $\lambda$ -parametrit saadaan myös suurimman uskottavuuden menetelmällä. Estimaatit ovat

$$\hat{\lambda}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1.912 & 2.399 & 2.953 \\ 1.085 & 0 & 1.246 & 1.429 \\ 1.206 & 0.500 & 0 & 1.766 \\ 0.339 & 1.909 & 2.491 & 0 \end{bmatrix}.$$

Näiden estimaattien 95%:n luottamusvälit ovat

$$\begin{bmatrix} - & (1.503, 2.320) & (1.833, 2.965) & (1.818, 4.089) \\ (0.821, 1.349) & - & (1.071, 1.421) & (1.007, 1.851) \\ (0.966, 1.446) & (0.427, 0.574) & - & (1.393, 2.139) \\ (0.178, 0.501) & (1.325, 2.493) & (1.998, 2.984) & - \end{bmatrix}.$$

Vaikka suoritettiin 1000 simulointia, niin siirtymiä tilojen välille tuli kuitenkin suhteellisen vähän. Tämän vuoksi simuloidusta aineistosta saadut estimaatit eivät ole kovinkaan tarkkoja.

### 5.2.3 Estimaattorit gammajakauman parametreille

Ajatellaan fiksaatioiden kestoja olevan elinaikoja. Elinaikojen kuvaamiseen sopii hyvin myös gammajakauma, jonka tiheysfunktio on

$$f(y_i; \nu, \lambda) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} y_i^{\nu-1} e^{-\lambda y_i}, \quad y_i > 0, i \in \{1, \dots, n\} \text{ ja } \nu, \lambda > 0.$$

Uskottavuusfunktio on nyt

$$\begin{aligned} L(\nu, \lambda) &= \prod_{i=1}^n f(y_i; \nu, \lambda) \\ &= \frac{\lambda^{n\nu}}{\Gamma(\nu)^n} \prod_{i=1}^n y_i^{\nu-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n y_i}. \end{aligned}$$

Tästä saadaan logaritminen uskottavuusfunktio

$$\begin{aligned} l(\nu, \lambda) &= \log L(\nu, \lambda) \\ &= \log(\Gamma(\nu))^{-n} + n\nu \log(\lambda) + (\nu - 1) \log\left(\prod_{i=1}^n y_i\right) - \lambda \sum_{i=1}^n y_i \\ &= -n \log(\Gamma(\nu)) + n\nu \log(\lambda) + (\nu - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) - \lambda \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned}$$

Lasketaan osittaisderivaatat

$$(5.4) \quad \frac{\partial}{\partial \nu} l(\nu, \lambda) = -n\psi(\nu) + n \log(\lambda) + \sum_{i=1}^n \log(y_i), \quad \text{missä } \psi(\nu) = \frac{\Gamma'(\nu)}{\Gamma(\nu)} \text{ ja}$$

$$(5.5) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\nu, \lambda) = \frac{n\nu}{\lambda} - \sum_{i=1}^n y_i.$$

Ratkaistaan ensin yhtälön (5.5) nollakohdat. Suurimman uskottavuuden estimaattoriksi saadaan

$$\hat{\lambda} = \frac{n\nu}{\sum_{i=1}^n y_i}.$$

Asetetaan nyt yhtälö (5.4) nolaksi ja sijoitetaan siihen estimaattori  $\hat{\lambda}$ . Peräkkäin päättelemällä saadaan

$$\begin{aligned} -n\psi(\nu) + n \log\left(\frac{n\nu}{\sum_{i=1}^n y_i}\right) + \sum_{i=1}^n \log(y_i) &= 0 \\ \iff -n\psi(\nu) + n \log(\nu) &= n \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) - \sum_{i=1}^n \log(y_i) \\ \iff \log(\nu) - \psi(\nu) &= \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(y_i). \end{aligned}$$

Merkitään viimeisen yhtälön oikeaa puolta kirjaimella  $s$ .

Yhtälöstä voidaan nyt ratkaista  $\hat{\nu}$  ainakin kahdella tavalla:

1. Lasketaan yhtälön oikea puoli  $s$  aineiston perusteella. Tämän jälkeen tutkitaan yhtälön vasenta puolta eri  $\nu$ :n arvoilla. Valitaan estimaatiksi se  $\hat{\nu}$ , jolla vasemman puolen arvo on lähimpänä oikean puolen arvoa. Alkuarvo voidaan valita vaikkapa seuraavan kaavan avulla:

$$C(Y) = \frac{1}{\sqrt{\nu}},$$

missä  $C(Y) = \sqrt{\frac{\text{Var}(Y)}{\{\text{E}(Y)\}^2}}$ , eli  $Y$ :n variaatiokerroin. Tämä tapa esitetään Coxin ja Lewisin [4] kirjassa.

2. Numeerisilla menetelmillä saadaan yhtälön vasemmalle puolelle arvio:

$$(5.6) \quad \log(\nu) - \psi(\nu) \approx \frac{1}{\nu} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{12\nu + 2} \right),$$

$$(5.7) \quad \text{jolloin } \nu \approx \frac{3 - s + \sqrt{(s - 3)^2 + 24s}}{12s}.$$

Approksimaatio (5.7) on nyt parametrin  $\nu$  approksimatiivinen suurimman uskottavuuden estimaattori. Numeerisen estimoinnin voi suorittaa esimerkiksi Newtonin menetelmällä.

Parametrien  $\lambda$  ja  $\nu$  estimaattorit saadaan myös muilla keinoin, esimerkiksi

- Momenttien (odotusarvo ja varianssi) avulla,

$$(5.8) \quad \text{E}(y) \approx \frac{\nu}{\lambda},$$

$$(5.9) \quad \text{Var}(y) \approx \frac{\nu}{\lambda^2}.$$

Odotusarvoa estimoidaan otoskeskiarvolla  $\bar{y}$  ja varianssia otosvarianssilla  $s^2$ . Sijoitetaan nämä oleviin yhtälöihin (5.8) ja (5.9) ja ratkaistaan  $\lambda$  ja  $\nu$ , jolloin saadaan

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{y}}{s^2},$$

$$\hat{\nu} = \left( \frac{\bar{y}}{s} \right)^2.$$

- Profiliuskottavuuden menetelmässä kiinnitetään parametri  $\nu$  ja esitetään estimaattori  $\hat{\lambda}$  sen avulla,

$$\lambda(\nu) = \frac{n\nu}{\sum_{i=1}^n y_i}.$$

Tällöin logaritminen profiiluskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned}
l(\nu, \lambda(\nu)) &= -n \log(\Gamma(\nu)) + n\nu \log(\lambda(\nu)) + (\nu - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) - \lambda(\nu) \sum_{i=1}^n y_i \\
&= -n \log(\Gamma(\nu)) + n\nu \log\left(\frac{n\nu}{\sum_{i=1}^n y_i}\right) + (\nu - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) \\
&\quad - \left(\frac{n\nu}{\sum_{i=1}^n y_i}\right) \sum_{i=1}^n y_i \\
&= -n \log(\Gamma(\nu)) + n\nu \log\left(\frac{n\nu}{\sum_{i=1}^n y_i}\right) + (\nu - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) - n\nu.
\end{aligned}$$

Nyt estimaatti  $\hat{\nu}$  on se arvo, joka maksimoi logaritmisen uskottavuusfunktion  $l(\nu, \lambda(\nu))$ . Estimaatti parametrille  $\lambda$  on

$$\hat{\lambda} = \lambda(\hat{\nu}) = \frac{n\hat{\nu}}{\sum_{i=1}^n y_i}.$$

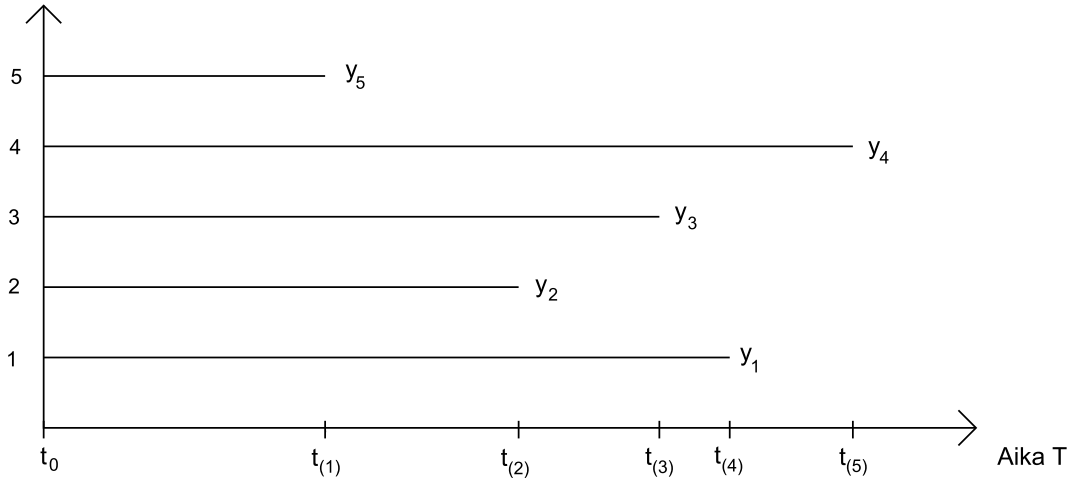
#### 5.2.4 Elinaikamallinnus

Fiksaatioiden kestot ovat elinaikoja, joten elinaikamallinnus tarjoaa mahdollisuuden niiden tilastolliseen tarkasteluun. Kestolle laskettava *välttöfunktio* kertoo todennäköisyyden olla elossa hetken  $t$  jälkeen. Tässä fiksaatiot ovat tutkittavia objekteja ja niiden kestojen päättymisajat kuvaavat kuolemia. Välttöfunktio lasketaan *Kaplan-Meier-estimaattien* avulla, sillä se on tärkein ja eniten käytetty välttöfunktion estimointimenetelmä. Teoria on Colletin [2] kirjasta.

Olkoon meillä  $n$  fiksaatiota, joiden kestot ovat  $y_1, \dots, y_n$ . Siirretään fiksaatiot aikajanalle  $T$  niin, että jokainen fiksaatio alkaa hetkellä  $t_0$ . Tällöin fiksaation  $i$  päättymishetki on hetki  $t_i$  (toisin sanoen  $t_i = y_i$ ). Huomaa, että tässä merkintä  $t_i$  ei siis tarkoita fiksaatiohetkeä, kuten aiemmin. Kun järjestetään fiksaatioiden päättymisajat  $t_i$  suuruusjärjestykseen, saadaan muodostettua jono  $t_{(1)} < t_{(2)} < \dots < t_{(n)}$ , katso Kuva 5.3. Tällöin lyhin fiksaatio päättyy hetkellä  $t_{(1)}$  ja pisin fiksaatio päättyy hetkellä  $t_{(n)}$ . Olkoon fiksaatioiden päättymisaikoja yhteensä määrä  $r$ ,  $r \geq n$ . Jos sensuroituja elinaikoja ei ole, on fiksaatioiden päättymisaikoja saman verran kuin fiksaatioita eli  $r = n$ . Fiksaatiot tapahtuvat jatkuvassa ajassa, joten täsmälleen saman pituisten fiksaatioiden esiintyminen on epätodennäköistä. Tässä tilanteessa voidaan siis ajatella, että sensurointeja ei ole. Pidetään kuitenkin muuttuja  $r$  mukana merkinnöissä, jotta yhtenäisyys Colletin merkintöjen kanssa säilyy.

Merkintä  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  tarkoittaa niiden fiksaatioiden lukumäärää, jotka ovat kestoltaan pidempiä tai yhtä pitkiä kuin ajanhetki  $t_{(j)}$ , jolloin  $j$ :s fiksaatio päättyy. Merkintä  $d_j$  tarkoittaa aikavälillä  $[t_{(j)}, t_{(j+1)})$  päättyvien fiksaatioiden lukumäärää. Käytännössä  $d_j = 1$  kaikille  $j$ , sillä fiksaatioiden kestot ovat jatkuva-aikaisia.

Fiksaation indeksi  $i$



Kuva 5.3: Fiksaatioiden sijoittaminen aikajanelle elinaikamallinnusta varten.

Tehdään oletus, että fiksaatioiden päättymisajat ovat toisistaan riippumattomia. Tällöin Kaplan-Meier-estimaattori välttöfunktiolle on

$$(5.10) \quad \hat{S}(t) = \prod_{j=1}^k \frac{u_j - d_j}{u_j},$$

kun  $t_{(k)} \leq t < t_{(k+1)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$  ja  $t_{(r+1)} = \infty$ . Määritellään myös, että  $\hat{S}(t) = 1$ , kun  $t < t_{(1)}$ .

Tässä tapauksessa aineistossa ei ole sensuroituja elinaikoja, joten  $u_j - d_j = u_{j+1}$  ja kaava (5.10) saa muodon

$$\begin{aligned} \hat{S}(t) &= \prod_{j=1}^k \frac{u_{j+1}}{u_j} \\ &= \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \dots \times \frac{u_k}{u_{k-1}} \times \frac{u_{k+1}}{u_k} \\ &= \frac{u_{k+1}}{u_1}, \end{aligned}$$

kun  $k = 1, 2, \dots, r - 1$ . Lisäksi  $\hat{S}(t) = 1$  kun  $t < t_{(1)}$  ja  $\hat{S}(t) = 0$ , kun  $t \geq t_{(r)}$ . Nyt  $n_1$  on vaarassa olevien fiksaatioiden lukumäärä juuri ennen ensimmäistä fiksaation päättymishetkeä, eli fiksaatioiden määrä otoksessa. Yli tai tasan ajan  $t_{(k+1)}$  kestävien fiksaatioiden määrä on  $u_{k+1}$ .

Ilman sensuroituja havaintoja  $\hat{S}(t)$  on yksinkertaisesti *empiirinen välttöfunktio*,

$$\hat{S}(t) = \frac{\text{Yli tai tasan ajan } t \text{ kestävien fiksaatioiden lukumäärä}}{\text{Fiksaatioiden kokonaismäärä}}.$$

Yhtäpitävästi,  $\hat{S}(t) = 1 - \hat{F}(t)$ , kun  $\hat{F}(t)$  on *empiirinen kertymäfunktio*. Estimoidun välttöfunktion  $\hat{S}(t)$  oletetaan olevan vakio kahden peräkkäisen fiksaation päättymisajan välillä. Tällöin sen kuvaaja on porraskäyrä, joka laskee jokaisella fiksaation päättymishetkellä  $t_{(j)}$ .

Välttöfunktion Kaplan-Meier-estimaattorin varianssi on

$$(5.11) \quad \text{Var}\{\hat{S}(t)\} \approx [\hat{S}(t)]^2 \sum_{j=1}^k \frac{d_j}{u_j(u_j - d_j)},$$

ja keskivirhe tällöin

$$(5.12) \quad s.e.\{\hat{S}(t)\} \approx \hat{S}(t) \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{d_j}{u_j(u_j - d_j)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

kun  $t_{(k)} \leq t < t_{(k+1)}$ .

Jos sensuroituja havaintoja ei ole niin  $u_j - d_j = u_{j+1}$  ja  $\hat{S}(t) = u_{k+1}/u_1$ , kun  $t_{(k)} \leq t < t_{(k+1)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, r-1$ . Tällöin yhtälön 5.11 oikea puoli muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} [\hat{S}(t)]^2 \sum_{j=1}^k \frac{d_j}{u_j(u_j - d_j)} &= [\hat{S}(t)]^2 \sum_{j=1}^k \frac{u_j - u_{j+1}}{u_j u_{j+1}} \\ &= [\hat{S}(t)]^2 \sum_{j=1}^k \left( \frac{1}{u_{j+1}} - \frac{1}{u_j} \right) \\ &= [\hat{S}(t)]^2 \frac{u_1 - u_{k+1}}{u_1 u_{k+1}} \\ &= [\hat{S}(t)]^2 \frac{1 - \hat{S}(t)}{u_1 \hat{S}(t)} \\ &= \frac{\hat{S}(t)[1 - \hat{S}(t)]}{u_1}. \end{aligned}$$

Tämän voi myös johtaa suoraan binomijakaumasta.

## 6 Sovellus taideaineistoon

Sovelletaan nyt tutkielmassa esitettyä teoriaa taideaineistoon, joka koostuu kahdenkymmenen koehenkilön silmänliikkeistä. Koetilanne eroaa esimerkiksi lukututkimuksesta, sillä katseella ei ole etukäteen määrättyä suuntaa, vaan se saa liikkua vapaasti. Koeasetelma on staattinen, sillä koehenkilöille esitetty kuva ei liikkunut.

Osa koehenkilöistä on taidehistorian tai -kasvatuksen opiskelijoita, muut muiden alojen opiskelijoita Jyväskylän yliopistosta. Aineiston ovat keränneet tutkija Sari Kuuva (FT, kognitiotiede) ja psykologian jatko-opiskelija María Álvarez Gil. Teknisestä puolesta on vastannut tutkijakoulutettava Jarkko Hautala (PsM) ja ohjauksesta kognitiotieteen professori Pertti Saariluoma (VTT).

Koehenkilöille näytettiin tietokoneen ruudulla kuvia maalauksista. Kuvia oli yhteensä kuusi ja jokaista näytettiin kolmen minuutin ajan. Maalausten välillä kuvaruutu oli viiden sekunnin ajan harmaa. Kuvien järjestystä vaihdeltiin niin, että joka toinen henkilö näki maalaukset käänteisessä järjestyksessä. Katselun ohessa koehenkilöitä pyydettiin vapaasti kuvailemaan teoksen tunnelmaa. Tutkijat olivat kiinnostuneet maalausten herättämistä ajatuksista, joten puhe tallennettiin. Silmänliikkeistä rekisteröitiin kameralla fiksaatiot, sakkadit ja silmänräpäytykset. Mittausten jälkeen koehenkilöt täyttivät vielä kaavakkeen, jossa he arvioivat kuvakohtaisesti, miten annetut tunnetermit vastasivat heidän omia tuntemuksiaan kuvien katsomisen aikana. Tunnetermit olivat: ilo, pelko, surullisuus, viha, rakkaus ja yllättyneisyys. Vastaavuutta piti kuvata asteikolla yhdestä viiteen, 1= ”ei minkäänlaista vastaavuutta”, 5= ”täydellinen vastaavuus”.

Tutkijoiden tarkoituksena on ensisijaisesti verrata taideaineita opiskelleiden ja muiden henkilöiden eroavaisuuksia, jos sellaisia on. Toissijaisesti ollaan kiinnostuneita eri maalausten välisistä eroista eli siitä, mihin maalauksissa huomiota kiinnitettiin. Koska aineisto on varsin pieni, niin on odotettavissa, että tulokset eivät ole kovin valideja. Tutkijoille jo pientenkin poikkeamien tai samankaltaisuuksien löytäminen on edistystä, joka vie eteenpäin silmänliiketutkimuksen menetelmien soveltamista taideaineistoihin. Aineiston analysointivaiheessa keskitytään myös tarkastelemaan silmänliikkeen ja maalausten herättämien tuntemusten yhteyttä. Aineisto koostuu siis sekä kvantitatiivisesta osasta että kvalitatiivisesta osasta. Tässä pro gradu -työssä kvalitatiivinen osuus eli koehenkilön ääneenajatteluaineisto jätetään tutkimuksen ulkopuolelle.

### 6.1 Mittaus

Silmänliikettä mitataan erilaisilla katseenseurantalaitteilla, jotka tyypillisesti ovat pöytäkamera ja kypäräkamera. Pöytämallin kamerassa silmänliikettä rekisteröivät videokamerat on sijoitettu esimerkiksi näyttöruudun reunoihin. Pöytäkameraa käytettäessä pään liikkumista estetään leukatuella, joten saatu informaatio on tarkempaa kuin kypäräkameralla mitattaessa. Kypäräkameraa voidaan käyttää esimerkiksi ajosimulaattorikokeissa, koska pään liikkuminen täytyy mahdollistaa. Sen minkä pöytäkamera voittaa tarkkuudessa, kypäräkamera korvaa monipuolisemmilla käyttömahdollisuuksilla. Kamerat tallentavat silmänliikkeen lisäksi myös muita tietoja silmästä



ja sen liikkeistä, esimerkiksi pupillin koosta ja silmien räpäytyksistä. Jokaista käyttäjää varten täytyykin suorittaa kameran kalibrointi, jotta kamera pystyy seuraamaan silmänliikettä mahdollisimman tarkasti.

Taideaineiston silmänliikkeet tallennettiin SMI:n iView X<sup>TM</sup>Hi-Speed -silmänliikekameralla, joka mittaa pupillin liikkeitä infrapunavälillä. Kamera on pöytämallinen, joten pää saatiin tuettua liiallisen heilumisen välttämiseksi. Mittauksessa käytettiin otsatukea, kun taas leukatuki ei ollut käytössä, jotta koehenkilöt pystyisivät puhumaan luonnollisesti. Kokeessa oli mukana kaksi tietokonetta: toisella näytettiin maalaukset koehenkilöille ja toisesta tutkijat tarkkailivat kokeen suoritusta. Ääni tallennettiin digitaalisella tallentimella.

Näytön ja koehenkilön välinen etäisyys oli noin 86cm ja ruudun resoluutio oli 1024 × 768. Näytön ja pöydän korkeudet olivat säädettävissä kullekin henkilölle sopivaksi. Tuolissa ei ollut rullia, jotta ei tulisi ylimääräistä liikettä, mutta koehenkilöillä oli mahdollisuus tyynyillä korjata istuma-asentoaan. Tarkoituksena oli luoda mahdollisimman rento asento kokeen ajaksi. Kokeen aikana korjattiin koehenkilön asentoa, jos sen huomattiin muuttuvan. Silmälasit, piilolinssit ja vahva meikki silmissä saattoivat aiheuttaa heijastumia ja mittausvaikeuksia. Kameran kalibrointi suoritettiin niin, että näytöllä näytettiin kuvia, joihin koehenkilön käskettiin katseensa kiinnittämään.

Silmänliikekamera kerää siis valtavan määrän tietoa katseen kulusta. Näistä tiedoista analyysin kannalta keskeisimpiä ovat sakkadien ja fiksaatioiden kestot, paikat ja kokonaismäärät. Tähän mennessä tutkimuksissa onkin pääasiassa keskitytty fiksaatioiden ja sakkadien pituuksien ja määrien vertailuun. Jos esimerkiksi www-sivuja katsellessa katse poukkoilee paljon paikasta toiseen, se kertoo mahdollisesti siitä, ettei katsoja löydä sivuilta etsimäänsä tietoa. Tällöin fiksaatioita on joka puolella kuvaruutua. Siirtymiä tapahtuu sivun reunoilta reunoille, joten sakkadien pituudet ovat pitkiä. Tässä tutkimuksessa sakkadit jätetään tarkastelun ulkopuolelle ja kiinnostuksen kohteena ovat pelkästään fiksaatiopaikat.

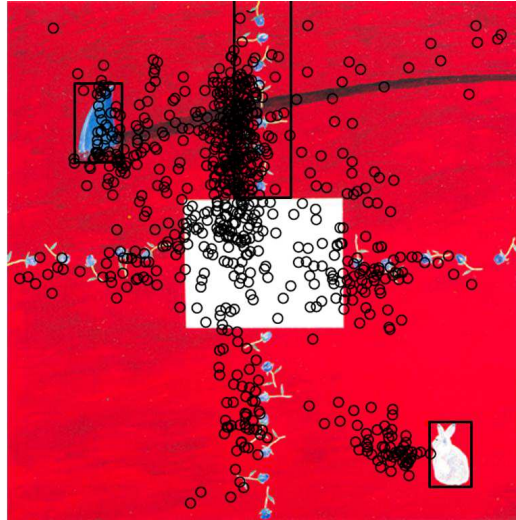
Tällaisessa aineistossa mielenkiintoista on selvittää vaihtelua ryhmien välillä. Myös ryhmien sisäinen vaihtelu täytyy huomioida. Mikäli vaihtelu henkilöiden välillä on suurta, onko ryhmävertailua edes mielekäästä tehdä? Tässä työssä keskitytään ainoastaan yhteen koehenkilöön, joten mukana on vain henkilön oma vaihtelu eli yksilövaihtelu. Tällöin vaihtelun kontrollointi on helpompaa ja tilanne yksinkertaistuu.

## 6.2 Mallin sovitus aineistoon

Tarkastellaan nyt yhden satunnaisesti valitun koehenkilön silmänliikeaineistoa. Koehenkilö on taidehistorian opiskelija, käynyt kuvataidelukion ja harrastanut taiteita. Tutkijat ovat luokitelleet hänet ekspertiksi. Näillä taustatiedoilla ei ole tässä tutkimuksessa suurta merkitystä, koska ryhmävertailuja ei tehdä. Oleellisempia ovat tiedot mittauksen kulusta. Koehenkilöllä ei ole silmälasia eikä piilolinssijä, mutta mittauksen aikana on saattanut tapahtua joitain heijastuksia. Kameran kalibrointia ei ole tarvinnut tehdä kokeen aikana, joten saatu aineisto vaikuttaa luotettavalta.

Esitellään koehenkilön silmänliikeaineiston tuloksia yhden maalauksen osalta. Valitsin maalaukseksi Risto Suomen *The Cross of Destiny* (1988), sillä siitä oli helpointa erottaa kiinnostavat tilat. Aloitetaan tutkimus rajaamalla alueet maalauksesta. Kovin

tiukkoja rajauksia ei kannata tehdä, sillä silloin voi käydä niin, että johonkin tilaan ei tule yhtään havaintoa. Tällainen tilanne on nähtävissä kuvassa 6.1.

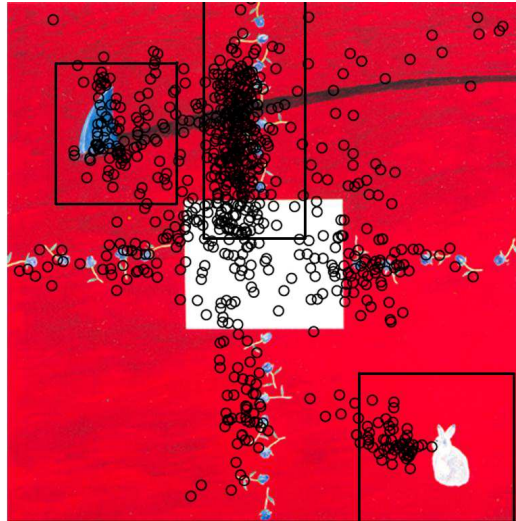


Kuva 6.1: Liian tiukka tilojen rajausta.

Tarkastelemalla fiksaatiokohtia havaitaan, että fiksaatiot ovat hieman kohteiden vieressä eivätkä täysin kohteiden päällä. Jäniksen kohdalla fiksaatiot ovat liian vasemmalla, hain evän kohdalla hieman liian oikealla. Ylimpään ruusuköynnökseen osuvat fiksaatiotkin näyttävät olevan hieman väärässä paikassa. Ensimmäinen mieleen tuleva selitys on silmänliikekameran kalibroinnissa tapahtuneet virheet tai pään asennon muutokset mittaustilanteessa. Heilahdus kalibroinnissa johtaisi todennäköisesti fiksaatioiden systemaattiseen virheeseen johonkin tiettyyn suuntaan. Tämä ei kuitenkaan selitä sitä seikkaa, miksi hain evään tapahtuneet fiksaatiot ovat liian oikealla, kun muiden kohteiden osalta fiksaatiot ovat liian vasemmalla. Toinen ja ehkä todennäköisempi selitys tälle tilanteelle on se, että ihminen katsoo hieman sivuun kohteesta. Jänikseen fiksoituessaan ihminen katsoo sinne, minne jäniskin katsoo, sillä katsoja tulkitsee jäniksen elolliseksi olennoiksi. Haita katsoessa katse puolestaan menee sinne, mistä hai on tulossa. Tällaisilla kognitiivisilla prosesseilla saattaa olla vaikutusta siihen, mihin katsotaan.

Tilojen rajausta kannattaa nyt tehdä varsin löyhästi, jotta fiksaatiopisteitä saadaan sopimaan tiloihin. Tässä käytetään soveltaen suosittamaa apukeinoa: piirretään kaikkien koehenkilöiden fiksaatiot samaan kuvaan ja suoritetaan tilojen rajausta sen avulla. Olkoon hain evä tila 1, jänis tila 2 sekä ruusuköynnöksen ylin osa tila 3. Jäljelle jäävä alue on tila 4. Käytetyt tilarajaukset voi katsoa kuvasta 6.2.

Nyt on tärkeää huomata, että peräkkäiset fiksaatiot saman tilan sisällä on määriteltävä vain yhdeksi fiksaatioksi, jonka kesto on fiksaatioiden kestojen summa. Tutkimuksissa käytetään tällaisesta fiksaatioiden kokoelmasta nimitystä *gaze* ja fiksaatioiden kestojen summa on *gaze duration*. Koska termiä *gaze* on vaikea kääntää suomeksi eikä se ole tämän tutkimuksen kannalta olennainen termi, käytetään jatkossa vain nimitystä fiksaatio kun tarkoitetaan saman tilan sisällä tapahtuvia peräkkäisiä fiksaatioita. Nyt voidaan huomio kiinnittää vain eri tilojen välisiin siirtymiin ja siirty-



Kuva 6.2: Sopiva tilojen rajaus.

mätodennäköisyysmatriisin diagonaalille tulee nollia, sillä samaan tilaan siirtymisiä ei tapahdu. Siirrytään tarkastelemaan yhden koehenkilön aineistoa esitetyn maalauksen osalta.

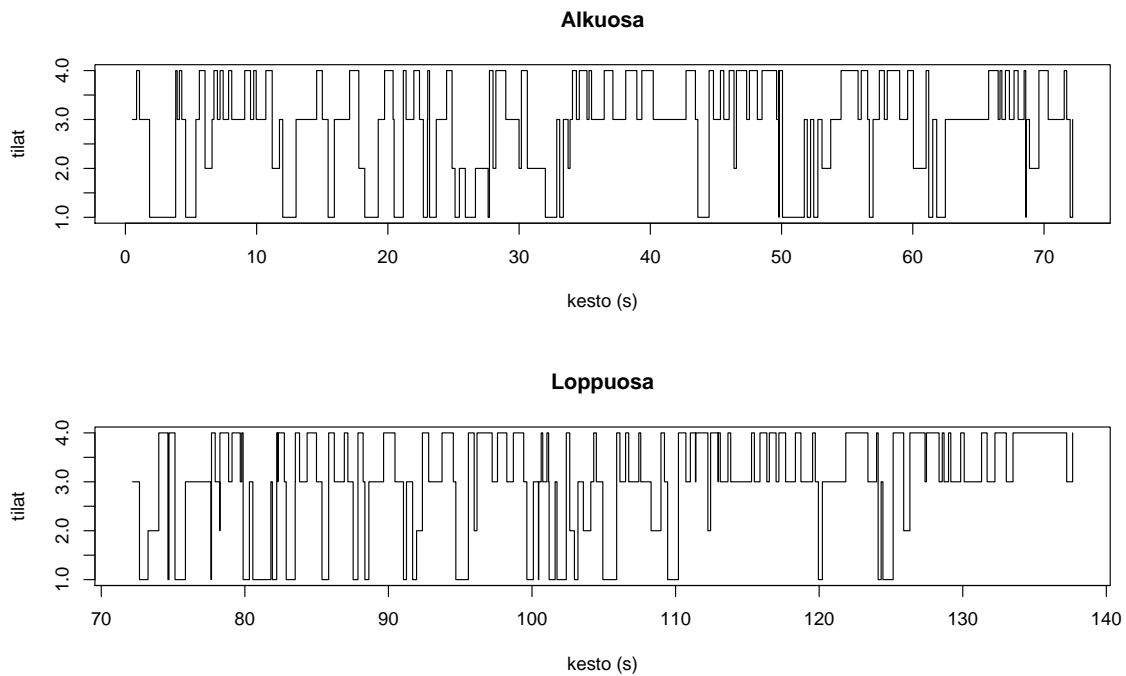
Erilaisten siirtymien lukumäärät ja näistä estimoidut siirtymätodennäköisyydet

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 29 & 14 \\ 6 & 0 & 6 & 11 \\ 32 & 7 & 0 & 75 \\ 9 & 12 & 78 & 0 \end{bmatrix}, \hat{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.085 & 0.617 & 0.298 \\ 0.261 & 0 & 0.261 & 0.478 \\ 0.281 & 0.061 & 0 & 0.658 \\ 0.091 & 0.121 & 0.788 & 0 \end{bmatrix}.$$

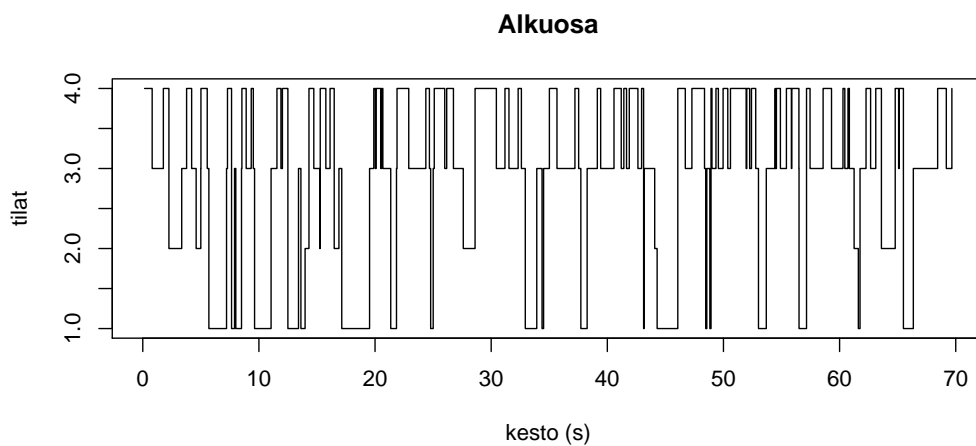
Suurin todennäköisyys on siirtyä tilasta 4 tilaan 3, siis ulkopuolisesta alueesta ruusuköynnöksen yläosaan. Pienin todennäköisyys on siirtymällä tilasta 3 tilaan 2 eli ruusuköynnöksestä jänikseen. Ruusuköynnökseen kohdistuu paljon enemmän fiksaatioita kuin jänikseen ja hain evään, joten todennäköisyys siirtyä tilaan 3 on aina aika suuri ja tiloihin 1 ja 2 suhteellisen pieni.

Hyppyprosesseista kuvassa 6.3 voi vertailla tapahtuman alun ja lopun siirtymiä ja kestoja. Jäniksen ja hain (tilat 2 ja 1) välillä on aika vähän siirtymiä, sen sijaan hain jälkeen katse on siirtynyt usein viereiseen ruusuköynnökseen (tila 3). Jänistä on katsottu aika vähän ja lyhyitä aikoja. Lopussa katse on harhaillut pääasiassa ruusuköynnöksen ja muun alueen (tila 4) välillä. Jos prosessi on stationaarinen, niin alku- ja loppuosan hyppyprosessiesitysten realisaatioiden tulisi näyttää samoilta. Näiden kuvien perusteella stationaarisuus voidaan ehkä kyseenalaistaa.

Simuloidaan vielä estimaattien perusteella silmänliikettä ja verrataan sitä alkuperäiseen aineistoon. Kuvasta 6.4 nähdään simuloidun hyppyprosessin alkuosa, prosessi jatkuu samantyyppisenä. Voidaan havaita, että prosessi näyttää aika tasaiselta alkuperäiseen aineistoon verrattuna. Tämä johtuu siitä, että simuloinnissa siirtymätodennäköisyydet ja kestojen jakaumat pysyvät vakioina eli prosessi on stationaarinen. Tästä voisi päätellä, että tässä aineistossa stationaarisuusoletus ei päde, sillä reaaliaineiston hyppyprosessi näyttää vähemmän säännönmukaiselta.



Kuva 6.3: Hyppyprosessiesitys, kun katseluaika on jaettu kahteen osaan.



Kuva 6.4: Estimointien avulla simuloitu prosessi, hyppyprosessiesitys.

## 6.3 Prosessien vertailua

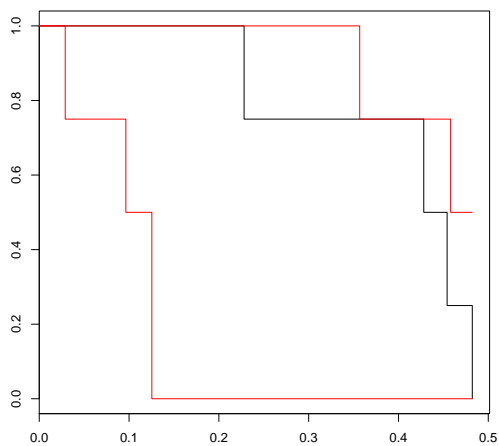
Tutkitaan nyt semi-Markov-prosessin ja viivästetyn prosessin sopivuutta aineistoon eli tutkitaan ehdollistamalla, onko seuraavalla tai edellisellä tilalla vaikutusta. Verataan siis näitä malleja perusmalliin, jossa kestot riippuvat ainoastaan tilasta, jossa ollaan sillä hetkellä. Käytetään edelleen samaa aineistoa kuin edellä eli yhden henkilön silmänliikkeitä yhden maalauksen osalta. Tehdään aluksi vertailu elinaikamallinnuksella, Kaplan-Meier-estimaatteja käyttäen. Sen jälkeen testataan malleja uskottavuussuhteen testillä.

### 6.3.1 Kaplan-Meier-estimaatit

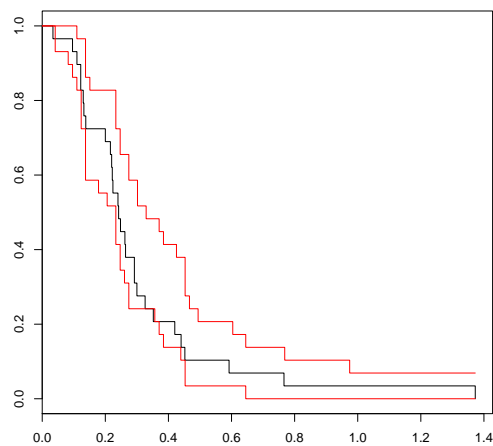
Tarkastellaan aluksi semi-Markov-prosessin sopivuutta aineistoon. Lasketaan välttöfunktioille Kaplan-Meier-estimaatit, jokaisen siirtymäparin  $(i, j)$  kestoille erikseen. Saadaan siis  $4 \times 3 = 12$  erilaista välttöfunktioita, sillä siirtymiä tilan sisällä ei tapahdu. Oletetaan, että tilan  $i$  kestot ja tilan  $i$  ehdolliset kestot ehdolla seuraava tila  $j$  ovat samasta jakaumasta. Lasketaan välttöfunktioille ala- ja ylärajat permutoimalla tilan  $i$  kestoja. Permutaatioista otetaan otos, jonka koko on sama kuin tutkittavalla siirtymäparilla  $(i, j)$ . Estimoidaan jokaiselle otokselle välttöfunktio. Näistä välttöfunktioista poimitaan minimi- ja maksimiarvot kohdissa  $t_0, \dots, t_{100}$ . Näistä minimi- ja maksimiarvoista saadaan ala- ja ylärajat välttöfunktioille. Tarkastelukohdat on valittu tasavälein jakamalla aika-akseli 100 osaväliin niin, että  $t_0 = 0$  ja  $t_{100}$  on pisimmän fiksaation päättymisaika.

Viivästetyssä prosessissa välttöfunktioiden Kaplan-Meier-estimaatit lasketaan nyt siirtymäpareille  $(h, i)$  ja välttöfunktioita on 12 kpl. Jotta permutointi on mahdollista, oletetaan, että tilan  $i$  kestot ja tilan  $i$  ehdolliset kestot ehdolla edellinen tila  $h$  ovat samasta jakaumasta. Permutointi suoritetaan samaan tapaan kuin edellä.

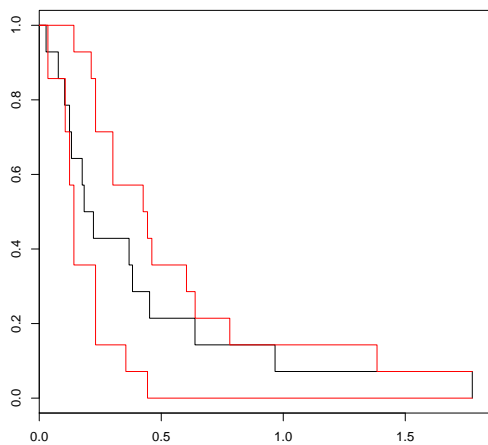
Välttöfunktioit rajoineen on nähtävissä semi-Markov-prosessille kuvissa 6.5 – 6.16 ja viivästetylle prosessille kuvissa 6.17 – 6.28. Kuvista voi nähdä, että välttöfunktioit pysyttelevät aika hyvin rajojen sisällä. Kun havaintoja on vähän, rajat ovat varsin väljät eli hajonta on suurta. Voimme päätellä, että semi-Markov-prosessia tai viivästettyä prosessia ei tarvita, sillä seuraavalla tai edellisellä tilalla ehdollistaminen on turha: jakaumat ovat samat kuin mallilla, jossa kestoihin vaikuttaa ainoastaan tila, jossa ollaan.



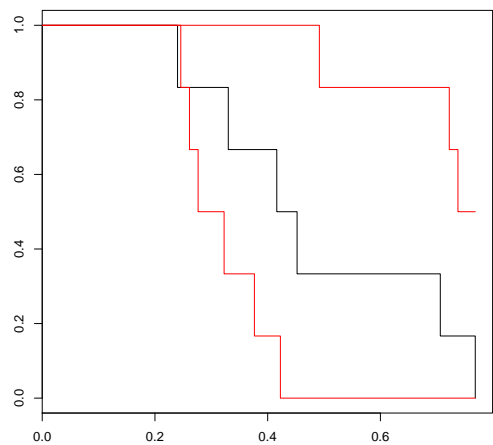
Kuva 6.5: Välttöfunktio tilan 1 kestoille, kun seuraava tila on 2.



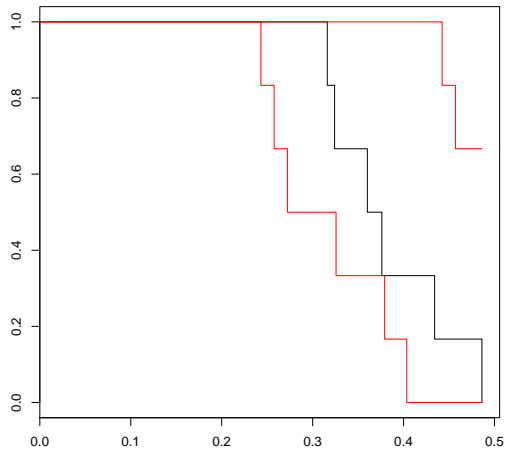
Kuva 6.6: Välttöfunktio tilan 1 kestoille, kun seuraava tila on 3.



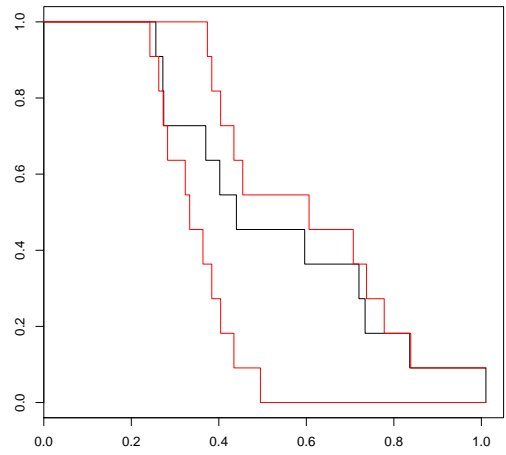
Kuva 6.7: Välttöfunktio tilan 1 kestoille, kun seuraava tila on 4.



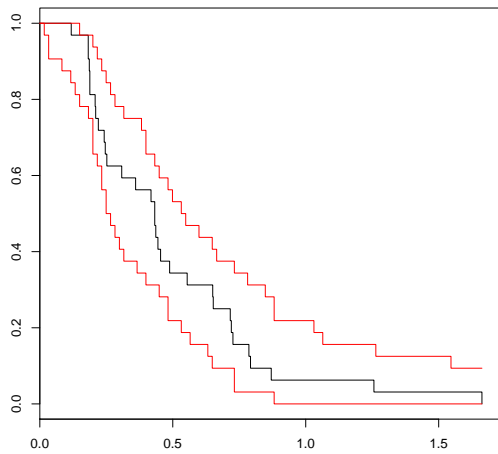
Kuva 6.8: Välttöfunktio tilan 2 kestoille, kun seuraava tila on 1.



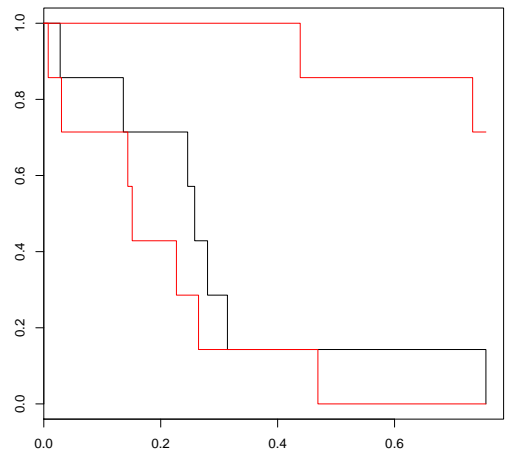
Kuva 6.9: Välttöfunktio tilan 2 kestoille, kun seuraava tila on 3.



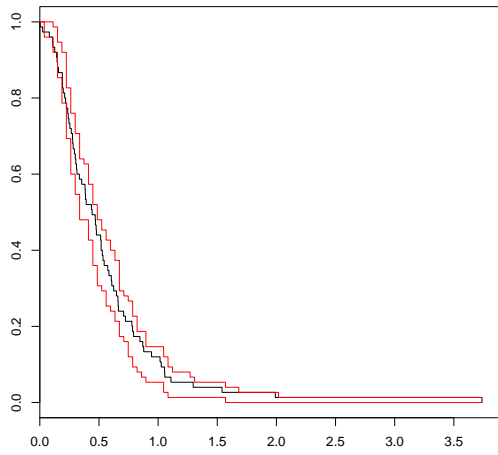
Kuva 6.10: Välttöfunktio tilan 2 kestoille, kun seuraava tila on 4.



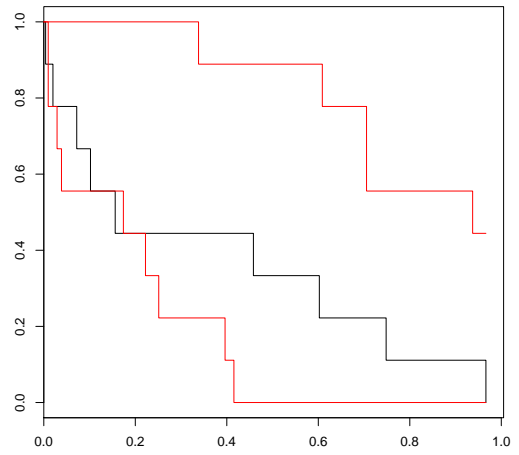
Kuva 6.11: Välttöfunktio tilan 3 kestoille, kun seuraava tila on 1.



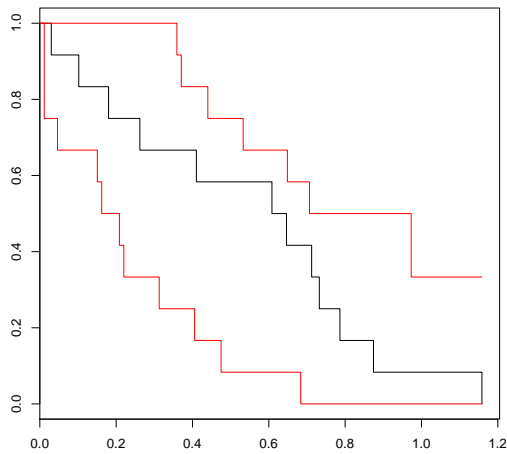
Kuva 6.12: Välttöfunktio tilan 3 kestoille, kun seuraava tila on 2.



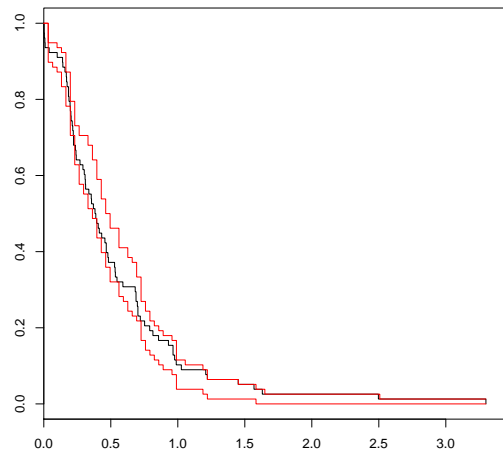
Kuva 6.13: Välttöfunktio tilan 3 kestoille, kun seuraava tila on 4.



Kuva 6.14: Välttöfunktio tilan 4 kestoille, kun seuraava tila on 1.

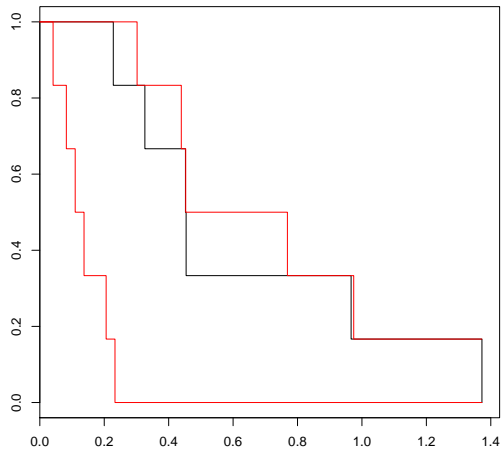


Kuva 6.15: Välttöfunktio tilan 4 kestoille, kun seuraava tila on 2.

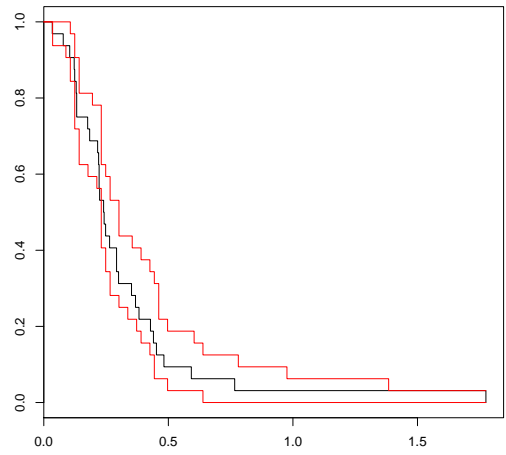


Kuva 6.16: Välttöfunktio tilan 4 kestoille, kun seuraava tila on 3.

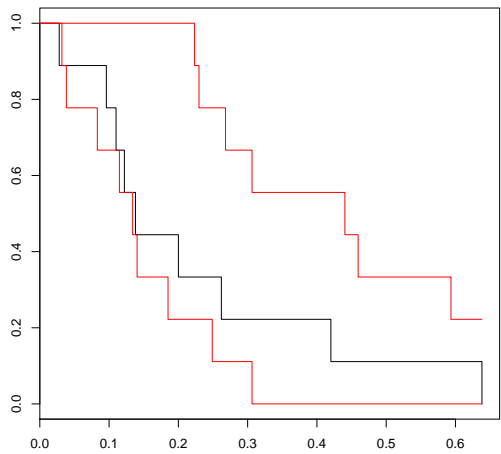




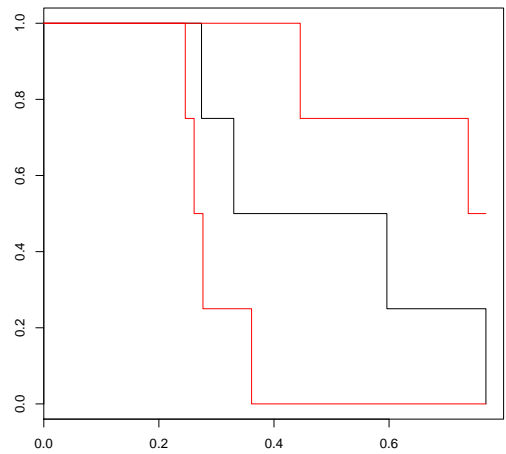
Kuva 6.17: Välttöfunktio tilan 1 kestoille, kun edellinen tila on 2.



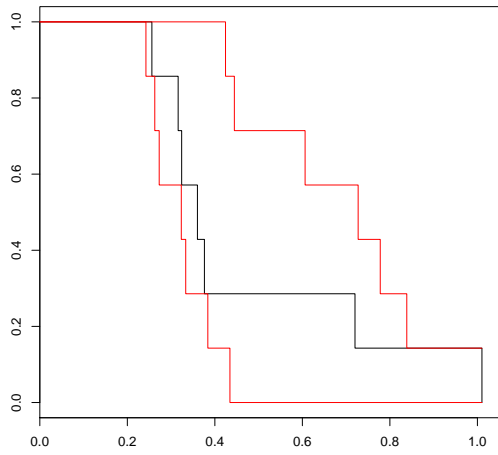
Kuva 6.18: Välttöfunktio tilan 1 kestoille, kun edellinen tila on 3.



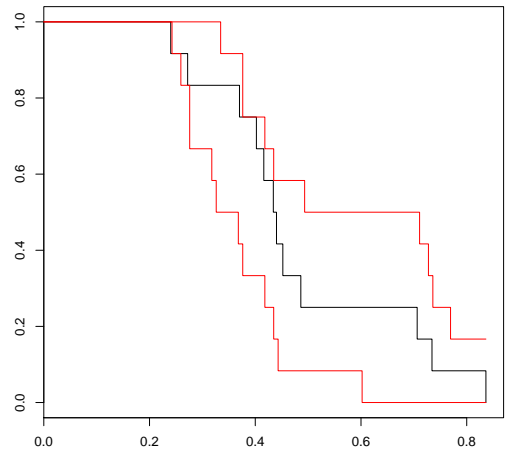
Kuva 6.19: Välttöfunktio tilan 1 kestoille, kun edellinen tila on 4.



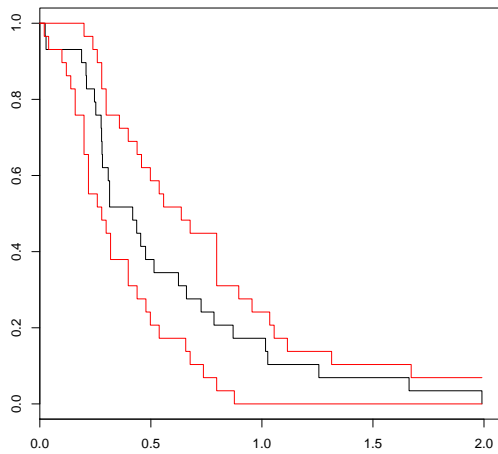
Kuva 6.20: Välttöfunktio tilan 2 kestoille, kun edellinen tila on 1.



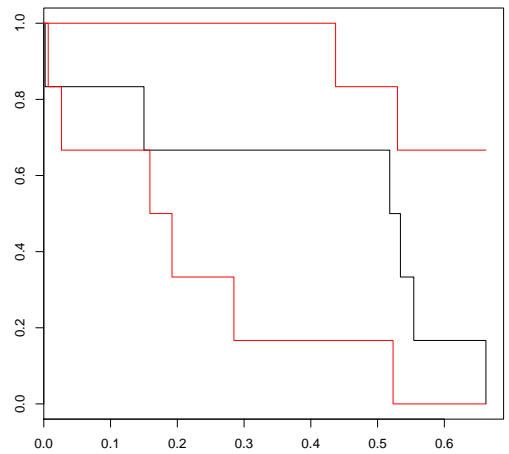
Kuva 6.21: Välttöfunktio tilan 2 kestoille, kun edellinen tila on 3.



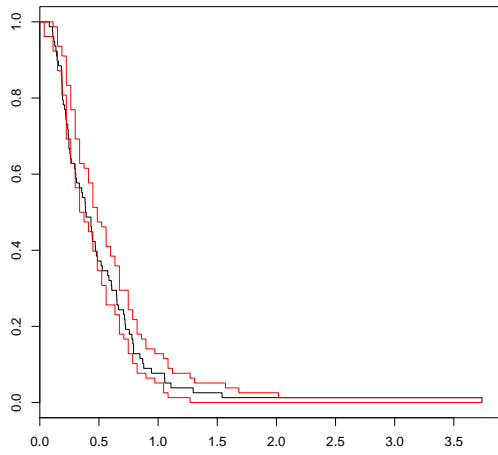
Kuva 6.22: Välttöfunktio tilan 2 kestoille, kun edellinen tila on 4.



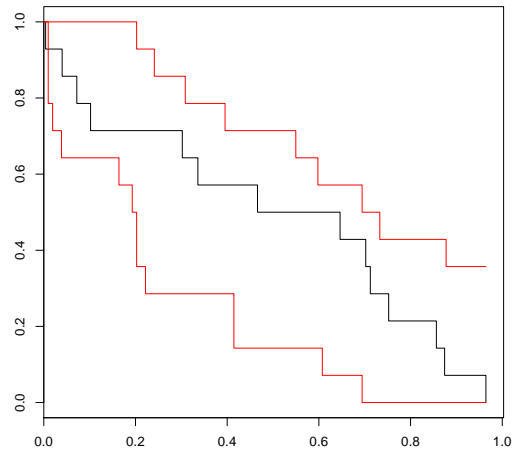
Kuva 6.23: Välttöfunktio tilan 3 kestoille, kun edellinen tila on 1.



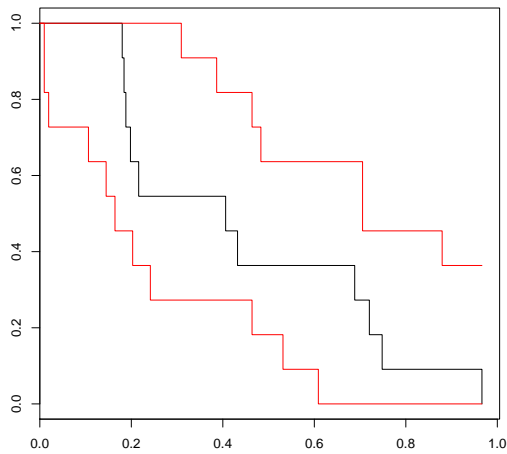
Kuva 6.24: Välttöfunktio tilan 3 kestoille, kun edellinen tila on 2.



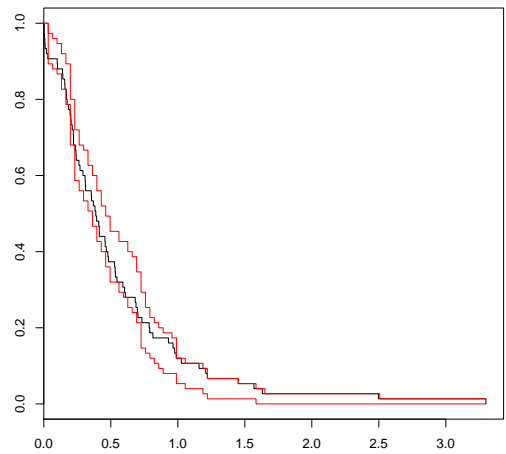
Kuva 6.25: Välttöfunktio tilan 3 kestoille, kun edellinen tila on 4.



Kuva 6.26: Välttöfunktio tilan 4 kestoille, kun edellinen tila on 1.

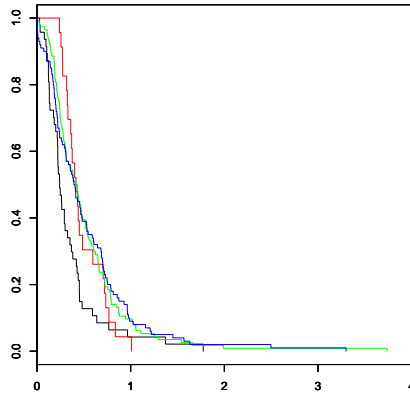


Kuva 6.27: Välttöfunktio tilan 4 kestoille, kun edellinen tila on 2.



Kuva 6.28: Välttöfunktio tilan 4 kestoille, kun edellinen tila on 3.

Tutkitaan nyt kestoja tilassa  $i$ , eli jätetään pois seuraavan tai edellisen tilan vaikutukset. Selvitetään *Kruskal-Wallis-testillä*, onko näillä neljällä jakaumalla eroa. Kruskal-Wallis-testistä voi lukea esimerkiksi Leen [12] teoksesta. Väلتtöfunktio on piirretty eri väreillä kuvaan 6.29.



Kuva 6.29: Tilan 1 kestojen väلتtöfunktio mustalla, tilan 2 punaisella, tilan 3 vihreällä ja tilan 4 sinisellä.

Kruskal-Wallis-testin p-arvoksi saadaan 0.0052, joten aineistossa on näyttöä siitä, että fiksaatioaikojen jakaumat eivät ole samat. Kuvan perusteella tilan 1 kestojen jakauma poikkeaa hieman muista. Kun tehdään Kruskal-Wallis-testi pelkästään tilojen 2, 3 ja 4 kestojen jakaumille, saadaan p-arvoksi 0.6063. Siis näiden kolmen tilan kestojen jakaumat ovat samat, mutta tilan 1 kestojen jakauma poikkeaa näistä kolmesta tilastollisesti merkitsevästi.

Vaihtoehtoinen tapa tutkia tilan merkitystä kestoille on *Coxin regressio*, josta voi lukea tarkemmin esimerkiksi Colletin [2] ja Leen [12] teoksista. Valitaan selittäjäksi tila ja tutkitaan, ovatko väلتtöfunktioit samoja eli onko tilalla vaikutusta kestoihin. Tulokset nähtävillä Taulukossa 1.

Taulukko 1: Coxin regression tulokset

| Muuttuja | $\beta$ | SE( $\beta$ ) | p-arvo | exp( $\beta$ ) |
|----------|---------|---------------|--------|----------------|
| tila     | -0.155  | 0.060         | 0.010  | 0.857          |

P-arvoksi saadaan 0.010, joten hypoteesi ei saa tukea. Tällöin myös Coxin regressio antaa tulokseksi, että tilalla on vaikutusta kestoihin, jolloin väلتtöfunktioit tiloille eivät ole samat. Tarkempaa analyysiä Coxin regressiolle ei tässä suoriteta.

### 6.3.2 Uskottavuusosamäärän testi

Tutkitaan vielä mallien sopivuutta uskottavuussuhteen testillä, jossa verrataan kahta sisäkkäistä mallia. Testit ovat nyt ehdollisia ehdolla siirtymät, sillä kestot ovat ehdollisesti riippumattomia, kun siirtymät tunnetaan. Määritellään uskottavuusfunktiot fiksaatioiden kestoille, kun kestojen jakaumat ovat gammajakaumia. Aluksi täytyy laskea estimaatit gammajakaumien parametreille. Tämä onnistuu numeerisesti esimerkiksi Newtonin menetelmällä. Saadut estimaatit ja keskivirheet ovat Taulukossa 2.

Parametrien estimaattien keskivirheet on laskettu Hessin matriisin avulla. Keskiarvon keskivirhe saadaan gammajakauman toisen parametrin kautta. Tällöin parametrit ovat  $\kappa = \nu$  ja  $\mu = \frac{\nu}{\lambda}$ . Nyt parametri  $\mu$  on itseasiassa jakauman keskiarvo. Hessin matriisin avulla saadaan  $\text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{\mu^2}{n\kappa}$ , josta voidaan edelleen laskea keskivirhe.

Mediaanin keskivirheen laskemisessa on käytetty simulointia. Estimoitujen parametrien määräämstä gammajakaumasta on simuloitu vastaavan aineiston kokoisia otoksia. Näistä otoksista on laskettu mediaanit, jotka muodostavat otantajakauman. Saadusta jakaumasta estimoidaan keskivirhe. Käytetty menetelmä on nimeltään *parametrinen bootstrap*. Keskivirheet ovat nyt hieman liian pieniä, koska ne on laskettu estimaattien avulla. Huomataan, että keskiarvojen ja mediaanien keskivirheet ovat likimain samansuuruisia.

Taulukko 2: Newtonin menetelmällä ratkaistut parametrien estimaatit ja niistä lasketut kestojen keskiarvot ( $\bar{y}$ ) ja mediaanit ( $\tilde{y}$ ) sekä keskivirheet, Markov-malli.

| Tila $i$ | $\hat{\nu}$ | $\text{SE}(\hat{\nu})$ | $\hat{\lambda}$ | $\text{SE}(\hat{\lambda})$ | $\bar{y}$ | $\text{SE}(\bar{y})$ | $\tilde{y}$ | $\text{SE}(\tilde{y})$ |
|----------|-------------|------------------------|-----------------|----------------------------|-----------|----------------------|-------------|------------------------|
| 1        | 1.716       | 0.326                  | 5.025           | 1.106                      | 0.342     | 0.038                | 0.278       | 0.042                  |
| 2        | 6.075       | 1.747                  | 12.562          | 3.766                      | 0.484     | 0.041                | 0.457       | 0.049                  |
| 3        | 1.692       | 0.206                  | 3.290           | 0.465                      | 0.514     | 0.037                | 0.417       | 0.041                  |
| 4        | 1.038       | 0.130                  | 2.002           | 0.318                      | 0.519     | 0.051                | 0.365       | 0.051                  |

Keskiarvoja ja mediaaneja verrattaessa nähdään, että tilan 1 arvot ovat selvästi pienempiä kuin muiden tilojen arvot. Näyttää siltä, että tilan 1 jakauma poikkeaa muista jakaumista. Tämä poikkeama todettiin jo edellä tilastollisesti merkitseväksi.

Kun otetaan huomioon, mihin tilaan ollaan siirtymässä seuraavaksi, parametrien määrä kasvaa. Semi-Markov-mallin mukaiset parametrien estimaatit ovat taulukossa 3.

Taulukko 3: Newtonin menetelmällä ratkaistut parametrien estimaatit ja niistä lasketut kestojen keskiarvot ( $\bar{y}$ ) ja mediaanit ( $y_{med}$ ) sekä keskivirheet, semi-Markov-malli.

| Siirtymä ( $i, j$ ) | $\hat{\nu}$ | SE( $\hat{\nu}$ ) | $\hat{\lambda}$ | SE( $\hat{\lambda}$ ) | $\bar{y}$ | SE( $\bar{y}$ ) | $y_{med}$ | SE( $y_{med}$ ) |
|---------------------|-------------|-------------------|-----------------|-----------------------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|
| (1, 2)              | 12.562      | 8.790             | 31.552          | 22.525                | 0.398     | 0.056           | 0.388     | 0.062           |
| (1, 3)              | 2.211       | 0.543             | 7.261           | 2.000                 | 0.304     | 0.038           | 0.260     | 0.043           |
| (1, 4)              | 1.089       | 0.365             | 2.709           | 1.143                 | 0.402     | 0.103           | 0.288     | 0.103           |
| (2, 1)              | 6.392       | 3.603             | 13.166          | 7.721                 | 0.486     | 0.078           | 0.460     | 0.086           |
| (2, 3)              | 42.093      | 24.414            | 109.955         | 64.157                | 0.383     | 0.024           | 0.380     | 0.027           |
| (2, 4)              | 4.836       | 1.997             | 8.997           | 3.916                 | 0.537     | 0.074           | 0.501     | 0.087           |
| (3, 1)              | 2.584       | 0.609             | 5.306           | 1.381                 | 0.487     | 0.054           | 0.426     | 0.061           |
| (3, 2)              | 1.648       | 0.808             | 5.713           | 3.267                 | 0.288     | 0.085           | 0.233     | 0.093           |
| (3, 4)              | 1.543       | 0.230             | 2.822           | 0.496                 | 0.547     | 0.051           | 0.434     | 0.055           |
| (4, 1)              | 0.660       | 0.264             | 1.898           | 1.087                 | 0.348     | 0.143           | 0.195     | 0.132           |
| (4, 2)              | 1.577       | 0.589             | 2.910           | 1.276                 | 0.542     | 0.125           | 0.433     | 0.133           |
| (4, 3)              | 1.061       | 0.150             | 1.979           | 0.355                 | 0.536     | 0.059           | 0.380     | 0.059           |

Määritellään uskottavuusfunktio tilan  $i$  kestoille,

$$\begin{aligned}
 L_i &= L(\nu_i, \lambda_i) \\
 &= \prod_{k=1}^n f(y_k; \nu_i, \lambda_i) \\
 &= \frac{\lambda_i^{n\nu_i}}{\Gamma(\nu_i)^n} \left( \prod_{k=1}^n y_k^{\nu_i-1} \right) e^{-\lambda_i \sum_{k=1}^n y_k}.
 \end{aligned}$$

Vastaavasti uskottavuusfunktio tilan  $i$  kestoille, kun seuraava tila on tila  $j$ ,

$$\begin{aligned}
 L_{ij} &= L(\nu_{ij}, \lambda_{ij}) \\
 &= \prod_{k=1}^n f(y_k; \nu_{ij}, \lambda_{ij}) \\
 &= \frac{\lambda_{ij}^{n\nu_{ij}}}{\Gamma(\hat{\nu}_{ij})^n} \left( \prod_{k=1}^n y_k^{\nu_{ij}-1} \right) e^{-\lambda_{ij} \sum_{k=1}^n y_k}.
 \end{aligned}$$

Tutkitaan aluksi semi-Markov-mallin sopivuutta aineistoon. Verrataan siis mallia, jossa kestot riippuvat ainoastaan tilasta  $i$  ja semi-Markov-mallia, jossa kestot riippuvat lisäksi tilasta  $j$ . Testattavat mallit ovat

- $M_1$  : Kestot riippuvat ainoastaan tilasta  $i$ ,  
ts. kestojen ehdolliset jakaumat ehdolla  $j$  ovat samat
- $M_2$  : Kestot riippuvat myös tilasta  $j$ ,  
ts. kestojen ehdolliset jakaumat ehdolla  $j$  eivät ole samat.

Uskottavuusosamäärän testi semi-Markov-mallille on

$$(6.1) \quad -2\log\left(\frac{L_i}{L_{ij}}\right) = -2\log\left(\frac{L(\boldsymbol{\nu}_i, \boldsymbol{\lambda}_i)}{L(\boldsymbol{\nu}_{ij}, \boldsymbol{\lambda}_{ij})}\right), \quad i = (1, \dots, r)$$

ja

$$\boldsymbol{\nu}_i = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r], \quad \boldsymbol{\lambda}_i = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r],$$

$$\boldsymbol{\nu}_{ij} = \begin{bmatrix} - & \nu_{12} & \nu_{13} & \dots & \nu_{1r} \\ \nu_{21} & - & \nu_{23} & \dots & \nu_{2r} \\ \nu_{31} & \nu_{32} & - & \dots & \nu_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{r1} & \nu_{r2} & \nu_{r3} & \dots & - \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\lambda}_{ij} = \begin{bmatrix} - & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1r} \\ \lambda_{21} & - & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2r} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & - & \dots & \lambda_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \lambda_{r3} & \dots & - \end{bmatrix}.$$

Tilan  $i$  kestojen ehdollisten jakaumien parametrit ovat nyt rivillä  $i$ . Diagonaaleilta puuttuvat arvot, sillä siirtymiä tilan sisällä ei tapahdu. Nyt testisuure 6.1 noudattaa  $\chi^2(k)$ -jakaumaa, kun oletetaan mallin  $M_1$  sopivan aineistoon. Estimoitavia parametreja on yksinkertaisemmassa mallissa  $2r$  kappaletta, semi-Markov-mallissa  $2(r^2 - r)$  kappaletta. Näiden erotuksesta saadaan vapausasteiksi  $k = 2r(r - 1)$ . Käytetään nyt Newtonin menetelmällä saatuja estimaatteja ja lasketaan arvo uskottavuussuhteelle, kun  $i, j = (1, 2, 3, 4)$ ,

$$(6.2) \quad -2\log\left(\frac{L(\hat{\boldsymbol{\nu}}_i, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i)}{L(\hat{\boldsymbol{\nu}}_{ij}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{ij})}\right) = 30.40781.$$

Kriittinen viiden prosentin raja on tätä pienempi,  $\chi_{0.05}^2(16) = 26.296$ . Tällöin  $p < 0.05$  eli aineiston perusteella tarvitaan myös riippuvuus seuraavasta tilasta  $j$ , joten semi-Markov-malli  $M_2$  kelpaa kuvaamaan aineistoa. Tutkitaan vielä tarkemmin, onko saatu jakaumien ero jonkin tietyn tilan kestoissa. Lasketaan tilakohtaisesti uskottavuussuhteet semi-Markov-mallille, esimerkiksi tilalle 1

$$-2\log\left(\frac{L_1}{L_{1j}}\right) = -2\log\left(\frac{L(\hat{\boldsymbol{\nu}}_1, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_1)}{L(\hat{\boldsymbol{\nu}}_{1j}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{1j})}\right) = 9.3667.$$

Nollahypoteesin mukaan tilan 1 kestojen ehdolliset jakaumat ehdolla seuraava tila ovat samoja. Tilan 1 kestojen mallissa on vain 2 parametria, vastaavassa semi-Markov-mallissa on nyt  $2 \cdot 3 = 6$  parametria, vapausasteita on tällöin 4. Nyt viiden prosentin kriittinen arvo on  $\chi_{0.05}^2(4) = 9.488$ , saatu testisuure on hieman tätä pienempi, joten aineistossa ei ole näyttöä yksinkertaisempaa mallia  $M_1$  vastaan. Siis seuraavalla tilalla ei ole vaikutusta tilan 1 kestoihin. Vastaavat testit voidaan tehdä tiloille 2, 3 ja 4.

Saadaan tulokset

$$\begin{aligned}
 -2\log\left(\frac{L_2}{L_{2j}}\right) &= -2\log\left(\frac{L(\hat{\nu}_2, \hat{\lambda}_2)}{L(\hat{\nu}_{2j}, \hat{\lambda}_{2j})}\right) = 9.5551, \\
 -2\log\left(\frac{L_3}{L_{3j}}\right) &= -2\log\left(\frac{L(\hat{\nu}_3, \hat{\lambda}_3)}{L(\hat{\nu}_{3j}, \hat{\lambda}_{3j})}\right) = 7.2060, \\
 -2\log\left(\frac{L_4}{L_{4j}}\right) &= -2\log\left(\frac{L(\hat{\nu}_4, \hat{\lambda}_4)}{L(\hat{\nu}_{4j}, \hat{\lambda}_{4j})}\right) = 4.2800.
 \end{aligned}$$

Tuloksista huomataan, että ainoastaan tilan 2 uskottavuussuhteen testin arvo ylittää niukasti viiden prosentin kriittisen rajan. Tällöin siis ainoastaan tilan 2 ehdolliset jakaumat eroavat toisistaan, muiden tilojen osalta jakaumissa ei ole eroa. Tämän vuoksi testi 6.2 johti nollahypoteesin hylkäämiseen ja saatiin tulos, että semi-Markov-malli sopii aineistoon paremmin kuin pelkästään lähtötilasta riippuvien fiksaatioiden malli.

Testataan vielä viivästetyn mallin sopivuutta aineistoon. Viivästetyssä mallissa kestojen oletetaan riippuvan tilasta, jossa ollaan ja tilasta, josta tultiin. Tällöin mallissa on yhtä paljon parametreja kuin semi-Markov-mallissa. Kestojen jakaumien parametrien estimaatit ovat taulukossa 4.

Taulukko 4: Newtonin menetelmällä ratkaistut parametrien estimaatit ja niistä lasketut kestojen keskiarvot ( $\bar{y}$ ) ja mediaanit ( $y_{med}$ ) sekä keskivirheet, viivästetty malli.

| Siirtymä ( $i, j$ ) | $\hat{\nu}$ | SE( $\hat{\nu}$ ) | $\hat{\lambda}$ | SE( $\hat{\lambda}$ ) | $\bar{y}$ | SE( $\bar{y}$ ) | $y_{med}$ | SE( $y_{med}$ ) |
|---------------------|-------------|-------------------|-----------------|-----------------------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|
| (2, 1)              | 2.747       | 1.500             | 4.337           | 2.600                 | 0.633     | 0.156           | 0.558     | 0.167           |
| (3, 1)              | 2.004       | 0.465             | 6.262           | 1.652                 | 0.320     | 0.040           | 0.269     | 0.044           |
| (4, 1)              | 1.646       | 0.711             | 7.352           | 3.708                 | 0.224     | 0.058           | 0.181     | 0.064           |
| (1, 2)              | 5.914       | 4.074             | 12.016          | 8.640                 | 0.492     | 0.101           | 0.465     | 0.108           |
| (3, 2)              | 4.396       | 2.268             | 9.148           | 5.001                 | 0.480     | 0.087           | 0.445     | 0.102           |
| (4, 2)              | 7.954       | 3.187             | 16.485          | 6.818                 | 0.483     | 0.049           | 0.462     | 0.057           |
| (1, 3)              | 1.528       | 0.366             | 2.749           | 0.777                 | 0.556     | 0.084           | 0.441     | 0.090           |
| (2, 3)              | 0.728       | 0.360             | 1.805           | 1.241                 | 0.403     | 0.193           | 0.240     | 0.177           |
| (4, 3)              | 1.989       | 0.296             | 3.924           | 0.663                 | 0.507     | 0.041           | 0.425     | 0.046           |
| (1, 4)              | 0.966       | 0.321             | 1.980           | 0.850                 | 0.488     | 0.133           | 0.333     | 0.130           |
| (2, 4)              | 2.699       | 1.088             | 6.025           | 2.669                 | 0.448     | 0.082           | 0.394     | 0.095           |
| (3, 4)              | 0.973       | 0.140             | 1.820           | 0.337                 | 0.535     | 0.063           | 0.367     | 0.062           |



Viivästetyssä mallissa fiksaatioiden kestot riippuvat edellisestä tilasta  $h$ , joten

$$\begin{aligned} L_{hi} &= L(\nu_{hi}, \lambda_{hi}) \\ &= \prod_{k=1}^n f(y_k; \nu_{hi}, \lambda_{hi}) \\ &= \frac{\lambda_{hi}^{n\nu_{hi}}}{\Gamma(\nu_{hi})^n} \left( \prod_{k=1}^n y_k^{\nu_{hi}-1} \right) e^{-\lambda_{hi} \sum_{k=1}^n y_k}. \end{aligned}$$

Testattavat mallit ovat nyt

- $M_1$  : Kestot riippuvat ainoastaan tilasta  $i$ ,  
 ts. kestojen ehdolliset jakaumat ehdolla  $h$  ovat samat  
 $M_2$  : Kestot riippuvat myös edellisestä tilasta  $h$ ,  
 ts. kestojen ehdolliset jakaumat ehdolla  $h$  eivät ole samat.

Uskottavuussuhteen testi viivästetylle mallille on

$$-2\log\left(\frac{L_i}{L_{hi}}\right) = -2\log\left(\frac{L(\boldsymbol{\nu}_i, \boldsymbol{\lambda}_i)}{L(\boldsymbol{\nu}_{hi}, \boldsymbol{\lambda}_{hi})}\right), \text{ missä}$$

$\boldsymbol{\nu}_i$  ja  $\boldsymbol{\lambda}_i$  ovat samat kuin edellä, ja

$$\boldsymbol{\nu}_{hi} = \begin{bmatrix} - & \nu_{12} & \nu_{13} & \dots & \nu_{1r} \\ \nu_{21} & - & \nu_{23} & \dots & \nu_{2r} \\ \nu_{31} & \nu_{32} & - & \dots & \nu_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{r1} & \nu_{r2} & \nu_{r3} & \dots & - \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{\lambda}_{hi} = \begin{bmatrix} - & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1r} \\ \lambda_{21} & - & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2r} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & - & \dots & \lambda_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \lambda_{r3} & \dots & - \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että  $\boldsymbol{\nu}_{hi}$  ja  $\boldsymbol{\lambda}_{hi}$  eivät ole yhteneväisiä semi-Markov-prosessin parametrien kanssa. Tilan  $i$  kestojen ehdollisten jakaumien parametrit voidaan nyt lukea sarakkeesta  $i$ . Sijoitetaan estimoidut parametrit uskottavuusfunktioihin ja saadaan uskottavuussuhteen testille testisuure

$$-2\log\left(\frac{L(\hat{\boldsymbol{\nu}}_i, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i)}{L(\hat{\boldsymbol{\nu}}_{hi}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{hi})}\right) = 20.60952.$$

Viivästetyssä mallissa on saman verran parametreja kuin semi-Markov-mallissa,  $2(r^2 - r)$ . Tällöin vapausasteet pysyvät samoina, kuten myös kriittinen arvo  $\chi_{0.05}^2(16) = 26.296$ . Saatu testisuureen arvo on tätä pienempi, joten ei ole näyttöä mallia  $M_1$  vastaan. Siis tähän aineistoon riittää malli, jossa on riippuvuus ainoastaan lähtötilasta  $i$ , riippuvuus edellisestä tilasta  $h$  ei ole tarpeellista.

## 7 Mallien käyttö

Tarkastellaan nyt yhteenvedomaisesti, miten edellä esitettyjä malleja voidaan hyödyntää käytännössä. Tässä työssä esitetty prosessinäkökulma mahdollistaa entisten analyysitapojen lisäksi myös uusien menetelmien kehittämisen silmänliikeaineistojen tutkimiseen. Hyppoprosessiesityksestä voidaan laskea useita tunnuslukuja, ja kaikki nämä saadaan laskettua myös prosessimääritelmän avulla.

### 7.1 Parametrit ja niiden estimaattorit

Fiksaatioita saattaa kohdistua enemmän joihinkin tiettyihin paikkoihin, kuten edellä mainitun Risto Suomen maalauksen jänikseen tai ruusuköynnökseen. Tiettyjä paikkoja myös katsotaan pidempään kuin toisia. Muun muassa näitä ominaisuuksia kuvaamaan tarvitaan tunnuslukuja, joilla aineiston informaatiota voidaan tiivistää. Määritellään nyt yleinen parametri teoreettiselle jakaumalle sekä muutamia hyödyllisiä tunnuslukuja ja niiden estimaattoreita.

#### 7.1.1 Yleinen parametri

Olkoon tunnusluku  $S$  (*statistic*), joka kuvaa jotakin ominaisuutta.  $S$  voi olla esimerkiksi keskiarvo tai välttöfunktio. Merkitään aineistoa symbolilla  $D$  (*data*). Tutkimusongelmaa kuvaavan parametrin  $\Psi$  yleinen muoto on tällöin

$$\Psi = E_{\theta}(S(D)),$$

missä  $\theta$  on prosessin parametri.

#### 7.1.2 Otantajakauma

Tunnusluvun lisäksi halutaan tietää jotain sen luotettavuudesta eli keskivirheestä. Keskivirhe saadaan laskettua otantajakauman avulla.

Otantajakauma voidaan laskea asympotoottisesti, mutta se voi olla vaikeaa. Jos kyseessä on riippumaton tilanne, tunnusluvut ovat yleensä summamuotoisia. Kun otoskoko on suuri, niin keskeisen raja-arvolauseen nojalla summamuotoisten tunnusluku-  
jen otantajakauma on asympotoottisesti normaalijakauma. Normaalijakauman myötä päästään käyttämään monia tilastollisia työkaluja, esimerkiksi t-testien laskeminen voi olla oikeutettua.

Jos asympotoottinen otantajakauman määrääminen ei onnistu, täytyy käyttää simulointia. Simuloinnissa käytetään mallia, jonka parametrit on estimoitu. Kun mallia simuloidaan ja lasketaan jokaisesta simulaatioista tutkittava tunnusluku, saadaan tunnusluvun otantajakauma. Aineistosta laskettu tunnusluku voidaan sijoittaa tähän jakaumaan, jolloin saadaan selville jotain mallin kelpoisuudesta. Mikäli tunnusluku on otantajakauman ääripäissä, voidaan epäillä, ettei malli ole hyvä.

### 7.1.3 Tunnuslukujen prosessikarakterisointeja

#### Tilaan saapumisten intensiteetti

Oletetaan, että silmänliikkeen yhtä piirrettä kuvaa luku  $H_i$ , joka on tilaan  $i$  saapumisten määrä aikayksikköä  $T$  kohti. Prosessin avulla määriteltynä tämä tunnusluku voidaan esittää osotusarvona

$$H_i = \frac{1}{T} E(\{t \mid X(t_+) = i, X(t_-) \neq i, X(t_+) \neq X(t_-)\}, 0 \leq t \leq T).$$

Hyppy hetkellä  $t$  on määritelty luvussa 3. Tilaan saapumisten määrän estimaattori on

$$\hat{H}_i = \frac{1}{T} \#(\{t \mid X(t_+) = i, X(t_-) \neq i, X(t_+) \neq X(t_-)\}, 0 \leq t \leq T),$$

missä merkintä  $\#$  tarkoittaa lukumäärää. Tästä on helppo laskea myös kaikkien siirtymien määrä aikayksikköä  $T$  kohti summaamalla edellistä yli kaikkien indeksien  $i$

$$H = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n E(\{t \mid X(t_+) = i, X(t_-) \neq i, X(t_+) \neq X(t_-)\}, 0 \leq t \leq T)$$

ja edelleen tämän estimaattori

$$\hat{H} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \#(\{t \mid X(t_+) = i, X(t_-) \neq i, X(t_+) \neq X(t_-)\}, 0 \leq t \leq T).$$

#### Siirtymäparin odotettu lukumäärä

Koska malleissa saattaa olla riippuvuutta mukana, kannattaa tutkia eri siirtymäpareja. Tunnuslukuna voi olla esimerkiksi siirtymäparin  $(i, j)$  odotettu lukumäärä ajanjaksoa  $T$  kohti,

$$H_{ij} = \frac{1}{T} E(\{t \mid X(t_+) = i, X(t_-) = j\}, 0 \leq t \leq T),$$

missä  $i \neq j$ . Estimaattori siirtymäparien  $(i, j)$  lukumäärälle on

$$\hat{H}_{ij} = \frac{1}{T} \#(\{t \mid X(t_+) = i, X(t_-) = j\}, 0 \leq t \leq T), \quad i \neq j.$$

Siirtymämatriisin  $P$  alkiot saadaan nyt näiden tunnuslukujen avulla,

$$p_{ij} = \frac{H_{ij}}{H_i}.$$

Tällöin estimaattori siirtymätodennäköisyydelle tilasta  $i$  tilaan  $j$  on

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\hat{H}_{ij}}{\hat{H}_i}.$$

## Fiksaatioiden kestojen jakauma

Fiksaation kestoissa kiinnostaa erityisesti tilan  $i$  kestojen jakauma. Oletetaan, että hypätään tilaan  $i$  ensimmäistä kertaa hetkellä  $t_{i_0}$  ja olkoon hyppäysten lukumäärä  $p$ . Fiksaation keston määrittämiseksi täytyy etsiä sellainen fiksaatiohetki (siirtymien ajankohta)  $s > t_{i_0}$ , jolloin tilasta  $i$  poistutaan. Siis etsitään fiksaatiohetki  $s$ , joka on lähimpänä hetkeä  $t_{i_0}$  ja jolloin tilasta  $i$  hypätään johonkin muuhun tilaan,

$$s_{i_0} = \min\{s : s > t_{i_0}, X(t_{i_0-}) \neq i, X(t_{i_0+}) = i, X(s-) = i, X(s+) \neq i\}.$$

Kun on löydetty tällainen  $s_{i_0}$ , niin hetkellä  $t_{i_0}$  alkaneen fiksaation kesto tilassa  $i$  on  $Y = s_{i_0} - t_{i_0}$ . Tilan  $i$  fiksaatioiden kestojen jakauma on tällöin

$$F_i(t) = P(Y < t).$$

Kestojen jakaumasta voidaan nyt laskea esimerkiksi perinteisiä keskilukuja tai kestojen summan.

Eräs prosessin kiinnostava ominaisuus on sen rakenne: säilyykö prosessi samantyyppisenä koko ajan vai tapahtuuko siinä muutosta. Jos prosessin todennäköisyyslaki on invariantti ajassa tapahtuvan siirron suhteen, sanotaan että se on stationaarinen. Otetaan aineistosta kaksi saman pituista aikaväliä,  $r_1 = [0, T]$  ja  $r_2 = [T, 2T]$ . Kun näistä molemmista lasketaan jokin tunnusluku  $S$ , niin stationaarisuuden perusteella

$$S_{r_1} = S_{r_2}.$$

Kun simuloidaan estimoitua mallia, voidaan siitä laskea myös tunnusluku  $S$  välillä  $s_1 = [0, T]$ . Tällöin stationaarisuuden perusteella erotuksen

$$\|\hat{S}_{s_1} - \hat{S}_{r_1}\|$$

tulisi olla pieni.

## 7.2 Monte Carlo -testi ja p-arvo

Tunnuslukujen p-arvon laskeminen asymptoottisesti on usein vaikeaa tai jopa mahdotonta. Tällöin vaihtoehtoinen menetelmä on p-arvon määrittäminen eksaktisti simuloimalla, esimerkiksi *Monte Carlo -testillä*. Seuraava teoria Monte Carlo -testistä on Wallerin ja Gotwayn teoksesta [20] hieman mukailleen.

Merkitään nyt aineistosta laskettua tunnuslukua  $S_{obs}$  ja simuloinneista laskettuja tunnuslukujen arvoja  $S_1, \dots, S_n$ . Järjestetään kaikki tunnusluvut suuruusjärjestykseen ja olkoon  $S_{(1)} \leq \dots \leq S_{(k)} \leq S_{obs} \leq S_{(k+1)} \leq \dots \leq S_{(n)}$ . Jos oletetaan, että suuret testisuureen arvot ovat tilastollisesti merkitseviä (yksisuuntainen tilanne) ja oletetaan että malli on oikea, niin eksakti p-arvo on

$$p = P(S \geq S_{obs}) = 1 - \frac{k}{n+1}.$$

Yksinkertainen algoritmi p-arvon määrittämiseen on seuraavanlainen:

1. Asetetaan hypoteesi (usein malli), jonka mukaan  $X(t)$  toteuttaa ehdon  $A$ .
2. Simuloidaan hypoteesin vallitessa mallin mukaista prosessia  $n$  kertaa.
3. Jokaisella simulointikerralla tutkitaan, toteutuuko ehto  $A$ . Jos  $A$  toteutuu, merkitään tulokseksi 1, ja merkitään 0, jos  $A$  ei toteudu.
4. Kun jaetaan ykkösten lukumäärä otosten lukumäärällä  $n$ , saadaan todennäköisyys tapahtumalle  $A$ ,  $p = P(A) = \frac{\#\{1\}}{n}$ .
5. Valitaan testin merkitsevyytasoksi  $\alpha$ . Jos  $p > \alpha$ , asetettu hypoteesi saa tukea.

Monte Carlo -testiä voidaan käyttää myös asymptoottisen jakaumateorian ohella [5]. Testi tarjoaa eksaktin vaihtoehdon pienille otoksille ja lisäksi kätevän tavan testata klassisten testien soveltuvuutta. Mikäli Monte Carlo -testi ja klassiset testit antavat samat tulokset, kaikki on kunnossa. Jos tulokset eroavat, on syy usein klassisten testien jakaumaoletuksissa ja tällöin Monte Carlo -testi on uskottavampi.

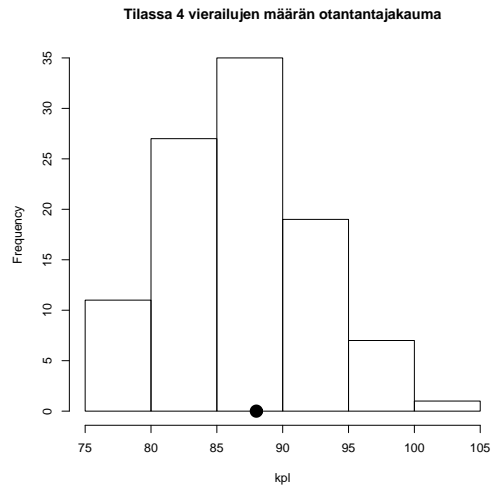
### 7.3 Sovellus

Tutkitaan nyt valittujen tunnuslukujen toimivuutta käytännössä, valitaan malliksi semi-Markov-malli. Simuloidaan semi-Markov-mallia luvussa 6 estimoitujen parametrien avulla. Lasketaan aineistosta ja jokaisesta simulaatiosta tunnusluku  $S$ . Simuloidalla saadaan tunnusluvulle otantajakauma, johon voidaan sijoittaa aineistosta laskettu tunnusluku. Tällöin voidaan nähdä, miten malli onnistuu aineistoa kuvaamaan.

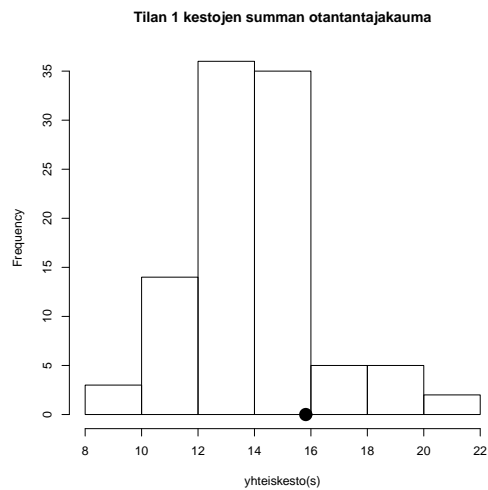
Määritellään termi *efektiivinen aika* tarkoittamaan sitä aikaa, mikä fiksaatioihin on käytetty ts. efektiivinen aika = aika - sakkadeihin käytetty aika. Otetaan tarkasteluajaväliksi väli  $[0, T]$  efektiiviseltä aika-akselilta, missä  $T = 120$  sekuntia (= 2 minuuttia). Kun valitaan suurin  $k$ , jolle fiksaatiohetki  $t_k < 120$ , saadaan tarkasteluun  $k$  ensimmäistä fiksaatiota, jotka ovat tapahtuneet ennen hetkeä  $T$ .

Tehdään 100 kappaletta simulointeja semi-Markov-mallin mukaisesta prosessista. Valitaan tunnusluvuksi  $H_i$  eli tilassa  $i$  vierailujen määrä efektiiviseen ajanhetkeen 2min asti, olkoon  $i = 4$ . Aineistosta laskettuna  $\hat{H}_4 = 88$ . Simuloinnilla saatu otantajakauma ja aineistosta lasketun tunnusluvun sijoittuminen tähän jakaumaan on nähtävissä kuvassa 7.1. Huomataan, että aineistosta laskettu tunnusluku sijoittuu jakauman keskikohdille, joten malli näyttäisi selittävän hyvin aineistoa. Mikäli aineistosta laskettu tunnusluku on otantajakauman oikeassa ääripäässä, voidaan epäillä, ettei malli sovi aineistoa kuvaamaan. Jos nyt oletetaan, että suuret arvot ovat merkitseviä, niin p-arvoksi saadaan 0.43 ja malli saa tukea aineistolta. Siis simuloinnilla saaduista tunnusluvuista 43 % on suurempia kuin aineistosta laskettu tunnusluvun arvo.

Lasketaan vielä toinen tunnusluku semi-Markov-mallin mukaiselle prosessille. Olkoon tämä tunnusluku tilan 1 kestojen summa aikavälillä  $[0, 120]$  sekuntia, merkitään tätä  $Y_{s,1}$ . Aineistosta laskettu tunnusluvun arvo  $\hat{Y}_{s,1} \approx 15.82$  sekuntia. Kuvassa 7.2 näkyy tämän arvon sijoittuminen simuloituun otantajakaumaan. Nyt aineistosta laskettu tunnusluku on lähellä jakauman reunaa. P-arvoksi saadaan kuitenkin 0.16, joten malli saa tukea aineistolta.



Kuva 7.1: Semi-Markov-mallin avulla simuloitu otantajakauma vierailujen määrälle tilassa 4, musta piste on aineistosta laskettu tunnusluvun arvo.



Kuva 7.2: Semi-Markov-mallin avulla simuloitu otantajakauma kestojen summalle tilassa 1, musta piste on aineistosta laskettu tunnusluvun arvo.

## Kiitokset

Suurimmat kiitokset menevät ohjaajalleni tilastotieteen professori Antti Penttiselle, joka on jaksanut innostaa ja tukea minua työn jokaisessa vaiheessa. Kiitokset myös minulle tarjotuista mahdollisuuksista verkostoitumiseen ja Turun silmänliiketutkijoihin tutustumiseen. Turkuun kiitokset erityisesti Marjaana Penttiselle hedelmällisestä yhteistyöstä, jonka myötä sain kokeilla kehitettyä teoriaa myös nuotinlukuaineistoon.

Silmänliiketutkimukseen perehdyttämisestä ja käyttämästäni aineistosta tahdon kiittää kognitiotieteen professori Pertti Saariluomaa, tutkija Sari Kuvvaa ja tutkijakoulutettava Jarkko Hautalaa.

Ville ansaitsee kiitokset siitä, että on jaksanut aina kuunnella, keskustella ja kannustaa, oli ajanhetki tai tilanne mikä tahansa. Lisäksi kiitokset kuuluvat vanhemmilleni, jotka ovat tukeneet opintojani ja tarjonneet lomapaikan, jossa aivotyön on voinut hetkeksi unohtaa.

Kiittäen Anna-Kaisa Ylitalo

## Viitteet

- [1] Baillet, S.D. & Keenan, J.M. The role of encoding and retrieval processes in the recall of text. *Discourse Processes*, 9(3):247–268, 1986.
- [2] Collet, D. *Modelling Survival Data in Medical Research*. Chapman & Hall/CRC, Florida, 2003.
- [3] Cox, D.R. & Isham, V. *Point Processes*. Chapman & Hall, London, 1980.
- [4] Cox, D.R. & Lewis, P.A.W. *The Statistical Analysis of Series of Events*. Methuen & Co, London, 1966.
- [5] Diggle, P.J. *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*. Arnold, a member of the Hodder Headline Group, London, 2003.
- [6] Duchowski, A.T. A breadth-first survey of eye tracking applications. *Behavior Research Methods, Instruments & Computers (BRMIC)*, 34(4):455–470, 2002.
- [7] Duffy, S.A., Keir, J., Rayner, K., Rotello, C.M. & Stewart, A.J. Integrating text and pictorial information: Eye movements when looking at print advertisements. *Journal of Experimental Psychology*, 7(3):219–226, 2001.
- [8] Gill, R.D. Nonparametric estimation based on censored observations of markov renewal process. *Probability Theory and Related Fields*, 53(1):97–116, 1980.
- [9] Guttorp, P. *Stochastic Modelling of Scientific Data*. Chapman & Hall, London, 1995.
- [10] Hardoon, D.R., Shawe-Taylor, J., Ajanki, A., Puolamäki, K. & Kaski, S. Information retrieval by inferring implicit queries from eye movements. *Proceedings of the 11th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS'07)*, 2007.
- [11] Hyönä, J. Silmänliikkeet, kognitio ja lukeminen. *Psykologia*, 30(2):89–95, 1995.
- [12] Lee, E. *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. John Wiley & Sons, Toronto, 1992.
- [13] Lindsey, J.K. *Statistical Analysis of Stochastic Processes in Time*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [14] Locher, P.J. The usefulness of eye movement recordings to subject an aesthetic episode with visual art to empirical scrutiny. *Psychology Science*, 48(2):106–114, 2006.
- [15] Penttinen, M., Huovinen, E., Mikkilä-Erdmann, M., Salonen, P., Silander, M. & Ylitalo, A-K. Studying skill acquisition through eye movements and verbal recalls: The case of music reading. *Poster presented at the 13th biennial conference of the European Association for Research on Learning and Instruction, Amsterdam, the Netherlands.*, 2009.



- [16] R Development Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, 2009. <http://www.R-project.org>.
- [17] Rayner, K. Eye movements in reading and information processing: 20 years of research. *Psychological Bulletin*, 124(3):372–422, 1998.
- [18] Shimojo, S., Simion, C., Shimojo, E. & Scheier, C. Gaze bias both reflects and influences preference. *Nature Neuroscience*, 6(12):1317–1322, 2003.
- [19] Sorensen, D. & Gianola, D. *Likelihood, Bayesian and MCMC Methods in Quantitative Genetics*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [20] Waller, L.A. & Gotway, C.A. *Applied Spatial Statistics for Public Health Data*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2004.