

Euklidisen ja hyperbolisen geometrian malleja

Erkki Salmela

Pro gradu – tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2008

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Hilbertin aksioomajärjestelmä	2
2.1	Hilbertin ja Dedekindin aksioomat	2
2.2	Descartesin tasokoordinaatistomalli	5
2.3	Paralleeliaksioma ja hyperbolinen aksioma	13
3	Puolitasomalli	15
3.1	Puolitasomallin konstruointi	15
3.2	Aksioomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) puolitasomallissa	16
4	Kleinin malli	31
4.1	Kleinin mallin konstruointi	31
4.2	Aksioomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) Kleinin mallissa	32
5	Poincarén malli	33
5.1	Poincarén mallin konstruointi	33
5.2	Aksioomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) Poincarén mallissa	34
6	Isometrioita	35
6.1	Möbius – kuvauksia	35
6.2	Ortogonaali- ja stereograafiprojektio	44

1 Johdanto

Geometria on matematiikan ala, jossa tutkitaan kuvioita, kappaleita ja niiden ominaisuuksia. Voidaan sanoa, että peruslaskutoimitusten rinnalla geometria on vanhin matematiikan osa-alue. Sen sanotaan syntyneen muinaisesta maanmittauksesta. Jo antiikin aikaan oli tärkeää, että maa-alueet saatiin mitattua tarkasti. Saatuja tuloksia käytettiin hyväksi mm. laadittaessa verotusta.

Tärkeä vaihe matematiikan kehityksessä oli, että alettiin todistaa väitteitä. Kreikkalaiskaupungista Miletoksesta kotoisin oleva *Thales* (624eKr. – 547eKr.) lausui kuuluisat viisi teoreemaansa, jotka hän omien sanojensa mukaan pystyi todistamaan:

- (1) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.
- (2) Ristikulmat ovat yhtä suuret.
- (3) Kaksi kolmiota ovat yhteneviä, jos niillä on yhtä suuret kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu.
- (4) Ympyrän jokainen halkaisija jakaa ympyrän kahteen yhtäsuureen osaan.
- (5) Puoliympyrän kaaren sisältämä kulma on suora.

Kuuluisin näistä on teoreema (5), joka tunnetaan Thaleen lauseena. Jää epäselväksi, mitä todistamisella tässä tapauksessa tarkoitettiin. Muinaisen Kreikan matematiikan kehitys oli vielä siihen aikaan hyvin alkutekijöissään, joten tuskin voidaan puhua mistään tarkoista todistuksista. Thales saattoi ainoastaan perustella väittämänsä käyttäen apuna intuitiivisia mielikuvia.

Jokaiseen todistukseen liittyy joukko oletuksia ja määritelmiä, jotta erilaiset päättelyketjut saadaan suoritettua. Herää kysymys, kuinka paljon määritelmiä tarvitaan, jotta Thaleen teoreemat voidaan todistaa. Tällöin syntyy tarve määritellä aksiomajärjestelmä, jonka varaan geometria rakentuu. Aksiomalla tarkoitetaan asiaa, jonka pohjalle todistukset rakentuvat. Aksiomajärjestelmä puolestaan muodostuu useasta keskenään riippumattomasta ja ristiriidattomasta aksiomasta.

Paralleeliaksioma jakaa geometrian kahteen osa-alueeseen, euklidiseen ja hyperboliseen geometriaan. Tässä pro gradu – tutkielmassa esitellään lyhyesti euklidisen ja hyperbolisen tasogeometrian aksiomajärjestelmä. Tämän jälkeen konstruoidaan euklidisen geometrian malli ja kolme hyperbolisen geometrian mallia. Lisäksi vertaillaan hyperbolisen geometrian malleja toisiinsa. Pro gradu – tutkielmassani käsitellään erilaisia hyperbolisen geometrian malleja lähinnä siksi, että eri malleissa eri piirteet näkyvät hyvin. Lisäksi niistä näkee eri ehdokkaita teoreemoiksi ja todistuksiksi. Lisäksi mallien avulla saa ideoita sovelluksiin.

2 Hilbertin aksioomajärjestelmä

Geometrian aksioomat sisältävät peruskäsitteet *piste* ja *suora* sekä perusrelaatiot *suora kulkee pisteen kautta*, *välissäolo*, *janojen yhtenevyys* ja *kulmien yhtenevyys*. Seuraavassa käydään läpi Hilbertin¹ aksioomat (H1) – (H13) ja Dedekindin² aksiooma (DA).

2.1 Hilbertin ja Dedekindin aksioomat

(H1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa täsmälleen yksi suora, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta.

HUOM! Edellä mainitusta suorasta käytetään merkintää \overleftrightarrow{PQ} .

(H2) Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi eri pistettä.

(H3) On olemassa kolme eri pistettä siten, ettei mikään suora kulje niiden kaikkien kautta.

(H4) Jos B on A :n ja C :n välissä, merkitään $A * B * C$, niin A , B ja C ovat eri pisteitä, joiden kaikkien kautta kulkee sama suora ja $C * B * A$.

(H5) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla \overleftrightarrow{AB} on pisteet C , D ja E siten, että

$$C * A * B, A * D * B \text{ ja } A * B * E.$$

(H6) Jos A , B ja C ovat eri pisteitä, jotka kuuluvat samalle suoralle, niin täsmälleen yksi seuraavista ehdoista on voimassa:

$$A * B * C, A * C * B \text{ tai } B * A * C.$$

Määritelmä 2.1.1. Olkoon A ja B eri pisteitä. Joukkoa

$$AB := \{C \text{ on piste} \mid A * C * B \text{ tai } A = C \text{ tai } B = C\}$$

sanotaan *janaksi* AB .

Määritelmä 2.1.2. Olkoon l suora, sekä A ja B pisteitä, joiden kautta l ei kulje. Sanotaan, että pisteet A ja B ovat *samalla puolella suoraa* l , ABl tai BAl , jos $A = B$ tai suora l ei sisällä janan AB pisteitä. Muulloin sanotaan, että A ja B ovat *eri puolilla suoraa* l , AlB tai BlA .

¹David Hilbert (1862 – 1943) oli saksalainen matemaatikko. Hänen saavutuksiaan oli geometrian aksioomajärjestelmän uudelleenasettaminen. Parhaiten Hilbert tosin tunnetaan ääretönulotteisten avaruuksien kehittäjänä.

²Richard Dedekind (1831 – 1916) oli Hilbertin tapaan saksalainen matemaatikko. Hänen kiinnostuksen kohteenaan oli pääasiassa algebra. Vuonna 1850 Dedekind päätyi opiskelemaan lukuteoriaa Göttingenin kuuluisaan yliopistoon. Myöhemmin hän opetti yliopistossa algebraa, todennäköisyyslaskentaa ja geometriaa. Dedekind ansoitui myös tutkimuksissaan. Hänen ansiostaan kehittyivät algebran abstraktit osa-alueet, kuten ryhmät, renkaat, ja modulit. Ei ole siis yllätys, että Dedekindin luomalla aksioomalla on myös syvällinen algebrallinen merkitys.

(H7) Olkoon l suora sekä A , B ja C pisteitä, joiden kautta l ei kulje. Tällöin on voimassa:

- (1) Jos ABl ja BCl , niin ACl .
- (2) Jos AlB ja BlC , niin ACl .

Määritelmä 2.1.3. Olkoon A ja B eri pisteitä. Joukkoa

$$\overrightarrow{AB} := AB \cup \{C \text{ on piste} \mid A * B * C\}$$

sanotaan *puolisuoraksi* \overrightarrow{AB} .

(H8) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja \overrightarrow{PQ} mielivaltainen puolisuora, niin on olemassa täsmälleen yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että janat AB ja PR ovat yhteneviä, $AB \cong PR$.

HUOM! $C \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\} \iff B \in \overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$.

HUOM! Aksioomasta (H8) seuraa erityisesti, että pisteestä A suuntaan \overrightarrow{AB} piirretyt janat AC ja AC' ovat sama jana, jos ne ovat yhtenevät.

(H9) Janojen yhtenevyys \cong on ekvivalenssirelaatio:

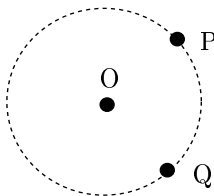
- (1) $AB \cong AB$ (Refleksiivisyys).
- (2) Jos $AB \cong CD$, niin $CD \cong AB$ (Symmetrisyys).
- (3) Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB \cong EF$ (Transitiivisuus).

(H10) Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.

Määritelmä 2.1.4. Olkoon O ja Q eri pisteitä. Sanotaan *ympyräksi* pistejoukkoa

$$\{P \text{ on piste} \mid OP \cong OQ\},$$

missä O on ympyrän *keskipiste* ja Q *kehäpiste*.



Kuva 1: Ympyrän määritelmä

Määritelmä 2.1.5. Kulma $\angle BAC$ muodostuu kahdesta puolisuorasta, *kyljistä* \overrightarrow{AB} ja \overrightarrow{AC} , jotka alkavat samasta pisteestä, *kärjestä* A .

HUOM! Kulmille on voimassa $\angle BAC = \angle CAB$.

(H11) Olkoon $\angle BAC$ kulma ja \overleftrightarrow{DE} mielivaltainen suora. Olkoon lisäksi P piste, joka ei sisälly suoraan \overleftrightarrow{DE} . Tällöin on olemassa täsmälleen yksi puolisuora \overleftrightarrow{DF} siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\angle BAC \cong \angle EDF$.

HUOM! Aksiooma (H11) sanoo erityisesti, että jos kaksi kulmaa ovat yhtenevät ja niillä on yhteinen kylki, niin toinenkin kylki on yhteinen tai sitten eri puolilla ensiksi mainittua kylkeä.

(H12) Kulmien yhtenevyys \cong on ekvivalenssirelaatio eli:

- (1) $\angle BAC \cong \angle BAC$ (Refleksiivisyys)
- (2) Jos $\angle BAC \cong \angle EDF$, niin $\angle EDF \cong \angle BAC$ (Symmetrisyys)
- (3) Jos $\angle BAC \cong \angle EDF$ ja $\angle EDF \cong \angle HGI$, niin $\angle BAC \cong \angle HGI$ (Transitiivisyys).

Määritelmä 2.1.6. Olkoon A, B ja C eri pisteitä, jotka eivät kuulu samalle suoralle. Pisteiden A, B ja C muodostamaa järjestettyä joukkoa sanotaan *kolmioksi*, $\triangle ABC$. Janoja AB, BC ja AC sanotaan kolmion *sivuiksi*, ja pisteitä A, B ja C kolmion *kärjiksi*.

HUOM! Järjestys merkitsee sitä, että $\triangle ABC \neq \triangle BAC$.

Määritelmä 2.1.7. Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita. Sanotaan, että ne ovat *yhteneviä*, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, jos niiden vastaavat sivut ja kulmat ovat yhteneviä.

(H13) Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\angle A \cong \angle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. (SKS – sääntö)

(DA) Olkoon l suora ja $L = \{P \mid P \text{ on suoralla } l\}$ sen kaikkien pisteiden joukko. Olkoon lisäksi $D_1 \in L$ ja $D_2 \in L$ siten, että

- (1) $D_1 \neq \emptyset$ ja $D_2 \neq \emptyset$
- (2) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
- (3) $D_1 \cup D_2 = L$
- (4) Jos $Q, R \in D_1$, niin ei ole olemassa pistettä $S \in D_2$, jolla olisi $Q * S * R$.
- (5) Jos $Q, R \in D_2$, niin ei ole olemassa pistettä $S \in D_1$, jolla olisi $Q * S * R$.

Tällöin on olemassa täsmälleen yksi piste $P \in L$ siten, että kaikille $A, B \in L$ pätee $A * P * B$ aina ja vain kun $A \in D_1$ ja $B \in D_2$, tai $A \in D_2$ ja $B \in D_1$.

HUOM! Euklidisen geometrian aksioomajärjestelmään kuuluu lisäksi paralleeliaksioma (PA) ja hyperbolisen geometrian aksioomajärjestelmään kuuluu hyperbolinen aksioma (HYP), jotka määritellään kohdassa 2.3.

2.2 Descartesin tasokoordinaatistomalli

Tässä luvussa konstruoidaan seuraavaksi euklidiselle geometrialle *Descartesin tasokoordinaatistomalli* eli ns. ”koulugeometriamalli”. Mallin avulla perustellaan aksioomien (H1) – (H13), (DA) ja (PA) ristiriidattomuus.

Määritelmä 2.2.1. Olkoon tason \mathbb{R}^2 pisteet *tasokoordinaatistomallin* pisteitä ja *suorat* muotoa

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

olevia pistejoukkoja, missä $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ja $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ovat kiinnitettyjä. Lisäksi sanotaan, että *piste* P kuuluu suoralle l , jos $P \in l$.

Määritelmä 2.2.2. Olkoon A ja B tasokoordinaatistomallin pisteitä. Määritellään pisteiden välinen *etäisyys*

$$\|A - B\| := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

missä $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$. Etäisyyttä kutsutaan euklidiseksi etäisyydeksi.

Määritelmä 2.2.3. Olkoon A , B ja C eri pisteitä tasokoordinaatistomallissa. Sanotaan, että B on pisteiden A ja C välissä, $A * B * C$, mikäli

$$\|A - C\| = \|A - B\| + \|B - C\|.$$

Lause 2.2.4. Olkoon $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ eri pisteitä. Tasokoordinaatistomallin joukko

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(b_1 - a_1, b_2 - a_2), \lambda \in [0, 1]\}$$

on jana AB . Sitä sanotaan usein *euklidiseksi janaksi* AB .

Todistus. Seuraa suoraan määritelmistä 2.1.1, 2.2.1 ja 2.2.3. \square

Kun välissäolo nyt on määritelty, on myös janan käsite määritelty. Pienellä laskulla voidaan osoittaa, että tällainen jana on sama asia kuin euklidinen jana. Toisin sanoen jos $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$, niin $A * C * B$ jos ja vain jos

$$C = (a_1, a_2) + \lambda(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

jollakin $\lambda \in]0, 1[$. Vastaava pätee myös puolisuoralle. Toisin sanoen $C \in \overrightarrow{AB}$ jos ja vain jos

$$C = (a_1, a_2) + \lambda(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

jollakin $\lambda \geq 0$.

Lause 2.2.5. Olkoon $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ eri pisteitä. Tasokoordinaatistomallissa joukko

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(b_1 - a_1, b_2 - a_2), \lambda \geq 0\}$$

on puolisuora \overrightarrow{AB} . Sitä sanotaan usein *euklidiseksi puolisuoraksi* \overrightarrow{AB} .

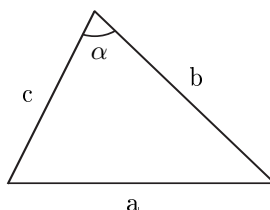
Todistus. Seuraa suoraan määritelmistä 2.1.3 ja 2.2.3 sekä Lauseesta 2.2.4. \square

Määritelmä 2.2.6. Olkoon A, B, C ja D Descartesin tasokoordinaatistomallin pisteitä. Mallin janat AB ja CD ovat *yhteneviä*, $AB \cong CD$, jos on voimassa

$$\|A - B\| = \|C - D\|.$$

Määritellään seuraavaksi *kulmien yhtenevyys* Descartesin tasokoordinaatistomalliin. Otetaan kulmien yhtenevyyden määritelmäksi laajennettu Pythagoraan lause (kosinilause)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$



Kuva 2: Kosinilause

Määritelmä 2.2.7. Descartesin tasokoordinaatistomallin kulmat $\angle BAC$ ja $\angle DEF$ ovat *yhteneviä*, $\angle BAC \cong \angle EDF$, jos

$$\frac{\|A - B\|^2 + \|A - C\|^2 - \|B - C\|^2}{\|A - B\|\|A - C\|} = \frac{\|D - E\|^2 + \|D - F\|^2 - \|E - F\|^2}{\|D - E\|\|D - F\|}.$$

HUOM! Näin määritelty yhtenevyys on todella kulmien välinen relaatio. Jos $\angle BAC \cong \angle EDF$ ja $B' \in \overrightarrow{AB}$ ja $C' \in \overrightarrow{AC}$, niin $\angle B'AC' \cong \angle EDF$. Tämä on helppo todeta laskemalla.

Lause 2.2.8. Descartesin³ tasokoordinaatistomalli toteuttaa Hilbertin aksioomat (H1) – (H13) ja Dedekindin aksiooman.

Todistus. Todetaan, että konstruoitu malli toteuttaa Hilbertin aksioomat:

(H1): Olkoon P ja Q tason \mathbb{R}^2 eri pisteitä. Tällöin on olemassa $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $P = (p_1, p_2)$ ja $Q = (q_1, q_2)$. Valitaan suoraksi

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(q_1 - p_1, q_2 - p_2), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

jolloin

$$P = (p_1, p_2) + \lambda(q_1 - p_1, q_2 - p_2),$$

missä $\lambda = 0$ ja

$$Q = (p_1, p_2) + \lambda(q_1 - p_1, q_2 - p_2),$$

³René Descartes (1596 – 1650) oli ranskalainen matemaatikko, filosofi ja tiedemies. Häntä voidaan kutsua monellakin tapaa nykymatematiikan isäksi. Descartes kehitti karteesisen koordinaatiston, jonka seurauksena analyyttinen geometria sai alkunsa. Keksintö oli merkittävä, sillä se loi yhteyden algebran ja geometrian välille.

missä $\lambda = 1$. Näin ollen on olemassa ainakin yksi suora, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta. Osoitetaan seuraavaksi suoran \overleftrightarrow{PQ} yksikäsitteisyys. Olkoon l suora siten, että $P \in l$ ja $Q \in l$. Tällöin suoran

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

lausekkeesta saadaan

$$(p_1, p_2) = (x_0, y_0) + \lambda_P(a, b)$$

ja

$$(q_1, q_2) = (x_0, y_0) + \lambda_Q(a, b),$$

missä $\lambda_P, \lambda_Q \in \mathbb{R}$. Näin ollen pätee

$$\begin{aligned} a &= \frac{q_1 - p_1}{\lambda_Q - \lambda_P} \\ b &= \frac{q_2 - p_2}{\lambda_Q - \lambda_P} \\ x_0 &= \frac{(p_1 + q_1)(\lambda_P^2 - \lambda_Q^2) - p_1 + q_1}{2(\lambda_P^2 - \lambda_Q^2)} \text{ ja} \\ y_0 &= \frac{(p_2 + q_2)(\lambda_P^2 - \lambda_Q^2) - p_2 + q_2}{2(\lambda_P^2 - \lambda_Q^2)}, \end{aligned}$$

joten suora l voidaan kirjoittaa muodossa

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(q_1 - p_1, q_2 - p_2), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Siis pisteiden P ja Q kautta kulkeva suora on yksikäsitteinen.

(H2): Olkoon l mallin mielivaltainen suora. Tällöin kyseinen suora on muotoa

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

jollakin $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ja $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Näin ollen suora kulkee pisteiden (x_0, y_0) ja $(x_0 + a, y_0 + b)$ kautta, joten aksioma toteutuu.

(H3): Valitaan pisteet $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(1, 1)$ tasosta \mathbb{R}^2 . On helppoa todeta, ettei mikään mallin suorista kulje jokaisen valitun pisteen kautta, joten aksioma (H3) pätee.

(H4): Pisteiden olo samalla suoralla seuraa tavallisen kolmioepäyhtälön käänteis-ehdosta ja muut kohdat seuraavat suoraan määritelmästä 2.2.3.

(H5): Olkoon A ja B mallin eri pisteitä. Tällöin on olemassa $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$. Näin ollen suoraksi saadaan

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(b_1 - a_1, b_2 - a_2), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Valitaan suoralta \overleftrightarrow{AB} pisteet C, D ja E siten, että

$$\begin{cases} C &= (2a_1 - b_1, 2a_2 - b_2) \quad (\lambda = -1) \\ D &= \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \quad (\lambda = \frac{1}{2}) \\ E &= (2b_1 - a_1, 2b_2 - a_2) \quad (\lambda = 2). \end{cases}$$

Tällöin on voimassa

$$\begin{aligned}
\|C - B\| &= \sqrt{(2a_1 - b_1 - b_1)^2 + (2a_2 - b_2 - b_2)^2} \\
&= 2\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \\
&= \sqrt{(2a_1 - b_1 - a_1)^2 + (2a_2 - b_2 - a_2)^2} \\
&\quad + \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \\
&= \|C - A\| + \|A - B\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|A - B\| &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \\
&= \sqrt{\left(a_1 - \frac{a_1 + b_1}{2}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{a_2 + b_2}{2}\right)^2} \\
&\quad + \sqrt{\left(\frac{a_1 + b_1}{2} - b_1\right)^2 + \left(\frac{a_1 + b_1}{2} - b_2\right)^2} \\
&= \|A - D\| + \|D - B\|
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\|A - E\| &= \sqrt{[a_1 - (2b_1 - a_1)]^2 + [a_2 - (2b_2 - a_2)]^2} \\
&= 2\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \\
&= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \\
&\quad + \sqrt{[b_1 - (2b_1 - a_1)]^2 + [a_2 - (2b_2 - a_2)]^2} \\
&= \|A - B\| + \|B - E\|,
\end{aligned}$$

joten

$$C * A * B, \quad A * D * B \text{ ja } A * B * E.$$

(H6): Seuraa laskulla määritelmästä 2.2.3.

(H7): Aksiooman (H7) voimassaolon toteaminen suoraan laskemalla on hankalaa, mutta lineaarialgebran tiedoilla tason siirroista ja kierroista voidaan mielivaltainen tilanne olettaa sellaiseksi, että tarkasteltava suora l on x -akseli. Olkoon A , B ja C mallin pisteitä siten, että ne eivät ole x -akselilla. Tällöin on olemassa a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , $c_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2)$, missä a_2 , b_2 , $c_2 \neq 0$. Osoitetaan aluksi, että

$$AlB \iff a_2 b_2 < 0.$$

Olkoon AlB . Tällöin $(p, 0) \in AB$ jollakin $p \in \mathbb{R}$, joten saadaan kaksi mahdollista vaihtoehtoa:

- (1) $a_2 < p < b_2$
- (2) $b_2 < p < a_2$.

Näin ollen $a_2b_2 < 0$. Olkoon seuraavaksi $a_2b_2 < 0$, jolloin $a_2 < 0$ ja $b_2 > 0$ tai $a_2 > 0$ ja $b_2 < 0$. Jana AB voidaan kirjoittaa muodossa

$$AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(b_1 - a_1, b_2 - a_2), \lambda \in [0, 1]\}.$$

Valitaan

$$P = (a_1, a_2) + \lambda_P(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

missä $\lambda_P = \frac{a_2}{a_2 - b_2}$. Tällöin piste P on janan AB ja x -akselin leikkauspiste, joten AlB .

(1) Olkoon ABl ja BCl . Tällöin äskeisen nojalla saadaan

$$a_2b_2 > 0 \text{ ja } b_2c_2 > 0,$$

joten $a_2b_2^2c_2 > 0$ ja siis $a_2c_2 > 0$. Näin ollen ACl .

(2) Olkoon AlB ja BIC . Tällöin saadaan

$$a_2b_2 < 0 \text{ ja } b_2c_2 < 0,$$

joten $a_2b_2^2c_2 > 0$ ja siis $a_2c_2 > 0$. Näin ollen ACl .

HUOM! Tasokoordinaatistomallissa AlB merkitsee, että pisteet A ja B ovat tavallisessa mielessä eri puolilla suoraa l .

(H8): Olkoon A ja B eri pisteitä sekä \overrightarrow{PQ} mielivaltainen puolisuora. Tällöin on olemassa $a_1, a_2, b_1, b_2, p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $P = (p_1, p_2)$ ja $Q = (q_1, q_2)$ ja puolisuoran lausekkeeksi saadaan

$$\overrightarrow{PQ} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(q_1 - p_1, q_2 - p_2), \lambda \geq 0\}.$$

Valitaan piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että

$$R = (r_1, r_2) = (p_1, p_2) + \sqrt{\frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}} (q_1 - p_1, q_2 - p_2).$$

Tällöin on voimassa

$$\begin{aligned} \|A - B\|^2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\ &= \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} [(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2] \\ &= \left(\sqrt{\frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}} (q_1 - p_1) \right)^2 \\ &\quad + \left(\sqrt{\frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}} (q_2 - p_2) \right)^2 \\ &= (p_1 - r_1)^2 + (p_2 - r_2)^2 \\ &= \|P - R\|^2, \end{aligned}$$

joten

$$\|A - B\| = \|P - R\| \iff \lambda_R = \sqrt{\frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}}.$$

Näin ollen on olemassa täsmälleen yksi $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että

$$\|A - B\| = \|P - Q\|.$$

(H9): Aksiooma (H9) on voimassa:

- (1) Seuraa suoraan määritelmästä 2.2.6.
- (2) Seuraa suoraan määritelmästä 2.2.6.
- (3) Valitaan vielä pisteet E ja F tasosta \mathbb{R}^2 siten, että $CD \cong EF$. Tällöin ehdoista $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$ saadaan $\|A - B\| = \|C - D\|$ ja $\|C - D\| = \|E - F\|$. Näin ollen $\|A - B\| = \|E - F\|$, joten $AB \cong EF$.

(H10): Olkoon $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, jolloin määritelmästä 2.2.3 ja 2.2.6 seuraa

$$\|A - C\| = \|A - B\| + \|B - C\| = \|A' - B'\| + \|B' - C'\| = \|A' - C'\|.$$

Näin ollen $AC \cong A'C'$, joten aksiooma (H10) on myös voimassa.

(H11): Olkoon $\angle BAC$ kulma ja \overleftrightarrow{DE} suora. Olkoon lisäksi P piste, joka ei sisälly suoraan \overleftrightarrow{DE} . Koska aksiooma (H8) on voimassa tässä mallissa, niin on olemassa täsmälleen yksi piste $G \in \overleftrightarrow{DE}$ siten, että $AB \cong DG$. Analyttisestä geometriasta tiedetään, että mallille on voimassa kolmioepäyhtälö, jolloin

$$\begin{aligned} \|A - B\| &\leq \|B - C\| + \|A - C\|, \\ \|A - C\| &\leq \|A - B\| + \|B - C\| \text{ ja} \\ \|B - C\| &\leq \|A - B\| + \|A - C\|. \end{aligned}$$

Ratkaisemalla ympyröitä kuvaavat yhtälöparit voidaan todeta, että D -keskinen $\|A - C\|$ -säteinen ympyrä ja G -keskinen $\|B - C\|$ -säteinen ympyrä leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä, jotka ovat eri puolilla suoraa \overleftrightarrow{DE} . Valitaan pisteeksi F näistä se, joka on samalla puolella kuin P . Määritelmän 2.2.7 nojalla saadaan $\angle BAC \cong \angle FDG$ ja edelleen

$$\angle BAC \cong \angle EDF.$$

Näin ollen vaaditunlainen puolisuora \overrightarrow{DF} on olemassa. Osoitetaan seuraavaksi sen yksikäsitteisyys. Oletetaan, että on olemassa toinen ehdot täyttävä puolisuora $\overrightarrow{DF'}$, jolloin

$$\angle EDF \cong \angle BAC \cong \angle EDF'.$$

ja siis

$$\angle EDF \cong \angle EDF'.$$

On osoitettava, että \overrightarrow{DF} ja $\overrightarrow{DF'}$ ovat sama suora, kun tiedetään, että F ja F' ovat samalla puolella suoraa \overrightarrow{DE} kuin piste P . Voidaan olettaa, että $D = (0, 0)$. Olkoon lisäksi $F = (f_1, f_2)$ ja $F' = (f'_1, f'_2)$, jolloin saadaan kaksi mahdollista vaihtoehtoa:

- (1) $f_1 = f'_1$ tai
- (2) $f_1 \neq f'_1$.

- (1) Voidaan olettaa, että $f_1 = f'_1 = 1$. Oletetaan lisäksi $E = (1, e_2)$ siten, että

$$e_2 > f_2 > f'_2,$$

Merkitään $d = \|D - E\|$. Kuvaus $H :] -\infty, e_2[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(f_2) = \frac{d^2 + f_2^2 - (e_2 - f_2)^2}{d}$$

on injektio, joten

$$\frac{\|D - E\|^2 + \|D - F\|^2 - \|E - F\|^2}{\|D - E\|\|D - F\|} \neq \frac{\|D - E\|^2 + \|D - F'\|^2 - \|E - F'\|^2}{\|D - E\|\|D - F'\|}.$$

Näin ollen kulmat $\angle EDF$ ja $\angle EDF'$ eivät ole yhteneviä, joten puolisuora \overrightarrow{DF} on yksikäsitteinen.

- (2) Olkoon $f_1 \neq f'_1$. Jos puolisuora \overrightarrow{DE} on y -akselin suuntainen, niin tilanne palautuu kohtaan (1) vaihtamalla akselien nimet. Voidaan jälleen olettaa, että $D = (0, 0)$. Puolisuoralla \overrightarrow{DE} on olemassa piste, jonka y -koordinaatti on aidosti positiivinen. Vaihdetaan tarvittaessa pisteelle E x -koordinaatiksi 1. Tällöin tapaus palautuu kohtaan (1).

(H12): Aksioman kohdat (1) ja (2) on helppo perustella toteamalla ne määritelmän 2.2.7 välittömiksi seurauksiksi. Kohta (3) perustuu huomautukseen sivulla 6.

(H13): Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\angle A \cong \angle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin määritelmistä 2.2.6 ja 2.2.7 seuraa

$$\begin{aligned} \frac{\|A - B\|^2 + \|A - C\|^2 - \|B - C\|^2}{\|A - B\|\|A - C\|} &= \frac{\|D - E\|^2 + \|D - F\|^2 - \|E - F\|^2}{\|D - E\|\|D - F\|} \\ \Leftrightarrow \frac{\|A - B\|^2 + \|A - C\|^2 - \|B - C\|^2}{\|A - B\|\|A - C\|} &= \frac{\|A - B\|^2 + \|A - C\|^2 - \|E - F\|^2}{\|A - B\|\|A - C\|} \\ \Leftrightarrow \|B - C\|^2 &= \|D - F\|^2 \\ \Leftrightarrow \|B - C\| &= \|D - F\|, \end{aligned}$$

joten $BC \cong EF$. Käytetään edelleen määritelmää 2.2.7, jolloin saadaan

$$\frac{\|A - B\|^2 + \|B - C\|^2 - \|A - C\|^2}{\|A - B\|\|B - C\|} = \frac{\|D - E\|^2 + \|E - F\|^2 - \|D - F\|^2}{\|D - E\|\|E - F\|}$$

ja

$$\frac{\|A - C\|^2 + \|B - C\|^2 - \|A - B\|^2}{\|A - C\|\|B - C\|} = \frac{\|D - F\|^2 + \|E - F\|^2 - \|D - E\|^2}{\|D - F\|\|E - F\|}.$$

Näin ollen $\angle B \cong \angle E$ ja $\angle C \cong \angle F$, joten kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhteneviä.

(DA): Olkoon l mielivaltainen suora. Olkoon lisäksi $D_1 \subset l$ ja $D_2 \subset l$ siten, että

- (1) $D_1 \neq \emptyset$ ja $D_2 \neq \emptyset$
- (2) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
- (3) $D_1 \cup D_2 = l$
- (4) Jos $Q, R \in D_1$, niin ei ole olemassa pistettä $S \in D_2$, jolla olisi $Q * S * R$.
- (5) Jos $P, Q \in D_2$, niin ei ole olemassa pistettä $S \in D_1$, jolla olisi $Q * S * R$.

Osoitetaan, että on olemassa täsmälleen yksi piste $P \in l$ siten, että kaikille $A, B \in l \setminus \{P\}$ pätee $A * P * B$ aina ja vain kun $A \in D_1$ ja $B \in D_2$, tai $A \in D_2$ ja $B \in D_1$. Valitaan pisteet $E = (e_1, e_2)$ ja $F = (f_1, f_2)$ siten, että $E \in D_1$ ja $F \in D_2$. Valitaan joukot

$$\begin{aligned}\Delta_1 &: = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid (e_1, e_2) + \lambda(f_1 - e_1, f_2 - e_2) \in D_1 \} \text{ ja} \\ \Delta_2 &: = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid (e_1, e_2) + \lambda(f_1 - e_1, f_2 - e_2) \in D_2 \}.\end{aligned}$$

Osoitetaan, että joukot Δ_1 ja Δ_2 toteuttavat Dedekindin aksiooman ehdot:

- (1) $D_1 \neq \emptyset$ ja $D_2 \neq \emptyset$, jolloin on olemassa $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\begin{aligned}(e_1, e_2) + \lambda_1(f_1 - e_1, f_2 - e_2) &\in D_1 \text{ ja} \\ (e_1, e_2) + \lambda_2(f_1 - e_1, f_2 - e_2) &\in D_2.\end{aligned}$$

Näin ollen $\lambda_1 \in \Delta_1$ ja $\lambda_2 \in \Delta_2$.

- (2) Joukoille Δ_1 ja Δ_2 on voimassa

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid (e_1, e_2) + \lambda(f_1 - e_1, f_2 - e_2) \in D_1 \cap D_2 \} = \emptyset.$$

- (3) Joukoille Δ_1 ja Δ_2 on voimassa

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid (e_1, e_2) + \lambda(f_1 - e_1, f_2 - e_2) \in D_1 \cup D_2 \} = \mathbb{R}.$$

- (4) Olkoon $\lambda_Q, \lambda_R \in \Delta_1$, jolloin

$$\begin{aligned}Q &= (e_1, e_2) + \lambda_Q(f_1 - e_1, f_2 - e_2) \in D_1 \text{ ja} \\ R &= (e_1, e_2) + \lambda_R(f_1 - e_1, f_2 - e_2) \in D_2.\end{aligned}$$

Tällöin ehdosta $Q * S * R$ saadaan $S \in D_1$. Näin ollen

$$\lambda_Q < \lambda_S < \lambda_R \text{ tai } \lambda_Q > \lambda_S > \lambda_R,$$

missä $S = (e_1, e_2) + \lambda_S(f_1 - e_1, f_2 - e_2)$. Siis kohta ehto (4) toteutuu.

- (5) Samaan tapaan kuin kohta (4).

Joukot Δ_1 ja Δ_2 toteuttavat Dedekindin aksioman ehdot reaaliluvuille. Tällöin reaalilukujen täydellisyyden nojalla on olemassa täsmälleen yksi luku $\lambda_P \in]\lambda_1, \lambda_2[$ siten, että

$$\begin{aligned}\lambda_P &= \sup \Delta_1 = \inf \Delta_2 \text{ tai} \\ \lambda_P &= \inf \Delta_1 = \sup \Delta_2.\end{aligned}$$

Näin ollen pisteellä

$$P = (e_1, e_2) + \lambda_P(f_1 - e_1, f_2 - e_2)$$

on halutut ominaisuudet.

□

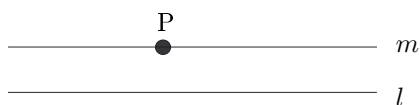
2.3 Paralleeliaksioma ja hyperbolinen aksioma

Tarkastellaan seuraavaksi suorien leikkauspisteitä ja yhdensuuntaisuutta. Määritellään suorien yhdensuuntaisuus ennen paralleeliaksiomaa.

Määritelmä 2.3.1. Suoria l ja m sanotaan yhdensuuntaisiksi, $l \parallel m$, jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä. Muussa tapauksessa merkitään $l \nparallel m$.

Seuraava paralleeliaksioma on oleelliselta osalta peräisin Eukleideelta:

(PA) Olkoon l mielivaltainen suora ja P piste, joka ei ole suoralla l . Tällöin on olemassa täsmälleen yksi suora m , joka kulkee pisteen P kautta, ja joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa.



Kuva 3: Paralleeliaksioma (PA)

Lause 2.3.2. Descartesin tasokoordinaatistomalli toteuttaa paralleeliaksioman.

Todistus. Olkoon

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

missä $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ja $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ovat kiinnitettyjä, mallin mielivaltainen suora. Olkoon lisäksi $P = (p_1, p_2) \notin l$. Valitaan suora

$$m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(a, b), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Oletuksen nojalla

$$(p_1, p_2) \neq (x_0, y_0) + \lambda(a, b)$$

kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$, joten

$$(p_1, p_2) + \lambda_1(a, b) \neq (x_0, y_0) + \lambda_2(a, b)$$

kaikilla $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Näin ollen suorat l ja m ovat yhdensuuntaisia. Osoitetaan seuraavaksi suoran m yksikäsitteisyys. Olkoon suora

$$n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (x_1, y_1) + \lambda(c, d), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

missä $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ ja $(c, d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ovat kiinnitettyjä, toinen pisteen P kautta kulkeva suoran l kanssa yhdensuuntainen suora. Tällöin on voimassa

$$(x_0, y_0) + \lambda_1(a, b) \neq (x_1, y_1) + \lambda_2(c, d)$$

kaikilla $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Toisin sanoen yhtälöparilla

$$\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 c = x_0 - x_1 \\ \lambda_1 b + \lambda_2 d = y_0 - y_1 \end{cases}$$

ei ole ratkaisua. Tällöin

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = 0$$

eli (a, b) ja (c, d) ovat lineaarisesti riippuvia. Näin ollen on olemassa $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\lambda(a, b) = (c, d).$$

Suora n kulkee pisteen P kautta, joten on olemassa vakio $\lambda_P \in \mathbb{R}$ siten, että

$$(p_1, p_2) = (x_1, y_1) + \lambda_P(c, d) = (x_1, y_1) + \lambda \cdot \lambda_P(a, b).$$

Tällöin

$$(x_1, y_1) = (p_1, p_2) - \lambda \cdot \lambda_P(a, b),$$

joten piste $(x_1, y_1) \in m$. Näin ollen suora n voidaan kirjoittaa muodossa

$$n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(a, b), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

joten $m = n$. □

Itse asiassa aikaisempien aksioomien avulla voidaan ilman paralleeliaksiomaa osoittaa, että on olemassa ainakin yksi pisteen P kautta kulkeva suoran l kanssa yhdensuuntainen suora. Sen sijaan seuraavassa luvussa näemme, ettei yksikäsitteisyyssehto seuraa näistä aksioomista, vaan todistukselle on oleellista, että tarkasteltiin Descartesin tasokoordinaatistomallia. Näin ollen paralleeliaksioma on riippumaton aikaisemmista. Aksioma luo eron euklidisen geometrian ja hyperbolisen geometrian välille. Toisin sanoen paralleeliaksioma on voimassa vain euklidisessa geometriassa. Määritellään seuraavaksi hyperbolinen aksioma, joka on tärkeä tulevilla luvuilla.

(HYP) On olemassa sellainen suora l ja piste P , joka ei ole suoralla l siten, että pisteen P kautta kulkee ainakin kaksi eri suoran l kanssa yhdensuuntaista suoraa.

HUOM! Geometrian malleissa täsmälleen toinen aksioomista (PA) tai (HYP) on voimassa.

3 Puolitasomalli

Pian esiteltävässä Hilbertin aksioomien *puolitasomallissa* ei toteudu paralleeliaksioma, vaikka muut aksioomat toteutuvat. Hyperbolisella geometriallakin on siis olemassa malli, joten paralleeliaksioma on riippumaton muista aksioomista.

3.1 Puolitasomallin konstruointi

Konstruoidaan seuraavassa puolitasomalli Descartesin tasokoordinaatistomallin pohjalle. Descartesin tasokoordinaatistomallin objekteja sanomme seuraavassa yleensä *euklidisiksi suoriksi, kulmiksi, ympyröiksi* jne. Tasogeometriasta oletamme tunnetuksi paljon muutakin kuin aksioomat – eihän tavallinen geometria ole pääaiheemme.

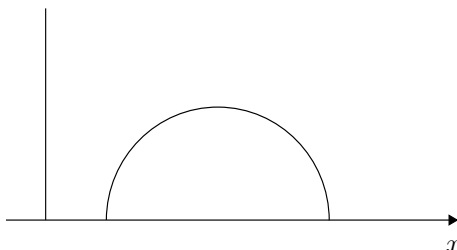
Määritelmä 3.1.1. Olkoon \overleftrightarrow{AB} ja \overleftrightarrow{AC} kaksi euklidista suoraa, jotka leikkaavat toisensa pisteessä A siten, että kulma $\angle BAC$ on suorakulma tavallisessa mielessä. Tällöin sanotaan, että \overleftrightarrow{AC} on suoran \overleftrightarrow{AB} normaali, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

Määritelmä 3.1.2. Olkoon

$$\tilde{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

Kutsutaan pisteitä $P \in \tilde{T}$ *puolitasomallin pisteiksi*, ja käytetään niistä nimitystä \mathcal{T} -piste, jotta ne erottuvat euklidisista pisteistä.

Määritelmä 3.1.3. Joukko $l_{\mathcal{T}}$ on *puolitasomallin suora*, mikäli $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$, missä α on joko x -akselin normaali tai ympyrä, jonka keskipiste on x -akselilla. Kutsutaan näitä suoria \mathcal{T} -suoriksi, jotta ne erottuvat euklidisista suorista.



Kuva 4: Puolitasomallin suoria

Määritelmä 3.1.4. Olkoon A ja B mielivaltaisia \mathcal{T} -pisteitä.

- (1) Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on x -akselilla. Olkoon lisäksi P ja Q ympyrän α ja x -akselin leikkauspisteitä. Tällöin

$$d_{\mathcal{T}}(A, B) = \left| \log \frac{\|A - P\| \cdot \|B - Q\|}{\|A - Q\| \cdot \|B - P\|} \right|.$$

- (2) Oletetaan, että α on x -akselin normaali. Olkoon lisäksi P normaalin α ja x -akselin leikkauspiste. Tällöin

$$d_{\mathcal{T}}(A, B) = \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|B - P\|} \right|.$$

3.2 Aksiomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) puolitasomallissa 16

Lukua $d_{\mathcal{T}}(A, B)$ sanotaan pisteiden A ja B väliseksi *hyperboliseksi etäisyydeksi*.

HUOM! Hyperboliselle etäisyydelle on voimassa kolmioepäyhtälö. Jos A , B ja C ovat \mathcal{T} -pisteitä, niin pätee

$$d_{\mathcal{T}}(A, B) \leq d_{\mathcal{T}}(A, C) + d_{\mathcal{T}}(B, C).$$

HUOM! Puolitasomallin pisteiden välinen etäisyys voidaan ilmoittaa myös integraalilaskennan keinoin muodossa

$$d_{\mathcal{T}}(A, B) := \int_{\gamma} \frac{1}{y} ds,$$

missä γ on polku A :sta B :hen pitkin \mathcal{T} -suoraa.

Määritelmä 3.1.5. Olkoon A , B ja C eri \mathcal{T} -pisteitä. Sanotaan, että B on puolitasomallin mielessä pisteiden A ja C välissä, $A \times B \times C$, jos A , B ja C ovat samalla $l_{\mathcal{T}}$ -suoralla ja

$$d_{\mathcal{T}}(A, C) = d_{\mathcal{T}}(A, B) + d_{\mathcal{T}}(B, C).$$

Määritelmä 3.1.6. Sanotaan, että *janat* $AB_{\mathcal{T}}$ ja $CD_{\mathcal{T}}$ ovat *yhteneviä*, $AB_{\mathcal{T}} \cong CD_{\mathcal{T}}$, jos

$$d_{\mathcal{T}}(A, B) = d_{\mathcal{T}}(C, D).$$

Määritelmä 3.1.7. Sanotaan, että *kulmat* $\angle BAC$ ja $\angle EDF$ ovat *yhteneviä*, $\angle BAC_{\mathcal{T}} \cong \angle EDF_{\mathcal{T}}$, jos ehdoista $B' \in \overrightarrow{AB}_{\mathcal{T}}$, $C' \in \overrightarrow{AC}_{\mathcal{T}}$, $E' \in \overrightarrow{DE}_{\mathcal{T}}$, $F' \in \overrightarrow{DF}_{\mathcal{T}}$ siten, että $AB_{\mathcal{T}} \cong DE'_{\mathcal{T}}$ ja $AC_{\mathcal{T}} \cong DF'_{\mathcal{T}}$ seuraa $BC_{\mathcal{T}} \cong E'F'_{\mathcal{T}}$.

3.2 Aksiomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) puolitasomallissa

Osoitetaan seuraavaksi, että puolitasomalli toteuttaa aksiomat (H1) – (H13) ja (DA). Näytetään myös, ettei paralleeliaksioma ole voimassa. Käytetään todistuksissa apuna Descartesin tasokoordinaatistomallia.

Lause 3.2.1. (H1) Jos P ja Q ovat eri \mathcal{T} -pisteitä, niin on olemassa täsmälleen yksi \mathcal{T} -suora, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta.

Todistus. Olkoon $P = (p_1, p_2)$ ja $Q = (q_1, q_2)$ eri \mathcal{T} -pisteitä. Tällöin on olemassa kaksi vaihtoehtoa:

- (1) $p_1 = q_1$ ja $p_2 \neq q_2$.
- (2) $p_1 \neq q_1$.

- (1) Olkoon $p_1 = q_1$ ja $p_2 \neq q_2$. Tällöin euklidinen suora \overleftrightarrow{PQ} on x -akselin normaali, joten $\tilde{T} \cap \overleftrightarrow{PQ}$ kelpaa etsityksi \mathcal{T} -suoraksi. Lauseen 2.2.8 nojalla Descartesin tasokoordinaatistomallin suora \overleftrightarrow{PQ} on yksikäsitteinen, joten ei ole olemassa muita tämän tyyppisiä \mathcal{T} -suoria, jotka kelpaisivat. Lisäksi

3.2 Aksiomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) puolitasomallissa 17

kaikilla

$x \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$\begin{aligned}
 \|P - (x, 0)\| &= \|(p_1, p_2) - (x, 0)\| \\
 &= \sqrt{(p_1 - x)^2 + p_2^2} \\
 &= \sqrt{(q_1 - x)^2 + p_2^2} \\
 &\neq \sqrt{(q_1 - x)^2 + q_2^2} \\
 &= \|(q_1, q_2) - (x, 0)\| \\
 &= \|Q - (x, 0)\|,
 \end{aligned}$$

joten mikään $(x, 0)$ -keskinen ympyrä α ei toteuta ehtoa $P, Q \in \tilde{T} \cap \alpha$. Näin ollen $\tilde{T} \cap \overrightarrow{PQ}$ on yksikäsitteinen.

(2) Olkoon $p_1 \neq q_1$. Olkoon lisäksi α R -keskinen r -säteinen ympyrä, missä

$$R = (r_1, r_2) = \left(\frac{p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2}{2(p_1 - q_1)}, 0 \right)$$

ja

$$r = \frac{\sqrt{(p_1 - q_1)^4 + 2(p_1 - q_1)^2(p_2^2 + q_2^2) + (q_2^2 - p_2^2)^2}}{2|p_1 - q_1|}.$$

Havaitaan, että $P, Q \in \alpha$, sillä

$$\begin{aligned}
 &= \|P - R\| \\
 &= \sqrt{(p_1 - r_1)^2 + (p_2 - r_2)^2} \\
 &= \sqrt{\left(p_1 - \frac{p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2}{2(p_1 - q_1)} \right)^2 + (p_2 - 0)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{2p_1^2 - 2p_1q_1 - p_1^2 - p_2^2 + q_1^2 + q_2^2}{2(p_1 - q_1)} \right)^2 + p_2^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{(p_1 - q_1)^2 + q_2^2 - p_2^2}{2(p_1 - q_1)} \right)^2 + p_2^2} \\
 &= \frac{\sqrt{(p_1 - q_1)^4 + 2(p_1 - q_1)^2(q_2^2 - p_2^2) + (q_2^2 - p_2^2)^2 + 4p_2^2(p_1 - q_1)^2}}{2(p_1 - q_1)} \\
 &= \frac{\sqrt{(p_1 - q_1)^4 + 2(p_1 - q_1)^2(p_2^2 + q_2^2) + (q_2^2 - p_2^2)^2}}{2|p_1 - q_1|} \\
 &= r
 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
 \|Q - R\| &= \sqrt{(q_1 - r_1)^2 + (q_2 - r_2)^2} \\
 &= \sqrt{\left(q_1 - \frac{p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2}{2(p_1 - q_1)} \right)^2 + (q_2 - 0)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\left(\frac{2p_1q_1 - 2q_1^2 - p_1^2 - p_2^2 + q_1^2 + q_2^2}{2(p_1 - q_1)}\right)^2 + q_2^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{q_2^2 - p_2^2 - (p_1 - q_1)^2}{2(p_1 - q_1)}\right)^2 + q_2^2} \\
 &= \frac{\sqrt{(p_1 - q_1)^4 - 2(p_1 - q_1)^2(q_2^2 - p_2^2) + (q_2^2 - p_2^2)^2 + 4q_2^2(p_1 - q_1)^2}}{2(p_1 - q_1)} \\
 &= \frac{\sqrt{(p_1 - q_1)^4 + 2(p_1 - q_1)^2(p_2^2 + q_2^2) + (q_2^2 - p_2^2)^2}}{2|p_1 - q_1|} \\
 &= r.
 \end{aligned}$$

Tällöin $\tilde{T} \cap \alpha$ kelpaa etsityksi \mathcal{T} - suoraksi. Osoitetaan seuraavaksi \mathcal{T} - suoran yksikäsitteisyys. Olkoon $l_{\mathcal{T}}$ toinen pisteiden P ja Q kautta kulkeva \mathcal{T} - suora. Tällöin on olemassa α_1 siten, että $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha_1$. Oletuksen nojalla $p_1 \neq q_1$, joten α_1 ei ole x - akselin normaali, vaan α_1 on $(s_1, 0)$ - keskinen s - säteinen ympyrä, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta. Tällöin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} (p_1 - r_1)^2 + p_2^2 = r^2 \\ (q_1 - r_1)^2 + q_2^2 = r^2 \\ (p_1 - s_1)^2 + p_2^2 = s^2 \\ (q_1 - s_1)^2 + q_2^2 = s^2. \end{cases}$$

Näin ollen $r = s$ ja edelleen $\alpha = \alpha_1$, joten $\tilde{T} \cap \alpha$ on yksikäsitteinen. □

Lause 3.2.2. (H2) Jokaiseen \mathcal{T} - suoraan sisältyy ainakin kaksi eri \mathcal{T} - pistettä.

Todistus. Olkoon $l_{\mathcal{T}}$ mielivaltainen \mathcal{T} - suora. Tällöin määritelmän 3.1.3 nojalla \mathcal{T} - suora on muotoa $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$, missä joko

- (1) α on x - akselin normaali tai
 - (2) α on ympyrä, jonka keskipiste on x - akselilla.
- (1) Oletetaan, että α on x - akselin normaali. Tällöin α leikkaa x - akselin pisteessä $(x_0, 0)$, missä $x_0 \in \mathbb{R}$. Valitaan $A = (x_0, 1)$ ja $B = (x_0, 2)$, jolloin A ja B ovat eri \mathcal{T} - pisteitä. Lisäksi $A, B \in \alpha$, joten $A, B \in l_{\mathcal{T}}$.
 - (2) Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on $P = (p, 0)$ ja säde r . Valitaan

$$A = \left(p - \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \text{ ja } B = \left(p + \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right),$$

jolloin

$$\|A - P\| = \sqrt{\left(p - \frac{r}{\sqrt{2}} - p\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{r}{2} + \frac{r}{2}} = r$$

ja

$$\|B - P\| = \sqrt{\left(p + \frac{r}{\sqrt{2}} - p\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{r}{2} + \frac{r}{2}} = r.$$

Lisäksi A ja B ovat \mathcal{T} -pisteitä, joten $A, B \in l_{\mathcal{T}}$.

Näin ollen jokaiseen \mathcal{T} -suoraan sisältyy ainakin kaksi eri \mathcal{T} -pistettä. \square

Lause 3.2.3. (H3) On olemassa kolme eri \mathcal{T} -pistettä siten, ettei mikään \mathcal{T} -suora kulje niiden kaikkien kautta.

Todistus. Olkoon $A = (-1, 1)$, $B = (0, 1)$ ja $C = (1, 1)$, jolloin kyseiset pisteet ovat \mathcal{T} -pisteitä. Havaitaan, että ei ole olemassa x -akselin suhteen normaalia l siten, että $\{A, B, C\} \subset l$. Lisäksi kaikilla $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ on voimassa

$$\|(0, 1) - (x_0, 0)\| < \max\{\|(-1, 1) - (x_0, 0)\|, \|(1, 1) - (x_0, 0)\|\},$$

joten ei ole olemassa $(x_0, 0)$ -keskistä α -ympyrää siten, että $\{A, B, C\} \subset \alpha$. Näin ollen mikään \mathcal{T} -suora ei kulje pisteiden A , B ja C kautta. \square

Lause 3.2.4. (H4) Jos $A \times B \times C$, niin A , B ja C ovat eri \mathcal{T} -pisteitä, joiden kaikkien kautta kulkee sama \mathcal{T} -suora ja $C \times B \times A$.

Todistus. Olkoon $A \times B \times C$. Määritelmän 3.1.5 nojalla pisteet A , B ja C ovat eri \mathcal{T} -pisteitä, ja niiden kautta kulkee sama suora $l_{\mathcal{T}}$. Tällöin määritelmän 3.1.3 nojalla suora on muotoa $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$, missä:

- (1) α on x -akselin normaali tai
- (2) α on ympyrä, jonka keskipiste on x -akselilla.

- (1) Oletetaan, että α on x -akselin normaali. Olkoon lisäksi P α :n ja x -akselin leikkauspiste. Tällöin määritelmän 3.1.4 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{T}}(A, B) &= \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|B - P\|} \right| \\ &= \left| -\frac{1}{\log \frac{\|A - P\|}{\|B - P\|}} \right| \\ &= \left| \log \frac{\|B - P\|}{\|A - P\|} \right| \\ &= d_{\mathcal{T}}(B, A). \end{aligned}$$

- (2) Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on x -akselilla. Olkoon lisäksi P ja Q α -ympyrän ja x -akselin leikkauspisteet. Tällöin etäisyydelle on voimassa

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{T}}(A, B) &= \left| \log \frac{\|A - P\| \cdot \|B - Q\|}{\|A - Q\| \cdot \|B - P\|} \right| \\ &= \left| -\frac{1}{\log \frac{\|A - P\| \cdot \|B - Q\|}{\|A - Q\| \cdot \|B - P\|}} \right| \\ &= \left| \log \frac{\|B - P\| \cdot \|A - Q\|}{\|B - Q\| \cdot \|A - P\|} \right| \\ &= d_{\mathcal{T}}(B, A). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
 d_{\mathcal{T}}(C, A) &= d_{\mathcal{T}}(A, C) \\
 &= d_{\mathcal{T}}(A, B) + d_{\mathcal{T}}(B, C) \\
 &= d_{\mathcal{T}}(B, A) + d_{\mathcal{T}}(C, B) \\
 &= d_{\mathcal{T}}(C, B) + d_{\mathcal{T}}(B, A),
 \end{aligned}$$

joten $C \times B \times A$. □

Lemma 3.2.5. Olkoot $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2)$ eri \mathcal{T} -pisteitä siten, että ne ovat samalla \mathcal{T} -suoralla $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$. Olkoon lisäksi kuvaus $P_r : \alpha \rightarrow]x_0 - r, x_0 + r[$,

$$P_r(x, y) = x,$$

missä α on $(x_0, 0)$ -keskinen r -säteinen ympyrä. Tällöin on voimassa

$$A \times B \times C \iff P_r(A) < P_r(B) < P_r(C) \text{ tai } P_r(A) > P_r(B) > P_r(C).$$

Todistus. Olkoon $A \times B \times C$. Tällöin määritelmän 3.1.4 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
 d_{\mathcal{T}}(A, C) &= \left| \log \frac{\|A - P\| \cdot \|C - Q\|}{\|A - Q\| \cdot \|C - P\|} \right| \\
 &= \left| \log \left(\frac{\|A - P\| \cdot \|B - Q\|}{\|A - Q\| \cdot \|B - P\|} \cdot \frac{\|B - P\| \cdot \|C - Q\|}{\|B - Q\| \cdot \|C - P\|} \right) \right| \\
 &= \left| \log \frac{\|A - P\| \cdot \|B - Q\|}{\|A - Q\| \cdot \|B - P\|} \right| + \left| \log \frac{\|B - P\| \cdot \|C - Q\|}{\|B - Q\| \cdot \|C - P\|} \right| \\
 &= d_{\mathcal{T}}(A, B) + d_{\mathcal{T}}(B, C),
 \end{aligned}$$

joten

$$\|A - P\| < \|B - P\| < \|C - P\|$$

tai

$$\|A - P\| > \|B - P\| > \|C - P\|.$$

Näin ollen saadaan

$$a_1 < b_1 < c_1 \text{ tai } a_1 > b_1 > c_1,$$

jolloin

$$P_r(A) < P_r(B) < P_r(C) \text{ tai } P_r(A) > P_r(B) > P_r(C).$$

Oletetaan seuraavaksi, että on voimassa

$$P_r(A) < P_r(B) < P_r(C) \text{ tai } P_r(A) > P_r(B) > P_r(C).$$

Oletuksen nojalla pisteet A , B ja C ovat samalla \mathcal{T} -suoralla. Väitteeseen päästään, kun kuljetaan äskeinen päättelyketju toiseen suuntaan. □

Lause 3.2.6. (H5) Jos A ja B ovat eri \mathcal{T} -pisteitä, niin \mathcal{T} -suoralla $\overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{T}}$ on pisteet C , D ja E siten, että

$$C \times A \times B, A \times D \times B \text{ ja } A \times B \times E.$$

Todistus. Olkoon $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ eri \mathcal{T} -pisteitä. Tällöin on olemassa α siten, että $\overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$, missä

- (1) α on x – akselin normaali tai
 (2) α on ympyrä, jonka keskipiste on x – akselilla.

(1) Olkoon α on x – akselin normaali. Tällöin normaali leikkaa x – akselin pisteessä $P = (a_1, 0)$. Tällöin saadaan kaksi vaihtoehtoa:

$$(1.1) A * B * P$$

$$(1.2) B * A * P.$$

(1.1) Olkoon $A * B * P$. Valitaan \mathcal{T} – pisteet

$$C = (a_1, a_2 + b_2), D = \left(a_1, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \text{ ja } E = \left(a_1, \frac{b_2}{2}\right),$$

jolloin

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{T}}(C, A) + d_{\mathcal{T}}(A, B) &= \left| \log \frac{\|C - P\|}{\|A - P\|} \right| + \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|B - P\|} \right| \\ &= \left| \log \frac{a_2 + b_2}{a_2} \right| + \left| \log \frac{a_2}{b_2} \right| \\ &= \log \frac{a_2 + b_2}{a_2} + \log \frac{a_2}{b_2} \\ &= \log \frac{a_2(a_2 + b_2)}{a_2 b_2} \\ &= \log \frac{a_2 + b_2}{b_2} \\ &= \left| \log \frac{a_2 + b_2}{b_2} \right| \\ &= \left| \log \frac{\|C - P\|}{\|B - P\|} \right| \\ &= d_{\mathcal{T}}(C, B), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{T}}(A, D) + d_{\mathcal{T}}(D, B) &= \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|D - P\|} \right| + \left| \log \frac{\|D - P\|}{\|B - P\|} \right| \\ &= \left| \log \frac{a_2}{\frac{a_2 + b_2}{2}} \right| + \left| \log \frac{\frac{a_2 + b_2}{2}}{b_2} \right| \\ &= \log \frac{a_2}{\frac{a_2 + b_2}{2}} + \log \frac{\frac{a_2 + b_2}{2}}{b_2} \\ &= \log \frac{a_2 \left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right)}{b_2 \left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right)} \\ &= \log \frac{a_2}{b_2} \\ &= \left| \log \frac{a_2}{b_2} \right| \\ &= \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|B - P\|} \right| \\ &= d_{\mathcal{T}}(A, B) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
 d_{\mathcal{T}}(A, B) + d_{\mathcal{T}}(B, E) &= \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|B - P\|} \right| + \left| \log \frac{\|B - P\|}{\|E - P\|} \right| \\
 &= \left| \log \frac{a_2}{b_2} \right| + \left| \log \frac{b_2}{\frac{b_2}{2}} \right| \\
 &= \log \frac{a_2}{b_2} + \log \frac{b_2}{\frac{b_2}{2}} \\
 &= \log \frac{a_2 b_2}{\frac{b_2^2}{2}} \\
 &= \log \frac{a_2}{\frac{b_2}{2}} \\
 &= \left| \log \frac{a_2}{\frac{b_2}{2}} \right| \\
 &= \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|E - P\|} \right| \\
 &= d_{\mathcal{T}}(A, E).
 \end{aligned}$$

Näin ollen \mathcal{T} - suoralla $\overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{T}}$ on pisteet C , D ja E siten, että

$$C \times A \times B, A \times D \times B \text{ ja } A \times B \times E.$$

(1.2) Samaan tapaan kuin kohta (1.1).

(2) Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on x - akselilla. Tällöin α - ympyrällä ja x - akselilla on olemassa leikkauspisteet $P = (p, 0)$ ja $Q = (q, 0)$, joten x - akseli on suora \overleftrightarrow{PQ} . Merkitään $A' = (a_1, 0)$ ja $B' = (b_1, 0)$. Lemman 3.2.5 nojalla havaitaan, että A' , B' , P ja Q ovat eri pisteitä. Siksi on voimassa

$$(2.1) A' * B' * P \text{ ja } B' * A' * Q \text{ tai}$$

$$(2.2) A' * B' * Q \text{ ja } B' * A' * P.$$

(2.1) Olkoon aluksi $A' * B' * P$ ja $B' * A' * Q$. Lauseen 2.2.8 nojalla x - akselilla on olemassa pisteet C' , D' ja E' siten, että

$$Q * C' * A', A' * D' * B' \text{ ja } B' * E' * P'.$$

Näin ollen lemmän 3.2.5 nojalla \mathcal{T} - suoralla $\overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{T}}$ on pisteet C , D ja E siten, että

$$C \times A \times B, A \times D \times B \text{ ja } A \times B \times E.$$

(2.2) Samaan tapaan kuin kohta (2.1).

□

Lause 3.2.7. (H6) Jos A , B ja C ovat eri \mathcal{T} - pisteitä, jotka kuuluvat samalle \mathcal{T} - suoralle, niin täsmälleen yksi seuraavista ehdoista on voimassa:

$$A \times B \times C, A \times C \times B \text{ tai } B \times A \times C.$$

3.2 Aksiomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) puolitasomallissa 23

Todistus. Olkoot A , B ja C eri \mathcal{T} -pisteitä, jotka kuuluvat samalle \mathcal{T} -suoralle. Tällöin on voimassa $\overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$, missä

- (1) α on x - akselin normaali tai
 - (2) α on ympyrä, jonka keskipiste on x - akselilla.
- (1) Oletetaan, että α on x - akselin normaali. Tällöin pisteet A , B ja C kuuluvat myös samalle Descartesin tasokoordinaatistomallin suoralle, joten Lauseen 2.2.8 nojalla on voimassa

$$A * B * C, A * C * B \text{ tai } B * A * C.$$

Jos $A * B * C$, niin saadaan kaksi mahdollista vaihtoehtoa:

- (1.1) $A * B * P$
- (1.2) $B * A * P$,

missä P on α :n ja x - akselin leikkauspiste.

- (1.1) Olkoon $A * B * P$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{T}}(A, C) &= \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|C - P\|} \right| \\ &= \left| \log \frac{\|A - P\| \cdot \|B - P\|}{\|B - P\| \cdot \|C - P\|} \right| \\ &= \log \frac{\|A - P\| \cdot \|B - P\|}{\|B - P\| \cdot \|C - P\|} \\ &= \log \frac{\|A - P\|}{\|B - P\|} + \log \frac{\|B - P\|}{\|C - P\|} \\ &= \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|B - P\|} \right| + \left| \log \frac{\|B - P\|}{\|C - P\|} \right| \\ &= d_{\mathcal{T}}(A, B) + d_{\mathcal{T}}(B, C), \end{aligned}$$

joten $A \times B \times C$.

- (1.2) Samaan tapaan kuin kohta (1.1).

Todetaan muut vaihtoehdot vastaavalla tavalla. Näin ollen täsmälleen yksi seuraavista ehdoista on voimassa:

$$A \times B \times C, A \times C \times B \text{ tai } B \times A \times C.$$

- (2) Olkoon α - ympyrä $(x_0, 0)$ - keskinen r - säteinen. Olkoon lisäksi kuvaus $P_r : \alpha \rightarrow]x_0 - r, x_0 + r[$,

$$P_r(x, y) = x.$$

Pisteet A , B ja C ovat eri \mathcal{T} -pisteitä, joten on voimassa

$$\begin{aligned} P_r(A) &< P_r(B) < P_r(C), \\ P_r(A) &> P_r(B) > P_r(C), \\ P_r(A) &< P_r(C) < P_r(B), \\ P_r(A) &> P_r(C) > P_r(B), \\ P_r(B) &< P_r(A) < P_r(C) \text{ tai} \\ P_r(B) &> P_r(A) > P_r(C). \end{aligned}$$

Tällöin lemmän 3.2.5 nojalla saadaan

$$A \times B \times C, A \times C \times B \text{ tai } B \times A \times C.$$

□

Lemma 3.2.8. Olkoon $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$ puolitasomallin suora ja $A, B \in \tilde{T} \setminus l_{\mathcal{T}}$.

- (1) Jos α on x – akselin normaali, niin $Al_{\mathcal{T}}B$ jos ja vain jos $A\alpha B$ euklidisessa mielessä.
- (2) Jos α on ympyrä, jonka keskipiste on x – akselilla, niin $Al_{\mathcal{T}}B$ jos ja vain jos toinen pisteistä on ympyrän sisäpuolella ja toinen ulkopuolella.

Todistus. Hyperbolinen jana $AB_{\mathcal{T}}$ on joko tavallinen euklidinen jana tai pisteitä A ja B yhdistävä ympyränkaari, jonka keskipiste on x – akselilla. Tästä tiedosta väite seuraa euklidisen geometrian laskulla. □

Lause 3.2.9. (H7) Olkoon $l_{\mathcal{T}}$ \mathcal{T} – suora sekä A, B ja C \mathcal{T} – pisteitä, joista minkään kautta $l_{\mathcal{T}}$ ei kulje. Tällöin on voimassa:

- (1) Jos $ABl_{\mathcal{T}}$ ja $BCl_{\mathcal{T}}$, niin $ACl_{\mathcal{T}}$.
- (2) Jos $Al_{\mathcal{T}}B$ ja $Bl_{\mathcal{T}}C$, niin $ACl_{\mathcal{T}}$.

Todistus. Olkoon $l_{\mathcal{T}}$ \mathcal{T} – suora sekä $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2)$ \mathcal{T} – pisteitä, joiden kautta $l_{\mathcal{T}}$ ei kulje.

- (1) Olkoon $ABl_{\mathcal{T}}$ ja $BCl_{\mathcal{T}}$. Suora $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$ voi olla kahta eri tyyppiä:

- (1.1) α on x – akselin normaali.
- (1.2) α on ympyrä, jonka keskipiste on x – akselilla.

- (1.1) Olkoon α on x – akselin normaali. Tällöin normaali leikkaa x – akselin pisteessä $P = (p, 0)$. Oletetaan, että $ABl_{\mathcal{T}}$ ja $BCl_{\mathcal{T}}$, jolloin lemmän 3.2.8 nojalla on voimassa

$$\max\{a_1, b_1, c_1\} < p \text{ tai } \min\{a_1, b_1, c_1\} > p.$$

Tällöin saadaan

$$AC_{\mathcal{T}} \cap \alpha = \left\{ (x, y) \in \overleftarrow{AC}_{\mathcal{T}} \mid a_1 \leq x \leq c_1 \text{ tai } c_1 \leq x \leq a_1 \right\} \cap \alpha = \emptyset,$$

joten $ACl_{\mathcal{T}}$.

- (1.2) Olkoon α r – säteinen ympyrä, jonka keskipiste P on x – akselilla. Tällöin lemmasta 3.2.8 saadaan

$$r > \max\{\|A - P\|, \|B - P\|\} \text{ tai } r < \min\{\|A - P\|, \|B - P\|\}$$

ja

$$r > \max\{\|B - P\|, \|C - P\|\} \text{ tai } r < \min\{\|B - P\|, \|C - P\|\}.$$

Tästä seuraa

$$r > \max\{\|A - P\|, \|C - P\|\} \text{ tai } r < \min\{\|A - P\|, \|C - P\|\},$$

joten $ACl_{\mathcal{T}}$.

- (2) Olkoon $Al_{\mathcal{T}}B$ ja $Bl_{\mathcal{T}}C$. Tarkastellaan jälleen \mathcal{T} -suoran $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$ kaksi eri tyyppiä:

- (2.1) α on x -akselin normaali.
 (2.2) α on ympyrä, jonka keskipiste on x -akselilla.

- (2.1) Olkoon α on x -akselin normaali. Tällöin normaali leikkaa x -akselin pisteessä $P = (p, 0)$. Oletetaan, että $Al_{\mathcal{T}}B$ ja $Bl_{\mathcal{T}}C$, joten lemmän 3.2.8 nojalla on voimassa

$$\max\{a_1, c_1\} < p < b_1 \text{ tai } b_1 < p < \max\{a_1, c_1\}.$$

Tällöin saadaan

$$AC_{\mathcal{T}} \cap \alpha = \left\{ (x, y) \in \overleftarrow{AC}_{\mathcal{T}} \mid a_1 \leq x \leq c_1 \text{ tai } c_1 \leq x \leq a_1 \right\} \cap \alpha = \emptyset,$$

joten $ACl_{\mathcal{T}}$.

- (2.2) Olkoon α r -säteinen ympyrä, jonka keskipiste P on x -akselilla. Tällöin lemmasta 3.2.8 saadaan

$$\min\{\|A - P\|, \|B - P\|\} < r < \max\{\|A - P\|, \|B - P\|\}$$

ja

$$\min\{\|B - P\|, \|C - P\|\} < r < \max\{\|B - P\|, \|C - P\|\}.$$

Tästä seuraa

$$r > \max\{\|A - P\|, \|C - P\|\} \text{ tai } r < \min\{\|A - P\|, \|C - P\|\},$$

joten $ACl_{\mathcal{T}}$.

□

Lemma 3.2.10. Olkoon $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$ hyperbolinen suora, missä α on x -akselin normaali. Olkoon lisäksi $A = (a_1, a_2)$, $B = (a_1, b_2) \in l_{\mathcal{T}}$. Merkitään normaalin ja x -akselin leikkauspistettä pisteellä $P = (a_1, 0)$. Tällöin kuvaus $f_1 :]0, a_2[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(b_2) = d_{\mathcal{T}}(A, B)$$

on aidosti vähenevä, kuvaus $f_2 :]a_2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_2(b_2) = d_{\mathcal{T}}(A, B)$$

on aidosti kasvava ja

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} d_{\mathcal{T}}(A, B) = \lim_{x \rightarrow \infty} d_{\mathcal{T}}(A, B) = \infty.$$

Todistus. Todetaan, että logaritmfunktio on aidosti monotoninen. Lisäksi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} d_{\mathcal{T}}(A, B) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|B - P\|} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \log \frac{a_2}{b_2} \right| = \infty$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} d_{\mathcal{T}}(A, B) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \log \frac{\|A - P\|}{\|B - P\|} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \log \frac{a_2}{b_2} \right| = \infty,$$

joten väite pätee.

□

3.2 Aksiomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) puolitasomallissa 26

Lemma 3.2.11. Olkoon $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$ hyperbolinen suora, missä α on ympyrä, jonka keskipiste on x – akselilla. Olkoon lisäksi $A = (a_1, a_2) \in l_{\mathcal{T}}$. Merkitään puoliympyrän ja x – akselin leikkauspisteitä pisteillä $(p, 0)$ ja $(q, 0)$ siten, että $p < q$. Olkoon $P_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$P_r(x, y) = (x, 0)$$

ortogonaaliprojektio x – akselille. Tällöin kuvaus $f_1 :]p, a_1[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = d_{\mathcal{T}}(P_r^{-1}(x), A)$$

on aidosti vähenevä, kuvaus $f_2 :]a_1, q[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_2(x) = d_{\mathcal{T}}(P_r^{-1}(x), A)$$

on aidosti kasvava ja

$$\lim_{x \rightarrow p^+} d_{\mathcal{T}}(P_r^{-1}(x), A) = \lim_{x \rightarrow q^-} d_{\mathcal{T}}(P_r^{-1}(x), A) = \infty.$$

Todistus. Todetaan, että logaritmfunktio on aidosti monotoninen. Lisäksi

$$\lim_{x \rightarrow p^+} d_{\mathcal{T}}(P_r^{-1}(x), A) = \lim_{x \rightarrow p^+} \left| \log \frac{\|P_r^{-1}(x) - P\| \cdot \|A - Q\|}{\|P_r^{-1}(x) - Q\| \cdot \|A - P\|} \right| = \infty$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow q^-} d_{\mathcal{T}}(P_r^{-1}(x), A) = \lim_{x \rightarrow q^-} \left| \log \frac{\|P_r^{-1}(x) - P\| \cdot \|A - Q\|}{\|P_r^{-1}(x) - Q\| \cdot \|A - P\|} \right| = \infty$$

joten väite pätee. □

Lause 3.2.12. (H8) Jos A ja B ovat eri \mathcal{T} – pisteitä sekä $\overrightarrow{PQ}_{\mathcal{T}}$ mielivaltainen \mathcal{T} – puolisuora, niin on olemassa täsmälleen yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}_{\mathcal{T}}$ siten, että $AB_{\mathcal{T}} \cong PR_{\mathcal{T}}$.

Todistus. Lemmojen 3.2.10 ja 3.2.11 nojalla puolisuoralta $\overrightarrow{PQ}_{\mathcal{T}}$ löydetään yksikäsitteinen piste R siten, että

$$d_{\mathcal{T}}(A, B) = d_{\mathcal{T}}(PR).$$

Näin ollen $AB_{\mathcal{T}} \cong PR_{\mathcal{T}}$. □

Lause 3.2.13. (H9) Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio:

- (1) $AB_{\mathcal{T}} \cong AB_{\mathcal{T}}$.
- (2) Jos $AB_{\mathcal{T}} \cong CD_{\mathcal{T}}$, niin $CD_{\mathcal{T}} \cong AB_{\mathcal{T}}$.
- (3) Jos $AB_{\mathcal{T}} \cong CD_{\mathcal{T}}$ ja $CD_{\mathcal{T}} \cong EF_{\mathcal{T}}$, niin $AB_{\mathcal{T}} \cong EF_{\mathcal{T}}$.

Todistus. Seuraa suoraan määritelmästä 3.1.6. □

Lause 3.2.14. (H10) Jos $A \times B \times C, A' \times B' \times C', AB_{\mathcal{T}} \cong A'B'_{\mathcal{T}}$ ja $BC_{\mathcal{T}} \cong B'C'_{\mathcal{T}}$, niin $AC_{\mathcal{T}} \cong A'C'_{\mathcal{T}}$.

Todistus. Olkoon A, A', B, B', C ja C' \mathcal{T} -pisteitä siten, että $A \times B \times C, A' \times B' \times C', AB_{\mathcal{T}} \cong A'B'_{\mathcal{T}}$ ja $BC_{\mathcal{T}} \cong B'C'_{\mathcal{T}}$. Tällöin oletusten nojalla saadaan

$$d_{\mathcal{T}}(A, C) = d_{\mathcal{T}}(A, B) + d_{\mathcal{T}}(B, C) = d_{\mathcal{T}}(A', B') + d_{\mathcal{T}}(B', C') = d_{\mathcal{T}}(A', C'),$$

joten $AC_{\mathcal{T}} \cong A'C'_{\mathcal{T}}$. \square

Määritelmä 3.2.15. Sanotaan \mathcal{T} -isometriaksi bijektiota $f : \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$ siten, että

$$d_{\mathcal{T}}(A, B) = d_{\mathcal{T}}(f(A), f(B))$$

kaikilla $A, B \in \tilde{T}$.

Lemma 3.2.16. (1) Olkoon $AB_{\mathcal{T}} \cong CD_{\mathcal{T}}$. Tällöin on olemassa \mathcal{T} -isometria f siten, että $f(A) = C$ ja $f(B) = D$.

(2) Olkoon $\angle ABC_{\mathcal{T}} \cong \angle DEF_{\mathcal{T}}$. Tällöin on olemassa \mathcal{T} -isometria f siten, että $f(A) = D, f(B) \in \overrightarrow{f(D)f(E)}_{\mathcal{T}}$ ja $f(C) \in \overrightarrow{f(D)f(F)}_{\mathcal{T}}$.

(3) Olkoon $\overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{T}}$ \mathcal{T} -suora. Tällöin on olemassa \mathcal{T} -isometria f , jonka rajoittuma \mathcal{T} -suoralle $\overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{T}}$ on identtinen kuvaus ja jolle $P \overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{T}} f(P)$ kaikilla $P \in \tilde{T} \setminus \overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{T}}$.

Todistus. Katso luku 6. \square

Lemma 3.2.17. Olkoon $f : \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$ \mathcal{T} -isometria kaikilla $A, B \in \tilde{T}$. Tällöin on voimassa

- (1) $A \times B \times C \iff f(A) \times f(B) \times f(C)$,
- (2) $AB_{\mathcal{T}} \cong CD_{\mathcal{T}} \iff f(A)f(B)_{\mathcal{T}} \cong f(C)f(D)_{\mathcal{T}}$ ja
- (3) $\angle ABC_{\mathcal{T}} \cong \angle DEF_{\mathcal{T}} \iff \angle f(A)f(B)f(C)_{\mathcal{T}} \cong \angle f(D)f(E)f(F)_{\mathcal{T}}$.

Todistus. Väite seuraa suoraan puolitasomallin määritelmistä ja oletuksesta. \square

Määritelmä 3.2.18. Lemman 3.2.17 kohdan (3) kuvausta f sanotaan *peilaukseksi* \mathcal{T} -suoran $\overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{T}}$ suhteen.

Lause 3.2.19. (H11) Olkoon $\angle BAC$ kulma ja $\overleftrightarrow{DE}_{\mathcal{T}}$ mielivaltainen suora. Olkoon lisäksi P piste, joka ei sisälly suoraan $\overleftrightarrow{DE}_{\mathcal{T}}$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}_{\mathcal{T}}$ siten, että $FP \overleftrightarrow{DE}_{\mathcal{T}}$ ja $\angle BAC_{\mathcal{T}} \cong \angle EDF_{\mathcal{T}}$.

Todistus. Olkoon $f : \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$ siten, että

$$d_{\mathcal{T}}(A, B) = d_{\mathcal{T}}(f(A), f(B))$$

kaikilla $A, B \in \tilde{T}$. Lemman 3.2.16 mukaan on olemassa f siten, että f siten, että $f(A) = D, f(B) \in \overrightarrow{f(D)f(E)}_{\mathcal{T}}$ ja $f(C) \in \overrightarrow{f(D)f(F)}_{\mathcal{T}}$. Jos $f(B)P \overleftrightarrow{DE}_{\mathcal{T}}$, niin valitaan $F = (f(B))$. Muussa tapauksessa $F = i(f(B))$, missä i on peilaus \mathcal{T} -suoran $\overleftrightarrow{DE}_{\mathcal{T}}$ suhteen. Näin ollen halutunlainen piste on olemassa.

Osoitetaan seuraavaksi pisteen F yksikäsitteisyys. Lemmasta 3.2.17 seuraa, että ympyröiden tangenttien välinen kulma EDF on yhtäsuuri kuin vastaavainen kulma BAC . Piste F sijaitsee siis ympyrällä α , joka kulkee pisteen D kautta ja jonka keskipiste on x -akselilla. Ympyrä on yksikäsitteinen, joten myös $\overrightarrow{DF}_{\mathcal{T}}$ on yksikäsitteinen. \square

Lause 3.2.20. (H12) Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio eli:

- (1) $\sphericalangle BAC_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle BAC_{\mathcal{T}}$.
- (2) Jos $\sphericalangle BAC_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle EDF_{\mathcal{T}}$, niin $\sphericalangle FDE_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle BAC_{\mathcal{T}}$.
- (3) Jos $\sphericalangle BAC_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle EDF_{\mathcal{T}}$ ja $\sphericalangle EDF_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle HGI_{\mathcal{T}}$, niin $\sphericalangle BAC_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle HGI_{\mathcal{T}}$.

Todistus. (1) Seuraa suoraan määritelmästä 3.1.7 ja Lauseesta 3.2.13.

(2) Seuraa suoraan määritelmästä 3.1.7 ja Lauseesta 3.2.13.

(3) Olkoon $\sphericalangle BAC_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle EDF_{\mathcal{T}}$ ja $\sphericalangle EDF_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle HGI_{\mathcal{T}}$. Valitaan $P \in \overrightarrow{AB}_{\mathcal{T}}$, $Q \in \overrightarrow{BC}_{\mathcal{T}}$, $R \in \overrightarrow{GH}_{\mathcal{T}}$ ja $S \in \overrightarrow{GI}_{\mathcal{T}}$ siten, että

$$AB_{\mathcal{T}} \cong GR_{\mathcal{T}} \text{ ja } AQ_{\mathcal{T}} \cong GS_{\mathcal{T}}.$$

Lauseen 3.2.12 nojalla voidaan valita $T \in \overrightarrow{DE}_{\mathcal{T}}$ ja $U \in \overrightarrow{DF}_{\mathcal{T}}$ siten, että $AB_{\mathcal{T}} \cong DT_{\mathcal{T}}$ ja $AE_{\mathcal{T}} \cong DU_{\mathcal{T}}$. Tällöin Lauseesta 3.2.13 seuraa $DT_{\mathcal{T}} \cong GR_{\mathcal{T}}$ ja $DU_{\mathcal{T}} \cong GS_{\mathcal{T}}$, joten määritelmän 3.1.7 nojalla saadaan $PQ_{\mathcal{T}} \cong TU_{\mathcal{T}}$ ja $TU_{\mathcal{T}} \cong RS_{\mathcal{T}}$. Näin ollen Lauseesta 3.2.13 ja määritelmästä 3.1.7 seuraa väite. □

Lause 3.2.21. (H13) Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ puolitasomallin kolmioita siten, että $\sphericalangle A_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle D_{\mathcal{T}}$, $AB_{\mathcal{T}} \cong DE_{\mathcal{T}}$ ja $AC_{\mathcal{T}} \cong DF_{\mathcal{T}}$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ puolitasomallin kolmioita siten, että $\sphericalangle A_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle D_{\mathcal{T}}$, $AB_{\mathcal{T}} \cong DE_{\mathcal{T}}$ ja $AC_{\mathcal{T}} \cong DF_{\mathcal{T}}$. Tällöin määritelmää 3.1.7 ja oletuksia käyttämällä saadaan $BC_{\mathcal{T}} \cong EF_{\mathcal{T}}$. Lemman 3.2.16 nojalla on olemassa \mathcal{T} -isometria $f: \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$ siten, että $f(A) = D$ ja $f(B) = E$. Tällöin lemmasta 3.2.17 saadaan

$$A = \sphericalangle BAC = \sphericalangle f(B)f(A)f(C) = \sphericalangle EDF(C).$$

Jos $f(C) \in \overrightarrow{DE}_{\mathcal{T}}$, niin Lauseen 3.2.20 nojalla saadaan $f(C) = F$. Tällöin vastaavalla päättelyllä saadaan $\sphericalangle B_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle E_{\mathcal{T}}$ ja $\sphericalangle C_{\mathcal{T}} \cong \sphericalangle F_{\mathcal{T}}$, joten myös $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Jos puolestaan $f(C) \notin \overrightarrow{DE}_{\mathcal{T}}$, niin yhdistetään kuvaukseen f peilaus \mathcal{T} -suoran $\overrightarrow{AB}_{\mathcal{T}}$ suhteen, jolloin tilanne palautuu edellisen kaltaiseksi. □

Lause 3.2.22. (DA) Olkoon $l_{\mathcal{T}}$ mielivaltainen \mathcal{T} -suora. Olkoon lisäksi $D_1 \in l_{\mathcal{T}}$ ja $D_2 \in l_{\mathcal{T}}$ siten, että

- (1) $D_1 \neq \emptyset$ ja $D_2 \neq \emptyset$
- (2) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
- (3) $D_1 \cup D_2 = l_{\mathcal{T}}$
- (4) Jos $Q, R \in D_1$, niin ei ole olemassa pistettä $S \in D_2$, jolla olisi $Q \times S \times R$.
- (5) Jos $P, Q \in D_2$, niin ei ole olemassa pistettä $S \in D_1$, jolla olisi $Q \times S \times R$.

3.2 Aksiomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) puolitasomallissa 29

Tällöin on olemassa täsmälleen yksi piste $P \in l_{\mathcal{T}}$ siten, että kaikille $A, B \in l_{\mathcal{T}} \setminus \{P\}$ pätee $A \times P \times B$ aina ja vain kun $A \in D_1$ ja $B \in D_2$, tai $A \in D_2$ ja $B \in D_1$.

Todistus. Olkoon $l_{\mathcal{T}}$ mielivaltainen \mathcal{T} -suora. Tällöin suora voidaan kirjoittaa muodossa $l_{\mathcal{T}} = \tilde{T} \cap \alpha$, missä:

- (1) α on x - akselin normaali.
 - (2) α on ympyrä, jonka keskipiste sijaitsee x - akselilla.
- (1) Katso Lauseen 2.2.8 todistus.
- (2) Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste sijaitsee x - akselilla. Olkoon lisäksi $Q = (q, 0)$ ja $R = (r, 0)$ ympyrän α ja x - akselin leikkauspisteitä. Voidaan olettaa, että $q < r$. Lemman 3.2.5 nojalla projektio $P_r : l_{\mathcal{T}} \rightarrow]q, r[$,

$$P_r(x, y) = x$$

säilyttää järjestyksen. Olkoon

$$\begin{aligned} \Delta_1 &=]-\infty, q] \cup P_r(D_1) \\ \Delta_2 &= P_r(D_2) \cup [r, \infty[\end{aligned}$$

jolloin on oletettu, että $d_1 < d_2$, kun $d_1 \in P_r(D_1)$ ja $d_2 \in P_r(D_2)$. Osoitetaan, että joukot Δ_1 ja Δ_2 toteuttavat Dedekindin ehdot suoralla

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} :$$

- (1) $\Delta_1 \neq \emptyset$ ja $\Delta_2 \neq \emptyset$, sillä $D_1 \neq \emptyset$ ja $D_2 \neq \emptyset$.
- (2) $\Delta_1 \cap \Delta_2 = (]-\infty, q] \cup P_r(D_1)) \cap (P_r(D_2) \cup [r, \infty[) = \emptyset$.
- (3) $\Delta_1 \cup \Delta_2 = (]-\infty, q] \cup P_r(D_1)) \cup (P_r(D_2) \cup [r, \infty[) = l$.
- (4) Olkoon $A, B \in \Delta_1$. Havaitaan, että on voimassa

$$]-\infty, \sup P_r(D_1)[\subset]-\infty, q] \cup P_r(D_1) = \Delta_1,$$

joten ei ole olemassa pistettä $C \in \Delta_2$ siten, että $A * C * B$.

- (5) Samaan tapaan kuin kohta (4).

On siis olemassa täsmälleen yksi piste $P = (p, 0)$ siten, että

$$(x, 0) * (p, 0) * (y, 0)$$

jos ja vain jos $x \in \Delta_1$ ja $y \in \Delta_2$ tai $x \in \Delta_2$ ja $y \in \Delta_1$. Lisäksi bijektio $P_r : l_{\mathcal{T}} \rightarrow]q, r[$,

$$P_r(x, y) = x$$

säilyttää järjestyksen, joten \mathcal{T} -pisteellä $P_r^{-1}(P)$ on aksioman vaatimat ominaisuudet. Lisäksi kyseinen piste on yksikäsitteinen.

□

Lause 3.2.23. Paralleliaksioma (PA) ei ole voimassa puolitasomallissa.

3.2 Aksiomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) puolitasomallissa 30

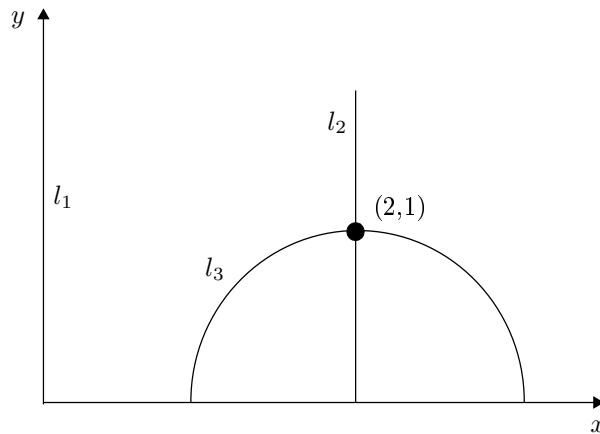
Todistus. Olkoon

$$l_1 = \{(x, y) \in \tilde{T} \mid x = 0\},$$

$$l_2 = \{(x, y) \in \tilde{T} \mid x = 2\} \text{ ja}$$

$$l_3 = \{(x, y) \in \tilde{T} \mid \|(x, y) - (2, 0)\| = 1\}.$$

Havaitaan, että l_1 , l_2 ja l_3 ovat \mathcal{T} -suoria, $l_1 \parallel l_2$ ja $l_1 \parallel l_3$. Lisäksi l_2 ja l_3 kulkevat pisteen $(2, 1)$ kautta. Kuitenkin piste $(2, 1)$ on suoran l_1 ulkopuolinen piste, joten paralleeliaksioma ei ole voimassa puolitasomallissa.



Kuva 5: Paralleeliaksioma ei ole voimassa puolitasomallissa

□

HUOM! Puolitasomalli toteuttaa siis hyperbolisen aksiooman (HYP), jolloin paralleeliaksioma (PA) ei toteudu.

4 Kleinin malli

Vanhin tunnettu hyperbolisen geometrian malli on nimeltään *Kleinin malli*. Seuraavaksi esiteltävä Felix Kleinin⁴ malli toteuttaa myös Hilbertin aksioomat ja Dedekindin aksioomat, mutta ei paralleeliaksiomaa. Kleinin malli konstruoidaan puolitasomallin tapaan Descartesin tasokoordinaatistomallin pohjalta. Mallissa tarkastellaan puolitason sijaan yksikkökierokkoa.

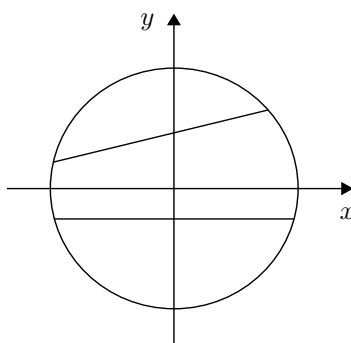
4.1 Kleinin mallin konstruointi

Määritelmä 4.1.1. Olkoon

$$\tilde{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < 1\}.$$

Kutsutaan pisteitä $P \in \tilde{K}$ *Kleinin mallin pisteiksi*, ja käytetään niistä nimitystä \mathcal{K} -*piste*, jotta ne erottuvat euklidisista ja puolitasomallin pisteistä.

Määritelmä 4.1.2. *Kleinin suora* on joukko $l_{\mathcal{K}} = \tilde{K} \cap l$. Tässä l on Kleinin mallia leikkaava euklidinen suora. Kutsutaan Kleinin suoria lyhyesti \mathcal{K} -suoriksi. Piste $P \in \tilde{K}$ on suoralla $l_{\mathcal{K}}$, jos $P \in l_{\mathcal{K}}$.



Kuva 6: Kleinin mallin suorat

Määritelmä 4.1.3. Olkoon A ja B mielivaltaisia \mathcal{K} -pisteitä. Pisteiden A ja B väliseksi *etäisyydeksi* sanotaan lukua

$$d_{\mathcal{K}}(A, B) = \frac{1}{2} \left| \log \frac{\|A - P\| \cdot \|B - Q\|}{\|A - Q\| \cdot \|B - P\|} \right|,$$

missä pisteet P ja Q ovat euklidisen suoran \overleftrightarrow{AB} ja yksikköympyrän leikkauspisteet.

⁴Felix Christian Klein oli saksalainen matemaatikko. Hän syntyi 25. huhtikuuta 1849 Düsseldorfissa, Preussissa (nykyinen Saksa) ja kuoli 22. kesäkuuta 1925 Göttingenissä, Saksassa. Lukiosta pääsyn jälkeen Klein suuntasi Bonnin yliopistoon opiskelemaan matematiikkaa ja fysiikkaa. Opiskeluaikana hän kiinnostui hyperbolisesta geometriasta ja ryhmäteoriasta.

HUOM! Kuten puolitasomallissa, voi nytkin määritellä perusrelaatiot mallin etäisyyskäsitteen avulla. Sama koskee muita käsitteitä, kuten janaa, kulmia, kolmioita, ympyröitä jne. Erityisesti siis tarvitaan seuraavat määritelmät:

Määritelmä 4.1.4. Olkoon A , B ja C eri \mathcal{K} -pisteitä. Sanotaan, että B on pisteiden A ja C välissä, $A \times B \times C$, jos A , B ja C ovat samalla $l_{\mathcal{K}}$ -suoralla ja

$$d_{\mathcal{K}}(A, C) = d_{\mathcal{K}}(A, B) + d_{\mathcal{K}}(B, C).$$

Määritelmä 4.1.5. Sanotaan, että janat $AB_{\mathcal{K}}$ ja $CD_{\mathcal{K}}$ ovat yhteneviä, $AB_{\mathcal{K}} \cong CD_{\mathcal{K}}$, jos

$$d_{\mathcal{K}}(A, B) = d_{\mathcal{K}}(C, D).$$

Määritelmä 4.1.6. Sanotaan, että kulmat $\angle BAC$ ja $\angle EDF$ ovat yhteneviä, $\angle BAC_{\mathcal{K}} \cong \angle EDF_{\mathcal{K}}$, jos ehdoista $E' \in \overrightarrow{DE}_{\mathcal{K}}$, $F' \in \overrightarrow{DF}_{\mathcal{K}}$ siten, että $AB_{\mathcal{K}} \cong DE'_{\mathcal{K}}$ ja $AC_{\mathcal{K}} \cong DF'_{\mathcal{K}}$ seuraa $BC_{\mathcal{K}} \cong E'F'_{\mathcal{K}}$.

4.2 Aksiomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) Kleinin mallissa

Kleinin malli toteuttaa aksiomat (H1) – (H13) ja (DA), mutta ei paralleeliaksiomaa. Osa aksiomista on helppo todeta päteviksi Kleinin mallissa. Tällaisia ovat tietenkin insidenssiaksiomat (H1) – (H3). Kleinin mallissa janat ja välissäolo osoittautuvat laskulla samaksi kuin euklidinen välissäolo, joten aksiomat (H4) – (H7) seuraavat vastaavista tasomallin ominaisuuksista. Myös (HYP) on selvä tosiasia. Ongelmaksi jäävät yhtenevyysaksiomat. Etenkin kulmat ovat Kleinin mallissa vaikeita käsitellä. Erityisesti ne eivät ole samoja kuin euklidiset kulmat. Palaamme Kleinin malliin luvussa 6.

5 Poincarén malli

Henri Poincaré⁵ kehitti mallin, joka toteuttaa Hilbertin aksioomat ja Dedekindin aksioomat, mutta ei Paralleeliaksiomaa. *Poincarén malli* on Kleinin mallin tapaan rakennettu yksikkökielelle.

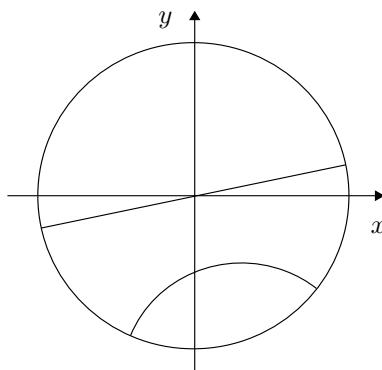
5.1 Poincarén mallin konstruointi

Määritelmä 5.1.1. Olkoon

$$\tilde{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < 1\}.$$

Kutsutaan pisteitä $P \in \tilde{P}$ *Poincarén mallin pisteiksi*, ja käytetään niistä nimitystä \mathcal{P} -*piste*, jotta ne erottuvat euklidisista, puolitasomallin ja Kleinin mallin pisteistä.

Määritelmä 5.1.2. *Poincarén suora* on joukko $l_{\mathcal{P}} = (\tilde{P} \cap \alpha)$, missä α on joko origon kautta kulkeva euklidinen suora, tai yksikköympyrän suhteen ortogonaalinen euklidinen ympyrä. Kutsutaan näitä suoria \mathcal{P} -*suoriksi*, jotta ne erottuvat euklidisista, puolitasomallin ja Kleinin mallin suorista.



Kuva 7: Poincarén suorat

HUOM! Ympyrät ovat *ortogonaalisia*, jos niillä on leikkauspisteissään kohtisuorat tangentit.

Määritelmä 5.1.3. Olkoon A ja B mielivaltaisia \mathcal{P} -pisteitä. Lukua

$$d_{\mathcal{P}}(A, B) = \left| \log \frac{\|A - P\| \cdot \|B - Q\|}{\|A - Q\| \cdot \|B - P\|} \right|$$

sanotaan pisteiden A ja B väliseksi *etäisyydeksi*, missä pisteet P ja Q ovat α :n ja yksikköympyrän leikkauspisteet.

⁵Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) oli ranskalainen matemaatikko ja tähtitieteilijä. Poincaré opiskeli kaivosinsinööriksi, mutta päätyi lopulta matemaatikoksi. Väitöskirja ilmestyi 1878. Se käsitteli differentiaaliyhtälöiden yleistä teoriaa. Poincarésta tuli Caenin matematiikan professori vuonna 1879 ja Pariisin yliopiston matemaattisen fysiikan professori 1886. Ranskan tiedeakatemian esimieheksi Poincaré nimitettiin 1906. Poincarén tutkimustyö oli laaja-alaista. Hän oli myös topologian uranuurtaja ja lukuteorian edistäjä.

5.2 Aksiomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) Poincarén mallissa 34

Määritelmä 5.1.4. Olkoon A , B ja C eri \mathcal{P} -pisteitä. Sanotaan, että B on pisteiden A ja C välissä, $A \times B \times C$, mikäli A , B ja C ovat samalla $l_{\mathcal{P}}$ -suoralla ja

$$d_{\mathcal{P}}(A, C) = d_{\mathcal{P}}(A, B) + d_{\mathcal{P}}(B, C).$$

Määritelmä 5.1.5. Sanotaan, että janat $AB_{\mathcal{P}}$ ja $CD_{\mathcal{P}}$ ovat yhteneviä, $AB_{\mathcal{P}} \cong CD_{\mathcal{P}}$, jos

$$d_{\mathcal{P}}(A, B) = d_{\mathcal{P}}(C, D).$$

Määritelmä 5.1.6. Sanotaan, että kulmat $\angle BAC$ ja $\angle EDF$ ovat yhteneviä, $\angle BAC_{\mathcal{P}} \cong \angle EDF_{\mathcal{P}}$, jos ehdoista $E' \in \overrightarrow{DE}_{\mathcal{P}}$, $F' \in \overrightarrow{DF}_{\mathcal{P}}$ siten, että $AB_{\mathcal{P}} \cong DE'_{\mathcal{P}}$ ja $AC_{\mathcal{P}} \cong DF'_{\mathcal{P}}$ seuraa $BC_{\mathcal{P}} \cong E'F'_{\mathcal{P}}$.

5.2 Aksiomat (H1) – (H13), (DA) ja (HYP) Poincarén mallissa

Poincarén malli toteuttaa aksiomat (H1) - (H13) ja (DA), mutta ei paralleeliaksiomaa. Aksiomien todistaminen Poincarén mallissa on varsin vaivalloista. Usein näkeekin, että mukaan on määritetty *inversio ympyrän suhteen* - käsite, joka helpottaa todistuksia. Toki insidenssiaksiomista selviää analyyttisen geometrian tiedoilla, mutta ongelmat syntyvät välissäolon ja yhtenevyyksien kanssa. Aikaisempien hyperbolisten mallien tapaan (HYP) on selvä tosiasia. Tarkastellaan Poincarén mallia tarkemmin luvussa 6.

6 Isometrioita

Tarkastellaan seuraavaksi mallien välisiä *isometrioita* eli etäisyydet säilyttäviä (bijektiivisiä) kuvauksia. Kolmessa hyperbolisen geometrian mallissa perusrelaatiot (insidenssiaksoomia lukuunottamatta) ja johdetut käsitteet on määritelty etäisyyden avulla kaikissa samalla tavalla. Tässä luvussa löydetään isometrioita mallien välille. Siksi riittää todeta kukin aksiooma jossain hyperbolisen geometrian mallissa, jolloin ne pätevät näissä kaikissa. Sivutuotteena saamme todistuksen Lauseelle 3.2.16.

6.1 Möbius – kuvauksia

Määritelmä 6.1.1. (1) Joukkoa $\mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \cup \infty)$ sanotaan *laajennetuksi kompleksitasoksi*.

(2) Joukkoa $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R} \cup \infty)$ sanotaan *laajennetuksi reaaliakseliksi*.

(3) Kuvausta $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ sanotaan *Möbius – kuvaukseksi*, jos funktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ siten, että $ad - bc \neq 0$. Lauseke tulkitaan tavalliseen tapaan ja käytetään seuraavia sopimuksia:

Jos $c = 0$, niin

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{d}, & \text{kun } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & z = \infty. \end{cases}$$

Jos $c \neq 0$, niin

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{kun } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty, & \text{kun } z = \{-\frac{d}{c}\} \\ \frac{a}{c}, & z = \infty. \end{cases}$$

HUOM! Kun $c \neq 0$, niin f on jatkuva joukossa $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ ja

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} f(z) = \infty.$$

Kun $c = 0$, niin f on jatkuva joukossa \mathbb{C} . Kuvauksen f jatkuvuus koko joukossa \mathbb{C}^* selvitetään Lauseessa 6.1.6.

Tarkastellaan seuraavaksi yksinkertaisia Möbius – kuvauksia:

(1) Möbius – kuvausta

$$f(z) = z + w, \quad w \in \mathbb{C}$$

sanotaan *siirroksi*. Havaitaan, että jokainen kompleksitason piste z siirtyy luvun w verran. Siirrolla ei ole vaikutusta äärettömyyspisteeseen, sillä

$$f(z) = z + w = \frac{1 \cdot z + w}{0 \cdot z + 1},$$

joten määritelmän 6.1.1 nojalla $f(\infty) = \infty$.

- (2) Toinen tärkeä joukko Möbius – kuvauksia ovat
- vakiolla kertomiset*

$$g(z) = \lambda z,$$

missä $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $z \in \mathbb{C}^*$. Tälläkään kuvauksella ei ole vaikutusta äärettömyyspisteeseen, sillä

$$g(z) = \lambda z = \frac{\lambda z + 0}{0 \cdot z + 1},$$

joten määritelmän 6.1.1 nojalla $g(\infty) = \infty$.

- (2.1) Jos
- $|\lambda| = 1$
- , kyseessä on kompleksitason
- kierto*
- . Toisin sanoen funktio
- $g(z)$
- kiertää kompleksitason pisteitä kulman
- $\arg(\lambda)$
- verran.

- (2.2) Olkoon
- $\lambda \in \mathbb{R}$
- ja
- $\lambda > 0$
- .

(2.2.1) Jos $0 < \lambda < 1$, niin $g(z)$ on *kutistava* kuvaus.(2.2.2) Jos $\lambda > 1$, niin $g(z)$ on *venyttävä* kuvaus.

- (3) Möbius – kuvauksia, jotka ovat muotoa

$$h(z) = \frac{1}{z},$$

sanotaan *kompleksisiksi inversioiksi*. Kuvaus $h(z)$ vaihtaa äärettömyyspisteen ja origon:

$$h(\infty) = 0 \text{ ja } h(0) = \infty.$$

Lause 6.1.2. Jokainen Möbius – kuvaus saadaan yhdistettynä kuvauksena Möbius – kuvauksista $f(z) = z + w$, $g(z) = \lambda z$ ja $h(z) = \frac{1}{z}$, missä $w \in \mathbb{C}$ ja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Todistus. Olkoon $F : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ mielivaltainen Möbius–kuvaus,

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $ad - bc \neq 0$. Tarkastellaan seuraavaksi kaksi mahdollista vaihtoehtoa:

(1) $c = 0$

(2) $c \neq 0$

- (1) Olkoon
- $c = 0$
- . Tällöin saadaan

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = g(z) + \frac{b}{d} = f(g(z)) = f \circ g(z),$$

missä $f(z) = z + \frac{b}{d}$ ja $g(z) = \frac{a}{d}z$.

- (2) Olkoon
- $c \neq 0$
- . Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{bc - ad}{c^2 f_1(z)} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{bc - ad}{c^2} h(f_1(z)) + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(h(f_1(z))) + \frac{a}{c} \\
&= f_2(g(h(f_1(z)))) \\
&= f_2 \circ g \circ h \circ f_1(z),
\end{aligned}$$

missä $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $f_2(z) = z + \frac{a}{c}$, $g(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$ ja $h(z) = \frac{1}{z}$.

Näin ollen jokainen Möbius-kuvaus voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena funktioista $f(z)$, $g(z)$ ja $h(z)$. \square

Lause 6.1.3. Möbius – kuvaus on bijektio. Lisäksi Möbius – kuvausten yhdistetty kuvaus ja käänteiskuvaus ovat Möbius – kuvauksia.

Todistus. Väitteet seuraavat Lauseesta 6.1.2, sillä Möbius – kuvausten $f(z) = z + w$, $g(z) = \lambda z$ ($\lambda \neq 0$) ja $h(z) = \frac{1}{z}$ käänteiskuvaukset $f^{-1}(z) = z - w$, $g^{-1}(z) = \frac{1}{\lambda}z$ ja $h^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ ovat Möbius – kuvauksia. \square

Määritelmä 6.1.4. Sanotaan, että $A \subset \mathbb{C}^*$ on *avoin*, jos toinen seuraavista vaihtoehdoista on voimassa:

- (1) $A \subset \mathbb{C}$ on avoin.
- (2) $A = B \cup \{\infty\}$ siten, että $B \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $\mathbb{C} \setminus B$ on rajoitettu.

Avoimien joukkojen avulla voidaan määritellä *laajennetun kompleksitason topologia*,

$$\mathfrak{T} = \{A \subset \mathbb{C}^* \mid A \subset \mathbb{C}^* \text{ on avoin}\}.$$

HUOM! \mathfrak{T} on todella joukon \mathbb{C}^* *topologia*, ja tavallinen \mathbb{C} on joukon \mathbb{C}^* topologinen aliavaruus.

Määritelmä 6.1.5. Funktio $f : X \rightarrow Y$ on *homeomorfismi*, jos f on jatkuva bijektio ja f^{-1} on jatkuva.

HUOM! Funktion f homeomorfisuus tarkoittaa, että joukot $f(U)$ ja $f^{-1}(U)$ ovat avoimia aina, kun $U \subset X$ on avoin.

Lause 6.1.6. Möbius-kuvaus $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ on homeomorfismi.

Todistus. Väite seuraa Lauseista 6.1.2 ja 6.1.3, sillä kuvaukset $f(z) = z + w$, $g(z) = \lambda z$ ja $h(z) = \frac{1}{z}$, missä $w \in \mathbb{C}$ ja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ovat homeomorfismeja. \square

Lause 6.1.7. Möbius – kuvaus $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

kuvaa euklidiset ympyrät ja euklidiset suorat euklidisiksi ympyröiksi ja euklidisiksi suoriksi.

Todistus. Kuvaus f on Lauseen 6.1.2 nojalla yhdistetty kuvaus siirrosta, vakiolla kertomisesta ja kompleksitason inversiosta, riittää todistaa lause näille kuvauksille. Näistä ainoastaan kompleksitason inversio kaipaa tarkastelua. Todistetaan esimerkkinä laskusta, että jos

$$\alpha < 1 < |z|,$$

niin z :n kompleksinen inversio h kuvaa z – keskisen r – säteisen ympyrän ympyräksi. Olkoon β ympyrä, jonka keskipiste on $\frac{1}{z(1-\alpha^2)}$ ja säde $\frac{\alpha}{|z|(1-\alpha^2)}$. Olkoon $a = x + z$ siten, että $|x| = \alpha|z|$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \left| h(a) - \frac{1}{z(1-\alpha^2)} \right| &= \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{z(1-\alpha^2)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{x+z} - \frac{1}{z(1-\alpha^2)} \right| \\ &= \left| \frac{z\alpha^2 + x}{z(x+z)(1-\alpha^2)} \right| \\ &= \left| \frac{\alpha}{|z|(1-\alpha^2)} \right| \cdot \left| \frac{z\alpha^2 + x}{\alpha(x+z)} \right| \\ &= \frac{\alpha}{|z|(1-\alpha^2)}. \end{aligned}$$

Muut tapaukset voidaan käsitellä vastaavasti. Samalla huomataan, että myös $\frac{1}{z(1-\alpha^2)}$ – keskisen ja $\frac{\alpha}{|z|(1-\alpha^2)}$ – säteinen ympyrä kuvautuu z – keskisen $\alpha|z|$ – säteisen ympyrän kehälle. Koska $h = h^{-1}$, niin h on kehien välinen bijektio. Vastaavasti todistetaan lauseen kaikki tapaukset. \square

HUOM! Vaikka kompleksitason inversio kuvaa origon kautta kulkeva kulkevat suorat itselleen, se ei tietenkään ole identtinen kuvaus. Jatkuvuus origossa syntyy siitä, että

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty \text{ ja } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$$

\mathbb{C}^* :n topologiassa.

Lause 6.1.8. Olkoon $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ kolme eri pistettä. Jos $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ ovat kolme eri pistettä, niin on olemassa täsmälleen yksi Möbius – kuvaus $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ siten, että

$$f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2 \text{ ja } f(z_3) = w_3.$$

Todistus. Olkoon $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ kolme eri pistettä. Koska Möbius – kuvausten yhdistetyt kuvaukset ja käänteiskuvaukset ovat Möbius – kuvauksia, voidaan olettaa että

$$w_1 = 0, w_2 = 1 \text{ ja } w_3 = \infty.$$

Etsitään kuvausta, joka on muotoa

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, jolloin saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} f(z_1) = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = 0 \\ f(z_2) = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = 1 \\ f(z_3) = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} = \infty. \end{cases}$$

Tällöin on voimassa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} az_1 + b = 0 \\ az_2 + b = cz_2 + d \\ cz_3 + d = 0. \end{cases}$$

Näin ollen kuvaus $f(z)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}z + \frac{z_1(z_2 - z_3)}{z_1 - z_2}}{z - z_3} \\ &= \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}, \end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned} ad - bc &= (z_2 - z_3)(-z_3(z_2 - z_1)) - (-z_1(z_2 - z_3))(z_2 - z_1) \\ &= (z_2 - z_1)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Jos $z_1 = \infty$, $z_2 = \infty$ tai $z_3 = \infty$, niin vastaavasti

$$f(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \quad f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad \text{tai} \quad f(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Kuvaus f on siis halutunlainen Möbius-kuvaus, jolle pätee

$$f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = 1 \quad \text{ja} \quad f(z_3) = \infty.$$

Osoitetaan vielä, että funktio f on yksikäsitteinen. Jos olisi olemassa toinen Möbius-kuvaus $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$,

$$g(z) = \frac{\hat{a}z + \hat{b}}{\hat{c}z + \hat{d}},$$

jolle pätsi

$$g(z_1) = 0, \quad g(z_2) = 1 \quad \text{ja} \quad g(z_3) = \infty,$$

niin

$$\begin{aligned} f \circ g^{-1}(z) &= f(g^{-1}(z)) \\ &= f\left(\frac{\hat{d}z - \hat{b}}{\hat{a} - \hat{c}z}\right) \\ &= \frac{a\frac{\hat{d}z - \hat{b}}{\hat{a} - \hat{c}z} + b}{c\frac{\hat{d}z - \hat{b}}{\hat{a} - \hat{c}z} + d} \\ &= \frac{(a\hat{d} - b\hat{c})z + \hat{a}b - a\hat{b}}{(c\hat{d} - \hat{c}d)z + \hat{a}d - \hat{b}c}. \end{aligned}$$

olisi myös Möbius–kuvaus, sillä

$$\begin{aligned} (a\hat{d} - b\hat{c})(\hat{a}d - \hat{b}c) - (\hat{a}b - \hat{a}\hat{b})(c\hat{d} - \hat{c}d) &= \hat{a}\hat{d}(ad - bc) - \hat{b}\hat{c}(ad - bc) \\ &= (ad - bc)(\hat{a}\hat{d} - \hat{b}\hat{c}) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Tällöin olisi voimassa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} f \circ g^{-1}(0) = \frac{(a\hat{d}-b\hat{c}) \cdot 0 + \hat{a}b - \hat{a}\hat{b}}{(c\hat{d}-\hat{c}d) \cdot 0 + \hat{a}d - \hat{b}c} = \frac{\hat{a}b - \hat{a}\hat{b}}{\hat{a}d - \hat{b}c} = 0 \\ f \circ g^{-1}(1) = \frac{(a\hat{d}-b\hat{c}) \cdot 1 + \hat{a}b - \hat{a}\hat{b}}{(c\hat{d}-\hat{c}d) \cdot 1 + \hat{a}d - \hat{b}c} = \frac{a\hat{d} - b\hat{c} + \hat{a}b - \hat{a}\hat{b}}{c\hat{d} - \hat{c}d + \hat{a}d - \hat{b}c} = 1 \\ f \circ g^{-1}(\infty) = \frac{(a\hat{d}-b\hat{c}) \cdot \infty + \hat{a}b - \hat{a}\hat{b}}{(c\hat{d}-\hat{c}d) \cdot \infty + \hat{a}d - \hat{b}c} = \infty, \end{cases}$$

josta seuraisi

$$\begin{cases} \hat{a}b - \hat{a}\hat{b} = 0 \\ \hat{a}\hat{d} - b\hat{c} = \hat{a}d - \hat{b}c \\ c\hat{d} - \hat{c}d = 0. \end{cases}$$

Näin ollen saataisiin

$$f \circ g^{-1}(z) = \frac{(a\hat{d} - b\hat{c})z + \hat{a}b - \hat{a}\hat{b}}{(c\hat{d} - \hat{c}d)z + \hat{a}d - \hat{b}c} = \frac{(a\hat{d} - b\hat{c})z + 0}{0 \cdot z + \hat{a}d - \hat{b}c} = \frac{(a\hat{d} - b\hat{c})z}{\hat{a}d - \hat{b}c} = z$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}^*$, joten g^{-1} olisi funktion f käänteisfunktio. Tästä seuraisi, että $f \equiv g$, joten Möbius–kuvaus f on siis yksikäsitteinen. \square

Lause 6.1.9. Olkoon $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ neljä eri pistettä ja $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ Möbius–kuvaus. Tällöin on voimassa

$$\frac{f(z) - f(z_2)}{f(z) - f(z_3)} \cdot \frac{f(z_1) - f(z_3)}{f(z_1) - f(z_2)} = \frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

Todistus. Oletuksen nojalla $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ on Möbius–kuvaus, joten $f(z)$ on muotoa

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ siten, että $ad - bc \neq 0$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_2)}{f(z) - f(z_3)} \cdot \frac{f(z_1) - f(z_3)}{f(z_1) - f(z_2)} &= \frac{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}}{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}} \cdot \frac{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}}{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}} \\ &= \frac{(ad-bc)(z-z_2)}{(cz+d)(cz_2+d)} \cdot \frac{(ad-bc)(z_1-z_3)}{(cz_1+d)(cz_3+d)} \\ &= \frac{(ad-bc)(z-z_3)}{(cz+d)(cz_3+d)} \cdot \frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)} \\ &= \frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}. \end{aligned}$$

HUOM! Jos jokin pisteistä $z, z_1, z_2, z_3 = \infty$, niin erotusten osamäärät tulkitaan kuten määritelmässä 6.1.1. Jos siis $z_1 = \infty, z_2 = \infty$ tai $z_3 = \infty$, niin vastaavasti saadaan

$$\frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \frac{z - z_2}{z - z_3}, \frac{z_1 - z_3}{z - z_3} \text{ tai } \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}.$$

\square

Määritelmä 6.1.10. Olkoot $d_1 : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ja $d_2 : Y^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kuvauksia. Kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on $d_1 - d_2$ -isometria, jos

- (1) f on bijektio ja
- (2) kaikille $x, y \in X$ on voimassa

$$d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y)).$$

HUOM! $d_1 - d_2$ -isometrian käänteiskuvaus on $d_1 - d_2$ -isometria. Jos (X, d_1) ja (Y, d_2) ovat metrisiä avaruuksia, niin $f : X \rightarrow Y$ on $d_1 - d_2$ -isometria tasan ollessaan metristen avaruuksien isomorfismi.

Esimerkki 6.1.11. Tarkastellaan puolitasomallia ja Poincarén mallia kompleksitasossa. Merkitään siis

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} \text{ ja} \\ \tilde{P} &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.\end{aligned}$$

Valitaan pisteet $z_1 = 0$, $z_2 = i$ ja $z_3 = \infty$. Lauseen 6.1.8 nojalla on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ siten, että

$$f(0) = -1, \quad f(i) = 0 \text{ ja } f(\infty) = 1.$$

Lauseen 6.1.9 nojalla Möbius-kuvaukselle f on voimassa

$$\frac{f(z) - f(z_2)}{f(z) - f(z_3)} \cdot \frac{f(z_1) - f(z_3)}{f(z_1) - f(z_2)} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2},$$

josta saadaan

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(i)}{f(z) - f(\infty)} \cdot \frac{f(0) - f(\infty)}{f(0) - f(i)} &= \frac{z - i}{0 - i} \\ \iff \frac{f(z) - 0}{f(z) - 1} \cdot \frac{(-1) - 1}{(-1) - 0} &= \frac{i - z}{i} \\ \iff \frac{2 \cdot f(z)}{f(z) - 1} &= \frac{i - z}{i} \\ \iff f(z) &= \frac{z - i}{z + i}.\end{aligned}$$

Näin on saatu lauseke sille Möbius – kuvaukselle, joka kuvaa pisteet 0, 1 ja ∞ pisteiksi -1 , 0 ja 1. Seuraavat lauseet osoittavat, että tämä puolitason \tilde{T} kiekoksi \tilde{P} $d_{\mathcal{T}} - d_{\mathcal{P}}$ -isometrisesti.

Lause 6.1.12. Möbius – kuvauksen

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

rajoittuma joukkoon \tilde{T} on bijektio $\tilde{T} \rightarrow \tilde{P}$.

Todistus. Lauseen 6.1.6 nojalla kuvaus $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$,

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

on homeomorfismi, joten sen rajoittuma joukkoon \tilde{T} on injektio. Lisäksi kaikilla $z \in \mathbb{C}$ on voimassa

$$\begin{aligned}
 f(z) &\in \tilde{P} \\
 \iff |f(z)| &< 1 \\
 \iff \left| \frac{z-i}{z+i} \right| &< 1 \\
 \iff |z-i|^2 &< |z+i|^2 \\
 \iff \operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z)-1)^2 &< \operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z)+1)^2 \\
 \iff -2\operatorname{Im}(z) &< 2\operatorname{Im}(z) \\
 \iff 0 &< \operatorname{Im}(z) \\
 \iff z &\in \tilde{T},
 \end{aligned}$$

joten $f(\tilde{T}) = \tilde{P}$. Näin ollen f on myös surjektio, joten f on bijektio. \square

Lause 6.1.13. Möbius – kuvaukselle

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

on voimassa

$$d_{\mathcal{T}}(z_1, z_2) = d_{\mathcal{P}}(f(z_1), f(z_2))$$

kaikilla $z_1, z_2 \in \tilde{T}$.

Todistus. Olkoon $z_1, z_2 \in \tilde{T}$. Lauseen 3.2.1 nojalla on olemassa yksikäsitteinen $l_{\mathcal{T}}$ -suora, joka kulkee pisteiden z_1 ja z_2 kautta. Määritelmän 3.1.4 mukaan

$$d_{\mathcal{T}}(z_1, z_2) = \left| \log \frac{|z_1 - w_1| \cdot |z_2 - w_2|}{|z_1 - w_2| \cdot |z_2 - w_1|} \right|$$

tai

$$d_{\mathcal{T}}(z_1, z_2) = \left| \log \frac{|z_1 - w_1|}{|z_2 - w_1|} \right|$$

sen mukaan, onko α ympyrä, jonka keskipiste on x - akselilla vai x - akselin normaali. Tässä on voimassa $\{w_1, w_2\} = \alpha \cap \mathbb{R}^*$ ja lisäksi on valittu $w_1 \neq \infty$. Tällöin saadaan kaksi mahdollista vaihtoehtoa:

- (1) $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$,
- (2) $w_1 \in \mathbb{R}$ ja $w_2 = \infty$.

(1) Olkoon $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin Lauseen 6.1.8 nojalla

$$\begin{aligned}
 d_{\mathcal{T}}(z_1, z_2) &= \left| \log \frac{|z_1 - w_1| \cdot |z_2 - w_2|}{|z_1 - w_2| \cdot |z_2 - w_1|} \right| \\
 &= \left| \log \frac{|f(z_1) - f(w_1)| \cdot |f(z_2) - f(w_2)|}{|f(z_1) - f(w_2)| \cdot |f(z_2) - f(w_1)|} \right|.
 \end{aligned}$$

Kuvaus f on homeomorfismi, joten ehdoista

$$z_1 \longrightarrow w_1 \text{ ja } z_2 \longrightarrow w_2$$

seuraa \mathbb{C}^* :n topologiassa

$$f(z_1) \longrightarrow f(w_1) \text{ ja } f(z_2) \longrightarrow f(w_2).$$

Jos siis $z_1 \longrightarrow w_1$ pitkin ympyrää α joukossa $\alpha \cap \tilde{T}$, niin $f(z_1) \longrightarrow f(w_1)$ ympyrää tai suoraa $f(\alpha)$ (Lause 6.1.7) joukossa $f(\alpha) \cap f(\tilde{T}) = f(\alpha) \cap \tilde{P}$. Koska $f(w_1) \notin \tilde{P}$, niin $f(w_1) \in f(\alpha) \cap \partial\tilde{P}$. Sama pätee pisteelle $f(w_2)$. Näin ollen pisteet $f(w_1)$ ja $f(w_2)$ ovat \mathcal{P} -suoran $\overleftrightarrow{f(z_1)f(z_2)}_{\mathcal{P}}$ ”päätepisteitä”, joten

$$d_{\mathcal{T}}(z_1, z_2) = \left| \log \frac{|f(z_1) - f(w_1)| \cdot |f(z_2) - f(w_2)|}{|f(z_1) - f(w_2)| \cdot |f(z_2) - f(w_1)|} \right| = d_{\mathcal{P}}(f(z_1), f(z_2)).$$

(2) Olkoon $w_1 \in \mathbb{R}$ ja $w_2 = \infty$. Tällöin

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{T}}(z_1, z_2) &= \left| \log \frac{|z_1 - w_1|}{|z_2 - w_1|} \right| \\ &= \left| \log \frac{\left| \frac{z_1 i - w_1 i + z_1 i - w_1 i}{(z_1 + i)(w_1 + i)} \right| \cdot \left| \frac{2i}{z_2 + i} \right|}{\left| \frac{2i}{z_1 + i} \right| \cdot \left| \frac{z_2 i - w_1 i + z_2 i - w_1 i}{(z_2 + i)(w_1 + i)} \right|} \right| \\ &= \left| \log \frac{\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} - \frac{w_1 - i}{w_1 + i} \right| \cdot \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} - 1 \right|}{\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} - 1 \right| \cdot \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} - \frac{w_1 - i}{w_1 + i} \right|} \right| \\ &= \left| \log \frac{|f(z_1) - f(w_1)| \cdot |f(z_2) - f(\infty)|}{|f(z_1) - f(\infty)| \cdot |f(z_2) - f(w_1)|} \right|. \end{aligned}$$

Kuvaus $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ on homeomorfismi, joten ehdoista

$$z_1 \longrightarrow w_1 \text{ ja } z_2 \longrightarrow \infty$$

seuraa kuten kohdassa (1), että

$$f(z_1) \longrightarrow f(w_1) \text{ ja } f(z_2) \longrightarrow f(\infty).$$

Lisäksi reunalle jatkamalla pisteet $f(w_1)$ ja $f(\infty)$ ovat suoran $\overleftrightarrow{f(z_1)f(z_2)}_{\mathcal{P}}$ päättepisteitä, joten

$$d_{\mathcal{T}}(z_1, z_2) = \left| \log \frac{|f(z_1) - f(w_1)| \cdot |f(z_2) - f(\infty)|}{|f(z_1) - f(\infty)| \cdot |f(z_2) - f(w_1)|} \right| = d_{\mathcal{P}}(f(z_1), f(z_2)).$$

□

Seuraus 6.1.14. Funktio $f : \tilde{T} \longrightarrow \tilde{P}$,

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

on isometria. Lisäksi se kuvaa puolitasomallin pisteet ja suorat Poincarén mallin pisteiksi ja suoriksi.

Todistus. Seuraa Lauseista 6.1.7 ja 6.1.13. Möbius – kuvaukset ovat analyyttisiä, joten ne säilyttävät myös ympyröiden ja suorien väliset ortogonaalisuudet. □

Seuraus 6.1.15. Funktio $f^{-1} : \tilde{P} \rightarrow \tilde{T}$,

$$f^{-1}(z) = \frac{iz + i}{1 - z}$$

on Möbius – kuvauksen

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

käänteiskuvauks. Se kuvaa siis Poincarén mallin pisteet ja suorat puolitasomallin pisteiksi ja suoriksi.

Todistus. Yhdistetty kuvaus $f \circ f^{-1}$ kuvaa pisteet 0, 1 ja ∞ itselleen, jolloin $f \circ f^{-1}$ on identtinen kuvaus. Väite seuraa tästä. \square

Palataan seuraavaksi lemmän 3.2.16 todistukseen, kun siihen tarvittavat lauseet ovat nyt koossa:

Lauseen 3.2.16 todistus.

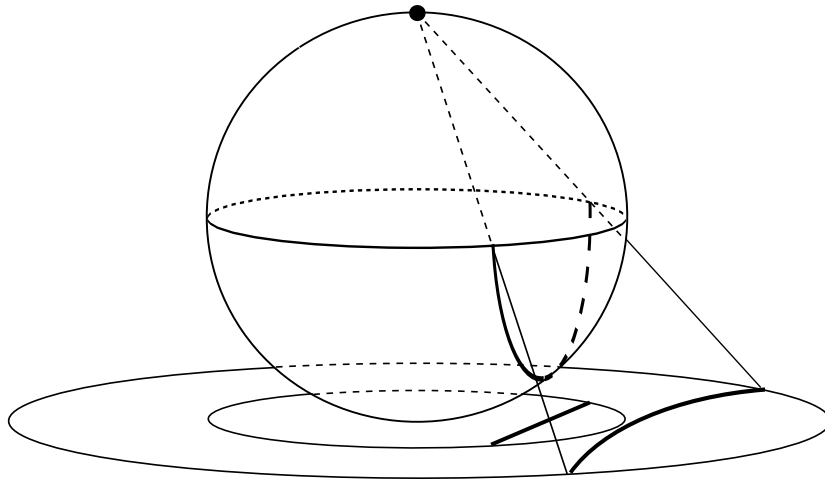
Todistus. Lauseen 6.1.8 nojalla löydetään halutunlaiset Möbius – kuvaukset. Lisäksi Lauseen 3.2.16 oletusten avulla löydetään isometriat f joukon \tilde{T} rajoittumaan, josta väitteet seuraavat. \square

6.2 Ortogonaali- ja stereograafiprojektio

Tarkastellaan seuraavaksi Kleinin mallia kompleksitason osajoukkona. Tällöin Kleinin mallin pisteiden joukko on

$$\tilde{K} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Seuraavaksi konstruoidaan $d_K - d_P$ – isometria Kleinin mallin ja Poincarén mallin välille projektioiden avulla.



Kuva 8: Kleinin mallin ja Poincarén mallin yhteys toisiinsa

Määritelmä 6.2.1. Olkoon

$$A = \left\{ \left(z, 1 - \sqrt{1 - |z|^2} \right) \mid |z| \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

ja

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Kuvausta $f : U \rightarrow A$,

$$f(z) = \left(z, 1 - \sqrt{1 - |z|^2} \right)$$

sanotaan suljetun yksikkökierokkeen *ortogonaaliprojektioksi* puolipallolle.

Lause 6.2.2. Suljetun yksikkökierokkeen ortogonaaliprojektio puolipallolle on bijektio.

Todistus. Surjektivisuus on määritelmän 6.2.1 nojalla ilmeinen. Tarkastetaan vielä kuvauksen $f : U \rightarrow A$,

$$f(z) = \left(z, 1 - \sqrt{1 - |z|^2} \right)$$

injektivisuus. Olkoon $z_1, z_2 \in U$ siten, että $f(z_1) = f(z_2)$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f(z_2) \\ \iff \left(z_1, 1 - \sqrt{1 - |z_1|^2} \right) &= \left(z_2, 1 - \sqrt{1 - |z_2|^2} \right) \\ \iff z_1 &= z_2, \end{aligned}$$

joten f on injektio. Näin ollen kuvaus f on bijektio. \square

Määritelmä 6.2.3. Olkoon

$$A = \left\{ \left(z, 1 - \sqrt{1 - |z|^2} \right) \mid |z| \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Kuvausta $g : A \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z, x) = \frac{z}{2 - x}$$

sanotaan puolipallon *stereograafiprojektioksi* yksikkökierokelle.

Lause 6.2.4. Puolipallon stereograafiprojektio yksikkökierokelle on injektio ja sen kuvajoukko on

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Todistus. Olkoon $(z_1, x_1), (z_2, x_2) \in A$ siten, että $g(z_1, x_1) = g(z_2, x_2)$. Tällöin on voimassa

$$\begin{aligned} g(z_1, x_1) &= g(z_2, x_2) \\ \iff \frac{z_1}{2 - x_1} &= \frac{z_2}{2 - x_2} \\ \iff \frac{z_1}{2 - (1 - \sqrt{1 - |z_1|^2})} &= \frac{z_2}{2 - (1 - \sqrt{1 - |z_2|^2})} \\ \iff \frac{z_1}{1 + \sqrt{1 - |z_1|^2}} &= \frac{z_2}{1 + \sqrt{1 - |z_2|^2}} \\ \iff z_1 &= z_2, \end{aligned}$$

joten $(z_1, x_1) = (z_1, x_2)$. Näin ollen g on injektio. Osoitetaan seuraavaksi, että $g(A) = U$. Olkoon $(z, x) \in A$, jolloin

$$|g(z, x)| = \left| \frac{z}{2-x} \right| = \frac{|z|}{\left| 2 - \left(1 - \sqrt{1-|z|^2} \right) \right|} \leq \frac{1}{1 + \sqrt{1-|z|^2}} \leq 1.$$

Näin ollen $g(z, x) \in U$. Olkoon seuraavaksi $w \in U$. Etsitään alkukuvaa $(z, x) \in A$ siten, että

$$|w| = \frac{|z|}{2-x}, \arg(z) = \arg(w) \text{ ja } x = 1 - \sqrt{1-|z|^2}.$$

Tällöin edellä mainituista lausekkeista saadaan

$$(z, x) = \left(\frac{2w}{1+|w|^2}, \frac{2|w|^2}{1+|w|^2} \right).$$

Selvästi $(z, x) \in A$, sillä $|z| \leq 1$. Lisäksi on voimassa $w = g(z, x)$, joten $w \in g(A)$. Näin ollen joukko U on stereograafiprojektion kuvajoukko. \square

HUOM! Kuvaus $g : A \rightarrow U$ on bijektio, joten Lauseen 6.2.2 nojalla $g \circ f : U \rightarrow U$ on myös bijektio. Lisäksi g :n käänteiskuvaus on kuvaus $g^{-1} : U \rightarrow A$,

$$g^{-1}(w) = \left(\frac{2w}{1+|w|^2}, \frac{2|w|^2}{1+|w|^2} \right).$$

Lause 6.2.5. Olkoon $f : \tilde{K} \rightarrow f(\tilde{K})$ siten, että

$$f(z) = \left(z, 1 - \sqrt{1-|z|^2} \right).$$

Olkoon lisäksi $g : f(\tilde{K}) \rightarrow \tilde{P}$ siten, että

$$g(z, x) = \frac{z}{2-x}.$$

Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f : \tilde{K} \rightarrow \tilde{P}$ on

$$g \circ f(z) = \frac{z}{1 + \sqrt{1-|z|^2}}$$

ja sen käänteiskuvaus on $f^{-1} \circ g^{-1} : \tilde{P} \rightarrow \tilde{K}$ siten, että

$$f^{-1} \circ g^{-1}(z) = \frac{2z}{1+|z|^2}.$$

Todistus. Väitteet saadaan pienellä laskulla. \square

Lause 6.2.6. Olkoon $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Kuvaus $f : U \rightarrow U$,

$$f(z) = \frac{z}{1 + \sqrt{1-|z|^2}}$$

on homeomorfismi ja sen käänteiskuvaus on $f^{-1} : U \rightarrow U$,

$$f^{-1}(z) = \frac{2z}{1+|z|^2}.$$

Todistus. Kuvaus f on bijektio ja

$$f^{-1}(z) = \frac{2z}{1 + |z|^2}$$

sen käänteiskuvaus, joten riittää havaita molempien kuvausten ilmeinen jatkuvuus joukossa U . \square

Lause 6.2.7. Kuvaukselle $h : \tilde{P} \rightarrow \tilde{K}$,

$$h(z) = \frac{2z}{1 + |z|^2}$$

on voimassa

$$d_{\mathcal{P}}(z_1, z_2) = d_{\mathcal{K}}(h(z_1), h(z_2))$$

kaikilla $z_1, z_2 \in \tilde{P}$.

Todistus. Olkoon $z_1, z_2 \in \tilde{P}$. Merkitään suoran $\overleftrightarrow{z_1 z_2}_{\mathcal{P}}$ päätepisteitä w_1 ja w_2 . Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} &= d_{\mathcal{P}}(z_1, z_2) \\ &= \left| \log \frac{|z_1 - w_1| \cdot |z_2 - w_2|}{|z_1 - w_2| \cdot |z_2 - w_1|} \right| \\ &= \left| \log \sqrt{\frac{|z_1 - w_1|^2 \cdot |z_2 - w_2|^2}{|z_1 - w_2|^2 \cdot |z_2 - w_1|^2}} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \log \frac{(|z_1|^2 - 2|z_1||w_1| + |w_1|^2) \cdot (|z_2|^2 - 2|z_2||w_2| + |w_2|^2)}{(|z_1|^2 - 2|z_1||w_2| + |w_2|^2) \cdot (|z_2|^2 - 2|z_2||w_1| + |w_1|^2)} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \log \frac{|z_1 + z_1|w_1|^2 - w_1 - w_1|z_1|^2 \cdot |z_2 + z_2|w_2|^2 - w_2 - w_2|z_2|^2}{|z_1 + z_1|w_2|^2 - w_2 - w_2|z_1|^2 \cdot |z_2 + z_2|w_1|^2 - w_1 - w_1|z_2|^2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \log \frac{\left| \frac{2z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{2w_1}{1+|w_1|^2} \right| \cdot \left| \frac{2z_2}{1+|z_2|^2} - \frac{2w_2}{1+|w_2|^2} \right|}{\left| \frac{2z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{2w_2}{1+|w_2|^2} \right| \cdot \left| \frac{2z_2}{1+|z_2|^2} - \frac{2w_1}{1+|w_1|^2} \right|} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \log \frac{|h(z_1) - h(w_1)| \cdot |h(z_2) - h(w_2)|}{|h(z_1) - h(w_2)| \cdot |h(z_2) - h(w_1)|} \right|. \end{aligned}$$

Lisäksi Lauseen 6.2.6 nojalla on voimassa

$$\lim_{z_1 \rightarrow w_1} h(z_1) = h(w_1) \text{ ja } \lim_{z_2 \rightarrow w_2} h(z_2) = h(w_2).$$

Näin ollen pisteet $h(w_1)$ ja $h(w_2)$ ovat suoran $\overleftrightarrow{h(z_1)h(z_2)}_{\mathcal{K}}$ päätepisteitä, joten

$$d_{\mathcal{P}}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \left| \log \frac{|h(z_1) - h(w_1)| \cdot |h(z_2) - h(w_2)|}{|h(z_1) - h(w_2)| \cdot |h(z_2) - h(w_1)|} \right| = d_{\mathcal{K}}(h(z_1), h(z_2)).$$

Perustelu edelliseen on samantapainen kuin Lauseen 6.1.13 todistuksessa. \square

Seuraus 6.2.8. Funktio $h : \tilde{P} \rightarrow \tilde{K}$,

$$h(z) = \frac{2z}{1 + |z|^2}$$

on isometria. Se kuvaa Poincarén mallin pisteet ja suorat Kleinin mallin pisteiksi ja suoriksi.

Seuraus 6.2.9. Funktio $h^{-1} : \tilde{K} \rightarrow \tilde{P}$,

$$h^{-1}(z) = \frac{z}{1 + \sqrt{1 - |z|^2}}$$

on isometria. Se kuvaa Kleinin mallin pisteet ja suorat Poincarén mallin pisteiksi ja suoriksi.

Viitteet

- [1] B.A. Rosenfeld: A History Of Non – Euclidean Geometry, 1988, New York, Springer – Verlag
- [2] Dan Pedoe: Geometry – A Comprehensive Course, 1970, Cambridge University, Cambridge University Press
- [3] Earl Perry: Geometry – Axiomatic Developments With Problem Solving, 1992, New York, Marcel Dekker
- [4] Lassi Kurittu: Geometrian luentomoniste, 2006, Jyväskylä
- [5] Marvin Jay Greenberg: Euclidean and Non – Euclidean Geometries, 2001, USA, W.H. Freeman and Company
- [6] Tero Kilpeläinen: Kompleksianalyysin luentomoniste, 2006, Jyväskylä