KVASIKONVEKSISUUS TASOSSA

MATTI-PETTERI RAJAHONKA

Tiivistelmä. Kvasikonveksit alueet osoitetaan Jordan-käyrä-alueiksi. Kvasikonvekseille alueille, joilla on äärellinen määrä reunan komponentteja, saadaan karakterisaatio. Lisäksi konstruoidaan kompakti täysin epäyhtenäinen joukko, jonka komplementtialue ei ole kvasikonveksi.

1. Johdanto

Tason joukko A on c-kvasikonveksi luvulle $c \geq 1$, jos kaikille pistepareille $x, y \in A$ on olemassa pisteet yhdistävä joukon A polku γ, jolle pätee

$$l(\gamma) \leq c\|x - y\|.$$

Kvasikonveksi joukko on siis polkuyhtenäinen, mutta kaikki polkuyhtenäiset joukot eivät ole kvasikonvekseja. Toisaalta on määritelty, että tasojoukko A on konveksi, jos kaikille pistepareille $x, y \in A$ pisteiden välinen jana $[x, y]$ kuuluu joukkoon A. Lisäksi A on aidosti konveksi, jos kaikille pistepareille $x, y \in A$ pisteiden välinen jana $[x, y]$ kuuluu päätepisteitä lukuunottamatta joukon A sisäpisteiden joukkoon. Konveksit joukot ovat täten 1-kvasikonvekseja, itse asiassa euklidiselle standardimetriikalle ne ovat ainoat 1-kvasikonveksit joukot. Kvasikonveksisuus on siis määritelmänä rajoittavampi kuin polkuyhtenäisyys, mutta lievempi kuin varsinainen konveksisuus.

Tämä työ seuraa pääosiltaan Hrant Hakobyanin ja David A. Herronin [1] artikkelia *Euclidean Quasiconvexity*. Näin ollen työssä käsitellään pääasiassa alueiden kvasikonveksisuutta.

Määritellään, että alue on Jordan-käyrä-alue, jos sen reunan jokainen komponentti on Jordan-käyrä tai piste. Kvasikonveksit alueet toteuttavat seuraavaa:

Lause 1.1. *Olkoon D c-kvasikonveksi alue. Tällöin*

(1) D on Jordan-käyrä-alue.

(2) Kaikille $b > c$ pätee, että jokainen pistepari $x, y \in \overline{D}$ voidaan yhdistää joukossa $D \cup \{x, y\}$ polulla γ, jonka pituudelle pätee

$$l(\gamma) \leq b\|x - y\|.$$

(3) Reunalla ∂D on enintään $\pi/arcsin(1/c)$ rajoittamatonta komponenttia.

Tässä lauseessa kohta (1) seuraa siitä, että kvasikonveksit joukot ovat tasaisesti lokaalisti yhtenäisiä. Kohdassa (2) pitää olettaa $b > c$, sillä c-kvasikonveksin joukon reunalla voi olla pisteet x, y, joita ei voida yhdistää joukossa $D \cup \{x, y\}$ polulla γ, jonka pituudelle pätee

$$l(\gamma) \leq c\|x - y\|.$$

Jokaiselle kokonaisluvulle $n \geq 2$ voidaan konstruoida alue, joka on c-kvasikonveksi luvulle $c = 1/sin(\pi/n)$, ja jolla on kohdan (3) sallimat n rajoittamatonta reunan komponenttia.

Alueille, joilla on vain äärellinen määrä reunan komponentteja pätee edellisen lauseen käänteistulos.

Lause 1.2. *Olkoon D Jordan-käyrä-alue, jonka reunalla ∂D on vain äärellisen monta komponenttia. Oletetaan, että $c \geq 1$ ja jokainen pistepari $x, y \in \partial D$ voidaan yhdistää joukossa $D \cup \{x, y\}$ polulla γ, jonka pituudelle pätee*

$$l(\gamma) \leq c\|x - y\|.$$

Tällöin kun $c > 1$, niin D on c-kvasikonveksi, ja kun $c = 1$, niin $D = G \backslash F$, missä G on aidosti konveksi ja F on äärellinen joukko.

Yhdistämällä edelliset lauseet voidaan karakterisoida kvasikonveksit alueet, joilla on äärellinen määrä reunan komponentteja:

Lause 1.3. *Olkoon D alue, joka on avaruuden $\mathbb{R}^2$ aito osajoukko ja $c > 1$. Oletetaan, että alueen D reunalla on vain äärellinen määrä komponentteja. Tällöin D on c-kvasikonveksi jos ja vain jos*

(1) D on Jordan-käyrä-alue ja

(2) jokainen pistepari $x, y \in \partial D$ voidaan yhdistää joukossa $D \cup \{x, y\}$ polulla γ, jonka pituudelle pätee

$$l(\gamma) \leq b\|x - y\|,$$

missä kvasikonveksisuudesta seuraa ehto (2) kaikille $b > c$ ja kvasikonveksisuus seuraa, kun ehdossa (2) $b = c$.

Joukkoja, joiden jokainen komponentti on piste, nimitetään täysin epäyhtenäisiksi joukoiksi. Suljetun ja äärettömän täysin epäyhtenäisen joukon komplementti on yksinkertaisin esimerkki Jordan-käyrä-alueesta, jolla on ääretön määrä reunan komponentteja. Tälläinen alue voi olla kvasikonveksi, esimerkiksi pätee:

Lause 1.4. *Olkoon A suljettu joukko. Oletetaan, että joukon A molemmat projektiot reaaliakselille ovat harvoja. Tällöin $\mathbb{R}^2 \backslash A$ on kvasikonveksi.*

Lisäksi suljetun täysin epäyhtenäisen joukon komplementtialueen kaikki pisteparit voidaan yhdistää komplementtialueen kaarella, jonka halkaisija on pienempi tai yhtäsuuri kuin pisteiden välinen etäisyys. Tämä ei kuitenkaan kerro mitään kyseisen kaaren pituudesta ja työn lopuksi todistetaan konstruktiolla seuraava lause:

Lause 1.5. *On olemassa kompakti täysin epäyhtenäinen joukko $A \subset \mathbb{R}^2$, jonka komplementti ei ole kvasikonveksi.*

2. Yhtenäisyys ja polkuyhtenäisyys tasossa

Merkinnällä $\mathbb{R}^2$ tarkoitetaan kaksiulotteista tasoa, jossa on standardimetriikka: Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$. Tällöin pisteiden x ja y välinen etäisyys on

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Standardimetriikka indusoi tasoon standarditopologian. Joukon A sisäpisteiden joukkoa merkitään $int(A)$, sulkeumaa $\overline{A}$ ja reunapisteiden joukkoa ∂A.

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ avoin a-keskinen r-säteinen pallo on joukko

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\},$$

suljettu a-keskinen r-säteinen pallo

$$\overline{B}(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq r\}$$

ja a-keskinen r-säteinen pallonkuori

$$S(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x-a\| = r\}.$$

Oletetaan, että jatkossa kaikki joukot kuuluvat avaruuteen $\mathbb{R}^2$, jollei erikseen mainita toisin.

Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Määritellään *joukkojen välinen etäisyys*:

$$dist(A,B) := inf\{\|x-y\| : x \in A, y \in B\}.$$

Erityisesti pisteen x etäisyys joukosta A on tällöin

$$dist(x,A) := inf\{\|x-y\| : y \in A\}.$$

Olkoon A epätyhjä joukko. Määritellään joukon A *halkaisija*

$$diam(A) := sup\{\|x-y\| : x,y \in A\}.$$

Joukko A on rajoitettu, jos $diam(A) < \infty$ ja rajoittamaton, jos $diam(A) = \infty$.

Oletetaan tunnetuiksi perustiedot metristen avaruuksien joukkojen yhdisteistä, leikkauksista, avoimista ja suljetuista joukoista, joukkojen reunoista ja niin edelleen. Esitellään kuitenkin erikseen yhtenäisyys, lokaali yhtenäisyys ja polkuyhtenäisyys, sillä ne liittyvät olennaisesti kvasikonveksisuuteen.

2.1. **Yhtenäisyys.** Aloitetaan määrittelemällä yhtenäisyys ja epäyhtenäisyys ja käytetään siinä Newmanin [5], Ch IV, 1-3, s. 71-80 tapaan käsitettä joukon jako. Yhtenäisyys ja kontinuumit on kattavasti käsitelty Kuratowskin kirjassa [3], Ch V, §46-§47, s. 127-190.

Olkoot joukot U ja V joukon A osajoukkoja. Sanotaan, että joukot U ja V ovat *joukon A jako*, jos U ja V ovat epätyhjiä, suljettuja joukon A suhteen ja niille pätee

(1) $U \cap V = \emptyset$
(2) $U \cup V = A$.

Jos joukot U ja V ovat joukon A jako, merkitään

$$A = U \| V.$$

Jos joukot U ja V ovat joukon A jako, ovat ne toistensa komplementteja joukon A suhteen. Näin ollen ne ovat joukon A suhteen paitsi suljettuja, niin myös avoimia.

Joukko A on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa joukon A jako $U\|V$. Vastaavasti joukko A on *yhtenäinen*, jos tällaista jakoa ei ole olemassa.

Epätyhjä avoin yhtenäinen joukko on nimeltään *alue*, ja kompakti yhtenäinen joukko, jossa on vähintään kaksi pistettä on nimeltään *kontinuumi*.

Jos joukko A on yhtenäinen ja $x, y \in A$, niin sanotaan, että *joukko A yhdistää pisteet x ja y*.

Hyvin olennaista yhtenäisyydelle on, että se säilyy jatkuvassa kuvauksessa. Tämän vuoksi esimerkiksi, jos A on reaaliakselin yhtenäinen osa ja $f : A \to \mathbb{R}$ on jatkuva, on funktion f kuvaaja yhtenäinen joukko avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Lause 2.1. *Olkoon A yhtenäinen ja $f : A \to \mathbb{R}^2$ jatkuva. Tällöin $f(A)$ on yhtenäinen.*

Todistus. Antiteesi: $f(A)$ ei ole yhtenäinen, eli $f(A) = U\|V$. Tarkastellaan joukkoja $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \subset A$. Koska f on jatkuva, ne ovat avoimia, koska $U \neq \emptyset \neq V$, niin $f^{-1}(U) \neq \emptyset \neq f^{-1}(V)$ ja koska $U \cap V = \emptyset$, niin $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Tällöin $A = f^{-1}(U)\|f^{-1}(V)$, mikä on ristiriita, koska A on yhtenäinen. $\square$

Yhtenäisyys säilyy myös, jos joukkoon lisätään sen kasautumispiste.

Lause 2.2. *Olkoon A yhtenäinen ja $A \subset B \subset \overline{A}$. Tällöin B on yhtenäinen. Erityisesti $\overline{A}$ on yhtenäinen.*

Todistus. Antiteesi: B ei ole yhtenäinen, eli $B = U \| V$. Nyt jos pätisi

$$A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V,$$

olisivat $A \cap U$ ja $A \cap V$ joukon A jako. Voidaan siis olettaa, että $A \cap U$ on tyhjä. Tällöin pätee $A \subset V$ jolloin myös $\overline{A} \subset \overline{V}$. Nyt

$$B \subset \overline{A} \subset \overline{V}$$

eli

$$B \subset \overline{V} \cap (U \cup V) = V,$$

missä $\overline{V} \cap (U \cup V) = V$ siksi, että V on suljettu joukon $U \cup V = B$ suhteen. Näin ollen, koska $U \cap V = \emptyset$, pätee $U = U \cap B = \emptyset$, mikä on ristiriita. □

Yhtenäisyys reaaliakselilla on yksinkertaista: yhtenäisiä joukkoja ovat vain tyhjä joukko, yhden pisteen joukot sekä avoimet, puoliavoimet ja suljetut välit. Tasossa tämä ei ole enää yhtä selkeää: Olkoon

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \leq 1, x_2 = sin(1/x_1)\},$$

siis kuvaaja jatkuvalle funktiolle, joka saavuttaa arvot 1 ja -1 äärettömän monta kertaa ja tihentyvästi lähestyttäessä nollaa oikealta. Olkoon lisäksi

$$B \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 1\},$$

missä jana x_2-koordinaattiakselilla $\big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 1\big\}$ on joukon A kasautumispisteiden joukko. Nyt A on välin $(0, 1]$ kuva jatkuvalle kuvaukselle, joten se on yhtenäinen, ja koska pätee $A \subset A \cup B \subset \overline{A}$, on $A \cup B$ on yhtenäinen.

Seuraava lause vastaa hyvin intuitiota: Jos joukko A yhdistää joukon B pisteen johonkin joukon B komplementin pisteeseen, niin se leikkaa joukon B reunaa.

Lause 2.3. *Olkoon B joukko ja A yhtenäinen joukko siten,että*

$$A \cap B \neq \emptyset \neq A \cap (\mathbb{R}^2 \backslash B).$$

Tällöin $A \cap \partial B \neq \emptyset$.

Todistus. Antiteesi: $A \cap \partial B = \emptyset$.

Avaruus $\mathbb{R}^2$ on yhdiste pistevieraista joukoista $int(B)$, ∂B ja $int(\mathbb{R}^2 \backslash B)$. Tällöin A on yhdiste joukoista $A \cap int(B)$ ja $A \cap int(\mathbb{R}^2 \backslash B)$, jotka ovat avoimia joukon A suhteen. Ne ovat epätyhjiä: Jos $A \cap int(B) = \emptyset$, niin

$$A = A \cap int(\mathbb{R}^2 \backslash B) \subset \mathbb{R}^2 \backslash B,$$

jolloin $A \cap B = \emptyset$. Toisaalta, jos $A \cap int(\mathbb{R}^2 \backslash B) = \emptyset$, niin

$$A = A \cap int(B) \subset B,$$

ja tällöin $A \cap (\mathbb{R}^2 \backslash B) = \emptyset$.

Nyt siis $(A \cap int(B)) \| (A \cap int(\mathbb{R}^2 \backslash B))$ on joukon A jako, mikä on ristiriita. □

Tärkeä ja intuitiivinen ominaisuus yhtenäisille joukoille on myös se, että jos kahdella tai useammalla yhtenäisellä joukolla on yhteinen piste, on niiden yhdiste yhtenäinen.

Lause 2.4. *Olkoon $\{A_\alpha\}$ perhe yhtenäisiä joukkoja siten, että*

$$\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset.$$

Tällöin $\bigcup_\alpha A_\alpha$ on yhtenäinen.

Todistus. Antiteesi: $\bigcup_\alpha A_\alpha$ ei ole yhtenäinen, eli $\bigcup_\alpha A_\alpha = U \| V$. Olkoon $c \in \bigcap_\alpha A_\alpha$, jolloin $c \in \bigcup_\alpha A_\alpha = U \cup V$, voidaan olettaa, että $c \in U$. Tällöin kaikille α joukko $A_\alpha \cap U$ on epätyhjä, joten joukon $A_\alpha \cap V$ on oltava tyhjä, sillä muutoin olisi $A_\alpha = (A_\alpha \cap U) \| (A_\alpha \cap V)$. Näin ollen

$$V = \bigcup_\alpha (A_\alpha \cap V) = \emptyset,$$

mikä on ristiriita. □

Olkoon A joukko ja $x \in A$. Olkoon $\{A_\alpha\}$ joukon A osajoukkojen perhe, johon kuuluvat kaikki ne joukon A yhtenäiset osajoukot, joihin piste x kuuluu.

Tällöin joukko

$$C_x := \bigcup_\alpha A_\alpha$$

on lauseen 2.4. nojalla yhtenäinen. Sitä nimitetään *joukon A x-komponentiksi.* Joukon A x-komponentti on siis suurin pisteen x sisältävä joukon A yhtenäinen osajoukko.

Koska joukko $\overline{C_x}$ on lauseen 2.2. nojalla yhtenäinen ja C_x on suurin pisteen x sisältävä yhtenäinen osajoukko pätee $\overline{C_x} = C_x$, eli C_x on suljettu joukon A suhteen. Erityisesti avaruuden $\mathbb{R}^2$ suhteen suljetun joukon komponentit ovat myös suljettuja avaruuden $\mathbb{R}^2$ suhteen.

Jos $y \in C_x$, niin $C_y = C_x$, ja jos $y \notin C_x$, niin $C_y \cap C_x = \emptyset$. Täten jokainen $x \in A$ kuuluu yhteen ja vain yhteen joukon A komponenttiin ja näin A on yhdiste komponenteistaan, jotka ovat pistevieraita joukkoja.

Olkoon F suljettu joukko, ja $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash F$. Sanotaan, että joukko F erottaa pisteet x ja y, jos x ja y kuuluvat joukon $\mathbb{R}^2 \backslash F$ eri komponentteihin. Samoin sanotaan, että joukko F erottaa joukot U ja V, jos U ja V kuuluvat joukon $\mathbb{R}^2 \backslash F$ eri komponentteihin.

Seuraavan lauseen mukaan avoimen joukon G komponentin C, joka on alue, reuna on osa joukon G reunaa. Jatkossa saadaan todistettua, että avaruuden $\mathbb{R}^2$ avointen joukkojen kaikki komponentit ovat alueita. Täten päteekin, että avoimen joukon komponentin reuna on osa joukon reunaa.

Lause 2.5. *Olkoon D alue, joka on avoimen joukon G komponentti. Tällöin*

$$\partial D \subset \partial G.$$

Todistus. Alue D on komponenttina suljettu joukon G suhteen, eli $D = \overline{D} \cap G$. Tällöin

$$\partial D = \overline{D} \backslash D = \overline{D} \backslash (\overline{D} \cap G) = \overline{D} \cap (\mathbb{R}^2 \backslash G) \subset \overline{G} \cap (\mathbb{R}^2 \backslash G) = \partial G.$$

□

Lauseesta 2.3. seuraa intuitiivisesti selvä alueiden ominaisuus:

Lause 2.6. *Olkoon D alue. Tällöin D on joukon $\mathbb{R}^2 \backslash \partial D$ komponentti.*

Todistus. On osoitettava, että alueen D sisältävä joukon $\mathbb{R}^2\backslash\partial D$ komponentti C on D. Jos näin ei ole, on C yhtenäinen joukko joka leikkaa joukkoja D ja $\mathbb{R}^2\backslash D$. Tällöin lauseen 2.3. nojalla C leikkaa myös joukkoa ∂D, mikä on ristiriita sen kanssa että se on joukon $\mathbb{R}^2\backslash\partial D$ osajoukko. □

Lause 2.7. *Olkoon A yhtenäinen ja B sen yhtenäinen osajoukko. Olkoon C joukon $A\backslash B$ komponentti. Tällöin $A\backslash C$ on yhtenäinen.*

Todistus. Todistetaan ensin aputulos: Olkoon H joukon $A\backslash C$ osajoukko joka on joukon $A\backslash C$ suhteen sekä avoin että suljettu. Osoitetaan että tällöin $H \cup C$ on yhtenäinen.

Antiteesi: Olkoon $U\|V$ joukon $H \cup C$ jako. Koska C on yhtenäinen, se kuuluu jompaan kumpaan joukoista U ja V. Voidaan olettaa, että $C \subset U$. Tällöin $V \subset H$. Koska V on avoin ja suljettu joukon $H \cup C$ suhteen on se avoin ja suljettu sen osajoukon H suhteen ja tällöin koska H on avoin ja suljettu joukon $A\backslash C$ suhteen on myös V avoin ja suljettu joukon $A\backslash C$ suhteen. Nyt pätee, että V on avoin ja suljettu joukon

$$(A\backslash C) \cup (H \cup C) = A$$

suhteen, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että A on yhtenäinen ja V sen aito osajoukko.

Todistetaan nyt itse väite. Antiteesi: Olkoon $W\|X$ joukon $A\backslash C$ jako. Osoitetaan, että joukot $B \cap W$ ja $B \cap X$ ovat epätyhjiä, jolloin ne ovat joukon B jako, mikä on ristiriita.

Antiteesi: $B \cap W = \emptyset$. Tällöin joukko $W \cup C$, joka on aputuloksen nojalla yhtenäinen, on joukon $A\backslash B$ osajoukko. Koska $W \neq \emptyset$, on C yhtenäisen joukon $W \cup C \subset A\backslash B$ aito osajoukko, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että C on joukon $A\backslash B$ komponentti. Samalla tavalla, jos $B \cap X = \emptyset$ on $X \cup C$ yhtenäinen joukon $A\backslash B$ osajoukko ja C sen aito osajoukko, mikä on ristiriita. □

Edellistä lausetta voidaan käyttää siten, että $A = \mathbb{R}^2$: Olkoon B yhtenäinen ja C komplementin $\mathbb{R}^2\backslash B$ komponentti. Tällöin $\mathbb{R}^2\backslash C$ on yhtenäinen.

Todistetaan vielä yksi lause jota tarvitaan myöhemmin. Tämän lauseen todistamiseen tarvitaan seuraava lemma.

Lemma 2.8. *Olkoon K kontinuumi ja $A \subset K$ sen epätyhjä ja suljettu aito osajoukko. Olkoon C joukon A komponentti. Tällöin $C \cap \overline{(K\backslash A)} \neq \emptyset$.*

Todistus. Jos olisi $C \cap \overline{(K\backslash A)} = \emptyset$, olisi myös

$$C \cap (\overline{(K\backslash A)} \cup (A\backslash C)) = \emptyset,$$

sillä $C \cap A\backslash C = \emptyset$.

Joukko C on suljetun joukon komponenttina suljettu kontinuumin K suhteen ja tällöin myös tason $\mathbb{R}^2$ suhteen. Toisaalta joukko $\overline{(K\backslash A)} \cup (A\backslash C)$ on kontinuumi K, josta on poistettu joukon C sisäpisteet kontinuumin K suhteen. Näin ollen se on myös suljettu kontinuumin K suhteen ja täten tason $\mathbb{R}^2$ suhteen.

Tällöin löytyy avoimet epätyhjät joukot $U, V \subset \mathbb{R}^2$ siten, että $C \subset U$ ja

$$(K\backslash A) \cup (A\backslash C) \subset \overline{(K\backslash A)} \cup (A\backslash C) \subset V$$

ja joille pätee $U \cap V = \emptyset$. Täten joukko $C \cup ((K\backslash A) \cup (A\backslash C)) = K$ on epäyhtenäinen, mikä on ristiriita sen kanssa, että se on komponentti. □

Lause 2.9. *Olkoon Z joukko, A avoin joukon Z suhteen ja C joukon $Z \backslash A$ komponentti. Merkitään $Y := Z \backslash C$. Olkoon $K \subset Z$ kontinuumi, jolle pätee*

$$K \cap Y \neq \emptyset \neq K \cap C.$$

Tällöin jokaiselle $y \in K \cap Y$ on olemassa osakontinuumi $K_y \subset K$, jolle pätee $y \in K_y$, $K_y \subset Y$ ja $K_y \cap A \neq \emptyset$.

Todistus. Tässä todistuksessa käytetään merkintää $B(x;r)$ joukon Z palloista, eli tason pallojen leikkauksista joukon Z kanssa.

Olkoon $y \in K \cap Y$. Jos $y \in A$, niin koska A on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että

$$B(y;r) \subset A \subset Y.$$

Nyt

$$K \cap \overline{B}(y;r/2) \subset K$$

on kontinuumi, jolle pätee $K \cap \overline{B}(y;r/2) \subset Y$ ja $K \cap \overline{B}(y;r/2) \cap A \neq \emptyset$.

Voidaan olettaa, että $y \notin A$. Tällöin y kuuluu johonkin joukon $Z \backslash A$ komponenttiin, merkitään sitä C_y, jolle pätee $C_y \cap C = \emptyset$.

Koska $y \notin C$ ja C on avoimen joukon A suljetun komplementin komponenttina suljettu, pätee $d := dist(y, C) > 0$. Jokaiselle $\epsilon \in (0, d)$ määritellään

$$N_\epsilon = \bigcup_{z \in K \cap C} B(z;\epsilon),$$

joka on avoin joukko. Olkoon K_ϵ se suljetun joukon $K \backslash N_\epsilon$ komponentti johon y kuuluu. Tällöin edellisen lemman 2.8. nojalla $K_\epsilon \cap \overline{N_\epsilon} \neq \emptyset$.

Nyt jos ei ole olemassa lukua $\epsilon_0 \in (0, d)$ siten, että

$$K_{\epsilon_0} \cap A \neq \emptyset,$$

niin yhtenäiselle joukolle $S = \bigcup_{\epsilon \in (0,d)} K_\epsilon$ pätee $S \subset C_y$. Tällöin, koska C_y on suljettu, pätee myös $\overline{S} \subset C_y$.

Toisaalta, koska $K_\epsilon \cap \overline{N_\epsilon} \neq \emptyset$, pätee $dist(K_\epsilon, K \cap C) \leq \epsilon$ kaikille $\epsilon \in (0, d)$. Tällöin $dist(\overline{S}, K \cap C) = 0$. Koska lisäksi $\overline{S}$ ja $K \cap C$ ovat kontinuumin K suljettuja osajoukkoja, saadaan että $\overline{S} \cap (K \cap C) \neq \emptyset$.

Tämä on ristiriita sen kanssa, että $C_y \cap C = \emptyset$.

Siis on olemassa luku $\epsilon_0 \in (0, d)$ siten, että

$$K_{\epsilon_0} \cap A \neq \emptyset.$$

Nyt voidaan valita $K_y = K_{\epsilon_0}$, joka toteuttaa ehdot. □

2.2. **Lokaali yhtenäisyys.** Määritellään seuraavaksi joukon lokaali yhtenäisyys pisteessä. Lokaalia yhtenäisyyttä käsitellään Newmanin kirjassa [5] Ch IV, 5, s. 84-88, sekä laajasti Kuratowskin kirjassa [3] Ch VI, §49, s. 227-252.

Olkoon A joukko ja $x \in \mathbb{R}^2$ piste. Joukko A on *lokaalisti yhtenäinen pisteessä* x, jos jokaiselle $t > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että $A \cap B(x;r)$ kuuluu johonkin joukon $A \cap B(x;t)$ komponenttiin.

Lokaali yhtenäisyys on pätee triviaalisti joukon A sisä- ja ulkopisteille, määritelläänkin: Joukko A on lokaalisti yhtenäinen reunallaan, jos se on lokaalisti yhtenäinen jokaisessa $x \in \partial A$.

Vielä rajoittavampi määritelmä on tasainen lokaali yhtenäisyys. Joukko A on *tasaisesti lokaalisti yhtenäinen*, jos kaikille $x \in \mathbb{R}^2$ ja $t > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että $A \cap B(x;r)$ kuuluu joukon $A \cap B(x;t)$ komponenttiin.

Lokaalisti yhtenäisen joukon ei tietenkään tarvitse olla yhtenäinen, mutta myöskin pätee, että yhtenäinen joukko ei välttämättä ole lokaalisti yhtenäinen kaikissa pisteissään.

Olkoon kuten aiemmassa esimerkissä

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \leq 1, x_2 = sin(1/x_1)\}$$

ja

$$B \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 1\}.$$

Tällöin A on välin $(0, 1]$ kuva jatkuvalle kuvaukselle, joten se on yhtenäinen. Lisäksi pätee $A \subset A \cup B \subset \overline{A}$ joten $A \cup B$ on yhtenäinen. Joukko $A \cup B$ ei kuitenkaan ole lokaalisti yhtenäinen joukon B pisteissä, sillä jokaiselle $r > 0$ joukossa $A \cap B(x; r)$ on ääretön määrä komponentteja.

Lokaali yhtenäisyys voidaan määritellä ekvivalentisti useammalla tavalla, seuraavassa eräs niistä.

Lause 2.10. *Joukko A on lokaalisti yhtenäinen pisteessä $x \in A$ jos ja vain jos kaikille $t > 0$ on olemassa yhtenäinen joukko $X \subset A \cap B(x; t)$ siten, että piste x on joukon X sisäpiste joukon A suhteen.*

Todistus. Oletetaan ensin, että A on lokaalisti yhtenäinen pisteessä x ja $t > 0$. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että $A \cap B(x; r)$ kuuluu joukon $A \cap B(x; t)$ komponenttiin. Nyt tämä komponentti käy joukoksi X, sillä koska pisteen x ympäristö joukossa A eli $A \cap B(x; r)$ kuuluu joukkoon X, on x joukon X sisäpiste joukon A suhteen.

Olkoon sitten lauseen jälkimmäinen ehto voimassa ja $t > 0$. Nyt oletuksen mukaan on olemassa yhtenäinen $X \subset A \cap B(x; t)$ siten, että piste x on joukon X sisäpiste joukon A suhteen. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että $A \cap B(x; r) \subset X$. Koska X on yhtenäinen kuuluu se johonkin joukon $A \cap B(x; t)$ komponenttiin, joten myös $A \cap B(x; r)$ kuuluu johonkin joukon $A \cap B(x; t)$ komponenttiin. Näin ollen A on lokaalisti yhtenäinen pisteessä x. □

Tätä määritelmää käyttäen saadaan tärkeä tulos:

Lause 2.11. *Joukko A on lokaalisti yhtenäinen kaikissa pisteissään jos ja vain jos kaikkien joukon A suhteen avointen joukkojen komponentit ovat avoimia joukon A suhteen.*

Todistus. Olkoon A lokaalisti yhtenäinen kaikissa pisteissään ja $G \subset A$ avoin joukon A suhteen. Olkoon C joukon G komponentti ja $x \in C$. Nyt on olemassa $t > 0$ siten, että $A \cap B(x; t) \subset G$. Koska A on lokaalisti yhtenäinen pisteessä x on edellisen lauseen nojalla olemassa yhtenäinen $X \subset A \cap B(x; t)$ siten, että x on joukon X sisäpiste. Koska X on joukon G yhtenäinen osajoukko ja $X \cap C \neq \emptyset$, pätee $X \subset C$. Näin ollen x on myös komponentin C sisäpiste.

Olkoon sitten lauseen jälkimmäinen ehto voimassa, $x \in A$ ja $t > 0$. Oletuksen mukaan joukon $A \cap B(x; t)$ komponentit ovat avoimia joukon A suhteen. Tällöin se komponentti X johon piste x kuuluu on yhtenäinen joukko, jolle x on sisäpiste joukon A suhteen. Edellisen lauseen nojalla A on nyt lokaalisti yhtenäinen pisteessä x. □

Koska itse avaruus $\mathbb{R}^2$ on lokaalisti yhtenäinen kaikissa pisteissään, ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ avointen joukkojen komponentit avoimia.

Toisin kuin yhtenäisyys, lokaali yhtenäisyys ei säily jatkuvassa kuvauksessa. Määritellään niin sanottu luutajoukko

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty}[(0,0),(1,1/n)],$$

eli yhdiste janoista, joilla on yhteinen alkupiste origossa ja päätepisteet pystysuoralla janalla $[(1,0),(1,1)]$. Nyt joukko $B := A \cup [(0,0),(0,-1)]$ on yhtenäinen ja lokaalisti yhtenäinen jokaisessa pisteessään. Se voidaan kuvata jatkuvalla bijektiolla joukolle $C := A \cup [(0,0),(1,0)]$. Tämä joukko C on yhtenäinen, mutta se ei ole lokaalisti yhtenäinen janan $[(0,0),(1,0)]$ muissa pisteissä kuin origossa.

Edellisessä esimerkissä jatkuvaa bijektiota joukolta B joukolle C ei voida määritellä siten, että sen käänteiskuvaus olisi jatkuva. Pätee nimittäin, että lokaali yhtenäisyys säilyy homeomorfismissa.

Lause 2.12. *Olkoon A lokaalisti yhtenäinen pisteessä $x \in A$. Olkoot $f : A \to B$ homeomorfismi. Tällöin B on lokaalisti yhtenäinen pisteessä $y := f(x)$.*

Todistus. Olkoon $t > 0$. Alkukuva $f^{-1}(B \cap B(y;t)) \subset A$ on avoin, ja

$$x \in f^{-1}(B \cap B(y;t)).$$

Tällöin on olemassa $s > 0$ siten, että

$$A \cap B(x;s) \subset f^{-1}(B \cap B(y;t)).$$

Koska A on lokaalisti yhtenäinen pisteessä x, niin on olemassa yhtenäinen joukko $X \subset A \cap B(x;s)$ siten, että x on sen sisäpiste. Tällöin $f(X) \subset B \cap B(y;t)$ on yhtenäinen, ja koska f on homeomorfismina avoin kuvaus, on y sen sisäpiste. $\square$

Siitä, että taso on lokaalisti yhtenäinen kaikissa pisteissään seuraa seuraava lause, joka kertoo komponenttien sisä- ja reunapisteet.

Lause 2.13. *Olkoot A joukko ja $C \subset A$ sen komponentti. Tällöin $int(C) = C \cap int(A)$. Lisäksi, jos A on suljettu $\partial C = C \cap \partial A$.*

Todistus. Joukon $int(A)$ komponentti, joka leikkaa komponenttia C, kuuluu komponenttiin C. Näin ollen $C \cap int(A)$ on yhdiste avoimen joukon $int(A)$ komponenteista. Koska taso on lokaalisti yhtenäinen kaikissa pisteissään, nämä komponentit ovat avoimia joukkoja, joten $C \cap int(A)$ on avoin joukko. Sille pätee $C \cap int(A) \subset C$, ja koska se on avoin, $C \cap int(A) \subset int(C)$.

Toisaalta, koska $C \subset A$, niin

$$int(C) = C \cap int(C) \subset C \cap int(A).$$

Siis $int(C) = C \cap int(A)$.

Jos A on suljettu, C on myös suljettu, ja tällöin $\partial A = A \backslash int(A)$ sekä $\partial C = C \backslash int(C)$. Lisäksi, koska $int(C) = C \cap int(A)$, niin

$$\partial C = C \backslash int(C) = (C \cap A) \backslash (C \cap int(A)) = C \cap (A \backslash int(A)) = C \cap \partial(A).$$

$\square$

2.3. **Polut ja polkuyhtenäisyys.** Kolmas yhtenäisyyskäsite on polkuyhtenäisyys, Kuratowskin kirjassa [3] Ch VI, §50, s. 252-273. Ennen polkuyhtenäisyyden käsitteen määrittelyä on määriteltävä polku.

Olkoon A joukko. Jatkuva kuvaus

$$\gamma : [0,1] \to A$$

on joukon A *polku*. Kuvauksen γ arvojoukko

$$|\gamma| := \gamma([0,1]) \subset A$$

on polun kuva eli *käyrä* joukossa A.

Pisteitä $\gamma(0) \in A$ ja $\gamma(1) \in A$ kutsutaan polun *alku-* ja *päätepisteeksi*. Lisäksi sanotaan että polku γ yhdistää pisteet joukossa A.

Sekä injektiivistä polkua

$$\gamma : [0,1] \to A,$$

että sen kuvaa $|\gamma|$ nimitetään *kaareksi* joukossa A.

Koska $[0,1]$ on homeomorfinen välin $[a,b]$ kanssa kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, niin jatkuvaa kuvausta

$$\gamma : [a,b] \to A$$

voidaan myös kutsua poluksi.

Seuraavan lauseen mukaan, jos kaksi pistettä voidaan yhdistää polulla, voidaan ne yhdistää myös kaarella. Lauseen todistus on varsin monimutkainen ja sitä ei esitetä, vaan annetaan vain viittaus.

Lause 2.14. *Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^2$ ja γ pisteet yhdistävä polku. Tällöin on olemassa pisteet x ja y yhdistävä kaari λ siten, että $|\lambda| \subset |\gamma|$. Geometrisesti λ oikaisee polun γ tekemät silmukat.*

Todistus tälle löytyy Väisälän artikkelista [7].

Kaksi eri pistettä yhdistävien polkujen kuvat ovat kontinuumeja, joten niille voidaan käyttää kontinuumeille todistettuja tuloksia. Erityisesti kaaret ovat kontinuumeja.

Lause 2.15. *Olkoon γ joukon A polku, joka ei ole vakiopolku. Tällöin käyrä $|\gamma|$ on kontinuumi.*

Todistus. Väli $[0,1]$ on kompakti ja yhtenäinen joukko ja $\gamma : [0,1] \to A$ on jatkuva kuvaus. Koska sekä kompaktius, että yhtenäisyys säilyvät jatkuvassa kuvauksessa, on $|\gamma| := \gamma([0,1]) \subset A$ kompakti ja yhtenäinen joukko, jossa on kaksi eri pistettä, eli kontinuumi. □

Olkoon γ joukon A polku. Kuvaus

$$\overleftarrow{\gamma} : [0,1] \to A$$

$$\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$$

on myös joukon A polku, nimeltään polun γ *käänteispolku*. Käänteispolulle pätee

$$\left|\overleftarrow{\gamma}\right| = |\gamma|.$$

Olkoon γ joukon A kaari. Olkoot $x, y \in |\gamma|$ pisteitä polun kaarella. Merkinnöillä $\gamma(x,y)$, $\gamma[x,y)$, $\gamma(x,y]$ ja $\gamma[x,y]$ tarkoitetaan kaaren osaa joka yhdistää pisteet x ja y ja johon alku- ja päätepiste kuuluvat tai eivät kuulu, käyttäen samanlaista tulkintaa kuin väleille.

Merkinnällä $[x, y]$ tarkoitetaan sekä pisteitä x ja y yhdistävää *janapolkua*

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = x + t(y - x),$$

että kuvaukseen liittyvää kaarta $|\gamma|$ eli *janaa*. Merkinnöillä (x, y), $[x, y)$ ja $(x, y]$ tarkoitetaan janoja, joihin alku- ja päätepiste kuuluvat tai eivät kuulu, käyttäen jälleen samanlaista tulkintaa kuin väleille.

Jos poluille $\gamma : [0, 1] \to A$ ja $\lambda : [0, 1] \to A$ pätee

$$\gamma(1) = \lambda(0),$$

niin voidaan määritellä niiden *yhdistetty polku* $\gamma * \lambda$

$$\gamma * \lambda : [0, 1] \to A$$

$$\gamma * \lambda(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq \mathrm{t} \leq \frac{1}{2} \\ \lambda(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq \mathrm{t} \leq 1. \end{cases}$$

Selvästi yhdistetylle polulle pätee

$$|\gamma * \lambda| = |\gamma| \cup |\lambda| .$$

Polku, joka on äärellisen monen janapolun yhdistetty polku on *murtoviivapolku* ja sen kuva on *murtoviiva*

$$\gamma = [z_0, z_1] * [z_1, z_2] * \ldots * [z_{n-1}, z_n].$$

Murtoviivapolku, joka on injektio ja jonka jokainen janapolkuosa on koordinaattiakselin suuntainen, on *yksinkertainen murtoviivapolku* (YMV-polku).

Polun $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *pituus* määritellään

$$l(\gamma) := \sup\{\sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \quad : \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}.$$

Polku γ on *suoristuva*, jos $l(\gamma) < \infty$. Pisteet x ja y yhdistävän polun γ pituudelle pätee $l(\gamma) \geq \|y - x\|$.

Lause 2.16. *Olkoon γ avaruudessa $\mathbb{R}^2$ pisteet x ja y yhdistävä polku, jolle pätee $|\gamma| \neq [x, y]$. Tällöin pätee $l(\gamma) > \|y - x\|$.*

Todistus. Koska standardimetriikassa pisteiden välinen etäisyys, ja siten myös polun pituus, säilyy koordinaatiston siirroissa ja rotaatioissa, voidaan olettaa, että $x = (0, 0)$ ja $y = (y_1, 0)$. Tällöin $\|y - x\| = \sqrt{(y_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = y_1$.

Jos on olemassa $z \in |\gamma|$ siten, että $z_1 < 0$, niin

$$l(\gamma) \geq \|y - z\| = \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (0 - z_2)^2} \geq y_1 - z_1 > y_1 = \|y - x\|.$$

Jos taas on olemassa $z \in |\gamma|$ siten, että $z_1 > y_1$, niin

$$l(\gamma) \geq \|z - x\| = \sqrt{(z_1 - 0)^2 + (z_2 - 0)^2} \geq z_1 > y_1 = \|y - x\|.$$

Voidaan siis olettaa, että $0 \leq z_1 \leq y_1$ kaikille $z \in |\gamma|$. Koska $|\gamma| \neq [x, y]$ ja koska $|\gamma|$ on pisteet x ja y yhdistävä joukko on olemassa jokin piste $z' = (z'_1, z'_2) \in |\gamma|$ siten, että $0 \leq z_1 \leq y_1$ ja $|z'_2| > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} l(\gamma) \geq \|z - x\| + \|y - z\| &= \sqrt{(z_1 - 0)^2 + (z_2 - 0)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (0 - z_2)^2} \\ &> z_1 + (y_1 - z_1) = y_1 = \|y - x\|. \end{aligned}$$

□

Edellisessä lauseessa on olennaista, että metriikkana on standardimetriikka. Lause ei päde kaikille metriikoille.

Olkoon avaruus $\mathbb{R}^2$ varustettu metriikalla

$$d(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| .$$

Tällöin janan $[(0,0),(1,1)]$ pituus on

$$l([(0,0),(1,1)]) = |1-0| + |1-0| = 2.$$

Mutta myös murtoviivapolun $[(0,0),(1,0)] * [(1,0),(1,1)]$ pituus on

$$\begin{aligned} l([(0,0),(1,1)]) &= l([(0,0),(1,0)]) + l([(1,0),(1,1)] \\ &= |1-0| + |0-0| + |0-0| + |1-0| = 2. \end{aligned}$$

Nyt päästään määrittelemään itse polkuyhtenäisyyden käsite.

Joukko A on *polkuyhtenäinen*, jos kaikille $x, y \in A$ on olemassa pisteet yhdistävä joukon A polku, eli on olemassa

$$\gamma : [0,1] \to A,$$

jolle

$$\gamma(0) = x \quad ja \quad \gamma(0) = y.$$

Erityisesti A on *YMV-yhtenäinen*, jos yhdistäväksi poluksi voidaan aina valita yksinkertainen murtoviivapolku.

Lauseen 2.14. nojalla polkuyhtenäisen joukon pisteparin yhdistävä polku voidaan aina valita siten, että se on kaari. Näin ollen, jos määritellään kaariyhtenäisyys samaan tapaan kuin polkuyhtenäisyys, ovat nämä käsitteet ekvivalentteja.

Toisin kuin yhtenäisille joukoille polkuyhtenäisen joukon sulkeuma ei ole välttämättä polkuyhtenäinen. Tutussa esimerkissä

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \leq 1, x_2 = sin(1/x_1)\}$$

ja

$$B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 1\},$$

joukko A on polkuyhtenäinen: Jos y ja z ovat joukon A pisteitä, voidaan olettaa, että $y_1 < z_1$, niin niitä yhdistää kaari, joka välin on $[y_1, z_1]$ kuvaaja kuvaukselle $sin(1/x_1)$.

Yhdiste $A \cup B$ ei kuitenkaan ole polkuyhtenäinen, vaikka $A \cup B = \overline{A}$. Yhdiste $A \cup B$ on lisäksi esimerkki joukosta, joka on yhtenäinen, mutta ei ole polkuyhtenäinen.

Toisessa esimerkissä olkoon A jo edellä mainittu luutajoukko

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} [(0,0),(1,1/n)].$$

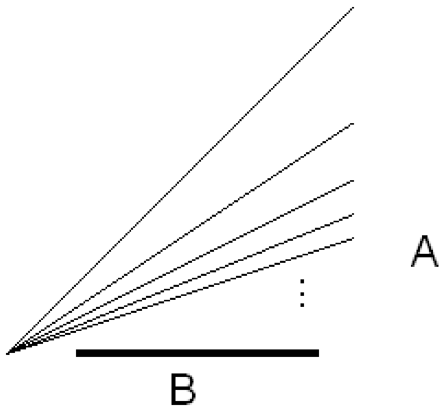
Se on yhtenäinen joukko ja jos $B \subset [(0,0),(1,0)]$, niin $A \cup B$ kuuluu joukon A sulkeumaan ja on täten yhtenäinen. Yhdiste $A \cup B$ on kuitenkin polkuyhtenäinen vain siinä tapauksessa, että $B = [(0,0),(s,0)]$, missä $0 \leq s \leq 1$.

Polkuyhtenäisille joukoille pätee kuitenkin samaan tapaan kuin yhtenäisille joukoille, että toisiaan leikkaavien polkuyhtenäisten joukkojen yhdiste on polkuyhtenäinen.

Lause 2.17. *Olkoon $\{A_\alpha\}$ perhe avaruuden $\mathbb{R}^2$ polkuyhtenäisiä joukkoja siten, että*

$$\bigcap_{\alpha} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Tällöin $\bigcup_\alpha A_\alpha$ on polkuyhtenäinen.



Kuva 1. Joukko joka on yhtenäinen, mutta ei polkuyhtenäinen.

Todistus. Olkoot $x, y \in \bigcup_\alpha A_\alpha$ ja $c \in \bigcap_\alpha A_\alpha$. Nyt $x \in A_{\alpha_1}$ jollekin indeksille α_1. Koska lisäksi $c \in A_{\alpha_1}$, on olemassa joukon A_{α_1} polku γ, joka yhdistää pisteen x pisteeseen c. Tällöin polku γ on myös yhdisteen $\bigcup_\alpha A_\alpha$ polku.

Toisaalta $y \in A_{\alpha_2}$ jollekin jollekin indeksille α_2. Koska lisäksi $c \in A_{\alpha_2}$, on olemassa joukon A_{α_2} polku δ, joka yhdistää pisteen x pisteeseen c. Tällöin polku δ on myös yhdisteen $\bigcup_\alpha A_\alpha$ polku.

Tällöin yhdistetty polku $\gamma * \overleftarrow{\delta}$ yhdistää pisteet x ja y joukossa $\bigcup_\alpha A_\alpha$. □

Polkukomponentit määritellään nyt samaan tapaan kuin komponentit.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $x \in A$. Olkoon $\{A_\alpha\}$ joukon A osajoukkojen perhe, johon kuuluvat kaikki ne joukon A polkuyhtenäiset osajoukot, joihin piste x kuuluu.

Tällöin joukko

$$P_x := \bigcup_\alpha A_\alpha$$

on polkuyhtenäinen. Sitä nimitetään *joukon A x-polkukomponentiksi*. Joukon A x-polkukomponentti on siis suurin pisteen x sisältävä joukon A polkuyhtenäinen osajoukko.

Jos $y \in P_x$, niin $P_y = P_x$, ja jos $y \notin P_x$, niin $P_y \cap P_x = \emptyset$. Täten jokainen $x \in A$ kuuluu yhteen ja vain yhteen joukon A polkukomponenttiin ja näin A on yhdiste polkukomponenteistaan, jotka ovat pistevieraita joukkoja.

Edellä nähtiin, että on olemassa joukkoja jotka ovat yhtenäisiä, mutta eivät polkuyhtenäisiä. Toiseen suuntaan sen sijaan pätee:

Lause 2.18. *Polkuyhtenäinen joukko on yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon A polkuyhtenäinen.

Antiteesi: A ei ole yhtenäinen. Tällöin

$$A = U \cup V,$$

missä $U \neq \emptyset \neq V$, $U \cap V = \emptyset$ sekä U ja V avoimia joukon A suhteen.

Valitaan $u \in U$ ja $v \in V$. Koska A on polkuyhtenäinen, on olemassa jatkuva kuvaus

$$\gamma : [a, b] \to A$$

siten, että

$$\gamma(0) = u \quad ja \quad \gamma(0) = v.$$

Nyt

$$\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = [0,1].$$

Lisäksi $\gamma^{-1}(U) \neq \emptyset \neq \gamma^{-1}(V)$, $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) = \emptyset$ ja $\gamma^{-1}(U)$ ja $\gamma^{-1}(V)$ ovat avoimia välin $[0,1]$ suhteen, joten $[0,1]$ on epäyhtenäinen, mikä on ristiriita. $\square$

Polkukomponentti kuuluu aina johonkin yhtenäisyyskomponenttiin, mutta yhtenäisyyskomponenttiin voi kuulua äärettömän monta polkukomponenttia. Näin ollen joukon polkukomponentteja on yhtä monta tai enemmän kuin komponentteja.

Vaikka yhtenäinen joukko ei ole yleisesti polkuyhtenäinen, on olemassa kuitenkin tärkeä erityistapaus, eli avaruuden $\mathbb{R}^2$ avoimet joukot, joiden yhtenäisyys ja polkuyhtenäisyys ovat ekvivalentteja.

Lause 2.19. *Avaruuden $\mathbb{R}^2$ alue on polkuyhtenäinen.*

Todistus. Olkoon A alue ja kiinnitetään $a \in A$. Jaetaan A kahteen osaan:

$$B = \{x \in A : \quad \text{x voidaan yhdistää pisteeseen a polulla}\}$$

ja

$$C = \{x \in A : \quad \text{pistettä x ei voida yhdistää pisteeseen a polulla}\}.$$

Nyt $B \cap C = \emptyset$ ja $B \cup C = A$. Osoitetaan, että B ja C ovat avoimia.

Olkoon $x \in B$ ja γ polku, joka yhdistää sen pisteeseen a. Tällöin $x \in A$, ja koska A on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x;r) \subset A$. Olkoon nyt $y \in B(x;r)$. Polku $[y,x] * \gamma$ yhdistää sen pisteeseen a joukossa A, joten $y \in B$. Näin ollen $B(x;r) \subset B$ eli B on avoin.

Olkoon $x \in C$. Tällöin $x \in A$, ja koska A on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x;r) \subset A$. Olkoon nyt $y \in B(x;r)$. Jos olisi $y \notin C$, niin tällöin $y \in B$, eli olisi olemassa polku γ, joka yhdistää sen pisteeseen a. Tällöin polku $[x,y] * \gamma$ yhdistäisi pisteen x pisteeseen a joukossa A, eli $x \in B$. Täytyy siis olla $y \in C$, ja siten $B(x;r) \subset C$ eli C avoin.

Nyt jos pätisi $C \neq \emptyset$, olisi alue A epäyhtenäinen. Täytyy siis olla $C = \emptyset$, jolloin $A = B$.

Tällöin kun $x, y \in A$ löydetään polku γ, joka yhdistää pisteen x pisteeseen a ja polku λ, joka yhdistää pisteen y pisteeseen a. Nyt polku $\gamma * \overleftarrow{\lambda}$ yhdistää pisteen x pisteeseen y, joten A on polkuyhtenäinen. $\square$

Yhdistäen edelliseen lauseeseen se tieto, että avaruudessa $\mathbb{R}^2$ avoimen joukon komponentit ovat avoimia, saadaan: avaruuden $\mathbb{R}^2$ avoimen joukon polkukomponentit ovat myös sen komponentit.

3. Kvasikonveksisuus tasossa

Joukko A on *konveksi*, jos kaikille $x, y \in A$ pätee $[x,y] \subset A$, eli pisteiden välinen jana kuuluu joukkoon. Toisin sanoen joukko A on konveksi, jos kaikille $x, y \in A$ janapolku $[x,y]$ on joukon A polku, joten konveksi joukko on polkuyhtenäinen.

Joukko A on *aidosti konveksi*, jos se on konveksi ja lisäksi kaikille $x, y \in A$ pätee $(x,y) \subset int(A)$. Avoin konveksi joukko on aina aidosti konveksi.

Pallot ovat tyypillisiä esimerkkejä konvekseista joukoista, erityisesti avoimet pallot ovat aina aidosti konvekseja. Tason standardimetriikalle myös suljetut pallot ovat aidosti konvekseja.

Lause 3.1. *Olkoon A konveksi joukko, $x \in int(A)$ ja $y \in \overline{A}$. Tällöin $[x, y) \subset int(A)$. Erityisesti joukon A sisäpisteiden joukko on aidosti konveksi ja joukon sulkeuma on konveksi.*

Todistus tälle on Valentinen kirjassa [6] L. 1.11, s. 21-22.

Suljetuille konvekseille joukoille pätee seuraava tärkeä geometrinen tulos:

Lause 3.2. *Mozkinin lause.*

Suljettu joukko F on konveksi täsmälleen silloin kun kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$ on olemassa yksikäsitteinen lähin piste joukossa F.

Tämänkin todistus on Valentinen kirjassa [6] L. 7.8, s. 103-105.

Mozkinin lause pätee vain tietyille metriikoille, joihin standardimetriikka kuuluu. Esimerkiksi itseisarvometriikan suljettu yksikköpallo on suljettu neliö jonka kärkipisteet ovat $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ ja $(0, -1)$, joten se on konveksi. Pisteen $(1, 1)$ etäisyys itseisarvometriikassa kaikkiin janan $[(1, 0), (0, 1)]$ pisteisiin on yksi, joten sillä on äärettömän monta lähintä pistettä pallossa.

Määritellään sitten käsite kvasikonveksisuus.

Määritelmä 3.3. *Olkoon $c \geq 1$. Joukko A on* c-kvasikonveksi, *jos kaikille $x, y \in A$ on olemassa pisteet yhdistävä joukon A polku, jolle pätee*

$$l(\gamma) \leq c\|x - y\|.$$

Jos joukko on c-kvasikonveksi jollekin luvulle $c \geq 1$, on se b-kvasikonveksi kaikille luvuille $b \geq c$. Yleisesti joukkoa kutsutaan kvasikonveksiksi, jos se on c-kvasikonveksi jollekin luvulle $c \geq 1$.

Lauseen 2.16. mukaan standardimetriikalla varustetussa avaruudessa $\mathbb{R}^2$ pisteet x ja y yhdistävän polun γ pituudelle pätee $l(\gamma) > \|x - y\|$, kun polun γ kuva on jokin muu kuin pisteet yhdistävä jana. Näin ollen joukko on 1-kvasikonveksi jos ja vain jos se on konveksi.

Tämä pätee taas nimenomaan standardimetriikalla varustetussa avaruudessa $\mathbb{R}^2$: Esimerkiksi itseisarvometriikalla varustetussa avaruudessa $\mathbb{R}^2$ joukko

$$A := [(0, 0), (1, 0)] \cup [(1, 0), (1, 1)]$$

on 1-kvasikonveksi joukko, joka ei ole konveksi. Jos $x, y \in A$ kuuluvat samalle janalle ne voidaan yhdistää niiden välisellä janalla. Jos taas ne ovat eri janoilla, voidaan olettaa, että $x \in [(0, 0), (1, 0)]$ ja $y \in [(1, 0), (1, 1)]$, niin polku $\gamma := [x, (1, 0)] \cup [(1, 0), y]$ yhdistää ne ja sen pituudelle pätee $l(\gamma) = \|x - y\|$.

Konveksien joukkojen leikkaus on konveksi: Olkoot A ja B konvekseja ja $x, y \in A \cap B$. Tällöin kun $z \in [x, y]$, niin koska $[x, y] \subset A$ ja $[x, y] \subset B$, pätee $z \in A \cap B$.

Sen sijaan kvasikonveksien joukkojen leikkauksen ei tarvitse olla edes yhtenäinen. Esimerkiksi kahden ympyräviivan leikkaus voi olla kaksi erillistä pistettä. Toisaalta vaikka leikkaus olisi yhtenäinen ei se välttämättä ole kvasikonveksi. Suljettujen kiekkojen $\overline{B}((-1, 0); 1)$ ja $\overline{B}((1, 0); 1)$ komplementit ovat π-kvasikonvekseja. Näiden komplementtien leikkaus on $\mathbb{R}^2 \setminus (\overline{B}((-1, 0); 1) \cup \overline{B}((1, 0); 1))$, joka ei ole kvasikonveksi. Pisteet $(0, 1/n)$ ja $(0, -1/n)$ kuuluvat leikkaukseen ja niiden välinen etäisyys on $2/n$. Polun γ joka yhdistää ne pitää kuitenkin kiertää toinen kiekoista, joten sen pituudelle pätee $l(\gamma) \geq 2$.

Jos joukko on c-kvasikonveksi jollekin c, on se polkuyhtenäinen. Tyypillinen esimerkki joukosta, joka on polkuyhtenäinen mutta ei ole c-kvasikonveksi millekään luvulle c, on

$$A := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq 0\right\}.$$

Selvästi A on YMV-yhtenäinen. Pistepareille $x_n := (-2, n)$ ja $y_n := (2, n)$ pätee; $\|x_n - y_n\| = 4$ kaikille n, mutta polulle γ_n joka yhdistää pisteet x_n ja y_n pätee $l(\gamma_n) \geq 2n$. Tällöin

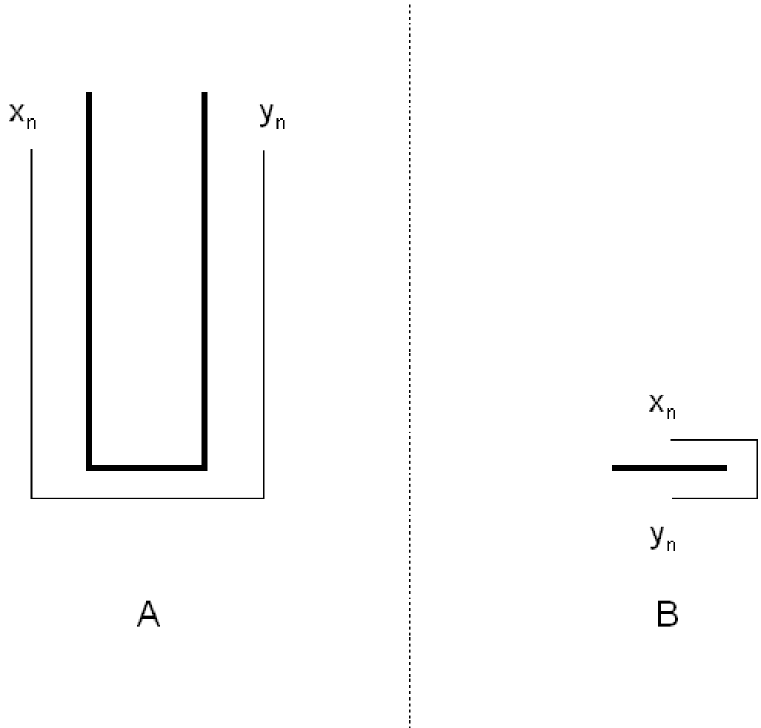
$$\frac{l(\gamma_n)}{\|x_n - y_n\|} \geq \frac{n}{2}.$$

Toinen tyypillinen esimerkki on

$$B := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\right\}.$$

Jälleen selvästi B on YMV-yhtenäinen. Pistepareille $x_n := (0, 1/n)$ ja $y_n := (0, -1/n)$ pätee, että $\|x_n - y_n\| = 2/n$ kaikille n, mutta polulle γ_n joka yhdistää pisteet x_n ja y_n pätee $l(\gamma) \geq 2$. Tällöin

$$\frac{l(\gamma_n)}{\|x_n - y_n\|} \geq n.$$



KUVA 2. Tyypilliset esimerkit ei kvasikonvekseista joukoista.

Konstruoidaan sitten esimerkki joukosta, joka on kvasikonveksi.

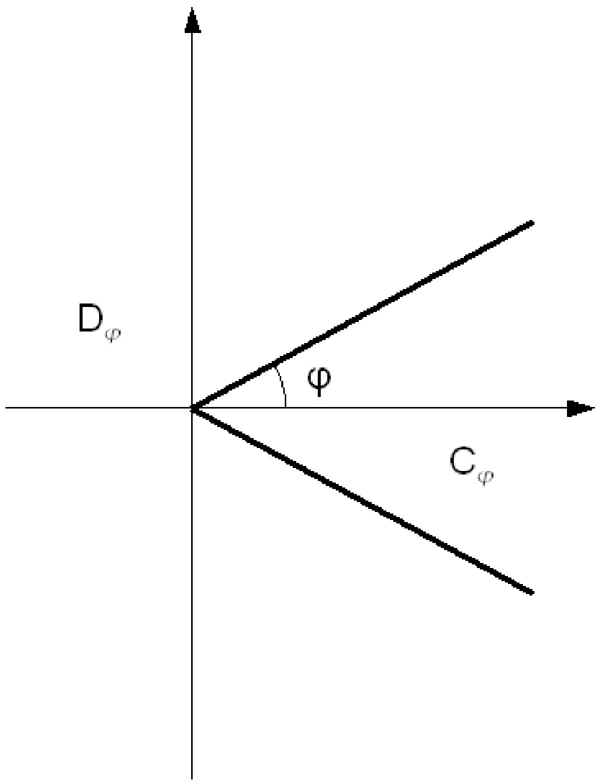
Merkitään tason pisteiden napakoordinaatteja (r, θ). Olkoon $0 < \varphi < \pi/2$ ja $C_\varphi := \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : -\varphi \leq \theta \leq \varphi\right\}$, eli suljettu konveksi sektori, jonka kulma on $0 < 2\varphi < \pi$. Olkoon $D_\varphi := \mathbb{R}^2 \setminus C_\varphi$, eli vastaava avoin konkaavi sektori. Osoitetaan, että alue D_φ on c-kvasikonveksi luvulle $c = \frac{1}{sin(\varphi)}$.

Jos pisteiden x ja y välinen napakulma on $0 \leq 2\theta \leq \pi$, niin

$$sin(\theta)(\|x\| + \|y\|) \leq \|x - y\|.$$

Koska pisteiden välinen etäisyys ja kulma sekä pisteiden etäisyys origosta säilyvät rotaatiossa, voidaan olettaa, että $x = (r, \theta)$ ja $y = (s, -\theta)$. Nyt

$$sin(\theta)(\|x\| + \|y\|) = sin(\theta)r - (sin(-\theta)s) = |x_2 - y_2| \leq \|x - y\|.$$



KUVA 3. Konveksi sektori ja kvasikonveksi konkaavi sektori.

Olkoon nyt $c > 1/sin(\varphi)$ ja $x, y \in D_\varphi$. Jos $[x, y] \cap C_\varphi \neq \emptyset$, pätee pisteiden x ja y väliselle kulmalle 2θ, että $2\varphi < 2\theta \leq \pi$.

Jos pisteiden välinen napakulma on $2\theta = \pi$, niin $\|x-y\| = \|x\|+\|y\|$. Tällöin koska $c = 1/sin(\varphi) > 1$, pätee
$$c\|x-y\| > \|x\| + \|y\|.$$
Jos taas pisteiden väliselle napakulmalle pätee $2\varphi < 2\theta < \pi$, niin koska $sin(\theta)(\|x\|+\|y\|) \leq \|x-y\|$, pätee
$$c\|x-y\| = \frac{1}{sin(\varphi)}\|x-y\| > \frac{1}{sin(\theta)}\|x-y\| \geq \|x\| + \|y\|.$$
Molemmissa tapauksissa voidaan valita
$$0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}(c\|x-y\| - (\|x\| + \|y\|)).$$

Määritellään nyt kahdesta janasta yhdistetty polku $\gamma := [x, -\epsilon] * [-\epsilon, y]$, missä piste $-\epsilon$ on karteesisin koordinaatein piste $(-\epsilon, 0)$. Tämä polku yhdistää pisteet x ja y alueessa D_φ. Sen pituudelle pätee
$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \|x-(-\epsilon)\| + \|(-\epsilon) - y\| \leq \|x\| + \|y\| + 2\|(-\epsilon)\| = \|x\| + \|y\| + 2\epsilon \\ &\leq \|x\| + \|y\| + 2\frac{1}{2}(c\|x-y\| - (\|x\| + \|y\|)) = c\|x-y\|. \end{aligned}$$

Alueen D_φ sulkeuma on tässä tapauksessa myös c-kvasikonveksi, koska reunan pisteet voidaan yhdistää toisiinsa reunassa kulkevalla polulla. Sen sijaan, jos alueeseen D_φ yhdistetään jokin reunan osajoukko, ei yhdistetty joukko ole välttämättä c-kvasikonveksi.

Esimerkkinä tästä on alue D_φ, johon on yhdistetty kulmakoordinaatein merkityt pisteet $x := (1, \varphi)$ ja $y := (1, -\varphi)$, eli karteesisin koordinaatein pisteet $x := (cos\varphi, sin\varphi)$ ja $y := (cos\varphi, -sin\varphi)$. Näiden pisteiden väliselle etäisyydelle pätee $\|x - y\| = 2sin\varphi$.

Koska origo ei kuitenkaan kuulu joukkoon $D_\varphi \cup \{x, y\}$, niin polun γ joka yhdistää pisteet x ja y tässä joukossa täytyy leikata x_1-akselia jossain pisteessä $-\delta$. Tässä piste $-\delta$ on karteesisin koordinaatein $(-\delta, 0)$, missä $\delta > 0$.

Tällöin

$$\begin{aligned} l(\gamma) &\geq \|x - (-\delta)\| + \|(-\delta) - y\| = \sqrt{(x_1 - (-\delta))^2 + x_2^2} + \sqrt{(y_1 - (-\delta))^2 + y_2^2} \\ &> \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \|x\| + \|y\| = 2. \end{aligned}$$

Nyt siis

$$l(\gamma) > 2 = \frac{1}{sin\varphi} 2sin\varphi = \frac{1}{sin\varphi}\|x - y\| = c\|x - y\|.$$

Olkoot $n \geq 3$ ja $1 \leq i \leq n$. Merkitään suljettua konveksia sektoria

$$C_{n,i} := \left\{ (rcos(\theta), rsin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, (i-1)\frac{2\pi}{n} \leq \theta \leq i\frac{2\pi}{n} \right\}.$$

Kaikille luvuille $1 \leq i \leq n$ tällaisen sektorin komplementti on c-kvasikonveksi, luvulle $c := \frac{1}{sin(\frac{2\pi}{n})}$. Siirretään sektoreita poispäin origosta, määritellään $\widehat{C}_{n,i} := z_i + C_{n,i}$, missä kulmakoordinaatein piste $z_i := (1, \frac{2i-1}{2}\frac{2\pi}{n})$. Näiden siirrettyjen sektoreiden komplementit ovat c-kvasikonvekseja, ja alue $D_n := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{C}_{n,i}$ on c-kvasikonveksi.

Näin ollaan määritelty c-kvasikonveksi alue, jolla on n rajoittamatonta reunakomponenttia. Konstruktion perusteella vaikuttaa siltä, että tämä on maksimimäärä rajoittamattomia reunakomponentteja, mitä tälle luvulle c, c-kvasikonveksilla alueella voi olla. Tämä tullaan todistamaan myöhemmässä lauseessa.

Tutkitaan lisäksi edellä olleiden kulmasektoreiden kaltaista, mutta yleisempää tapausta. Olkoon $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ jatkuva kuvaus, jolle $f(0) = 0$. Merkitään

$$C_f := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, -f(x_1) \leq x_2 \leq f(x_1) \right\}.$$

Selvitetään milloin tämän suljetun joukon komplementtialue $D_f := \mathbb{R}^2 \setminus C_f$ voi olla kvasikonveksi.

Ensinnäkin jos pätisi $f(z) = 0$ jollekin $z > 0$, niin pisteet $(z, 1/n)$ ja $(z, -1/n)$ kuuluisivat alueeseen D_f. Niiden välinen etäisyys on $2/n$, mutta niitä yhdistävän polun γ pituudelle pätee kaikille n $l(\gamma) \geq 2z$. Eli, jotta D_f olisi kvasikonveksi, täytyy päteä $f(x) > 0$, kun $x > 0$.

Tutkitaan pisteitä $y := (x, 2f(x))$ ja $z := (x, -2f(x))$, missä $x > 0$. Ne kuuluvat alueeseen D_f, niiden välinen etäisyys on $\|y - z\| = 4f(x)$ ja niitä yhdistävän polun γ pituudelle pätee $l(\gamma) \geq 2x$. Tällöin

$$\frac{l(\gamma)}{\|y - z\|} \geq \frac{2x}{4f(x)} = \frac{x}{2f(x)}.$$

Jotta D_f olisi kvasikonveksi, ei voi olla $\lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{2f(x)} = \infty$, mikä pätisi esimerkiksi jos olisi $f(x) = x^2$. Toisaalta ei myöskään saa päteä $\lim_{x\uparrow\infty} \frac{x}{2f(x)} = \infty$, kuten silloin kun olisi $f(x) = \sqrt{x}$. Kvasikonveksin alueen komplementissa ei voi siis olla kulmasektoria terävämpiä piikkejä. Toisaalta komplementin rajoittamattomat komponentit eivät voi olla kulmasektoria kapeampia.

Edellä kun c-kvasikonveksiin joukkoon yhdistettiin reunapisteitä, yhdistejoukko ei ollut välttämättä c-kvasikonveksi. Sen sijaan yhdistejoukko on b-kvasikonveksi luvulle $b > c$, todistus on Herronin ja Koskelan artikkelista [2]:

Lause 3.4. *Olkoon A c-kvasikonveksi, $b > c \geq 1$ ja $x, y \in \overline{A}$. Tällöin joukko $A \cup \{x, y\}$ on b-kvasikonveksi.*

Todistus. Olkoon $a > 0$ siten, että $c(1 + 10a) \leq b$. Merkitään $r = a\|x - y\|$ ja valitaan pisteet $x_j \in A \cap B(x; r/2^j)$ ja $y_j \in A \cap B(y; r/2^j)$. Tällöin on olemassa polku γ_0 joka yhdistää pisteet x_0 ja y_0 joukossa A, polut α_j jotka yhdistävät pisteet x_j ja x_{j+1} joukossa A sekä polut β_j jotka yhdistävät pisteet y_j ja y_{j+1} joukossa A. Näille poluille pätee

$$l(\gamma_0) \leq c\|x_0 - y_0\| \leq c(2r + \|x - y\|),$$

$$l(\alpha_j) \leq c\|x_{j+1} - x_j\| \leq 2cr/2^j$$

ja

$$l(\beta_j) \leq c\|y_{j+1} - y_j\| \leq 2cr/2^j.$$

Nyt polku

$$\ldots * \alpha_1 * \alpha_0 * \gamma_0 * \beta_0 * \beta_1 * \ldots$$

yhdistää pisteet x ja y joukossa $A \cup \{x, y\}$. Merkitään tätä polkua γ, sille pätee

$$\begin{aligned} l(\gamma) &\leq l(\gamma_0) + \sum_{j=0}^{\infty} l(\alpha_j) + \sum_{j=0}^{\infty} l(\beta_j) \leq c(2r + \|x - y\|) + 2\sum_{j=0}^{\infty} 2cr/2^j \\ &= c(2r + \|x - y\| + 8r) = c(1 + 10a)\|x - y\| \leq b\|x - y\|. \end{aligned}$$

□

Korollaari 3.5. *Olkoon A c-kvasikonveksi ja $b > c \geq 1$. Tällöin sulkeuma $\overline{A}$ on b-kvasikonveksi.*

Kvasikonveksin joukon sulkeuma on siis polkuyhtenäinen, mikä ei päde yleisesti polkuyhtenäiselle joukolle. Näin ollen polkuyhtenäinen joukko, jonka sulkeuma ei ole polkuyhtenäinen, ei voi olla c-kvasikonveksi millekään vakiolle c.

Sanotaan, että piste a on *saavutettavissa* joukosta A, jos on olemassa joukon $A \cup \{a\}$ kaari C johon piste a kuuluu. Korollaarin 3.5. perusteella kvasikonveksin joukon kaikki reunapisteet ovat saavutettavissa tästä joukosta.

Näin ollen esimerkiksi alue

$$\big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\big\} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} [(0, 0), (1/2, 1/2n)]$$

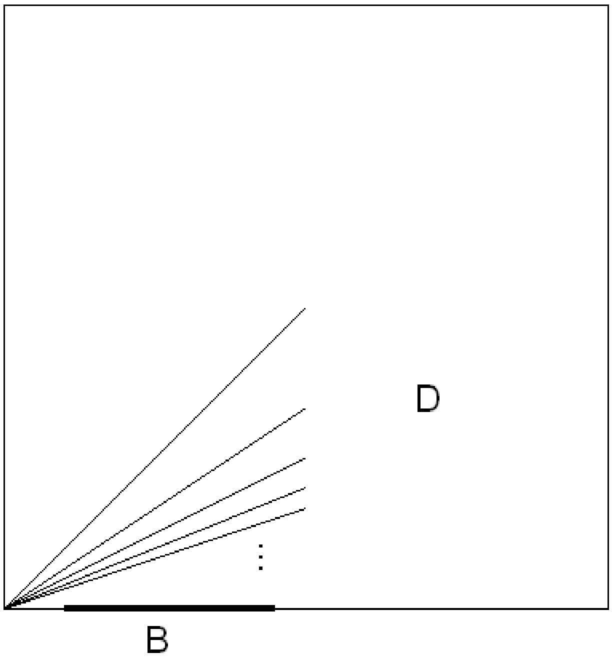
ei voi olla kvasikonveksi. Avoimen janan $((0, 0), (1/2, 0))$ pisteet nimittäin ovat tämän alueen reunapisteitä jotka eivät ole saavutettavissa alueesta.

Polkuyhtenäisyyden lisäksi kvasikonveksi joukko on myös tasaisesti lokaalisti yhtenäinen:

Lause 3.6. *Olkoon $c \geq 1$ ja A c-kvasikonveksi joukko. Tällöin A on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}^2$ ja $t > 0$. Valitaan $r := t/4c$. Tällöin $B(x; r) \cap A$ kuuluu johonkin joukon $B(x; t) \cap A$ komponenttiin. Todistetaan tämä antiteesillä:

Voidaan olettaa, että leikkauksessa $B(x; r) \cap A$ on vähintään kaksi pistettä. Olkoot $a \in B(x; r) \cap A$ ja $b \in B(x; r) \cap A$ siten, että ne kuuluvat joukon $B(x; t) \cap A$ eri



KUVA 4. Janan B pisteet eivät saavutettavissa alueesta D.

komponentteihin. Nyt, koska A on c-kvasikonveksi, on olemassa joukon A polku γ, joka yhdistää pisteet a ja b, ja jonka pituudelle pätee

$$l(\gamma) \leq c\|a-b\| \leq c2r = t/2.$$

Kun $y \in |\gamma|$, niin

$$\|y-x\| \leq \|y-a\| + \|a-x\| \leq t/2 + t/4c \leq 3t/4.$$

Näin ollen $|\gamma| \subset B(x;t) \cap A$, joten polun kuva yhdistää pisteet a ja b joukossa $B(x;t) \cap A$. Tämä on ristiriita sen kanssa, että ne kuuluvat joukon $B(x;t) \cap A$ eri komponentteihin. $\square$

Lauseen 2.7. nojalla, jos D on alue ja C sen komplementin $\mathbb{R}^2 \setminus D$ komponentti niin joukko $Y := \mathbb{R}^2 \setminus C$ on alue. Seuraavista todistuksista seuraa, että jos D on lisäksi c-kvasikonveksi, niin Y on c-kvasikonveksi, ja jos D on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen, niin Y on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen.

Lause 3.7. *Olkoon Z b-kvasikonveksi joukko, $A \subset Z$ avoin joukon Z suhteen ja C joukon $Z \setminus A$ komponentti. Merkitään $Y := Z \setminus C$. Jos A on c-kvasikonveksi, niin Y on bc-kvasikonveksi.*

Todistus. Olkoot $x, y \in Y$ ja α kaari, joka yhdistää pisteet x ja y avaruudessa Z, ja jonka pituudelle pätee $l(\alpha) \leq b\|x-y\|$. Jos $|\alpha| \subset Y$, niin α on etsitty polku. Voidaan siis olettaa, että $|\alpha| \cap C \neq \emptyset$.

Jos löydetään pisteet $u, v \in |\alpha| \cap A$ siten, että $|\alpha\,[x,u]| \subset Y$ ja $|\alpha\,[v,y]| \subset Y$, on olemassa pisteet u ja v yhdistävä joukon A kaari β, jonka pituudelle pätee $l(\beta) \leq c\|u-v\|$, ja tällöin

$$\gamma := \alpha\,[x,u] * \beta * \alpha\,[v,y]$$

on kaari joka yhdistää pisteet x ja y joukossa Y, ja jonka pituudelle pätee

$$\begin{aligned}
l(\gamma) = l(\alpha\,[x,u]) + l(\beta) + l(\alpha\,[v,y]) &\le l(\alpha\,[x,u]) + c\|u-v\| + l(\alpha\,[v,y]) \\
&\le l(\alpha\,[x,u]) + cl(\alpha\,[u,v]) + l(\alpha\,[v,y]) \\
&\le cl(\alpha\,[x,u]) + cl(\alpha\,[u,v]) + cl(\alpha\,[v,y]) \\
&= cl(\alpha) \le bc\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Koska $|\alpha| \cap C \neq \emptyset$ löydetään $w \in |\alpha| \cap C$. Tällöin $\alpha\,[x,w]$ on kontinuumi, sillä $x \neq w$. Sille pätee

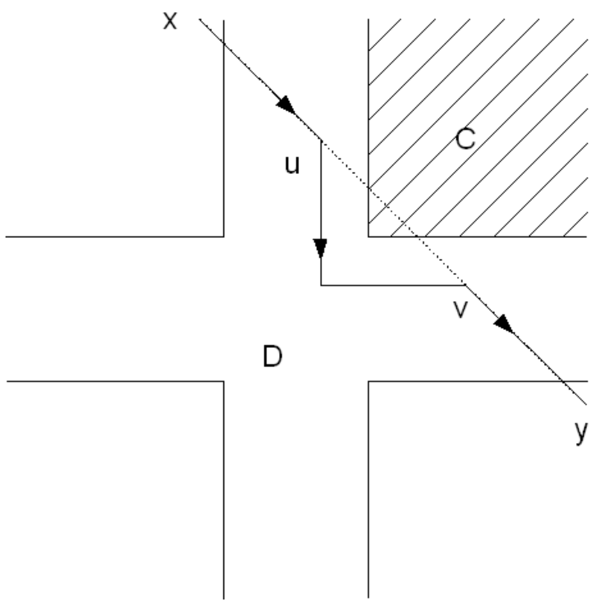
$$\alpha\,[x,w] \cap Y \neq \emptyset \neq \alpha\,[x,w] \cap C.$$

Lauseen 2.9. nojalla löydetään osakontinuumi K_x, joka leikkaa joukkoa A ja kuuluu joukkoon Y. Tällöin joukosta $K_x \cap A$ löytyy etsitty piste u.

Samoin, koska $y \neq w$, $\alpha\,[w,y]$ on kontinuumi, ja sille pätee

$$\alpha\,[w,y] \cap Y \neq \emptyset \neq \alpha\,[w,y] \cap C,$$

löydetään osakontinuumi K_y ja joukosta $K_y \cap A$ etsitty piste v. □



Kuva 5. Korollaari 3.8.

Korollaari 3.8. *Olkoon D c-kvasikonveksi alue. Olkoon C joukon $\mathbb{R}^2 \setminus D$ komponentti. Tällöin joukko $\mathbb{R}^2 \setminus C$ on c-kvasikonveksi.*

Todistus. Valitaan edellisessä lauseessa $Z = \mathbb{R}^2$ ja $A = D$. □

Lause 3.9. *Olkoon Z c-kvasikonveksi, $A \subset Z$ yhtenäinen ja avoin avaruuden Z suhteen sekä C joukon $Z \setminus A$ komponentti. Merkitään $Y := Z \setminus C$. Jos A on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen, niin Y on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon nyt $a \in \mathbb{R}^2$ ja $t > 0$. Tällöin on olemassa $s > 0$ siten, että $A \cap B(a;s)$ kuuluu johonkin joukon $A \cap B(a;t)$ komponenttiin. Merkitään $r := \frac{s}{2c+1}$. Osoitetaan, että $Y \cap B(a;r)$ kuuluu johonkin joukon $Y \cap B(a;t)$ komponenttiin.

Olkoot $x, y \in Y \cap B(a;r)$. Valitaan kaari α joka yhdistää pisteet x ja y avaruudessa Z ja jolle

$$l(\alpha) \leq c\|x - y\|.$$

Nyt kaikille pisteille $z \in |\alpha|$

$$\|z - a\| \leq \|z - x\| + \|x - a\| < l(\alpha) + r \leq c * 2r + r = (2c + 1)r = s,$$

joten $|\alpha| \subset B(a;s)$. Näin ollen, jos $|\alpha| \subset Y$ väite pätee. Voidaan olettaa, että $|\alpha| \cap C \neq \emptyset$.

Nyt löydetään $w \in |\alpha| \cap C$, jolloin $\alpha\,[x,w]$ on kontinuumi, sillä $x \neq w$. Tälle kontinuumille pätee

$$\alpha\,[x,w] \cap Y \neq \emptyset \neq \alpha\,[x,w] \cap C.$$

Lauseen 2.9. nojalla löydetään osakontinuumi $\alpha\,[x,w]_x$, joka leikkaa joukkoa A ja kuuluu joukkoon Y. Samoin, koska $y \neq w$, $\alpha\,[w,y]$ on kontinuumi jolle

$$\alpha\,[w,y] \cap Y \neq \emptyset \neq \alpha\,[w,y] \cap C,$$

löydetään osakontinuumi $\alpha\,[w,y]_y$, joka leikkaa joukkoa A ja kuuluu joukkoon Y.

Valitaan pisteet $u \in \alpha\,[x,w]_x$ ja $v \in \alpha\,[w,y]_y$ sekä polku β, joka yhdistää pisteet u ja v joukossa $A \cap B(a;t)$. Tällöin joukko $\alpha\,[x,w]_x \cup |\beta| \cup \alpha\,[w,y]_y$ yhdistää pisteet x ja y joukossa $Y \cap B(a;r)$, joten x ja y kuuluvat johonkin joukon $Y \cap B(a;r)$ komponenttiin. □

Korollaari 3.10. *Olkoon D alue joka on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen. Olkoon C joukon $\mathbb{R}^2 \backslash D$ komponentti. Tällöin alue $\mathbb{R}^2 \backslash C$ on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen.*

Todistus. Valitaan edellisessä lauseessa $Z = \mathbb{R}^2$ ja $A = D$. □

4. Jordan-käyrä-alueet ja kvasikonveksisuus

Tässä luvussa todistetaan että kvasikonveksien alueiden reunat ovat joko yksittäisiä pisteitä tai Jordan-käyriä. Aloitetaan todistamalla yleisiä tuloksia alueiden reunoille.

Olkoon D alue. Joukko C on alueen D

(1) *Lävistäjä*, jos $C = |\lambda|$, missä λ on kaari jolle pätee $\lambda(0) \in \partial D$, $\lambda(1) \in \partial D$ ja $\lambda(t) \in D$, kun $0 < t < 1$.
(2) *Osalävistäjä*, jos $C = |\lambda|$, missä λ on kaari jolle pätee $\lambda(0) \in \partial D$ ja $\lambda(t) \in D$, kun $0 < t \leq 1$.

Lause 4.1. *Alexanderin lemma.*

Tasossa $\mathbb{R}^2$ pätee: Olkoot F_1 ja F_2 suljettuja joukkoja siten, että $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Olkoot lisäksi joukot U ja V siten, että kumpikaan joukoista F_1 ja F_2 ei erota joukkoja U sekä V. Tällöin yhdiste $F_1 \cup F_2$ ei erota joukkoja U ja V.

Todistus tälle löytyy esimerkiksi Newmanin kirjasta [5] Ch V, 2, Lause 9.2 s. 110-112.

Seuraavat lauseet ovat Newmanin kirjassa [5] Ch V, 4, Lauseet 14.1-14.5 s. 123-125.

Lause 4.2. *Olkoot D_1 ja D_2 alueita siten, että $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ja $\partial D_1 \subset \partial D_2$. Tällöin reuna ∂D_1 on yhtenäinen.*

Todistus. Todistetaan ensin, että mikään reunan ∂D_1 aito suljettu osajoukko F ei erota alueita D_1 ja D_2: Olkoon $x \in \partial D_1 \backslash F$, jolloin $dist(x, F) > 0$. Tällöin, koska $x \in \partial D_1 \subset \partial D_2$, löydetään $y_1 \in D_1$ ja $y_2 \in D_2$ siten, että $\|x - y_1\| < dist(x, F)/2$ ja $\|x - y_2\| < dist(x, F)/2$. Tällöin jana $[y_1, y_2]$ yhdistää nämä pisteet joukossa $\mathbb{R}^2 \backslash F$, joten joukko F ei erota niitä. Tällöin F ei myöskään erota alueita D_1 ja D_2.

Tehdään nyt antiteesi itse väitteen todistamiseksi: Olkoon $U \| V$ joukon ∂D_1 jako. Joukot U ja V ovat suljetun joukon jakona suljettuja, ja ne eivät erota alueita D_1 ja D_2. Koska lisäksi $U \cap V = \emptyset$, ei Alexanderin lemman nojalla myöskään joukko $U \cup V = \partial D_1$ erota alueita D_1 ja D_2. Tämä on ristiriita, sillä D_1 on komplementin $\mathbb{R}^2 \backslash \partial D_1$ komponentti ja $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, joten D_2 ei voi kuulua alueeseen D_1. □

Lause 4.3. *Olkoon D alue. Olkoon C joukon $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}$ komponentti. Tällöin reuna ∂C on yhtenäinen joukko.*

Todistus. Nyt C on alue ja avoimen joukon $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}$ komponentti. Tällöin lauseen 2.5. nojalla $\partial C \subset \partial(\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D})$, joten

$$\partial C \subset \partial(\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}) = \partial(\overline{D}) \subset \partial D.$$

Väite siis pätee edellisen lauseen nojalla. □

Lause 4.4. *Jos suljettu joukko F erottaa pisteet x ja y, niin jokin joukon F komponentti erottaa ne.*

Todistus. Olkoon C_x se joukon $\mathbb{R}^2 \backslash F$ komponentti johon x kuuluu. Tällöin piste y kuuluu alueen $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{C_x}$ johonkin komponenttiin C_y. Reuna ∂C_y on edellisen lauseen 4.2. nojalla yhtenäinen ja joukon F osajoukko, joka erottaa pisteet x ja y. Täten se joukon F komponentti, johon ∂C_y kuuluu, on etsitty komponentti. □

Lause 4.5. *Olkoon F suljettu yhtenäinen joukko. Olkoon D avoimen joukon $\mathbb{R}^2 \backslash F$ komponentti, jolloin se on alue. Tällöin alueen D reuna ∂D on yhtenäinen.*

Todistus. Antiteesi: Olkoon $H_1 \| H_2$ joukon ∂D jako. Tarkastellaan avointa joukkoa $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}$. Lauseen 4.2. nojalla sen komponenttien reunat ovat yhtenäisiä. Lisäksi pätee

$$\partial(\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}) = \partial(\overline{D}) \subset \partial D,$$

joten joukon $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}$ komponentit voidaan jakaa niihin joiden reunat kuuluvat joukkoon H_1, ja niihin joiden reunat kuuluvat joukkoon H_2.

Merkitään näiden komponenttien yhdisteitä G_1 ja G_2, jotka ovat avoimia joukkoja.

Olkoon nyt $x \in \partial G_1$. Sen jokaiseen ympäristöön kuuluu jonkin joukon G_1 komponentin D_1 piste, ja koska x ei kuulu joukkoon D_1, on tämä ympäristön piste joukon ∂D_1 eli myös joukon H_1 piste. Näin ollen $x \in \overline{H_1}$. Koska siis pätee $\partial G_1 \subset \overline{H_1} = H_1$, niin

$$G_1 \cup H_1 = \overline{G_1} \cup H_1,$$

ja siten $G_1 \cup H_1$ on suljettu joukko.

Samalla tavalla $G_2 \cup H_2$ on suljettu joukko.

Nyt $G_1 \cup H_1$ ja $G_2 \cup H_2$ ovat suljettuja erillisiä joukkoja joiden yhdiste on

$$G_1 \cup H_1 \cup G_2 \cup H_2 = (\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}) \cup \partial D = int(\mathbb{R}^2 \backslash D) \cup \partial(\mathbb{R}^2 \backslash D) = \mathbb{R}^2 \backslash D,$$

johon joukko F kuuluu. Koska H_1 ja H_2 ovat joukon F epätyhjiä osajoukkoja, $(G_1 \cup H_1) \cap F \| (G_2 \cup H_2) \cap F$ on joukon F jako, mikä on ristiriita. □

Korollaari 4.6. *Olkoon D alue. Tällöin joukon $\mathbb{R}^2 \backslash \partial D$ komponenteilla, lukuunottamatta mahdollisesti aluetta D, on yhtenäiset reunat.*

Todistus. Nämä komponentit ovat yhtenäiselle suljetulle joukolle $\overline{D}$ avoimen joukon $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}$ komponentit, sillä

$$\mathbb{R}^2 \backslash \partial D = \mathbb{R}^2 \backslash (\overline{D} \backslash D) = (\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}) \cup D,$$

jolloin väite seuraa lauseesta 4.5. □

Lause 4.7. *Olkoon D alue. Tällöin jokaiseen komplementin $\mathbb{R}^2 \backslash D$ komponenttiin kuuluu täsmälleen yksi reunan ∂D komponentti.*

Todistus. Koska $\partial D \subset \mathbb{R}^2 \backslash D$, jokainen reunan ∂D komponentti kuuluu joukon $\mathbb{R}^2 \backslash D$ komponenttiin. Olkoon C komplementin $\mathbb{R}^2 \backslash D$ komponentti. Riittää osoittaa, että $\partial D \cap C$ on yhtenäinen ja epätyhjä. Lauseen 2.13. mukaan $\partial(\mathbb{R}^2 \backslash D) \cap C = \partial C$, siis myös $\partial D \cap C = \partial(\mathbb{R}^2 \backslash D) \cap C = \partial C$, joten $\partial D \cap C$ on epätyhjä. Lauseen 2.7. nojalla $\mathbb{R}^2 \backslash C$ on alue, ja tällöin edellisen korollaarin nojalla alueen C reuna ∂C on yhtenäinen. □

Määritellään sitten mitä tarkoitetaan Jordan käyrillä. Jordan-käyrät on määritelty esimerkiksi Newmanin kirjassa [5] Ch V, 2, s.113-119.

Laajennettu taso: Olkoon $\mathbb{R}^2$ taso varustettuna standardimetriikalla ja sen indusoimalla standarditopologialla. Laajennetaan se lisäämällä siihen äärettömyyspiste:

$$\widehat{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}.$$

Merkitään S^2 kolmiulotteisen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpallon pintaa, jossa on metriikkana kolmiulotteinen standardimetriikka. Tavallinen taso standardimetriikalla on homeomorfinen pohjoisnavalta punkteeratun pallonpinnan $S^2 \backslash \{(0,0,1)\}$ kanssa stereograafisen projektion kautta. Olkoon f kuvaus laajennetulta tasolta pallonpinnalle S^2 siten, että se kuvaa muut pisteet pohjoisnavan kautta tehtävän stereograafisen projektion käänteiskuvauksella ja äärettömyyspisteen pohjoisnavaksi. Kuvaus f on bijektio ja se indusoi metriikan laajennetulle tasolle

$$d(x, y) = \|f(x) - f(y)\|,$$

missä normi on siis kolmiulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ standardinormi.

Laajennettu taso varustettuna tähän metriikkaan liittyvällä topologialla on homeomorfinen pallonpinnan kanssa kuvauksen f kautta. Lisäksi metriikan d rajoittuma tavalliseen tasoon on topologisesti ekvivalentti standardimetriikan kanssa.

Joukko $C \subset S^2$ on *Jordan-käyrä pallonpinnalla*, jos C on homeomorfinen ympyräviivan S^1 kanssa. Näiden joukkojen kuvat $\widehat{C}$ homeomorfismissa laajennetulle tasolle ovat *laajennetun tason Jordan-käyrät*. Näitä on kahdenlaisia: Joko $\widehat{C} = C$, missä $C \subset \mathbb{R}^2$ on homeomorfinen ympyräviivan S^1 kanssa, tai $\widehat{C} = C \cup \{\infty\}$, missä $C \subset \mathbb{R}^2$ on homeomorfinen reaalisuoran $\mathbb{R}$ kanssa ja homeomorfismille $g : \mathbb{R} \to C$ pätee, että $g(t) \to \infty$ avaruudessa $\widehat{\mathbb{R}^2}$, kun $t \to \pm\infty$.

Näitä kahta laajennetun tason Jordan-käyrän tyyppiä vastaa tavallisen tason kaksi Jordan-käyrän tyyppiä. Joukko $C \subset \mathbb{R}^2$ on *Jordan-silmukka*, jos C on homeomorfinen ympyräviivan S^1 kanssa. Joukko $C \subset \mathbb{R}^2$ on *Jordan-viiva*, jos C on homeomorfinen reaalisuoran $\mathbb{R}$ kanssa ja homeomorfismille $g : \mathbb{R} \to C$ pätee, että $g(t) \to \infty$ avaruudessa $\widehat{\mathbb{R}^2}$, kun $t \to \pm\infty$. Yleisesti siis joukko $C \subset \mathbb{R}^2$ on *Jordan-käyrä*, jos se on Jordan-silmukka tai Jordan-viiva.

Käytetään lisäksi nimitystä *Jordan-kiekko* alueesta, jonka reuna on Jordan-käyrä, ja joka on homeomorfinen tason avoimen yksikkökiekon $B^2(0;1)$ kanssa.

Lause 4.8. *Jordan-Brouwerin-lause pallonpinnalla: Olkoon $C \subset S^2$ Jordan-käyrä pallonpinnalla. Tällöin joukolla $S^2 \backslash C$ on täsmälleen kaksi komponenttia G ja G^*, jotka ovat Jordan-kiekkoja ja joille pätee*
$$\partial G = C = \partial G^*.$$

Todistus. Tämä todistetaan usein algebrallisen topologian avulla, esimerkiksi Lefschetz [4], Ch VII, §3, Sovellus 19.6, s. 304-305. Toinen todistus lauseelle löytyy Kuratowskin kirjasta [3] Ch X, §61, II, Lause 1, s. 510-511. □

Laajennettu taso on homeomorfinen pallonpinnan kanssa ja Jordan-Brouwerin-lause pätee siinä samoin kun pallonpinnalla.

Lause 4.9. *Jordan-Brouwerin-lause laajennetussa tasossa: Olkoon $\widehat{C} \subset \widehat{\mathbb{R}^2}$ laajennetun tason Jordan-käyrä. Tällöin joukolla $\widehat{\mathbb{R}^2} \backslash \widehat{C}$ on täsmälleen kaksi komponenttia $\widehat{G}$ ja $\widehat{G^*}$, jotka ovat Jordan-kiekkoja ja joille pätee*
$$\partial \widehat{G} = \widehat{C} = \partial \widehat{G^*}.$$

Jos pallon pinnalta S^2, jolla on Jordan-käyrä C, poistetaan pohjoisnapa, niin punkteeratun pallon joukolla $(S^2 \backslash (0,0,1)) \backslash (C \backslash (0,0,1))$ on yhä kaksi komponenttia, joiden reuna on $C \backslash (0,0,1)$. Näin ollen Jordan-Brouwerin-lause pätee myös tasossa:

Lause 4.10. *Jordan-Brouwerin-lause tasossa: Olkoon $C \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-käyrä. Tällöin joukolla $\mathbb{R}^2 \backslash C$ on täsmälleen kaksi komponenttia G ja G^*, joille pätee*
$$\partial G = C = \partial G^*.$$

Todistus. Lause voidaan todistaa myös käyttämättä algebrallista topologiaa, kuten Newman [5], Ch V, 2, Lause 10.2 s. 115-116. □

Tasossa Jordan-käyrän C komplementin komponentit G ja G^* ovat Jordan-kiekkoja, jos C on Jordan-viiva. Jos C on Jordan-silmukka, vain toinen komponenteista G ja G^* on Jordan-kiekko.

Jordan-käyrän komplementtialueet ovat tasaisesti lokaalisti yhtenäisiä, sekä laajennetussa, että tavallisessa tasossa.

Lause 4.11. *Olkoon D alue, jonka reuna ∂D on Jordan-käyrä. Tällöin D on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen.*

Todistus. Newmanin teoksessa [5] Ch VI, 4, Lause 14.1 s. 161. □

Edellisessä luvussa määriteltiin mitä tarkoittaa se, että piste on saavutettavissa joukosta. Alueille, sekä laajennetussa, että tavallisessa tasossa, pätee:

Lause 4.12. *Olkoon D alue ja $a \in \partial D$ sen reunan piste siten, että D on lokaalisti yhtenäinen pisteessä a. Tällöin a on saavutettavissa alueesta D.*

Todistus. Newmanin teoksessa [5] Ch VI, 4, Lause 14.4 s. 164. □

Yhdistämällä edelliset lauseet 4.11. ja 4.12., saadaan, että Jordan-käyrän pisteet ovat saavutettavissa sen komplementtialueista.

Korollaari 4.13. *Olkoon D alue, jonka reuna ∂D on Jordan-käyrä, ja $a \in \partial D$ reunan piste. Tällöin a on saavutettavissa alueesta D.*

Koska alueet ovat lisäksi polkuyhtenäisiä pätee seuraavaa:

Korollaari 4.14. *Olkoon D alue, jonka reuna ∂D on Jordan-käyrä. Olkoot $a, b \in \partial D$ sen reunan pisteitä ja $x \in D$ alueen piste. Tällöin on olemassa alueen D osalävistäjät C_1 ja C_2, jotka yhdistävät pisteet a ja x, sekä b ja x. Lisäksi on olemassa alueen D lävistäjä, joka yhdistää pisteet a ja b.*

Tämäkin korollaari pätee sekä laajennetussa, että tavallisessa tasossa.

Määritelmä 4.15. *Alue D on* Jordan-käyrä-alue *jos reunan ∂D jokainen komponentti on joko Jordan-käyrä tai piste.*

Seuraava lause on niin sanottu käänteinen Jordan-Brouwerin-lause.

Lause 4.16. *Olkoon D alue siten, että sen komplementti $\mathbb{R}^2 \backslash D$ on epätyhjä, yhtenäinen ja se ei ole yksittäinen piste. Oletetaan, että D on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen. Tällöin reuna ∂D on Jordan-käyrä.*

Todistus. Newmanin teoksessa [5] Ch VI, 4, Lauseet 16.1-16.3 s. 166 lause todistetaan laajennetussa tasossa, samoin Kuratowskin kirjassa [3] Ch X, §61, II, Lause 12, s. 518-519 $\square$

Käänteinen Jordan-Brouwerin-lause voidaan myös yleistää koskemaan kaikkia reunallaan lokaalisti yhtenäisiä alueita: Reunallaan lokaalisti yhtenäisen alueen reunakomponentit ovat joko Jordan-käyriä tai pisteitä.

Lause 4.17. *Olkoon D alue joka on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen. Tällöin D on Jordan-käyrä-alue.*

Todistus. Olkoon B reunan ∂D komponentti, joka ei ole piste. Olkoon C se komplementin $\mathbb{R}^2 \backslash D$ komponentti johon B kuuluu. Tällöin lauseen 2.13. nojalla $\partial C = C \cap \partial(\mathbb{R}^2 \backslash D) = C \cap \partial D = B$.

Merkitään $G := \mathbb{R}^2 \backslash C$. Nyt lauseen 2.7. perusteella G on alue, jonka reunalle pätee $\partial G = \partial C = B$. Korollaarin 3.10. nojalla G on tasaisesti lokaalisti yhtenäinen. Koska $\mathbb{R}^2 \backslash G = C$ on nyt yhtenäinen, niin edellisen lauseen 4.16. nojalla $B = \partial G$ on Jordan-käyrä. $\square$

Kappaleen jäljellä olevien lauseiden ja lemmojen 4.18.-4.23. todistukset seuraavat pääpiirteissään Hakobyanin ja Herronin artikkelia [1], jossa niitä vastaavat lauseet 3.5-3.9. ja 3.11.

Palataan luvussa kolme käsitellyn esimerkin tilanteeseen; Jos tasosta poistetaan suljettu kulmasektori, jonka kulma θ on välillä $(0, \pi)$, jäljelle jäävä alue on c-kvasikonveksi luvuille $c \geq \frac{1}{sin(\theta/2)}$. Tälläisiä kulmasektoreita voidaan poistaa tasosta tietenkin vain enintään $2\pi/\theta$ kappaletta. Seuraavista lauseista nähdään, että c-kvasikonveksille Jordan-käyrä-aluelle reunan rajoittamattomat komponentit toimivat kuin kulmasektorien reunat, joiden kulma θ toteuttaa yhtälön $c = \frac{1}{sin(\theta/2)}$.

Lemma 4.18. *Olkoon G alue siten, että sen reuna ∂G on Jordan-viiva. Oletetaan että kaikille pisteille $x, y \in \partial G$ on olemassa pisteet yhdistävä polku γ joukossa $G \cup \{x, y\}$, jonka pituudelle pätee $l(\gamma) \leq b\|x - y\|$. Olkoon G^* se Jordan-viivan ∂G komplementin komponentti, joka ei ole G, eli $G^* := \mathbb{R}^2 \backslash \overline{G}$.*

Nyt jokaiselle $0 < \tau < 1$ on olemassa luku R, joka riippuu ainoastaan luvuista τ ja $dist(0, \partial G)$, siten, että kaikille $r > R$ on olemassa joukon $G^* \cap S(0; r)$ osajoukko B, joka on kaari ja jolle pätee

$$l(B) \geq 2r arcsin(\tau/b).$$

Todistus. Valitaan $z \in \partial G$, jolle $\|z\| = dist(0, \partial G)$, ja merkitään

$$R := \frac{\|z\|}{1-\tau}.$$

Osoitetaan, että tämä R kelpaa etsityksi luvuksi. Olkoon $r > R$, jolloin pätee

$$r - \|z\| = r - R(1-\tau) \geq r - r(1-\tau) = \tau r.$$

Merkitään $S := S(0;r)$. Tällöin S erottaa pisteen z äärettömyyspisteestä. Koska $r > \|z\|$, ja z on myös alueen G^* reunapiste, voidaan valita $w_0 \in G^* \cap B(0;r)$. Toisaalta, koska G^* on rajoittamaton, voidaan valita $w_1 \in G^* \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(0;r))$.

Nyt korollaarin 4.14. nojalla on olemassa joukon G^* osalävistäjät, jotka eivät leikkaa ympyrää S, ja joista toinen yhdistää pisteen z pisteeseen w_0 ja toinen yhdistää äärettömyyspisteen pisteeseen $w_1 \in G^*$. Leikkaus $S \cap G^*$ erottaa pisteet w_0 ja w_1 alueessa G^*, joka on Jordan-kiekko. Tällöin koska G^* on homeomorfinen myös tason kanssa, voidaan soveltaa lausetta 4.4., jonka nojalla on olemassa joukon $S \cap G^*$ komponentti A, joka erottaa pisteet w_0 ja w_1 alueessa G^*.

Nyt $\overline{A}$ on alueen G^* lävistäjä ja $\overline{A}$ erottaa pisteen z äärettömyyspisteestä joukossa $\overline{G^*}$. Olkoot $x, y \in \partial G \cap S$ kaaren A päätepisteet. Tällöin x ja y kuuluvat joukon $\partial G \setminus \{z\}$ eri komponentteihin.

Olkoon θ ympyräkaaren osan A kulmamitta, jolloin $l(\overline{A}) = r\theta$. Nyt, jos $\theta \geq \pi$, väite pätee, joten voidaan olettaa, että $0 < \theta < \pi$. Kiertämällä kulmakoordinaatistoa, standardimetriikassa pisteiden välinen etäisyys säilyy kierroissa, ja vaihtamalla pisteiden nimiä voidaan olettaa, että $x = (rcos(\theta/2), rsin(\theta/2))$ ja $y = (rcos(-\theta/2), rsin(-\theta/2)) = (rcos(\theta/2), -rsin(\theta/2))$.

Oletuksen nojalla x ja y voidaan yhdistää joukossa $G \cup \{x, y\}$ polulla γ, jonka pituudelle pätee $l(\gamma) \leq b\|x-y\|$. Tällöin suljettu joukko $C := \overline{A} \cup |\gamma|$ erottaa pisteen z äärettömyydestä avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Koska joukko $L := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 = 0\} \cup [(0,0), z]$ yhdistää pisteen z äärettömyyteen, sen täytyy leikata joukkoa C.

Olkoon $w \in L \cap C$. Tällöin, koska $w \notin A$, niin $w \in |\gamma|$ ja

$$l(\gamma) \geq \|w - x\| + \|y - w\| \geq dist(x, L) + dist(y, L) \geq 2(r - \|z\|).$$

Lopuksi, koska $\|x - y\| = 2rsin(\theta/2)$, pätee

$$2\tau r \leq 2(r - \|z\|) \leq l(\gamma) \leq b\|x - y\| = 2brsin(\theta/2),$$

joten

$$\theta \geq 2arcsin(\tau/b).$$

Nyt kaarelle $\overline{A}$ pätee

$$l(\overline{A}) = r\theta \geq 2rarcsin(\tau/b).$$

□

Tästä seuraa:

Lause 4.19. *Olkoon D Jordan-käyrä-alue. Jos kaikille $x, y \in \partial D$ on olemassa pisteet yhdistävä polku γ joukossa $D \cup \{x, y\}$ siten, että $l(\gamma) \leq b\|x - y\|$, niin reunalla ∂D on enintään $\pi/arcsin(1/b)$ rajoittamatonta komponenttia.*

Todistus. Olkoon B reunan ∂D rajoittamaton komponentti. Tällöin B on avaruuden $\mathbb{R}^2$ Jordan-viiva.

Olkoot G ja G^* joukon $\mathbb{R}^2 \setminus B$ komponentit siten, että $D \subset G$. Jos A on reunan ∂D eri rajoittamaton komponentti ja H sekä H^* joukon $\mathbb{R}^2 \setminus A$ komponentit siten, että $D \subset H$, niin $G^* \cap H^* = \emptyset$, sillä joukot G^* ja H^* kuuluvat joukon $\mathbb{R}^2 \setminus D$ eri komponentteihin.

Olkoon nyt $0 < \tau < 1$. Edellisen lemman 4.18. nojalla, kun $r(\tau)$ on tarpeeksi suuri, niin joukko $G^* \cap S(0;r)$ sisältää avoimen kaaren, jonka kulmamitta on vähintään $2 * arcsin(\tau/b)$. Erillisiä tällaisia avoimia kaaria voi olla enintään

$$\frac{2\pi}{2arcsin(\tau/b)} = \pi/arcsin(\tau/b)$$

kappaletta.

Koska reunan ∂D eri rajoittamattomille komponenteille joukot G^* ovat erillisiä, ovat näihin joukkoihin syntyvät avoimet kaaret erillisiä. Näin ollen reunan eri rajoittamattomia komponentteja voi olla enintään $\pi/arcsin(\tau/b)$ kappaletta.

Kun $\tau \uparrow 1$, saadaan lopulta, että reunalla ∂D on enintään $\pi/arcsin(1/b)$ eri rajoittamatonta komponenttia. □

Kokoamalla yhteen edelliset lauseet saadaan kolme ehtoa, jotka kvasikonveksi alue toteuttaa.

Lause 4.20. *Olkoon D c-kvasikonveksi alue. Tällöin*

(1) D on Jordan-käyrä-alue.

(2) kaikille $b > c$, jokainen pistepari $x, y \in \overline{D}$ voidaan yhdistää joukossa $D \cup \{x, y\}$ polulla γ, jonka pituudelle pätee

$$l(\gamma) \leq b\|x - y\|.$$

(3) Reunalla ∂D on enintään $\pi/arcsin(1/c)$ rajoittamatonta komponenttia.

Todistus. (1) Koska lauseen 3.6. mukaan kvasikonveksit joukot ovat tasaisesti lokaalisti yhtenäisiä, väite pätee lauseen 4.17. nojalla.

(2) Pätee lauseen 3.4. nojalla.

(3) Koska (1) ja (2) pätevät, voidaan käyttää lausetta 4.19., jonka mukaan kaikille $b > c$ reunalla on enintään $\pi/arcsin(1/b)$ rajoittamatonta komponenttia. Kun $b \downarrow c$ saadaan, että reunalla on enintään $\pi/arcsin(1/c)$ rajoittamatonta komponenttia.

□

Myös käänteinen tulos on voimassa: Jordan-käyrä-alue, jonka reunalla on äärellisen monta komponenttia ja jonka reunan pisteet voidaan yhdistää poluilla joiden pituus on rajoitettu suhteessa pisteiden etäisyyteen, on kvasikonveksi. Sen todistamiseksi tarvitaan seuraava lemma:

Lemma 4.21. *Olkoon D Jordan-käyrä-alue, jolla on vain äärellinen määrä reunakomponentteja. Olkoot $x, y \in D$ ja $z \in \partial D$. Oletetaan, että E ja F ovat kontinuumeja joukossa $D \cup \{z\}$ siten, että E yhdistää pisteet x sekä z ja F yhdistää pisteet y sekä z. Tällöin on olemassa $d > 0$ siten, että kaikille $0 < r < d$ on olemassa joukon $D \cap S(z;r)$ komponentti A, jolle*

$$A \cap E \neq \emptyset \neq A \cap F.$$

Todistus. Olkoon γ polku, joka yhdistää pisteet x ja y alueessa D. Tällöin

$$dist(z, |\gamma|) \geq dist(\partial D, |\gamma|) > 0.$$

Olkoon nyt C se reunan ∂D komponentti johon z kuuluu.

Jos $C = \{z\}$, niin

$$dist(z, \partial D \backslash \{z\}) > 0,$$

sillä reunalla on vain äärellinen määrä komponentteja. Valitaan

$$d = min\left\{\|z-x\|, \|z-y\|, dist(z, \partial D\backslash\{z\})\right\}.$$

Nyt $S(z;r) \subset D$, kun $0 < r < d$, ja lisäksi ympyräviiva $S(z;r)$ erottaa pisteet x ja z sekä pisteet y ja z. Näin ollen

$$S(z;r) \cap E \neq \emptyset \neq S(z;r) \cap F.$$

Voidaan siis olettaa, että C ei ole piste. Tällöin C on Jordan-käyrä ja $diam(C) > 0$. Olkoon $\widehat{G}$ se laajennetun tason joukon $\widehat{\mathbb{R}^2}\backslash\widehat{C}$ komponentti, johon alueen D laajennus $\widehat{D}$ kuuluu ja G vastaava tavallisen tason alue. Tällöin Jordanin lauseen nojalla $\widehat{G}$ on Jordan-kiekko ja lisäksi $\partial G = C$. Koska reunalla ∂D on vain äärellinen määrä komponentteja, on lauseen 4.7. nojalla sen komplementilla $\mathbb{R}^2\backslash\partial D$ vain äärellinen määrä komponentteja. Tällöin $G\backslash D$, joka on yhdiste yhtä vaille kaikista alueen D komplementin komponenteista, eli äärellinen yhdiste suljetuista joukoista, on suljettu joukko. Tällöin

$$dist(z, G\backslash D) > 0.$$

Valitaan

$$d = min\left\{dist(z, |\gamma|), dist(z, G\backslash D)\right\}.$$

Olkoon $0 < r < d$. Koska G on alueena, jonka reuna on Jordan-käyrä, lokaalisti yhtenäinen pisteessä z, löydetään $0 < \overline{r} \leq r$ ja sille pisteet $u \in E \cap B(z;\overline{r})$ ja $v \in F \cap B(z;\overline{r})$, jotka voidaan yhdistää joukossa $G \cap B(z;\overline{r}) \subset G \cap B(z;r)$ kaarella α. Koska $D \cap S(z;r) = G \cap S(z;r)$ erottaa pisteet u ja x joukossa $\widehat{G}$, ja koska $\widehat{G}$ on homeomorfinen tason kanssa, voidaan soveltaa lausetta 4.4. Sen nojalla on olemassa joukon $D \cap S(z;r)$ komponentti A, joka myös erottaa nämä pisteet joukossa $\widehat{G}$.

Tällöin A erottaa polun γ ja kaaren α joukossa $\widehat{G}$. Koska $E \subset \widehat{G}$ ja $F \subset \widehat{G}$ sekä

$$E \cap |\gamma| \neq \emptyset \neq F \cap |\gamma|$$

ja

$$E \cap |\alpha| \neq \emptyset \neq F \cap |\alpha|,$$

niin A leikkaa sekä kontinuumia E että kontinuumia F. □

Todistetaan sitten itse lause.

Lause 4.22. *Olkoon D Jordan-käyrä-alue, jonka reunalla ∂D on vain äärellisen monta komponenttia. Oletetaan, että $c \geq 1$ ja jokainen pistepari $x, y \in \partial D$ voidaan yhdistää joukossa $D \cup \{x,y\}$ polulla γ, jonka pituudelle pätee*

$$l(\gamma) \leq c\|x-y\|.$$

Tällöin kun $c > 1$, niin D on c-kvasikonveksi, ja kun $c = 1$, niin $D = G\backslash F$, missä G on aidosti konveksi ja F on äärellinen joukko.

Todistus. Oletetaan ensin, että $c = 1$. Olkoon F kaikkien niiden pisteiden $z \in \partial D$ joukko, joille $\{z\}$ on reunan ∂D komponentti. Nyt F on äärellinen joukko ja $G := D \cup F$ on alue. Osoitetaan, että $\overline{G}$ on konveksi. Mozkinin lauseen 3.2. nojalla riittää osoittaa, että jokaisella pisteellä $x \in \mathbb{R}^2$ on yksikäsitteinen lähin piste joukossa $\overline{G}$. Tämä pätee triviaalisti kaikille $x \in \overline{G}$.

Tehdään sitten antiteesi: on olemassa $x \in \mathbb{R}^2\backslash\overline{G}$ siten, että sillä on kaksi lähintä pistettä $y_1, y_2 \in \overline{G}$. Nämä pisteet kuuluvat nyt joukkoon ∂G. Tällöin ne voidaan yhdistää joukossa $\overline{G}$ polulla, jonka pituudelle pätee

$$l(\gamma) \leq \|y_1 - y_2\|.$$

Tämä polku on nyt jana joukossa $\overline{G}$. Tällöin janan keskipiste on joukon $\overline{G}$ piste, joka on lähempänä pistettä x kuin janan päätepisteet y_1 ja y_2, mikä on ristiriita.

Nyt $\overline{G}$ on konveksi, jolloin lauseen 3.1. nojalla alue G on aidosti konveksi.

Olkoon nyt $c > 1$ ja osoitetaan, että D on c-kvasikonveksi. Olkoot $x, y \in D$. Jos $[x, y] \subset D$, niin janapolku käy etsityksi poluksi, joten voidaan olettaa, että $[x, y] \cap \partial D \neq \emptyset$. Koska $[x, y] \cap \partial D$ on suljettu joukko, löydetään $a, b \in [x, y] \cap \partial D$ siten, että $dist(x, a) = dist(x, [x, y] \cap \partial D)$ ja $dist(y, b) = dist(y, [x, y] \cap \partial D)$. Tällöin $[x, a) \cup (b, y] \subset D$.

Olkoon γ kaari, joka yhdistää pisteet a ja b joukossa $D \cup \{a, b\}$, ja jonka pituudelle pätee $l(\gamma) \leq c\|a - b\|$. Tällöin yhdistetty polku $\alpha := [x, a] * \gamma * [b, y]$ on polku, joka yhdistää pisteet x ja y, ja jonka pituudelle pätee $l(\alpha) \leq c\|x - y\|$, mutta se ei ole alueen D polku.

Nyt $x, \gamma(1/2) \in D$ ja $a \in \partial D$. Lisäksi $[x, a]$ on kontinuumi, joka yhdistää pisteet x sekä a joukossa $D \cup \{a\}$ ja $|\gamma[a, \gamma(1/2)]|$ on kontinuumi, joka yhdistää pisteet $\gamma(1/2)$ sekä a joukossa $D \cup \{a\}$. Edellisen lemman 4.21. nojalla on olemassa $d_a > 0$ siten, että kaikille $0 < \overline{r} < d_a$ on olemassa ympyräkaaren $D \cap S(a; \overline{r})$ komponentti A, jolle

$$[x, a] \cap A \neq \emptyset \neq |\gamma| \cap A.$$

Samaan tapaan $y, \gamma(1/2) \in D$ ja $b \in \partial D$. Samoin $[b, y]$ on kontinuumi, joka yhdistää pisteet y sekä b joukossa $D \cup \{b\}$ ja $|\gamma[\gamma(1/2), b]|$ on kontinuumi, joka yhdistää pisteet $\gamma(1/2)$ sekä b joukossa $D \cup \{b\}$. Tällöin taas edellisen lemman 4.21. nojalla on olemassa $d_b > 0$ siten, että kaikille $0 < \overline{r} < d_b$ on olemassa ympyräkaaren $D \cap S(b; \overline{r})$ komponentti B, jolle

$$[y, b] \cap B \neq \emptyset \neq |\gamma| \cap B.$$

Valitaan

$$r = min\left\{d_a/2, d_b/2, \frac{(c-1)(\|x - a\| + \|b - y\|)}{4(\pi - 1)}\right\}.$$

Tällöin löydetään ympyräkaaren $D \cap S(a; r)$ komponentti A jolle

$$[x, a] \cap A \neq \emptyset \neq |\gamma| \cap A,$$

ja ympyräkaaren $D \cap S(b; r)$ komponentti B jolle

$$[y, b] \cap B \neq \emptyset \neq |\gamma| \cap B.$$

Olkoot nyt u ja v leikkauksien $[x, a] \cap A$ ja $[y, b] \cap B$ pisteet ja valitaan $w \in |\gamma| \cap A$ ja $z \in |\gamma| \cap B$. Olkoot α komponentin A osakaari joka yhdistää pisteet u ja w, ja β komponentin B osakaari joka yhdistää pisteet v ja z.

Merkitään

$$\delta := [x, u] * \alpha * \gamma[w, z] * \beta * [v, y].$$

Kaari δ yhdistää pisteet x ja y joukossa D. Osoitetaan, että kaaren δ pituudelle pätee

$$l(\delta) \leq c\|x - y\|.$$

Pisteet x, u, a, b, v ja y ovat tässä järjestyksessä janalla $[x, y]$. Täten

$$\begin{aligned}\|x - y\| &= \|x - u\| + \|u - a\| + \|a - b\| + \|b - v\| + \|v - y\| \\ &= \|x - u\| + \|a - b\| + \|v - y\| + 2r,\end{aligned}$$

jolloin

$$\|x - u\| + \|v - y\| = \|x - y\| - \|a - b\| - 2r = \|x - a\| + \|b - y\| - 2r.$$

Lisäksi

$$l(\gamma) = l(\gamma[a, w]) + l(\gamma[w, z]) + l(\gamma[z, b]) \geq l(\gamma[w, z]) + 2r,$$

eli

$$l(\gamma[w,z]) \le l(\gamma) - 2r.$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} l(\delta) &= l([x,u]) + l(\alpha) + l(\gamma[w,z]) + l(\beta) + l([v,y]) \\ &\le \|x-u\| + 2\pi r + (l(\gamma) - 2r) + 2\pi r + \|v-y\| \\ &= \|x-a\| + l(\gamma) + \|b-y\| + 4(\pi-1)r \\ &\le \|x-a\| + c\|a-b\| + \|b-y\| + 4(\pi-1)r \\ &= c(\|x-a\| + \|a-b\| + \|b-y\|) - (c-1)(\|x-a\| + \|b-y\|) + 4(\pi-1)r \\ &= c\|x-y\| + 4(\pi-1)r - (c-1)(\|x-a\| + \|b-y\|) \\ &\le c\|x-y\|, \end{aligned}$$

koska r valittu siten, että

$$4(\pi-1)r \le (c-1)(\|x-a\| + \|b-y\|).$$

□

Yhdistämällä lauseet 4.20. ja 4.22. saadaan seuraava korollaari, joka karakterisoi kvasikonveksit alueet, joiden reunalla on äärellinen määrä komponentteja.

Korollaari 4.23. *Olkoon D alue, joka on avaruuden $\mathbb{R}^2$ aito osajoukko ja $c > 1$. Oletetaan, että alueen D reunalla on äärellinen määrä komponentteja. Tällöin D on c-kvasikonveksi jos ja vain jos*

(1) D on Jordan-käyrä-alue ja

(2) jokainen pistepari $x, y \in \partial D$ voidaan yhdistää joukossa $D \cup \{x, y\}$ polulla γ, jonka pituudelle pätee

$$l(\gamma) \le b\|x-y\|,$$

missä kvasikonveksisuudesta seuraa ehto (2) kaikille $b > c$ ja kvasikonveksisuus seuraa, kun ehdossa (2) $b = c$.

Lauseen 4.7. mukaan alueen D komplementin $\mathbb{R}^2 \setminus D$ jokaiseen komponenttiin kuuluu tasan yksi alueen reunan komponentti. Täten edellisen korollarin 4.23. mukaisen alueen komplementilla on myös äärellinen määrä komponentteja.

5. Suljettujen täysin epäyhtenäisten joukkojen komplementtien kvasikonveksisuus

Kvasikonveksisuudella on nyt melko tarkka karakterisaatio alueille, joiden reunoilla on vain äärellinen määrä komponentteja. Tässä luvussa tarkastellaan suljettujen täysin epäyhtenäisten joukkojen komplementteja. Täysin epäyhtenäinen joukko on joukko, jonka kaikki komponentit ovat yksittäisiä pisteitä. Näin ollen niiden komplementit ovat erityistapaus Jordan-käyrä-alueista.

Suljetun täysin epäyhtenäisen joukon komplementti on yhtenäinen ja polkuyhtenäinen, itseasiassa polku voidaan aina valita siten, että sen kuvan halkaisija on pisteiden välinen etäisyys. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, että suljetun täysin epäyhtenäisen joukon komplementti olisi kvasikonveksi. Tässä luvussa konstruoidaankin myös sellainen kompakti täysin epäyhtenäinen joukko, jonka komplementti ei ole kvasikonveksi.

Luvun päätulokset, lauseet 5.2. ja 5.4. sekä etsityn kompaktin täysin epäyhtenäisen joukon konstruktio, mukailevat Hakobyanin ja Herronin artikkelin [1] lukua 4. Alkuperäisessä artikkelissa joukko konstruoidaan kolmiulotteisessa tilanteessa, tässä työssä konstruktiosta tehdään yksinkertaisempi kaksiulotteinen versio.

Jos suljetun täysin epäyhtenäisen joukon pisteet ovat kaikki erillisiä pisteitä, voidaan ne kiertää yksi kerrallaan.

Lause 5.1. *Olkoon F joukko ja $c > 1$. Oletetaan, että on olemassa $d > 0$ siten, että $dist(x, y) \geq d$ kaikille $x, y \in F$, $x \neq y$. Tällöin komplementti $\mathbb{R}^2 \setminus F$ on c-kvasikonveksi.*

Todistus. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus F$. Jos niiden välisellä janalla ei ole joukon F pisteitä on se etsitty polku. Voidaan siis olettaa, että jana leikkaa joukkoa F. Tälläisten leikkauspisteiden lukumärälle m pätee $m \leq \|a - b\|/d$. Nimetään leikkauspisteet $x_1, \ldots, x_m$ siten, että ne ovat järjestyksessä x_1 lähimpänä pistettä a, x_2 toiseksi lähimpänä ja niin edelleen, kunnes x_m on kauimpana pisteestä a, eli lähimpänä pistettä b. Valitaan $r := min\left\{d/2, \frac{(c-1)\|a-b\|}{m\pi}\right\}$, ja merkitään kaikille $1 \leq i \leq m$, y_i leikkauksen $S(x_i; r) \cap [a, b]$ pistettä a lähempänä olevaa pistettä ja vastaavasti z_i saman leikkauksen pistettä b lähempänä olevaa pistettä, sekä α_i niitä yhdistävää ympyrän $S(x_i; r)$ puolikaarta. Nyt

$$\gamma := [a, y_1] * \alpha_1 * [z_1, y_2] * \ldots * [z_{m-1}, y_m] * \alpha_m * [z_m, b]$$

yhdistää pisteet a ja b joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus F$ ja sen pituudelle pätee

$$l(\gamma) \leq \|a-b\| + m\pi r \leq \|a-b\| + m\pi \frac{(c-1)\|a-b\|}{m\pi} = \|a-b\| + (c-1)\|a-b\| = c\|a-b\|.$$

$$= \|a - b\| + (c - 1)\|a - b\| = c\|a - b\|.$$

□

Edellisen lauseen nojalla esimerkiksi joukon $F := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}\right\}$ komplementti on c-kvasikonveksi kaikille $c > 1$.

Kun suljetun joukon komplementissa on tarpeeksi pysty- ja vaakasuoria viivoja, komplementti on c-kvasikonveksi kaikille $c > \sqrt{2}$. Tämä pätee ainakin silloin kun kumpikin projektio suljetulta joukolta koordinaattiakselille on harva.

Lause 5.2. *Olkoon F suljettu joukko. Oletetaan, että kumpikin projektio joukolta F koordinaattiakseleille on harva. Olkoon lisäksi $c > \sqrt{2}$. Tällöin $\mathbb{R}^2 \setminus F$ on c-kvasikonveksi.*

Todistus. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus F$, $a = (a_1, a_2)$ ja $b = (b_1, b_2)$. Koska joukko F on suljettu, ovat a ja b sen ulkopisteitä. Tällöin on olemassa $r_a > 0$ ja $r_b > 0$ siten, että $B(a; r_a) \subset \mathbb{R}^2 \setminus F$ ja $B(b; r_b) \subset \mathbb{R}^2 \setminus F$. Valitaan $r := min\left\{r_a, r_b, \frac{(c-\sqrt{2})\|b-a\|}{4}\right\}$.

Oletuksen nojalla pisteen a projektio x_1-akselille, $pr_1(a) = a_1$, ei ole sulkeuman $\overline{pr_1(F)}$ sisäpiste. Tällöin se ei ole myöskään projektion $pr_1(F)$ sisäpiste, jolloin löydetään $x_a \in (a_1 - r, a_1 + r) \cap pr_1(\mathbb{R}^2 \setminus F)$.

Toisaalta oletuksen nojalla pisteen b projektio x_2-akselille, $pr_2(b) = b_2$, ei ole sulkeuman $\overline{pr_2(F)}$ sisäpiste, eikä myöskään projektion $pr_2(F)$ sisäpiste. Tällöin löydetään $x_b \in (b_2 - r, b_2 + r) \cap pr_2(\mathbb{R}^2 \setminus F)$.

Nyt pallot $B(a; r)$ ja $B(b; r)$ kuuluvat komplementtiin $\mathbb{R}^2 \setminus F$. Lisäksi suorat $I_1 := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_a\right\}$ ja $I_2 := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_b\right\}$ kuuluvat komplementtiin $\mathbb{R}^2 \setminus F$.

Nyt YMV-polku

$$\gamma := [(a_1, a_2), (x_a, a_2)] * [(x_a, a_2), (x_a, x_b)]$$
$$*[(x_a, x_b), (b_1, x_b] * [(b_1, x_b), (b_1, b_2)]$$

yhdistää pisteet a ja b komplementissa $\mathbb{R}^2 \backslash F$. Sen pituudelle pätee

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= l([(a_1, a_2), (x_a, a_2)]) + l([(x_a, a_2), (x_a, x_b)]) \\ &+ l([(x_a, x_b), (b_1, x_b)]) + l([(b_1, x_b), (b_1, b_2)]) \\ &= r + |x_b - a_2| + |b_1 - x_a| + r \\ &\leq r + |b_2 - a_2| + r + |b_1 - a_1| + r + r \\ &= |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + 4r \\ &= \sqrt{2}\|b - a\| + 4r \\ &= \sqrt{2}\|b - a\| + 4 * (c - \sqrt{2})\|b - a\|/4 \\ &= c\|b - a\|. \end{aligned}$$

□

Määritelmä 5.3. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $b \geq 1$. Joukko A on b- lineaarisesti lokaalisti yhtenäinen, jos kaikille $x \in \mathbb{R}^2$ ja kaikille $r > 0$, pätee seuraavat kaksi ehtoa:*

(LLY1) kaikki pisteet joukossa $A \cap \overline{B}(x; r)$ voidaan yhdistää kontinuumilla joukossa $A \cap \overline{B}(x; br)$

ja

(LLY2) kaikki pisteet joukossa $A \backslash B(x; r)$ voidaan yhdistää kontinuumilla joukossa $A \backslash B(x; r/b)$.

Jos kontinuumiksi voidaan aina valita kaari, sanotaan, että joukko A on b- lineaarisesti lokaalisti yhtenäinen poluille.

Lause 5.4. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu ja täysin epäyhtenäinen. Tällöin komplementti $\mathbb{R}^2 \backslash A$ on 1- lineaarisesti lokaalisti yhtenäinen poluille.*

Todistus. Joukko $U \backslash A$ on yhtenäinen kaikille alueille $U \subset \mathbb{R}^2$: Jos olisi joukon $U \backslash A$ jako, niin suljettu joukko $(\mathbb{R}^2 \backslash U) \cup A$ erottaisi jotkin pisteet x ja y avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Tällöin jokin sen komponentti erottaa nämä pisteet. Tämä komponentti ei ole $\mathbb{R}^2 \backslash U$, joten se on yksittäinen piste. On kuitenkin mahdotonta, että yksittäinen piste erottaisi pisteet x ja y avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Olkoon $z \in \mathbb{R}^2$ ja $r > 0$. Merkitään $B := B(z; r)$.

Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash A \cap \overline{B}$. Koska komplementti $\mathbb{R}^2 \backslash A$ on avoin, voidaan valita pisteet $u \in [z, x]$ ja $v \in [z, y]$ siten, että $A \cap [x, u] = \emptyset = A \cap [y, v]$. Nyt $B \backslash A$ on avoin ja yhtenäinen eli alue, joten on olemassa polku α joka yhdistää pisteet u ja v joukossa $B \backslash A$. Tällöin yhdistetty polku

$$\gamma := [x, u] * \alpha * [v, y]$$

yhdistää pisteet x ja y joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash A) \cap \overline{B}$.

Olkoot $x, y \in (\mathbb{R}^2 \backslash A) \backslash B$. Valitaan $u, v \in \mathbb{R}^2 \backslash B$ siten, että $x \in [z, u]$, $y \in [z, v]$ ja $A \cap [x, u] = \emptyset = A \cap [y, v]$. Koska $(\mathbb{R}^2 \backslash \overline{B}) \backslash A = (\mathbb{R}^2 \backslash A) \backslash \overline{B}$ on avoin ja yhtenäinen, on olemassa polku α, joka yhdistää pisteet u ja v joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash A) \backslash \overline{B}$. Tällöin yhdistetty polku

$$\gamma := [x, u] * \alpha * [v, y]$$

yhdistää pisteet x ja y joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash A) \backslash B$. □

Korollaari 5.5. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu ja täysin epäyhtenäinen ja $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash A$. Pisteet x ja y voidaan yhdistää joukossa $\mathbb{R}^2 \backslash A$ polulla γ, jolle pätee $diam(|\gamma|) = \|x - y\|$.*

Edellä todettiin, että suljetun ja täysin epäyhtenäisen joukon komplementti on polkuyhtenäinen ja pisteiden x ja y välille löytyy polku, jolle pätee $diam(|\gamma|) = \|x-y\|$. Se, että kaaren halkaisija saadaan näin rajoitettua pisteiden etäisyydestä riippuvaksi, ei kuitenkaan tarkoita sitä, että kaaren pituus olisi samassa tilanteessa rajoitettu pisteiden etäisyydestä riippuvaksi. Seuraavaksi tehdäänkin konstruktio, jonka tuloksena on kompakti täysin epäyhtenäinen joukko, jonka komplementti ei ole kvasikonveksi.

Joukko $B \subset \mathbb{R}^2$ on $s \times t$-nelikulmio, jos B on siirto joukosta $[0, s] \times [0, t]$. Tässä määritelmässä ei siis sallita joukon kiertoja. Käytetään seuraavia nimityksiä:

Yläsivu on jana $[0, s] \times \{t\}$ ja sen kuvat siirroissa,

alasivu on jana $[0, s] \times \{0\}$ ja sen kuvat siirroissa,

vasen sivu on jana $\{0\} \times [0, t]$ ja sen kuvat siirroissa sekä

oikea sivu on jana $\{s\} \times [0, t]$ ja sen kuvat siirroissa.

Käytetään x_1-akselin suunnasta nimitystä vaakasuora ja x_2-akselin suunnasta nimitystä pystysuora. Täten ylä- sekä alasivu ovat vaakasuoria ja vasen sekä oikea sivu ovat pystysuoria.

Yksinkertaiselle murtoviivapolulle κ voidaan määritellä x_1-akselin suuntainen pituus $l_1(\kappa)$. Tällä tarkoitetaan polun κ x_1-akselin suuntaisten, eli vaakasuorien, osien pituuksien summaa.

Lemma 5.6. *Olkoon $F \subset \mathbb{R}^2$ suljettu joukko ja γ polku komplementissa $\mathbb{R}^2 \backslash F$. Tällöin on olemassa murtoviivapolku λ ja yksinkertainen murtoviivapolku κ komplementissa $\mathbb{R}^2 \backslash F$ joilla on samat alku- ja päätepisteet kuin polulla γ ja joiden pituuksille pätee:*

$$l(\gamma) \geq l(\lambda) \geq l_1(\kappa).$$

Todistus. Koska F ja $|\gamma|$ ovat suljettuja joukkoja jotka eivät leikkaa toisiaan, niin $\delta := dist(|\gamma|, F) > 0$. Valitaan $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = 1$ siten, että kaikille $1 \leq i \leq m-1$ pätee seuraava: kun $t, s \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$, niin $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq \delta$. Tämä voidaan tehdä, koska γ on tasaisesti jatkuva.

Asettamalla $z_i := \gamma(t_i)$ saadaan murtoviivapolku

$$\lambda := [z_0, z_1] * \ldots * [z_{m-1}, z_m],$$

joka yhdistää pisteet $\gamma(0)$ ja $\gamma(1)$ joukossa $\mathbb{R}^2 \backslash F$, sillä kun $x \in [z_i, z_{i+1}]$, niin joko

$$x \in \overline{B}(z_i; \|z_{i+1} - z_i\|/2) \subset B(z_i; \delta) \subset \mathbb{R}^2 \backslash F,$$

tai

$$x \in \overline{B}(z_{i+1}; \|z_{i+1} - z_i\|/2) \subset B(z_{i+1}; \delta) \subset \mathbb{R}^2 \backslash F.$$

Triviaalisti $l(\lambda) \leq l(\gamma)$.

Koska pallo $B(z_i; \delta) \subset \mathbb{R}^2 \backslash F$ jokaisella z_i ja t_i on valittu siten, että $[z_{i-1}, z_i] \subset B(z_i; \delta)$, voidaan jokainen murtoviivan pala $\lambda_i := [z_{i-1}, z_i]$ korvata komplementin $\mathbb{R}^2 \backslash F$ YMV-polulla $\kappa_i := \xi_i * \eta_i$. Tässä ξ_i on x_1-suuntainen ja η_i x_2-suuntainen osa. Tälle polulle pätee

$$l_1(\kappa_i) = l(\xi_i) \leq l(\lambda_i).$$

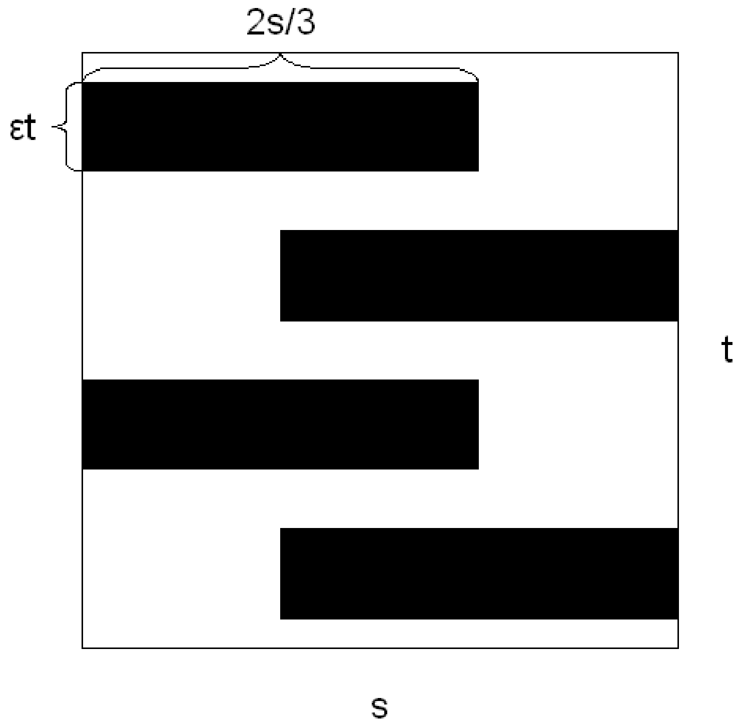
Yhdistetty polku $\kappa := \kappa_0 * \ldots * \kappa_m$ on tällöin pisteet $\gamma(0)$ ja $\gamma(1)$ yhdistävä YMV-polku joukossa $\mathbb{R}^2 \backslash F$, ja

$$l_1(\kappa) \leq l(\lambda) \leq l(\gamma).$$

□

Olkoon $\epsilon \in (0, 1/4)$ ja B $s \times t$-nelikulmio. Jaetaan B neljään päällekkäiseen, samankokoiseen vaakasuoraan osaan, joiden mitat ovat $s \times (t/4)$. Jokaisen tällaisen vaakasuoran osaan asetetaan pystysuorassa suunnassa keskelle este, jonka mitat ovat $s \times \epsilon t$.

Näitä esteitä on kahdenlaisia V (vasen) ja O (oikea). Molemmissa on nelikulmio, jonka mitat ovat $(2s/3) \times \epsilon t$, ja tämän nelikulmion toisella puolella avoin alue. V seinässä esteen nelikulmio on nelikulmion B vasemmalla laidalla ja O seinässä nelikulmion B oikealla laidalla. Esteet on asetettu käytäviin järjestyksessä ylhäältä alas VOVO.



Kuva 6. Laatikon s×t sokkelo.

Näin saadaan sokkelo jossa $s \times t$-nelikulmion sisällä on neljä $(2s/3) \times \epsilon t$ nelikulmiota. Jokaiselle YMV-polulle λ joka yhdistää jonkin nelikulmion B alareunan pisteen johonkin nelikulmion yläreunan pisteeseen ja joka kulkee nelikulmion B läpi leikkaamatta esteen nelikulmioita pätee:

$$l_1(\lambda) \geq 3s/3 = s,$$

sillä polulle kuuluvat pisteet $a := (a_1, 1/8)$, $b := (b_1, 3/8)$, $c := (c_1, 5/8)$ ja $d := (d_1, 7/8)$, missä $a_1, c_1 < 1/3$ ja $b_1, d_1 > 2/3$. Tällöin

$$l_1(\lambda) \geq |b_1 - a_1| + |c_1 - b_1| + |d_1 - c_1| \geq 3s/3 = s.$$

Nimitetään näitä nelikulmion B sisällä olevia nelikulmioita nelikulmion B jälkeläisiksi ja merkitään niiden kokoelmaa $\mathcal{C}_\epsilon(B)$. Jokaiselle $C \in \mathcal{C}_\epsilon(B)$, pätee $t_C = \epsilon t_B$, $s_C = (2/3)s_B$ ja $diam(C) \leq (2/3)diam(B)$, missä nyt B on $s_B \times t_B$ ja C on $s_C \times t_C$ nelikulmio.

Lemma 5.7. *Olkoon B $s \times t$ nelikulmio. Jokainen pistepari $p, q \in \partial B$ voidaan yhdistää toisiinsa YMV-polulla λ joukossa ∂B siten, että*

$$l_1(\lambda) \leq s.$$

Todistus. (1) Pisteet p ja q ovat samalla sivulla: Jos p ja q ovat vaakasuoralla sivulla, niin ne voidaan yhdistää janapolulla $\lambda := [p, q]$, jolle

$$l_1(\lambda) = l(\lambda) = \|p - q\| \leq s.$$

Jos p ja q ovat pystysuoralla sivulla, niin ne voidaan yhdistää janapolulla $\lambda := [p, q]$, jolle

$$l_1(\lambda) = 0 \leq s.$$

(2) Pisteet p ja q ovat vierekkäisillä sivuilla: Voidaan olettaa, että p on pystysuoralla sivulla ja q vaakasuoralla sivulla, ja sivuilla on yhteinen piste a. Tällöin YMV-polku $\lambda := [p, a] * [a, q]$ yhdistää pisteet ja

$$l_1(\lambda) = l([a, q]) = \|a - q\| \leq s.$$

(3) Pisteet p ja q ovat vastakkaisilla sivuilla: Jos p ja q ovat pystysuorilla sivuilla, voidaan olettaa että p on vasemmalla ja q oikealla sivulla. Tällöin YMV-polku $\lambda := [p, (0, 0)] * [(0, 0), (s, 0)] * [a, q]$ yhdistää pisteet ja

$$l_1(\lambda) = l([(0, 0), (s, 0)]) = s.$$

Jos p ja q ovat vaakasuorilla sivuilla, voidaan olettaa että p on alasivulla ja q yläsivulla. Tarkastellaan pisteet yhdistäviä YMV-polkuja

$$\lambda := [p, (0, 0)] * [(0, 0), (0, t)] * [(0, t), q]$$

ja

$$\kappa := [p, (s, 0)] * [(s, 0), (s, t)] * [(s, t), q].$$

Näille poluille $|\lambda| \cup |\kappa| = \partial B$, joten

$$l_1(\lambda) + l_1(\kappa) = 2s.$$

Näin ollen $min\,\{l_1(\lambda), l_1(\kappa)\} \leq s.$

$\square$

Seuraavaksi todistetaan, että nelikulmion B kiertäminen onnistuu polulla, jonka vaakasuora pituus on yhtä suuri tai pienempi kuin nelikulmion B sokkelon läpi kulkevalle polulle.

Olkoon $\mathcal{C}$ kokoelma joukkoja. Merkitään

$$\bigcup \mathcal{C} := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

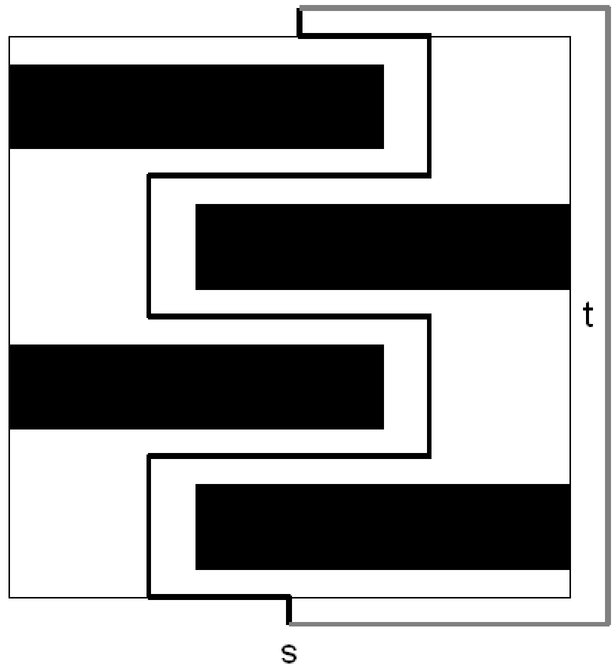
Lemma 5.8. *Olkoon B $s \times t$ nelikulmio ja $0 < \epsilon < 1/4$. Merkitään*

$$F := \bigcup \mathcal{C}_\epsilon(B).$$

Oletetaan, että λ on YMV-polku joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash F) \cup \partial F$, siten, että sen alku- ja päätepiste ovat joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash B) \cup \partial B$. Tällöin on olemassa YMV-polku κ joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash B) \cup \partial B$, jolla on sama alku- ja päätepiste kuin polulla λ, ja jolle

$$l_1(\kappa) \leq l_1(\lambda).$$

Todistus. Polun λ joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash B) \cup \partial B$ olevat osat voidaan valita polun κ osiksi. Riittää siis tarkastella tilannetta, jossa alkupiste p ja päätepiste q kuuluvat joukkoon ∂B ja $|\lambda| \setminus \{p, q\}$ kuuluu joukon B sisäpisteiden joukkoon.



KUVA 7. Laatikon s×t sokkelon läpäisevä ja kiertävä polku.

(1) Pisteet p ja q ovat samalla sivulla. Valitaan poluksi κ pisteet yhdistävä jana: Jos p ja q ovat vaakasuoralla sivulla,

$$l_1(\kappa) = \|p - q\| = |p_1 - q_1| \leq l_1(\lambda).$$

Jos pisteet ovat pystysuoralla sivulla,

$$l_1(\kappa) = 0 \leq l_1(\lambda).$$

(2) Pisteet p ja q ovat vierekkäisillä sivulla. Voidaan olettaa, että p on pystysuoralla sivulla ja q on vaakasuoralla sivulla ja sivuilla on yhteinen piste a. Valitaan $\kappa := [p, a] * [a, q]$. Tällöin

$$l_1(\kappa) = \|q - a\| = |q_1 - a_1| = |q_1 - p_1| \leq l_1(\lambda).$$

(3) Pisteet p ja q ovat vastakkaisilla sivuilla: Jos p ja q ovat pystysuorilla sivuilla, voidaan olettaa että p on vasemmalla ja q oikealla sivulla. Valitaan nyt

$$\kappa := [p, (0, t)] * [(0, t), (s, t)] * [(s, t), q].$$

Tällöin

$$l_1(\kappa) = l([(0, t), (s, t)]) = s = |q_1 - p_1| \leq l_1(\lambda).$$

Jos p ja q ovat vaakasuorilla sivuilla, voidaan olettaa, että p on alasivulla ja q yläsivulla. Tällöin polku λ kulkee sokkelon läpi, joten

$$l_1(\lambda) \geq s.$$

Lemman 5.7. nojalla voidaan valita YMV-polku κ joukossa ∂B, joka yhdistää pisteet p ja q, ja jolle

$$l_1(\kappa) \leq s.$$

Eli saadaan

$$l_1(\kappa) \leq s \leq l_1(\lambda).$$

□

Konstruoidaan nyt kompakti, totaalisti epäyhtenäinen joukko siten, että sen läpi kulkevan polun x_1-akselin suuntainen pituus on vähintään sama kuin joukon kiertävälle polulle. Tämä tehdään Cantor-joukkojen tyylisellä konstruktiolla, jossa käytetään edellä määriteltyjä sokkeloita.

Tässä konstruktiossa luvuille ϵ_n pätee, että $0 < \epsilon_n < 1/4$ kaikille $n \geq 1$. Voidaan valita esimerkiksi, että $\epsilon_n = 1/8$ kaikille $n \geq 1$.

Olkoon $M > 0$. Merkitään

$$B_0 := [-M, M] \times [-1/2, 1/2]$$

ja

$$\mathcal{G}_0 := \{B_0\},$$

joka on siis joukkokokoelma, jonka ainoa alkio on nelikulmio B_0.

Ensimmäiseksi kokoelmaksi osanelikulmioita valitaan

$$\mathcal{G}_1 := \mathcal{C}_{\epsilon_1}(B_0),$$

eli nelikulmion B_0 jälkeläiset, ja määritellään joukko

$$E_1 := \bigcup \mathcal{G}_1,$$

eli nelikulmion B_0 sokkelo.

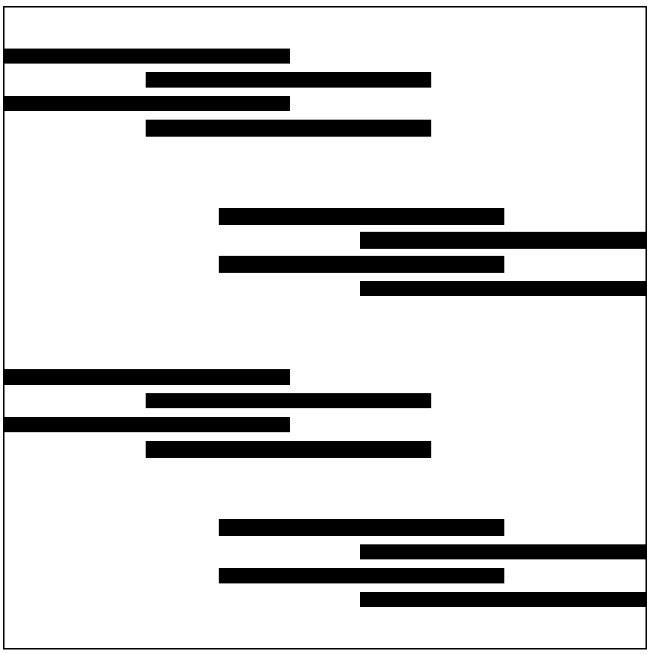
Toiseksi kokoelmaksi osanelikulmioita valitaan

$$\mathcal{G}_2 := \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} \mathcal{C}_{\epsilon_2}(B),$$

eli nelikulmion B_0 jälkeläisten jälkeläiset. Määritellään joukko

$$E_2 := \bigcup \mathcal{G}_2,$$

joka on siis nelikulmion B_0 sokkelon estenelikulmioiden sisälle tehdyt sokkelot.



Kuva 8. Toisen vaiheen sokkelo E_2.

Yleisesti n-asteen kokoelmaksi osanelikulmioita valitaan

$$\mathcal{G}_n := \bigcup_{B \in \mathcal{G}_{n-1}} \mathcal{C}_{\epsilon_n}(B),$$

eli edellisen $n-1$-asteen nelikulmioiden jälkeläiset. Määritellään joukko

$$E_n := \bigcup \mathcal{G}_n,$$

joka on $n-1$-asteen estenelikulmioiden sisälle tehdyt sokkelot.

Tällöin $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ on jono sisäkkäisiä kompakteja joukkoja. Joukon E_n komponenteille C pätee $diam(C) \leq (2/3)^n diam(B_0)$. Merkitään

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Nyt A on kompakti joukko ja $A \subset [-M, M] \times [-1/2, 1/2]$. Joukon A komponenteille C_A pätee $diam(C_A) \leq (2/3)^n diam(B_0)$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Tällöin joukon A komponentit ovat pisteitä ja A on siis täysin epäyhtenäinen.

Osoitetaan, että jos γ on polku joukossa $\mathbb{R}^2 \backslash A$ joka yhdistää pisteet $(0, -1)$ ja $(0, 1)$, niin

$$l(\gamma) \geq 2M.$$

Todistetaan ensin aputulos YMV-poluille.

Lemma 5.9. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon λ pisteet $(0, -1)$ ja $(0, 1)$ yhdistävä YMV-polku joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash E_n) \cup \partial E_n$. Tällöin*

$$l_1(\lambda) \geq 2M.$$

Todistus. Jos κ yhdistää pisteet $(0, -1)$ ja $(0, 1)$ joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash B_0) \cup \partial B_0$, niin on olemassa $z \in |\kappa|$, jolle $|z_1| \geq M$. Tällöin

$$l_1(\kappa) \geq |z_1 - 0| + |z_1 - 0| \geq 2M.$$

Todistetaan sitten itse väite käyttäen induktiota.

$n = 1$: Olkoot λ YMV-polku, joka yhdistää pisteet $(0, -1)$ ja $(0, 1)$ joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash E_1) \cup \partial E_1$. Lemman 5.8. nojalla on olemassa pisteet yhdistävä YMV-polku κ joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash B_0) \cup \partial B_0$ siten, että

$$l_1(\kappa) \leq l_1(\lambda).$$

Todistuksen alussa nähtiin, että polulle κ pätee

$$l_1(\kappa) \geq 2M.$$

Siis saadaan

$$l_1(\lambda) \geq l_1(\kappa) \geq 2M.$$

Induktioaskel: Oletetaan, että

$$l_1(\kappa) \geq 2M$$

kaikille pisteet $(0, -1)$ ja $(0, 1)$ joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash E_n) \cup \partial E_n$ yhdistäville YMV-poluille κ.

Olkoon λ YMV-polku joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash E_{n+1}) \cup \partial E_{n+1}$. Voidaan olettaa, että $|\lambda|$ leikkaa jonkin nelikulmion $B \in \mathcal{G}_n$ sisäpisteiden joukkoa. Koska

$$|\lambda| \subset (\mathbb{R}^2 \backslash E_n) \cup \partial E_n,$$

niin

$$|\lambda| \subset (\mathbb{R}^2 \backslash F) \cup \partial F,$$

missä

$$S = \bigcup \mathcal{C}_{\epsilon_2}(B).$$

Lemman 5.8. nojalla λ voidaan korvata joukon $\mathbb{R}^2 \backslash B) \cup \partial B$ YMV-polulla siten, että x_1-akselin suuntainen pituus ei kasva.

Kun tämä tehdään kaikille nelikulmioille $B \in \mathcal{G}_n$ joiden sisäpisteitä $|\lambda|$ leikkaa, näitä nelikulmioita on vain äärellinen määrä, saadaan YMV-polku κ joukossa $(\mathbb{R}^2 \backslash E_n) \cup \partial E_n$ siten, että

$$l_1(\lambda) \geq l_1(\kappa).$$

Induktio-oletuksen mukaan

$$l_1(\kappa) \geq 2M,$$

ja näin saadaan

$$l_1(\lambda) \geq l_1(\kappa) \geq 2M.$$

□

Tätä lemmaa käyttäen saadaan nyt tulos yleiselle polulle:

Lause 5.10. *Olkoon A edellä konstruoitu kompakti täysin epäyhtenäinen joukko ja γ pisteet $(0, -1)$ ja $(0, 1)$ yhdistävä polku joukossa $\mathbb{R}^2 \backslash A$. Tällöin*

$$l(\gamma) \geq 2M.$$

Todistus. Avoimille joukoille $\mathbb{R}^2 \backslash E_n$ pätee

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}^2 \backslash E_n) = \mathbb{R}^2 \backslash A,$$

joten ne muodostavat joukon $\mathbb{R}^2 \backslash A$ peitteen ja näin ollen myös käyrän $|\gamma|$ peitteen. Koska käyrä $|\gamma|$ on kompakti, on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|\gamma| \subset \mathbb{R}^2 \backslash E_n.$$

Lemman 5.6. mukaan nyt löydetään YMV-polku λ joukossa $\mathbb{R}^2 \backslash E_n$, joka yhdistää pisteet $(0, -1)$ ja $(0, 1)$, ja jolle pätee

$$l_1(\kappa) \leq l(\gamma).$$

Edellisen lemman 5.9. mukaan

$$l_1(\kappa) \geq 2M.$$

Saadaan lopulta

$$l(\gamma) \geq l_1(\kappa) \geq 2M.$$

□

Tälläisen kompaktin täysin epäyhtenäisen joukon projektio x_1-akselille on koko jana $[-M, M]$. Jos tästä janasta puuttuisi joku luku, pääsisi joukon lävitse sen kohdalta pystysuoralla janalla.

Edellä määriteltyjä kompakteja, täysin epäyhtenäisiä joukkoja käyttämällä voidaan nyt konstruoida joukko, joka on kompakti ja täysin epäyhtenäinen, mutta jonka komplementti ei ole c-kvasikonveksi millekkään luvulle c.

Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Olkoon A_m nelikulmioon $[-m, m] \times [-1/2, 1/2]$ konstruoitu kompakti, täysin epäyhtenäinen joukko, jolle pätee:

$$l(\gamma) \geq 2m$$

kaikille pisteet $(0, -1)$ ja $(0, 1)$ joukossa $\mathbb{R}^2 \backslash A_m$ yhdistäville poluille γ.

Määritellään

$$B_m := t_m A_m + b_m,$$

missä

$$t_m := (2^{m+2} diam(A_m))^{-1}$$

ja

$$b_m := (\frac{1}{2^m}, 0).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} diam(B_m) &= diam(t_m A_m + b_m) = diam(t_m A_m) \\ &= t_m diam(A_m) = (2^{m+2} diam(A_m))^{-1} diam(A_m) \\ &= \frac{1}{2^{m+2}}, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} dist(B_m, B_{m+1}) &\geq dist(\overline{B}((\frac{1}{2^m}, 0); diam(B_m)), \overline{B}((\frac{1}{2^{m+1}}, 0); diam(B_{m+1}))) \\ &= \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m+1}}\right) - \left(\frac{1}{2^{m+2}} + \frac{1}{2^{m+3}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{m+3}}, \end{aligned}$$

eli joukot B_m ovat erillisiä. Joukot B_m ovat lisäksi kompakteja ja täysin epäyhtenäisiä.

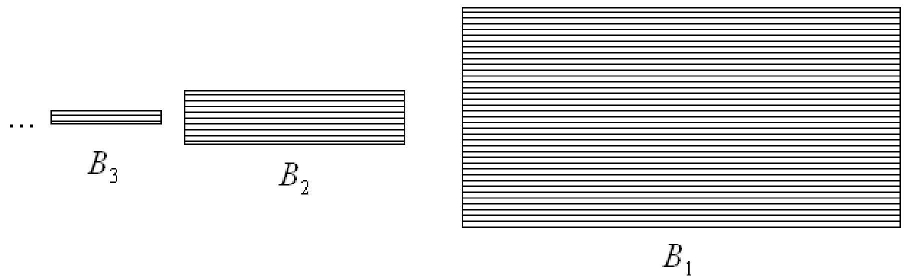
Nyt joukko

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$$

on täysin epäyhtenäinen ja rajoitettu, mutta ei ole suljettu. Lisäämällä joukkoihin B_m niiden kasautumispiste $(0, 0)$, saadaan joukko

$$A := \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m,$$

joka on täysin epäyhtenäinen ja kompakti.



KUVA 9. Joukon A konstruktio.

Pisteet $x_m := b_m + t_m(0, -1)$ ja $y_m := b_m + t_m(0, 1)$ kuuluvat komplementtiin $\mathbb{R}^2 \backslash A$ ja niiden välissä on joukko B_m, joten komplementissa $\mathbb{R}^2 \backslash A$ pisteet yhdistävälle polulle γ pätee

$$l(\gamma) \geq 2mt_m.$$

Pisteiden x_m ja y_m välinen etäisyys on

$$\|y_m - x_m\| = \|(b_m + t_m(0, 1)) - (b_m + t_m(0, -1))\| = 2t_m.$$

Näin ollen

$$\frac{l(\gamma)}{\|y_m - x_m\|} \geq m,$$

joten komplementti $\mathbb{R}^2 \backslash A$ ei voi olla c-kvasikonveksi millekään luvulle c.

Viitteet

[1] H. Hakobyan and D.A. Herron, *Euclidean Quasiconvexity*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **33**, (2008), 205-230.
[2] D.A. Herron and P. Koskela, *Uniform, Sobolev Extension and Quasiconformal Circle Domains*, J. Analyse Math., **57**, (1991), 172-202.
[3] K. Kuratowski, *Topology vol. II*, Academic Press, New York and London, 1968.
[4] S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, American Mathematical Society, New York, Reprinted, 1963.
[5] M.H.A. Newman, *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge University Press, London, 2nd Edition, Reprinted, 1964.
[6] F.A. Valentine, *Konvexe Mengen*, Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1968.
[7] J. Väisälä, *Exhaustion of John Domains*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **19**, (1994), 47-57.