Luokanopettajaopiskelijoiden käsityksiä

KIRJALLISESTA PÄÄSSÄLASKUSTA

Mari Mattila
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka/ opettajalinja
Matematiikan ja
tilastotieteen laitos
Jyväskylän yliopisto
syksy 2008

TIIVISTELMÄ

MATTILA, M. 2008. Luokanopettajaopiskelijoiden käsityksiä kirjallisesta päässälaskusta. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Pro gradu -tutkielma. 68 sivua. 2 liitettä.

Kirjallinen päässälasku (skriftlig huvudräkning) on ruotsalaisen Birgitta Rockströmin kehittämä peruslaskutoimitusten laskemiseen tarkoitettu metodi. Se kehitettiin 1980-luvulla ja on 2000-luvulla saavuttanut vankan aseman ala-asteen alimpien luokkien opetuksessa Ruotsissa. Kirjallisessa päässälaskussa laskua pyritään muuttamaan helpommin laskettavaan muotoon algebrallisten laskulakien avulla. Tarkoituksena on käyttää päässälaskun strategioita mutta kirjoittaa osa välivaiheista paperille.

Syyskuussa 2007 opetettiin tutkimuksen kohteeksi valituille luokanopettaja-opiskelijoille (n = 20) kahden oppitunnin ajan kirjallista päässälaskua. Viikon päästä siitä opiskelijat vastasivat kyselyyn, jossa he vertailivat kirjallista päässälaskua ja allekkainlaskua. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, mitä hyviä ja huonoja puolia kirjallisella päässälaskulla on allekkainlaskuun verrattuna. Tutkielmassa tarkasteltiin niitä sekä kirjallisuuden valossa että luokanopettajaopiskelijoilla teetetyn kyselyn perusteella. Tutkielman toinen teema oli metodin soveltuvuus Suomen oloihin. Tutkittiin onko metodi Suomen peruskoulun matematiikan opetussuunnitelman perusteissa asetettujen tavoitteiden suuntainen ja selvitettiin, mitä mieltä kyselyyn vastanneet luokanopettajaopiskelijat olivat metodin tuomisesta Suomeen.

Kaikki vastaajat olivat sitä mieltä, että kirjallista päässälaskua kannattaisi opettaa myös Suomessa. Monien mielestä sitä olisi hyvä opettaa allekkainlaskun rinnalla, ja jotkut ottaisivat siitä vain joitain osia. Monet vastaajista olivat sitä mieltä, että kirjallinen päässälasku kehittää monipuolisesti oppilaiden matemaattista ajattelua ja matematiikan perusasioiden ymmärtämistä. Allekkainlaskun vahvuuksiksi vastaajat lukivat sen, että siinä on vain yksi laskutapa, joka käy aina luvuista riippumatta. Tutkimuksessa selvisi, että osalla vastaajista oli puutteita allekkainlaskujen osaamisessa.

AVAINSANAT: kirjallinen päässälasku, skriftlig huvudräkning, allekkainlasku, matematiikka, alakoulu

KUVIOT

TAULUKOT

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

1.1 Aiheen valinta

Keväällä 2006 olin opiskelijavaihdossa Uumajan yliopistossa Ruotsissa ja kävin siellä kurssin, joka käsitteli esi- ja alkuopetuksen matematiikkaa. Kurssilla tutustuin ilmiöön nimeltä *skriftlig huvudräkning*, joka on Ruotsissa syrjäyttänyt perinteisen allekkainlaskun ala-asteen alimpien luokkien opetuksessa lähes kokonaan (Tímea 2006, 16). Tein kurssilla parin kanssa esseen metodista, ja tutustuttuani siihen paremmin olin vakuuttunut sen hyvistä puolista. Yritin selvittää, oliko Suomessa tehty aiheesta tutkimusta, mutta en löytänyt kuin kaksi 2000-luvun alussa Vaasan Åbo Akademissa tehtyä maisterin tutkielmaa. Suomenkielisissä yliopistoissa metodista ei tunnuttu tietävän mitään.

Nykypäivän yhteiskunnassa tuntuu, että aika on ajanut allekkainlaskun ohi. Jos päässälasku ei riitä, turvaudutaan laskimeen tai tietokoneeseen. Tämän tutkielman tarkoitus on pohtia, voisiko *skriftlig huvudräkning* olla sopiva metodi vahvistamaan päässälaskutaitoa ja kirjoitettuna korvaamaan allekkainlaskun kirjallisena menetelmänä. Haapasalon ja Kuparin mukaan ”suppeiden ja sisällöstä riippuvien menetelmällisten tietojen (algoritmisten toimintakaavioiden) sijasta on pyrittävä tarjoamaan oppilaalle realistisia mahdollisuuksia monipuolisten ajattelu- ja toimintastrategioiden kehittämiseen ja omaksumiseen.” (Haapasalo & Kupari 1992, 46)

Päässälaskulle on tyypillistä, että strategia valitaan kulloinkin laskusta riippuen. Allekkainlaskussa taas menetellään aina samalla tavalla algoritmia seuraten luvuista riippumatta. *Skriftlig huvudräkning* on välimuoto päässälaskun ja algoritmien välillä. Ratkaisutapoja on useita, joista etukäteen pyritään valitsemaan paras tarkastelemalla lukuja. Ratkaisutavat ovat myös lähempänä algebraa, joten *skriftlig huvudräkning* voisi olla kaivattu linkki ala- ja yläkoulumatematiikan välillä. Löwing ja Kilborn (2003, 8) ovat sitä mieltä, että nykyään on paremmat mahdollisuudet kuin aiemmin opettaa oppilaille varsinaista matematiikkaa laskennon lisäksi, sillä laskinta käyttämällä säästettävä aika voidaan käyttää ymmärtämisen parantamiseen. Näätäsen mukaan oppilailta on kadonnut päässälaskutaidon ruostumisen myötä kyky arvioida laskimen antamaa tulosta (Mikkonen, 2008).

1.2 Käsitteiden määrittely

Aritmetiikalla tarkoitetaan tässä tutkielmassa laskentoa eli yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja kokonaisluvuilla. Yleisesti *algoritmilla* tarkoitetaan tarkasti määriteltyä laskentasääntöä tai menetelmää (Boyer 1968, 326). Tässä tutkielmassa sillä tarkoitetaan lähinnä allekkainlaskua.

Allekkainlaskuksi kutsutaan aritmeettisten laskujen laskemiseen kehitettyä algoritmia, jossa luvut laitetaan allekkain kymmenjärjestelmän mukaisille paikoille. Se on laajalti käytössä maailmassa, ja Suomessa se on edelleen vallitseva laskutapa alakoulussa. Yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuille on omat algoritminsa. Allekkainlaskua esitellään tarkemmin luvussa 3.

Kirjallinen päässälasku (skriftlig huvudräkning) on ruotsalaisen Birgitta Rockströmin kehittämä peruslaskutoimitusten laskemiseen tarkoitettu metodi. Se kehitettiin 1980-luvulla, ja 2000-luvulla se on saavuttanut vankan aseman ala-asteen alimpien luokkien opetuksessa Ruotsissa (Tímea 2006, 16). Kirjallisessa päässälaskussa laskua pyritään muuttamaan helpommin laskettavaan muotoon algebrallisen laskulakien avulla. Tarkoituksena on käyttää päässälaskun strategioita mutta kirjoittaa osa välivaiheista paperille (Rockström 2000, 22). Ajatus laskun muuttamisen takana on: ”Mikä muu lasku antaa saman tuloksen kuin 563-278?” (Fielker 2007, 5) Kirjallista päässälaskua käyttämällä vastaus kysymykseen voisi olla 565-280 tai 22+263. Menetelmä esitellään tarkemmin luvussa 2.

Sekä allekkainlasku että kirjallinen päässälasku perustuvat *kymmenjärjestelmään*. Käyttämässämme intialais-arabialaisessa lukujärjestelmässä on kymmenen numeromerkkiä 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. Järjestelmän kantaluku on 10, mikä tarkoittaa sitä, että numero luvussa tarkoittaa tietyn kymmenenpotenssin lukumäärää. Esimerkiksi $2063 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3$.

Kirjallisuudessa esiintyy kaksi samaa tarkoittavaa sanaa; *lukukäsitys* ja numerotaju. Ensimmäinen tullee ruotsin kielen sanasta *taluppfattning* ja jälkimmäinen englannin kielen sanasta *number sense*. Tässä tutkielmassa käytetään termiä lukukäsitys, koska mielestäni se on kuvaavampi. Käsitteellä tarkoitetaan käsitystä luvun suuruusluokasta, sen sijoittumisesta lukusuoralle ja kymmenjärjestelmästä. Hyvä lukukäsitys auttaa vertailemaan lukuja ja käyttämään niitä luovasti laskemisessa (Hedrén 2001, 137-138; Malmer 1999/2006, 108).

2 KIRJALLISEN PÄÄSSÄLASKUN ESITTELY

2.1 Kirjallisen päässälaskun historia

Metodin *Skriftlig huvudräkning* (jatkossa kirjallinen päässälasku) kehitti ruotsalainen Birgitta Rockström 1980-luvulla. Toimiessaan luokanopettajana hän huomasi, että hänen oppilaillaan oli selkeitä puutteita matematiikan taidoissa eivätkä he viihtyneet matematiikan tunneilla. Hän päätti puuttua asiaan ja alkoi kehittää tapaansa opettaa matematiikkaa. Johtavana ajatuksena hänellä oli saada oppilaat ymmärtämään mekaanisen suorittamisen sijaan. (Rockström 2000, 7-9)

Rockström halusi kehittää metodin, joka kävisi kaikille oppilaille eikä vain matematiikasta innostuneille. Hänen mukaansa heikot ja epävarmat oppilaat hyötyvät menetelmästä eniten. Monet matematiikassa heikosti pärjäävät oppilaat ovat kirjallisen päässälaskun avulla saaneet otteen matematiikasta. (Holmberg 2001, 28-29)

Rockström lähti liikkeelle päässälaskusta. Hän pohti yhdessä luokan kanssa erilaisia ratkaisuja päässälaskutehtäviin. Rockström halusi näyttää oppilaille, että laskuja voi ratkaista monella eri tavalla, ja saada aikaan keskustelua. Opettajajohtoisen keskustelun avulla oppilaat oppivat argumentoimaan ratkaisuaan oikeilla matemaattisilla termeillä.

Holmbergin maisterin tutkielmassa (2001) oli tehty kysely 22 ruotsalaiselle peruskoulun opettajalle, jotka matematiikan opetuksessaan käyttivät kirjallista päässälaskua. Jo tuolloin 2000-luvun alussa heistä kaksi oli käyttänyt menetelmää yli kymmenen vuotta ja 12 oli käyttänyt sitä 6-10 vuotta. Useimmat kertoivat saaneensa innostuksen metodin käyttöön Rockströmin pitämältä luennolta.

Rockström on kirjoittanut metodikirjan (2000) lisäksi *Matteboken* -nimistä alakoulun oppikirjasarjaa Marianne Lantzin kanssa. Sarja perustuu kirjalliseen päässälaskuun, mutta allekkainlaskuakin opetetaan kirjallisen päässälaskun rinnalla kolmannelta luokalta lähtien (Matteboken-esite, 10).

2.2 Kirjallisen päässälaskun menetelmä

2.2.1 Esitiedot

Kirjallisella päässälaskulla (Rockström 2000) voi suorittaa kaikkia neljää peruslaskutoimitusta: yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja. Se toimii kokonaislukujen lisäksi hyvin myös desimaali- ja murtoluvuilla sekä aikalaskuissa.

Metodi painottaa ymmärrystä mekaanisen suorittamisen sijaan. Jotta oppilaat ymmärtäisivät menetelmien idean, heillä on oltava muutamia esitietoja.

Oppilaiden täytyy tietää, mikä yhtäsuuruusmerkki on ja miten sitä käytetään. Yleensä merkki tarkoittaa oppilaille samaa kuin ”on” ja sen oikealle puolelle kirjoitetaan laskun vastaus. Aihetta ovat tutkineet mm. Falkner ym. (1999), Hihnala (2005) ja Knuth ym. (2008). Yhtäsuuruusmerkki on kuitenkin paljon muutakin. Esimerkiksi luku seitsemän voidaan ilmoittaa yhtäsuuruusmerkin avulla monella tavalla: 7 = 5+2 = 3+4 = 8-1 = ... Yhtäsuuruusmerkkiä voidaan käyttää vain, jos sen molemmilla puolilla olevat lausekkeet ovat täsmälleen yhtä suuret.

Oppilaiden on myös osattava kirjoittaa luku avatussa muodossa, esimerkiksi 8926 = 8000 + 900 + 20 + 6. Tämän taustalla on kymmenjärjestelmä. Oppilaille on syytä painottaa, että numeron arvo luvussa määräytyy sen mukaan, missä kohdassa lukua se sijaitsee. Yksinkertaisten laskujen täytyy olla automatisoituneita, jotta osalaskut sujuvat helposti ja nopeasti. Sama pätee tietenkin myös allekkainlaskuissa. Rockström suositteleekin, että niiden mieleen painamiseen käytetään tarpeeksi aikaa. Opeteltavia laskuja ovat kaikki erilaiset summat 18 asti ja kertotaulut 10 asti. Oppilaita on autettava huomaamaan, että osatessaan laskun 4+8 = 12 tietää myös, että 8+4 = 12, 12 – 4 = 8 ja 12 – 8 = 4.

Välivaiheet ovat kirjallisen päässälaskun vaikein ja tärkein asia. Välivaiheet erotetaan toisistaan yhtäsuuruusmerkillä ja niissä näkyvät vastaajan ajatukset. Laskulauseketta muutetaan välivaiheen avulla helpompaan muotoon. Laskija saa itse päättää montako välivaihetta hän kirjoittaa näkyviin. (Rockström 2000, 10-12) ”Teckna – Titta – Tänk” eli Merkitse – Katso – Mieti on Rockströmin (2000, 8) kolmen T:n taktiikka laskujen ratkaisemiseen. Ensin merkitään lasku näkyviin. Sitten katsotaan merkintää, vertaillaan lukujen kokoa ja lukujen yhteyttä toisiinsa. Lopuksi mietitään paras ratkaisuvaihtoehto. Tässä asiassa kirjallinen päässälasku eroaa allekkainlaskusta, jossa ratkaisutapa on aina sama luvuista riippumatta.

2.2.2 Yhteenlasku

1. Lukuyksiköittäin

Yhteenlaskun perusidea on se, että ykköset lisätään ykkösiin, kymmenet kymmeniin, sadat satoihin jne. eli lasketaan lukuyksiköittäin (Rockström 2000, 22)

56+25 = 70+11 = 81 (50+20 = 70, 6+5 = 11)

Lasku 70+11 on helpompi laskea kuin 56+25 ja siihen pyrittiin. Halutessaan 70+11 voi vielä hajottaa 70+11 = 80+1 = 81. Ajan myötä sujuvuutta tulee lisää ja turhia välivaiheita voi jättää pois.

2. Luvun siirtäminen

Toinen yhteenlaskun perusperiaate on sopivan luvun siirtäminen (Rockström 2000, 23). Arkipäiväinen esimerkki ideasta on se, että kahdessa kirjapinossa on edelleen yhteensä yhtä monta, vaikka toisesta pinosta siirtäisi toiseen. Yleensä haluamme muuttaa toisen luvun lähimmäksi pyöreäksi luvuksi.

98+34 = 100+32 = 132 (98+2 = 100, 34-2 = 32)

Yllä olevassa esimerkissä se onnistuu parhaiten siirtämällä kaksi ykköstä luvusta 34 lukuun 98.

3. Järjestyksen vaihtaminen

Jos kyseessä on kolmen tai useamman luvun yhteenlasku, kannattaa selvittää voisiko laskujärjestystä vaihtamalla saada laskun helpommaksi (Rockström 2000, 23). Yleensä etsimme pareja, joiden summa muodostaa jonkun pyöreän luvun.

46 + 17 + 54 + 73 = 100 + 90 = 190

Yllä olevassa esimerkissä kaarella yhdistetyt luvut lasketaan ensin keskenään yhteen.

2.2.3 Vähennyslasku

1. Lukuyksiköittäin

Vähennyslaskun ensimmäinen pääperiaate on sama kuin yhteenlaskussa, siis lukuyksiköittäin (Rockström 2000, 26). Ennen vähennyslaskun opettamista on oppilaille kuitenkin esiteltävä negatiiviset luvut, sillä eteen tulee laskuja kuten 6-7.

56-27 = 30-1 = 29 (50-20 = 30, 6-7 = -1)

Joskus vähennyslasku muuttuukin yhteenlaskuksi.

56-25 = 30+1 = 31 (50-20 = 30, 6-5 = 1)

2. Saman luvun lisääminen

Toinen vähennyslaskun periaate on lisätä tai vähentää sekä vähenevästä että vähentäjästä sama luku (Rockström 2000, 27). Erotus pysyy silloinkin samana.

93-29 = 94-30 = 64

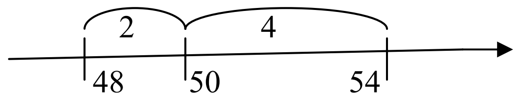
Yllä olevan esimerkin tapauksessa kannattaa molempiin lisätä yksi.

3. Etäisyyden laskeminen

Kolmas tapa laskea vähennyslaskuja on laskea lukujen etäisyys toisistaan lukusuoralla, toisin sanoen täyttää lukujen väli (Rockström 2000, 27).

$$54-48 = 2+4 = 6$$

Yllä olevassa esimerkissä aloitetaan luvusta 48. Lähimpään pyöreään lukuun 50 on matkaa kaksi ja sen jälkeen vielä neljä lukuun 54 (kuvio 1).



KUVIO 1. Laskun 54-48 havainnollistus lukusuoralla.

Vähennyslaskusta muuntuukin helppo yhteenlasku. Laskutapa on käytännöllinen varsinkin silloin, kun luvut ovat lähellä toisiaan.

2.2.4 Kertolasku

Kertolaskun opettaminen kannattaa aloittaa sillä, että tutkii kertolaskua toistettuna yhteenlaskuna (Rockström 2000, 32).

$$2 \cdot 38 = 38+38 = 30+30+8+8 = 60+16 = 76$$

Siitä päästään käyttämään osittelulakia

$$a\cdot (b+c) = a\cdot b + a\cdot c,$$

jossa käytetään luvun avattua muotoa, esimerkiksi 38 = 30+8. Jokainen lukuyksikkö kerrotaan siis kerrallaan.

1. Lukuyksiköittäin (osittelulaki)

$$2 \cdot 38 = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 8 = 60+16 = 76 \qquad (38 = 30+8)$$

Alla olevassa esimerkissä osittelulakia on käytetty kaksi kertaa. Ensin on hajotettu luku 13 ja sitten luku 26.

$$13 \cdot 26 = 10 \cdot 26 + 3 \cdot 26 = 260 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 6 \qquad (13 = 10+3,$$
$$= 260+60+18 = 338 \qquad 26 = 20+6)$$

2. Jakamalla tekijöihin

Toinen tapa laskea kertolaskua on jakaa toinen luvuista kahteen tekijäänsä ja kertoa sitten luvut siinä järjestyksessä kuin se kulloinkin on kätevintä. Kun tekijänä on luku kaksi, Rockström puhuu ”tuplauksesta” ja ”puolittamisesta” (Rockström 2000, 33).

$4 \cdot 350 = 2 \cdot 2 \cdot 350 = 2 \cdot 700 = 1400$ $\quad (4 = 2 \cdot 2)$

$12 \cdot 43 = 6 \cdot 2 \cdot 43 = 6 \cdot 86 = 480+36 = 516$ $\quad (12 = 6 \cdot 2)$

3. Lähin pyöreä luku

Jos toinen luvuista on lähellä jotain pyöreää lukua, kannattaa sitä käyttää hyväksi ja ottaa avuksi vähennys- tai yhteenlasku (Rockström 2000, 32).

$7 \cdot 49 = 7 \cdot 50 - 7 \cdot 1 = 350-7 = 343$ $\quad (50 = 49-1)$

$5 \cdot 92 = 5 \cdot 90 + 5 \cdot 2 = 450+10 = 460$ $\quad (92 = 90+2)$

2.2.5 Jakolasku

Ennen jakamista kannattaa tarkastella, voiko lauseketta supistaa tai laventaa niin, että nimittäjä muuttuu helpommaksi (Rockström 2000, 39).

$$\frac{140}{35}^{(7} = \frac{20}{5} = 4$$

Erityisesti niin kannattaa tehdä nimittäjän ollessa desimaaliluku.

$$^{2)}\frac{21}{3{,}5} = \frac{42}{7} = 6$$

Jakolaskussa idea on hajottaa osoittaja helpompiin palasiin yhteen- tai vähennyslaskun avulla.

$$\frac{56}{4} = \frac{40}{4} + \frac{16}{4} = 10 + 4 = 14 \qquad (56 = 40+16)$$

$$\frac{56}{4} = \frac{60}{4} - \frac{4}{4} = 15 - 1 = 14 \qquad (56 = 60-4)$$

Rockström esittelee kirjassaan (2000, 40) lyhyen jakolaskun (ruots. *kort division*). Menetelmä ei kuitenkaan ole ainutlaatuinen, sillä englantilaisten käyttämä *short division* on erittäin samankaltainen (Haylock 2006, 104). Lyhyen jakolaskun eduksi Rockström mainitsee sen, että merkintätapa kuvaa jakamista paremmin ja tulos tulee oikeaan paikkaan. Lyhyessä jakolaskussa myös käytetään yhtäsuuruusmerkkiä. Rockströmin (2000, 50) mukaan sisältöjako eli ”kuinka monta kertaa seitsemän menee kahteentoista” on oppilaiden helpompi ymmärtää kuin ositusjaon ”kaksitoista jaettuna seitsemällä”. Kuviossa 2 käydään esimerkki lyhyestä jakolaskusta läpi vaihe vaiheelta.

$$\frac{1232}{7} =$$

Seitsemän menee kahteentoista kerran, yli jää viisi. Merkitään viitonen muistiin jaettavan yläpuolelle.

$$\frac{12^{5}32}{7} = 1$$

Seitsemän menee lukuun 53 seitsemän kertaa, yli jää neljä. Merkitään nelonen muistiin jaettavan yläpuolelle.

$$\frac{123^{4}2}{7} = 17$$

$$\frac{1232}{7} = 176$$

Seitsemän menee lukuun 42 tasan kuusi kertaa. Vastaus on siis 176.

KUVIO 2. Lyhyt jakolasku vaihe vaiheelta.

Lyhyt jakolasku on periaatteeltaan samanlainen kuin Suomessa käytössä oleva jakokulma. Jakokulmassa tarkistuslaskut kirjoitetaan paperille, kun taas lyhyessä jakolaskussa ne suoritetaan päässä. Esimerkiksi kuviossa 2 päässä suoritetaan mm. lasku 53 - 7 · 7. Lyhyt jakolasku soveltuu hyvin laskutoimituksiin, joissa jakaja on yksinumeroinen.

2.3 Kirjallisen päässälaskun käyttö Ruotsissa ja Suomessa

Ruotsin koulujen alkuopetuksessa käytetään peruslaskutoimitusten suorittamisessa enimmäkseen kirjallista päässälaskua. Yhteen- ja vähennyslasku opetetaan alimmilla luokilla ja kerto- ja jakolasku vuosiluokilla 5-6 (Tímea 2006; 16, 18) Koska kirjallisesta päässälaskusta ei ole tehty varsinaista tieteellistä tutkimusta, sen levinneisyydestä ei ole täsmällistä tietoa. Uumajan yliopiston yliopistonopettaja A. Rådeströmin (henkilökohtainen tiedonanto 31.8.2008) mukaan Rockströmin kirjoittama Matteboken-oppikirjasarja oli ensimmäisenä tuomassa kirjallista päässälaskua kouluihin 1990-luvun puolivälissä. Nykyään tämä metodi tai vastaava on esillä myös muissa oppikirjasarjoissa.

Suomessa kirjallinen päässälasku on vielä jokseenkin tuntematon ilmiö. Åbo Akademin kasvatustieteen lehtori L. Häggblomin (henkilökohtainen tiedonanto

27.8.2008) mukaan Åbo Akademin luokanopettajakoulutukseen kuuluu lyhyt tutustuminen kirjalliseen päässälaskuun. Häggblom ei kuitenkaan tiennyt käyttävätkö valmistuneet opettajat sitä opetuksessaan. Kirjallisesta päässälaskusta maisterin tutkielmansa tehnyt luokanopettaja Holmberg kertoi (henkilökohtainen tiedonanto 19.8.2008) opettavansa kirjallista päässälaskua oppilailleen.

2.4 Kirjallisen päässälaskun matemaattinen perusta

2.4.1 Laskutoimitusten määritelmät ja joitakin perustuloksia

Yhteen- ja kertolaskun määritelmät ja ominaisuudet

Yhteenlaskun ominaisuudet:

1. Minkä tahansa kahden kokonaisluvun summa on myös kokonaisluku, eli jos $b, c \in \mathrm{Z}$, niin myös $b + c \in \mathrm{Z}$. Yhteenlaskulle $b + c$ on olemassa yksikäsitteinen vastaus $b + c = d$, jossa $d \in \mathrm{Z}$.
2. Yhteenlasku on vaihdannainen, eli $a + b = b + a$ kaikilla $a, b \in \mathrm{Z}$.
3. Yhteenlasku on liitännäinen, eli $(a + b) + c = a + (b + c)$ kaikilla $a, b, c \in \mathrm{Z}$.
4. On olemassa nolla-alkio 0, jolle $a + 0 = a = 0 + a$ kaikilla $a \in \mathrm{Z}$.
5. On olemassa vasta-alkio $-a$, jolle $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ kaikilla $a \in \mathrm{Z}$.

Määritellään kolmen alkion yhteenlasku laskujärjestyksen mukaisesti niin, että ensin lasketaan kaksi ensimmäistä alkiota yhteen ja summaan lisätään kolmas alkio: $a + b + c := (a + b) + c$ kaikilla $a, b, c \in \mathrm{Z}$. Liitännäisyydestä $(a + b) + c = a + (b + c)$ seuraa, että yhtä hyvin kolmen alkion yhteenlasku olisi voitu määritellä $a + b + c := a + (b + c)$ kaikilla $a, b, c \in \mathrm{Z}$.

Lause 1. Kolmen alkion yhteenlasku on vaihdannainen.

Todistus: Riittää todistaa, että $a + b + c = a + c + b$ kaikilla $a, b, c \in \mathrm{Z}$, sillä muut yhdistelmät saa todistettua vastaavasti. Merkitään $d := a + b$ ja $e := a + c$, missä $d, e \in \mathrm{Z}$. Vaihdannaisuudesta $a + b = b + a$ seuraa, että vastaavasti $d = b + a$ ja $e = c + a$. Kaikilla $a, b, c \in \mathrm{Z}$ pätee

$$a + b + c = (a + b) + c = d + c = c + d = c + (a + b)$$

$$= (c+a)+b = e+b = (a+c)+b = a+c+b,$$

missä ensimmäinen yhtäsuuruus tulee kolmen alkion yhteenlaskun määritelmästä, toinen ja neljäs yhtäsuuruus d:n määritelmästä, kolmas yhtäsuuruus tulee vaihdannaisuudesta, viides yhtäsuuruus liitännäisyydestä, kuudes ja seitsemäs yhtäsuuruus e:n määritelmästä ja kahdeksas yhtäsuuruus kolmen alkion yhteenlaskun määritelmästä. □

Määritellään neljän alkion yhteenlasku lisäämällä kolmen luvun summaan neljäs alkio: $a+b+c+d := ((a+b)+c)+d = (a+b+c)+d$ kaikilla $a,b,c,d \in \mathrm{Z}$ Induktioperiaatteen avulla saadaan vaihdannaisuus todistettua useammillekin alkioille.

Lause 2. Neljän alkion yhteenlaskussa kaksi keskimmäistä alkiota ovat vaihdannaisia, siis $a+b+c+d = a+c+b+d$ kaikilla $a,b,c,d \in \mathrm{Z}$.

Todistus: Kaikilla $a,b,c,d \in \mathrm{Z}$ pätee

$$a+b+c+d = ((a+b)+c)+d = (a+(b+c))+d = (a+(c+b))+d$$
$$= (a+c+b)+d = a+c+b+d,$$

missä ensimmäinen yhtäsuuruus tulee neljän alkion yhteenlaskun määritelmästä, toinen yhtäsuuruus liitännäisyydestä, kolmas yhtäsuuruus vaihdannaisuudesta, neljäs kolmen alkion yhteenlaskun määritelmästä ja viides neljän alkion yhteenlaskun määritelmästä. □

Kaikki yllä olevat ominaisuudet ja tulokset pätevät myös nollasta poikkeavien rationaalilukujen kertolaskuille, ja todistus menee vastaavasti. Nolla-alkion sijasta kertolaskulla on ykkösalkio 1, jolle $1 \cdot a = a = a \cdot 1$, ja vasta-alkion sijasta käänteisalkio b^{-1}, jolle $b \cdot b^{-1} = 1 = b^{-1} \cdot b$.

Vaihdannaisuuden ja liitännäisyyden lisäksi tärkeä algebran laskulaki on osittelulaki: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ ja $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ kaikilla $a,b,c \in \mathrm{Z}$ Sulkulausekkeen voi kertoa siis joko vasemmalta tai oikealta.

Vähennys- ja jakolaskun määritelmät ja ominaisuudet

Kokonaislukujen a ja b vähennyslasku $a-b$ määritellään luvun a ja luvun b vastaluvun $-b$ yhteenlaskuna $a-b = a+(-b)$. Jakolasku määritellään luvun a ja nollasta eroavan luvun b käänteisluvun b^{-1} (rationaaliluku) kertolaskuna $\frac{a}{b} = ab^{-1}$.

Siis osittelulaki pätee myös jakolaskuilla:

$$\frac{a+b}{c} = (a+b)\cdot c^{-1} = a\cdot c^{-1} + b\cdot c^{-1} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Laskujärjestys

Laskujärjestys täytyy ottaa huomioon tilanteissa, joissa tarvitaan sekä yhteen- että kertolaskua. Laskutoimitukset suoritetaan seuraavassa järjestyksessä:

1. Suluissa olevat laskutoimitukset sisimmästä sulusta lähtien
2. Kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
3. Yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle

2.4.2 Yleisempää matemaattista perustaa

Ryhmän määritelmä

Olkoon G epätyhjä joukko. Paria $(G,\circ)$ sanotaan ryhmäksi, jos se täyttää ehdot:

1. $\circ$ on joukossa G määritelty laskutoimitus, eli $a \circ b \in G$ kaikilla $a, b \in G$
2. liitännäisyys, eli $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ kaikilla $a, b, c \in G$
3. on olemassa sellainen G:n alkio e (ns. neutraalialkio), että $a \circ e = e \circ a = a$ kaikilla $a \in G$
4. jokaista G:n alkiota a kohti on olemassa sellainen G:n alkio a^{-1} (ns. a:n käänteisalkio), että $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Jos laskutoimitukselle pätee lisäksi vaihdannaisuus $a \circ b = b \circ a$, ryhmää kutsutaan Abelin ryhmäksi. Tällaisia Abelin ryhmiä ovat mm. kokonaislukujen joukko Z ja rationaalilukujen joukko Q yhteenlaskun suhteen, kuten myös nollasta poikkeavien rationaalilukujen joukko Q\{0} kertolaskun suhteen (Metsänkylä & Näätänen, 2003).

Määritellään kolmen alkion yhteenlasku ryhmässä samoin kuin aiemmin kokonaisluvuilla, eli kahden ensimmäisen alkion ”summaan lisätään” kolmas alkio: $a \circ b \circ c := (a \circ b) \circ c$ kaikilla $a, b, c \in G$. Kolmen alkion yhteen- ja kertolaskun vaihdannaisuus on erikoistapaus seuraavasta tuloksesta, jonka todistus saadaan korvaamalla lauseen 1 todistuksessa operaatio + operaatiolla $\circ$.

Lause 3. Abelin ryhmässä $(G,\circ)$ kolmen alkion laskutoimitus $\circ$ on vaihdannainen.

Todistus: Sama kuin lauseen 1 todistus, kun korvataan operaatio + operaatiolla $\circ$.

Kunnan määritelmä

Joukko (K, + , ·) on kunta, jos ja vain jos se täyttää kaikilla a,b,c ϵ K ehdot:

1. (K,+) on Abelin ryhmä
2. (K\{0}, ·) Abelin ryhmä
3. Osittelulaki

   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ja $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Esimerkiksi rationaalilukujen joukko Q on kunta, ja siinä on määritelty kaikki peruslaskutoimitukset: yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Siispä rationaaliluvuilla pätee esimerkiksi kolmen luvun yhteenlaskun vaihdannaisuus ja nollasta eroavilla rationaaliluvuilla kolmen luvun kertolaskun vaihdannaisuus. Itse asiassa vaihdannaisuus pätee kertolaskulle myös silloin, kun jokin tulontekijöistä on nolla, sillä tällöin tulo on nolla.

2.4.3 Laskutoimitusten perustelut

Yhteenlaskujen perustelut

Vaihdanta- ja liitäntälaki

56+25	avattu muoto
= 50+6+20+5	Lause 2
= 50+20+6+5	
= 70+6+5	liitännäisyys $(a + b) + c = a + (b + c)$
= 70+11	
= 81	

Nolla-alkio ja vasta-alkio

98+34	nolla-alkio $a + 0 = a$
= 98+0+34	vasta-alkio $a + (-a) = 0$
= 98+2+(-2)+34	
= 100+(-2)+34	liitännäisyys $(a + b) + c = a + (b + c)$
= 100+32	
= 132	

Laskujärjestyksen muuttaminen

46+17+54+73	Lause 2
= 46+54+17+73	
= 100+17+73	liitännäisyys $(a + b) + c = a + (b + c)$
= 100+90	
= 190	

Vähennyslaskujen perustelut

Vaihdanta- ja liitäntälaki

56-27	vähennyslaskun määritelmä $a-b=a+(-b)$
= 56+(-27)	tekijöihin jako
= 56+(-1)(27)	avattu muoto
= 50+6+(-1)(20+7)	osittelulaki $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
= 50+6-20-7	Lause 2
= 50-20+6-7	
= 30+6-7	liitännäisyys $(a+b)+c=a+(b+c)$
= 30-1	
= 29	

56-25	vähennyslaskun määritelmä $a-b=a+(-b)$
= 56+(-25)	tekijöihin jako
= 56+(-1)(25)	avattu muoto
= 50+6+(-1)(20+5)	osittelulaki $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
= 50+6-20-5	Lause 2
= 50-20+6-5	
= 30+6-5	liitännäisyys $(a+b)+c=a+(b+c)$
= 30+1	
= 31	

Nolla-alkio ja vasta-alkio

93-29	nolla-alkio $a+0=a$
= 93+0-29	vasta-alkio $a+(-a)=0$
= 93+1+(-1)-29	
= 94+(-1)-29	liitännäisyys $(a+b)+c=a+(b+c)$
= 94-30	
= 64	

54-48	nolla-alkio $a+0=a$
= 54+0-48	vasta-alkio $a+(-a)=0$
= 54+(-50)+50-48	
= 4+50-48	liitännäisyys $(a+b)+c=a+(b+c)$
= 4+2	vaihdannaisuus $a+b=b+a$
= 2+4	
= 6	

Kertolaskujen perustelut

Osittelulaki

2 · 38	avattu muoto
= 2 · (30+8)	osittelulaki $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
= 2 · 30 + 2 · 8	
= 60 + 16	
= 76	

$13 \cdot 26$	avattu muoto
$= (10+3) \cdot 26$	osittelulaki $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$
$= 10 \cdot 26 + 3 \cdot 26$	avattu muoto
$= 260 + 3 \cdot (20+6)$	osittelulaki $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
$= 260 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 6$	
$= 260+60+18$	
$= 338$	

$7 \cdot 49$	$50-1 = 49$
$= 7 \cdot (50-1)$	osittelulaki $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
$= 7 \cdot 50 + 7 \cdot (-1)$	
$= 350 - 7$	
$= 343$	

Tekijöihin jako

$4 \cdot 350$	tekijöihin jako
$= (2 \cdot 2) \cdot 350$	liitännäisyys $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
$= 2 \cdot (2 \cdot 350)$	
$= 2 \cdot 700$	
$= 1400$	

$12 \cdot 43$	tekijöihin jako
$= (6 \cdot 2) \cdot 43$	liitännäisyys $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
$= 6 \cdot (2 \cdot 43)$	
$= 6 \cdot 86$	avattu muoto
$= 6 \cdot (80+6)$	osittelulaki $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
$= 6 \cdot 80 + 6 \cdot 6$	
$= 480 + 36$	
$= 516$	

Jakolaskujen perustelut

Supistaminen

$\frac{140}{35}$	tekijöihin jako
$= \frac{7\cdot 20}{7\cdot 5}$	jakolaskun määritelmä
$= 7\cdot 20\cdot 7^{-1}\cdot 5^{-1}$	Lause 2, kertolaskulle
$= 7\cdot 7^{-1}\cdot 20\cdot 5^{-1}$	käänteisalkio $b\cdot b^{-1} = 1$
$= 1\cdot 20\cdot 5^{-1}$	jakolaskun määritelmä
$= \frac{20}{5}$	
$= 4$	

Laventaminen

$\frac{21}{3{,}5}$	neutraalialkio $1 \cdot a = a = a \cdot 1$
$= 1 \cdot \frac{21}{3{,}5}$	käänteisalkio $b \cdot b^{-1} = 1$
$= 2 \cdot 2^{-1} \cdot 21 \cdot 3{,}5^{-1}$	Lause 2, kertolaskulle
$= 2 \cdot 21 \cdot 2^{-1} \cdot 3{,}5^{-1}$	jakolaskun määritelmä
$= \frac{2 \cdot 21}{2 \cdot 3{,}5}$	
$= \frac{42}{7}$	
$= 6$	

Osittelulaki

$\frac{56}{4}$	40+16 = 56
$= \frac{40+16}{4}$	osittelulaki $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
$= \frac{40}{4} + \frac{16}{4}$	
$= 10 + 4$	
$= 14$	

$\frac{56}{4}$	60-4 = 56
$= \frac{60-4}{4}$	osittelulaki $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
$= \frac{60}{4} - \frac{4}{4}$	
$= 15 - 1$	
$= 14$	

Perusteluissa toistuvat laskulait ovat vaihdannaisuus, liitännäisyys ja osittelulaki. Oppilailta ei tule vaatia laskulakien nimitysten ja perustelujen osaamista, mutta opettajan on hyvä ne ymmärtää.

2.5 Kirjallisen päässälaskun pedagoginen perusta

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan oppiminen on oppijan aktiivista kognitiivista toimintaa, jossa uusi tieto tulkitaan aikaisemman tiedon perusteella (Tynjälä 1999, 37-38). Konstruktivismin sosiokulttuurinen suuntaus kuvastaa oppimiskäsitystä kirjallisen päässälaskun takana. Oppiminen nähdään sosiaalisena ilmiönä, jota täytyy tarkastella omassa sosiaalisessa ja kulttuurisessa ympäristössään (Tynjälä 1999, 44). Kieli nähdään tärkeänä oppimisen välineenä sekä yksilöiden välillä että yksilön ajattelussa. Kirjallisen päässälaskun luonteeseen kuuluu erilaisista ratkaisuista keskusteleminen, mikä kehittää matemaattisen kielen oppimista. Kieli opitaan ensin sosiaalisessa vuorovaikutuksessa ja se siirtyy vasta myöhemmin ajattelun välineeksi (Tynjälä 1999, 47). Oppilas saa näin keskusteluista välineitä myös ajatteluunsa. Vygotskyn lähikehityksen vyöhykettä (Tynjälä 1999, 48) pyritään käyttämään kirjallisessa päässälaskussa paljon. Erilaisista ratkaisuista keskustellessaan oppilaat oppivat toisiltaan. Samaa suuntausta edustaa myös Viiri (2006), jonka mukaan oppilaat oppivat niiden kielellisten ilmauksien kautta, jotka he ovat oppineet vuorovaikutuksessa opettajan ja muiden oppilaiden kanssa.

Rockström painottaa kielen merkitystä. On tärkeää, että opettaja puhuu oikeilla matemaattisilla termeillä ja vaatii myös oppilaitaan käyttämään niitä. Matematiikan kieleen pätee sama totuus kuin muihinkin kieliin – sitä oppii vain käyttämällä. Hän kuvailee kirjassaan (2000) sitä, miten ”2 ja 3” on joskus 5 ja joskus 6 – ”ja” ei siis ole yksikäsitteinen. On tärkeää käyttää laskutoimituksista niiden oikeita nimiä. Löwing pohtii kirjassaan (2006, 144), miten opettaja joutuu jatkuvasti tasapainoilemaan sen välillä puhuuko hän oikeilla ja täsmällisillä termeillä vai puhuuko hän oppilaille tuttua arkipäiväistä kieltä. Löwing näkee konkretisoinnin vastauksena tähän ongelmaan. Sen avulla voi arkipäiväisistä asioista puhua matemaattisella kielellä.

Leino kirjoittaa artikkelissaan ”Konstruktivismi matematiikan opetuksessa” siitä, miten oppilaiden mieleenpainamiskeinot voivat olla hyvin pinnallisia sen sijaan, että he ymmärtämisen kautta oppisivat muistamaan esimerkiksi kertotauluja. Hän antaa esimerkiksi laskun $5 \times 5 = 25$: ”oppilas voi muodostaa muistisäännön ’5 kertaa 5 – kaksi viitosta siis kaks’kyt’viis’” (Leino 2004, 23) Leino peräänkuuluttaa sitä, että opettajat vaatisivat oppilailtaan perusteluja pelkän vastauksen sijaan. Adeyn (1992, 62) mukaan tutkimukset osoittavat, että oppilaiden ajattelutaidot kehittyvät, kun heitä rohkaistaan ajattelemaan oman ajattelun ja toimintansa strategioita. Matematiikan tunnille sovellettuna se tarkoittaa oman ratkaisunsa perustelemista ja se taas on olennainen osa kirjallista päässälaskua. Tämän perusteella voisi siis ajatella, että kirjallinen päässälasku kehittäisi oppilaiden metakognitiivista ajattelua. Tynjälän (1999, 114) mukaan metakognitio tarkoittaa tietoisuutta omista ajatuksistaan, oppimisesta ja tietämisestä. Oppimisprosessin metakognitiivinen säätely mahdollistaa tavoitteiden asettamisen ja strategioiden valinnan. Metakognitiolla myös arvioidaan omaa suoritusta ja sen aikana tapahtunutta oppimista.

Leinon (2004, 29) mukaan oppilaiden ajattelu nousee pelkän vastauksen etsimistä korkeammalle tasolle, kun he saavat kommentoida muiden oppilaiden ratkaisuja ja esittää oman ratkaisutapansa. Tällaiselle toiminnalle tulisi Leinon mielestä varata runsaasti aikaa oppitunneilla. Rockström ryhtyi kehittämään kirjallista päässälaskua yhdessä oppilaiden kanssa juuri luokkakeskusteluissa. Kaikki halukkaat saivat esittää oman tapansa ratkaista ja niistä keskusteltiin. Nykyään kirjallinen päässälasku on valmis metodi, jonka voi opettaa sellaisenaan. Sen luonteeseen sopivat kuitenkin keskustelut ja erilaisten ratkaisujen vertailu. Rockströmin (2000, 57) mukaan selittäminen selkeyttää ratkaisijan omia ajatuksia ja auttaa huomaamaan virheitä, mutta se antaa myös muille mahdollisuuden oppia ja ottaa vaikutteita. Malmer (1999/2006, 50) on sitä mieltä, että puhumalla oppii. Hänen mukaansa ajatusrakenteet kehittyvät suullista ja kirjallista kieltä käyttämällä. Yrjönsuuri (2007, 62) nostaa esille vielä sen näkökulman, että yksilö oppii toisilta ihmisiltä asioita, joita nämä ovat ”tuottaneet, tunteneet mieluisiksi ja pitäneet tärkeinä”.

Kirjallinen päässälasku perustuu pitkälti päässälaskun ajatuskulkuihin, joista osa kirjoitetaan välivaiheiden muodossa paperille. Päässälasku on tärkeä taito jokapäiväisessä elämässä. Päässälaskua tarvitaan myös allekkainlaskussa ja tuloksen järkevyyden arvioinnissa. Hedrénin (2001, 144) mielestä oppilasta ei saisi koskaan kehottaa laskemaan laskua paperilla tai laskimella, jos hän osaa laskea sen päässä. Hedrénin mielestä opettajan tulisi järjestää aikaa sille, että oppilas saisi kertoa suullisesti, miten ratkaisi tehtävän.

Falkner, Levi ja Carpenter (1999) ovat tutkimuksissaan todenneet, että lapsilla on usein selviä puutteita yhtäsuuruusmerkin käytössä. Esimerkiksi yhtälössä 13–5 = 8 monet mieltävät vain, että vasen puoli on kysymys ja oikea puoli vastaus (Oksuz 2007, 3). Heillä ei ole käsitystä siitä, että yhtäsuuruusmerkin tarkoituksena on osoittaa, että molemmat puolet ovat samanarvoisia. Vaikeuksia oppilaille tulee 4 + 5 = [ ] + 6 -tyyppisissä laskuissa, joissa yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella onkin vastauksen sijasta lauseke (Oksuz 2007, 3). Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil ja Stephens ovat myös tutkineet oppilaiden yhtäsuuruusmerkin ymmärtämistä. Heidän mukaansa alakoulussa oppilaisiin istutettu käsitys yhtäsuuruusmerkistä merkkinä operaation suorittamisesta aiheuttaa hankaluuksia myöhempinä kouluvuosina. (Knuth ym. 2008, 516) Samanlaisiin tuloksiin päätyi myös Hihnala väitöskirjassaan (2005, 46). Kirjallinen päässälasku edellyttää yhtäsuuruusmerkin hyvää hallintaa ja Rockström (2000, 13) suositteleekin, että sen käytön harjoittelemiseen käytetään tarpeeksi aikaa. Yhtäsuuruusmerkin tarkoitus tulee selvästi näkyviin välivaiheitten käytössä (Rockström 2000, 12).

2.6 Aikaisempaa tutkimusta kirjallisesta päässälaskusta

Kirjallisesta päässälaskusta ei ole tehty varsinaista tieteellistä tutkimusta, mutta opinnäytetöitä siitä on kuitenkin tehty useita sekä Ruotsissa että Suomessa. Seuraavaksi niistä esitellään muutamia.

Holmbergin maisterin tutkielmassa (2001) oli tehty kysely 22 Ruotsin peruskoulun opettajalle, jotka matematiikan opetuksessaan käyttävät kirjallista päässälaskua. Opettajat suosittelivat kirjallista päässälaskua, koska olivat huomanneet sen aktivoivan oppilaita enemmän ja kehittävän lukukäsitystä ja matemaattista ajattelua. Kirjallinen päässälasku miellettiin myös hauskaksi ja antoisaksi. Eräs opettaja oli kommentoinut, että heikot oppilaat sekoittavat eri laskutavat. Toinen opettaja oli sitä mieltä, että algoritmeja ei saa kokonaan jättää pois, sillä ne tukevat heikkoja oppilaita. Holmbergin tutkielmaan kuului myös Rockströmin haastattelu.

Eliasson ja Norberg (2002) tutkivat kirjallisen päässälaskun vaikutusta 16 ruotsalaisen kuudesluokkalaisen päässälaskustrategioiden kehitykseen. Alku- ja loppuhaastattelujen välissä he opettivat oppilaille neljä viikkoa kirjallisen päässälaskun yhteen-, vähennys- ja kertolaskua. Niiden oppilaiden määrä, jotka laskivat päässä allekkain, väheni huomattavasti tutkimuksen aikana.

Karlsson ja Niemelä (2003) tutkivat 22 suomenruotsalaista kolmasluokkalaista. He opettivat tutkittaville kahden viikon ajan kirjallisen päässälaskun yhteen- ja vähennyslaskua ja seurasivat oppilaiden kehitystä. Heidän mukaansa oppilaiden lukukäsitys parani. Myös välivaiheiden oli koettu olevan avuksi niin oppilaille kuin opettajallekin. He havaitsivat, että osa oppilaista käytti vaihdannaisuutta myös vähennyslaskuissa, eli a-b olisi sama kuin b-a.

Andersson (2005) haastatteli kymmentä ruotsalaista kirjallista päässälaskua käyttävää kuudesluokkalaista saadakseen selville, minkälainen lukukäsitys heillä oli. Haastattelun tehtävät mittasivat lukujen lukemista ja kirjoittamista, luvun sijoittamista lukusuoralle, lukujen laittamista suuruusjärjestykseen, laskutaitoa ja tuloksen järkevyyden arviointia. Lukukäsitys oli hyvä kokonaisluvuilla, mutta desimaalilukujen lukukäsityksessä oli puutteita. Vastaajilla oli ongelmia myös jakolaskujen kanssa.

Segerström ja Unsal (2006) tutkivat 23 ruotsalaisen yhdeksäsluokkalaisen laskutaitoa. He havaitsivat, että ne oppilaat, jotka laskivat kirjallisella päässälaskulla, saivat useimmin väärän vastauksen kuin ne, jotka laskivat allekkain. Vaikeuksia oppilailla oli erityisesti kaksinumeroisella luvulla kertomisessa ja laskuissa desimaaliluvuilla.

Tímea (2006) tutki Ruotsin maahanmuuttajaoppilaiden kotona saamaa apua matematiikan kotitehtäviin. Koulussa oppilaille opetetaan kirjallista päässälaskua, jota vanhemmat eivät osaa. Useimmat vanhemmat laskevat allekkain, mutta usein erilailla kuin Ruotsissa vallalla olevalla allekkainlaskulla. Tutkittavat oppilaat kokivat hyväksi asiaksi mahdollisuuden oppia erilaisia laskutapoja. Vastauksista ilmeni kuitenkin se vaara, että oppilas sekoittaa koulun ja vanhempien opettamat laskutavat keskenään.

3 ALLEKKAINLASKUN ESITTELY

3.1 Laskualgoritmien historia

Allekkainlaskun algoritmien kehittäjää ei tiedetä. Eurooppaan menetelmä tuli 800-luvun alussa vaikuttaneen arabialaisen matemaatikon Muhammed ibn-Musa al-Khwarizmin kautta. Hän kuvasi kirjassaan perinpohjaisesti intialaisten numerojärjestelmää ja laskutaitoa. Arabialaisen kirjoittaman kirjan latinalaisesta käännöksestä *De numero indorum* tuli Euroopassa menestys, minkä takia vieläkin puhutaan arabialaisista numeroista. Sana algoritmi on peräisin al-Khwarizmin nimestä (Boyer 1968, 326).

Välttämättömiä allekkainlaskun algoritmien kehittymiselle ovat olleet paikkajärjestelmän ja erityisesti nollan keksiminen. Paikkajärjestelmä oli käytössä Kaksoisvirranmaassa jo 4000 vuotta sitten, mutta nolla on paljon uudempi keksintö (Boyer 1968, 55). Keskiajalla Intiassa oli käytössä nykyään käyttämämme paikkajärjestelmä, jossa kantaluku on kymmenen ja jokaista kymmentä lukua vastaa oma merkki (Boyer 1968, 308).

Leonardo Pisalainen, alias Fibonacci, edisti intialais-arabialaisten numeroiden leviämistä suosittelemalla niiden käyttöä kirjassaan *Liber Abacci*, joka julkaistiin vuonna 1202. Kuitenkin vasta 1500-luvulla intialais-arabialaisilla luvuilla laskeminen lopullisesti voitti roomalaiset numerot ja helmitaulun (Boyer 1968, 360-361).

Allekkainlaskun algoritmit ovat muuttuneet paljon vuosisatojen saatossa – ainakin ulkonäöltään. Kuviossa 3 on esitetty kaksi hyvin erinäköistä jakolaskualgoritmia laskulle 44977 : 382. Vasemmanpuoleinen, lempinimeltään kaljuunajakolasku, oli satoja vuosia suosituin jakoalgoritmi. Oikean puoleinen on nykyisin Suomessa käytettävä jakokulma, joka on angloamerikkalaista alkuperää (Paulsson 1985, 34-36).

```
               2                                   1 1 7
          2    8                           382 | 4 4 9 7 7
          3    9    8                        -  3 8 2
    | 1   6    7    5    3 |                      6 7 7
382 | 4   4    9    7    7 | 117  ------>     -  3 8 2
    | 3   8    2    2    4 |                      2 9 5 7
          3    8    7                         -  2 6 7 4
          2    6                                    2 8 3
```

KUVIO 3. Jakolaskualgoritmien kehitys kaljuunajakolaskusta jakokulmaan

Jakolaskujen idea on hyvin samanlainen, mutta kaljuunajakolaskua on hankalampi seurata, sillä siinä luvun numerot eivät välttämättä ole samalla rivillä. Kaljuunajakolaskussa jaettava kirjoitetaan keskelle, vähentäjät sen alapuolelle ja erotukset sen yläpuolelle (Boyer 1968, 314). Jakokulma esitellään tarkemmin luvussa 3.2.

3.2 Laskualgoritmien suorittaminen

Yhteenlasku

Yhteenlasku allekkain aloitetaan sijoittamalla luvut päällekkäin lukuyksiköt (ykköset, kymmenet, sadat jne.) kohdakkain. Alemman luvun alle vedetään viiva, jonka alle tulos kirjoitetaan. Laskeminen aloitetaan oikealta, pienimmästä lukuyksiköstä, ja lasketaan sarake kerrallaan.

```
     1 1
   4 2 7 3
+    6 2 9
----------
   4 9 0 2
```

KUVIO 4. Yhteenlasku allekkain

Jos tulos on yhdeksää suurempi, luvun ykköset kirjoitetaan viivan alle ja kymmenten lukumäärä merkitään muistinumeroksi seuraavan sarakkeen yläpuolelle. Kuvion 4 esimerkkitapauksessa ensin lasketaan 3+9. Koska tulos on 12, merkitään 2 viivan alle ja 1 muistinumeroksi seuraavaan sarakkeeseen. Jatketaan vastaavasti.

Vähennyslasku

Vähennyslaskussa luvut sijoitetaan vähentäjä vähenevän alapuolelle lukuyksiköt kohdakkain. Laskeminen aloitetaan oikeanpuolimmaisesta sarakkeesta.

$$\begin{array}{rrrrr} & & {\scriptstyle 12} & {\scriptstyle 15} & {\scriptstyle 13} \\ & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{6} & 3 \\ - & & 7 & 7 & 7 \\ \hline & & 5 & 8 & 6 \end{array}$$

KUVIO 5. Vähennyslasku allekkain

Jos vähenevä on suurempi kuin vähentäjä, merkitään tulos suoraan viivan alle. Jos taas vähenevä on pienempi kuin vähentäjä, täytyy ”lainata” vasemmanpuoleisesta sarakkeesta. Kuvion 5 esimerkissä lainaamista täytyy käyttää, kun eteen tulee lasku 6-7. Vedetään seuraavaan sarakkeeseen vähenevän yli viiva merkiksi siitä, että siltä on lainattu yksi. Se yksi vastaa kymmentä edellisessä sarakkeessa, joten nyt toisen sarakkeen vähenevässä on 16 kuuden sijaan. Suoritetaan lasku 16-7 ja merkitään tulos viivan alle. Seuraavassa vaiheessa täytyy ottaa huomioon, että yliviivattu numero on yhtä pienempi. Jatketaan vastaavasti.

Kertolasku

Luvut kirjoitetaan jälleen allekkain lukuyksiköt kohdakkain pienempi luku alapuolelle. Aloitetaan kertomalla alemman luvun pienimmällä yksiköllä ylempi luku lukuyksikkö kerrallaan oikealta vasemmalle.

$$\begin{array}{rrrrrl} & & 4 & 2 & 5 & \\ \cdot & & & 3 & 1 & \\ \hline & & 4 & 2 & 5 & \\ 1 & 2 & 7 & 5 & & {\scriptstyle 1} \\ \hline 1 & 3 & 1 & 7 & 5 & \end{array}$$

KUVIO 6. Kertolasku allekkain

Jos välivaiheen tulos on yhdeksään suurempi, merkitään kymmenien lukumäärä muistinumerona laskun viereen. Muistinumero lisätään seuraavan vaiheen tuloon.

Seuraavaksi kerrotaan alemman luvun toiseksi pienimmällä yksiköllä alempi luku, mutta tulos kirjoitetaan alkamaan toisesta sarakkeesta. Jatketaan vastaavasti. Tämän jälkeen vedetään viiva ja lasketaan yhteen yllä olevat välitulokset. Kuviossa 6 on esimerkki kolme- ja kaksinumeroisten lukujen tulosta.

Jakolasku

Jakokulma eroaa muista allekkainlaskuista siinä, että se aloitetaan vasemmalta. Jaettava merkitään kulman sisälle, jakaja sen viereen vasemmalle puolelle. Tulos tulee jaettavan yläpuolelle lukuyksiköt kohdakkain.

```
     5 3
 5 | 2 6 5
 -   2 5
     1 5
   - 1 5
       0
```

KUVIO 7. Jakokulma

Kuvion 7 tapauksessa ensin mietitään, montako kertaa viisi menee lukuun 26. Vastaus 5 merkitään kuutosen yläpuolelle. Seuraavaksi tehdään tarkistuslasku 5×5 ja kirjoitetaan tulos luvun 26 alapuolelle. Suoritetaan vähennyslasku 26-25. Erotukseksi jää 1, jonka viereen pudotetaan alkuperäisestä jaettavasta numero 5. Tämä luku 15 on uusi jaettava, ja toistetaan ensimmäisen vaiheen toimenpiteet. Jos jakolasku ei mene tasan, jäljelle jää jakojäännös. Jakokulmassa jakojäännös on alimmainen luku; viimeisen tarkistuslaskun erotus.

3.3 Laskualgoritmit koulumatematiikassa

Ei ole tarkkaa tietoa siitä, koska Suomessa tai Ruotsissa allekkainlasku on otettu käyttöön. Suomen kouluissa allekkainlaskua opetetaan vuosiluokilla 3-6 eikä sitä juuri käytetä sen jälkeen. Ruotsissa kirjallinen päässälasku on syrjäyttänyt allekkainlaskua, mutta sitä opetetaan kuitenkin kirjallisen päässälaskun rinnalla keskiasteella (vuosiluokat 4-6). Yläasteella käytetään enimmäkseen allekkainlaskua (Rådeström, henkilökohtainen tiedonanto 31.8.2008).

Ruotsin tai Suomen matematiikan opetussuunnitelmat eivät määrittele, mikä kirjallinen laskutapa oppilaille on opetettava. Molemmissa vain mainitaan, että oppilaan tulee osata esittää ratkaisujaan kirjallisesti. Päätös tavan valinnasta jää kunnalle tai viime kädessä opettajalle. Opetussuunnitelmia käsitellään enemmän kappaleessa 4. Ikäheimon (2005) mukaan jakokulma on ollut Suomessa käytössä 1970-luvulta asti, mutta nykyään on vaihtopaineita. On huomattu, että oppilaita sekoittaa se, että jakokulmassa jakaja ja jaettava ovat ”väärinpäin”.

3.4 Laskualgoritmien matemaattinen perusta

Allekkainlaskuista yhteen- ja vähennyslaskut perustuvat siihen, että luvut sijoitetaan allekkain kymmenjärjestelmän mukaisesti ykköset, kymmenet, sadat jne. kohdakkain. Lasku tehdään osissa seuraten algoritmia. Suoritettavat osalaskutoimitukset ovat pääasiassa yksinumeroisten lukujen yhteen-, vähennyslaskuja. Näin alun perin vaikeakin lasku saadaan pilkottua useaksi helpoksi laskuksi. Mekanismi allekkainlaskun takana on täysin sama kuin kirjallisessa päässälaskussa (kuvio 8), siinä vain aloitetaan pienimmästä lukuyksiköstä ja edetään oikealta vasemmalle. Esimerkiksi allekkainlasku 4273+629 auki kirjoitettuna on

$$\begin{array}{rcccc} & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & 4 & 2 & 7 & 3 \\ + & & 6 & 2 & 9 \\ \hline & 4 & 9 & 0 & 2 \end{array}$$

4273+629
= 3+9+70+20+200+600+4000
= 12+70+20+200+600+4000
= 102+200+600+4000
= 902+4000
= 4902

KUVIO 8. Allekkainlaskun ja kirjallisen päässälaskun yhteys

Kertolaskut perustuvat osittelulakiin $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Jokainen kerrottavan lukuyksikkö kerrotaan ensin kertojan ykkösillä, sitten kymmenillä jne. Lopuksi lasketaan osatulokset yhteen. Paikkajärjestelmän ansiosta laskussa sarake ilmoittaa kuuluko numero satoihin vai tuhansiin jne. eikä turhia nollia tarvitse kuljettaa mukana.

Jakokulmassa aloitetaan jaettavan suurimmasta lukuyksiköstä, esimerkiksi sadoista, ja selvitetään kuinka monta kokonaista sataa kertaa jakaja menee siihen. Yli jäänyt osa selvitetään vähennyslaskulla ja tuo erotus otetaan huomioon seuraavaksi suurimman lukuyksikön kohdalla.

3.5 Laskualgoritmien pedagoginen perusta

Allekkainlasku on kehittynyt menetelmäksi, jolla saadaan luvuista riippumatta algoritmia seuraten oikea vastaus tehokkaasti ja kompaktisti. Allekkainlaskussa on jokaiselle laskutoimitukselle vain yksi laskutapa; se on opettajan ja oppilaan kannalta selkeää. Kun on oppinut allekkainlaskun yhteenlaskutekniikan, osaa kaikki mahdolliset yhteenlaskut.

Ikäheimon ja Riskun (2004, 236) mukaan allekkainlaskua voidaan alkaa opettaa siinä vaiheessa, kun oppilaat ymmärtävät paikkajärjestelmän ja heillä on hyvä lukukäsitys. Oppilaan on osattava arvioida saamaansa tulosta ja pystyttävä korjaamaan itse virheensä.

4 MATEMATIIKAN OPETUSSUUNNITELMAT

4.1 Suomen peruskoulun opetussuunnitelma

Seuraavaksi tarkastellaan, mitkä kohdat Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004) näyttäisivät toteutuvan paremmin kirjallisella päässälaskulla kuin allekkainlaskulla.

Opetuksen tulee kehittää oppilaan luovaa -- ajattelua (Opetushallitus 2004, 158)

Kirjallisessa päässälaskussa ratkaisutapoja on useita, ja niistä valitaan paras laskun luonteen ja laskijan mieltymyksen mukaan. Perustekniikoiden opettamisen jälkeen on tarkoitus, että oppilaat kehittävät itse strategioitaan. Rockström kuvaa kirjassaan (2000, 27), miten oppilaat innoissaan etsivät parasta ratkaisua ja haluavat päästä kertomaan siitä koko luokalle. Oppilaat myös hyödyntävät muilta kuulemiaan ideoita tulevissa laskuissa.

Opettaja voi omalla toiminnallaan kahlita oppilaiden luovuuden vaatimalla ratkaisemaan tehtävät aina tietyllä tavalla. Oppilaita täytyy rohkaista luovaan ajatteluun, ja kirjallinen päässälasku antaa sille paremmat mahdollisuudet kuin allekkainlasku, jossa on vain yksi oikea tapa ratkaista.

> *Matematiikan opetuksen -- tulee luoda kestävä pohja matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle.* (Opetushallitus 2004, 158)

Kirjallisessa päässälaskussa käytetään vaihdannaisuutta, liitännäisyyttä ja osittelulakia, jotka ovat algebran tärkeimpiä laskulakeja. Niiden hallinta numerotasolla helpottanee niiden ymmärtämistä kirjaintasolla yläkoulussa (Oksuz 2007, 3-4).

> *Oppilas -- saa tyydytystä ja iloa ongelmien ymmärtämisestä ja ratkaisemisesta* (Opetushallitus 2004, 158)

Rockströmin kirjassa (2000, 53) kerrotaan oppilaasta, jolla ennen oli ollut vaikeuksia 8+3 -tyyppisissä laskuissa, mutta joka kirjalliseen päässälaskuun siirtymisen jälkeen laskee 676+339 hymyillen.

> *Oppilas -- oppii perustelemaan ratkaisujaan ja päätelmiään -- kirjallisesti tai suullisesti* (Opetuhallitus 2004, 158), koska *käsitteiden muodostusprosessissa keskeisiä ovat puhuttu ja kirjoitettu kieli* (Opetuhallitus 2004, 158).

Kirjallisessa päässälaskussa oppilas joutuu alusta asti tekemään ratkaisuja; mikä tapa valitaan, montako välivaihetta merkitään näkyviin jne. Jos opettaja vaatii perusteluja, oppilas joutuu tarkastelemaan omaa päättelyprosessiaan ja syventää näin oppimistaan. Kirjallisen päässälaskuun kuuluu luonnollisena osana erilaisista ratkaisuista keskusteleminen, mikä taas luo hyvät mahdollisuudet harjoitella käsitteiden ja oikeiden termien käyttämistä puheessa. Allekkainlaskussa ratkaisuja eikä päätelmiä tarvitse tehdä, joten oppilas ei pääse harjoittelemaan perustelemista.

Keskeisiä sisältöjä vuosiluokilla 1-2 ovat mm. *”lukujen hajottaminen ja kokoaminen konkreettisin välinein”* ja *”kymmenjärjestelmän rakentumisen periaate*” (Opetushallitus 2004, 158) Kirjallinen päässälasku on täynnä lukujen hajottamista ja kokoamista. Luvun avattua muotoa 823 = 800+20+3 käytetään paljon, ja se vaatii kymmenjärjestelmän ymmärtämistä. Myös pienempiä hajottamisia tarvitaan 13 = 8+5 = 6+7 = … Rockström (2000, 19) kehottaa käyttämään konkreettisia apuvälineitä ymmärtämisen syventämiseksi. Peruslaskujen ulkoa opettelemisen polku lähtee laskutavan ymmärtämisestä apuvälineillä laskemiseen ja vasta ilman välineitä laskemisen jälkeen mieleenpainamiseen.

Keskeisiin sisältöihin luetaan myös *”laskutoimitusten väliset yhteydet luonnollisilla luvuilla”* (Opetushallitus 2004, 159). Kirjallisessa päässälaskussa laskutoimitusten välisiä yhteyksiä joutuu miettimään, kun vähennyslasku muuttuukin yhteenlaskuksi 95-63 = 30+2 = 12 tai kertolasku vähennyslaskuksi 3×19 = 3×20–3×1 = 60–3 = 57.

Hyvästä osaamisesta 2. luokan päättyessä kertoo se, että oppilas ”o*soittaa matematiikkaan liittyvien käsitteiden ymmärtämistä käyttämällä niitä ongelmien ratkaisuissa sekä esittämällä ja selittämällä niitä toisille oppilaille ja opettajalle”*(Opetushallitus 2004, 159). Kirjallinen päässälasku luo paremmat mahdollisuudet kuin allekkainlasku käydä matemaattisia keskusteluja oppilaiden kanssa erilaisten ratkaisujen äärellä. Opettajan haasteena on pitää käytettävät termit oikeina, mutta kuitenkin rohkaista oppilaita kertomaan omin sanoin. Opettajan täytyy oppilaan puheesta selvittää, onko tämä ymmärtänyt käsitteen vai ei.

> *Vuosiluokkien 3–5 matematiikan opetuksen ydintehtävinä ovat matemaattisen ajattelun kehittäminen, matemaattisten ajattelumallien oppimisen pohjustaminen, lukukäsitteen ja peruslaskutoimitusten varmentaminen sekä kokemusten hankkiminen matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumisen pohjaksi.* (Opetushallitus 2004, 160)

Kirjallinen päässälasku opettaa paremmin matemaattisia ajattelumalleja, sillä sen kautta oppilaat tutustuvat jo alaluokilla algebrallisiin laskusääntöihin, kuten vaihdannaisuuteen ja osittelulakiin. Kirjallisessa päässälaskussa on myös tilaa omille pohdinnoille ja ratkaisutavan valinnalle. Lukukäsitys varmentunee enemmän kirjallisella päässälaskulla, sillä siinä lukua verrataan toisiin lukuihin, etsitään lähintä pyöreää lukua jne. Myös luvun avattua muotoa käytetään paljon, jolloin käsitys kymmenjärjestelmästä selvenee.

Keskeisiin sisältöihin vuosiluokilla 3.-5. on lueteltu mm. *"laskualgoritmeja ja päässälaskua"* ja *"negatiivisen kokonaisluvun käsite"* (Opetushallitus 2004, 161) Kirjallinen päässälasku on myös laskualgoritmi, jos käyttää jotain vakiintunutta tapaa. Päässälaskua on hyvä harjoitella kirjallisen päässälaskun yhteydessä, sillä tekniikat ovat suurin piirtein samat. Kirjallisessa päässälaskussa negatiivisen kokonaisluvun käsite tulee luonnollisena ja tarpeellisena osana laskuja.

Hyvästä osaamisesta 5. luokan päättyessä kertoo se, että oppilas *"osaa etukäteen arvioida tuloksen suuruusluokan ja tehtävän ratkaisemisen jälkeen tarkistaa laskun vaiheet sekä arvioida ratkaisun mielekkyyden"* (Opetushallitus 2004, 163). Kirjallisen päässälasku luo hyvät edellytykset tuloksen suuruusluokan arvioimiseen, sillä siinä aloitetaan laskut vasemmalta eli suurimmasta lukuyksiköstä. Siinä vaiheessa laskija tietää jo suurin piirtein minkälainen tulos on mielekäs. Kirjallisessa päässälaskussa välivaiheet kertovat laskijan ajatukset. Jälkikäteenkin voi saada ajatuskulusta kiinni katsomalla välivaiheita ja näin myös huomata mahdolliset virheet.

4.2 Ruotsin peruskoulun opetussuunnitelma

Ruotsin peruskoulun opetussuunnitelma (Skolverket 2002) on jaettu kunkin aineen kohdalta tavoitteisiin, vähimmäisvaatimuksiin 5. ja 9. vuosiluokan jälkeen sekä arvosteluperusteisiin. Matematiikan yleisiksi tavoitteiksi mainitaan mm. että oppilaalle kehittyy luottamus omaan ajatteluun ja oppimiskykyyn, ja että oppilas osaa suullisesti ja kirjallisesti perustella ajatteluaan. Oppilaan olisi myös hyvä oppia mm. algebran peruskäsitteet ja -kaavat. Viidennen luokan päättyessä oppilaan täytyy osata mm.

ymmärtää ja käyttää neljää peruslaskutoimitusta kokonaisluvuilla päässä, kirjallisesti ja laskimella. Kirjallisesta päässälaskusta tai allekkainlaskusta ei puhuta nimeltä mitään.

5 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

5.1 Tutkimuskysymykset

Aikaisemman tutkimuksen puuttuessa tämän tutkimuksen tarkoituksena oli tarkastella kriittisesti kirjallista päässälaskua ja löytää sen vahvuuksia ja heikkouksia. Tarkastelu päätettiin suorittaa sekä peilaamalla kirjallisen päässälaskun ideologiaa tieteelliseen kirjallisuuteen ja matematiikan opetussuunnitelmaan että luokanopettajaopiskelijoilla teetettävän kyselyn perusteella. Luokanopettajaopiskelijat valittiin kohderyhmäksi, koska heidän pitäisi pystyä tarkastelemaan ilmiötä oppilaan ja opettajan näkökulmasta. Opiskelijoina heillä ei ole vielä piintyneitä tapoja opettaa matematiikkaa. Näistä lähtökohdista käsin muotoutuivat seuraavat tutkimuskysymykset:

1. Mitkä ovat kirjallisen päässälaskun edut ja haitat allekkainlaskuun verrattuna
    a) kirjallisuuden ja opetussuunnitelman valossa?
    b) luokanopettajaopiskelijoiden mielestä?
2. Kannattaisiko kirjallinen päässälasku ottaa käyttöön myös Suomessa
    a) kirjallisuuden ja opetussuunnitelman valossa?
    b) luokanopettajaopiskelijoiden mielestä?

5.2 Menetelmät ja aineistonkeruu

Tutkimus oli fenomenografinen (Rissanen) kyselytutkimus (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 1997; 130), jonka tarkoituksena oli selvittää ilmiötä nimeltä kirjallinen päässälasku ja verrata sitä vallalla olevaan menetelmään, allekkainlaskuun. Tutkimuksessa on sekä laadullisia että määrällisiä piirteitä, mutta yleisluonne on silti laadullinen. Toteutustapana käytettiin informoitua kyselyä. (Hirsjärvi ym. 1997, 191)

Eräälle luokanopettajaopiskelijoiden matematiikan valinnaisen kurssin ryhmälle tehtiin kysely (liite 1), jossa he vertailivat kirjallista päässälaskua ja allekkainlaskua. Vertailua varten heille opetettiin kirjallinen päässälasku syyskuussa 2007 ja he saivat harjoitella sitä tekemällä harjoitustehtäviä monisteesta (liite 2). Aikaa tähän käytettiin kaksi oppituntia. Viikon päästä oli kysely, jota varten heitä pyydettiin kotona kertaamaan sekä kirjallista päässälaskua että allekkainlaskua. Ennen kyselyn aloittamista pidettiin vielä lyhyt kertaus molemmista laskutavoista. Opiskelijat täyttivät kyselyn itsenäisesti ja ilman materiaalia. Kysely koostui laskuista ja niihin liittyvistä kysymyksistä sekä yleisesti menetelmien vertailuun liittyvistä kysymyksistä. Kyselyn täyttämiseen oli varattu aikaa yksi oppitunti.

Kunkin laskun kohdalla opiskelijoita pyydettiin laskemaan lasku allekkain ja kahdella kirjallisen päässälaskun tavalla. Sen jälkeen heidän tuli valita ympyröimällä mielestään parempi kirjallisen päässälaskun ratkaisu. Kirjallisessa päässälaskussa heidän tuli käyttää vähintään yhtä välivaihetta. Kutakin neljää peruslaskutoimitusta testattiin kahdella laskulla, joista toinen oli suuremmilla luvuilla. Kahdeksasta tehtävästä yksi oli sanallinen.

6 TULOKSET

6.1 Kysely

6.1.1 Taustatiedot ja vastausten luokittelu

Kyselyyn valittiin harkinnan perusteella 20 opiskelijan ryhmä, joka osallistui samalle kurssille. Heistä naisia oli 17 ja miehiä kolme. Iältään he olivat 20-29-vuotiaita; kolmea lukuun ottamatta 21-23-vuotiaita. Kyselyä varten heidän historiaansa matematiikan osalta kartoitettiin. Heistä 15 oli käynyt lukiossa matematiikan lyhyen oppimäärän ja 5 pitkän. Ala-asteella useimmat heistä olivat kokeneet matematiikan joko usein tai lähes aina helpoksi. Nykyään heistä enemmistö kokee matematiikan usein hankalaksi.

Kirjallisen päässälaskun strategia on luokiteltu ryhmiin ensimmäisen välivaiheen mukaan, koska se antaa yleensä hyvän kuvan siitä, mihin suuntaan ratkaisu kehittyy. Tällaista karkeaa luokittelua oli pakko tehdä, sillä ratkaisuja oli lähes yhtä monta erilaista kuin oli vastaajaakin. Vastaajat ratkaisivat laskut kahdella kirjallisen päässälaskun tavalla ja valitsivat niistä paremman. Kirjallisen päässälaskun valintaa käsittelevissä taulukoissa on huomioitu vain paremmaksi valittu laskutapa. Jos vastaaja ei ollut valinnut kumpaakaan kirjallisen päässälaskun ratkaisuistaan paremmaksi, joten häntä ei otettu huomioon taulukossa.

6.1.2 Yhteenlasku

Ensimmäinen tehtävä oli yhteenlasku 57+66. Kirjallisen päässälaskun kaksi laskutapaa oli osattu hyvin ja kaikki olivat käyttäneet vain niitä. Yleisin ratkaisu oli

$$57+66 = 50+60+7+6 = 110+13 = 123,$$

missä on ensin hajotettu luvut ja laskettu sitten kymmenet yhteen ja ykköset yhteen. Toiseksi yleisin tapa oli siirtää kolme:

57+66 = 60+63 = 123

Jälkimmäinen tapa oli kuitenkin äänestetty paremmaksi 11 vastauksessa kahdestakymmenestä. Hyvin tasaväkisiä nämä kaksi tapaa kuitenkin olivat, kuten taulukko 1 osoittaa.

Toinen tehtävä oli 1254+6847. Tarkoituksena oli testata, miten vastaajat pärjäävät kirjallisen päässälaskun kanssa isoilla luvuilla. Yleisin ratkaisutapa oli

1254+6847 = 1000+6000+200+800+50+40+4+7 = 7000+1000+90+11
= 8000+101 = 8101,

ja 13 vastaajaa oli pitänyt sitä parempana ratkaisuna (taulukko 1). Tässä tehtävässä oli paljon hajontaa, sillä seuraavaksi yleisintä tapaa oli käyttänyt 6 vastaajaa. Se oli

1254+6847 = 1300+6801 = 7000+1101 = 8101,

eli luvusta 6847 siirrettiin 46 lukuun 1254.

TAULUKKO 1. Yhteenlaskuissa käytetyt kirjallisen päässälaskun menetelmät.

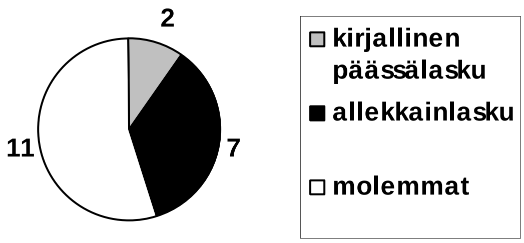
Yhteenlasku:	**57+66**	**1254+6847**
lukuyksiköittäin	9	13
luvun siirtäminen	11	6
yhteensä	20	19

Kuten taulukosta 2 näkee, vastaajat olivat osanneet laskea hyvin allekkain yhteen. Laskut olivat oikein ja merkinnöissä ei ollut puutteita. Neljä vastaajaa oli jättänyt kokonaan laskematta allekkain.

TAULUKKO 2. Vastaajien suoriutuminen yhteenlaskusta allekkain.

Yhteenlasku allekkain:	**57+66**	**1254+6874**
oikein	16	16
merkinnöissä puutteita	0	0
väärin	0	0
lasku puuttui	4	4
yhteensä	20	20

Kysyttäessä vastaajien mielipidettä siitä, oliko allekkainlasku vai paremmaksi valitsemansa kirjallisen päässälaskun tapa parempi, seitsemän vastaajaa oli allekkainlaskun kannalla, kaksi kirjallisen päässälaskun ja loput 11 kannattivat molempia ainakin joiltain osin. Tämä tulos on esitetty kuviossa 9.



KUVIO 9. Vastaajien paremmaksi valitsema yhteenlaskutapa.

Allekkainlaskun paremmuutta perusteltiin sen nopeudella ja tuttuudella. Välivaiheita moitittiin. Allekkainlasku monen vastaajan mielestä on hyvä siksi, että se antaa suoraan vastauksen.

> *Allekkainlasku on mekaaninen ja helppo tapa laskea, kun taas kirjallisessa päässälaskussa joutuu ajattelemaan, yhdistelemään ja ennen kaikkea kirjoittamaan paljon välivaiheita. Tuntuu, että siinä joutuu keskittymään aivan epäolennaiseen, kun ensin pitää miettiä, mitkä luvut laitan yhteen ja mitä siirrän jne. Allekkainlasku on kätevä ja nopea tapa laskea.* Nainen9

Kirjallisessa päässälaskussa kehuttiin sitä, että siinä hahmottaa luvut ja niiden rakenteen paremmin. Se toimii myös ilman paperia.

> *Allekkainlaskussa tuloksen tekee mekaanisesti osissa, mutta päässälaskussa näkee mitä laskee.* Nainen17

Eräs vastaajista koki onnistumisen iloa kirjallisen päässälaskun kautta.

> *Päässälasku on miellyttävämpää ja tuottaa enemmän onnistumisen iloa, kun laskun saa ratkaistua.* Nainen20

6.1.3 Vähennyslasku

Vähennyslaskuista ensimmäinen oli sanallinen tehtävä:

> Heikillä on kahdenlaisia kyniä. Hänellä on puuvärejä 25 kpl ja vahavärejä loput. Yhteensä Heikillä on 53 kynää. Kuinka monta vahaväriä Heikillä on?

Kaikki vastaajat olivat osanneet muodostaa haetun lausekkeen, joka oli 53-25. Yleisin ratkaisu oli lukuyksiköittäin:

$$53-25 = 50-20+3-5 = 30-2 = 28$$

Myös luvun lisäämistä oli käytetty useassa paperissa. Lisättävinä lukuina oli käytetty +5, -5 ja -3:

53-25 = 58-30 = 28 (lisätty molempiin lukuihin 5)

= 48-20 = 28 (vähennetty molemmista 5)

= 50-22 = 28 (vähennetty molemmista 3)

Lukujen etäisyyden toisistaan oli määrittänyt muutama vastaaja.

53-25 = 5+23 = 28 (luvun 30 kautta)

= 15+13 = 28 (luvun 40 kautta)

Taulukosta 3 näkee, miten eri laskutapojen käyttö jakaantui vastaajien kesken. Lukuyksiköittäin ratkaisemista piti parempana ratkaisuna yli puolet. Luvun siirtämistä suosi seitsemän ja etäisyyden kautta ratkaisemista kaksi.

Seuraavana oli vuorossa suurien lukujen vähennyslasku 5732 – 1998. Yli kolminumeroisten lukujen kanssa yksiköittäin laskeminen menee työlääksi. Monet olivat kuitenkin laskeneet niin:

5732-1998 = 5000-1000+700-900+30-90+2-8 = 4000-200-60-6

= 3800-60-6 = 3740-6 = 3734

Kaikista pidetyin ratkaisutapa oli

5732-1998 = 5734-2000 = 3734

eli luvun 2 lisääminen sekä vähennettävään että vähentäjään. Myös etäisyyden laskemista oli käytetty:

5732-1998 = 2+3732 = 3734

Taulukko 3 osoittaa, että ylivoimaisesti suosituin laskutapa oli luvun lisääminen. Lukuyksiköittäin sekä etäisyyden kautta laskemista kumpaakin oli kannattanut vain kolme vastaajaa.

TAULUKKO 3. Vähennyslaskuissa käytetyt kirjallisen päässälaskun menetelmät.

Vähennyslasku:	**53-25**	**5732-1998**
lukuyksiköittäin	11	3
luvun lisääminen	7	13
lukujen etäisyys	2	3
yhteensä	20	19

Vähennyslasku ei enää sujunutkaan kaikilta vastaajilta moitteettomasti, kuten taulukko 4 osoittaa. Neljällä vastaajalla oli puutteita lainaamisen merkitsemisessä. Vääriä ratkaisuja jälkimmäisessä laskussa oli kaksi.

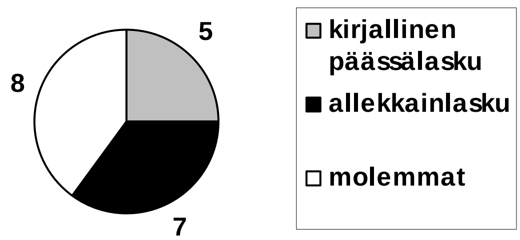
TAULUKKO 4. Vastaajien suoriutuminen vähennyslaskusta allekkain.

Vähennyslasku allekkain:	**53-25**	**5732-1998**
oikein	15	13
merkinnöissä puutteita	4	4
väärin	0	2
lasku puuttui	1	1
yhteensä	20	20

Vertaillessaan vähennyslaskun allekkainlaskua ja kirjallista päässälaskua opiskelijat pohtivat allekkainlaskuissa tapahtuvaa lainaamista.

> *”Lainaaminen” voi olla tosin ongelma. Lainaaminen voi olla tietenkin joillekin vaikea ymmärtää ja se hyvä puoli kirjallisessa päässälaskussa on, ettei lainaamista tarvitse tehdä. Mutta kun siihen oppii, se on helppoa.* Nainen12

> *Allekkainlaskussa tulee helposti virheitä, jos joku muistinumero unohtuu.* Nainen18



KUVIO 10. Vastaajien paremmaksi valitsema vähennyslaskutapa.

Joidenkin vastaajien mielestä kirjallisen päässälaskun tapa oli helpompi hahmottaa ja toisten mielestä taas nimenomaan allekkainlasku. Allekkainlaskua näissä vähennyslaskuissa kannatti seitsemän vastaajaa (kuvio 10). Perusteluiksi annettiin mm.

> *Allekkainlasku on parempi, koska siinä ei tarvitse huomioida merkin vaihtumista eikä siis negatiivisia lukuja. Luulisin, että ne ovat liian vaikeita alakoululaiselle.* Nainen20

Allekkainlasku on parempi, koska siinä luvut pysyvät koko ajan samoina. Nainen6

Kirjallisen päässälaskun kannalla oli viisi vastaajaa.

Osissa laskeminen on selkeää. Nainen18

-- sopivan laskutavan löydyttyä (haetaan lähintä pyöreää lukua) valitsen paremmaksi tavaksi kirjallisen päässälaskun, koska siitä näkee vastauksen lähes suoraan. Nainen17

Loput kahdeksan vastaajaa olivat kahden vaiheilla.

6.1.4 Kertolasku

Seuraavaksi kyselyssä testattiin kertolaskuja. Ensimmäisenä oli lasku $8 \cdot 39$. Lukuyksiköittäin laskevista suurin osa ratkaisi laskun näin:

$$8 \cdot 39 = 8 \cdot 30 + 8 \cdot 9 = 240+72 = 312$$

Pidetyin ratkaisutapa oli kuitenkin

$$8 \cdot 39 = 40 \cdot 8 - 8 \cdot 1 = 320-8 = 312,$$

missä on käytetty apuna lähintä pyöreää lukua eli 40. Yksi vastaajista oli keksinyt käyttää ”tuplausta”:

$$8 \cdot 39 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 39 = 2 \cdot 2 \cdot 78 = 2 \cdot 156 = 312$$

Yksi vastaajista oli osittelulain jälkeen käyttänyt kertolaskun ominaisuutta toistettuna yhteenlaskuna:

$$8 \cdot 39 = 30+30+30+30+30+30+30+30+9+9+9+9+9+9+9+9 = 240+72 = 312$$

Taulukosta 5 näkee, miten ratkaisutavat jakautuivat. Laskutapojen suosio jakautui tasan lukuyksiköittäin ja lähimmän pyöreän luvun kautta ratkaisemisen välillä, tekijöihin jakoa ei kannattanut kukaan.

Toisessa testattavassa kertolaskussa kerrottiin kaksi kaksinumeroista lukua keskenään, $25 \cdot 16$. Parhaimpana laskutapana (taulukko 5) pidettiin tekijöihin jakamista, jota oli käytetty mm. näin:

$$25 \cdot 16 = 25 \cdot 4 \cdot 4 = 100 \cdot 4 = 400 \quad \text{(jaettu 16 tekijöihin)}$$
$$= 5 \cdot 5 \cdot 16 = 5 \cdot 80 = 400 \quad \text{(jaettu 25 tekijöihin)}$$
$$= 5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 = 40 \cdot 10 = 400 \quad \text{(jaettu molemmat tekijöihin ja vaihdettu järjestystä)}$$

Osittelulakia käyttämällä (eli lukuyksiköittäin) vastaajat saivat aikaan mm. tällaisia ratkaisuja:

$$25 \cdot 16 = 20 \cdot 16 + 5 \cdot 16 = 320+80 = 400 \quad \text{(ositettu 25)}$$
$$= 25 \cdot 10 + 25 \cdot 6 = 250+150 = 400 \quad \text{(ositettu 16)}$$

Lähimmän pyöreän luvun taktiikkaa ei tällä kertaa monikaan käyttänyt. Niistä yleisin ratkaisu oli

$$25 \cdot 16 = 25 \cdot 20 - 25 \cdot 4 = 500\text{-}100 = 400.$$

TAULUKKO 5. Kertolaskuissa käytetyt kirjallisen päässälaskun menetelmät.

Kertolasku:	**8 · 39**	**25 · 16**
lukuyksiköittäin	10	8
tekijöihin jako	0	10
lähin pyöreä luku	10	1
yhteensä	20	19

Suurin osa vastaajista oli osannut laskea molemmat laskut allekkain, mutta muutamat eivät osanneet tai merkinnöissä oli puutteita (taulukko 6). Yksi vastaaja ei ollut laskenut allekkain ollenkaan.

TAULUKKO 6. Vastaajien suoriutuminen kertolaskusta allekkain.

Kertolasku allekkain:	**8 · 39**	**25 · 16**
oikein	15	16
merkinnöissä puutteita	1	2
väärin	3	1
lasku puuttui	1	1
yhteensä	20	20

Kertolaskuissa kirjallisesta päässälaskusta oli pidetty enemmän kuin yhteen- ja vähennyslaskuissa. Syiksi annettiin nopeus, selkeys ja valinnan vapaus. Ne vastaajat, jotka eivät osanneet laskea allekkain, olivat kuitenkin osanneet laskea kirjallisella päässälaskulla.

> *En ossoo laskee laskuja allekkain, joten kirjallisen päässälaskun tapa on ihan toimiva kyllä...* Mies3

> *Kirjallisen päässälaskun tekniikka tuntui mukavammalta. Valinnan vapaus, voi tehdä niin kuin on helpointa.* Nainen5

Allekkainlaskua pidettiin yksinkertaisena. Sitä kehuttiin myös nopeaksi ja varmaksi.

> -- *siinä lasketaan pieniä kertolaskuja eikä tarvitse miettiä, miten olisi helpoin luku jakaa, jotta se olisi helpoin kertoa tai että mikä kertaa mikä on x.* Nainen17

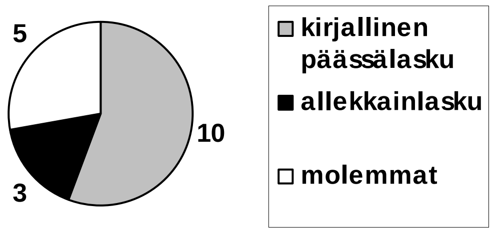
Vastakkaisia kommentteja tuli mm. siitä, kummalla tavalla muistaa paremmin tehdä kaikki vaiheet:

Allekkainlasku on helpompi, sillä siinä näkyy selkeästi, mitä pitää kertoa milläkin. Kirjallisessa päässälaskussa voi helposti unohtaa kertoa jonkin luvun osan. Nainen4

Allekkainlaskussa unohtaa muistinumerot todella helposti tai laittaa ne väärään paikkaan. Tässä osiin jakaminen toimii mielestäni hyvin. Silloin on helpompi pitää kaikki luvut mukana. Nainen18

Eräs kahden vaiheilla oleva vastaaja kuvaili tuntojaan näin:

En osaa sanoa, kumpi tavoista on parempi, koska mielestäni allekkainlasku on ajallisesti nopeampi, mutta kirjallisen päässälaskun menetelmä opettaa kertolaskua paremmin ja näin ollen ymmärrän paremmin kertolaskun olemusta. Nainen6



KUVIO 11. Vastaajien paremmaksi valitsema kertolaskutapa.

Kuvio 11 kertoo, miten yli puolet vastaajista oli kirjallisen päässälaskun kannalla, kolme kannatti allekkainlaskua ja viisi vastaajaa molempia. Kaksi oli jättänyt vastaamatta kysymykseen.

6.1.5 Jakolasku

Laskussa 516:3 kaikki vastaajat olivat käyttäneet toisena laskutapana lyhyttä jakolaskua ja valinneet sen paremmaksi (taulukko 7).

$$\frac{5^{2}16}{3} = 172$$

Osoittajan hajottamista oli käytetty mm. seuraavilla tavoilla

$$\frac{516}{3} = \frac{300}{3} + \frac{210}{3} + \frac{6}{3} = 100 + 70 + 2 = 172$$

516:3 = 600:3 – 84:3 = 200 – 28 = 172

Eräs vastaaja oli laventanut kahdella ja käyttänyt sen jälkeen lyhyttä jakolaskua.

Laskussa 606:15 oli enemmän hajontaa laskutavan valinnassa, kuten taulukosta 7 näkee. Lyhyt jakolasku oli edelleen suosituin laskutapa.

$$\frac{606{,}0}{15} = 40{,}4$$

Osoittajan hajottamista oli käytetty kahdella eri tavalla.

$$\frac{606}{15} = \frac{300}{15} + \frac{306}{15} = 20 + \frac{300}{15} + {}^{(3}\frac{6}{15} = 20 + 20 + \frac{2}{5} = 40\frac{2}{5}$$

$$\frac{606}{15} = {}^{(15}\frac{600}{15} + {}^{(3}\frac{6}{15} = 40 + \frac{2}{5} = 40\frac{2}{5}$$

Suosittu laskutapa oli myös ensin supistaa kolmella ja sitten käyttää joko lyhyttä jakolaskua tai osoittajan hajottamista.

TAULUKKO 7. Jakolaskuissa käytetyt kirjallisen päässälaskun menetelmät.

Jakolasku:	**516:3**	**606:15**
lyhyt jakolasku	20	9
osoittajan hajottaminen	0	3
supistaminen/ laventaminen	0	4
yhteensä	20	16

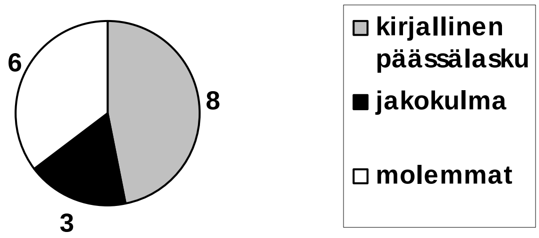
Huom. Toisessa laskussa neljä vastaajaa ei ollut laskenut kirjallisen päässälaskun tavalla ollenkaan.

Suurimmalta osalta vastaajista jakokulman käyttö sujui hyvin, kuten taulukko 8 osoittaa. Kahdella vastaajalla oli kummassakin laskussa puutteita merkinnöissä ja kaksi vastaajaa oli laskenut ensimmäisen laskun väärin. Kaikki vastaajat eivät olleet laskeneet jakokulmassa ollenkaan.

TAULUKKO 8. Vastaajien suoriutuminen jakokulman käytöstä.

Jakokulma:	**516/3**	**606/15**
oikein	15	15
merkinnöissä puutteita	2	2
väärin	2	0
lasku puuttui	1	3
yhteensä	20	20

Kuten jotkut vastaajistakin mainitsivat, jakokulma ja lyhyt jakolasku ovat erittäin lähellä toisiaan. Lyhyestä jakolaskusta pidettiin paljon; kahdeksan vastaajaa oli selvästi sen kannalla (kuvio 12).



KUVIO 12. Vastaajien paremmaksi valitsema jakolaskutapa.

Lyhyttä jakolaskua pidettiin loogisempana kuin jakokulmaa. Jakokulma oli monilta vastaajilta päässyt unohtumaan tai ainakin he olivat epävarmoja sen käytössä.

> *En muistanut enää jakokulmaa, vaikka se käytiin tunnilla läpi. Kirjallinen päässälasku paljon loogisempi.* Nainen13

> *En muista jakokulmaa, joten kirjallinen päässälasku [lyhyt jakolasku] oli ainoa vaihtoehto. Se on kuitenkin muutenkin selkeämpi ja sen opin nopeasti. Laskun ratkaiseminen tällä tavalla on myös mahdollista vaikkei selkeää kaavaa muistaisikaan, kun taas jakokulman "päätteleminen" ei onnistu.* Nainen2

Myös muita kirjallisen päässälaskun laskutapoja oli käytetty.

> *Kirjallinen päässälasku on parempi, jos vain osaa valita sopivan keinon. Pitää olla silmää sanoa laskun alussa, mikä keino toimii parhaiten.* Nainen5

Jakokulmaa suosivat vastaajat perustelivat menetelmää sen tuttuudella ja sillä, että siinä muistaa paremmin laittaa nollat ja pilkun oikeaan paikkaan.

> *Jakokulmassa laskeminen ja kirj. päässälasku aika samanlaisia. Itse laskisin mieluummin jakokulmassa, muistaa paremmin nollat(kin).* Nainen12

Jakokulmasta pidettiin silloin, kun jako ei mene tasan. Lyhyt jakolasku ei vastaajien mukaan toimi niin hyvin kaksinumeroisella jakajalla.

> *Yhdellä [yksinumeroisella] jakajalla jakamisessa ehdottomasti parempi on kirjallisen päässälaskun tapa, kun jako menee tasan näkee siitä tavasta helposti vastaukset. Kuitenkin kaksinumeroinen jakaja tuottaisi ongelmia kirjallisen päässälasku tavalla. Jakokulmassa pilkun paikan pystyy paremmin katsomaan.* Nainen1

6.1.6 Laskutavat lapsen näkökulmasta

Kyselyn lopuksi oli vielä kuusi yleistä kysymystä kirjallisen päässälaskun ja allekkainlaskun vertailusta. Kysymykset käydään läpi yksitellen. Ensin opiskelijoita pyydettiin pohtimaan kirjallista päässälaskua lapsen kannalta.

> Käytit edellä olevissa tehtävissä allekkainlaskua ja kirjallista päässälaskua. Kumman tavan olettaisit olevan lapselle helpompi ymmärtää? Miksi?

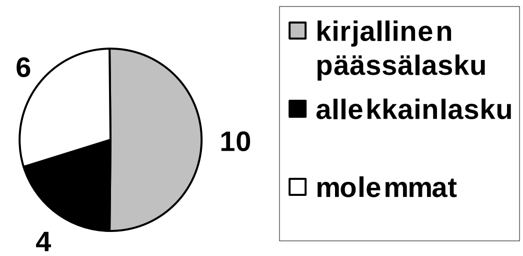
Täysin allekkainlaskun kannalla oli neljä vastaajaa (kuvio 13). Allekkainlaskun hyviksi puoliksi mainittiin se, että siinä lasketaan pienillä luvuilla kerrallaan. Sen arveltiin myös olevan lapselle helpompi hahmottaa. Kirjallisessa päässälaskussa on vastaajien mukaan liikaa erilaisia tapoja, jotka unohtuvat helposti; allekkainlaskussa on vain yksi tapa ja niin on hyvä. Vastaajat pitävät allekkainlaskua selkeänä ja nopeana.

> *Allekkainlasku on mekaaninen ja helpommin ymmärrettävä. Siinä ei tarvitse keskittyä muuhun kuin olennaiseen eli lopputulokseen.* Nainen9

> *Allekkainlaskun etu on siinä, että siinä on vain yksi tapa… Lapsen voi olla hankala muistaa erilaisia tapoja.* Mies3

> *Kirjallisessa päässälaskussa lapsi saattaa helposti mennä sekaisin useiden luvun pilkkomisten ja välivaiheiden kanssa.* Nainen1

> *-- [kirjallisella päässälaskulla] alkuun pääseminen on paljon hitaampaa. Voi käydä niin että laskun olisi jo ehtinyt laskemaan allekkain, kun vasta on toisessa tavassa keksinyt mitä luvuille tehdään.* Nainen16



KUVIO 13. Laskutapa, joka vastaajien mielestä on lapselle helpompi ymmärtää.

Kirjallisen päässälaskun puolta piti kymmenen vastaajaa. Vastaajien mielestä sen avulla ymmärtää kymmenjärjestelmän paremmin. Luvun voi hajottaa lukuyksiköihin, jolloin näkee, mistä se koostuu. Vastaajat arvelivat, että se auttaa hahmottamaan paremmin.

> *Kirjallinen päässälasku voisi olla lapselle helpompaa, sillä siinä on useita erilaisia vaihtoehtoja, joilla lapsi voi helpottaa tehtävää.* Nainen4

-- *se [kirjallinen päässälasku] kehittää ehkä enemmän lapsen matemaattista ajattelua.* Mies3

Ymmärtämisen kannalta kirjallinen päässälasku, sillä siinä ei toisteta vain samoja rimpsuja, joiden merkitys jää hämärän peittoon. Kirjallinen päässälasku siirtää ainakin minulla ajatuksen suoraan paperille. Mies7

Kirjallinen päässälasku vaatii oppilaalta alusta pitäen päättelyä ja matemaattista ajattelua. Nainen19

Erityisopettajana suosittelisin kirjallista päässälaskua. Nainen5

Kaikki vastaajat eivät halunneet ottaa kantaa siihen, kumpi laskutavoista on parempi, vaan kommentoivat yleisesti molempia.

Riippuu lapsesta ja laskusta. Eri laskuihin sopivat eri keinot. Opettajalla on haastetta opettaa lapsille eri tapojen joustava käyttö. Nainen5

6.1.7 Laskutavat opettajan näkökulmasta

Seuraavassa kysymyksessä vastaaja pyydettiin pohtimaan sitä, kumpi vertailtavista laskutavoista olisi helpompi opettaa.

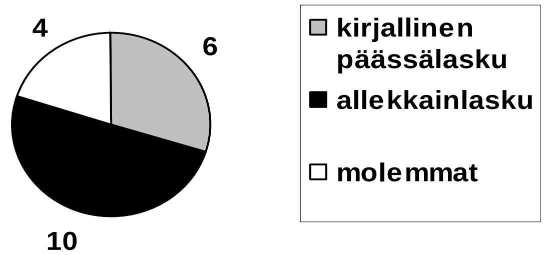
Kumman tavan, allekkainlasku vai kirjallinen päässälasku, olettaisit olevan helpompi opettaa? Perustele vastauksesi.

Vastaajista puolet (kuvio 14) oli sitä mieltä, että allekkainlasku on ehdottomasti helpompi opettaa. Sitä perusteltiin sillä, että sen osaa itse paremmin ja oppikirjoissakin se opetetaan niin.

-- *siitä [allekkainlaskusta] on enemmän materiaalia saatavilla.* Mies15

Vastaajien mielestä allekkainlaskun opettamista helpottaa se, että on vain yksi tapa, jolla lasketaan. Ei ole sitä vaaraa, että oppilaat menisivät sekaisin monien eri laskutapojen välillä. Allekkainlaskun sanottiin myös olevan ”mekaanisempaa”, minkä takia se on helpompi opettaa. Eräs vastaaja perusteli näin:

Allekkainlasku, sillä siinä ei tarvita ymmärrystä ykkösistä, kymmenistä jne. vaan pelkkä laskusäännön muistaminen riittää. Nainen14



KUVIO 14. Laskutapa, joka vastaajien mielestä on helpompi opettaa.

Kirjallisen päässälaskun kannalla oli kuusi vastaajaa. Sitä pidettiin loogisena ja helposti omaksuttavana. Vastaajat kokivat, että kirjallisen päässälaskun menetelmät on helpompi perustella lapselle.

> *Päässälasku on ainakin helpompi hahmottaa, joten luulisin, että se on helpompi myös opettaa. Allekkainlaskussa ei välttämättä tiedä mihin jokin perustuu, sitä vain opettaa, että näin tehdään.* Nainen20

> *Kenties kirjallinen päässälasku, sillä sen vaiheet on helppo perustella lapselle. Laskulausekkeessa sadat, kymmenet ja ykköset erottuvat selkeästi, kun allekkainlaskussa ne "häviävät" helposti.* Nainen2

Loput neljä vastaajaa eivät nimenneet kumpaakaan laskutapaa paremmaksi.

6.1.8 Merkintätapojen selkeys

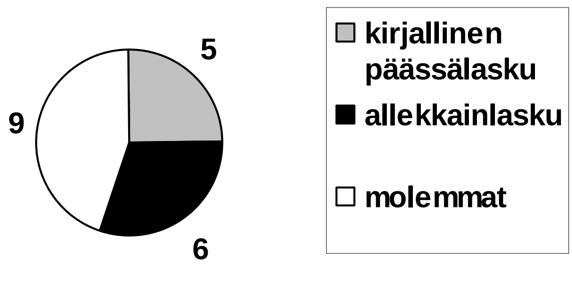
Vastaajilta kysyttiin heidän mielipidettään siitä, kumpi vertailtavien laskutapojen merkintätavoista on selkeämpi.

> Kumpi merkintätapa, allekkain vai kirjallinen päässälasku, on selkeämpi? Miksi? Miten tavat eroavat?

Kuusi vastaajaa piti allekkainlaskun merkintätapaa selkeämpänä (kuvio 15). Selkeyttävänä tekijänä monet pitivät sitä, että lasku mahtuu pienempään tilaan, koska ei ole välivaiheita.

> *Allekkainlasku on selkeämpi, koska siinä ei tarvitse muistaa niin montaa eri tapaa ja vaihetta.* Nainen6

> *Allekkainlaskun merkintätavassa luvut on oikeilla paikoilla (kymmenjärj.) ja on havainnollista että mistä vähennetään mitä yms.* Mies3



KUVIO 15. Laskutapa, joka on merkintätavaltaan selkeämpi.

Kirjallista päässälaskua piti selkeämpänä viisi vastaajaa. Joidenkin vastaajien mukaan kirjallisesta päässälaskusta tekee selkeämmän se, että siinä ei käytetä muistinumeroita, joissa helposti tulee tehtyä huolimattomuusvirheitä. Myös välivaiheita kehuttiin.

Kirjallisessa [päässälaskussa] välivaiheet näkyvät selkeästi ja tietää mitä on tehty. Jos ei tiedä kuinka allekkain toimii, ei sitä merkinnästä näe. Nainen8

Niistä vastaajista, jotka eivät halunneet valita kumpaakaan, monet sanoivat riippuvan laskusta kumpi on selvempi. Erityisesti kirjallisessa päässälaskussa on monenlaisia ratkaisutapoja, joista toiset ovat selkeämpiä kuin toiset.

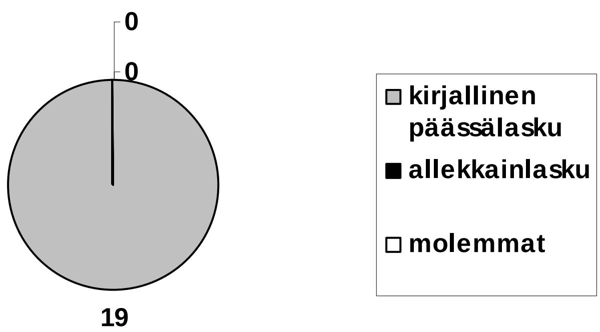
6.1.9 Laskutavat arkipäivän tilanteessa

Vastaajia pyydettiin pohtimaan arkipäivän matematiikkaa ja sitä onko allekkainlasku vai kirjallisen päässälaskun menetelmät hyödyllisempiä tilanteissa, joissa joko on tai ei ole kynää ja paperia saatavilla.

Jos laskinta ei olisi saatavilla, kumpi tavoista on arkipäivän tilanteissa käytännöllisempi? Pohdi erikseen tilanteita, joissa paperia ja kynä on saatavilla ja joissa ei ole.

Kaikki yhdeksäntoista kysymykseen vastaajaa olivat sitä mieltä, että kirjallisen päässälaskun strategiat ovat käytännöllisemmät kuin allekkainlasku, kun apuvälineitä ei ole saatavilla (kuvio 16).

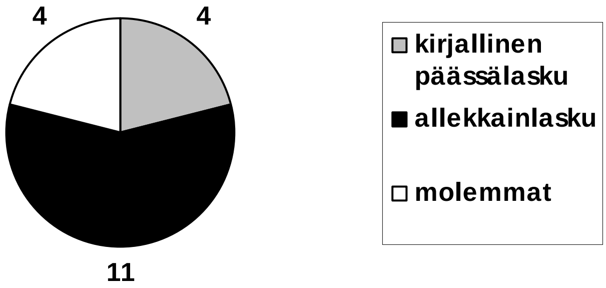
Kirjallinen päässälasku on käytännöllisempi, jos ei ole laskinta eikä paperia ja kynää. Itse asiassa sitä on "vahingossa" käyttänyt, vaikkei olekaan tällaisesta tiennyt. Nainen20



KUVIO 16. Käytännöllisin laskutapa ilman laskinta, paperia ja kynää.

Kun käytössä on kynä ja paperia, suurin osa vastaajista kannattaa allekkainlaskua (kuvio 17). Allekkainlaskua pidetään nopeana ja varmana, ja lasku mahtuu pieneen tilaan.

Kynän ja paperin ollessa saatavilla luottaisin allekkainlaskuun enemmän. Nainen1



KUVIO 17. Käytännöllisin laskutapa ilman laskinta, kun paperi ja kynä saatavilla.

Kuitenkin neljän vastaajan mielestä kirjallinen päässälasku toimii silloinkin paremmin.

> *Kirjallisella päässälaskulla laskisin äkillisessä tilanteessa tai vastaavalla tavalla koska nopeasti ei jaksa vääntää allekkain.* Nainen10

> *Kirjallinen päässälasku toimii usein molemmissa tilanteissa paremmin.* Nainen5

6.1.10 Kirjallisen päässälaskun tulevaisuus Suomessa

Vastaajia pyydettiin kertomaan mielipiteensä kirjallisen päässälaskun tuomisesta Suomen kouluihin.

> Olettaisitko, että kirjallisella päässälaskulla voisi olla tulevaisuutta Suomen kouluissa? Perustele vastauksesi.

Kaikki 19 vastaajaa olivat sitä mieltä, että kirjallista päässälaskua kannattaisi opettaa myös Suomessa.

> *Kyllä! Yhteinen päätös sen tuomiseksi oppikirjoihin tarvittaisiin.* Nainen13

Monien mielestä sitä olisi hyvä opettaa allekkainlaskun rinnalla.

> *Varmastikin olisi – eihän näiden kahden tarvitse olla poissulkevia, vaan tapoja, jotka täydentävät toisiaan. Oppilaat oppivat eri tavalla!* Nainen20

> *Varmasti ainakin jossain muodossa, sillä laskutapoja on niin monta kuin oppilaitakin. Itse saattaisin opettaa näitä tyylejä rinnakkain, oppilaiden kyvyt/tarpeet huomioiden.* Mies7

Jotkut ottaisivat siitä vain joitain osia.

> *Kyllä voisi, ainakin osilla tavoilla. Voisi tuoda helpotusta joillekin oppilaille ja nopeuttaa joitakin laskuja.* Nainen17

Monet vastaajista olivat sitä mieltä, että kirjallinen päässälasku kehittää monipuolisesti oppilaiden matemaattista ajattelua ja matematiikan perusasioiden ymmärtämistä.

> *Uskon, että voisi olla. Siksi, että koulujen tulevaisuuden tuli muutenkin painottua asioiden syvällisempään ymmärrykseen eikä ulkoa muistamiseen. Kirjallinen päässälasku voisi tukea tätä.* Nainen14

6.1.11 Kirjallinen päässälasku eri oppijatyyppien näkökulmasta

Viimeisessä kysymyksessä vastaajien mielipidettä kysyttiin siitä, millaisille oppijoille kirjallinen päässälasku sopii parhaiten.

> Sopiiko kirjallinen päässälasku mielestäsi erityisen hyvin jollekin oppija-tyypille, esim. hitaasti laskevat tai matemaattisesti lahjakkaat? Perustele vastauksesi.

Useimmat vastaajat olivat sitä mieltä, että menetelmä sopii kaikille, myös hitaasti laskeville ja matemaattisesti lahjakkaille.

> *Sopii mielestäni varmaan molemmille, koska siinä voi laske itselle mielekkäällä tavalla. Tarvittaessa monen eri vaiheen kautta ja jos lasku sujuu, niin vähemmillä välivaiheilla.* Nainen10

> *Mielestäni sopii kaikille, myös hitaammille. Laskun voi jakaa niin pieniin osiin että ymmärtää. Hidasta se toki on.* Nainen12

Monet katsoivat hahmottamishäiriöisten hyötyvän menetelmästä eniten.

> *Oppilaalle, jolle lukujen hahmottaminen on vaikeaa, tällainen sopii oikein hyvin.* Nainen2

> *Jos on hahmottamisongelmia, niin lukuja on ehkä hyödyllistä pilkkoa osiin… Mutta jos päässälasku on jo muutenkin vaikeaa, suosittelisin allekkainlaskua.* Nainen9

Eräs vastaaja nosti esille eriyttämisen.

> *No ainakin opettajan on helppo eriyttää opetusta ja pyytää lahjakkaampia oppilaita laskemaan sama lasku monella eri tavalla.* Mies3

Erään vastaajan mielestä kirjallinen päässälasku sopisi hyvin huonomuistisille.

> *Ei mielestäni pitäisi kohdentaa millekään erityiselle ryhmälle, mutta erimerkiksi ns. ”huonomuistisille” ja siksi matematiikassa huonosti pärjääville (usein nimittäin laskusääntöjä opetellaan ulkoa) olisi oiva syvällisemmän ymmärryksen väline.* Nainen14

6.1.12 Vastaajien vapaita kommentteja

Lopuksi vastaajille annettiin mahdollisuus kommentoida vapaasti kirjallista päässälaskua.

> *Tekniikkana mielestäni tervetullut! Opettajien asenteita tuuletettava -> ei aina tarvitse laskea samalla tavalla.* Nainen5

> *Mieltäni askarruttaa, kuinka matematiikassa huonommin menestyvät kokisivat k. päässälaskun, koska itsekin meinasin välillä unohtaa kaikki eri tavat suorittaa laskut. Pitäisikö keskittyä pariin eri laskutapaan?* Nainen6

> *Oli hyödyllinen opettajankoulutuksessa. Itse ei näköjään vielä hallussa, mutta oppilaiden/opettamisen näkökulmasta hyvä homma.* Nainen8

Ihan hyvä näkökulma, mutta vaatii välillä monimutkaista ajattelua, tai moninaista oikeastaan. Ei sovi kaikille, varsinkaan hätäisille. Välillä ärsyttävää tehdä paljon välivaiheita. Nainen9

Huomaan, että arkena saatan laskea laskuja enemmän kirjallisen päässälaskun tyyliin, joten luulen, että se olisi luontaisempi tapa laskea. Nainen10

En osallistunut edelliselle tunnille, jossa nämä esiteltiin, joten asia oli melko uutta. Nainen11

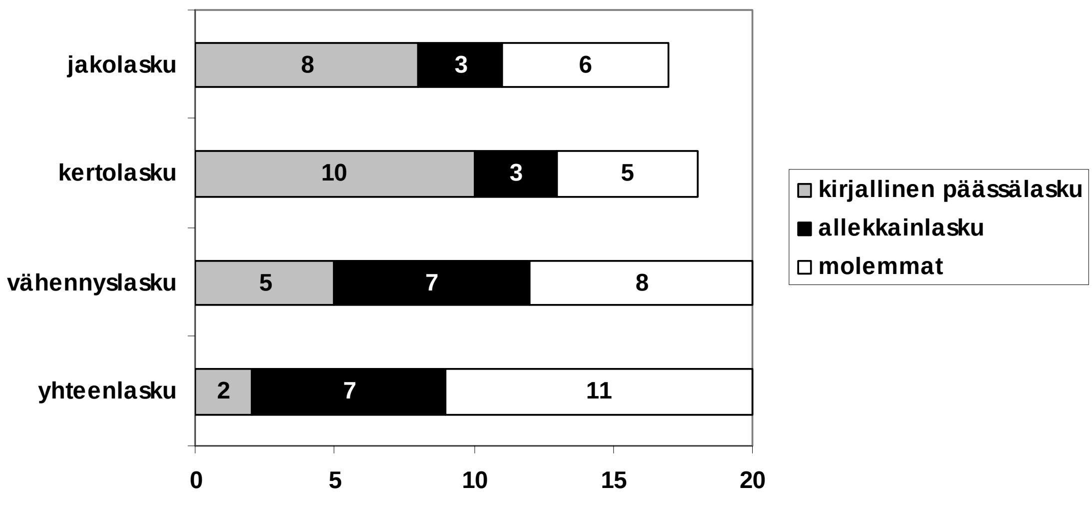
Jokaisen tulisi antaa valita omat menetelmät näistä tarjotuista kirjallisen päässälaskun menetelmistä, sillä ajattelemme niin eri tavoin. Jos liikaa tyrkytetään kaikkia erilaisia, niin vaarana on, että tästäkin laskutavasta tulee vain mekaanista suorittamista. Nainen14

Joitakin menetelmiä jäi mieleen ja tulen niitä varmasti käyttämään. Nainen17

Suurin osa vastaajien vapaista kommenteista oli positiivisia palautetta kirjallisesta päässälaskusta. Kommenteissa oli myös pohdintaa metodin toimivuudesta. Monet totesivat, että ovat niin tottuneita laskemaan allekkain, ettei uusi tapa meinaa luonnistua.

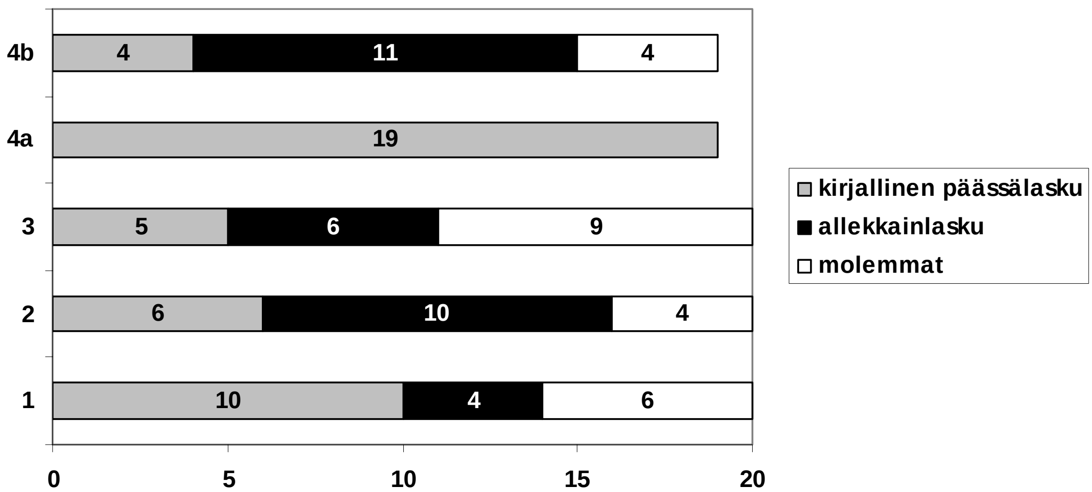
6.2 Yhteenveto tutkimuksen tuloksista

Halusin, että vastaajat laskevat kahdella kirjallisen päässälaskun tavalla ja valitsevat niistä paremman siksi, että vasta kirjallista päässälaskua jonkin aikaa käytettyään alkaa huomata millaisissa laskuissa mitäkin menetelmää kannattaa käyttää. Halusin antaa vastaajille mahdollisuuden miettiä ja käyttää luovuuttaan. Samalla kahden laskutavan käyttö myös korosti sitä, miten allekkainlaskussa se ei olisi mahdollista. Taulukoissa otettiin huomioon vain paremmaksi valittu laskutapa.



KUVIO 18. Kuviot 8-11 koottuna samaan kuvioon.

Kuviossa 18 on koottuna kaikkien neljän peruslaskutoimituksen laskutapojen kannatukset. Kirjallisen päässälaskun menetelmistä vastaajat pitivät eniten kertolaskusta ja vähiten yhteenlaskusta. Olettaisin syyksi sen, että yhteenlasku on allekkainkin helppo – ei tarvetta uudelle metodille. Kertolasku taas on ehkä allekkainlaskuista hankalin. Kirjallinen päässälasku tuo siihen enemmän havainnollisuutta. Erään vastaajan sanoin: ”kirjallisen päässälaskun menetelmä opettaa kertolaskua paremmin ja näin ollen ymmärrän paremmin kertolaskun olemusta” (Nainen6). Allekkainlasku oli suosituinta yhteen- ja vähennyslaskuissa. Täytyy kuitenkin muistaa, että erityisesti yhteenlaskuissa suurin osa vastaajista ei valinnut kumpaakaan, vaan näki molemmissa laskutavoissa hyviä puolia.



KUVIO 19. Kuviot 12-16 koottuna samaan kuvioon.

1. Kumman tavan olettaisit olevan lapselle helpompi ymmärtää?
2. Kumman tavan olettaisit olevan helpompi opettaa?
3. Kumpi merkintätapa, allekkain vai kirjallinen päässälasku, on selkeämpi?
4. Jos laskinta ei olisi saatavilla, kumpi tavoista on arkipäivän tilanteissa käytännöllisempi? Jos
   a) paperia ja kynää ei ole saatavilla.
   b) paperi ja kynä on saatavilla.

Kuviossa 19 on koottu osa avoimien kysymyksen vastauksista samaan kuvioon. Kirjallinen päässälasku sai eniten kannatusta menetelmänä, jota voi käyttää arkipäivän tilanteessa ilman apuvälineitä, mutta sitä pidettiin myös lapselle helppona ymmärtää. Eräs vastaaja mainitsi, että se on ”helppo perustella lapselle”. Kuitenkin harvempi piti sitä helpompana opettaa, mikä voi tietenkin johtua siitä, ettei vastaaja itsekään osannut sitä vielä kunnolla ja oppikirjoissa ei käytetä sitä. Vähiten kannatusta kirjallinen päässälasku sai arkipäivän tilanteessa, jossa on kynä ja paperia saatavilla. Luulen sen johtuvan siitä, että vastaajilla allekkainlasku on selkärangassa. Se myös mahtuu pieneen tilaan. Eräs vastaaja sanoi, ettei luota kirjallisen päässälaskun tuloksiin:

> *Kirjallisen päässälaskun tuloksiin en kuitenkaan luota (jostain syystä) yhtä paljon kuin allekkainlaskun tuloksiin! Tottumuskysymyskö?* Nainen1

Kahden vaiheilla olevia vastaajia oli eniten laskutapojen selkeyttä käsittelevässä kysymyksessä.

6.3 Tutkimuksen luotettavuuden tarkastelu

Minun toimintani vaikutti paljon vastaajien kuvaan kirjallisesta päässälaskusta, sillä itse opetin menetelmän ja tein harjoitusmonisteen ja kyselyn. Pyrin opettamaan kirjallista päässälaskua Rockströmin metodikirjan (2000) mukaisesti. Opetuksessa otin esille kirjallisen päässälaskun hyviä puolia ja pyysin tutkittavia tarkastelemaan menetelmää kriittisesti, sillä yksi tutkielman tavoitteista on saada menetelmän heikkouksia esille. Tehtäviksi yritin valita sekä kirjallisella päässälaskulla helppoja että vaikeita tehtäviä. Eräs vastaaja oli kuitenkin toista mieltä:

> *Laskuesimerkit oli valittu niin, että allekkainlasku oli hankalampaa lainausten vuoksi.* Nainen5

Ehtivätkö vastaajat oppia kirjallisen päässälaskun tarpeeksi hyvin? Opetusta oli kaksi oppituntia ja lisäksi noin puolen tunnin kertaus. Vastaajat saivat ottaa harjoitusmonisteen kotiin harjoittelua varten, mutta en tiedä kuinka paljon he kertasivat oppimaansa kotona. Vastauksista päätellen vastaajat olivat sisäistäneet eri laskutavat hyvin, joskin niiden käyttö oli jäykähköä. Useimmat vastaajat olivat tehneet lähes kaikki mahdolliset välivaiheet, mikä aiheuttaa sen, että laskusta tulee pitkä ja työläs. Osittain se johtunee siitä, että harjoitusmonisteen (liite 2) esimerkeissä oli liikaa välivaiheita havainnollistamista varten. Ei kirjallinen päässälasku noin lyhyen opiskelun jälkeen voikaan tulla yhtä sujuvaksi kuin allekkainlasku, jota he olivat käyttäneet yli kymmenen vuotta. Olen sitä mieltä, että vastaajat osasivat kirjallisen päässälaskun ja allekkainlaskun tarpeeksi hyvin tehdäkseen vertailua. Vertailu olisi kuitenkin sitä pätevämpi mitä enemmän vastaajat olisivat kirjallista päässälaskua päässeet harjoittelemaan.

Tutkittaville kerrottiin ennen kyselyyn vastaamista, että kyselyllä kerätään aineistoa pro gradu -tutkielmaan ja että vastaukset käsitellään nimettöminä. Opiskelijat vastasivat kyselyihin itsenäisesti. Vain yksi vastaaja ei ehtinyt tehdä kyselyä loppuun.

Kyselyn laskutehtävät osoittivat selkeästi vastaajan osaamisen. Valitettavasti monet vastaajat eivät olleet lukeneet ohjeita huolellisesti. Esimerkiksi jotkut vastaajat eivät olleet valinneet kahdesta kirjallisen päässälaskun tavasta toista tai olivat vertailleet kahta kirjallisen päässälaskun tapaa keskenään. Tarkoituksena oli laskea kahdella kirjallisen päässälaskun tavalla ja valita niistä parempi, ja verrata sitten sitä allekainlaskuun. Avoimien kysymyksien vastauksista oli joskus hankala päätellä oliko vastaaja ymmärtänyt kysymyksen oikein. Useimmiten vastaukset kuitenkin käsittelivät sitä mitä pitikin.

Olen matematiikan aineenopettajaopiskelija ja sen takia voin mielestäni suhteellisen puolueettomasti tutkia luokanopettajaopiskelijoiden käsityksiä ja mielipiteitä. On kuitenkin pohdittava pystyinkö tulkitsemaan vastauksia vastaajien tarkoittamalla tavalla, koska en ole itse luokanopettajaopiskelija.

7 POHDINTA

7.1 Kirjallisesta päässälaskusta

Tutkielmaa tehdessä alkoi ihmetyttää se, ettei kirjallisesta päässälaskusta ole tehty tieteellistä tutkimusta edes kotimaassaan Ruotsissa, vaikka sitä käytetään laajalti. Miksi Rockström itse ei alun perin tutkinut menetelmäänsä? Tai ehkä oikeammin sanottuna, miksi hän ei julkaissut tutkimuksiaan? Metodikirjassaan (2000) hän kertoo oppilaistaan, jotka olivat hyötyneet kirjallisesta päässälaskusta. Metodikirjaa ei voi kuitenkaan luokitella tieteelliseksi tutkimukseksi; se on ennemminkin oppikirja. Ruotsissa merkittävät kasvatustieteen tutkijat, kuten Hedrén, Malmer, Löwing ja Kilborn, eivät mainitse teoksissaan Rockströmiä tai kirjallista päässälaskua, vaikka käsittelevätkin samaa aihetta. Eivätkö he hyväksy kirjallista päässälaskua vai eikö siihen vain voi viitata, koska sitä ei ole tieteellisesti tutkittu?

Ruotsissa on siis siirrytty käyttämään kirjallista päässälaskua ilman sen perusteellista tutkimista etukäteen. Miten se on mahdollista? Ruotsin peruskoulun opetussuunnitelma ei mainitse kirjallista päässälaskua mutta ei allekkainlaskuakaan; opetussuunnitelmassa puhutaan vain yleisesti jonkin kirjallisen laskumenetelmän oppimisesta. Päätös kirjalliseen päässälaskuun siirtymisestä on siis täytynyt tapahtua alemmilla portailla. Opettajat opettavat yleensä valitsemansa oppikirjan mukaisesti. Onko kirjantekijöillä ja kustantajilla siis valta? Kirjallinen päässälasku pääsi suuren yleisön tietoisuuteen Rockströmin kirjoittaman Matteboken-oppikirjasarjan kautta.

7.2 Laskutapojen vertailu

Allekkainlaskun puolesta puhuu sen pitkä historia. Sillä on hyvin pärjätty tähänkin asti – onko tarvetta vaihtaa? Allekkainlaskua ei juuri käytetä alakoulun jälkeen; kuvaan astuu algebra ja laskimet. On selvää, että jonkinlainen kirjallinen laskumenetelmä kaikkien täytyy osata. Kannattaa siis valita sellainen menetelmä, josta on eniten hyötyä. Yksi allekkainlaskun puutteista on se, ettei se tue päässälaskua. Päässälaskua ihminen tarvitsee joka päivä läpi elämän.

Menetelmän valintaan vaikuttaa myös se, mitä matematiikassa pitää tärkeänä. Onko tärkeintä vastaus vai miten siihen päästään? Onko oppilaan osaaminen hyvää, jos hän osaa antaa oikean vastauksen mutta ei tiedä, miten siihen pääsi? Matematiikan hienous on sen perustelujen täsmällisyydessä. Opetussuunnitelma vaatii opettamaan matemaattista ajattelua ja se ei toteudu, jos keskitytään vain vastaukseen. Muutamista kyselyn vastauksista huokui kuitenkin oikean vastauksen korostaminen:

> *Allekkainlasku on mekaaninen ja helpommin ymmärrettävä. Siinä ei tarvitse keskittyä muuhun kuin olennaiseen eli lopputulokseen.* Nainen9

> *Allekkainlasku on mekaaninen ja helppo tapa laskea, kun taas kirjallisessa päässälaskussa joutuu ajattelemaan, yhdistelemään ja ennen kaikkea kirjoittamaan paljon välivaiheita. Tuntuu, että siinä joutuu keskittymään aivan epäolennaiseen, kun ensin pitää miettiä, mitkä luvut laitan yhteen ja mitä siirrän jne. Allekkainlasku on kätevä ja nopea tapa laskea.* Nainen9

Vastauksia kysymykseen, kumpi laskutapa on helpompi opettaa:

> *Allekkainlasku, sillä siinä ei tarvita ymmärrystä ykkösistä, kymmenistä jne. vaan pelkkä laskusäännön muistaminen riittää.* Nainen14

> *Allekkainlaskun, sillä päässälaskussa on niin paljon eri vaihtoehtoja ja se vaatii osaamista itseltäkin.* Nainen9

Täytyy kuitenkin muistaa, että näistä vastauksista ei selviä ovatko vastaajat sitä mieltä, että ymmärrystä ei tarvitsekaan olla tai että menetelmän opettamisen haastavuus olisi huono asia. He vain vastasivat kysymykseen, kumpi olisi helpompi opettaa.

Kirjallinen päässälasku lähti liikkeelle siitä, että oppilaat saivat itse kehittää omat laskualgoritminsa. Tällaisen luovuuden käyttö hukkuu, kun kirjallista päässälaskua opetetaan tekniikkakokoelmana. Lasten kykyä kehittää omat algoritminsa on tutkittu ympäri maailmaa ja tulokset ovat olleet hyviä (esim. Fielker 2007). Opettaminen omien algoritmien kautta vie kuitenkin paljon enemmän aikaa kuin valmiiden opettaminen. Kaikilta oppilailta ei välttämättä edes löydy resursseja omien algoritmien keksimiseen.

Lyhyt jakolasku on algoritmi kuten jakokulmakin, joten se ei oikein sovi muiden kirjallisen päässälaskun menetelmien joukkoon. Siinä mielessä se kuitenkin puolustaa paikkaansa, että siinä käytetään enemmän päässälaskua kuin jakokulmassa. Rockström sen kuitenkin kirjassaan esittelee, joten siksi se esiteltiin myös tässä tutkielmassa. Jakokulma ja lyhyt jakolasku ovat lähes samanlaiset. Ainoa ero laskutapojen välillä on se, että jakokulmassa tarkistuslaskut kirjoitetaan näkyviin, kun taas lyhyessä jakolaskussa ne tehdään päässä; työmuisti kuormittuu. Jakokulman puolesta puhuu myös se, että se toimii kirjainlaskuilla, toisin kuin lyhyt jakolasku. Kirjallisen päässälaskun jakolaskutapa eli osoittajan hajottaminen toimii hyvin, ja sen lisäksi voisi mielestäni opettaa jakokulman.

Kirjallisen päässälaskun menetelmillä on enemmän yhteistä algebran kanssa kuin allekkainlaskulla. Kirjallisen päässälaskun käyttö voisi edistää algebran oppimista. Jo pelkästään yhtäsuuruusmerkin oikean käytön hallintakin olisi jo suuri hyöty algebraan siirryttäessä, puhumattakaan vaihdannaisuudesta, liitännäisyydestä ja osittelulaista.

7.3 Havaintoja luokanopettajaopiskelijoiden matematiikan taidoista

Tutkimukseni eräänlaisena sivutuloksena selvisi, että osalla kyselyyn vastanneista oli selkeitä puutteita allekkainlaskun osaamisessa. Esimerkiksi 19 vastaajasta 3 ei ollut osannut laskea laskua 8·39 allekkain. Mielestäni se on aika paljon siihen nähden, että kaikki vastaajat olivat käyneet peruskoulun, lukion ja ymmärtääkseni myös luokanopettajaopintojen pakollisen matematiikankurssin; matematiikan osalta he olivat siis jo ”valmiita opettajia”. Myös jakokulma oli muutamalta vastaajalta päässyt unohtumaan, vaikka se, kuten muutkin allekkainlaskutekniikat, kerrattiin ennen kyselyn täyttämistä.

Allekkainlaskun unohtaminen kertoo siitä, ettei sitä ole koskaan täysin ymmärtänyt. Eräs vastaaja myönsikin sen. Hänen mielestään allekkainlaskussa toistetaan ”vain samoja rimpsuja, joiden merkitys jää hämärän peittoon”. Miten opettaja voi opettaa allekkainlaskua oppilailleen, jos hän ei edes itse ymmärrä, mihin se perustuu? Allekkainlasku perustuu kymmenjärjestelmään; siihen, että ykköset, kymmenet, sadat jne. laitetaan allekkain. Kymmenjärjestelmävälineillä pystyy helposti havainnollistamaan kymmenylitykset ja lainaamiset. Toivon, että luokanopettajien kouluttajat tarttuvat tähän ja varmistavat, että kaikki tulevat luokanopettajat ymmärtävät allekkainlaskun perustan.

Yllättävästi nekin vastaajat, joilla oli ongelmia allekkainlaskun kanssa, osasivat laskea laskut kirjallisella päässälaskulla. He olivat siis omaksuneet kahdessa tunnissa uuden laskutekniikan, vaikka eivät osanneet sitä, jota olivat harjoitelleet monia vuosia.

Mielestäni tämä kertoo jotain kirjallisen päässälaskun selkeydestä ja toisaalta siitä, että he varmasti ymmärtäisivät allekkainlaskun perustan, jos sen heille joku selittäisi. Yleisesti vastaajat olivat osanneet laskea kirjallisella päässälaskulla hyvin.

7.4 Tulevaisuus ja jatkotutkimusaiheita

Koska kaikki tutkimukseen osallistuneet luokanopettajaopiskelijat olivat sitä mieltä, että kirjallista päässälaskua kannattaisi jossain määrin opettaa myös Suomessa, uskon, että peruskoulun piirissäkin siitä voitaisiin kiinnostua. Useimmat kirjallisen päässälaskun menetelmistä ovat monille tuttuja päässälaskun strategioina, ja sen takia kirjallinen päässälasku tuntuu luonnolliselta tavalta laskea. Kirjallinen päässälasku tarvitsee kuitenkin tieteellistä tutkimusta tuekseen, että sitä saataisiin mukaan oppikirjoihin.

Jatkotutkimusaiheita löytyy useita, koska tutkimusaihe on uusi. Olisi mielenkiintoista kokeilla kirjallista päässälaskua alakoulun opetuksessa. Seuraako kirjallisen päässälaskun käytöstä hyvä lukukäsitys, kuten Rockström väittää? Jos löydettäisiin hyvä mittari matemaattiselle ajattelulle, myös sen kehitystä olisi mielenkiintoista tutkia. Tutkia voisi myös parantaako kirjallinen päässälasku päässälaskutaitoa niin kuin voisi olettaa. Aineenopettajana minua kiinnostaisi tutkia helpottaisiko kirjallisen päässälaskun käyttö alakoulussa algebran oppimista yläkoulussa.

8 LÄHTEET

Adey, P. 1992. Thinking science. Teoksessa O. Björkqvist (toim.) Forskning och utvecklingsarbete i de matematiska ämnenas didaktik. Rapporterna från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi nr 2. Vaasa: Maxi Copy.

Andersson, L. 2005. Skriftlig huvudräkning – En studie av barns taluppfattning. Växjö University: Rapporter från Matematiska och systemtekniska institutionen. Opinnäytetyö. Tulostettu 31.7.2008 http://vxu.se/msi/utb/exarb/2005/05137.pdf

Boyer, C. 1968. Tieteiden kuningatar – matematiikan historia, osat I ja II. Suom. K. Pietiläinen. Juva: WSOY:n graafiset laitokset.

Eliasson, S & Norberg, P. 2002. Skriftlig huvudräkning – En metod att utveckla elevernas tankestrategier i huvudräkning. Luleå Tekniska Universitet. Pedagogutbildningarna. Opinnäytetyö. Tulostettu 7.7.2008 http://epubl.ltu.se/1402-1595/2002/102/LTU-PED-EX-02102-SE.pdf

Falkner, K., Levi, L. & Carpenter, T. 1999. Children's understanding of equality: foundation for algebra. Teaching children mathematics 6 (4), 232-237.

Fielker, D. 2007. Addition and subtraction, and algorithms in general. Mathematics Teaching Incorporating Micromath 204, 3-5.

Haapasalo, L. & Kupari, P. 1992. Matematiikan opetuksen kehittämislinjat on kiinnitetty – mitkä ne ovat ja mitä niistä seuraa? Teoksessa O. Björkqvist (toim.) Forskning och utvecklingsarbete i de matematiska ämnenas didaktik. Rapporterna från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi nr 2. Vaasa: Maxi Copy.

Haylock, D. 2006. Mathematics explained for primary teachers. 3. painos. Oxford: The Alden Press.

Hedrén, R. 2001. Räkning i skolan i dag och i morgon – Vilka kunskaper och färdigheter är viktiga för eleverna, när många beräkningar kan göras med miniräknare eller dator? Teoksessa Grevholm, B. (toim.) Matematikdidaktik – ett nordisk perspektiv. Malmö: Studentlitteratur.

Hihnala, K. 2005. Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden laitos. Jyväskylä Studies in Education , Psychology and Social Research 278. Väitöskirja. Tulostettu 19.8.2008 http://urn.fi/URN:ISBN:951-39-2279-0

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 1997. Tutki ja kirjoita. 13.-14., osin uudistettu painos. Keuruu: Otavan Kirjapaino Oy.

Holmberg, P. 2001. Skriftlig huvudräkning – en presentation av alternativ undervisningsmetod i matematik. Vaasa: Åbo Akademi, Institutionen för lärarutbildning. Opinnäytetyö.

Ikäheimo, H. 2005. Jakolaskuun ymmärrystä. Opperi. Tulostettu 31.7.2008 http://www.opperi.fi/02_opetusvinkkeja/2210_jakolasku.html

Ikäheimo, H. & Risku A.-M. 2004. Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa P. Räsänen, Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Karlsson, S. & Niemelä, A. 2003. Tillämpning av metoden Skriftlig huvudräkning i en klassmiljö. Vaasa: Åbo Akademi, Institutionen för lärarutbildning. Opinnäytetyö.

Knuth, E., Alibali, M., Hattikudur, S., McNeil, N & Stephens, A. 2008. The importance of equal sign understanding in the middle grades. Mathematics teaching in the middle school 13 (9), 514-519.

Leino, J. 2004. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Löwing, M. 2006. Matematikundervisningens dilemman – Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet. Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. & Kilborn, W. 2003. Huvudräkning – En inkörsport till matematiken. Lund: Studentlitteratur.

Malmer, G. 1999/2006. Bra matematik för alla – Nödvändigt för elever med inlärningssvårigheter. Lund: Studentlitteratur.

Matteboken-esite. Bonnier Utbildning. Tulostettu 30.7.2008 http://www.bonnierutbildning.se/butbweb/Products/productpdf.aspx?sectionIdR=21392&SectionId=28394

Mikkonen, J. 2008. Matikan rappio. Pohjalainen 25.5.2008, Sunnuntaisuomalainen, 19.

Metsänkylä, T. & Näätänen, M. 2003. Algebra. Helsinki: Limes ry:n graafiset laitokset

Oksuz, C. 2007. Children's Understanding of Equality and the Equal Symbol. International Journal for Mathematics Teaching and Learning. Tulostettu 5.10.2007 http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/oksuz.pdf

Opetushallitus. 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Tulostettu 27.5.2008 http://www.oph.fi/ops/perusopetus/pops_web.pdf

Paulsson, K-A. 1985. Hur räknar du – människa? Stockholm: Högskolan för lärarutbildning.

Rissanen, R. Fenomenografia. KvaliMOTV. Tulostettu 31.7.2008 http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L5_1.html

Rockström, B. 2000. Skriftlig huvudräkning – metodbok. 5. painos. Kungälv: Bonnier Utbildning.

Segerström, C. & Unsal, N. 2005. De fyra räknesätten – förankrade hos eleverna i årskurs 9? Växjö University: Rapporter från Matematiska och systemtekniska institutionen. Opinnäytetyö. Tulostettu 31.7.2008 http://www.diva-portal.org/diva/getDocument?urn_nbn_se_vxu_diva-505-2__fulltext.pdf

Skolverket. 2002. Grundskolans kursplaner och betygskriterier 2000. Västerås: Edita Västra Aros.

Tímea, D. 2006. Varför räknar du just så? En studie kring elevers läxhjälp när föräldrar inte räknar som de. Växjö University: Rapporter från Matematiska och systemtekniska institutionen. Opinnäytetyö. Tulostettu 7.7.2008 http://www.diva-portal.org/diva/getDocument?urn_nbn_se_vxu_diva-665-2__fulltext.pdf

Tynjälä, P. 1999. Oppiminen tiedon rakentamisena – Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. 1.-4. painos. Tampere: Tammer-Paino Oy.

Yrjönsuuri, R. 2007. Matematiikka mieluisaksi. Psykologinen lähestymistapa opetukseen ja opiskeluun sekä matemaattisen ajattelun osaamisen arviointiin. Oppilo. Anjalankoski: Solver palvelut Oy.

Viiri, J. 2006. Mallit ja representaatiot – Luonnontieteen opettamisesta ja oppimisesta. Dimensio 3/2006.

9 LIITTEET

Liite 1: Kysely

Kysely Pro Gradu – tutkielmaan 19.9.2007

Mari Mattila
maanmatt@cc.jyu.fi

Kysely kirjallisesta päässälaskusta

Tässä osiossa pyydän sinua arvioimaan ja vertailemaan kirjallista päässälaskua ja allekkainlaskua. Kertaa ennen kyselyn täyttämistä allekkainlaskun ja kirjallisen päässälaskun säännöt, jos ne ovat päässeet unohtumaan. Et saa käyttää mitään materiaalia tai laskinta apunasi täyttäessäsi kyselyä. Täytä kuulakärkikynällä tai vastaavalla (ei lyijykynällä!). Jos teet virheen, viivaa se yli. Älä suttaa virhettä piiloon!

Taustatiedot:

Sukupuoleni: ☐ nainen ☐ mies

Ikäni: ____ vuotta

Kävin ala-asteen/kansakoulun vuosina ____-____.

Koulutukseni: ☐ ammattikoulu ☐ lukio ☐ korkeakoulu

Lukiossa suoritin matematiikan

☐ lyhyen oppimäärän. ☐ pitkän oppimäärän.

Koin matematiikan ala-asteella/kansakoulussa

☐ lähes aina hankalaksi. ☐ usein hankalaksi. ☐ en osaa sanoa

☐ lähes aina helpoksi. ☐ usein helpoksi.

Koen matematiikan nykyään

☐ lähes aina hankalaksi. ☐ usein hankalaksi. ☐ en osaa sanoa
☐ lähes aina helpoksi. ☐ usein helpoksi.

Yhteenlasku:

Laske sama lasku allekkain ja **kahdella** kirjallisen päässälaskun tavalla. Ympyröi sen jälkeen mielestäsi parempi käyttämistäsi kirjallisen päässälaskun tavoista. Kirjallisessa päässälaskussa kirjoita vähintään yksi välivaihe.

1. 57 + 66

2. 1254 + 6847

Vertaa allekkainlaskua ja paremmaksi valitsemaasi kirjallisen päässälaskun tapaa. Kumpi tavoista on näissä tapauksissa mielestäsi parempi? Miksi?

Vähennyslasku:

Laske sama lasku allekkain ja **kahdella** kirjallisen päässälaskun tavalla. Ympyröi sen jälkeen mielestäsi parempi käyttämistäsi kirjallisen päässälaskun tavoista. Kirjallisessa päässälaskussa kirjoita vähintään yksi välivaihe.

1. Heikillä on kahdenlaisia kyniä. Hänellä on puuvärejä 25 kpl ja vahavärejä loput. Yhteensä Heikillä on 53 kynää. Kuinka monta vahaväriä Heikillä on?

2. 5732 – 1998

Vertaa allekkainlaskua ja paremmaksi valitsemaasi kirjallisen päässälaskun tapaa. Kumpi tavoista on näissä tapauksissa mielestäsi parempi? Miksi?

Kertolasku:

Laske sama lasku allekkain ja **kahdella** kirjallisen päässälaskun tavalla. Ympyröi sen jälkeen mielestäsi parempi käyttämistäsi kirjallisen päässälaskun tavoista. Kirjallisessa päässälaskussa kirjoita vähintään yksi välivaihe.

1. 8×39

2. 25×16

Vertaa allekkainlaskua ja paremmaksi valitsemaasi kirjallisen päässälaskun tapaa. Kumpi tavoista on näissä tapauksissa mielestäsi parempi? Miksi?

Jakolasku:

Laske sama lasku allekkain ja **kahdella** kirjallisen päässälaskun tavalla. Ympyröi sen jälkeen mielestäsi parempi käyttämistäsi kirjallisen päässälaskun tavoista. Kirjallisessa päässälaskussa kirjoita vähintään yksi välivaihe.

1. 516 : 3

2. 606 : 15

Vertaa allekkainlaskua ja paremmaksi valitsemaasi kirjallisen päässälaskun tapaa. Kumpi tavoista on näissä tapauksissa mielestäsi parempi? Miksi?

____

____

____

____

____

____

____

Yleisiä kysymyksiä:

Käytit edellä olevissa tehtävissä allekkainlaskua ja kirjallista päässälaskua. Kumman tavan olettaisit olevan lapselle helpompi ymmärtää? Miksi?

Kumman tavan, allekkainlasku vai kirjallinen päässälasku, olettaisit olevan helpompi opettaa? Perustele vastauksesi.

Kumpi merkintätapa, allekkain vai kirjallinen päässälasku, on selkeämpi? Miksi? Miten tavat eroavat?

Jos laskinta ei olisi saatavilla, kumpi tavoista on arkipäivän tilanteissa käytännöllisempi? Pohdi erikseen tilanteita, joissa paperia ja kynä on saatavilla ja joissa ei ole.

Olettaisitko, että kirjallisella päässälaskulla voisi olla tulevaisuutta Suomen kouluissa? Perustele vastauksesi.

Sopiiko kirjallinen päässälasku mielestäsi erityisen hyvin jollekin oppijatyypille, esim. hitaasti laskevat tai matemaattisesti lahjakkaat? Perustele vastauksesi.

Muita kommentteja kirjallisesta päässälaskusta:

Kiitos vastauksistasi!

Liite 2: Harjoitusmateriaali

Mari Mattila
syksy 2007
Jyväskylä

Kirjallinen päässälasku -metodin esittely

Sisältö

1. Historiaa

Kirjallisen päässälaskun metodin kehitti ruotsalainen Birgitta Rockström. Hän ryhtyi kehittelemään uutta metodia ala-asteen matematiikan opetukseen 1980-luvun alussa, sillä hän koki, ettei sen aikainen matematiikan opetus täyttänyt niitä vaatimuksia, jotka opetussuunnitelmassa oli. Silloinen matematiikan opetus Ruotsissa koostui opettajan luennosta ja sen jälkeen oppilaiden hiljaisesta itsenäisestä työskentelystä. Opetus käsitteli suurelta osin eri algoritmien, esimerkiksi allekkain vähennyslaskun, käytön opettelua. Rockström huomasi, että opetus ei edistänyt matematiikan ymmärrystä eikä varsinkaan herättänyt oppilaiden innostusta matematiikkaa kohtaan.

Rockström päätti siirtää opetuksensa painopisteen algoritmien opettelemisesta päässälaskuun. Vuosien saatossa ja oppilaidensa avulla hän kehitti tavan kirjoittaa päässälaskuajatukset matemaattisesti oikein. Kirjassaan Skriftlig huvudräkning – metodbok [1] Rockström esittelee vaihtoehtoiset metodit kaikkiin neljään laskutoimitukseen. Toinen epäkohta, jonka hän halusi korjata, oli oppilaiden kyvyttömyys pukea matemaattisia ajatuksiaan sanoiksi. Hän otti tavaksi ratkaista tehtäviä myös yhdessä luokan kanssa niin, että jokainen sai esitellä oman ratkaisunsa ja siten saada keskustelua aikaan.

Nykyään kirjallinen päässälasku on syrjäyttänyt Ruotsissa allekkain laskemisen ala-asteen opetuksessa lähes kokonaan. Sekä Rockströmiltä että muilta kirjailijoita on ilmestynyt oppikirjoja, jotka opettavat matematiikkaa alusta lähtien kyseisellä metodilla. Ilmeisesti allekkain laskemista esitellään jossain vaiheessa ikään kuin ”kansanperintönä”.

Kyseessähän ei suinkaan ole mikään ainutlaatuinen metodi. Ympäri maailmaa, esimerkiksi Isossa-Britanniassa (Haylock [2]) ja Yhdysvalloissa (viittauksia artikkelissa [3]), on samantapaisia menetelmiä, sillä samoihin matematiikan opetuksen epäkohtiin on törmätty muuallakin. Tutkin gradussani kuitenkin tätä Ruotsin metodia, sillä siihen törmäsin ensiksi ja siitä on kirjallisuutta saatavilla.

2. Esitiedot

Alettaessa opettaa kirjallista päässälaskua täytyy ensin pitää huolta siitä, että oppilaat hallitsevat muutamat tärkeät esitiedot ja -taidot. Yksi niistä on yhtäsuuruusmerkki. Oppilaan on ymmärrettävä miksi ja miten yhtäsuuruusmerkkiä käytetään. Rockström on kirjassaan esitellyt muutamia harjoituksia, joilla tätä ymmärrystä voi syventää ja harjoitella.

Toinen tärkeä asia kirjallisen päässälaskun pohjalla on paikkajärjestelmä. Numeron arvohan määräytyy sen mukaan, missä kohdassa lukua se sijaitsee. Osatakseen laskea lukuja yhteen oppilaan on ensin osattava hajottaa luku lukuyksiköihin, esimerkiksi 279 on 2 sataa, 7 kymmentä ja 9 eli $279 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 9 = 200 + 70 + 9$.

Kolmanneksi oppilaalla täytyy olla riittävä lukukäsitys. Se tarkoittaa käsitystä luvun arvosta ja ilmenee mm. kykynä laskea eteen- ja taaksepäin annetusta luvusta. Neljäs hallittava asia on yhteenlasku- ja kertotaulut. Tarkoitus olisi, että ne harjoiteltaisiin niin perinpohjaisesti, että ne siirtyisivät pitkäkestoiseen muistiin. Opettajan täytyy kuitenkin pitää huolta, että oppilas ymmärtää laskutoimituksen ja osaa laskea kyseiset laskut apuvälineillä ja ilman ennen kuin niitä aletaan painaa muistiin.

3. Yhteenlasku

3.1. Menetelmä

Perusajatus yhteenlaskussa on se, että hajotetaan luku ykkösiin, kymmeniin, satoihin jne. ja lasketaan ne ensin erikseen yhteen aloittamalla suurimmasta yksiköstä. Esimerkiksi 367 + 232 = 300 + 60 + 7 + 200 + 30 + 2 = 500 + 90 + 9 = 599.

Ensimmäisen tai molemmat välivaiheet voi jättää pois, kun taidot ovat kehittyneet. Välivaiheita on kuitenkin hyvä käyttää, sillä ne näyttävät ajatuksenkulun. Toinen tapa laskea yhteenlaskua on siirtää sopiva määrä ykkösiä toisesta luvusta toiseen. Esimerkiksi 56 + 99 = 55 + 100 = 155. Tämä tapa on erityisen hyödyllinen silloin, kun toinen luku on lähellä jotain ”pyöreää” lukua.

Kolmas tapa on järjestyksen vaihtaminen. Ensin kannattaa etsiä sellaiset lukuparit, jotka on helppo laskea yhteen.

36 + 47 + 64 + 33 = (36 + 64) + (47 + 33) = 100 + 80 = 180

3.2. Laske yksiköt kerrallaan. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

56 + 42 =. . . . . 127 + 52 =. . . . .
56 + 37 =. . . . . 127 + 77 =. . . . .
75 + 24 =. . . . . 144 + 49 =. . . . .
75 + 97 =. . . . . 144 + 34 =. . . . .
35 + 57 =. . . . . 411 + 328 =. . . . .

3.3. Siirrä sopiva määrä ykkösiä. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

75 + 99 =. . . . .
127 + 98 =. . . . .
367 + 28 =. . . . .
699 + 247 =. . . . .
2535 + 3997=. . . . .

3.4. Vaihda ensin järjestystä. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

23 + 54 + 36 + 47 =. . . . .
79 + 47 + 11 + 35 =. . . . .

3.5. Samat keinot pätevät desimaaliluvuillakin. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

3,4 + 5,2 =. . . . .
19,7 + 17,8 =. . . . .
23,4 + 20,5 =. . . . .
406,7 + 372,1 =. . . . .
268,4 + 432,9 =. . . . .

4. Vähennyslasku

4.1. Menetelmä

Vähennyslaskussa on sama perusajatus kuin yhteenlaskussakin – lukuyksiköt eli ykköset, kymmenet, sadat jne. vähennetään keskenään. Esimerkiksi

35 - 12 = 30 - 10 + 5 - 2 = 20 + 3 = 23.

Toinen tapa vähentää on lisätä molempiin lukuihin sama luku. Näin saa tehdä, sillä erotushan tarkoittaa lukujen etäisyyttä lukusuoralla. Samoin voi molemmista luvuista vähentää saman luvun.

93 - 48 = 95 - 50 = 45 (tässä molempiin lukuihin on lisätty 2)

Kolmas tapa eroaa eniten siitä, mihin olemme tottuneet. Siinä täytetään lukujen välinen etäisyys. Tämä tapa toimii erityisen hyvin, kun vähennettävät luvut ovat lähellä toisiaan. Aloitetaan vähentäjästä lähdetään kulkemaan kohti vähennettävää. Lasketaan ensin etäisyys lähimpään _pyöreään_ lukuun. Sen jälkeen on yleensä jo helposti nähtävillä, kuinka paljon on vielä jäljellä vähennettävään. Esimerkiksi

612 - 595 = 5 + 12 = 17

4.2. Laske yksiköt kerrallaan. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

87 - 32 =.	93 - 48 =. . . . .
45 - 23 =.	76 - 35 =. . . . .
84 - 63 =.	584 - 287 =. . . . .
348 - 123 =.	144 - 56 =. . . . .
75 - 57 =.	411 - 328 =. . . . .

4.3. Lisää (tai vähennä) sama luku. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

67 - 28 =. . . . .
89 - 25 =. . . . .
947 - 399 =. . . . .
683 - 102 =. . . . .
423 - 199 =. . . . .

4.4. Täytä etäisyys. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

54 - 46 =. . . . .
103 - 89 =. . . . .
507 - 498 =. . . . .
938 - 895 =. . . . .
387 - 363 =. . . . .

5. Kertolasku

5.1. Menetelmä.

Kertolaskun opettaminen kannattaa aloittaa sillä, että tutkii kertolaskua toistettuna yhteenlaskuna: $2 \cdot 37 = 37 + 37 = 30 + 30 + 7 + 7 = 60 + 14 = 74$

Siitä onkin helppo siirtyä käyttämään osittelulakia[1] eli jokainen lukuyksikkö kerrotaan kerrallaan.

$2 \cdot 37 = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 7 = 60 + 14 = 74$
$14 \cdot 49 = 10 \cdot 49 + 4 \cdot 49 = 490 + 4 \cdot 40 + 4 \cdot 9 = 490 + 160 + 36 = 686$

Toinen tapa laskea kertolaskua on jakaa toinen luku kahteen tekijäänsä ja kertoa sitten luvut siinä järjestyksessä kuin se on kulloinkin on kätevintä.

$4 \cdot 350 = 2 \cdot 2 \cdot 350 = 2 \cdot 700 = 1400$
$14 \cdot 49 = 7 \cdot 2 \cdot 49 = 7 \cdot 98 = 7 \cdot 100 - 7 \cdot 2 = 700 - 14 = 686$

Yllä olevan esimerkin loppuosassa on jo käytetty kolmatta tapaa, eli lähintä ”pyöreää” lukua. Otetaan siis avuksi vähennyslasku.

$14 \cdot 49 = 14 \cdot 50 - 14 \cdot 1 = 7 \cdot 100 - 14 = 686$

5.2. Laske yksiköt kerrallaan. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

$3 \cdot 32$ =. . . . . $13 \cdot 28$ =. . . . .
$4 \cdot 23$ =. . . . . $26 \cdot 35$ =. . . . .
$6 \cdot 63$ =. . . . . $54 \cdot 27$ =. . . . .
$3 \cdot 123$ =. . . . . $22 \cdot 46$ =. . . . .
$5 \cdot 257$ =. . . . . $11 \cdot 328$ =. . . . .

5.3. Jaa ensin toinen luku kahteen tekijäänsä. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

$5 \cdot 624$ =. . . . .
$12 \cdot 25$ =. . . . .
$6 \cdot 34$ =. . . . .
$7 \cdot 28$ =. . . . .
$16 \cdot 31$ =. . . . .

5.4. Käytä apuna lähintä ”pyöreää” lukua. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

$7 \cdot 29$ =. . . . .
$4 \cdot 19$ =. . . . .
$6 \cdot 38$ =. . . . .
$3 \cdot 129$ =. . . . .
$5 \cdot 298$ =. . . . .

[1] Lapsilta ei vaadita laskulakien nimitysten osaamista.

6. Jakolasku

6.1. Menetelmä.

Ennen jakamaan lähtemistä kannattaa tarkastella, voiko laskutoimitusta supistaa tai laventaa niin, että nimittäjä muuttuu helpommaksi. Esimerkiksi

140/35 = 20/5 = 4 (tässä supistettu luvulla 7)

Erityisesti niin kannattaa tehdä nimittäjän ollessa desimaaliluku.

14/3,5 = 28/7 = 4 (tässä lavennettu luvulla 2)

Jakolaskussa idea on hajottaa osoittaja helpompiin palasiin yhteen- tai vähennyslaskun avulla.

81/3 = (60 + 21)/3 = 60/3 + 21/3 = 20 + 7 = 27

81/3 = (90 – 9)/3 = 90/3 – 9/3 = 30 – 3 = 27

6.2. Aloita supistamalla tai laventamalla. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

150/25 = ...
180/15 = ...
90/18 = ...
27/4,5 = ...
12/0,25 = ...

6.3. Hajota osoittaja yhteen- tai vähennyslaskun avulla. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

48/3 = ...
140/5 = ...
92/4 = ...
133/7 = ...
96/6 = ...

Kuvassa 1 on esitetty jakolaskutapa ”Lyhyt jakolasku”, jota voi käyttää vaativampiin jakolaskuihin. 7 menee kahteentoista kerran, jää yli 5. Kirjoitetaan 5 muistinumeroksi kolmosen vasempaan ylänurkkaan. 7 menee 53 seitsemän kertaa, jää 4. 7 menee 42 kuusi kertaa. Vastaukseksi saadaan 176.

$$\frac{12\,{}^{5}3\,{}^{4}2}{7} = 176$$

Kuva 1. Lyhyt jakolasku

6.4. Käytä ”lyhyttä jakolaskua”. Kirjoita ainakin yksi välivaihe.

304/8 = ...
520/5 = ...
828/4 = ...
3012/4 = ...
49/3,5 = ...

[Liitteen 2] Viitteet

[1] Birgitta Rockström, Skriftlig huvudräkning – metodbok. Bonnier Utbildning, Kungälv 2006.

[2] Derek Haylock, Mathematics explained for primary teachers, 3rd edition. The Alden Press, Oxford 2006.

[3] David C. Geary, Mary K. Hoard, Jennifer Byrd-Craven and M. Catherine DeSoto, Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. Journal of Experimental Child Psychology,Elsevier 2004.