# Reuna-Harnack-periaatteesta

Teemu Kontoniemi

Matematiikan Pro Gradu-tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
15.1.2008

# Sisältö

# 1 Aihe

## 1.1 Johdanto

Laplace-yhtälö on yhtälö

$$\Delta u = \partial_1\partial_1 u + \partial_2\partial_2 u + \cdots + \partial_n\partial_n u = 0,\, x \in U \subset \mathbb{R}^n,\, u : U \to \mathbb{R}$$

Laplace-yhtälö on eräs kaikkein tärkeimmistä osittaisdifferentiaaliyhtälöistä. Se tulee esiin monissa sovelluksissa. Tyypillisessä tulkinnassa funktio $u$ on jonkin suureen suuruus tasapainotilassa, jossa $u$ siis pysyy ajan suhteen vakiona alueen $U$ joka pisteessä.

Tällöin minkä tahansa sileän osa-alueen $V \subset U$ reunan läpi tapahtuva nettovirtaus on nolla:

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu dS = 0,$$

missä $F$ merkitsee virtauksen suuruutta ja $\nu$ ulospäin suunnattua normaalivektorikenttää. Gaussin-Greenin lauseen mukaan

$$\int_V \operatorname{div} F dx = \int_{\partial V} F \cdot \nu dS = 0.$$

Koska $V$ oli mielivaltainen, tästä seuraa koko $U$:ssa

$$\operatorname{div} F = 0.$$

Usein on fysikaalisesti järkevää olettaa virtauksen $F$ suuruuden olevan verrannollinen alkuperäisen suureen $u$ gradienttiin, tosin juuri toiseen suuntaan, eli

$$F = -a\nabla u\,(a > 0).$$

Sijoittamalla tämä edelliseen yhtälöön saadaan Laplace-yhtälö:

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = 0.$$

## 1.2 Tavoite

Tässä tutkielmassa tutkitaan Laplace-yhtälön ei-negatiivisia ratkaisuja reunan lähellä. Ratkaisuille annetaan lisäehdoksi jatkuvuus reunalla ja samalla reunan osalla arvoksi nolla. Tällöin pystytään todistamaan niinsanottu reuna-Harnack-periaate, joka tarkoittaa, että funktiot lähestyvät nollaa samaa vauhtia pienemmässä reunan osassa.

Halutaan todistaa seuraava lause:

**Lause 1.1.** *Olkoon*

$$B_1^+ = B_1(0) \cap \{x_n > 0\}.$$

*Olkoot u ja v kaksi ei-negatiivista ratkaisua yhtälölle*

$$\Delta u = \Delta v = 0 \ \ B_1^+\text{:ssa.}$$

*Lisäksi vaaditaan, että u ja v saavat jatkuvasti arvon 0, kun* $\{x_n = 0\}$.

*Vaaditaan myös, että u ja v ovat normeerattuja siten, että*

$$u(\frac{1}{2}e_n) = v(\frac{1}{2}e_n) = 1.$$

*Tällöin on* $C > 0$ *ja* $\alpha$ *siten, että* $0 < \alpha < 1$ *ja*

$$\sup_{x \in B_{1/2}^+} |\frac{u(x)}{v(x)}| \leq C$$

*ja*

$$\sup_{x,y \in B_{1/2}^+} \frac{|\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(y)}{v(y)}|}{|x-y|^\alpha} \leq C.$$

Reuna-Harnack-periaate pätee huomattavasti yleisemmille elliptisille yhtälöille ja yleisemmissä alueissa, ks. esim. [1], [5]. Laplace-yhtälölle periaate esitettiin v. 1970 [8]. Periaatetta on hyödynnetty tutkittaessa mm. vapaan reunan tehtäviä [2], [7], [4], Brownin liikettä [10] ja $p$-harmonisia mittoja [3].

Olen muokannut yleisempien yhtälöiden tapauksien todistuksia [5] Laplace-yhtälölle tarvittavaan muotoon. Lisäksi olen yrittänyt selkeyttää todistusta. Tavoite oli, että matematiikan opiskelija voi opintojen loppuvaiheessa ymmärtää tutkielman ilman esitietoja.

Yleisempi todistus yhtälölle $D_i a_{ij} D_j u = 0$, missä funktiot $a_{ij}$ ovat mitallisia ja rajoitettuja, voidaan tehdä esitettävällä tavalla. Tarvitaan kuitenkin esitietoja vastaavien yhtälöiden Greenin funktioiden säännöllisyydestä ja sisä-Harnack-ominaisuudesta. Myös apulauseen 3.2 todistus on hankalampi.

# 2 Laplace-yhtälöstä ja harmonisista funktioista

Tästä lähin $\Omega$ merkitsee aluetta. Määritellään aluksi harmoninen funktio ja yhtäpitävät keskiarvo-ominaisuudet.

**Määritelmä 2.1.** Funktio $u \in C^2(\Omega)$ on harmoninen $\Omega$:ssa, jos $\Delta u = 0$ $\Omega$:ssa.

**Määritelmä 2.2.** Sanotaan, että $u \in C(\Omega)$ toteuttaa ensimmäisen keskiarvoperiaatteen, jos

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \quad \text{kaikilla } B_r(x) \subset \Omega$$

ja toisen keskiarvoperiaatteen, jos

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y)dy \quad \text{kaikilla } B_r(x) \subset \Omega$$

missä $\omega_n$ on yksikköpallon pinnan pinta-ala $\mathbb{R}^n$:ssä

**Huomautus 2.3.** *Keskiarvoperiaatteet ovat yhtäpitäviä.*

*Todistus.* Jos kirjoitetaan 1. periaate muotoon

$$u(x)r^{n-1} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y,$$

saadaan integroimalla 2. periaate. Jos kirjoitetaan 2. periaate muotoon

$$u(x)r^n = \frac{n}{\omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)dy,$$

saadaan derivoimalla 1. periaate. □

Harmoniset funktiot toteuttavat keskiarvoperiaatteen. Vastaavasti keskiarvoperiaatteen toteuttavat jatkuvat funktiot ovat harmonisia ja $C^\infty$-funktioita. Siis harmoniset funktiot ovat $C^\infty$-funktioita:

**Lause 2.4.** *Olkoon $u \in C^2(\Omega)$ harmoninen $\Omega$:ssa. Tällöin $u$ toteuttaa keskiarvoperiaatteen $\Omega$:ssa.*

*Todistus.* Otetaan mielivaltainen pallo $B_r(x) \subset \Omega$. Olkoon $\rho \in (0, r)$ ja sovelletaan divergenssilausetta palloon $B_\rho(x)$. Saadaan

$$(*) \int_{B_\rho(x)} \Delta u(y)dy = \int_{\partial B_\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_y =$$

$$\rho^{n-1} \int_{|w|=1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x + \rho w)dS_w = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|w|=1} u(x + \rho w)dS_w.$$

Siis harmoniselle funktiolle pätee millä tahansa $\rho \in (0, r)$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|w|=1} u(x + \rho w)dS_w = 0.$$

Integroimalla nollasta $r$:ään saadaan

$$\int_{|w|=1} u(x + rw)dS_w = \int_{|w|=1} u(x)dS_w = u(x)\omega_n$$

eli

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(x + rw)dS_w = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y.$$

□

**Lause 2.5.** *Jos $u \in C(\Omega)$ toteuttaa keskiarvo-ominaisuuden alueessa $\Omega$, niin $u$ on harmoninen ja $C^\infty$-funktio $\Omega$:ssa.*

*Todistus.* Keskiarvoperiaatteesta seuraa, että $u$ on identtinen konvoluutiofunktionsa kanssa (eli myöskin $C^\infty$) niissä pisteissä, joiden etäisyys $\partial\Omega$:sta on suurempi kuin silotusfunktion säde $\varepsilon$. Pienentämällä $\varepsilon$:ia saadaan $C^\infty$-ominaisuus mielivaltaiseen $\Omega$:n pisteeseen.

Lisäksi, lauseen 2.4 kaavan (*) ja keskiarvoperiaatteen mukaan

$$\int_{B_r(x)} \Delta u dy = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|w|=1} u(x+rw) dS_w = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} (\omega_n u(x)) = 0$$

mille tahansa $B_r(x) \subset \Omega$. Tästä seuraa $\Delta u = 0$ alueessa $\Omega$. □

**Seuraus 2.6.** *Jos $u \in \Omega$ on harmoninen $\Omega$:ssa, niin $u \in C^\infty(\Omega)$.*

**Huomautus 2.7.** *(Lokaali keskiarvo-ominaisuus riittää) Keskiarvoperiaatteen todistamiseksi riittää todistaa se jokaiselle pisteelle $x \in \Omega$ kaikilla säteillä $r < r_x$, missä $r_x$ riippuu pisteestä $x$.*

*Todistus.* Todistuksesta säteillä $r < r_x$ seuraa Laplace-yhtälön toteutuminen pisteessä $x$. Lokaaleilla todistuksilla saadaan todistettua funktio harmoniseksi, josta seuraa keskiarvo-ominaisuus lauseella 2.4 □

Keskiarvo-ominaisuudesta ja jatkuvuudesta seuraa tärkeä ominaisuus, maksimi- ja minimiperiaate. Tällainen funktio voi saavuttaa maksimiarvonsa vain määrittelyalueensa reunalla, paitsi jos funktio on vakio. Tämä pätee siis myös harmonisille funktioille.

**Lause 2.8.** *(Maksimi- ja minimiperiaate) Jos $u \in C(\overline{\Omega})$ toteuttaa keskiarvoperiaatteen $\Omega$:ssa, niin $u$ saavuttaa maksimi- ja minimiarvonsa vain reunalla $\partial\Omega$ paitsi siinä tapauksessa, että $u$ on vakiofunktio.*

*Todistus.* Todistetaan vain maksimiperiaate. Olkoon

$$\Sigma = \{x \in \Omega; u(x) = M \equiv \max_{\overline{\Omega}} u\} \subset \Omega.$$

Selvästi $\Sigma$ on suljettu ($\Omega$:n relatiivitopologiassa). Näytetään sitten, että $\Sigma$ on avoin. Mielivaltaiselle $x_0 \in \Sigma$ valitaan $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$ jollain $r > 0$. Keskiarvoperiaatteen nojalla

$$M = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y) dy \leq M \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} dy = M.$$

Siis $u \equiv M$ pallossa $B_r(x_0)$. Siis $\Sigma$ on sekä suljettu että avoin $\Omega$:ssa, eli joko $\Sigma = \emptyset$ tai $\Sigma = \Omega$. □

**Seuraus 2.9.** *Harmoniset funktiot toteuttavat maksimi- ja minimiperiaatteen.*

Keskiarvoperiaatteella ja $C^\infty$-ominaisuudella saadaan rajoitettua ei-negatiivisen harmonisen funktion derivaattaa funktion arvolla ja etäisyydellä alueen reunasta.

**Lause 2.10.** *Jos $u \in C(\overline{B}_R)$ on ei-negatiivinen harmoninen funktio $B_R = B_R(x_0)$:ssa, niin*

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0).$$

*Todistus.* Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että $u \in C^1(\overline{B}_R)$. Valitaan koordinaattiakselien suunnat uudestaan siten, että koordinaatisto säilyy ortonormaalina ja $x_i$-akselin positiivinen suunta on sama kuin vektorilla $\nabla u(x_0)$. (Jos $\nabla u(x_0) = 0$, lause on triviaalisti tosi.) Laplace-yhtälö toteutuu funktiolle $u$ myös uudessa koordinaatiossa, koska $u$ toteuttaa edelleen keskiarvoperiaatteen.

Koska $u \in C^\infty(\Omega)$, myös $\Delta(D_{x_i}u) = D_{x_i}\Delta u = 0$, eli myös $D_{x_i}u$ on harmoninen $B_R$:ssä. Siis $D_{x_i}u$ toteuttaa keskiarvoperiaatteen. Divergenssilauseen avulla saadaan

$$D_{x_i}u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{B_R(x_0)} D_{x_i}u(y)dy = \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\nu_i dS_y.$$

Funktion $u$ ei-negatiivisuudesta ja edellisestä saadaan

$$|Du(x_0)| = |D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\partial B_R(x_0)} u(y)dS_y = \frac{n}{R}u(x_0).$$

□

Laplace-yhtälö on invariantti rotaatioiden suhteen, joten on järkeenkäypää tutkia aluksi radiaalisia ratkaisuja. Näin saadaan hyödyllisiä eksplisiittisiä kaavoja.

**Lause 2.11.** *Laplace-yhtälön radiaalinen ratkaisu, jolla on singulariteetti a:ssa ja jolle pätee lisäksi*

$$\int_{\partial B_r} \frac{\partial v}{\partial r} dS = 1 \qquad \textit{kaikilla } r > 0,$$

*on*

$$\Gamma(a,x) = \frac{1}{2\pi}\log|a-x|, \quad n = 2$$

*ja*

$$\Gamma(a,x) = \frac{1}{\omega_n(2-n)}|a-x|^{2-n}, \quad n \geq 3.$$

*Todistus.* Olkoon $v(r) = u(x)$. Tällöin Laplace-yhtälö saa muodon

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

Tästä ratkaisemalla saadaan

$$v(r) = c_1 + c_2 \log r, \quad n = 2 \text{ ja}$$

$$v(r) = c_3 + c_4 r^{2-n}, \quad n \geq 3.$$

Normeerausehto huomioiden päädytään lauseen vakioihin. Tarkemmat yksityiskohdat [6], s. 21-22. □

Todistetaan sitten oleellinen integroimistulos, Greenin identiteetti.

**Lause 2.12.** *Olkoon $\Omega$ rajoitettu alue $\mathbb{R}^n$:ssä ja $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Tällöin jokaiselle $a \in \Omega$ pätee*

$$u(a) = \int_\Omega \Gamma(a,x)\Delta u(x)dx - \int_{\partial\Omega}(\Gamma(a,x)\frac{\partial u}{\partial n_x}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}(a,x))dS_x.$$

*Todistus.* [11], s. 10. Greenin integrointikaavalla

$$\int_U u\Delta v dx - \int_U v\Delta u dx = \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \nu} dS_x - v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x$$

saadaan alueessa $\Omega - B_r(a)$ pienellä $r$

$$\int_{\Omega - B_r(a)} (\Gamma\Delta u - u\Delta\Gamma) dx = \int_{\partial\Omega} (\Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}) dS_x - \int_{\partial B_r(a)} (\Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}) dS_x$$

Huomataan, että $\Delta\Gamma = 0$ alueessa $\Omega - B_r(a)$. Siten saadaan

$$\int_\Omega \Gamma\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} (\Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}) dS_x - \lim_{r\to 0} \int_{\partial B_r(a)} (\Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}) dS_x$$

Tarkastellaan tapausta $n \geq 3$. Tapaus $n = 2$ menee samoin. $\Gamma$:n määritelmästä suoraan saadaan

$$\left|\int_{\partial B_r(a)} \Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x\right| = \left|\frac{1}{(2-n)\omega_n} r^{2-n} \int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x\right| \leq \frac{r}{n-2} \sup_{\partial B_r(a)} |\bigtriangledown u| \to 0$$

kun $r \to 0$. Niinikään $\Gamma$:n määritelmästä saadaan

$$\int_{\partial B_r(a)} u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} dS_x = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(a)} u dS_x \to u(a)$$

kun $r \to 0$.

□

Seuraavaksi määritellään Greenin funktio. Greenin funktio on eräänlainen perusratkaisu annetussa alueessa. Valitaan jokaista $x \in \Omega$ kohti $\Phi(x, \cdot) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ s.e.

$$\begin{cases} \Delta_y \Phi(x, y) = 0 & y \in \Omega \\ \Phi(x, y) = -\Gamma(x, y) & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Merkitään $G(x, y) = \Gamma(x, y) + \Phi(x, y)$. $G(x, y)$ on Greenin funktio. Greenin funktio on olemassa kaikissa säännöllisissä alueissa, eli alueissa, joissa Dirichlet'n ongelmalle on ratkaisu. Se on $x$-keskisen perusratkaisun harmonisella lisäysfunktiolla korjattu versio, joka on nollaa määrittelyalueen reunalla. Greenin funktio on yksikäsitteinen, koska kahden Greenin funktion erotus on harmoninen ja nollaa määrittelyalueen reunalla.

**Lause 2.13.** *Greenin funktio $G(x, y)$ on symmetrinen joukossa $\Omega \times \Omega$ eli $G(x, y) = G(y, x)$, kun $x \neq y \in \Omega$.*

*Todistus.* [11], s. 12. □

**Lause 2.14.** *Jokaiselle $x, y \in \Omega,\ x \neq y$ pätee*

$$0 > G(x, y) > \Gamma(x, y), \quad n \geq 3$$

$$0 > G(x, y) > \Gamma(x, y) - \frac{1}{2\pi} \log diam(\Omega), \quad n = 2.$$

*Todistus.* [11], s. 13. □

Greenin funktio pallossa on eräs keino johtaa Harnackin epäyhtälö, joka rajoittaa harmonisen funktion arvojen vaihtelua.

**Lause 2.15.** *(Harnackin epäyhtälön eksplisiittinen muoto) Olkoon $u$ harmoninen pallossa $B_R(x_0)$ ja $u \geq 0$. Tällöin*

$$(\frac{R}{R+r})^{n-2}\frac{R-r}{R+r}u(x_0) \leq u(x) \leq (\frac{R}{R-r})^{n-2}\frac{R+r}{R-r}u(x_0)$$

*missä $r = |x - x_0| < R$.*

*Todistus.* Poisson'n integraalikaavalla, ks. [11] , s. 16 ja [9], s. 107-108. □

Harnackin epäyhtälö saadaan siistimpään muotoon helposti.

**Lause 2.16.** *Olkoon $v$ ei-negatiivinen ratkaisu yhtälöön $\Delta v = 0$ pallossa $B_a(0)$. Tällöin, kun $0 < r < 1$ :*

$$\sup_{B_{ar}(0)} u \leq (1-r)^{-2n} \inf_{B_{ar}(0)} u$$

*Todistus.* Lauseen 2.15 mukaan

$$(\frac{a}{a+ar})^{n-2}\frac{a-ar}{a+ar}\sup u(x) \leq (\frac{a}{a-ar})^{n-2}\frac{a+ar}{a-ar}\inf u(x),$$

josta puolittain jakamalla saadaan

$$\sup u(x) \leq (\frac{1+r}{1-r})^n \inf u(x) \leq (1-r)^{-2n} \inf u(x).$$

Viimeisessä vaiheessa on käytetty epäyhtälöä

$$\frac{1+r}{1-r} = \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)(1-r)} = \frac{1-r^2}{(1-r)^2} \leq \frac{1}{(1-r)^2} = (1-r)^{-2}.$$

□

Harmonisille funktioille saadaan mielenkiintoisia tuloksia myös tutkimalla sopivien funktioiden $L^2$-normeja. Caccioppolin epäyhtälöllä saadaan ns. energiaestimaatteja, joilla harmonisen funktion gradientin $L^2$-normia voi rajoittaa funktion itsensä $L^2$-normilla.

**Lause 2.17.** *(Caccioppolin epäyhtälö) Toteuttakoon $u \in C^1(\Omega)$ yhtälön*

$$\int_\Omega D_i u D_i \varphi dx = 0 \quad \textit{kaikilla } \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

*Tällöin jokaiselle funktiolle $\eta \in C_0^1(\Omega)$ pätee*

$$\int_\Omega \eta^2 |Du|^2 dx \leq 4 \int_\Omega |D\eta|^2 u^2 dx.$$

*Todistus.* Valitaan $\phi$, jolla testataan yhtälöä. Olkoon $\varphi = \eta^2 u$. Tällöin saadaan

$$0 = \int_\Omega DuD\varphi dx = 2\int_\Omega u\eta DuD\eta dx + \int_\Omega |Du|^2\eta^2 dx,$$

mistä seuraa

$$\int_\Omega \eta^2|Du|^2 dx = 2|\int_\Omega u\eta DuD\eta dx| \leq 2\int_\Omega |Du||D\eta||u|\eta dx.$$

Hölderin epäyhtälöllä saadaan

$$\int \eta^2 Du^2 dx \leq 2\int \eta|u||D\eta||Du|dx \leq 2\sqrt{\int |D\eta|^2u^2 dx}\sqrt{\int \eta^2|Du|^2 dx}.$$

Tulos saadaan korottamalla puolittain toiseen ja jakamalla. □

**Huomautus 2.18.** *Harmoniset funktiot toteuttavat lauseen ehdon.*
*Osittaisintegroimalla saadaan*

$$\int_\Omega D_i u D_i\varphi dx = -\int_\Omega \Delta u\varphi dx + \int_{\partial\Omega} Du\varphi dS_x = 0 + 0 = 0.$$

Seuraavaksi näytetaan esimerkki energiaestimaatista.

**Lause 2.19.** *Olkoon $u$ kuten lauseessa 2.17 ja olkoon $\Omega = B_1$. Tällöin mille tahansa $0 \leq r < R \leq 1$ pätee*

$$\int_{B_r} |Du|^2 dx \leq \frac{C}{(R-r)^2}\int_{B_r} u^2 dx$$

*Todistus.* Valitaan $\eta$ siten, että $\eta \equiv 1$ $B_r$:ssä, $\eta \equiv 0$ $B_R$:n ulkopuolella ja $|D\eta| \leq 2(R-r)^{-1}$. Tällainen $\eta$ voidaan konstruoida konvoluutiona, kun alkuperäiselle funktiolle $f$ pätee

$$f \equiv 1 \quad \text{alueessa } B_{r+\frac{1}{5}(R-r)}$$

ja

$$f \equiv 0 \quad \text{alueen } B_{R-\frac{1}{10}(R-r)} \quad \text{ulkopuolella}$$

ja

$$f(|x|) = \frac{10}{7}(R - \frac{1}{10} - |x|) \quad \text{alueessa } B_{R-\frac{1}{10}(R-r)} - B_{r+\frac{1}{5}(R-r)}$$

ja silotusfunktion säteelle $\varepsilon$ pätee $\varepsilon < \frac{1}{10}$. □

Määritellään Hölder-jatkuvuus, $C^\alpha$-normi ja $C^\alpha$-avaruus, jotta reuna-Harnack-periaate on helpompi karakterisoida.

**Määritelmä 2.20.** Olkoon $U$ avoin joukko. Jos $u : U \to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikilla $x, y \in U$

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

jollakin $0 < \alpha < 1$, niin sanotaan, että $u$ on Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha$. Eksponenttia $\alpha$ vastaava Hölder-avaruus $C^\alpha(\overline{U})$ on niiden funktioiden joukko, joille normi

$$\sup_{x\in U}|u(x)| + \sup_{x,y\in U; x\neq y}\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\}$$

on äärellinen.

# 3 Aputuloksia

Harnackin epäyhtälö 2.16 sitoo funktion arvoja pienemmässä pallossa lähelle funktion arvoa pallojen keskipisteessä.

Todistetaan kaksi apulausetta, jotka vastaavilla palloilla rajoittavat ei-negatiivisen, puolittaisen keskiarvo-ominaisuuden toteuttavan funktion heilahtelua eri tavalla kuin Harnackin epäyhtälö.

Näiden lauseiden mukaan funktio ei voi päästä mielivaltaisen lähelle maksimiaan pienemmässä pallossa, jos funktio on nollaa positiivimittaisessa joukossa. Tämän jälkeen on kehitetty päätuloksen todistamiseen tarvittavat työkalut.

**Lause 3.1.** *Jos $u \in C(B_1)$ toteuttaa puolittaisen keskiarvo-ominaisuuden eli*

$$u(x) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y)dy \quad \textit{kaikilla } B_r(x) \subset B_1$$

*ja*

*a)* $0 \leq u \leq 1$

*b)*$|\{u = 0\}| = \mu > 0$

*niin on olemassa vakio* $\lambda = \lambda(\mu) < 1$, *jolle* $\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u \leq \lambda(\mu) < 1$.

*Todistus.* Todistetaan lause tasossa. Todistus menee samoin yleisessä tapauksessa.

Jo puolittaisesta keskiarvo-ominaisuudesta seuraa maksimiperiaate samalla todistuksella kuin lauseessa 2.8 (minimiperiaate ei seuraa). Jatkuvuudesta ja maksimiperiaatteesta seuraa $\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u = \max_{\overline{B}_{\frac{1}{2}}} u$.

Olkoon $a$ pallon $\overline{B}_{\frac{1}{2}}$ reunan piste, jossa $u$ saavuttaa maksimiarvonsa pallossa $\overline{B}_{\frac{1}{2}}$.

Puolittainen keskiarvoperiaate tarkoittaa tässä tapauksessa, kun $0 \leq u \leq 1$, että jos $u(a)$ on lähellä yhtä, niin vain mitaltaan pienessä pallon $B_{\frac{1}{2}}(a)$ osajoukossa funktio $u$ voi olla kovin paljon pienempää kuin yksi.

Oletetaan, että alueessa

$$B_r(0) \cap B_{\frac{1}{2}}(a), \quad r < \frac{1}{2}$$

funktiolle $u$ pätee

$$\sup u = 1 - \frac{\mu}{9}.$$

Arvioidaan alueen mittaa alhaaltapäin neljännessektorilla:

$$|B_r(0) \cap B_{\frac{1}{2}}(a)| > \frac{\pi}{4} r^2.$$

Arvioidaan funktion $u$ arvoa lopussa alueessa $B_{\frac{1}{2}}(a) - B_r(0)$ ylhäältä päin yhdellä:

$$u|_{B_{\frac{1}{2}}(a) - B_r(0)} \leq 1$$

Tällöin puolittainen keskiarvoperiaate antaa $u(a)$:lle yläraja-arvion:

$$\frac{\pi}{4}u(a) \leq (\pi(\frac{1}{2})^2 - \frac{\pi}{4}r^2) \cdot 1 + \frac{\pi}{4}r^2(1 - \frac{\mu}{9}) = \pi(\frac{1}{2})^2 - \frac{\pi}{4}r^2\frac{\mu}{9}.$$

josta saadaan

$$r \leq \sqrt{\frac{1-u(a)}{\frac{\mu}{9}}}.$$

Siis kun $u(a)$ tiedetään, edellinen rivi antaa ylärajan $r$:n arvoille, joilla pätee

$$u|_{B_{\frac{1}{2}}(a)\cap B_r(0)} \leq 1 - \frac{\mu}{9}.$$

Oletetaan sitten, että on piste $c$, jolle pätee

$$|c| \leq r$$

ja

$$u(c) \geq 1 - \frac{\mu}{9}.$$

Puolittaisella keskiarvo-ominaisuudella voidaan pallossa $B_{1-r}(c)$ arvioida

$$\frac{0 \cdot |\{x \in B_{1-r}(c) : u(x) = 0\}| + 1 \cdot |\{x \in B_{1-r}(c) : u(x) > 0\}|}{\pi(1-r)^2} \geq 1 - \frac{\mu}{9}.$$

Toisin sanoen

$$\frac{\pi(1-r)^2 - |\{x \in B_{1-r}(c) : u(x) = 0\}|}{\pi(1-r)^2} \geq 1 - \frac{\mu}{9}.$$

Tästä seuraa

$$|\{x \in B_{1-r}(c) : u(x) = 0\}| \leq \pi \cdot (1-r)^2 \cdot \frac{\mu}{9}.$$

Ylijäävän alueen $B_1(0) - B_{1-r}(c)$ mitta on

$$\pi \cdot 1^2 - \pi \cdot (1-r)^2$$

Alueen, jossa $u = 0$, mitalle saadaan nämä yhteenlaskemalla yläraja

$$\begin{aligned}
\mu &\leq \pi \cdot \Big(2r - r^2 + \frac{\mu}{9}(r^2 + 2r + 1)\Big) \leq \pi \cdot \Big(2r + \frac{\mu}{9}(r^2 + 2r + 1)\Big) \\
&\leq \pi\Big(\frac{2}{\sqrt{\frac{\mu}{9}}}\sqrt{1-u(a)} + \frac{\mu}{9}(\frac{1}{\frac{\mu}{9}}(1-u(a)) + \frac{2}{\frac{\mu}{9}}\sqrt{1-u(a)} + 1)\Big) \\
&= \pi\Big((1-u(a)) + \frac{2 + 2\frac{\mu}{9}}{\sqrt{\frac{\mu}{9}}}\sqrt{1-u(a)} + \frac{\mu}{9}\Big) \\
&\leq \pi\Big((1-u(a)) + \frac{4}{\sqrt{\frac{\mu}{9}}}\sqrt{1-u(a)} + \frac{\mu}{9}\Big) \\
&\leq \pi\Big((1-u(a)) + \frac{12}{\sqrt{\mu}}\sqrt{1-u(a)} + \frac{\mu}{9}\Big)
\end{aligned}$$

$$\leq 4(1-u(a)) + \frac{48}{\sqrt{\mu}}\sqrt{1-u(a)} + \frac{4\mu}{9}.$$

Alkuperäinen väite ($\lambda$:n olemassaolo) todistetaan antiteesillä: Jos $u(a)$ voisi olla mielivaltaisen suuri annetulla $\mu$, niin valitsemalla

$$1-u(a) < \min\{\frac{\mu}{36}, \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{144}\} = \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{144}$$

seuraa

$$\mu \leq \frac{8\mu}{9} < \mu,$$

mikä on ristiriita. Saadaan siis $\lambda$:lle arvio

$$\lambda(\mu) < 1 - \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{144}.$$

□

**Lause 3.2.** *(Oskillaatiolemma) Olkoon $v$ ratkaisu yhtälöön $\Delta v = 0$ $B_1^+$:ssa ja*

*a)* $0 \leq v \leq 1$

*b)* $v = 0$ $B_1^-$*:ssa*

*c)* $v$ *on jatkuva* $B_1$*:ssa eli nollaa, kun* $x_n = 0$.

*Tällöin*

$$\sup_{B_{1/2}} v \leq \lambda < 1.$$

*Todistus.* 1. Heijastetaan harmoniseksi

Muodostetaan pallossa $B_1$ harmoninen funktio $\overline{v}(x)$ määrittelemällä $\overline{v}(x) = v(x)$ $B_1^+$:ssa ja $\overline{v}(x_1, x_2, ..., -x_n) = -v(x_1, x_2, ..., x_n)$ $B_1^-$:ssa. Laajennettu funktio $v$ on selvästi harmoninen kummassakin puolipallossa. Keskiarvoperiaate toimii myös hypertasolla $x_n = 0$, joten keskiarvoperiaate toimii lokaalisti koko $B_1$:ssa ja funktio on harmoninen.

2. Puolittainen keskiarvo-ominaisuus harmonisten maksimille

Huomataan, että harmonisten funktioiden maksimifunktiolla on puolittainen keskiarvo-ominaisuus eli jos $f = \max u_1, u_2, ..., u_n$, missä $u_i$ ovat harmonisia, niin

$$f(x) \leq \frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} f(y)dy.$$

Selvästikin $B_r(x)$:ssä $f \geq u_i$, missä $u_i$ on jokin niistä harmonisista funktioista, joille $u_i(x) = f(x)$. Siispä

$$f(x) = u_i(x) = \frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} u_i(y)dy \leq \frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} f(y)dy$$

Koska vakiofunktiot ovat harmonisia, lause seuraa soveltamalla lausetta 3.1 funktioon $v = \max\{\overline{v}, 0\}$. □

# 4 Päätuloksen todistus

Todistetaan lause 1.1. Todistus on kolmiosainen:

1. Olkoon $u$ kuten lauseessa 1.1. Todistetaan, että tällöin $u|_{B^+_{1/2}} \leq M$, missä $M$ on $u$:sta riippumaton vakio.

2. Osoitetaan, että $\frac{v}{u}$ on rajoitettu $B^+_{\frac{1}{2}}$:ssa aina reunaan $x_n = 0$ asti.

3. Iteroimalla osia 1 ja 2 todistetaan Hölder-jatkuvuus.

Todistetaan yksinkertaisuuden vuoksi koko ajan $\mathbb{R}^2$:ssa, todistus menee samoin korkeammissa ulottuvuuksissa.

## 4.1 Yhden funktion rajoite

### 4.1.1 Huomioita

a) Jos $y_0 \in \{x_n = 0\}$, niin $\sup_{B_r(y_0)} u$ pienenee polynomisesti, eli jos $r < R$, niin

$$\sup_{B_r(y_0)} u \leq C(\frac{r}{R})^\alpha \sup_{B_R(y_0)} u.$$

Jos näet laajennetaan $u$:ta identtisesti nollana, kun $x_n < 0$,

oskillaatiolemma antaa arvolla $\lambda = \lambda(1/2)$

$$\sup u|_{B_{r/2}} \leq \lambda \sup u|_{B_r}.$$

Siis

$$\sup_{B_r(y_0)} u \leq f(\frac{r}{R}) \sup_{B_R(y_0)} u,$$

missä $f|_{(2^{-(k+1)}, 2^{-k}]} = \lambda^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Kun näet valitaan $C = \frac{1}{\lambda}$ ja $\alpha = \frac{\ln \lambda}{\ln(\frac{1}{2})}$,

$$f(\frac{r}{R}) \leq C(\frac{r}{R})^\alpha \text{ kaikilla } 0 < \frac{r}{R} < 1.$$

b)

**Huomautus 4.1.** *Harnack-yhtälöstä 2.16 saadaan johdettua, kun* $s \leq \frac{1}{4}$ *:*

$$\sup_{B_{\frac{3}{4}} \cap \{x_n > s\}} u \leq s^{-p} u(\frac{1}{2} e_n) = s^{-p},$$

*missä* $p = p(n)$ *on vain dimensiosta riippuva vakio.*

*Siis jos u voi saada mielivaltaisen suuren arvon alueessa* $B^+_{\frac{3}{4}}$*, tämän täytyy tapahtua reunan* $x_n = 0$ *lähellä.*

*Todistus.* Ketjutetaan alueeseen $B_1^+$ sisältyviä Harnackin epäyhtälön sisempiä $\frac{1-s}{8}$-säteisiä palloja, jotka menevät päällekkäin ja joita vastaavat ulommat $\frac{1}{8}$-säteiset pallot sisältyvät puolipalloon $B_1^+(0)$. Osoitetaan, että alueen $B_{\frac{3}{4}} \cap \{x_n > s\}$ jokainen piste $x$ on saavutettavissa pisteestä $\frac{1}{2}e_n$ viiden pallon ketjulla.

Olkoon $x_v = (x_{1_v}, x_{2_v})$ mielivaltainen alueen $B_{\frac{3}{4}} \cap \{x_n > s\}$ piste.

Määritellään piste $x_a$ seuraavasti:

$$\text{Jos} \quad x_{2_v} \geq \frac{7}{32}, \quad \text{niin} \quad x_a = x_v.$$

$$\text{Jos} \quad s < x_{2_v} < \frac{7}{32}, \text{ niin} \quad x_a = (x_{1v}, \frac{7}{32}).$$

Jälkimmäisessä tapauksessa sekä $x_v$ että $x_a$ kuuluvat palloon $B_{(1-s)\frac{1}{8}}(x_{1_v}, \frac{1}{8})$.

Huomataan myös, että

$$B_{\frac{1}{8}}(x_{1_v}, \frac{1}{8}) \subset B_1^+(0)$$

Tämän jälkeen pisteiden $x_a$ ja $\frac{1}{2}e_n$ väliseltä janalta valitaan pisteet

$$\frac{1}{10}x_a + \frac{9}{10}\frac{1}{2}e_n, \frac{3}{10}x_a + \frac{7}{10}\frac{1}{2}e_n, \frac{5}{10}x_a + \frac{5}{10}\frac{1}{2}e_n, \frac{7}{10}x_a + \frac{3}{10}\frac{1}{2}e_n \text{ ja } \frac{9}{10}x_a + \frac{1}{10}\frac{1}{2}e_n.$$

Nämä pisteet keskipisteinä piirretyt $(1-s)\frac{1}{8}$-säteisistä palloista aina peräkkäiset menevät päällekkäin ja samankeskiset $\frac{1}{8}$-säteiset pallot sisältyvät puolipalloon $B_1^+(0)$. Peräkkäisten sisempien pallojen leikkaamisen voi todeta arviomalla pisteiden $x_a$ ja $\frac{1}{2}e_n$ välisen janan maksimipituudeksi pisteiden $(\frac{3}{4}, 0)$ ja $\frac{1}{2}e_n$ etäisyyden ja jakamalla sen viidellä:

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}^2 + \frac{3}{4}^2}}{5} = 0,180277... < (1 - \frac{1}{4})(\frac{2}{8}) \leq (1 - \frac{1}{s})(\frac{2}{8})$$

Siis käyttämällä Harnackin epäyhtälöä useamman kerran peräkkäin vähintään kuudella kerralla saadaan mielivaltaiselle pisteelle $x_v$ arvioksi

$$u(x_v) \leq (1-r)^{-6 \cdot 2n}\, u(\frac{1}{2}e_n) = s^{-12n} = s^{-p},$$

mistä supremum-arvio seuraa suoraan.

Yleisen dimension tapaus menee samalla tavalla, mikä huomataan projisoimalla tapaus tasoon, johon kuuluvat $x_n$-akseli ja piste $x_v$.

$\square$

c) Koska $u$ on jatkuva reunaan $x_n = 0$ ja alueessa $B_1^+$ $u$ on $C^\infty$-funktio, saavuttaa $u$ suurimman arvonsa $\overline{B_{\frac{1}{2}}^+}$:ssa eli

$$\sup_{\overline{B_{\frac{1}{2}}^+}} u = u(x_0) = M.$$

Seuraavassa näytetään, että jos $M \geq M_0$ tarpeeksi suurella kiinteällä $M_0$, niin $u$ ei ole rajoitettu $B^+_{\frac{3}{4}}$:ssa, mikä on ristiriita, sillä $u$ on rajoitettu samasta syystä kuin puolipallossa $B^+_{\frac{1}{2}}$.

### 4.1.2 Ristiriidan konstruktio

Seuraavassa $y_k$ tarkoittaa pisteen $x_k$ projektiota hypertasolle $x_n = 0$.
Huomautuksesta 4.1 saadaan alueessa $B^+_{\frac{1}{2}}$

$$M = u(x_0) \leq |x_0 - y_0|^{-p}.$$

Siis kun $\varepsilon = \frac{1}{p}$ saadaan

$$d_0 = |x_0 - y_0| \leq M^{-\varepsilon}.$$

Siis $x_0$ on lähellä hypertasoa $x_n = 0$, koska $M$ on suuri.
Käytetään sitten oskillaatiolemmaa takaperin: Tiedetään, että

$$\sup_{B_{d_0}(y_0)} u \geq u(x_0) \geq M.$$

Tästä seuraa

$$\sup_{B_{2d_0}(y_0)} u = \sup_{B_{d_1(y_0)}} u \geq TM.$$

missä $T = \frac{1}{\lambda(\frac{1}{2})} > 1$ on oskillaatiolemmalla saatava $u$:sta riippumaton vakio.
Harnack-epäyhtälöllä saadaan samalla tavalla kuin $d_0$:lle:

$$d_1 = |x_1 - y_1| \leq (TM)^{-\varepsilon}$$

Soveltamalla uudelleen oskillaatiolemmaa takaperin, kuten $u(x_1)$:lle, saadaan

$$u(x_2) = \sup_{B_{2d_1}(y_1)} u \geq Tu(x_1) \geq T^2 M$$

ja taas Harnack-epäyhtälö antaa

$$d_2 = |x_2 - y_2| \leq (T^2 M)^{-\varepsilon}.$$

Jatkamalla prosessia induktiivisesti saadaan pistejono $\{x_k\}$, jolle pätee

$$u(x_k) \geq T^k M$$

ja

$$|x_k - y_k| \leq (T^k M)^{-\varepsilon}$$

ja

$$|x_k - x_{k-1}| \leq 4(T^{k-1}M)^{-\varepsilon}.$$

Nyt, jos valitaan $M$ tarpeeksi suureksi, saadaan

$$\sum_k |x_k - x_{k-1}|$$

mielivaltaisen pieneksi. Valitaan esimerkiksi

$$\sum_k |x_k - x_{k-1}| \leq \frac{1}{16},$$

jolloin jono pysyy puolipallossa $B^+_{\frac{9}{16}}$ ja konstruktion pallojen koon kanssa ei tule ongelmia. Vaihe 1 on todistettu.

(Oskillaatiolemmassa funktion yläraja on 1, tässä sovelluskerralla $k+1$ funktion $u$ yläraja on $T^k M$, joten tarkkaan ottaen täytyy aina soveltaa lemmaa funktioon $u/(T^k M)$.)

Sama todistus toimisi myös suuremmalla puolipallon säteellä $r \in ]\frac{1}{2}, 1[$. Harnack-epäyhtälön sovellusta ja pallojen kokoja täytyisi muuttaa sopivasti. Luonnollisesti $M$ olisi tällöin suurempi.

## 4.2 Osamäärän rajoite

Halutaan näyttää, että $\frac{u}{v}$ on rajoitettu. Koska $v(\frac{1}{2}e_n) = u(\frac{1}{2}e_n) = 1$, todistuksen osan 1 perusteella

$$v|_{B^+_{\frac{1}{2}}} \leq M$$

ja Harnack-epäyhtälöä ketjuttamalla nähdään, että

$$u \geq \frac{1}{M}$$

alueessa $B^+_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \frac{1}{8}\}$.

Osan 2 todistamiseksi riittää seuraavan lauseen todistaminen (ja myöhempi käyttö):

**Lause 4.2.** *Olkoon $\mathbb{R}^n$:ssä kuutiot*

$$Q_2(e_n) = \{0 < x_n < 2, |x_j| < 1, \text{ kun } j < n\}$$

*ja*

$$Q_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}e_n) = \{0 < x_n < \frac{1}{2}, |x_j| < \frac{1}{4}, \text{ kun } j < n\}.$$

*Olkoot $F_1, F_2$ kaksi $Q_2(e_n)$:n eri tahkoa, ei kumpikaan tahko $x_n = 0$. Olkoon $v_i$ funktio, jolle pätee*

$$a) \quad \Delta v_i = 0 \quad Q_2\text{:ssa}$$
$$b) \quad v_i|_{\partial Q_2} = \chi_{F_i}$$

*Tällöin $Q_{\frac{1}{2}}$:ssa*

$$v_1 \leq C v_2.$$

*Todistus.* Oskillaatiolemmasta saadaan laajentamalla funktiota $(1 - v_i)$ identtisesti nollana $F_i$:n ei-kuution puolelle

$$1 - v_i \leq \lambda < 1$$

lähellä reunaa $F_i$, esimerkiksi kuutiossa $Q_{F_i}$, jonka yksi sivu on reunalla $F_i$ ja reunojen pituudet ovat 1.

Siis

$$v_i \geq (1 - \lambda) > 0$$

ja $v_i$ on aidosti positiivista $Q_2$:n sisällä, esimerkiksi $Q_1(e_n)$:ssä.

Olkoon $G(x, y)$ Greenin funktio $Q_2$:ssa. Kuutio on säännöllinen alue, joten Greenin funktio on olemassa. $G(x, e_n)$ on rajoitettu muuttujalle $x$ reunalla $\partial Q_1(e_n)$, on nollaa $\partial Q_2$:ssa ja siispä

$$G(x, e_n) \leq Cv_1(x)$$

alueessa $Q_2(e_n) - Q_1(e_n)$.

Näytetään seuraavaksi, että alueessa $R_{\frac{1}{2}} = Q_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}e_n)$ pätee myös

$$v_1(x) \leq CG(x, e_n).$$

Tätä varten kiinnitetään $x$:n johonkin pisteeseen alueessa $Q_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}e_n)$. $G$ on harmoninen $y$:n suhteen vakiolla $x$ eli

$$\Delta_y G(x, y) = 0$$

(ja $G$ on määritelty, kun $x \neq y$, erityisesti siis kun $y \notin Q_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}e_n)$.)

Siispä todistuksen osan 1 avulla, $x$ kiinnitettynä, pätee kaikille $y$ alueessa $Q_2(e_n) - Q_{\frac{3}{4}}(\frac{3}{8}e_n)$

$$G(x, y) \leq CG(x, e_n).$$

Koska $G$ on nollaa reunalla $\partial Q_2(e_n)$, energiaestimaatti antaa

$$\int_{Q_2(e_n) - Q_1(\frac{1}{2}e_n)} | \nabla_y G(x, y)|^2 dy \leq C \int_{Q_2(e_n) - Q_{\frac{3}{4}}(\frac{3}{8}e_n)} G^2 dy \leq CG^2(x, e_n).$$

Estimaatti saadaan valitsemalla $\eta$ siten, että $\eta \equiv 1$ alueessa $Q_2(e_n) - Q_1(\frac{1}{2}e_n)$, $\eta \equiv 0$ alueessa $Q_{\frac{3}{4}}(\frac{3}{8}e_n)$ ja $|\nabla \eta| < C$ alueessa $Q_1(\frac{1}{2}e_n) - Q_{\frac{3}{4}}(\frac{3}{8}e_n)$. Nyt $\eta$:n ei tarvitse olla nollaa reunoilla, sillä $G(x, y)$ on nollaa reunoilla, joten $\varphi = \eta^2 G$ on myös.

Otetaan sitten $C^\infty$-funktio $\theta$, joka on nollaa $F_1$:n $\frac{1}{4}$-ympäristössä ja $\theta \equiv 1$ kuutiossa $Q_1(\frac{1}{2}e_n)$ ja lopussa osassa $Q_2$:ta $0 < |\nabla \theta| \leq C$. Tällainen funktio löydetään sopivan paloittain lineaarisen funktion konvoluutiona.

Esitetään $v_1(x)$ $x$:n suhteen alueessa $Q_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}e_n)$ Greenin integrointikaavan

$$\int_U DvDudx = - \int_U u\Delta vdx + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \nu} udS_x$$

avulla. Käytetään kaavaa aluessa $U = Q_2 - B_r(x)$ pienellä $r$. Saadaan

$$\int_U (\theta v_1)(y)\Delta G(x,y)dy + \int_U \nabla^T(\theta v_1)\nabla_y G(x,y)dy =$$
$$\int_{\partial Q_2} \frac{\partial G}{\partial \nu}\theta v_1 dS_y - \int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial G}{\partial \nu}\theta v_1 dS_y$$

ja

$$\int_U \theta(y)G(x,y)\Delta v_1(y)dy + \int_U \nabla^T(\theta G)\nabla v_1 dy =$$
$$\int_{\partial Q_2} \frac{\partial v_1}{\partial \nu}\theta G dS_y - \int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial v_1}{\partial \nu}\theta G dS_y$$

Kuution reunalla otettavat integraalit ja Laplace-termin sisältävät integraalit ovat selvästi nollia. Määritetään pallon reunalla otettavien integraalien raja-arvot, kun $r \to 0$. Lauseen 2.12 todistuksesta tiedetään vastaavien integraalien raja-arvot, kun $G(x,y)$:n tilalla on $\Gamma(x,y)$.

$$\int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial G}{\partial \nu}\theta v_1 dS_y = \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\theta v_1 dS_y + \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\theta v_1 dS_y \to \theta v_1(x) + 0$$

$= v_1(x)$

ja

$$\int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial v_1}{\partial \nu}\theta G dS_y = \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial v_1}{\partial \nu}\theta \Gamma dS_y + \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial v_1}{\partial \nu}\theta \Phi dS_y \to 0 + 0 = 0.$$

Nyt vähentämällä alkuperäiset kaksi yhtälöä toisistaan ja antamalla $r \to 0$ jää siis

$$v_1(x) = \int \nabla^T \theta [v_1 \nabla_y G - G\nabla v_1].$$

Funktion $\nabla\theta$ kantajalla pätee

$$\int v_1^2 dy \leq C,$$
$$\int |\nabla v_1|^2 dy \leq C,$$

(yksityiskohdat ks. huomautus alla)

$$\int G^2 dy \leq CG(x, e_n)$$

ja

$$\int |\nabla G|^2 dy \leq CG(x, e_n).$$

Siispä Hölderin epäyhtälön nojalla $v_1(x) \le CG(x, e_n)$.

Osa 2 on valmis, koska palatessa $u$:hun ja $v$:hen, voidaan sanoa, että

$$v \le M(\sum_{F_i} v_i)$$

ja

$$u \ge \frac{1}{M} v_1$$

missä $F_1$ on vastakkainen tahko tahkolle $x_n = 0$. □

**Huomautus 4.3.** *Todistetaan, että $\nabla\theta$:n kantajalla $\int |\nabla v_1|^2 dx < C$. Todistuksessa kaikkien integraalien integroimisjoukkona $\nabla\theta$:n kantaja ja integrointimuuttujana $y$:*

*Todistus.* Energiaestimaatilla

$$\int \theta^2 |\nabla v_1|^2 \le C \int |\nabla\theta|^2 (v_1)^2 \le C$$

Otetaan sitten uusi $C^\infty$-funktio $\theta_2$, joka on nollaa $F_1$:n $\frac{1}{8}$-ympäristössä ja $\theta_2 \equiv 1$ kuutiossa $Q_1(\frac{1}{2}e_n)$ ja lopussa osassa $Q_2$:ta $\nabla\theta_2 \neq 0$ ja $\frac{1}{2} \le \theta_2 \le 1$ $\nabla\theta$:n kantajalla. Voidaan jälleen valita sopiva paloittain lineaarisen funktion silotus.

Voidaan suorittaa samat integraalien rajoittuneisuutta koskevat havainnot myös $\theta_2$:lle ja saadzan

$$\int_{y:\nabla\theta_2(y)\neq 0} {\theta_2}^2 |\nabla v_1|^2 \le C.$$

Alkuperäisen $\theta$:n gradientin kantajalla (pienemmässä integroimisjoukossa) siis myös

$$\int {\theta_2}^2 |\nabla v_1|^2 \le C \text{ ja } \theta_2 > \frac{1}{2}, \text{ joten } \int |\nabla v_1|^2 \le 4C.$$

□

## 4.3 Hölder-normin arvio

Todistetaan lopuksi Hölder-normin tasainen yläraja iteroimalla aiempien vaiheiden tuloksia.

**Lause 4.4.** *Olkoon $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 4$. On olemassa vakiot $a_k$,$b_k$, $\frac{1}{M} \le a_k < b_k \le M$, ja vakio $\lambda < 1$ siten, että alueessa $B^+_{2^{-k}}(x)$, $k \ge 4$, $x \in \{\{x_n = 0\} \cap \overline{\{B^+_{1/2}\}}\}$ pätee*

$$a_k u \le v \le b_k u \quad \text{ja} \quad (b_k - a_k) \le \lambda(b_{k-1} - a_{k-1}).$$

*Todistus.* Induktiotodistus:

Lause on voimassa, kun $k = 4$, sillä osat 1 ja 2 olisi voitu todistaa isommissakin puolipalloissa ja valinnat $a_4 = \frac{1}{M}$ ja $b_4 = M$ toimivat.

Millä tahansa $k \geq 4$, normalisoidaan alue $B^+_{2^{-k}}(x)$ alueeksi $B^+_1(0)$ transformaatiokuvauksella $\overline{u}(y) = u(x + 2^{-k}y)$ ja määritellään positiiviset funktiot

$$w_1(x) = \frac{(\overline{v} - a_k\overline{u})(x)}{b_k - a_k}$$

$$w_2(x) = \frac{(b_k\overline{u} - \overline{v})(x)}{b_k - a_k}$$

ja tutkitaan positiivisia lukuja $w_1(\frac{1}{2}e_n)$, $w_2(\frac{1}{2}e_n)$. Toinen näistä on suurempi kuin $\frac{1}{2}\overline{u}(\frac{1}{2}e_n)$, koska $w_1(\frac{1}{2}e_n) + w_2(\frac{1}{2}e_n) = \overline{u}(\frac{1}{2}e_n)$.

Olkoon tämä luku $w_1(\frac{1}{2}e_n)$. Silloin $2w_1(x)$ on ei-negatiivinen harmoninen funktio $B^+_1(0)$:ssa. Lisäksi $2w_1(x)$ on nollaa reunalla $\{x_n = 0\}$ ja $2w_1(\frac{1}{2}e_n) \geq \overline{u}(\frac{1}{2}e_n)$. Siis lauseen 4.2 nojalla alueessa $B^+_{\frac{1}{2}}(0)$

$$\frac{2w_1}{\overline{u}} \geq \frac{1}{M}.$$

Takaisin normalisoiden puolipallossa $B^+_{2^{-(k+1)}}(x)$

$$\frac{v - a_k u}{(b_k - a_k)u} \geq \frac{1}{2M}$$

Eli puolipallossa $B^+_{2^{-(k+1)}}(x)$

$$[a_k + \frac{1}{2M}(b_k - a_k)]u \leq v \leq b_k.$$

Siis

$$b_{k+1} = b_k \quad \text{ja} \quad a_{k+1} = a_k + \frac{1}{2M}(b_k - a_k).$$

□

**Lause 4.5.** *Funktiolla $\frac{u}{v}$ on alueessa $B^+_{1/2}$ tasaisesti rajoitettu Hölder-normi jollakin eksponentilla $0 < \alpha < 1$ eli*

$$\sup_{x,y \in B^+_{1/2}} \frac{|\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(y)}{v(y)}|}{|x - y|^\alpha} \leq C.$$

*Todistus.* Lauseesta 4.4 havaitaan, että $\frac{u}{v}$ voidaan määritellä reunalla $x_n = 0$ jatkuvaksi ja $\frac{u}{v}$ :n Hölder-normi on eksponentilla $\alpha = \frac{\log\lambda}{\log\frac{1}{2}}$ (jolla siis pätee $\lambda = \frac{1}{2}^\alpha$) rajoitettu tasaisesti sellaisilla $x, y$, joilla ainakin toinen pisteistä $x$ ja $y$ sijaitsee puolipallon alareunalla $x_n = 0$.

Lauseesta 2.10 tiedetään $\nabla u$ ja $\nabla v$ alueessa $B^+_{1/2} \cap \{x_n > e\}$ tasaisesti rajoitetuiksi vakiolla $C(e)$, kun $0 < e < \frac{1}{2}$. Tästä ja $v$ :n alarajasta $l$ samassa alueessa ($l > 0$, Harnack-epäyhtälöä ketjuttamalla) seuraa tasaisesti rajoitettu Lipschitz-normi osamäärien derivointikaavalla. Tästä seuraa tasaisesti rajoitettu Hölder-normi millä tahansa eksponentilla $\alpha \in (0, 1)$.

Hölder-normi saadaan tasaisesti rajoitetuksi alareunan lähellä oleville pistepareille $\{x, y\}$, joista kumpikaan piste ei kuitenkaan ole alareunalla, yhdistämällä ylläolevat menetelmät:

Olkoon $B^+_{2^{-k}}(z)$ pienin puolipallo, jonka osapuolipallo $B^+_{2^{-(k+1)}}(z)$ sisältää pisteet $x$ ja $y$. Merkitään eksponenttia $k = 4 + i$, missä $i$ siis kuvaa kutistuksia puolipallon $B^+_{\frac{1}{2}}(0)$ tasaisen reunan $x_n = 0$ jokaiselle pisteelle määritellystä $\frac{1}{16}$-säteisestä puolipallosta pienemmäksi. Tarkastellaan $u$:n ja $v$:n arvoja puolipallojen pisteissä $e_{kn} = 2^{-(5+i)}e_n$. Kun $i = 0$, Harnack-epäyhtälöstä seuraa $u(e_{kn}) \leq L$ ja $v(e_{kn}) \geq \frac{1}{L}$. Tällöin

$$u(e_{kn})/v(e_{kn}) \leq L^2.$$

Kun $i > 0$, lauseesta 4.4 seuraa

$$u(e_{kn})/v(e_{kn}) \leq \lambda^i L^2.$$

ja funktiot

$$u_{kn} = \frac{u}{u(e_{kn})}$$

ja

$$v_{kn} = \frac{v}{v(e_{kn})}$$

voidaan normalisoida $B^+_1$:een. Normalisoiduille funktioille

$$u_1(s) = u_{kn}(z + 2^{-k}s)$$

ja

$$v_1(s) = v_{kn}(z + 2^{-k}s)$$

pätevät alueessa $B^+_{1/2} \cap \{s_n > e\}$ samat derivaatta-arviot kuin alkuperäisille $u$:lle ja $v$:lle, joten saadaan tasaisesti rajoitettu Hölder-normi:

$$\frac{|\frac{u_1(s)}{v_1(s)} - \frac{u_1(t)}{v_1(t)}|}{|s-t|^\alpha} \leq C.$$

Takaisin pieneen puolipalloon mentäessä saadaan pisteissä $x = z + 2^{-k}s$ ja $y = z + 2^{-k}t$

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(e_{kn})}{v(e_{kn})}\frac{u_1(s)}{v_1(s)} \leq \frac{u_1(s)}{v_1(s)}\lambda^i L^2$$

ja

$$\frac{u(y)}{v(y)} = \frac{u(e_{kn})}{v(e_{kn})}\frac{u_1(t)}{v_1(t)} \leq \frac{u_1(t)}{v_1(t)}\lambda^i L^2$$

ja

$$|x-y| = 2^{-k}|s-t|$$

Sijoittamalla nämä saatuun Hölder-normin arvioon seuraa pienessä puolipallossa

$$\frac{|\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(y)}{v(y)}|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{\lambda^i L^2}{\frac{1}{2}^{(5+i)\alpha}} \cdot C = 2^5 L^2 (2^\alpha \lambda)^i = C_2 L^2 (2^\alpha\lambda)^i = C_2 L^2. \quad \square$$

# Viitteet


[1] Aikawa, Hiroaki; Kilpeläinen, Tero; Shanmugalingam, Nageswari; Zhong, Xiao, *Boundary Harnack principle for p-harmonic functions in smooth Euclidean domains.* Potential Anal. 26 (2007), no. 3, 281–301.

[2] Athanasopoulos, I.; Caffarelli, L. A.; Salsa, S., *The free boundary in an inverse conductivity problem.* J. Reine Angew. Math. 534 (2001), 1–31.

[3] Bennewitz, Björn; Lewis, John L., *On the dimension of p-harmonic measure.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 30 (2005), no. 2, 459–505.

[4] Blank, Ivan, *Sharp results for the regularity and stability of the free boundary in the obstacle problem.* Indiana Univ. Math. J. 50 (2001), no. 3, 1077–1112.

[5] Caffarelli, L.; Fabes, E.; Mortola, S.; Salsa, S, *Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form.* Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), no. 4, 621–640.

[6] Evans, Lawrence C., *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[7] Ferrari, Fausto, *Two-phase problems for a class of fully nonlinear elliptic operators. Lipschitz free boundaries are $C^{1,\gamma}$.* Amer. J. Math. 128 (2006), no. 3, 541–571.

[8] Hunt, Richard A.; Wheeden, Richard L., *Positive harmonic functions on Lipschitz domains.* Trans. Amer. Math. Soc. 147 1970 507–527.

[9] John, Fritz, *Partial Differential Equations.* Springer, 1982.

[10] Kim, Panki; Song, Renming, *Boundary Harnack principle for Brownian motions with measure-valued drifts in bounded Lipschitz domains.* Math. Ann. 339 (2007), no. 1, 135–174.

[11] Qing Han, Fanghua Lin, *Elliptic Partial Differential Equations.* Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1997.