ARITMEETTIS-GEOMETRIS-HARMONINEN KESKIARVOEPÄYHTÄLÖ

Markus Hannula

Matematiikan Pro Gradu-tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2008

Sisältö

ARITMEETTIS-GEOMETRIS-HARMONINEN KESKIARVOEPÄYHTÄLÖ

1. Johdanto

Tässä pro gradu-tutkielmassa perehdytään kolmeen keskiarvoon, aritmeettiseen, geometriseen ja harmoniseen. Jonkinlaisen kuvan näiden keskiarvojen historiallisuudesta antanee niistä joskus käytetty yhteisnimitys, pythagoralaiset keskiarvot. Näiden keskiarvojen välillä vallitsee epäyhtälö, jonka merkitystä kaikkeen epäyhtälöoppiin ja tutkimukseen ei voida väheksyä ja usein tätä epäyhtälöä pidetäänkin tämän aihepiirin kivijalkana. Kyseinen epäyhtälö ja erityisesti sen todistaminen on kiehtonut matemaatikkoja jo vuosisatoja, toisaalta epäyhtälön merkittävyyden ja toisaalta sen näennäisen helppouden takia. Kahden termin tilanteessa epäyhtälö lienee tunnettu jo antiikin ajoista, mutta yleinen, painotettujen keskiarvojen tulos n:lle termille näyttäisi ilmestyneen ensimmäisen kerran vasta 1800-luvulla. Pääpaino tutkielmassa onkin tämän epäyhtälön hyvinkin erilaisten todistuksien läpikäynti. Todistuksissa pääpaino tulee olemaan yleisissä n:n termin tapauksissa, joita esitetään 12 kappaletta. Todistuksia näytetään myös helpoissa kahden termin tilanteissa, sillä näitä kahden termin tapauksia voidaan havainnollistaa mielenkiintoisilla geometrisillä argumenteilla ja toisaalta ne toimivat sopivina väliaskelmina monimutkaisimmille todistuksille vrt. esim. induktio.

Ennen todistuksiin siirtymistä esitellään kyseisten kolmen keskiarvon määritelmät ja käydään lyhyesti läpi millaisissa tilanteissa kukin keskiarvoista kuvaa keskimääräisyyttä parhaiten tai pikemminkin oikein. Tutkielman keskiosa keskittyy pääaiheeseen eli aritmeettis-geometris-harmonisen keskiarvoepäyhtälön todistuksiin. Todistuksia esitellään lukuisia ja toisiinsa nähden hyvinkin erilaisia matemaattisia työkaluja hyväksikäyttäviä. Todistusten jälkeen näytetään runsaasti esimerkkejä, joissa tietoa tämän epäyhtälön olemassaolosta voidaa soveltaa ja käyttää hyväksi. Kahdessa viimeisessä kappaleessa tutustutaan (näihinkin) keskiarvoihin liittyviin yleistyksiin ja osoitetaan että aritmeettis-geometris-harmoninen keskiarvoepäyhtälö on itseasiassa erikoistapaus yleisemmästä potenssikeskiarvoepäyhtälöstä.

Todistuksissa käytetään apuna erilaisia matemaattisia tuloksia. Osa tuloksista todistetaan tämän työn puitteissa niiden esiintyessä ensimmäisen kerran, jäljempänä niihin luonnollisesti vain viitataan. Apuna käytetään myös tuloksia joita ei tässä työssä todisteta, tällöin viitataan kirjallisuuteen josta todistus löytyy. Pääasiallisena lähdeteoksena tässä tutkielmassa käytetään erittäin kattavaa P.S Bullenin kirjaa *Handbook of Means and Their Inequalities* [2, s. 60-190], myös tutkielmassa esiintyvät kuvat ovat peräisin tästä lähdeteoksesta. Neljännessä kappaleessa tärkeänä lähdeteoksena käytetään Hermanin, Kuceran ja Simsan kirjaa *Equations and Inequalities* [5, s. 151-171].

2. Määritelmiä

2.1. **Aritmettinen keskiarvo.** Aivan ensimmäisenä on syytä mainita että aritmeettinen keskiarvo on keskiarvoista tunnetuin ja yksinkertaisin. Suurimmalle osalle ihmisiä tämä on ainoa tapa määrittää keskimääräisyyksiä. Kun kansankielellä puhutaan keskiarvosta tarkoitettaneen lähes poikkeuksetta aritmeettista keskiarvoa.

Määritelmä 2.1. Lukujen $a_1, a_2, ..., a_n$ aritmeettinen keskiarvo määritellään

$$\mathcal{A}(a_1, \cdots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Esimerkki 2.2. Olkoon annettu positiiviset luvut a ja b, $a < b$ ja lisäksi on jokin luku x siten että $a \leq x \leq b$. Jos yritetään arvata lukua x kyseiseltä väliltä, niin miten arvaus on suoritettava, että virhe olisi mahdollisimman pieni?

Ratkaisu.
Olkoon arvaus y, tällöin virhe olisi $\alpha = |y - x|$. Klassisen Tsebysevin teoreeman mukaan y tulee valita siten että se on yhtä etäällä kummastakin päätepisteestä eli $|y - a| = |y - b|$, josta ratkaisemalla saadaan $y = \frac{a+b}{2} = \mathcal{A}(a, b)$.

Usein keskiarvoja joudutaan laskemaan tilanteissa, joissa sama luku toistuu useaan kertaan tai jostain muusta syystä lukuja on syytä painottaa eri tavoin. Lukujen erilaiseen painotukseen voi olla syynä esimerkiksi lukujen ilmenemisen erilainen todennäköisyys. Tällöin on kätevää käyttää painotettua keskiarvoa.

Määritelmä 2.3. Kun luku a_1 saa positiivisen painon w_1, luku a_2 painon w_2 jne., niin tällöin painotettu aritmeettinen keskiarvo määritellään

$$\mathcal{A}_w(a_1 w_1, \cdots, a_n w_n) = \frac{a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n}{w_1 + \cdots + w_n}.$$

Huomautus 2.4. Helposti nähdään että jos $w_1 = \cdots = w_n = 1$, niin tällöin kyseessä on normaali aritmeettinen keskiarvo.

Esimerkki 2.5. Opettaja haluaa laskea 22 oppilaan luokkansa kokeen keskiarvon. Tyypillisesti usealla oppilaalla saattaa olla sama arvosana, tällöin opettaja tehtävää helpottaakseen käyttää painotettua aritmeettista keskiarvoa.
Koetulokset olivat seuraavanlaiset: 1kpl 10; 3kpl 9; 2kpl $8,5$; 5kpl 8; 5kpl $7,5$; 1kpl 7; 3kpl 6 ja 2kpl 5. Luokan kokeiden keskiarvoksi saadaan siis,

$$\mathcal{A}_w = \frac{1 \cdot 10 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8,5 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 7,5 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5}{1 + 3 + 2 + 5 + 5 + 1 + 3 + 2} \approx 7,57.$$

2.2. **Geometrinen keskiarvo.** Seuraavaksi esittelyvuorossa on geometrinen keskiarvo, josta jossain kirjallisuudessa näkee käytettävän myös termiä keskiverto.

Määritelmä 2.6. Ei-negatiivisten lukujen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ geometrinen keskiarvo määritellään

$$\mathcal{G}(a_1, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Lasketaan seuraavaksi tyypillinen ja helppo korkolaskuesimerkki tilanteesta jossa geometrinen keskiarvo kuvaa keskimääräisyyttä oikein.

Esimerkki 2.7. Pankkitilille maksettiin korkoa ensimmäisenä vuonna 1%, toisena vuonna 3% ja kolmantena vuonna 5%. Mikä oli keskimääräinen vuotuinen korkoprosentti?

Ratkaisu.
Sovelletaan prosenttikertoimia geometrisen keskiarvon yhtälöön eli ensimmäisen vuoden jälkeen pääoma on tullut $1,01$-kertaiseksi jne.
$\mathcal{G} = \sqrt[3]{1,01 \cdot 1,03 \cdot 1,05} \approx 1,02987$ joten keskimääräinen korkoprosentti oli siis n. $2,987$ eikä tasan 3, mikä olisi ollut aritmeettinen keskiarvo.

Kyseinen tehtävä on helppo tarkistaa. Pääoma kasvaa siis kolmessa vuodessa $1,01 \cdot 1,03 \cdot 1,05 \approx 1,0923$-kertaiseksi. Ja koska $1,03^3 \approx 1,0927$ ja $1,02987^3 \approx 1,0923$, niin havaitaan aritmeettisen keskiarvon antavan väärän ja yllä määritelty geometrinen keskiarvo puolestaan oikean ratkaisun kyseisen kaltaiseen ongelmaan.

Samoin kuin aritmeettisen keskiarvon kohdalla voi geometrisen keskiarvon yhteydessä sama luku esiintyä useaan otteeseen tai jostain muusta syystä luvuille halutaan antaa erilaisia painotuksia.

Määritelmä 2.8. Painotettu geometrinen keskiarvo määritellään yhtälönä,

$$\mathcal{G}_w(a_1w_1, \cdots, a_nw_n) = (a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1+\cdots+w_n}}.$$

2.3. **Harmoninen keskiarvo.** Viimeisenä esittelyvuorossa on harmoninen keskiarvo.

Johdatteleva ongelma: Ajat autolla ensin 100 km nopeudella 120 km/h ja toiset 100 km nopeudella 80 km/h. Mikä on keskinopeutesi?

Olen esittänyt tämän kysymyksen monille, loogiseen ajatteluun kykeneville, tutuilleni täysin yllättävissä tilanteissa ja pyytänyt heitä vastaamaan intuitionsa pohjalta. Kaikkien intuitioveikkaukset olivat 100 km/h. Kuvaavin oli ehkäpä diplomi-insinööriystäväni toteamus, ettei se sitten varmaankaan ole 100 km/h, kun sitä vartavasten kysyt.

Kaikki ystäväni siis kuvittelivat keskinopeuden olevan aritmeettinen keskiarvo, jota se ei suinkaan ole. Ratkaisun kysytynkaltaiseen tilanteeseen antaa harmoninen keskiarvo.

Määritelmä 2.9. Positiivisten lukujen $a_1, \dots, a_n$ harmoninen keskiarvo määritellään yhtälönä

$$\mathcal{H}(a_1, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Esimerkki 2.10. Yllä kuvatun keskinopeusongelman ratkaisu on siis nopeuksien harmoninen keskiarvo.

$$\mathcal{H} = \frac{2}{\frac{1}{120\,km/h} + \frac{1}{80\,km/h}} = 96\,km/h$$

Esimerkissä 2.2 tutkittiin tilannetta missä virhe haluttiin minimoida. Nyt todennäköisen virheen sijaan halutaankin minimoida suhteellinen virhe.

Esimerkki 2.11. Olkoon tilanne muuten samanlainen kuten esimerkissä 2.2 mutta nyt lukua x yritetään arvata siten että suhteellinen virhe olisi mahdollisimman pieni.
Ratkaisu.
Olkoon arvaus edelleen y, tällöin suhteelliseksi virheeksi saadaan $\beta = \frac{|y-x|}{x}$. Nyt etsitään siis lukua y, jonka suhteelliset virheet päätepisteiden a ja b suhteen on samat. Eli $\frac{|y-a|}{a} = \frac{|y-b|}{b}$, josta ratkaisemalla saadaan $y = \frac{2ab}{a+b} = \mathcal{H}(a,b)$.

Myös harmoniselle keskiarvolle on luonnollisesti olemassa painotettu keskiarvo.

Määritelmä 2.12. Painotettu harmoninen keskiarvo positiivisille lukuvuille $a_1, \ldots, a_n$, joille ainakin yksi $w_i > 0$ kun $i = 1, \ldots, n$, määritellään yhtälönä

$$\mathcal{H}_w(a_1w_1, \ldots, a_nw_n) = \frac{w_1 + \ldots + w_n}{\frac{w_1}{a_1} + \ldots + \frac{w_n}{a_n}}.$$

Huomautus 2.13. Seuraava yhteys on syytä huomata

$$\mathcal{H}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n) = \mathcal{A}_w(w_1a_1^{-1}, \ldots, w_na_n^{-1})^{-1}.$$

Tästä johtuen harmonisen keskiarvon ominaisuuksia ei useinkaan esitetä kovin yksityiskohtaisesti, sillä ne seuraavat varsin helposti aritmeettisen keskiarvon vastaavista ominaisuuksista.

Huomautus 2.14. Jatkossa merkinnät saattavat hieman vaihdella samanpainoisen ja painotetun tilanteen välillä, vaihtelua voi ilmetä myös sen suhteen kuinka monesta termistä kulloinkin keskiarvo otetaan. Nimittäin lähes poikkeuksetta tilanteesta selviää ilman värinkäsityksen vaaraa mitä tarkoitetaan, vaikkei monimutkaistettuja merkintöjä käytettäisikään. Jatkossa voidaan siis käyttää n:n termin aritmeettiselle keskiarvolle merkintää $\mathcal{A}$, myös painotettussa tilanteessa. Jos tilanne vaatii niin, n:n termin painotetulle aritmeettiselle keskiarvolle voidaan käyttää jopa merkintää $\mathcal{A}_{w,n}$.

3. Aritmeettis-geometris-harmoninen keskiarvoepäyhtälö ja sen todistaminen

Nyt kun kolmeen yllä mainittuun keskiarvoon on tutustuttu, voidaan siirtyä tämän työn varsinaisen aiheen pariin.

Lause 3.1. *Näille kolmelle keskiarvolle pätee epäyhtälö*

$$\mathcal{H}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n) \leq \mathcal{G}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n) \leq \mathcal{A}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n),$$

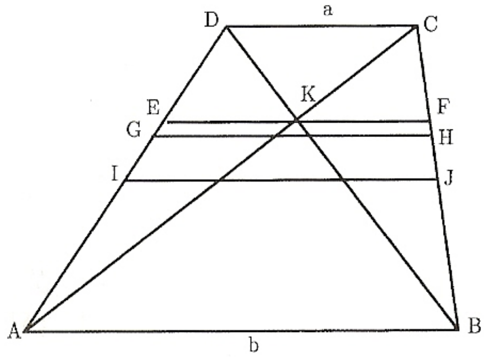
missä $a_i > 0$ *ja* $w_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. *Yhtäsuuruus toteutuu epäyhtälössä jos ja vain jos* $a_1 = \ldots = a_n$.

Lausetta 3.1 ei todisteta vielä tässä vaiheessa, koska tämä koko kappale kolme on omistettu kyseisen lauseen erilaisille todistuksille.

Huomautus 3.2. Jatkossa epäyhtälö kirjoitetaan lyhyemmin muodossa $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A}$

Tutustutaan aluksi lauseen 3.1 epäyhtälöön liittyvään geometriseen tulkintaan.

Olkoon $0 < a < b$ ja $ABCD$ puolisuunnikas, jossa AB ja CD ovat yhdensuuntaiset sivut. Lisäksi $AB = a$, $CD = b$ ja janojen AC ja BD leikkauspiste olkoon K. Katso kuva 1. Piste I puolittaa janan AD ja piste J puolestaan puolittaa janan BC. GH jakaa puolisuunnikkaan $ABCD$ kahteen yhdenmuotoiseen puolisuunnikkaaseen. Tällöin $IJ = \mathcal{A}(a,b)$, $GH = \mathcal{G}(a,b)$ ja $EF = \mathcal{H}(a,b)$.



Kuva 1. $\mathcal{H}(a,b) \leq \mathcal{G}(a,b) \leq \mathcal{A}(a,b)$.

Käydään yllä olevat tulokset esimerkinomaisesti läpi.

Esimerkki 3.3. $IJ = \mathcal{A}(a,b)$:
Olkoon puolisuunnikkaan $ABCD$ korkeus h. Tällöin puolisuunnikkaan pinta-alaksi saadaan $A = \frac{a+b}{2}h$. Koska piste I puolittaa janan AD ja piste J janan BC, niin yhdenmuotoisuuden nojalla puolisuunnikkaiden $ABJI$ ja $IJCD$ korkeudet ovat $\frac{h}{2}$. Jos lisäksi $IJ = y$ niin pinta-aloiksi saadaan $A_1 = \frac{b+y}{2}\frac{h}{2}$ ja $A_2 = \frac{y+a}{2}\frac{h}{2}$. Ratkaisemalla y yhtälöstä $A = A_1 + A_2$ saadaan $y = \frac{a+b}{2}$ eli $IJ = \mathcal{A}(a,b)$.

$GH = \mathcal{G}(a,b)$:
Jana GH jakaa puolisuunnikkaan kahdeksi keskenään yhdenmuotoiseksi puolisuunnikkaaksi. Jos $GH = x$ niin $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, josta $x = \sqrt{ab}$. Siispä $GH = \mathcal{G}(a,b)$.

$EF = \mathcal{H}(a,b)$:
Olkoon yhdenmuotoisten kolmioiden ΔABK ja ΔCDK korkeudet h_1 ja h_2 eli $h = h_1 + h_2$. Tällöin yhdenmuotoisuuden nojalla $h_2 = \frac{a}{b}h_1$. Merkitään $EF = z$. Nyt jana EF jakaa puolisuunnikkaan kahdeksi pienemmäksi puolisuunnikkaaksi. Tällöin $A_1 = \frac{b+z}{2}h_1$ ja $A_2 = \frac{a+z}{2}h_2$ ja ratkaisemalla z pinta-alayhtälöstä $A = A_1 + A_2$, saadaan $z = \frac{2ab}{a+b}$ eli $EF = \mathcal{H}(a,b)$.

3.1. **Todistuksia tapauksessa n=2.** Aluksi käydään läpi joitakin todistuksia tässä helpoimassa mahdollisessa tilanteessa. Näin saadaan pehmeä lasku vaativimmille todistuksille ja toisaalta pystymme geometrisillä todistuksilla havainnollistamaan tätä perustavaa laatua olevan tulosta.

Lause 3.4. *Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Tällöin pätee kahden termin geometris-aritmeettinen keskiarvoepäyhtälö*

$$\text{(GA)} \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

missä yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $a = b$.

Huomautus 3.5. Kahden termin tilanteessa on syytä huomata mielenkiintoinen yhteys

$$\mathcal{G}(a,b) = \sqrt{\mathcal{A}(a,b)\mathcal{H}(a,b)}.$$

Todistus. Tulos saadaan suoralla laskulla. □

Geometrinen keskiarvo aritmeettisesta ja harmonisesta keskiarvosta on siis geometrinen keskiarvo.

Lause 3.6. *Jos kahden termin tilanteessa $\mathcal{G} \leq \mathcal{A}$ niin $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A}$.*

Todistus. Käyttämällä apuna huomautusta 3.5 saadaan helposti

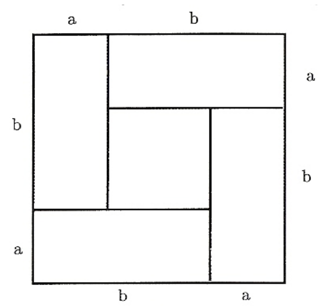
$$\mathcal{G} \geq \sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G} \geq \mathcal{H} \;\text{ ja }\; \mathcal{A} \geq \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{H}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \geq \mathcal{H}.$$

□

Seuraavaksi näytetään muutamia todistuksia epäyhtälölle $\mathcal{G}(a,b) \leq \mathcal{A}(a,b)$ ja yllä olevan nojalla kaksi muuta epäyhtälöä seuraa välittömästi.

Todistus. (I)
Tulos seuraa suoralla laskulla huomaamalla, että $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. □

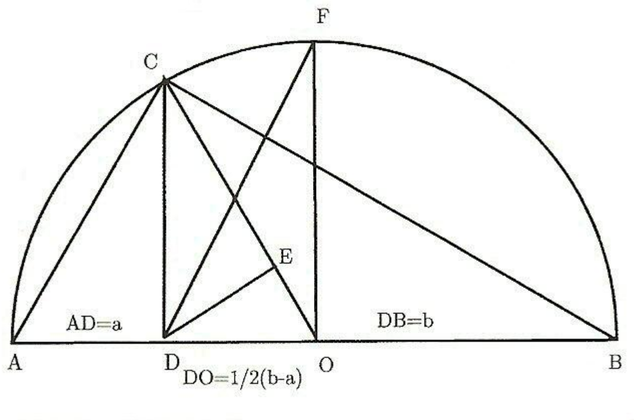
Todistus. (II)
Tuloksen ilmeisyys selviää helposti yhtälöstä $(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$. Olettamalla $0 < a < b$ voidaan kyseiselle yhtälölle esittää yksinkertainen geometrinen tulkinta, mikä on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2. (GA):n geometrinen tulkinta kahden termin tilanteessa.

□

Todistus. (III)
Ensimmäinen varsinainen geometrinen todistus saadaan seuraavalla tavalla. Tilanne on esitetty kuvassa 3.

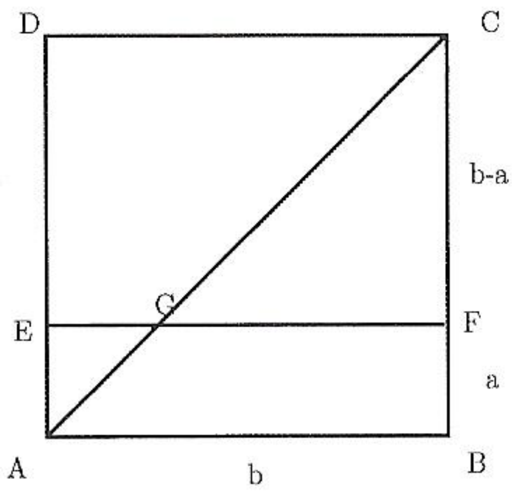


KUVA 3. Geometrinen todistus.

Valitaan O-keskisen puoliympyrän halkaisijalta AB piste D, Olkoon $AD = a$ ja $DB = b$. Valitaan piste C puoliympyrän kaarelta siten että kulma $\angle ADC$ on suora, tällöin $CD = \sqrt{ab} = \mathcal{G}$ ja $CO = \frac{a+b}{2} = \mathcal{A}$. Thaleen lauseen nojalla (katso esim. [6, s. 100]) $\angle ACB$ on suora. Koska pisteestä C halkaisijalle AB kohtisuora etäisyys on lyhin, niin $CD \leq CO$ ja yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $D = O$.

□

Todistus. (IV)
Todistus voidaan suorittaa myös käyttämällä hyväksi pinta-alatulkintaa. Katso kuva 4.



KUVA 4. Pinta-alatulkinta.

Olkoon $ABCD$ neliö, jonka sivun pituus on b ja olkoon $ABFE$ suorakulmio, jonka sivun pituudet ovat a ja b. Merkitään $ABFE$ pinta-alaa A_1, AGE alaa A_2, $ABFG$

alaa A_3 ja ABC alaa A_4. Tällöin

$$A_1 = A_2 + A_3 \leq A_2 + A_4.$$

Siis $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, joka sievenee helposti muotoon $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Epäyhtälössä yhtäsuuruus pätee kun pinta-alat A_3 ja A_4 ovat yhtäsuuret, ja tämä toteutuu jos ja vain jos $a = b$.

$\square$

3.1.1. *Yleisen painon tapaus, kun n=2.* Yllä epäyhtälö on todistettu samanpainoisessa tilanteessa. Seuraavaksi siirrytään kahden termin yleisen muodon todistuksiin.

Lause 3.7. *Olkoon a, b, α ja β positiivisia reaalilukuja. Tällöin pätee kahden termin painotettu geometris-aritmeettinen keskiarvoepäyhtälö*

$$\text{(GA)} \qquad (a^{\alpha} b^{\beta})^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \leq \frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta},$$

ja yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $a = b$.

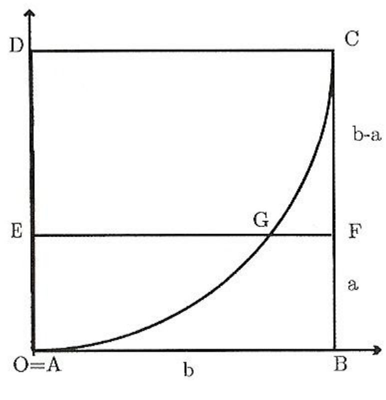
Huomautus 3.8. Ennen todistuksia huomioidaan seuraava yhteys. Kun $\lambda > 0$ voidaan lause 3.7 kirjoittaa seuraavalla tavalla.

$$(a^{\lambda\alpha} b^{\lambda\beta})^{\frac{1}{\lambda\alpha+\lambda\beta}} = (a^{\alpha} b^{\beta})^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \leq \frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta} = \frac{\lambda\alpha a + \lambda\beta b}{\lambda\alpha + \lambda\beta}.$$

Tämä on hyödyllinen tieto, sillä nyt todistuksissa voidaan tarpeen niin vaatiessa skaalata painoja α ja β menettämättä kuitenkaan todistuksen yleispätevyyttä. Saman kaltaisilla yksinkertaisilla laskuilla voidaan näyttää, että painojen lisäksi lukuja, joista keskiarvo otetaan voidaan myös skaalata.

Todistus. (I)
Lauseen 3.4 todistus (IV) voidaan yleistää tähän tilanteeseen.
Tässä todistuksessa oletetaan, että $\alpha + \beta = 1$ ja huomautuksen 3.8 nojalla todistuksen yleispätevyys ei siitä kärsi.

Sijoitetaan piste A koordinaatiston origoon O ja janat AB ja AD koordinaattiakseleille. AGC kulkee pitkin käyrää $y = x^{\alpha/\beta}$, katso kuva 5.



KUVA 5. Pinta-alatulkinta.

Olkoon $ABCD$ neliö, jonka sivun pituus on d ja olkoon $ABFE$ suorakulmio, jonka sivun pituudet ovat c ja d. Merkitään $ABFE$ pinta-alaa A_1, AGE alaa A_2, $ABFG$ alaa A_3 ja ABC alaa A_4. Tällöin

$$A_1 = A_2 + A_3 \leq A_2 + A_4.$$

Tämä voidaan integraalilaskentaa apuna käyttäen esittää muodossa

$$cd = \alpha c^{1/\alpha} + \beta d^{1/\beta}.$$

Tekemällä nyt muuttujanvaihdot $c = a^\alpha$, $d = b^\beta$ ja muistamalla että $\alpha + \beta = 1$, havaitaan tuloksen olevan lauseen 3.7 edellyttämässä muodossa.

□

Huomautus 3.9. Kun $a,\ b\ \in \mathbb{R}_+$, niin klassisen *Youngin epäyhtälön* mukaan

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p\,'}}{p\,'},$$

missä positiiviset luvut p ja $p\,'$ ovat ns. konjugoidut indeksit, joille pätee $\frac{1}{p} + \frac{1}{p\,'} = 1$.

Seuraus 3.10. *Youngin epäyhtälö on tietty erikoistapaus lauseesta 3.7.*

Todistus. Tekemällä Youngin epäyhtälöön ensin sijoitukset $w_1 = \frac{1}{p}$ ja $w_2 = \frac{1}{p\,'}$ saadaan se muotoon

$$ab \leq w_1 a^{\frac{1}{w_1}} + w_2 b^{\frac{1}{w_2}}.$$

Tekemällä nyt tähän uudet sijoitukset $a = x^{w_1}$ ja $b = y^{w_2}$ saadaan tämä puolestaan muotoon

$$x^{w_1} y^{w_2} \leq w_1 x + w_2 y.$$

Alkuoletusten vallitessa $w_1 + w_2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p\,'} = 1$, joten kyseessä on tismalleen lauseen 3.7 edellyttämä muoto eli painotettu geometris-aritmeettinen keskiarvoepäyhtälö kahden termin tapauksessa. Pääsimme siis pelkillä muuttujanvaihdoilla Youngin epäyhtälöstä lauseen 3.7 tutumpaan muotoon.

□

Huomautus 3.11. Differentiaalilaskennan laajennetun väliarvolauseen mukaan suljetulla välillä $[c, d]$ jatkuville ja avoimella välillä $]c, d[$ derivoituville funktioille f ja g on olemassa $\xi \in]c, d[$ siten, että

$$\frac{f(d) - f(c)}{g(d) - g(c)} = \frac{f\,'(\xi)}{g\,'(\xi)},$$

kunhan lisäksi $g\,'(x) \neq 0$ välillä]c,d[. Katso [1, s. 211]

Todistus. (II)
Konstruoidaan funktiot $f(x) = x^u$ ja $g(x) = x^v$, missä $u \neq v,\ \ u, v > 0$ ja $x > 0$. Käyttämällä huomautuksen 3.11 laajennettua väliarvolausetta kumpaankin näistä funktioista välillä $[c, d]$, $c > 0$ saadaan

$$\frac{d^u - c^u}{d^v - c^v} = \frac{u\xi^{u-1}}{v\xi^{v-1}} = \frac{u\xi^u}{v\xi^v}.$$

Tästä puolestaan saadaan epäyhtälö

$$\frac{d^u - c^u}{d^v - c^v} > \frac{uc^u}{vd^v},$$

josta ristiinkertominen ja epäyhtälön muokkaus antaa

$$uc^{u+v} + vd^{u+v} > (u+v)c^u d^v.$$

Kun vielä lopuksi tehdään sijoitus $a = c^{u+v},\ \ b = d^{u+v}$, niin huomataan kyseessä olevan lauseen 3.7 edellyttämä muoto.

□

3.2. **Yleinen tapaus, n termiä.** Seuraavaksi siirrytään kahden termin keskiarvoepäyhtälöistä yleisiin n termiä sisältäviin tapauksiin.

Lause 3.12. (*Geometris-aritmeettinen keskiarvoepäyhtälö*)

(GA) $$\mathcal{G}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n) \leq \mathcal{A}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n),$$

missä yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $a_1 = \ldots = a_n$.

Seuraus 3.13.

$$\mathcal{H}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n) \leq \mathcal{G}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n) \leq \mathcal{A}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n)$$

Yhtäsuuruus toteutuu epäyhtälössä jos ja vain jos $a_1 = \cdots = a_n$.

Todistus. Käyttämällä huomautuksen 2.13 yhteyttä ja (GA):ä (joka siis todistetaan yleisessä tilanteessa jäljempänä), saadaan

$$\mathcal{H}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n) = \mathcal{A}_w(w_1a_1^{-1}, \ldots, w_na_n^{-1})^{-1}$$
$$\leq \mathcal{G}_w(w_1a_1^{-1}, \ldots, w_na_n^{-1})^{-1} = \mathcal{G}_w(w_1a_1, \ldots, w_na_n).$$

□

Huomautus 3.14. Seurauksen 3.13 todistuksesta johtuen lauseen 3.1 epäyhtälöstä todistetaan tyypillisesti vain lauseen 3.12 osuus eli (GA).

Huomautus 3.15. Kun $x > 0$ ja $x \neq 1$, niin

$$\frac{x-1}{x} < log\, x < x - 1.$$

Todistus. Merkitään $f(x) = 1 - x - log\, x$, tällöin funktio f saavuttaa (ainoan) suurimman arvonsa kun $x = 1$ ja tällöin $f(1) = 0$. Oikeanpuoleinen epäyhtälö seuraa suoraan tästä. Vasemmanpuoleinen epäyhtälö puolestaan seuraa muuttujanvaihdolla $x = \frac{1}{y}$ oikeanpuoleisesta epäyhtälöstä.

□

Lemma 3.16. *Jos* $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$, *niin* $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$. *Yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos* $a_1 = \ldots = a_n$.

Todistus. Huomautuksen 3.15 oikeanpuoleisen epäyhtälön nojalla

$$\sum_{i=1}^{n} log\, a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i + n \leq 0, \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \geq n + log(\prod_{i=1}^{n} a_i) = n.$$

Myös yhtäsuuruus seuraa suoraan käytetystä epäyhtälöstä.

□

Huomautus 3.17. Oletetaan lemman 3.16 oletuksien sijaan, että $\sum_{i=1}^{n} w_1 = 1$. Tällöin hieman samantyyppisellä tavalla saadaan (GA) todistettua kokonaisuudessaan eli yleisen painon tilanteessa.

Todistus. Koska $w_i > 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots, n$, voidaan huomautuksen 3.15 oikeanpuoleisen epäyhtälön nojalla kirjoittaa

$$w_i \left(\frac{a_i}{\mathcal{G}_w} \right) \geq w_i \left(1 + log \left(\frac{a_i}{\mathcal{G}_w} \right) \right) = w_i + log \left(\frac{a_i^{w_i}}{\mathcal{G}_w^{w_i}} \right), \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Suorittamalla summaus puolittain, saadaan

$$\frac{\mathcal{A}_w}{\mathcal{G}_w} \geq \sum_{i=1}^{n} w_i + log \left(\frac{\mathcal{G}_w}{\mathcal{G}_w} \right) = 1$$

ja yhtäsuuruus pätee selvästi jos ja vain jos $a_1 = \ldots = a_n$.

□

Huomautus 3.18. Huomautuksen 3.17 todistus on yleispätevä, sillä huomautuksessa 3.8 esitetty skaalaus tapauksessa $n = 2$, on yleistettävissä suoraan yleiseen tilanteeseen.

3.2.1. *Samanpainoisen tilanteen todistuksen riittävyys.* Seuraavaksi näytetään että lause 3.12 voidaan johtaa samanpainoisesta tilanteesta.

Lause 3.19. *On riittävää todistaa lause 3.12 samanpainoisessa tilanteessa.*

Todistus. Kun lause 3.12 on ensin todistettu samanpainoisessa tilanteessa, edetään seuraavaksi tilanteeseen missä $w_i \in \mathbb{N}_+, \;\; \forall \;\; 1 \leq i \leq n$. Tämä on triviaalisti muunnettavissa samanpainoiseksi tilanteeksi. Tämän jälkeen näytetään, että kun $w_i \in \mathbb{Q}_+, \;\; \forall \;\; 1 \leq i \leq n$, tilanne palautuu edelliseen muotoon.
Osoitetaan tämä tilanteessa $n = 2$.

Olkoon $m, n, r, s \in \mathbb{N}^+$ tällöin

$$\begin{aligned} \left(a_1^{\frac{m}{n}} a_2^{\frac{r}{s}} \right)^{\frac{1}{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}}} &= \left(a_1^{\frac{m}{n}} a_2^{\frac{r}{s}} \right)^{\frac{ns}{ms+nr}} = (a_1^{ms} a_2^{nr})^{\frac{1}{ms+nr}} \\ \leq \frac{msa_1 + nra_2}{ms + nr} &= \frac{ns(\frac{m}{n}a_1 + \frac{r}{s}a_2)}{ms + nr} = \frac{\frac{m}{n}a_1 + \frac{r}{s}a_2}{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}}. \end{aligned}$$

Tämä todistus on yleistettävissä suoraan tilanteeseen missä termejä on n kpl. (GA) yleisillä reaalisilla painoilla w_i saadaan seuraavasti: Yllä todistus on suoritettu rationaalisille painoille. Jos painot w_i ovat irrationaalisia valitaan rationaalilukujonot

$q_i \longrightarrow w_i$. Näille lukujonoille epäyhtälön vasen ja oikea puoli suppenevat kohti sitä mitä pitääkin ja asia on kunnossa myös reaalisilla painoilla w_i.

Saatetaan todistus loppuun näyttämällä, että lauseen 3.12 epäyhtälö on aito kunhan $a_1, \ldots, a_n$ eivät ole kaikki yhtäsuuria.

Oletetaan että kaikki painot eivät ole rationaalisia. Kirjoitetaan $w_i = u_i + v_i$, missä $u_i \geq 0$ ja $v_i \in \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$. Nyt (GA):n nojalla, $\mathcal{G}_u(a_1, \ldots, a_n) \leq \mathcal{A}_u(a_1, \ldots, a_n)$ ja edelleen kun kaikki $a_1, \ldots, a_n$ eivät ole yhtäsuuria pätee rationaalisille painoille, $\mathcal{G}_v(a_1, \ldots, a_n) < \mathcal{A}_v(a_1, \ldots, a_n)$. Saadaan siis

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_w(a_1, \ldots, a_n) &= \mathcal{G}_u^{\frac{u_1+\ldots+u_n}{w_1+\ldots+w_n}} \mathcal{G}_v^{\frac{v_1+\ldots+v_n}{w_1+\ldots+w_n}} < \mathcal{A}_u^{\frac{u_1+\ldots+u_n}{w_1+\ldots+w_n}} \mathcal{A}_v^{\frac{v_1+\ldots+v_n}{w_1+\ldots+w_n}} \\ &\leq \frac{u_1 + \ldots + u_n}{w_1 + \ldots + w_n}\mathcal{A}_u + \frac{v_1 + \ldots + v_n}{w_1 + \ldots + w_n}\mathcal{A}_v = \mathcal{A}_w(a_1, \ldots, a_n).\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälövaihe saadaan Youngin epäyhtälön avulla.

□

3.2.2. *Todistuksia samanpainoisessa tilanteessa.* Todistettaessa (GA):ä ei lauseen 3.19 nojalla siis menetetä todistuksen yleispätevyyttä, vaikka todistus suoritetaan tilanteessa $w_1 = \ldots = w_n$. Tätä tietoa tullaan hyödyntämään todistuksissa.

Huomautus 3.20. Jos todistuksissa ei muuta mainita, niin kaikki jäljempänä tulevat todistukset käyttävät hyväksi lauseen 3.19 tietoa ja todistukset suoritetaan samanpainoisessa tilanteessa.

3.2.3. *(GA) ja induktiotodistukset.* Tämäntyyppisissä todistuksissa nousee luonnollisesti esille ajatus suorittaa todistus induktiivisesti, ja niin ovat aikojen saatossa monet tehneetkin. Seuraavassa esitellään muutama hieman toisistaan poikkeava induktiotodistus.

Todistus. (I) Tavallinen induktio.

Aloitetaan todistus toteamalla että tapaus $n = 1$ on triviaali ja tapaus $n = 2$ on käsitelty jo aiemmin.

Meidän on siis näytettävä, että

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Skaalataan lukuja a_i siten että $a_1 \cdots a_n = 1$. Kuten aiemmin on todettu, skaalauksen seurauksena ei menetä todistuksen yleispätevyyttä. Katso huomautukset 3.8 ja 3.18. Jos $a_i = 1, \ \forall\ \ 1 \leq i \leq n$, niin todistus on triviaali. Siksi oletetaan, että ainakin yksi luvuista $a_i > 1$ ja ainakin yksi $a_i < 1$. Valitaan esimerkiksi $a_1 > 1$ ja $a_2 < 1$.
Induktio-oletuksen nojalla

$$\frac{a_1a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{(a_1a_2)a_3 \cdots a_n} = 1,$$

joten saadaan

$$a_1a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n - 1.$$

Nyt meidän tulisi näyttää, että

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n$$

Tämä toteutuu, jos

$$a_1 + a_2 \geq a_1a_2 + 1 \quad \text{eli} \quad a_1 + a_2 - (a_1a_2 + 1) \geq 0.$$

Tämä taas pätee selvästi ehtojen $a_i > 0$ ja $a_2 < 0$ nojalla, sillä

$$a_1 + a_2 - (a_1a_2 + 1) = (a_1 - 1)(1 - a_2) > 0.$$

Yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $a_i = 1, \ \forall \ \ 1 \leq i \leq n.$

$\square$

Seuraavaksi esitellään hyvin hienostunut induktiotodistus.

Todistus. (II) Cauchyn käänteinen induktio.

Jos kaikki termit $a_1 = \ldots = a_n$, niin (GA) toteutuu triviaalisti, joten jatkossa käsitellään tapausta, jossa kaikki termit eivät ole yhtä suuria.

Tapaus $n = 2^k$:
Tutkitaan siis tilannetta, missä $n = 2^k$ ja $k \in \mathbb{N}_+ \setminus \{0\}$. Tapaus $n = 2$ on käsitelty jo aiemmin. Seuraavaksi tehdään induktio-oletus ja oletetaan että epäyhtälö pätee kun $n = 2^{k-1}$. Tämän jälkeen pyritään näyttämään, että tällöin se pätee myös tapauksessa $n = 2^k$.
Kirjoitetaan seuraavasti:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} = \frac{\frac{a_1+\ldots+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} + \frac{a_{2^{k-1}+1}+\ldots+a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2}$$

$$\geq \frac{\sqrt[2^{k-1}]{a_1 \cdots a_{2^{k-1}}} + \sqrt[2^{k-1}]{a_{2^{k-1}+1} \cdots a_{2^k}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{a_1 \cdots a_{2^{k-1}}} \cdot \sqrt[2^{k-1}]{a_{2^{k-1}+1} \cdots a_{2^k}}}$$
$$= \sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}}$$

Tarkastelemalla ensimmäistä epäyhtälövaihetta huomataan yhtäsuuruuden toteutuvan vain jos sekä $a_1 = \ldots = a_{2^{k-1}}$ että $a_{2^{k-1}+1} = \ldots = a_{2^k}$. Jälkimmäisestä epäyhtälöstä huomataan puolestaan että yhtäsuuruus toteutuu ainoastaan jos $\sqrt[2^{k-1}]{a_1 \cdots a_{2^{k-1}}} = \sqrt[2^{k-1}]{a_{2^{k-1}+1} \cdots a_{2^k}}$. Jotta molemmista epäyhtälöistä saatavat ehdot toteutuisivat yhtäaikaa pitäisi olla $a_1 = \cdots = a_{2^k}$ mutta se on vastoin alussa tehtyä oletusta, joten saadaan haluttu tulos

$$\frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} > \sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} \,.$$

Seuraavaksi käsitellään tapaukset kun n ei ole mikään kahden potenssi.

Tapaus $n < 2^k$:
Oletetaan siis, että n ei ole kahden potenssi. Koska jono $\left(2^k\right)_{k=1}^{\infty}$ ei ole ylhäältä rajoitettu, on n joka tapauksessa vähemmän kuin joku kahden luonnollinen potenssi. Olkoon $n < m = 2^k$, jollakin $k \in \mathbb{N}_+ \setminus \{0\}$.

Olkoon $\mathcal{A}(a_1, \cdots, a_n) = \mu$ ja määritellään termit $a_{n+1} = \cdots = a_m = \mu$.

Tällöin saadaan:

$$\mu = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{\frac{m}{n}(a_1 + \cdots + a_n)}{m} = \frac{a_1 + \cdots + a_n + \frac{m-n}{n}(a_1 + \cdots + a_n)}{m}$$

$$= \frac{a_1 + \cdots + a_n + (m-n)\mu}{m} = \frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m}{m}$$

$$> \sqrt[m]{a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdots a_m} = \sqrt[m]{a_1 \cdots a_n \cdot \mu^{m-n}}.$$

Näin ollen

$$\mu^m > a_1 \cdots a_n \cdot \mu^{m-n},$$

joten

$$\mu^n > a_1 \cdots a_n$$

eli

$$\mu > \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \,.$$

On siis todistettu, kun $n < 2^k$ niin

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \,,$$

joten todistus on kokonaisuudessaan suoritettu.

□

Seuraavaksi esiteltävä todistus on peräisin Liouvilleltä vuodelta 1839 [7, s. 493-494]. Vaikka todistus on yksi ensimmäisistä, se ”löydettiin” vasta 1960-luvulla. Myös tämä on induktiotodistus, mutta lähestymistapa on aivan erilainen kun kahdessa edellisessä.

Todistus. (III)

Tapaukset $n = 1$ ja $n = 2$ on käsitelty aiemmin. Tehdään induktio-oletus että (GA) pätee $n-1$ termin tapauksessa. Tarkastellaan ei negatiivisten lukujen $a_1, \ldots, a_{n-1}, x$ keskiarvoja ja tutkitaan funktiota

$$f(x) = \mathcal{A}^n(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) - \mathcal{G}^n(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) \ .$$

Derivoimalla ja muokkaamalla saadaan

$$f\,'(x) = \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + x}{n}\right)^{n-1} - \ a_1 \cdots a_{n-1}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right) + \frac{x}{n}\right)^{n-1} - \ a_1 \cdots a_{n-1}.$$

Voidaan siis kirjoittaa

$$f\,'(x) = \left(\frac{n-1}{n}\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_{n-1}) + \frac{x}{n}\right)^{n-1} - \mathcal{G}^{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

Tästä nähdään, että $f\,'$ on kasvava kun $x \geq 0$. Silloin funktion pienin arvo saavutetaan derivaatan ainoassa nollakohdassa. Merkitään kyseistä nollakohtaa $x = x'$.

Ratkaisemalla x yhtälöstä

$$\left(\frac{n-1}{n}\left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right) + \frac{x}{n}\right)^{n-1} = \ a_1 \cdots a_{n-1}$$

saadaan

$$x' = x = n(a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} - a_1 + \cdots + a_{n-1}.$$

Funktiolla f on siis absoluuttinen minimi pisteessä x' ja täksi minimiarvoksi saadaan sijoituksen ja muokkauksen jälkeen

$$f(x') = (n-1)(a_1 \cdots a_{n-1})\left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} - (a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right)$$

eli

$$f(x') = (n-1)\ \mathcal{G}^{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})\left(\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_{n-1}) - \mathcal{G}(a_1, \ldots, a_{n-1})\right),$$

joten induktio-oletuksen nojalla $f(x') \geq 0$.

Koska $f(x) \geq 0$ todistus on suoritettu lukuunottamatta yhtäsuuruutta. Jotta $f(x) = 0$ voisi toteutua, täytyy sekä $x = x'$ että $f(x') = 0$ olla yhtäaikaa voimassa. Induktio-oletuksen nojalla (GA) toteutuu $n-1$ termin tilanteessa, ja koska

$$f(x') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \mathcal{G}(a_1, \ldots, a_{n-1})$$

toteutuu jos ja vain jos $a_1 = \cdots = a_{n-1} = z$ ja tällöin myös $x = x' = z$, niin todistus on loppuun suoritettu.

$\square$

Näytetään vielä viimeisenä induktiotodistuksena todistus yleisen painon tilanteessa.

Todistus. (IV)

Oletaan että (GA) pätee pienemmillä kokonaislukuarvoilla kun n, tällöin

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_w = \left(a_1^{w_1}\cdots a_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}} &= \left(\left(a_1^{w_1}\cdots a_{n-1}^{w_{n-1}}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}}\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}} \cdot a_n^{\frac{w_n}{\sum_{i=1}^{n} w_i}} \\
&\le \frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\left(a_1^{w_1}\cdots a_{n-1}^{w_{n-1}}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}} + \frac{w_n}{\sum_{i=1}^{n} w_i}a_n \\
&\le \frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\cdot\frac{w_1a_1+\ldots+w_{n-1}a_{n-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} w_i} + \frac{w_n}{\sum_{i=1}^{n} w_i}a_n = \mathcal{A}_w.
\end{aligned}
$$

Ensimmäinen epäyhtälö seuraa Youngin epäyhtälöstä ja toinen puolestaa induktio-oletuksesta.
Epäyhtälössä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $a_1 = \ldots = a_n$. Tämä seuraa soveltamalla lausetta 3.7 kun $\alpha + \beta = 1$ ja induktio-oletusta.

□

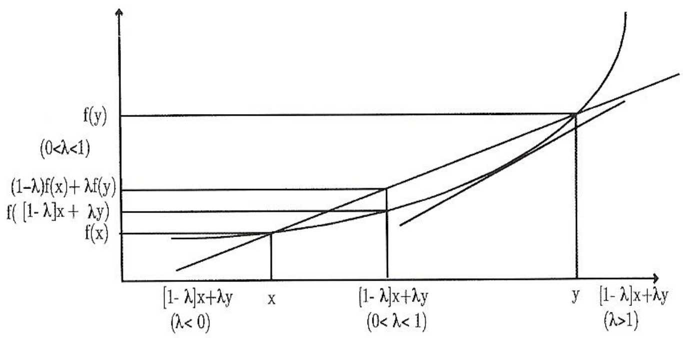
3.2.4. *Konveksit funktiot ja* (GA). Seuraavaksi perehdytään hieman konvekseihin funktioihin. Tästä ominaisuudesta on suurta hyötyä (GA):n todistuksissa. Tässä kappaleessa esitellään myös Jensenin epäyhtälö, joka (GA):n tavoin on erittäin merkittävässä asemassa epäyhtälöopissa.

Määritelmä 3.21. Olkoon väli $I \subset \mathbb{R}$. Funktiota $f : I \to \mathbb{R}$ sanotaan konveksiksi välillä I, jos kaikkilla $x, y \in I$ ja kaikilla $\lambda,\ 0 \le \lambda \le 1$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Jos epäyhtälö on aito kun $x \ne y$ ja $\lambda \ne 0, 1$, niin funktiota f sanotaan aidosti konveksiksi välillä I.

Huomautus 3.22. Konveksia funktiota on helppo havainnollistaa geometrisesti.
Katso kuva 6.
(a) Konveksin funktion kuvaaja (graafi) sijaitsee jänteen alapuolella.
(b) Kaikkialla missä konveksin funktion kuvaajalla on tangentti, kuvaaja sijaitsee tangentin yläpuolella.



Kuva 6. Konveksin funktion kuvaaja.

Lause 3.23. *Jos f'' on olemassa avoimella välillä $]a, b[$, tällöin f on konveksi jos ja vain jos $f'' \geq 0$. Jos lisäksi jokainen osaväli sisältää pisteen missä $f'' > 0$ niin f on aidosti konveksi.*

Todistus. Täydellinen todistus löytyy mm. [9, s. 9-11]

Käydään todistuksen ideaa pintapuolisesti läpi siten, että lauseen paikkansapitävyys on helppo ymmärtää ainakin intuitiivisesti.

Koska f'' on oletuksen mukaan olemassa niin myös f' on olemassa ja täten funktion kuvaajalla on kaikkialla tangentti. Nyt lauseen paikkansapitävyyttä voidaan tarkastella huomautuksen 3.21(b) valossa.
Konveksin funktion f kuvaaja sijaitsee siis kaikkialla tangentin yläpuolella. Geometrisesti on helppo hahmottaa, että kuvaaja pysyy tangentin yläpuolella kunhan funtion derivaatta on aidosti kasvava. (Jos derivaatta on vakio jollain välillä niin tällöin tangentti ja kuvaaja luonnollisesti yhtyvät.) Jos taas jossain pisteessä olisi $f'' < 0$ niin väistämättä kyseiseen pisteeseen piirretty tangentti olisi kuvaajan yläpuolella ja tällöin f ei voisi olla konveksi.

□

Huomautus 3.24. Pääsääntöisesti lause 3.23 on riittävä, koska useimmiten sovelluksissa käsitellään C^2 funktioita.

Lause 3.25. *(Jensenin epäyhtälö)*
Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli, jolla funktio f on konveksi ja lisäksi $n \geq 2$, $\{w_i\}_1^n > 0$ kaikilla, $1 \leq i \leq n$ ja $\{a_i\}_1^n \in I$ kaikilla, $1 \leq i \leq n$. Tällöin

$$f\left(\frac{1}{\sum_1^n w_i}\sum_1^n w_i ai\right) \leq \frac{1}{\sum_1^n w_i}\sum_1^n w_i f(a_i).$$

Jos f on aidosti konveksi niin myös Jensenin epäyhtälö on aito, ellei $a_1 = \ldots = a_n$.

Todistus. Aluksi on syytä huomata että epäyhtälön vasen puoli on hyvin määritelty, koska funktion f argumentti on $\mathcal{A}_w(a_1, \ldots, a_n)$. Sen arvo on siis lukujen $min(a_1, \ldots, a_n)$ ja $max(a_1, \ldots, a_n)$ välissä eli erityisesti se kuuluu väliin I.

Todistus perustuu induktioon.

$n = 2$:

$$f\left(\frac{1}{\sum_1^2 w_i}\sum_1^2 w_i a_i\right) = f\left(\frac{w_2}{\sum_1^2 w_i}a_2 + \frac{w_1}{\sum_1^2 w_i}\frac{1}{w_1}w_1 a_1\right)$$

$$\leq \frac{w_2}{\sum_1^2 w_i}f(a_2) + \frac{w_1}{\sum_1^2 w_i}f\left(\frac{1}{w_1}w_1 a_1\right) = \frac{1}{\sum_1^2 w_i}\sum_1^2 w_i f(a_i).$$

Epäyhtälö seuraa suoraan koveksisuuden määritelmästä 3.21.

Seuraavaksi tehdään induktio-oletus ja oletetaan Jensenin epäyhtälön toteutuvan kaikilla k, $2 \leq k \leq n-1$ ja näytetään, että tällöin se pätee myös kun $k = n$.

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{\sum_1^n w_i}\sum_1^n w_i a_i\right) &= f\left(\frac{w_n}{\sum_1^n w_i}a_n + \frac{\sum_1^{n-1} w_i}{\sum_1^n w_i}\frac{1}{\sum_1^{n-1} w_1}\sum_1^{n-1} w_i a_i\right)\\
&\leq \frac{w_n}{\sum_1^n w_i}f(a_n) + \frac{\sum_1^{n-1} w_i}{\sum_1^n w_i}f\left(\frac{1}{\sum_1^{n-1} w_1}\sum_1^{n-1} w_1 a_1\right)\\
\leq \frac{w_n}{\sum_1^n w_i}f(a_n) + \frac{\sum_1^{n-1} w_i}{\sum_1^n w_i}\frac{1}{\sum_1^{n-1} w_i}&\sum_1^{n-1} w_i f(a_i) = \frac{1}{\sum_1^n w_i}\sum_1^n w_i f(a_i)\ ,
\end{aligned}
$$

missä ensimmäinen epäyhtälö seuraa tapauksesta $n = 2$ ja jälkimmäinen induktio-oletuksesta.

□

Huomautus 3.26. Käyttämällä Jensenin epäyhtälöä voidaan kirjoittaa:

$$
\begin{aligned}
f\left(\mathcal{A}_w(a_1 w_1, \ldots, a_n w_n)\right) &= f\left(\frac{1}{\sum_1^n w_i}\sum_1^n w_i ai\right)\\
\leq \frac{1}{\sum_1^n w_i}\sum_1^n w_i f(a_i) &= \mathcal{A}_w\left(f(a_1)w_1, \ldots, f(a_n)w_n\right).
\end{aligned}
$$

Seuraavaksi esitellään kaksi todistusta joissa käytetään hyväksi Jensenin epäyhtälöä.

Todistus. (V) (Samanpainoinen tapaus)

Valitaan $f(x) = -log\ x$, ja koska $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ on funktio konveksi määrittelyjoukossaan $x \in]0, \infty[$. Käyttämällä funktiota f ja Jensenin epäyhtälöä voidaan kirjoittaa

$$
-log\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \leq -\frac{log\ x_1 + log\ x_2 + \cdots + log\ x_n}{n} = -log\left(a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}.
$$

Muokkaamalla yhtälöä ja käyttämällä eksponenttifunktiota, joka aidosti kasvavana säilyttää suuruusjärjestyksen, yhtälön molempiin puoliin saadaan

$$
e^{log\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)} \geq e^{log(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}}
$$

eli

$$
\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \left(a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}.
$$

Tämä on siis (GA). Koska todistuksessa käytetään luonnollista logaritmifunktiota rajataan $a_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Tämä ei kuitenkaan aiheuta ongelmia, sillä jos $a_i = 0$ jollakin i, geometrinen keskiarvo on 0 ja (GA) toteutuu automaattisesti. Yhtäsuuruus pätee selvästi jos ja vain jos $a_1 = \cdots = a_n$.

□

Samoja keinoja apuna käyttäen voidaan todistaa (GA) yleisen painon tilanteessa.

Todistus. (VI) (Yleisen painon tapaus)

Vaikka seuraava todistus käyttää hyväkseen täysin samoja konsteja kuin edellinenkin, esitetään se kuitenkin, koska loppujen lopuksi aika harvassa todistuksessa käsitellään myös painoja. Lisäksi tämä todistus on sangen selkeä. Tässä esitetään ainoastaan ydinkohdat.

Nyt siis luku a_1 saa painon w_1, luku a_2 painon w_2 jne

$$log\left(\frac{a_1w_1 + \cdots + a_nw_n}{\sum_{i=1}^n w_i}\right) \geq \frac{w_1}{\sum_{i=1}^n w_i} log\ a_1 + \cdots + \frac{w_n}{\sum_{i=1}^n w_i} log\ a_n$$
$$= log\,(a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n})^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}}.$$

Soveltamalla eksponenttifunktiota molempiin puoliin saadaan epäyhtälö muotoon

$$\frac{a_1w_1 + \cdots + a_nw_n}{\sum_{i=1}^n w_i} \geq (a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n})^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}},$$

joka on siis (GA) yleisen painon tilanteessa.

$\square$

Seuraavassa todistuksessa ongelmaa lähestytään kekseliäästi ääriarvoprobleeman kautta. Siinä käytetään ns. *Lagrangen kertojien menetelmää*, joka on keskeinen menetelmä sidottujen ääriarvopisteiden määrittämisessä. Tällä menetelmällä ratkotut ongelmat ovat tyypillisesti muodoltaan sellaisia, että jollekin funktiolle f on määritettävä ääriarvopisteet (ja ääriarvot) jonkin toisen funktion g antamien sidosehtojen eli rajoitteiden vallitessa.

Huomautus 3.27. (Lagrangen kertojien menetelmä)
Oletetaan että $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ovat annettuja reaaliarvoisia C^1-funktioita. Olkoon $\mathbf{x_0} \in U$ ja $g(\mathbf{x_0}) = c$, ja olkoon S niiden pisteiden joukko jolla funktio g saa arvon c. Oletetaan lisäksi, että $\nabla g(\mathbf{x_0}) \neq \mathbf{0}$.

Jos funtiolla f on lokaali maksimi- tai minimipiste joukossa S, tällöin on olemassa reaaliluku λ siten että

$$\nabla f(\mathbf{x_0}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x_0}) \tag{3.1}$$

Tämän yhtälön toteuttavaa pistettä $\mathbf{x_0}$ sanotaan funktion f kriittiseksi pisteeksi joukossa S. Katso todistus esim. [8, s. 226].

Todistus. (VII)

Pyritään määrittämään funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$ ääriarvot joukossa

$$S = \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n :\ g(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = c\right\}$$

Tässä funktio f kuvaa siis lukujen $a_1, \dots, a_n$ geometristä keskiarvoa ja funktio g puolestaan aritmeettista keskiarvoa, jonka arvoksi kiinnitetään c. Etsitään funktiolle f ääriarvoa, niiden pisteiden joukosta jotka antavat aritmeettiseksi keskiarvoksi luvun c.
Tarkastellaan pelkästään positiivisia lukuja a_i, sillä jos $a_i = 0$ jollakin $i = 1, \dots, n$ niin funktio f saa arvon nolla.

Koska $\nabla g\,(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \neq 0$, voidaan huomautuksessa 3.27 esiteltyä *Lagrangen kertojien menetelmää* käyttää.

Yhtälön (3.1) avulla saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a_1}(a_1, \dots, a_n) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial a_1}(a_1, \dots, a_n) \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_2}(a_1, \dots, a_n) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial a_2}(a_1, \dots, a_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_n}(a_1, \dots, a_n) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial a_n}(a_1, \dots, a_n) \\ \quad g\,(a_1, \dots, a_n) = c \end{cases}$$

Pientä laskentoa harjoittamalla saadaan yhtälöryhmä muokattua muotoon

$$\begin{cases} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \lambda a_1 \\ (a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \lambda a_2 \\ \qquad \vdots \\ (a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \lambda a_n \\ \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = c \end{cases}$$

Jos $\lambda = 0$, olisi myös $a_i = 0$ jollakin $i = 1, \dots, n$. Koska alussa tarkastelu rajattiin vain a:n positiivisiin arvoihin oletetaan jatkossa $\lambda \neq 0$. Tarkastelemalla n:ää ensimmäistä yhtälöä on selvää, että yhtälöryhmä toteutuu jos ja vain jos
$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
Viimeisestä yhtälöstä arvot saadaan ratkaistua eli $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = c$.

Näin ollen joukossa S funktion f ainoa ääriarvopiste on $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = c$ ja kyseinen ääriarvo on tällöin

$$f\,(c, \dots, c) = c.$$

Selvitetään vielä onko kyseessä maksimi- vai minimipiste.

Valitaan $a_1 = \frac{1}{2}\,c,\ a_2 = \frac{3}{2}\,c,\ a_3 = c,\ \dots\ ,\ a_n = c$, tällöin

$$f\left(\frac{1}{2}\,c, \frac{3}{2}\,c, c, c, \dots, c\right) = \sqrt[n]{\frac{3}{4}}\,c < c,$$

joten kysessä on maksimipiste ja (GA) on todistettu.

□

Huomautus 3.28. Kun $x \in \mathbb{R}$ niin

$$e^x \geq 1 + x.$$

Todistus. Tämä epäyhtälö olisi helppo todistaa esimerkiksi tutkimalla funktion $f = e^x - x - 1$ ääriarvoja. Toisaalta epäyhtälö seuraa funktion e^x (aidosta) konveksisuudesta, koska suora $y = x + 1$ on sen tangentti pisteessä $x = 0$ (Huomautus 3.22 b). Yhtäsuuruus pätee vain pisteessä $x = 0$.

□

Seuraavaksi esitettävä todistus on sangen selkeä ja siinä käytetään hyväksi huomautuksen 3.28 epäyhtälöä.

Todistus. (VIII)

Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon määritelmien mukaan luvuille $a_1, \ldots, a_n$ pätee $\mathcal{A} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ ja $\mathcal{G} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$. Jos $a_1 = \ldots = a_n$ niin $\mathcal{A} = \mathcal{G}$. Riittää siis kun todistetaan aito epäyhtälö $\mathcal{A} > \mathcal{G}$ ei-negatiivisille luvuille $a_1, \ldots, a_n$ kun kaikki luvut eivät ole yhtäsuuria.

Sijoittamalla $\frac{a_i}{\mathcal{A}} - 1$ huomautuksen 3.27 epäyhtälöön $e^x \geq 1 + x$ saadaan

$$e^{\frac{a_i}{\mathcal{A}} - 1} \geq \frac{a_i}{\mathcal{A}}.$$

Tässä on syytä huomata, että epäyhtälö on aito kunhan $a_i \neq \mathcal{A}$. Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, kertomalla kaikki epäyhtälöt $i = 1, \ldots, n$ puolittain yhteen saadaan

$$e^{\frac{a_1}{\mathcal{A}} - 1} \cdots e^{\frac{a_n}{\mathcal{A}} - 1} > \frac{a_1}{\mathcal{A}} \cdots \frac{a_n}{\mathcal{A}}$$

eli

$$\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{a_i}{\mathcal{A}} - 1} > \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\mathcal{A}}.$$

Tässä on siis kysessä aito epäyhtälö, koska rajasimme alussa pois vaihtoehdon jossa $a_1 = \ldots = a_n$ ja lisäksi vasen puoli on eksponenttifunktiona aina positiivinen. Muokkaamalla epäyhtälön vasenta puolta potenssin laskusääntöjen mukaan, saadaan epäyhtälö muotoon

$$e^{\frac{1}{\mathcal{A}} \sum_{i=n}^{n} a_i - n} > \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\mathcal{A}}.$$

Koska toisaalta $\mathcal{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$, niin $\sum_{i=1}^{n} a_i = n\mathcal{A}$ ja tekemällä sijoitus saadaan epäyhtälön vasemmasta puolesta $e^{(n-n)} = 1$.

Muokkaamalla vastaavasti epäyhtälön oikeaa puolta, saadaan se muotoon

$$\frac{1}{\mathcal{A}^n}\prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{\mathcal{G}^n}{\mathcal{A}^n}.$$

Näin ollen epäyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$1 > \frac{\mathcal{G}^n}{\mathcal{A}^n}$$

eli

$$\mathcal{A} > \mathcal{G}.$$

□

Huomautus 3.29. Jos $p \geq q \geq 0$ ja $x \geq y \geq 0$ niin

$$(px + y + a)\,(x + qy + a) \geq ((p+1)\,x + a)\,((q+1)\,y + a) \tag{3.2}$$

ja yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $x = y$.

Todistus. Epäyhtälö (3.2) seuraa suoraan yhtälöstä

$$(px + y + a)\,(x + qy + a) - ((p+1)\,x + a)\,((q+1)\,y + a) = (px - qy)\,(x - y)\,.$$

Helposti nimittäin nähdään että huomautuksen 3.29 oletusten vallitessa yhtälön oikea puoli ≥ 0.

□

(GA) voidaan todistaa epäyhtälön (3.2) avulla [2, s. 102], mutta samantyyylisesti etenevä todistus voidaan tehdä huomautuksessa 3.30 esiteltävää itsekeksimääni epäyhtälöä (3.3) käyttämällä. Etuna jälkimmäisessä epäyhtälössä on sen yksinkertaisuus verrattuna edelliseen.

Huomautus 3.30. Kun $x \geq y > 0$ ja $a \geq 0$, niin

$$xy \geq (x + a)(y - a). \tag{3.3}$$

Todistus. Auki kertomalla saadaan

$$(x + a)(y - a) = xy - a\underbrace{(x - y)}_{\geq 0} - a^2,$$

mistä epäyhtälö seuraa suoraan.

□

Todistus. (IX)
Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon symmetrisyydestä johtuen termien $a_1, a_2 \ldots, a_n$ järjestystä voidaan muuttaa tarvittaessa. Järjestetään luvut siten, että $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ ja arvioidaan seuraavanlaista yhtälöä

$$(n\mathcal{A}_n)^n = \overbrace{(a_1 + \cdots + a_n)\cdots(a_1 + \cdots + a_n)}^{\text{n tekijää}}\,.$$

Aloitetaan arviointi käyttämällä epäyhtälöä (3.3) sillä periaatteella, että aluksi x:ää vastaa tulon ensimmäinen tekijä ja y:tä toinen tekijä. Ensimmäiseen tulon tekijään lisätään termi $\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0}$ ja vastaavasti toisesta se vähennetään. Tällöin saadaan seuraavaa

$$(n\mathcal{A}_n)^n = \overbrace{(a_1 + \cdots + a_n) \cdots (a_1 + \cdots + a_n)}^{\text{n tekijää}}$$

$$\geq (2a_1 + a_3 \cdots + a_n)\,(2a_2 + a_3 \cdots + a_n)\,\overbrace{(a_1 + \cdots + a_n) \cdots (a_1 + \cdots + a_n)}^{\text{n-2 tekijää}}$$

Lisäämällä näin saadun, alaspäin arvioidun, tulon ensimmäiseen tekijään ei-negatiivinen termi $a_1 - a_3$ ja vähentämällä vastaava termin tulon kolmannesta tekijästä ja jatkamalla samalla tavalla kunnes on käyty läpi kaikki tulon tekijät pareittain ensimmäisen tekijän kanssa saadaan

$$\begin{aligned}
&(3a_1 + a_4 + \cdots + a_n)(2a_2 + a_3 + \cdots + a_n)(a_2 + 2a_3 + \cdots + a_n) \cdots \\
&\geq \cdots\cdots \\
&\geq na_1\,(2a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\,(a_2 + 2a_3 + \cdots + a_n) \cdots (a_2 + \cdots + a_{n-1} + 2a_n)
\end{aligned}$$

Nyt käydään samalla tavalla ensin loput tulon tekijät pareittain läpi termin $(2a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$ kanssa ja saatetaan se epäyhtälön alaspäin arvioinneilla muotoon na_2. Näin jatketaan kunnes päädytään muotoon

$$(n\mathcal{A}_n)^n \geq \cdots\cdots \geq \overbrace{(na_1) \cdots (na_n)}^{\text{n tekijää}} = (n\,\mathcal{G}_n)^n\,,$$

josta väite seuraa.

Päättelyketjusta havaitaan helposti yhtäsuuruuden toteutuvan epäyhtälössä jos ja vain jos $a_1 = \cdots a_n$. □

Huomautus 3.31. Jos kompleksisen matriisin $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ominaisarvot ovat λ_i, $1 \leq i \leq n$, niin tällöin $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$. Yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $A^*A = AA^*$.

Todistus. Todistus löytyy artikkelista [10, s. 377-402]

□

Seuraavassa todistuksessa ongelmaa lähestytään jälleen aivan uudella tavalla matriisilaskennan kautta, käyttämällä hyväksi huomautusta 3.31.

Todistus. (X)

Olkoon matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaistaessa (katso [3, s. 386]) matriisin A ominaisarvoja yhtälöstä

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0,$$

saadaan yhtälö muotoon

$$\lambda^n = a_1 \cdots a_n.$$

Näin ollen matriisin A ominaisarvoille $\lambda_1, ..., \lambda_n$ pätee $|\lambda_i| = \sqrt[n]{a_1...a_n} = \mathcal{G}_n$ kaikille $i = 1, ..., n$.
Nyt huomautuksen 3.31 nojalla saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq n\ \mathcal{G}_n\left(a_1^2, \ldots, a_n^2\right),$$

joka on yhtäpitävää (GA):n kanssa.

$\square$

Koska integraalilaskenta laskentamenetelmänä on niin merkittävä, osoitetaan (GA) myös sitä hyväksi käyttäen. Seuraava todistus suoritetaan yleisen painon tilanteessa.

Todistus. (XI)

Oletetaan että $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ ja $a_1 \leq \cdots \leq a_n$. Tällöin on olemassa $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ siten että $a_k \leq \mathcal{G}_n \leq a_{k+1}$. Kirjoittamalla seuraavanlaisen lausekkeen huomaamme helpohkosti molempien summien sisältävän ainoastaan ei negatiivisia termejä eli

$$\sum_{i=1}^{k} w_i \int_{a_i}^{\mathcal{G}_n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\mathcal{G}_n}\right) dt + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \int_{\mathcal{G}_n}^{a_i} \left(\frac{1}{\mathcal{G}_n} - \frac{1}{t}\right) dt \geq 0.$$

Integraaleja auki laskemalla suoraviivaisilla laskuilla saadaan

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i log\ \mathcal{G}_n - \sum_{i=1}^{n} w_i - \sum_{i=1}^{n} w_i log\ a_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i a_i}{\mathcal{G}_n} = log\ \mathcal{G}_n - 1 - log\ \mathcal{G}_n + \frac{\mathcal{A}_n}{\mathcal{G}_n} = \frac{\mathcal{A}_n}{\mathcal{G}_n} - 1,$$

mikä on yhtäpitävää (GA):n kanssa. Yhtäsuuruus toteutuu epäyhtälössä jos ja vain jos $a_i = \mathcal{G}_n\ \ \forall\ i = 1, \ldots, n$ eli jos ja vain jos $a_1 = \cdots = a_n$.

$\square$

Seuraavassa ”todistuksessa” käytetään apuna termodynamiikan ensimmäistä ja toista lakia. Jonkin verran kritiikkiä on kohdistettu tämän tyyppiseen tapaan todistaa matemaattisia teorioita kokeellisten luonnonlakien pohjalta, mutta tämän kaltaiset todistukset ovat omiaan lisäämään ymmärrystä luonnon lainalaisuuksista. Koska (GA) on mahdollista todistaa lukuisilla matemaattisesti korrekteilla tavoilla, voisi jopa ajatella käänteisesti tällaisen todistuksen ”lisäävän” luonnonlakienkin uskottavuutta, ainakin matemaatikon silmissä!

Todistus. (XII)

Otetaan tarkasteluun n identtistä lämpösäiliöitä, joiden absoluuttiset lämpötilat ovat a_i, $1 \leq i \leq n$ ja kunkin lämpökapasitetti on C. Laitetaan lämpösäiliöt lämpökontaktiin toistensa kanssa ja annetaan niiden lämpötilojen tasaantua loppulämpötilaan T_l.
Nyt termodynamiikan ensimmäisen eli energian säilymislain mukaan [12, s. 730]

$$\sum_{i=1}^{n} C\left(a_i - T_l\right) = 0,$$

missä

$$T_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \mathcal{A}_n.$$

Vastaavasti termodynamiikan toisen lain mukaan [12, s. 730] entropia kasvaa prosessin edetessä. Systeemille jossa on n lämpösäiliötä, voidaan tämä entropian muutos $\Delta S \geq 0$ laskea seuraavasti,

$$\begin{aligned}\Delta S &= C\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{T_l}\frac{dT}{T} = C\sum_{i=1}^{n} log\left(\frac{T_l}{a_i}\right) = C\, log\left(\frac{T_l^n}{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right)\\ &= Cn\, log\left(\frac{T_l}{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}}\right) = Cn\, log\left(\frac{\mathcal{A}_n}{\mathcal{G}_n}\right) \geq 0\end{aligned}$$

Näin ollen logaritmin laskusääntöjen nojalla

$$\mathcal{A}_n \geq \mathcal{G}_n.$$

Yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Tämä havaitaan helposti, sillä tällöin määrätyssä integraalissa $a_i = T_l,\ \forall\, i = 1, \ldots, n$.

□

4. Epäyhtälön $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A}$ sovelluksia

Tässä kappaleessa esitellään lukuisia tilanteita, joissa epäyhtälöä $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A}$ voidaan hyödyntää.

Ensimmäisenä esitellään mielenkiintoinen geometrinen sovellus.

4.1. **Sovelluksia samanpainoisessa tilanteessa.**

Esimerkki 4.1. Tilanteessa $n = 3$ (GA):n avulla voidaan osoittaa, että tunnettaessa kolmion piiri tasasivuisella kolmiolla on kaikkein suurin pinta-ala.

Olkoon kolmion sivujen pituudet a, b, c eli kolmion piirin puolikas on tällöin $p = \frac{a+b+c}{2}$. Tunnetun Heronin kaavan [11, s. 28] mukaan sen pinta-ala on $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Yksinkertaisilla laskutoimituksilla saadaan tasasivuisen kolmion alaksi $A_0 = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Nyt (GA):n avulla samanpainoisessa tilanteessa kun $n = 3$ saadaan,

$$A = \sqrt{p}\left(\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}\right)^{3/2} \leq \sqrt{p}\left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{3}\right)^{3/2} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = A_0.$$

Helposti havaitaan yhtäsuuruuden toteutuvan yllä olevassa epäyhtälössä jos ja vain jos $p - a = p - b = p - c$ eli $a = b = c$.

Hyvin kauan on tunnettu aritmeettisen ja harmonisen keskiarvon soveltaminen määritettäessä neliöjuuria ns. Heronin menetelmällä.

Esimerkki 4.2. Pyrittäessä selvittämään neliöjuuren arvo luvulle $x > 0$, voidaan kätevästi käyttää hyväksi epäyhtälöä $\mathcal{H} \leq \mathcal{A}$ tilanteessa $n = 2$.

Valitaan mielivaltaiset luvut a, b siten, että $b > a > 0$ ja $ab = x$. Asetetaan $a_0 = a$, $b_0 = b$ ja määritellään rekursiivisesti

$$a_n = \mathcal{H}\left(a_{n-1}, b_{n-1}\right) = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{b_{n-1}}} = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}},$$

$$b_n = \mathcal{A}\left(a_{n-1}, b_{n-1}\right) = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},$$

missä $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{0\}$.

Tarkistetaan seuraavaksi, että $a_n b_n = x$ kun $n \in \mathbb{N}$. Suoritetaan asian toteaminen induktiivisesti. Kun $n = 1$ niin asia on selvä, sillä

$$a_1 \cdot b_1 = \left(\frac{2ab}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) = ab.$$

Oletetaan seuraavaksi, että yhtälö toteutuu kaikkilla luonnollisilla luvuilla $0, \ldots, n-1$ ja pyritään tämän nojalla näyttämään, että se toteutuu myös arvolla n. Tehdään siis induktio-oletus, että

$$a_{n-1} \cdot b_{n-1} = \frac{2a_{n-2} \cdot b_{n-2}}{a_{n-2} + b_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2} + b_{n-2}}{2} = a_{n-2} \cdot b_{n-2} = ab$$

ja tämän jälkeen suoritetaan lasku

$$a_n \cdot b_n = \mathcal{H}\left(a_{n-1}, b_{n-1}\right) \cdot \mathcal{A}\left(a_{n-1}, b_{n-1}\right) = \cdots = a_{n-2} \cdot b_{n-2}.$$

Induktio-oletuksen nojalla $a_n b_n = x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{0\}$.

Keskiarvojen ominaisuuksien perusteella on selvää, että $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ ja suoralla laskulla nähdään, että

$$b_n - a_n < \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} < \cdots < \frac{b-a}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Näin ollen siis

$$lim_{n\to\infty}\, a_n = lim_{n\to\infty}\, b_n = \sqrt{x}.$$

Eli kahden luvun aritmeettisen ja harmonisen keskiarvon iteraatio suppenee niiden yhdistettyyn keskiarvoon, geometriseen keskiarvoon. Vrt. Huomautus 3.5.

Huomautus 4.3. Kyseinen menetelmä on varsin tehokas tapa laskea neliöjuuria. Valitsemalla $a_0 = 2$ ja $b_0 = 1$ jo kolmas iteraatio antaa tuloksen oikein viiden desimaalin tarkkuudella eli $\sqrt{2} \approx 1,41421$. Voidaan itseasiassa osoittaa että Heronin menetelmän $(m+1)$:s approksimaatio on sama mikä saavutetaan ketjumurtolukukehitelmillä 2^m:nellä kerralla. Tällä on merkitystä jopa tietokoneille laskemisessa, koska ketjumurtoluvuista tulevat approksimaatiot ovat tietyssä mielessä ”parhaita” approksimaatioita kyseisille luvuille.

Huomautus 4.4. Keskiarvojen iteraatioita, yhdistettyjä keskiarvoja ja Heronin menetelmän laajennusta korkeampiin juuriin on käsitelty mm. [2, s. 413 -]

(GA):n avulla voidaan ratkaista varsin kätevästi monia muitakin raja-arvoon liittyviä ongelmia. Näytetään esimerkkinä että $lim_{n\to\infty} = \sqrt[n]{n} = 1$.

Esimerkki 4.5. Oletetaan että $n \geq 3$, tällöin voidaan arvioida ylöspäin seuraavasti

$$\begin{aligned} 1 < n^{1/2n} = \left(n^{n/2}\right)^{1/n^2} &= \sqrt[1/n^2]{1^{n^2-n} \cdot \left(\sqrt{n}\right)^n} < \frac{\overbrace{1 + \cdots + 1}^{n^2-n\ termia} + \overbrace{\sqrt{n} + \cdots + \sqrt{n}}^{n\ termia}}{n^2} \\ &= \frac{n^2 - n + n\sqrt{n}}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

ja tässä epäyhtälö saadaan siis (GA):ä käyttämällä. Näin ollen tämän perusteella voidaan kirjoittaa

$$1 < n^{1/n} = \left(n^{1/2n}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 < 1 + \frac{3}{\sqrt{n}},$$

joten

$$lim_{n\to\infty} = \sqrt[n]{n} = 1.$$

Yksi tärkeimmistä ellei jopa tärkein (GA):n sovelluskohde on muiden epäyhtälöiden todistaminen.

Esimerkki 4.6. Todistetaan, että epäyhtälö $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < n^n$ pätee $\forall\, n > 1$.

Ratkaisu. Käyttämällä (GA):ä samanpainoisessa tilanteessa lukuihin $1, 3, 5, \ldots 2n-1$ saadaan

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < \left(\frac{1+3+5\cdots+(2n-1)}{n}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n}\right)^n = n^n.$$

Helpohkosti voidaan näyttää, että osoittajassa oleva aritmeettinen sarja $S_n = 1+3+5\cdots+(2n-1) = n^2$.

Kirjoitetaan summa S_n kahteen kertaan siten että toinen kirjoitetaan vastakkaisessa järjestyksessä ja summaamalla termit allekkain saadaan

$$\begin{aligned} S_n &= 1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1) \\ S_n &= (2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1 \\ \hline 2S_n &= \underbrace{2n+2n+\cdots+2n+2n}_{\text{n termiä}} \end{aligned}$$

eli

$$2S_n = n \cdot 2n \quad \Longrightarrow \quad S_n = n^2.$$

Esimerkki 4.7. Tehtävänämme on vertailla lukujen $(2n)!$ ja n^{2n} suuruuksia.

Ratkaisu. Helposti havaitaan kummassakin luvussa olevan $2n$ tulon tekijää ja kun $n = 1$ tai $n = 2$ on $(2n)! > n^{2n}$. Kun taas $n = 3$ niin $720 = (2n)! < n^{2n} = 729$. Pyritään nyt näyttämään, että epäyhtälö pätee näin päin aina kun $n \geq 3$.
Tutkitaan aluksi vertailtavien lukujen osamäärää, joka voidaan kirjoittaa seuraavasti tulona, jonka tekijöinä on $(2n-1)$ murtolukua

$$\frac{n^{2n}}{(2n)!} = \left(\frac{n}{1}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \cdots \left(\frac{n}{n}\right) \cdots \left(\frac{n}{2n-2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n}{2n}\right).$$

Triviaalisti havaitaan, että murtolukuun $\frac{n}{n}$ $(=1)$ asti kaikki tulontekijät ovat suurempia kuin yksi ja taas sen jälkeen pienempiä kuin yksi. Muodostetaan seuraavaksi lukupareja yhdistämällä ensimmäinen murtoluku viimeisen kanssa, toinen toiseksi viimeisen kanssa ja niin edelleen eli

$$\left(\tfrac{n}{1}\right) \text{ ja } \left(\tfrac{n}{2n-1} \cdot \tfrac{n}{2n}\right), \quad \left(\tfrac{n}{2}\right) \text{ ja } \left(\tfrac{n}{2n-2}\right), \ldots, \tfrac{n}{n-1} \text{ ja } \left(\tfrac{n}{2n-(n-1)}\right)$$

ja näin ollen keskimmäinen murtoluku $\frac{n}{n}$ jää ilman paria. Sovelletaan seuraavaksi (GA):ä termeihin k ja $2n-k$, missä $2 \leq k \leq n-1$. Tästä saadaan

$$k(2n-k) < \left(\frac{k+2n-k}{2}\right)^2 = n^2,$$

mikä on helposti muokattavissa muotoon $\left(\frac{n}{k} \cdot \frac{n}{2n-k}\right) > 1$. Ensimmäistä paria lukuunottamatta on siis kaikkien murtolukuparien tulo suurempi kuin 1. Selvitetään seuraavaksi millä n:n arvoilla ensimmäisen lukuparin tulo

$$\frac{n^3}{2n(2n-1)} \geq 1.$$

Ratkaisemalla epäyhtälö saadaan,

$$n \geq \sqrt{2} + 2 \approx 3,41.$$

Näin ollen siis jokaisen parin tulo on suurempi kuin 1 kun $n \geq 4$ ja tällöin $(2n)! < n^{2n}$. Aiemmin todettiin tapaukset $n = 1, 2$ ja 3 eli kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 3$ pätee

$$(2n)! < n^{2n}.$$

4.2. **Sovelluksia painotetussa tilanteessa ja muita yleistyksiä.** Kaikki tähänastiset esimerkit ovat hyödyntäneet (GA):ä samanpainoisessa tilanteessa, seuraavissa esimerkeissä hyödynnetään painotettua versiota.

Seuraavassa esimerkissä esitellään geometriaa sivuava sovellus (GA):stä

Esimerkki 4.8. Jos a, b ja c ovat kolmion sivujen pituudet, niin näytetään että tällöin pätee

$$\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \cdot \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \cdot \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1.$$

Ratkaisu. Aloitetaan muuttujanvaihdoilla

$$w_1 = \frac{a}{a+b+c}, \quad w_2 = \frac{b}{a+b+c}, \quad w_3 = \frac{c}{a+b+c}$$

ja jatketaan positiivisilla luvuilla (positiivisuus seuraa siitä, että a, b ja c ovat kolmion sivujen pituudet)

$$a_1 = 1 + \frac{b-c}{a}, \quad a_2 = 1 + \frac{c-a}{b}, \quad a_3 = 1 + \frac{a-b}{c}.$$

Nyt voidaan kirjoittaa $(w_1 + w_2 + w_3 = 1)$

$$a_1^{w_1} a_2^{w_2} a_3^{w_3} \leq w_1 a_1 + w_2 a_2 + w_3 a_3 = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

eli

$$\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^{\frac{c}{a+b+c}} \leq 1.$$

Korottamalla epäyhtälön molemmat puolet potenssiin $a+b+c$ saadaan haluttu epäyhtälö.

Seurauksessa 3.10 nähtiin, että Youngin epäyhtälö on itseasiassa hieman modifioitu versio kahden termin painotetusta (GA):stä. Todistetaan tämän avulla kuuluisa *Hölderin epäyhtälö*, mikä on erittäin keskeinen potenssikeskiarvojen tutkimuksessa. Potenssikeskiarvoista lisää kappaleessa 5.

Esimerkki 4.9. Olkoot p ja p' konjugoidut indeksit kuten seurauksessa 3.10. (Huomioidaan myös, että $p, p' > 1$.) Tällöin mielivaltaisille $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n \in \mathbb{R}_+$ pätee ns. *Hölderin epäyhtälö*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Ratkaisu. Jakamalla Hölderin epäyhtälö puolittain oikean puolen termeillä, saadaan se yksinkertaisella muokkaamisella muotoon

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^{n} a_j^p}\right)^{1/p} \left(\frac{b_i^{p'}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{p'}}\right)^{1/p'} \leq 1.$$

Nyt suoraan (GA):stä saadun Youngin epäyhtälön nojalla voidaan vasenta puolta arvioida seuraavasti

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^{n} a_j^p}\right)^{1/p} \left(\frac{b_i^{p'}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{p'}}\right)^{1/p'} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^{n} a_j^p} + \frac{1}{p'}\frac{b_i^{p'}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{p'}}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

ja näin siis Hölderin epäyhtälö on todistettu.

Huomautus 4.10. Kun $p = 2 \Rightarrow p' = 2$ palautuu Hölderin epäyhtälö muotoon

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Tämä, Hölderin epäyhtälön lailla, sangen kuuluisa epäyhtälö on nimeltään *Cauchyn epäyhtälö*. Muita tunnettuja nimiä tälle epäyhtälölle on *Cauchy-Schwarz-epäyhtälö* tai *Cauchy-Schwarz-Bunjakovski-epäyhtälö*. Luonnollisesti yllä oleva Hölderin epäyhtälön todistus todistaa myös Cauchyn epäyhtälön.

Harvemmin kuulee puhuttavan harmonis-aritmeettisesta keskiarvoepäyhtälöstä (HA). Tämä johtuu osaltaan siitä, että se on näennäisesti heikompi epäyhtälö kuin (GA), mutta varsinaisesti siitä että (GA):n todistaminen todistaa myös (HA):n. (Vrt. seuraus 3.13)

Seuraavassa esimerkissä (HA) osoitetaan kuitenkin suoraan, sillä todistus on varsin lyhyt ja yksinkertainen, kun käytetään huomautuksessa 4.10 esiteltyä Cauchyn epäyhtälöä.

Esimerkki 4.11. Aloitetaan kirjoittamalla

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{a_i}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} (w_i a_i)^{1/2}\left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{1/2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2,$$

missä epäyhtälövaihe seuraan Cauchyn epäyhtälöstä. Yksinkertaisella muokkauksella saadaan epäyhtälö muotoon

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{a_i}}$$

eli

$$\mathcal{A}_w \geq \mathcal{H}_w.$$

Jotta nähtäisiin että monet erittäin käyttökelpoiset epäyhtälöt ovat tavalla tai toisella sidoksissa (GA):öön todistetaan Hölderin epäyhtälön avulla *Minkowskin epäyhtälö.*

Esimerkki 4.12. Olkoon $p > 1$, tällöin mielivaltaisille $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$ pätee ns. *Minkowskin epäyhtälö*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

Ratkaisu. Tarkastellaan epäyhtälön vasenta puolta:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{(p-1)/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{(p-1)/p},$$

missä epäyhtälövaihe seuraa Hölderin epäyhtälöstä. Ottamalla nyt oikealla puolella yhteinen tekijä, sievenee epäyhtälö muotoon

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{(p-1)/p}.$$

Jakamalla epäyhtälö puolittain tekijällä $\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{(p-1)/p}$ saadaan se lopulta muotoon

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p},$$

mikä on siis Minkowskin epäyhtälö.

Huomautus 4.13. Minkowskin epäyhtälö on itseasiassa kolmioepäyhtälö l^p-jonoavaruudessa.

Esimerkki 4.14. Todistetaan *Bernoullin epäyhtälö*: Jos $x \in \mathbb{R},\ \ p \in \mathbb{R}_+,\ x > -1$ ja $p \neq 1$, niin

$$(1 + x)^p \geq 1 + px \qquad (p > 1), \tag{4.1}$$

ja vastaavasti

$$(1 + x)^p \leq 1 + px \qquad (0 < p < 1). \tag{4.2}$$

Molemmissa epäyhtälöissä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $x = 0$.

Ratkaisu: Todistetaan jälkimmäinen epäyhtälö ensin.
Olkoon $(0 < p < 1),\ w_1 = p,\ w_2 = 1 - p,\ a_1 = 1 + x > 0$ ja $a_2 = 1$. Kahden termin painotetulla (GA):llä saadaan

$$p(1 + x) + (1 - p) \cdot 1 \geq (1 + x)^p \cdot 1^{1-p}$$

eli

$$(1 + x)^p \leq 1 + px.$$

(GA):n nojalla yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $a_1 = a_2\ \Rightarrow\ x = 0$.

Olkoon nyt $p > 1$. Kun $1 + px \leq 0$ ensimmäinen (aito) epäyhtälö pätee triviaalisti. Kun taas $1 + px > 0$ saadaan jo todistetun jälkimmäisen epäyhtälön nojalla

$$(1 + px)^{1/p} \leq 1 + \frac{1}{p} \cdot px = 1 + x$$

ja korottamalla tämä puolittain potenssiin p saadaan

$$(1 + x)^p \geq 1 + px.$$

Tämän kappaleen viimeisessä esimerkissä näytetään mm. miten Neperin luvun e määrittelevän jonon suppenemisen tarkkuutta voidaan arvioida.

Esimerkki 4.15. Olkoon $a_1 + \cdots + a_n = X > 1$ ja halutaan selvittää milloin tulo $a_1 \cdots a_n$ on suurimmillaan. Nyt (GA):n nojalla tiedetään, että epäyhtälössä

$$a_1 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n$$

yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $a_1 = \cdots = a_n$. Näin ollen ongelma voidaan palauttaa muotoon, jossa etsitään kokonaislukua n, jolla $\left(\frac{X}{n}\right)^n$ saa suurimman arvonsa.

Yritettäessä maksimoida $\left(\frac{X}{n}\right)^n$, voidaan aivan yhtä hyvin maksimoida $n\, log\left(\frac{X}{n}\right)$ eli konstruoidaan funktio $f(t) = t\, log\left(\frac{X}{t}\right)$. Koska $f\,'(t) = \; log\left(\frac{X}{t}\right) - 1$, on funktiolla absoluuttinen maksimi pisteessä $t = \frac{X}{e}$. Olkoon m se kokonaisluku, jolla $\left(\frac{X}{m}\right)^m$ saa suurimman arvonsa kokonaislukujen joukossa. Näin ollen

$$\left(\frac{X}{m+1}\right)^{m+1} \leq \left(\frac{X}{m}\right)^m$$

eli

$$X \leq (m+1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \tag{4.3}$$

ja toisaalta

$$\left(\frac{X}{m-1}\right)^{m-1} \leq \left(\frac{X}{m}\right)^m$$

eli

$$X \geq m\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}. \tag{4.4}$$

Soveltamalla (GA):ä lukuihin $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$ ja $a_n = 1$ saadaan

$$\left(1 \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{1/n} < \frac{(n-1)(1+\frac{1}{n-1})+1}{n}$$

eli

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{4.5}$$

Tässä on kyseessä aito epäyhtälö, koska (GA):ssä yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $a_1 = \cdots = a_n$, ja nyt $1 + \frac{1}{n-1} \neq 1, \;\; \forall \;\, n = 2, 3, \ldots$
Nyt voidaan epäyhtälön 4.5 nojalla kirjoittaa

$$n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{4.6}$$

Epäyhtälöistä 4.3, 4.4, 4.5 ja 4.6 nähdään että kaikille $X > 1$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < X < (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}. \tag{4.7}$$

Epäyhtälö 4.7 voidaan puolestaan muokata muotoon

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \frac{X}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{4.8}$$

Yleisesti ottaen funktion f maksimipiste $t = \frac{X}{e}$ ei ole kokonaisluku, mutta erikoistapauksessa kun $\frac{X}{e} = n \in \mathbb{N}$ on n yksikäsitteinen ratkaisu ja se on yhtäpitävää epäyhtälön 4.7 kanssa eli voidaan kirjoittaa

$$n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < ne < (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Ja koska tämä pätee $\forall\ n = 2, 3, \ldots$ voidaan raja-arvotarkastelua varten kirjoittaa

$$\frac{e}{1+\frac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e. \tag{4.9}$$

Tästä nähdään että

$$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Suoritetuissa laskuissa on muutamia huomionarvoisia seikkoja. Alussa lähdettiin liikkeelle määritelmästä $log\ e = 1$ ja päädyttiin Neperin luvun tuttuun raja-arvoesitykseen. Toinen ehkäpä vielä merkittävämpi, seikka on suoraan (GA):stä saatu epäyhtälö 4.5. Siitä nimittäin nähdään automaattisesti jonon $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ olevan kasvava n:n suhteen. Lisäksi epäyhtälön 4.9 vasemmanpuoleisesta epäyhtälöstä saadaan myös virhearvio jonon n:nnelle termille.

5. Potenssikeskiarvot

Lopuksi luodaan katsaus aritmeettisen, geometrisen ja harmonisen keskiarvon klassiseen yleistykseen ns. *potenssikeskiarvoon.* Osoitetaan myös, että $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A}$ on yleistettävissä potenssikeskiarvojen avulla eli pätee niin sanottu potenssikeskiarvoepäyhtälö.

Määritelmä 5.1. Kun $r \in \mathbb{R}$ määritellään painotettu r:s potenssikeskiarvo luvuille $a_1, \ldots, a_n$ ja painoille $w_1, \ldots, w_n$,

$$\mathcal{M}_w^r = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \sum_{i=1}^n w_i a_i^r \right)^{1/r}, & kun\ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \mathcal{G}_w\ , & kun\ r = 0, \\ max\{a_1, \dots, a_n\}, & kun\ r = \infty, \\ min\{a_1, \dots, a_n\}, & kun\ r = -\infty. \end{cases}$$

Huomautus 5.2. Samanpainoisessa tilanteessa potenssikeskiarvo saa luonnollisen muodon

$$\mathcal{M}_n^r = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{1/r}.$$

Koska $\mathcal{M}_{w,n}^1 = \mathcal{A}_{w,n},\ \mathcal{M}_{w,n}^0 = \mathcal{G}_{w,n},\ \mathcal{M}_{w,n}^{-1} = \mathcal{H}_{w,n}$ muodostavat potenssikeskiarvot luonnollisen laajennuksen näille perustavaa laatua oleville keskiarvoille. Tapaukset $r = 1$ ja $r = -1$ ovat lähes triviaaleja ja seuraavat suoralla laskulla määritelmästä. Tapaus $r = 0$ on puolestaan hieman monimutkaisempi ja siksi se on syytä todistaa. Ennen todistusta palautetaan mieliin siinä käytettävä *l'Hôpitalin sääntö*.

Huomautus 5.3. *l'Hôpitalin säännön* mukaan pätee avoimella välillä $]a, b[\ni c$ määritellyille ja derivoituville funktioille f ja g,

$$lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

kunhan lisäksi $g'(c) \neq 0$ ja joko $lim_{x \to c} f(x) = lim_{x \to c} g(x) = 0$ tai $lim_{x \to c} |g(x)| = \infty$. Raja-arvo voi olla joko äärellinen tai ääretön. Katso todistus esim. [4, s. 598-600].

Todistus. Heikentämättä millään lailla todistuksen yleispätevyyttä skaalataan painot, kuten on monesti aiemminkin tehty, siten että $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Käyttämällä todistuksessa apuna logaritmin ominaisuuksia saadaan,

$$lim_{r \to 0}\, log\, \mathcal{M}_w^r = lim_{r \to 0} \frac{log\left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^r\right)}{r} =$$

ja koska nyt on kyseessä $\left(\frac{0}{0}\right)$ muotoa oleva raja-arvo voidaan *l'Hôpitalin* sääntöä soveltaa. Pienellä laskemisella saadaan yhtälö muotoon

$$= lim_{r \to 0} \frac{\sum_{i=1}^n (w_i a_i^r log\ a_i)}{\sum_{i=1}^n w_i a_i^r} = \left(\sum_{i=1}^n w_i log\ a_i \right) = log\ \left(a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n}\right) = log\, \mathcal{G}_w.$$

eli

$$lim_{r \to 0}\, \mathcal{M}_w^r = \mathcal{G}_w.$$

$\square$

Osoitetaan vielä raja-arvot

$$lim_{r\to\infty}\, \mathcal{M}_w^r = max\{a_1,\dots,a_n\},\ lim_{r\to-\infty}\, \mathcal{M}_w^r = min\{a_1,\dots,a_n\}.$$

Todistus. Osoitetaan ensin että $lim_{r\to\infty}\, \mathcal{M}_w^r = max\{a_1,\dots,a_n\}$.

Oletetaan että $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ja lukujen olevan järjestetty siten että $max\{a_1,\dots,a_n\} = a_n$. Tällöin potenssikeskiarvon määritelmän nojalla pätee

$$\left(\frac{w_n}{\sum_{i=1}^n w_i}\right)^{1/r} a_n \le \mathcal{M}_w^r \le a_n.$$

Tästä nähdään suoraan, että

$$lim_{r\to\infty}\mathcal{M}_w^r = a_n = max\{a_1,\dots,a_n\}.$$

Seuraavaksi osoitetaan että $lim_{r\to-\infty}\, \mathcal{M}_w^r = min\{a_1,\dots,a_n\}$.

Nyt lukujen suuruusjärjestyksestä puolestaan oletetaan, että $min\{a_1,\dots,a_n\} = a_1$. Olkoon $b_i = \frac{1}{a_i}$, näin ollen $max\{b_1,\dots,b_n\} = \frac{1}{a_i}$. Nyt ylläolevan todistusksen perusteella tiedetään, että $lim_{r\to\infty}\, \mathcal{M}_w^r(b) = \frac{1}{a_1}$ ja näin ollen voidaan kirjoittaa

$$\mathcal{M}_w^r(b) = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}\sum_{i=1}^n w_i b_i^r\right)^{1/r} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}\sum_{i=1}^n w_i a_i^{-r}\right)^{1/r} \longrightarrow \frac{1}{a_1}, \quad \text{kun} \quad r \to \infty.$$

Tekemällä nyt muuttujanvaihdon $s = -r$ saadaan puolestaan

$$(\mathcal{M}_w^s(a))^{-1} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}\sum_{i=1}^n w_i a_i^s\right)^{1/-s} \longrightarrow \frac{1}{a_1}, \quad \text{kun} \quad s \ \to \ -\infty.$$

Näin ollen siis

$$lim_{s\to-\infty}\, \mathcal{M}_w^s(a) = a_1 = min\{a_1,\dots,a_n\} = a_1.$$

□

5.1. **Potenssikeskiarvoepäyhtälö.** Kuten aiemmin todettiin, saadaan aritmeettinen keskiarvo potenssikeskiarvosta potenssin arvolla $r = 1$, geometrinen keskiarvo $r = 0$ ja harmoninen keskiarvo potenssin arvolla $r = -1$. Nyt kun tiedetään näiden kolmen keskiarvon välillä vallitsevasta epäyhtälöstä, herää luonnollinen ajatus yleisemmästä epäyhtälöstä potenssikeskiarvoille.

Lause 5.4. *Kun $r, s \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ja $r < s$, niin luvuille $a_1,\dots,a_n$ ja painoille $w_1,\dots,w_n$ pätee*

$$\mathcal{M}_w^r \le \mathcal{M}_w^s$$

ja yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $a_1 = \dots = a_n$.

Todistus suoritetaan yleisen painon tilanteessa.

Todistus. Menettämättä todistuksen yleispätevyyttä oletetaan että $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Jaetaan todistus kolmeen osaan: $0 < r < s$, $r < 0 < s$ ja $r < s < 0$, joista todistetaan ensin tapaus $r < 0 < s$. Selkeyden vuoksi tämä todistus on syytä jakaa vielä kahteen osaan.
$r = 0 < s$:

$$\mathcal{G} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^s \right)^{1/s} = \mathcal{M}^s,$$

ja korottamalla nyt epäyhtälö puolittain potenssiin s saadaan

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i s} \leq \sum_{i=1}^{n} w_i a_i^s.$$

Kyseessä on siis painotettu (GA) luvuille $a_1^s, \ldots, a_n^s$.
$r < 0 = s$:

$$\mathcal{M}^r = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^r \right)^{1/r} \leq \prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i} = \mathcal{G},$$

ja samoin kuin edellisessä tapauksessa epäyhtälö korotetaan potenssiin r. Nyt kuitenkin $r < 0$ eli epäyhtälön suuruusjärjestys vaihtuu, joten saadaan

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i r} \leq \sum_{i=1}^{n} w_i a_i^r$$

eli painotettu (GA):n luvuille $a_1^r, \ldots, a_n^r$. Lause on nyt todistettu kun $r < 0 < s$.

Todistetaan seuraavaksi tilanne $0 < r < s$:

Olkoon $t = \frac{s}{r}$ ja $b_i = a_i^r \Leftrightarrow b_i^t = a_i^s \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$ ja määritellään avoimessa joukossa $]0, \infty[$ funktio $f(x) = x^t$.

Koska nyt $(t > 1)$ on $f''(x) = (t-1)t\, x^{t-2} > 0, \quad \forall\, x > 0$ eli f on aidosti konveksi (Katso lause 3.23), voidaan Jensenin epäyhtälön (Lause 3.25) nojalla kirjoittaa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i b_i \right)^t = f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i b_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i b_i^t.$$

Yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $b_1 = \cdots = b_n$. Tekemällä edellä saatuun epäyhtälöön takaisinsijoitukset $t = \frac{s}{r}$ ja $b_i = a_i^r$ saadaan

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^r \right)^{s/r} \leq \sum_{i=1}^{n} w_i a_i^s$$

ja yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $a_1 = \cdots = a_n$. Korottamalla molemmat puolet potenssiin $1/s > 0$ saadaan puolestaan epäyhtälö

$$\mathcal{M}^r = \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^s\right)^{1/s} = \mathcal{M}^s$$

Yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $a_1 = \cdots = a_n$. Näin ollen todistus on valmis myös tapauksessa $0 < r < s$.

Vielä on jäljellä todistus tilanteessa $r < s < 0$:

Todistus etenee lähes identtisesti yllä olevien tapausten kanssa, joten käydään läpi vain ydinkohtia eroavaisuuksista. Pienet erot seuraavat siitä että nyt $0 < t = \frac{s}{r} < 1$, jonka johdosta konveksiksi funktioksi valitaan $f(x) = -x^t$ eli $f''(x) = t\,(1-t)\,x^{t-2} > 0$. Miinusmerkki aiheuttaa Jensenin epäyhtälövaiheessa merkin kääntymisen ja lopussa korotettaessa epäyhtälö puolittain potenssiin $1/s < 0$ kääntyy merkki toisen kerran, samaan tyyliin kuin $r < 0 = s$. Näin ollen myös tilanteessa $r < s < 0$ saadaan epäyhtälö lopulta muotoon

$$\mathcal{M}^r = \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^s\right)^{1/s} = \mathcal{M}^s.$$

□

5.2. **Potenssikeskiarvoepäyhtälön sovelluksia.** Kahdessa ensimäisessä esimerkissä käytetään huomautuksen 5.2 samanpainoisen tilanteen potenssikeskiarvoepäyhtälöä. Ennen esimerkkiä esitellään siinä hyödynnettävä apulause.

Lemma 5.5. *Kun $a_1, \ldots a_n > 0$ ja $k \geq 1$, niin on voimassa epäyhtälö*

$$n\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{k/n} \leq n\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\,a_i\right)^k \leq \sum_{i=1}^n a_i^k,$$

missä yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $a_1 = \cdots = a_n$.

Todistus. Osoitetaan ensin vasemmanpuoleinen epäyhtälö, joka saadaan lauseen 5.4 nojalla:

$$\left(\mathcal{M}^0\right)^k = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{k/n} \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\,a_i\right)^k = \left(\mathcal{M}^1\right)^k.$$

Seuraavaksi osoitetaan oikeanpuoleinen epäyhtälö, joka puolestaan saadaan näin:

$$\left(\mathcal{M}^1\right)^k = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\,a_i\right)^k \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a_i^k = \left(\mathcal{M}^k\right)^k.$$

Kun muistetaan että $k \geq 1$, niin lemma 5.5 on todistettu.

$\square$

Esimerkki 5.6. Todistetaan epäyhtälö

$$n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,a_i\right)^{(x+y)} \le n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,a_i^x\right)^{(x+y)/x} \le \sum_{i=1}^{n} a_i^{x+y},$$

kun $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}_+$ ja $x \ge 1,\ y \ge 0$. Yhtäsuuruudet pätevät jos ja vain jos $a_1 = \dots = a_n$.

Ratkaisu. Olkoon $x,\ y,\ b_i > 0$. Tällöin lemman 5.5 oikeanpuoleisen epäyhtälön nojalla voidaan kirjoitta

$$n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,b_i\right)^{(x+y)/x} \le \sum_{i=1}^{n} b_i^{(x+y)/x},$$

missä $\frac{x+y}{x} \ge 1$. Yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $a_1 = \dots = a_n$. Tekemällä seuraavaksi sijoitus $b_i = a_i^x$ saadaan

$$n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,a_i^x\right)^{(x+y)/x} \le \sum_{i=1}^{n} a_i^{(x+y)}.$$

Jäljellä oleva vasemman puolen todistus hoituu helposti potenssikeskiarvoepäyhtälön avulla,

$$\left(\mathcal{M}^1\right)^{(x+y)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_i\right)^{(x+y)} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,a_i^x\right)^{(x+y)/x} = \left(\mathcal{M}^x\right)^{(x+y)},$$

kun $x \ge 1$. Yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $x = 1$ tai $a_1 = \dots = a_n$. Nyt epäyhtälö on siis todistettu kun $x \ge 1$ ja $y \ge 0$.

Esimerkki 5.7. Todistetaan epäyhtälö

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{(x+y)/n} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,a_i^x\right)^{(x+y)/x} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,a_i\right)^{(x+y)}$$

kun $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ja $0 < x \le 1,\ y \ge 0$. Yhtäsuuruudet pätevät jos ja vain jos $a_1 = \dots = a_n$.

Ratkaisu. Lemman 5.5 vasemmanpuoleisen epäyhtälön nojalla pätee suoraan

$$\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{(x+y)/nx} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,b_i\right)^{(x+y)/x},$$

kun $b_i > 0$. Tekemällä sama $b_i = a_i^x$ sijoitus kuin esimerkissä 5.6 saadaan

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{(x+y)/n} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\, a_i^x\right)^{(x+y)/x}.$$

Jäljellä oleva oikeanpuolen todistus hoituu helposti potenssikeskiarvoepäyhtälön avulla

$$(\mathcal{M}^x)^{(x+y)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\, a_i^x\right)^{(x+y)/x} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\, a_i\right)^{(x+y)} = \left(\mathcal{M}^1\right)^{(x+y)},$$

kun $x \leq 1$. Yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $x = 1$ tai $a_1 = \cdots = a_n$. Nyt epäyhtälö on siis todistettu kun $0 < x \leq 1$ ja $y \geq 0$.

Esimerkki 5.8. Osoitetaan epäyhtälön

$$\frac{a_2^m + a_3^m + \cdots + a_n^m}{a_1^{m-1}} + \frac{a_1^m + a_3^m + \cdots + a_n^m}{a_2^{m-1}} + \cdots + \frac{a_1^m + a_2^m + \cdots + a_{n-1}^m}{a_n^{m-1}}$$
$$\geq (n-1)\left(a_1^m + \cdots + a_n^m\right)$$

paikkansapitävyys, kun $a_1 \cdots a_n = 1$ ja $a_i > 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots, n$ ja lisäksi $m \geq 1$.

Ratkaisu. Olkoon $S_k = a_1^k + \cdots + a_n^k$. Nyt (GA):n nojalla saadaan

$$\frac{a_1^k + \cdots + a_n^k}{n} \geq \sqrt[n]{a_1^k \cdots a_n^k} = 1 \quad \Rightarrow \quad S_k \geq n \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Potenssikeskiarvo epäyhtälöä käyttämällä voidaan puolestaan kirjoittaa

$$\mathcal{M}^1 = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \left(\left(\frac{a_1^m + \cdots + a_n^m}{n}\right)^{1/m}\right)^m = (\mathcal{M}^m)^m,$$

joten

$$\frac{S_1}{n} \leq \frac{S_m}{n} \quad \Rightarrow \quad S_1 \leq S_m.$$

Yllä olevien perustelujen nojalla voidaan epäyhtälö kirjoittaa muodossa

$$\underbrace{S_m}_{\geq n}\underbrace{(S_{1-m} - n)}_{\geq 0} \geq \underbrace{S_1 - S_m}_{\leq 0}.$$

Muokkaamalla sitä hieman saadaan se muotoon,

$$S_m \cdot S_{1-m} - S_1 \geq (n-1)S_m$$

ja pienen laskennon jälkeen havaitsemme kyseessä olevan juuri vaadittu epäyhtälö. Kirjoitetaan epäyhtälö vielä lopuksi siistiin ja tiiviiseen muotoon

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S_m - x_i^m}{x_i^{m-1}} \geq (n-1)S_m.$$

6. Kvasi-aritmeettinen f-keskiarvo

Viimeisessä kappaleessa luodaan pikainen katsaus kvasi-aritmeettisiin keskiarvoihin, jotka ovat luonnollisia laajennuksia aikaisemmissa kappaleissa esiintyvistä tuloksista. Näytetään kuinka tämän tutkielman pääroolissa olevat aritmeettinen, geometrinen ja harmoninen keskiarvo seuraavat *kvasi-aritmeettisesta f-keskiarvosta.*

Määritelmä 6.1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja aidosti monotoninen jatkuva funktio $f : I \to \mathbb{R}$. Olkoon lisäksi $a_i \in I$ ja $w_i \geq 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots, n$, siten että $\sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0$. Tällöin luvuille $a_1, \ldots, a_n$ ja painoille $w_1, \ldots, w_n$ *painotettu kvasi-aritmeettinen f-keskiarvo* on

$$\mathcal{F}_w = f^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(a_i\right)\right).$$

Funktiota f sanotaan keskiarvon $\mathcal{F}_w$ kehittäjäfunktioksi.

Seuraavissa esimerkeissä näytetään kuinka (painotettu) aritmeettinen, geometrinen ja harmoninen keskiarvo seuraavat kvasi-aritmeettisesta f-keskiarvosta.

Esimerkki 6.2. *Aritmeettinen keskiarvo.* Valitaan funktioksi f jatkuva ja aidosti kasvava (aidosti monotoninen) funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \;\; \Rightarrow \;\; f^{-1}(x) = x$. Lasketaan tällöin luvuille $a_1, \ldots, a_n$ ja painoille $w_1, \ldots, w_n$ kvasi-aritmeettinen f-keskiarvo $\mathcal{F}_w$.

Näin ollen suoraan määritelmästä 6.1 saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_w &= f^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(a_i\right)\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \sum_{i=1}^{n} w_i f(a_i)\right) \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \sum_{i=1}^{n} w_i f(a_i) = \mathcal{A}_w.\end{aligned}$$

Tässä voitaisiin funktioksi f itseasiassa valita mikä tahansa muotoa $f(x) = \alpha x + \beta$ ($\alpha \neq 0$) oleva funktio.

Esimerkki 6.3. *Geometrinen keskiarvo.* Menetellään muuten kuten esimerkissä 6.2, mutta nyt aidosti monotoniseksi jatkuvaksi funktioksi valitaan $f :]0, \infty[\; \to \; \mathbb{R}$, $x \mapsto \; log\, x \;\; \Rightarrow \;\; f^{-1}(x) = e^x$. Yksinkertaista laskentoa harjoittamalla, jossa hyödynnetään logaritmi- ja eksponenttifunktion ominaisuuksia, saadaan seuraavaa

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_w &= f^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(a_i\right)\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\sum_{i=1}^{n} w_i log\, a_i\right) \\
&= e^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i log\, a_i\right)} = e^{log\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}}} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}} = \mathcal{G}_w.
\end{aligned}
$$

Kuten esimerkissä 6.2, ei tässäkään tehty funktiovalinta ole ainoa mahdollinen joka johtaa geometriseen keskiarvoon. Itseasiassa voidaan valita mikä tahanasa muotoa $f(x) = log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ oleva funktio.

Viimeisenä esimerkkinä käsitellään harmonisen keskiarvon tapaus.

Esimerkki 6.4. Tässä tilanteessa kvasi-aritmeettisen keskiarvon $\mathcal{F}_w$ kehittäjäfunktioksi valitaan $f:\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\},\ x \mapsto \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_w &= f^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(a_i\right)\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{a_i}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{a_i}} = \mathcal{H}_w.
\end{aligned}
$$

Huomautus 6.5. Valittaessa keskiarvon $\mathcal{F}_w$ kehittäjäfunktioksi $f :]0,\infty[\to]0,\infty[$, $x \mapsto x^r$, saadaan yllä olevien esimerkkien kaltaisilla yksinkertaisilla laskuilla

$$\mathcal{F}_w = \mathcal{M}_w^r.$$

Tällöin siis kvasi-aritmeettinen f-keskiarvo on itseasiassa r:s potenssikeskiarvo.

Lähdeluettelo

[1] Adams, R. A.: *Calculus. A complete course.* Addison-Wesley, 1991.

[2] Bullen, P. S.: *Handbook of Means and Their Inequalities.* Kluwer Academic Publishers, 2003.

[3] Grossman, S. I.: *Elementary Linear Algebra* (4th ed). Saunders College Publishing, 1991.

[4] Grossman, S. I.: *Calculus of one variable* (3rd ed). Saunders College Publishing, 1992.

[5] Herman, J., Kucera, R., Simsa, J.: *Equation and Inequalities.* Springer-Verlag New York, Inc, 2000.

[6] Kurittu, L., Hokkanen, V-M., Kahanpää, L.: *Geometria.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 57, 2006.

[7] Liouville, J.: *Journal de Mathematiques Pures et Appliquées, 4(1839).*

[8] Marsden, J. E., Tromba A. J.: *Vector Calculus* (5th ed). W.H. Freeman and Company, 1976; Fifth Edition, 2003.

[9] Roberts, A. W., Varberg, D. E.: *Convex Functions.* Academic Press, New York and London, 1973.

[10] Schur, I.: *Mathematische Zeitschrift, 1 (1918).*

[11] Seppänen, R., Tiihonen, S., Wuolijoki, H.: *MAOL-Taulukot.* Otavan Kirjapaino Oy 2003.

[12] Young, H. D., Freedman, R. A.: *University Physics with Modern Physics* (11th ed). Addison-Wesley, 2004.