Rademacherin lause

Anssi Niitti

Matematiikan Pro Gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2008

Sisältö

1. Johdanto

Tässä tutkielmassa esitellään saksalaisen matemaatikon Hans Adolph Rademacherin (1892-1969) nimeä kantava lause. Lauseen mukaan Lipschitz-kuvaukset $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ovat Lebesguen mitan mielessä melkein kaikkialla differentioituvia. Lause on Lipschitz-analyysin perustuloksia.

Ennen päätulosta esitellään Hausdorff-mitat ja joitakin niiden perusominaisuuksia. Hausdorff-mitat eroavat Lebesgue-mitoista siinä, että niiden dimensio ei ole sidottu avaruuden dimensioon, eikä se välttämättä ole kokonaisluku. Lisäksi ne voidaan määritellä muuallakin kuin euklidisissa avaruuksissa. Esimerkkinä lasketaan Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon dimensiota vastaava Hausdorff-mitta.

Lopuksi esitellään joitakin Lipschitz-kuvausten ja Hausdorff-mittojen ominaisuuksia sekä Rademacherin lausetta hieman yleistävä Stepanovin lause.

2. Esitietoja

Tässä luvussa esitellään luettelonomaisesti joitakin jatkossa tarvittavia määritelmiä ja lauseita.

Määritelmä 2.1. Olkoon X metrinen avaruus. Kuvaus $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ on *ulkomitta* (joskus lyhyemmin vain *mitta*), jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) μ on *monotoninen*: $A \subset B \;\Rightarrow\; \mu(A) \le \mu(B)$ kaikilla $A, B \subset X$

(3) μ on *subadditiivinen*: $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ kaikilla $A_i \subset X$, $i = 1, 2, \ldots$.

Määritelmä 2.2. Olkoon μ ulkomitta. Joukko $A \subset X$ on *μ-mitallinen*, jos kaikilla $E \subset X$ pätee

$$\mu(E) = \mu(E \cup A) + \mu(E \setminus A).$$

Seuraavia mitallisten joukkojen perusominaisuuksia tullaan jatkossa käyttämään usein erikseen mainitsematta. Todistuksia ei esitetä tässä (ks. [2, s.128-131]).

Lause 2.3. *Olkoon $\mu : X \longrightarrow [0,\infty]$ ulkomitta ja olkoon $\mathcal{M}$ kaikkien μ-mitallisten joukkojen $A \subset X$ perhe.*

(1) *Mitan $\mu : X \longrightarrow [0,\infty]$ suhteen mitallisten joukkojen kokoelma $\mathcal{M}$ on* σ-algebra, *ts.*
  (a) $\emptyset \in \mathcal{M}$ *ja* $X \in \mathcal{M}$
  (b) *jos* $A \in \mathcal{M}$, *niin* $X \setminus A \in \mathcal{M}$
  (c) *jos* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{M}$, *niin* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

(2) *Jos* $\mu(A) = 0$, *niin* $A \in \mathcal{M}$

(3) *Jos* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{M}$ *ovat erillisiä, niin*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(4) *Jos* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{M}$ *ja* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, *niin*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

(5) *Jos* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{M}$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ *ja* $\mu(A_1) < \infty$, *niin*

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Määritelmä 2.4. Ulkomitta $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ on *Borel-mitta*, jos kaikki X:n Borel-joukot ovat μ-mitallisia.

Borel-mitta $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ on *Borel-säännöllinen*, jos jokaiselle joukolle $A \subset X$ on olemassa Borel-joukko B siten, että $A \subset B$ ja $\mu(A) = \mu(B)$.

Edelleen, Borel-mitta μ on *Radon-mitta*, jos

(1) $\mu(K) < \infty$ kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset X$
(2) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K$ on kompakti ja $K \subset A\}$ avoimilla $A \subset X$
(3) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U$ on avoin ja $A \subset U\}$ kaikilla $A \subset X$

Metrisen avaruuden X ulkomitta $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ on *metrinen ulkomitta*, jos kaikilla $A, B \subset X$, joille $d(A, B) > 0$, pätee

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Todistetaan esimerkkinä seuraava tulos. Myös käänteinen tulos pätee: metrisen avaruuden Borel-mitat ovat metrisiä mittoja.

Lause 2.5. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon μ metrinen ulkomitta avaruudessa X. Tällöin μ on Borel-mitta.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että ehdoista

- $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$,
- $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ja
- $d(A_i, A \setminus A_{i+1}) > 0$ kaikilla i

seuraa $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(A)$. Voidaan olettaa, että $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) < \infty$; olkoon $M > 0$ sellainen, että $\mu(A_i) \le M$ kaikilla i. Merkitään $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$, $i = 2, 3, 4, \ldots$, jolloin $d(B_i, B_j) > 0$ aina kun $|i - j| \ge 2$.

Koska μ on metrinen ulkomitta, saadaan kaikilla $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(B_{2i}) = \mu(\bigcup_{i=1}^{m} B_{2i}) \le \mu(A_{2m}) \le M,$$

ja vastaavasti

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(B_{2i+1}) \le M.$$

Tästä seuraa, että

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=m}^{\infty} \mu(B_i) = 0.$$

Koska subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \mu(A) &\le \mu(A_m \cup \bigcup_{i=m}^{\infty} B_i) \\ &\le \mu(A_m) + \mu(\bigcup_{i=m}^{\infty} B_i) \\ &\le \mu(A_m) + \sum_{i=m}^{\infty} \mu(B_i), \end{aligned}$$

saadaan

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) \ge \mu(A).$$

Epäyhtälö

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) \leq \mu(A).$$

seuraa suoraan monotonisuudesta.

Todistetaan nyt edellisen havainnon avulla, että suljetut joukot $F \subset X$ ovat μ- mitallisia. Mitan μ Borel-ominaisuus seuraa tästä.

Olkoon $E \subset X$ ja olkoon $F \subset X$ suljettu. Asetetaan kaikilla $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$A_i = \{x \in E \setminus F \;:\; d(x, F) \geq 1/i\}.$$

Koska μ on metrinen ja $d(A_i, E \cap F) \geq 1/i$, pätee kaikilla i

$$\mu(A_i) + \mu(E \cap F) = \mu(A_i \cup (E \cap F)) \leq \mu(E).$$

Koska F on suljettu, on $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = E \setminus F$.

Nyt $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ ja $d(A_i, (E \setminus F) \setminus A_{i+1}) > 0$ kaikilla i, joten

$$\mu(E \setminus F) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Siten

$$\begin{aligned}
\mu(E) &\leq \mu(E \setminus F) + \mu(E \cap F) \\
&= \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) + \mu(E \cap F) \\
&\leq \mu(E),
\end{aligned}$$

ja lause on todistettu. □

Seuraavien mittateorian perustulosten todistukset sivuutetaan. Fatoun lemman ja Lebesguen dominoidun konvergenssin todistus on esitetty yleisemmässä muodossa lähteessä [2, Thm 12.23, Thm 12.24]. Fubinin lause löytyy todistuksineen teoksesta [1, Thm 1.14] myöskin hieman yleisemmässä muodossa.

Lause 2.6. *(Fatoun lemma) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja olkoot $f_k : A \longrightarrow [0, \infty]$ $\mathcal{L}^n$-mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int\limits_A \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mathcal{L}^n \leq \liminf_{k\to\infty} \int\limits_A f_k \, d\mathcal{L}^n.$$

Lause 2.7. *(Lebesguen dominoidun konvergenssin lause) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja olkoot $f_1, f_2, f_3, \ldots : A \longrightarrow [-\infty, \infty]$ $\mathcal{L}^n$-mitallisia funktioita siten, että $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ on olemassa melkein kaikilla $x \in A$. Jos on olemassa integroituva funktio $g : A \longrightarrow [0, \infty]$ siten, että kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$ pätee*

$$|f_k(x)| \leq g(x)$$

melkein kaikilla $x \in A$, niin

$$\int\limits_A \lim_{k\to\infty} f_k(x) d\mathcal{L}^n = \lim_{k\to\infty} \int\limits_A f_k(x) d\mathcal{L}^n.$$

Lause 2.8. *(Fubini) Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty]$ $\mathcal{L}^n$*-mitallinen funktio. Jos luvuille* $p, q \in \mathbb{N}$ *pätee* $p + q = n$*, niin*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} \int\limits_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, d\mathcal{L}^p(x)\, d\mathcal{L}^q(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, d\mathcal{L}^q(y)\, d\mathcal{L}^p(x)$$

Vitalin peitelauseeseen tullaan viittaamaan suoraan muutaman kerran. Epäsuorasti sitä tarvitaan ainakin Rademacherin lauseen todistuksessa rajoitetusti heilahtelevien funktioiden differentioituvuuden kohdalla (ks. [2, Thm 17.11, Thm 17.17]).

Lause 2.9. *(Vitalin peitelause)*

Olkoon μ *Radon-mitta* $\mathbb{R}^n$*:ssä ja olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$*. Olkoon* $\mathcal{B}$ *kokoelma suljettuja palloja siten, että kaikille* $x \in A$*,* $\varepsilon > 0$ *on olemassa pallo* $B(x, r) \in \mathcal{B}$*, jolle* $r < \varepsilon$*.*

Tällöin on olemassa erilliset pallot $B_1, B_2, B_3, \ldots \in \mathcal{B}$ *siten, että*

$$\mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0.$$

3. Hausdorff-mitat ja dimensiot

Seuraavaksi esiteltävä *Carathéodoryn konstruktio* on eräs keino rakentaa ulkomitta ns.*peiteluokan* (alla merkitään $\mathcal{F}$:llä) ja *esimitan* (merkitään τ:lla) avulla. Ennen Carathéodoryn konstruktion esittelyä määritellään muutama jatkossa esiintyvä käsite.

Määritelmä 3.1. Metrisen avaruuden X joukon $A \subset X$ *halkaisijaa* merkitään diam(A):lla ja se määritellään asettamalla

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\},$$

missä d on avaruuden X metriikka.

Merkintä $d(x,A)$ tai $d(A,x)$, missä A on metrisen avaruuden X osajoukko ja $x \in X$, tarkoittaa *pisteen x etäisyyttä joukosta A* ja se määritellään asettamalla

$$d(x,A) = d(A,x) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

Joukkojen A ja B etäisyys $d(A,B)$ määritellään asettamalla

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A \text{ ja } b \in B\}$$

Joukkoperhe $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ on joukon A *peite*, jos $A \subset \bigcup \mathcal{E}$. Peite $\mathcal{E}$ on *avoin* (suljettu), jos kaikki siihen kuuluvat joukot $E \in \mathcal{E}$ ovat avoimia (suljettuja). Joukon A-peite $\mathcal{E}$ on sen *δ-peite*, jos kaikille $E \in \mathcal{E}$ pätee diam$(E) \leq \delta$.

3.1. Carathéodoryn konstruktio.

Olkoon X metrinen avaruus, $\mathcal{F}$ kokoelma X:n osajoukkoja ja $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow [0,\infty]$ funktio siten, että

(1) jokaiselle $\delta > 0$ on olemassa X:n numeroituva δ-peite $\{E_1, E_2, E_3, \ldots\} \subset \mathcal{F}$.
(2) jokaiselle $\delta > 0$ on joukko $E \in \mathcal{F}$, jolle $\tau(E) \leq \delta$ ja diam$(E) \leq \delta$.

Määritellään kaikilla $\delta \in]0,\infty]$ kuvaukset $\psi_\delta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ asettamalla

$$\psi_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(E_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ d(E_i) \leq \delta,\ E_i \in \mathcal{F}\right\}.$$

Ehto (2) takaa, että $\psi_\delta(\emptyset) = 0$. Kuvausten ψ_δ monotonisuus seuraa suoraan määritelmästä. Subadditiivisuus voidaan osoittaa valitsemalla kullakin $\varepsilon > 0$ mitattaville joukoille A_i peitteet $\{E_{k,i} : k = 1,2,3,\ldots\}$, joille

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_{k,i}) \leq \psi_\delta(A_i) + 2^{-i}\varepsilon.$$

Yhdistämällä nämä peitteet saadaan yhdisteen $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ peite

$$\{E_{k,i} : k = 1,2,3,\ldots\ ,\ i = 1,2,3,\ldots\}.$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
\psi_\delta(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_{k,i}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \psi_\delta(A_i) + 2^{-i}\varepsilon \\
&= \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_\delta(A_i).
\end{aligned}$$

Kuvaukset ψ_δ ovat siis ulkomittoja. Lisäksi $\psi_\delta \leq \psi_\varepsilon$ aina, kun $\varepsilon < \delta$, joten voidaan määritellä kuvaus $\psi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ asettamalla

$$\psi(A) = \lim_{\delta\to 0} \psi_\delta(A) = \sup_{\delta>0} \psi_\delta(A).$$

Kuvaus ψ on ulkomitta: $\psi(\emptyset) = 0$ ja monotonisuus periytyy mitoilta ψ_δ. Subadditiivisuus toteutuu myös, sillä joukoille $A_1, A_2, A_3, \ldots \subset X$ pätee

$$\begin{aligned}
\psi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \lim_{\delta\to 0} \psi_\delta(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \\
&\leq \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \psi_\delta(A_i) \\
&\leq \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \psi(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \psi(A_i)
\end{aligned}$$

Näin saatua ulkomittaa ψ sanotaan *esimitasta τ Carathéodoryn konstruktiolla saaduksi ulkomitaksi.* Tällainen mitta ψ on varsin hyvin käyttäytyvä:

Lause 3.2. (1) *ψ on Borel-mitta.*
(2) *Jos kaikki joukot $E \in \mathcal{F}$ ovat Borel-joukkoja, niin ψ on Borel-säännöllinen.*

Todistus. (1) Osoitetaan, että ψ on ns. metrinen ulkomitta; Borel-ominaisuus seuraa tästä [1, Thm 1.7]. Olkoon $A, B \subset X$ joukkoja, joille $d(A,B) > 0$. Metrisyys saadaan kun osoitetaan, että

$$\psi(A \cup B) = \psi(A) + \psi(B).$$

Olkoon $\delta \in]0, d(A,B)/2[$ ja $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$ joukon $A \cup B$ δ-peite. Tällöin jokaiselle joukolle E_i pätee $E_i \cap A = \emptyset$ tai $E_i \cap B = \emptyset$. Peite voidaan siis jakaa niihin alkiohin, jotka leikkaavat joukkoa A, niihin jotka leikkaavat joukkoa B ja niihin, jotka eivät leikkaa kumpaakaan. Siten

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \tau(E_i) &= \sum_{A\cap E_i \neq\emptyset} \tau(E_i) + \sum_{B\cap E_i \neq\emptyset} \tau(E_i) + \sum_{E_i\cap(A\cup B)=\emptyset} \tau(E_i) \\
&\geq \sum_{A\cap E_i \neq\emptyset} \tau(E_i) + \sum_{B\cap E_i \neq\emptyset} \tau(E_i) \\
&\geq \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B).
\end{aligned}$$

Koska δ-peite $\{E_i\}$ oli mielivaltainen, on

$$\psi_\delta(A \cup B) \geq \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B).$$

Kuvausten ψ_δ subadditiivisuus antaa vastakkaisen epäyhtälön, joten

$$\psi_\delta(A \cup B) = \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B).$$

Väite seuraa tästä antamalla $\delta \to 0$.

(2) Olkoon $A \subset X$. Pitää siis löytää Borel-joukko $B \subset X$ siten, että $A \subset B$ ja $\psi(A) = \psi(B)$. Jos $\psi(A) = \infty$, voidaan valita $B = X$. Voidaan siis olettaa, että $\psi(A) < \infty$. Tällöin myös $\psi_\delta(A) < \infty$ kaikilla $\delta > 0$. Valitaan jokaiselle $k = 1, 2, \ldots$ Borel-joukot $A_{k,1}, A_{k,2}, \ldots$ siten, että
- $\operatorname{diam}(A_{k,i}) \leq \frac{1}{k}$,
- $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{k,i}$ ja
- $\sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_{k,i}) \leq \psi_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}$.

Asettamalla

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{k,i}$$

saadaan Borel-joukko $B \supset A$, jolle monotonisuuden nojalla pätee

$$\psi_{\frac{1}{k}}(A) \leq \psi_{\frac{1}{k}}(B).$$

Toisaalta jokaisella k pätee $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{k,i}$, joten

$$\psi_{\frac{1}{k}}(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_{k,i}) \leq \psi_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Antamalla $k \to \infty$ saadaan $\psi(A) = \psi(B)$, joten ψ on Borel-säännöllinen.

□

3.2. **Hausdorff-mitat.** Olkoon X separoituva metrinen avaruus[1]. Kun valitaan Carathéodoryn konstruktiossa edellisten merkintöjen mukaan

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$$

ja

$$\tau(E) = \operatorname{diam}(E)^s$$

kun $s \geq 0$, saadaan sopimalla erikoistapaukset $0^0 = 1$ ja $d(\emptyset)^s = 0$ ulkomitta ψ, jota sanotaan *s-ulotteiseksi Hausdorff-mitaksi*. Sitä merkitään symbolilla $\mathcal{H}^s$. Konstruktiossa saatua mittaa ψ_δ merkitään vastaavasti $\mathcal{H}^s_\delta$. Toisin sanoen

$$\mathcal{H}^s = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A),$$

[1] Voitaisiin määritellä ei-separoituvissakin.

missä

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}(E_i))^s : E_i \subset X,\ \mathrm{diam}(E_i) \le \delta \text{ ja } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\}.$$

Seuraavassa lauseessa todetaan, että Hausdorff-mitan konstruktiossa voidaan hyvin rajoittaa peiteluokkaa $\mathcal{F}$ muuttamatta itse mittaa. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukko on *konveksi*, jos se sisältää kaikki pisteapariensa väliset janat. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *konveksi verho* on konveksi joukko $V \subset \mathbb{R}^n$, jolle pätee $V \subset K$ kaikilla konvekseilla $K \subset \mathbb{R}^n$, joille $A \subset K$.

Lause 3.3. *Valinnoilla*

(1) $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ on suljettu}\}$,
(2) $X = \mathbb{R}^n$ *ja* $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ on konveksi}\}$ *tai*
(3) $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ on avoin}\}$

Carathéodoryn konstruktio antaa saman mitan $\psi = \mathcal{H}^s$.

Todistus. Kohta (1):

Olkoon $A \subset X$ ja $s > 0$. Olkoon ψ_δ kuten $\mathcal{H}^s_\delta$ mutta määritelty siten, että peitejoukkoina käytetään vain suljettuja joukkoja. Merkitään $\psi = \lim_{\delta\to 0}\psi_\delta$. Pitää osoittaa, että $\psi(A) = \mathcal{H}^s(A)$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $\{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$ joukon A δ-peite, jolle pätee

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{diam}(E_i)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon.$$

Sulkemalla joukot E_i saadaan A:lle suljettu δ-peite $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \overline{E}_3, \ldots$. Joukkojen sulkeminen ei muuta halkaisijaa, joten infimumin määritelmän nojalla pätee

$$\psi_\delta(A) \le \mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon.$$

Koska ε on mielivaltainen, saadaan epäyhtälö

$$\psi(A) \le \mathcal{H}^s(A).$$

Epäyhtälö $\psi(A) \ge \mathcal{H}^s(A)$ puolestaan seuraa suoraan infimumin määritelmästä.

Kohta (2) saadaan samaan tapaan tarkastelemalla peitejoukkojen sulkeumien sijaan niiden konvekseja verhoja.

Kohta (3): Olkoon $A \subset X$ ja $s > 0$. Olkoot ψ_δ ja ψ kuten edellä, mutta avoimien peitejoukkojen kautta määriteltynä. Osoitetaan, että $\psi(A) = \mathcal{H}^s(A)$.

Jokaiselle A:n δ-peitteelle $E_1, E_2, E_3, \ldots$ saadaan määriteltyä kaikilla $t > 1$ avoin $t\delta$-peite $U_1, U_2, U_3, \ldots$ „pullistamalla" joukkoja E_i sopivasti:

$$U_i = \{x : d(x, E_i) < \frac{1}{2}(t-1)\mathrm{diam}(E_i)\}.$$

Kun joukot U_i ovat näin määritelty, saadaan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(U_i)^s = t^s \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $\{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$ sellainen joukon A δ-peite, jolle pätee

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon.$$

Nyt edellisen nojalla kaikilla $t > 1$ saadaan

$$\psi_{t\delta}(A) \leq t^s(\mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon).$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, saadaan tästä viemällä $\delta \to 0$

$$\psi(A) \leq t^s \mathcal{H}^s(A),$$

edelleen siis kaikilla $t > 1$, joten

$$\psi(A) \leq \mathcal{H}^s(A).$$

Epäyhtälö $\psi(A) \geq \mathcal{H}^s(A)$ saadaan suoraan määritelmästä.

$\square$

Lause 3.4. (1) *$\mathcal{H}^s$ on Borel-säännöllinen mitta.*

(2) *$\mathcal{H}^s(A) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ kaikilla $\delta > 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ jollakin $\delta > 0$.*

(3) *$\mathcal{H}^s(A + x) = \mathcal{H}^s(A)$ ja $\mathcal{H}^s(tA) = t^s\mathcal{H}^s(A)$ kun $A \subset \mathbb{R}^n$, $A + x := \{a + x : a \in A\}$ ja $tA := \{ta : a \in A\}$.*

Todistus. Kohta (1) seuraa suoraan lauseista 3.3 ja 3.2.

Kohta (2): Todistetaan ensin, että

$$\mathcal{H}^s(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s_\delta(A) = 0 \text{ kaikilla } \delta > 0.$$

Olkoon A joukko, jolle $\mathcal{H}^s(A) = 0$. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ on $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \varepsilon$ kun δ on riittävän pieni. Infimumin määritelmän nojalla $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ on δ:n suhteen vähenevä, joten edellinen pätee kaikille δ. Koska ε on mielivaltainen, on oltava $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ kaikilla δ.

Osoitetaan sitten, että

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0 \text{ jollakin } \delta > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $\delta > 0$ sellainen, että $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$. Tällöin on olemassa joukon A δ-peite $\{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$, jolle pätee

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s < \varepsilon.$$

Tästä seuraa, että $\mathrm{diam}(E_i) < \varepsilon^{1/s}$ kaikilla $i = 1, 2, 3, \ldots$ ja siten $\mathcal{H}^s_{\varepsilon^{1/s}}(A) \leq \varepsilon$. Koska $\varepsilon^{1/s} \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$, pätee $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

Kohta (3): Tapaus $\mathcal{H}^s(A+x) = \mathcal{H}^s(A)$ on selvä: tämä nähdään siirtämällä peitejoukkoja samalla vektorilla x. Joukon halkaisija ei muutu siirrettäessä.

Yhtälö $\mathcal{H}^s(tA) = t^s\mathcal{H}^s(A)$ vaatii pienen perustelun. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $\{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$ joukon A „epsilon-optimaalinen" δ-peite:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_i)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon.$$

Tällöin $\{tE_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ on tA:n $t\delta$-peite. Niinpä

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{t\delta}(tA) &\leq \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(tE_i))^s \\
&= t^s \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_i))^s \\
&\leq t^s\mathcal{H}^s_\delta(A) + t^s\varepsilon.
\end{aligned}$$

Koska ε voidaan valita miten pieneksi hyvänsä, pätee kaikilla δ

$$\mathcal{H}^s_{t\delta}(tA) \leq t^s\mathcal{H}^s_\delta(A),$$

ja tästä saadaan epäyhtälö

$$\mathcal{H}^s(tA) \leq t^s\mathcal{H}^s(A).$$

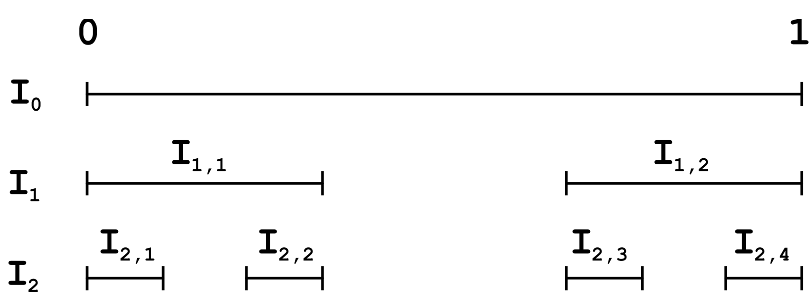
Käänteinen epäyhtälö saadaan edellistä epäyhtälöä soveltamalla:

$$t^s\mathcal{H}^s(A) = t^s\mathcal{H}^s(t^{-1}(tA)) \leq t^{-s}t^s\mathcal{H}^s(tA) = \mathcal{H}^s(tA).$$

$\square$

Esimerkki 3.5. Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko $C_{\frac{1}{3}}$ saadaan kun välistä $[0,1]$ poistetaan keskimmäinen avoin kolmannes ja toistetaan tätä menettelyä jäljellejääville väleille rekursiivisesti. Täsmällisemmin sanoen $C_{\frac{1}{3}}$ on leikkaus kaikista näin syntyvistä välivaiheista $I_i, i = 0, 1, 2, \ldots$, joista kukin koostuu 3^{-i}:n mittaisista väleistä $I_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^i$. Ensimmäiset välivaiheet ovat

- $I_0 = [0, 1]$,
- $I_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2} = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$,
- $I_2 = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup I_{2,3} \cup I_{2,4} = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.



Kuva 1. Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon ensimmäiset konstruktiovaiheet

Osoitetaan, että $\mathcal{H}^s(C_{\frac{1}{3}}) = 1$ kun $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. Epäyhtälö $\mathcal{H}^s(C_{\frac{1}{3}}) \leq 1$ saadaan helposti valitsemalla aina δ-peitteeksi sellaisen konstruktiovaiheen I_i osavälit $I_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^i$, jotka toteuttavat ehdon $\operatorname{diam}(I_{i,j}) < \delta$ kaikilla j. Tällainen vaihe i löytyy kaikilla $\delta > 0$, sillä välivaiheen I_i osavälien pituudet ovat 3^{-i}. Tälle peitteelle saadaan nyt

$$\sum_{j=1}^{2^i} \operatorname{diam}(I_{i,j})^s = 2^i (3^{-i})^s = 1.$$

Yhtälön toinen suunta on hieman mutkikkaampi. Lauseen 3.3 ja $C_{\frac{1}{3}}$:n kompaktiuden nojalla riittää tarkastella äärellisiä suljetuista väleistä koostuvia peitteitä. Lisäksi voidaan olettaa, että peitevälien päissä ei ole ylimääräistä; ts. välien päätepisteet osuvat päällekkäin joidenkin Cantorin joukon konstruktiovälien päiden kanssa siten, että jokaisen peitevälin $[a, b]$ alkupiste a osuu jonkin konstruktiovälin alkupisteeseen ja loppupiste b jonkin konstruktiovälin loppupisteeseen.

Olkoot $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_k$ tällainen suljetuista väleistä koostuva $C_{\frac{1}{3}}$:n peite. Pitää osoittaa, että

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{diam}(V_i)^s \geq 1 \tag{3.1}$$

Jokainen peiteväli V_i alkaa siis jonkin konstuktiovälin alkupisteestä. Olkoon a_i pienin konstruktiovaihe l, josta löytyy tällainen väli siten, että tämä väli sisältyy kokonaan peiteväliin V_i. Olkoon b_i vastaavasti pienin konstruktiovaihe, josta löytyy sellainen väli, jolla on yhteinen päätepiste V_i:n kanssa ja joka sisältyy väliin V_i. Valitaan sitten suurin näistä kaikista asettamalla

$$l_i = \max\{a_i, b_i\},$$

ja

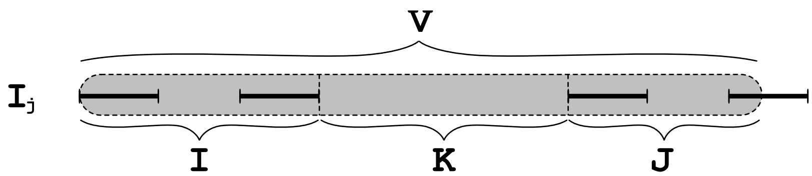
$$l = \max\{l_i : i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Kun l on näin valittu, jokainen peiteväli V_i alkaa jostakin vaiheen l konstruktiovälin alkupisteestä ja myös päättyy johonkin vaiheen l konstruktiovälin loppupisteeseen.

Ajatuksena on nyt hajoittaa kukin peiteväli V_i vaiheittain pienempiin osiin siten, että lopulta jäljelle jäävään peitteeseen kuuluu enää täsmälleen $C_{\frac{1}{3}}$:n konstruktiovaiheen l välit. Tämä täytyy tietysti tehdä niin, että yhtälön 3.1 vasemman puolen summa ei kasva.

Ensimmäisessä vaiheessa kukin peiteväli V_i, joka sisältää keskimmäisen kolmanneksen $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ jaetaan osiin U_1 ja U_2 siten, että $U_1 = V_i \cap [0, \frac{1}{3}]$ ja $U_2 = V_i \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Seuraavassa vaiheessa poistetaan peiteväleistä vastaavasti $C_{\frac{1}{3}}$:n komplementin välit $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ja $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Näin jatketaan, kunnes kaikki komplementtivälit Cantorin joukon konstruktiovaiheista $1, 2, \ldots, l$ on poistettu. Joka vaiheessa välikokoelman peiteominaisuus säilyy ja lopulta jäljelle jäävät välit $V_1', V_2', \ldots, V_n'$ peittävät kukin täsmälleen yhden konstruktiovälin $I_{l,j}$, joten

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{diam}(V_i')^s \geq \sum_{j=1}^{2^l} \operatorname{diam}(I_{l,j})^s = 1.$$



Kuva 2. Peitevälin jako

Riittää siis osoittaa, että

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{diam}(V_i)^s \geq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{diam}(V_i')^s, \tag{3.2}$$

missä välit V_i' ovat muodostettu alkuperäisistä peiteväleistä V_i edellämainitulla tavalla. Tarkastellaan yksittäistä peiteväliä V ja sen jakamista. Olkoon K suurin väliin V sisältyvä avoin komplementtiväli – edellä esitetyssä hajoittamistavassahan poistetaan väleistä aina suurin niihin kuuluva komplementtiväli. Nyt V jakautuu peräkkäisiin väleihin I, K ja J, joista vain suljetut välit I ja J leikkaavat joukkoa $C_{\frac{1}{3}}$. Pitää siis osoittaa, että

$$\operatorname{diam}(V)^s \geq \operatorname{diam}(I)^s + \operatorname{diam}(J)^s.$$

Cantorin joukon konstruktiota tarkastelemalla (ks. kuva 2) huomataan, että koska peiteväli V alkaa Cantorin joukon pisteestä ja myös loppuu sellaiseen, eikä V sisällä K:ta suurempia komplementtivälejä, on oltava

$$\operatorname{diam}(I), \operatorname{diam}(J) \leq \operatorname{diam}(K).$$

Koska $s < 1$, kuvaus $x \mapsto x^s$ on konkaavi [2]. Kun vielä huomataan, että $3^s = 2$, saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(V)^s &\geq (\operatorname{diam}(I) + \operatorname{diam}(K) + \operatorname{diam}(J))^s \\
&\geq 2(\tfrac{1}{2}(\operatorname{diam}(I) + \operatorname{diam}(J)))^s \\
&\geq 2(\tfrac{1}{2}\operatorname{diam}(I)^s + \tfrac{1}{2}\operatorname{diam}(J))^s) \\
&= \operatorname{diam}(I)^s + \operatorname{diam}(J)^s,
\end{aligned}$$

ja siten yhtälö 3.2 pätee.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathbb{R}^n$:ssä $\mathcal{H}^n$ on Radon-mitta. Todistusta varten tarvitaan seuraava Borel-säännöllisten mittojen arviointilause, jonka todistus ohitetaan tässä (ks. [1, Thm 1.10]).

---

[2]Kuvaus $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on *konkaavi*, jos $\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{f(a+b)}{2}$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$

Lause 3.6. *Olkoon X metrinen avaruus, μ Borel-säännöllinen mitta, $A \subset X$ μ-mitallinen joukko ja $\varepsilon > 0$. Tällöin*

(1) *Jos $\mu(A) < \infty$, on olemassa suljettu joukko $F \subset A$ siten, että $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$.*

(2) *Jos on olemassa avoimet joukot $V_1, V_2, V_3, \ldots$ siten, että $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ ja $\mu(V_i) < \infty$ kaikille i, niin silloin on olemassa avoin joukko V siten, että $A \subset V$ ja $\mu(V \setminus A) < \varepsilon$.*

Edellisen lauseen epäyhtälö $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$ voidaan myös kirjoittaa muodossa $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$, sillä joukot A ja F ovat μ-mitallisia ja $\mu(F) < \infty$.

Lause 3.7. *$\mathcal{H}^n$ on Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä.*

Todistus. Näytetään ensin rajoitettujen joukkojen äärellismittaisuus. δ-halkaisijaisen tasasivuisen n-välin sivun pituus on $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$ ja siten n-välin $[0,1]^n$ peittämiseen riittää $\left\lceil \frac{\sqrt{n}}{\delta} \right\rceil^n$ kappaletta δ-halkaisijaisia n-välejä [3]. Koska

$$(\frac{\sqrt{n}}{\delta} + 1)^n \delta^n = (\sqrt{n} + \delta)^n \longrightarrow n^{\frac{n}{2}} < \infty,$$

lauseen 3.4 ja monotonisuuden nojalla rajoitettujen joukkojen mitat ovat äärellisiä.

Näytetään sitten, että $\mathcal{H}^n$ täyttää Radon-mitan arviointiehdot. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $\mathcal{H}^n(A) < \infty$, lause 3.6 antaa suljetun $F \subset A$, jolle $\mathcal{H}^n(F) > \mathcal{H}^n(A) - \varepsilon$. Asettamalla kaikille $i = 1, 2, 3, \ldots$ $K_i = B(0, i) \cap F$ saadaan kompaktit joukot K_i. Koska joukot $K_1, K_2, K_3, \ldots$ ovat $\mathcal{H}^n$-mitallisia,

$$\lim_{i \to \infty} \mathcal{H}^n(K_i) = \mathcal{H}^n(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) = \mathcal{H}^n(F),$$

ja siten jollakin K_i pätee $\mathcal{H}^n(K_i) > \mathcal{H}^n(A) - \varepsilon$. Yhtälö

$$\mathcal{H}^n(A) = \sup \{\mathcal{H}^n(K) : K \text{ on kompakti ja } K \subset A\}$$

pätee siis kaikille A, joille $\mathcal{H}^n(A) < \infty$.

Jos taas $\mathcal{H}^n(A) = \infty$, voidaan joukko A esittää yhdisteenä äärellismittaisista joukoista A_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$,

$$A_k = A \cup B(0, k).$$

Joukot $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ ovat Borel-joukkoina $\mathcal{H}^n$-mitallisia ja siten

$$\lim_{k \to \infty} \mathcal{H}^n(A_k) = \mathcal{H}^n(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mathcal{H}^n(A) = \infty.$$

---

[3] Merkinnällä $\lceil x \rceil$, $x \in \mathbb{R}$ tarkoitetaan lähintä x:ää suurempaa kokonaislukua:

$$\lceil x \rceil = \min \{k : k \in \mathbb{Z} \text{ ja } x \leq k\}$$

Siten kaikille $M > 0$ on $M < \mathcal{H}^n(A_k) < \infty$ jollakin k, ja soveltamalla lausetta 3.6 joukkoon A_k saadaan kompakti $K \subset A$, jolle $\mathcal{H}^n(K) > M$. Yhtälö

$$\mathcal{H}^n(A) = \sup\{\mathcal{H}^n(K) : K \text{ on kompakti ja } K \subset A\}$$

pätee siis kaikille avoimille $A \subset \mathbb{R}^n$.

Olkoon sitten $A \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen joukko, jolle $\mathcal{H}^n(A) < \infty$, ja olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\mathcal{H}^n$ on Borel-säännöllinen, on olemassa Borel-joukko B siten, että $A \subset B$ ja $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}^n(B)$. Asettamalla $V_k = B(0,k), k = 1,2,3,\ldots$ saadaan avoimet joukot, joille pätee $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ ja $\mathcal{H}^n(V_k) < \infty$ kaikilla k. Lauseen 3.6 nojalla on olemassa avoin joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $B \subset V$ ja $\mathcal{H}^n(V) \leq \mathcal{H}^n(B) + \varepsilon$. Siis yhtälö

$$\mathcal{H}^n(A) = \inf\{\mathcal{H}^n(U) : U \text{ on avoin ja } A \subset U\}$$

pätee ja lause on todistettu. □

Lause 3.8. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$\mathcal{H}^n(A) \leq 2^n \mathcal{L}(n)^{-1} \mathcal{L}^n(A),$$

missä $\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}^n(B(0,1))$.

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $I_1, I_2, I_3, \ldots$ kokoelma avoimia n-välejä, jotka peittävät A:n, ja joille

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_i) < \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$

Vitalin peitelauseesta 2.9 saadaan kullekin n-välille I_i kokoelma erillisiä palloja $\{B_{i,j} : j = 1,2,3,\ldots\}$, $B_{i,j} \subset I_i$, joille $\operatorname{diam}(B_{i,j}) < \delta$ ja

$$\mathcal{H}^n(I_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i,j}) = 0.$$

Lauseen 3.4 nojalla kaikille $\delta > 0$ pätee myös

$$\mathcal{H}^n_\delta(I_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i,j}) = 0.$$

Koska $\mathcal{L}^n$ on Borel-mitta ja pallot $B_{i,j}$ ovat erillisiä, on

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{i,j}) = \mathcal{L}^n(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i,j}) \leq \mathcal{L}^n(I_i).$$

Koska $\mathcal{H}^n_\delta$ on ulkomitta, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^n_\delta(I_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n_\delta(B_{i,j}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^n_\delta(I_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i,j}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(B_{i,j})^n \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^n \mathcal{L}^n(B_{i,j})}{\mathcal{L}(n)} \\
&\leq \frac{2^n}{\mathcal{L}(n)} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_i) \\
&< \frac{2^n}{\mathcal{L}(n)} (\mathcal{L}^n(A) + \varepsilon),
\end{aligned}$$

josta väite seuraa taas kun $\varepsilon \to 0$.

□

Huomautus 3.9. Itse asiassa pätee

$$\mathcal{H}^n(A) = 2^n \mathcal{L}(n)^{-1} \mathcal{L}^n(A),$$

mutta tämän todistus on paljon mutkikkaampi. Jos Hausdorff-mitan tarkastelussa voitaisiin rajoittua palloihin, tulos saataisiin helposti yhtälöstä

$$\operatorname{diam}(B)^n = \frac{2^n \mathcal{L}^n(B)}{\mathcal{L}(n)}.$$

Tämä ei kuitenkaan käy päinsä: kulmikkaan joukon peittäminen voi vaatia halkaisijaltaan joukkoa itseään paljon suuremman pallon. Esimerkiksi $\mathbb{R}^2$:n tasasivuisen kolmion halkaisija on yhtä kuin sen sivun pituus. Pienin pallo, jolla kolmion voi peittää on kuitenkin halkaisijaltaan kolmioon verrattuna $\frac{2}{\sqrt{3}}$-kertainen.

Yhtälön todistus esitetään lähteessä [4, Thm 1.12] ns. isodiametrisen epäyhtälön avulla.

3.3. **Hausdorff-dimensio.** Hausdorff-mittojen eräs ominaisuus on se, että mielivaltaisen joukon $A \subset X$ mitta $\mathcal{H}^s(A)$ on positiivinen ja äärellinen korkeintaan yhdellä s. Tätä rajapistettä s_0 suuremmilla s on $\mathcal{H}^s(A) = 0$ ja kun $0 \leq s < s_0$, pätee $\mathcal{H}^s(A) = \infty$. Itse rajapisteessä s_0 kaikki arvot $[0, \infty]$ ovat mahdollisia.

Lemma 3.10. *Olkoon X metrinen metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin kaikilla s pätee*

1. *Jos $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin $\mathcal{H}^t(A) = 0$ kun $t > s$.*
2. *Jos $\mathcal{H}^s(A) > 0$, niin $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ kun $t < s$.*

Todistus. Kohta 1: Olkoon $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ ja olkoon $t > s$. Olkoon $\delta > 0$ ja olkoon $\{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$ sellainen joukon A δ-peite, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^t \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s \mathrm{diam}(E_i)^{t-s} \\
&\leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s \\
&\leq \delta^{t-s}(\mathcal{H}^s_\delta(A) + 1).
\end{aligned}$$

Koska tämä pätee kaikille $\delta > 0$, ja lisäksi $t - s > 0$ sekä

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1 < \infty,$$

pätee $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

Kohta 2 on yhtäpitävä kohdan 1 kanssa (kontrapositio).

□

Määritelmä 3.11. Joukon $A \subset X$ *Hausdorff-dimensio* on luku

$$\begin{aligned}
\dim_H(A) &= \sup\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(A) = \infty\} \\
&= \sup\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(A) > 0\} \\
&= \inf\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(A) = 0\} \\
&= \inf\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(A) < \infty\}.
\end{aligned}$$

Hausdorff-dimensio perii monotonisuuden Hausdorff-mitoilta $\mathcal{H}^s$: jos $A \subset B$ ja $s < \dim_H(A)$, niin $\mathcal{H}^s(B) \geq \mathcal{H}^s(A) = \infty$, joten $\dim_H(B) \geq s$. Sileille k-ulotteisille $\mathbb{R}^n$:n pinnoille Hausdorff- dimensio on k ja $\mathbb{R}^n$:n osajoukoille A on $\dim_H(A) \leq n$.

Esimerkki 3.12. Esimerkissä 3.5 näytettiin, että Cantorin $\frac{1}{3}$-joukolle $C_{\frac{1}{3}}$ pätee $\mathcal{H}^s(C_{\frac{1}{3}}) = 1$ kun $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. Tästä tiedetään, että $\dim_H(C_{\frac{1}{3}}) = \frac{\log 2}{\log 3}$. Dimension laskemiseen riittää kuitenkin osoittaa pelkästään $0 < \mathcal{H}^s(C_{\frac{1}{3}}) < \infty$. Tämä on paljon helpompaa kuin mitan tarkka laskeminen.

4. Rademacherin lause

Määritelmä 4.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^m$. Kuvaus $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on *Lipschitz-kuvaus*, jos jollakin vakiolla $L < \infty$

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

kaikilla $x, y \in A$. Pienintä tällaista vakiota sanotaan f:n *Lipschitz-vakioksi.*

Esitetään seuraavaksi pieni aputulos, jota tarvitaan Rademacherin lauseen (lause 4.5) todistuksessa. Esitellään ensin joitakin merkintöjä.

Määritelmä 4.2. Merkinnällä $\partial_e f(x)$ tarkoitetaan vektorin e suuntaista funktion f osittaisderivaattaa pisteessä x. Koordinaattiakseleiden suuntaisia yksikkövektoreita merkitään e_i:llä:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\cdots \\ e_m &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Joukko $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on origokeskisen yksikköpallon pinta: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$

Kuvauksen $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, *gradienttia pisteessä* x merkitään symbolilla $\nabla f(x)$ ja se määritellään asettamalla

$$\nabla f(x) = (\partial_{e_1} f(x), \partial_{e_2} f(x), \partial_{e_3} f(x), \ldots, \partial_{e_m} f(x))$$

Määritelmä 4.3. Olkoon $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ kuvaus. Kuvauksen φ *kantaja* on joukko

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^m : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Kuvausluokka $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ on kaikkien niiden kompaktikantajaisten kuvausten $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ joukko, joilla on kaikkien kertalukujen derivaatat.

Lemman todistuksessa käytetään hyväksi sitä tietoa, että Lipschitz-kuvaukset $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ovat rajoitetusti heilahtelevina $\mathcal{L}^1$-melkein kaikkialla differentioituvia (ks. [2, Thm 17.17]). Tätä tietoa hyödynnetään myös Rademacherin lauseen todistuksessa.

Lemma 4.4. *Olkoon $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-kuvaus ja olkoon e m-ulotteinen yksikkövektori, $e \in \mathbb{R}^m$, $\|e\| = 1$. Jos osittaisderivaatta $\partial_e f(x)$ on olemassa melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^m$, niin*

$$\partial_e f(x) = (e|\nabla f(x))$$

melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^m$.

Todistus. Olkoon $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Kaikille $h > 0$ saadaan muuttujanvaihdolla

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x + he) - f(x)}{h} \varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(x) - \varphi(x - he)}{h} f(x)\, dx.$$

Koska f on Lipschitz-kuvaus, pätee kaikilla $h > 0$

$$\left\| \frac{f(x+he) - f(x)}{h} \right\| \leq L,$$

missä L on f:n Lipschitz-vakio. Toisaalta on olemassa $M > 0$ siten, että

$$\left\| \frac{\varphi(x) - \varphi(x-he)}{h} \right\| \leq M$$

kaikilla $h > 0$, sillä kuvaus φ' on rajoitettu.

Koska lisäksi f on melkein kaikkialla e:n suuntaan derivoituva, Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta voidaan soveltaa yhtälön molempiin puoliin, jolloin saadaan

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial_e f(x)\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^m} \partial_e \varphi(x) f(x)dx.$$

Jakamalla yhtälön oikean puolen integraali ja osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^m} \partial_e \varphi(x) f(x)\, dx &= -\int_{\mathbb{R}^m} (e|\nabla\varphi(x)) f(x)\, dx \\
&= -\sum_{j=1}^{m} (e|e_j) \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\partial_j \varphi(x)\, dx \\
&= \sum_{j=1}^{m} (e|e_j) \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\partial_j f(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(e|\nabla f(x))\, dx,
\end{aligned}$$

Siten kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ pätee

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial_e f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(e|\nabla f(x))\, dx$$

Väite seuraa tästä Rieszin esityslauseen yksikäsitteisyyden kautta (ks. [1, Thm 1.16]

□

Lause 4.5. *(Rademacherin lause) Lipschitz-kuvaus $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on differentioituva $\mathcal{L}^m$ -melkein kaikkialla $\mathbb{R}^m$:ssä.*

Todistus. Kuvaus f on differentioituva kussakin pisteessä täsmälleen silloin kuin sen jokainen komponenttifunktio on differentioituva ko. pisteessä. Niinpä riittää tarkastella tapausta $n = 1$. Lipschitz-kuvaukset $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ovat $\mathcal{L}^1$-melkein kaikkialla differentitoituvia ([2, Thm 17.17]), joten tapaus $m = 1$ on selvä.

Merkitään $\partial_e f(x)$:llä funktion f derivaattaa pisteessä x suuntaan $e \in S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = 1\}$ silloin kun derivaatta on olemassa. Jokaisella e merkitään B_e:llä niiden pisteiden $x \in \mathbb{R}^m$ muodostamaa joukkoa, joissa f ei ole e:n suuntaan derivoituva. Koska f on $\mathcal{L}^m$- mitallinen, on myös B_e $\mathcal{L}^m$-mitallinen. Tarkastelemalla kussakin pisteessä $x \in \mathbb{R}^m$ kuvausta f yhteen suuntaan e kerrallaan[4] voidaan soveltaa tapausta $m = 1$. Näin saadaan kaikilla $x \in \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{L}^1(B_e \cap \{x + te : t \in \mathbb{R}\}) = 0.$$

Tästä seuraa Fubinin lauseella $\mathcal{L}^m(B_e) = 0$, joten kaikilla $e \in S^{m-1}$ kuvaus f on derivoituva e:n suuntaan $\mathcal{L}^m$-melkein kaikkialla $\mathbb{R}^m$:ssä.

Olkoon $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ joukon S^{m-1} tiheä osa. Merkitään jokaisella $i = 1, 2, 3, \ldots$ A_i:lla joukkoa, joka koostuu niistä pisteistä $x \in \mathbb{R}^m$, joille $\nabla f(x)$ sekä $\partial_{v_i} f(x)$ ovat määritelty ja $\partial_{v_i} f(x) = (v_i|\nabla f(x))$. Merkitään $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Lemman 4.4 nojalla $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus A) = 0$.

Nyt lauseen todistamiseksi riittää osoittaa, että f on differentioituva joukossa A. Merkitään kaikilla $x \in A$, $e \in S^{m-1}$ ja $h > 0$

$$Q(x, e, h) = \frac{f(x + he) - f(x)}{h} - (e|\nabla f(x)).$$

Riittää osoittaa, että $Q(x, e, h)$ suppenee kohti nollaa kun $h \to 0$ kaikilla $x \in A$ ja että suppeneminen on tasaista e:n suhteen. Olkoon L f:n Lipschitz-vakio. Huomataan, että kaikille $e, e' \in S^{m-1}$ pätee

$$|Q(x, e, h) - Q(x, e', h)| \leq (m + 1)L\,|e - e'|\,.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Joukon S^{m-1} kompaktiuden ja v_i:den valinnan nojalla on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $e \in S^{m-1}$ voidaan valita $i \leq N$, jolle $|e - v_i| < \varepsilon/(2(m + 1)L)$. Joukon A määritelmän mukaan $\lim_{h \to 0} Q(x, v_i, h) = 0$ kaikille i, joten on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|Q(x, v_i, h)| < \varepsilon/2$ kun $h < \delta$ ja $i \leq N$. Niinpä kaikille $e \in S^{m-1}$ ja $h < \delta$ saadaan sopivalla $i \in \{1, \ldots, N\}$

$$\begin{aligned} |Q(x, e, h)| &\leq |Q(x, e, h) - Q(x, v_i, h)| + |Q(x, v_i, h)| \\ &< (m + 1)L\,|e - v_i| + \varepsilon/2 \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lause 4.6. *Olkoot $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz kuvaus, $0 \leq s \leq m$ ja $A \subset \mathbb{R}^m$. Tällöin*

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A),$$

[4]Kuvausten $g(t) = x + te$ ja $f \circ g$ avulla

missä L on f:n Lipschitz-vakio. Erityisesti

$$\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A)$$

Todistus. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja $\delta > 0$. Hausdorffin mitan määritelmästä saadaan joukon A δ-peite $U_1, U_2, \ldots$, jolle

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(U_i)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + L^{-s}\varepsilon.$$

Tällöin $f(A) \subset \bigcup_i f(U_i)$ ja $\mathrm{diam} f(U_i) \leq L\delta$ kaikilla i, joten joukot $f(U_1), f(U_2), \ldots$ muodostavat $f(A)$:n $L\delta$-peitteen. Taas Hausdorff-mitan määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{L\delta}(f(A)) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} f(U_i))^s \\
&\leq L^s \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} U_i)^s \\
&\leq L^s(\mathcal{H}^s_\delta(A) + L^{-s}\varepsilon) \\
&= L^s \mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Väite seuraa tästä kun $\delta \to 0$ epäyhtälön molemmin puolin, sillä kiinteällä L pätee $\mathcal{H}^s(f(A)) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(f(A)) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_{L\delta}(f(A))$. □

Esimerkki 4.7. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^m$ n-ulotteinen taso, $0 < n < m$. Projektiokuvaus $p_V : \mathbb{R}^m \longrightarrow V$ on tarkalleen 1-Lipschitz-kuvaus: se ei kasvata etäisyyksiä, mutta säilyttää projektiotason suuntaisten vektoreiden pituuden. Lauseen 4.6 nojalla minkään joukon $A \subset \mathbb{R}^m$ Hausdorff-mitta ja -dimensio eivät kasva projektiossa. Joukon surkastuminen sen sijaan on toki mahdollista: kun A on V:n ortogonaalikomplementti, $\mathcal{H}^{m-n}(A) = \infty$, mutta $\mathcal{H}^{m-n}(p_V(A)) = 0$. Dimensio putoaa tässä tapauksessa $(m - n)$:stä nollaan.

Esimerkki 4.8. *Jordan-käyrä* on jatkuvan injektion $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ kuvajoukko. Tässä $[a, b] \subset \mathbb{R}$ on siis jokin suljettu väli. Käyrän $\Gamma = \varphi([a, b])$ pituus $\mathcal{L}(\Gamma)$ määritellään asettamalla

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \sup \sum_{i=1}^{k} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|,$$

missä supremum otetaan yli kaikkien välin $[a, b]$ jakojen $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$.

Osoitetaan lauseen 4.6 avulla, että Jordan-käyrälle Γ pätee $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \mathcal{L}(\Gamma)$. Olkoon $\Gamma = \varphi([a, b])$, $u = \varphi(a)$ ja $v = \varphi(b)$. Olkoon $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ projektio suoralle, joka kulkee käyrän Γ päätepisteiden u ja v kautta. Projektio on 1-Lipschitz-kuvaus ja $[u, v] \subset p(\Gamma)$, joten

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq \mathcal{H}^1(p(\Gamma)) \geq \mathcal{H}^1([u, v]) = \mathcal{L}^1([u, v]) = |u - v|.$$

Olkoon $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ välin $[a, b]$ jako. Soveltamalla edellistä havaintoa käyrän Γ osiin saadaan

$$\sum_{i=1}^{k} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{k} \mathcal{H}^1(\varphi([t_{i-1}, t_i])) = \mathcal{H}^1(\Gamma),$$

sillä käyrän osat $\varphi([t_i, t_{i-1}])$ leikkaavat toisiaan vain päätepisteissä. Käyrän pituuden määritelmästä saadaan $\mathcal{L}(\Gamma) \leq \mathcal{H}^1(\Gamma)$.

Oletetaan yhtälön toista suuntaa varten, että $\mathcal{L}(\Gamma) < \infty$. Olkoon φ käyrän Γ *parametrisointi käyrän pituuden suhteen* eli jatkuva bijektio $[0, \mathcal{L}(\Gamma)] \longrightarrow \Gamma$ siten, että kaikille $t \in [0, \mathcal{L}(\Gamma)]$ pätee $\mathcal{L}(\varphi([0, t])) = t$. Äärellispituinen käyrä voidaan aina parametrisoida pituutensa suhteen.

Käyrän parametrisointi φ on 1-Lipschitz-kuvaus, sillä kaikille $s, t \in [0, \mathcal{L}(\Gamma)]$, $s < t$, pätee

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq \mathcal{L}(\varphi([s, t])) = \mathcal{L}(\varphi([0, t])) - \mathcal{L}(\varphi([0, s])) = t - s.$$

Lause 4.6 antaa siis toisenkin suunnan:

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \leq \mathcal{H}^1([0, \mathcal{L}(\Gamma)]) = \mathcal{L}(\Gamma).$$

Seuraavassa lauseessa merkitään $Df(x)$:llä f:n derivaattaa pisteessä $x \in \mathbb{R}^m$ ja $Df(x)(\mathbb{R}^m)$:llä vastaavasti tämän derivaatan kuvajoukkoa. Lause sanoo, että Lipschitz-kuvaukselle $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ niiden pisteiden, joissa määritelty derivaatta lineaarikuvaksena pienentää dimensiota, kuvajoukko on m-ulotteisen Hausdorff-mitan mielessä nollamittainen. Erityisesti siis tämän joukon Hausdorff-dimensio on korkeintaan m. Lineaarialgebran dimensiolauseen mukaan pisteeseen x muodostettu derivaatta säilyttää lineaarikuvauksena lähtöjoukon $\mathbb{R}^m$ dimension täsmälleen silloin kun se on injektio – Hausdorff-dimensio on hypertasojen tapauksessa yhtenevä lineaarialgebrallisen dimension kanssa.

Tapaus $n, m = 1$ on helppo ymmärtää: Lipschitz-kuvauksen melkein jokainen kuvapiste $f(x)$ on sellainen, että sen alkukuvapisteissä x derivaatta on nollasta eroava. Moniulotteisessa tapauksessa $(n > 1)$ derivaatta voi olla nollasta eroava ja silti pienentää dimensiota vaikkapa kuvaamalla nollaan vain yhden yksikkövektorin v ja sen vastavektorin $-v$ eli "litistämällä" yhden suunnan.

Lause 4.9. *Olkoon $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-kuvaus. Tällöin*

$$\mathcal{H}^m(\{f(x) : \dim_H(Df(x)(\mathbb{R}^m)) < m\}) = 0.$$

Todistus. Olkoon $0 < R < \infty$ ja

$$A = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < R \, , \, \dim_H(Df(x)(\mathbb{R}^m)) < m\}.$$

Olkoot $x \in A$, $r > 0$ ja L kuvauksen f Lipschitz-vakio. Tällöin f:n Lipschitz-ominaisuuden nojalla

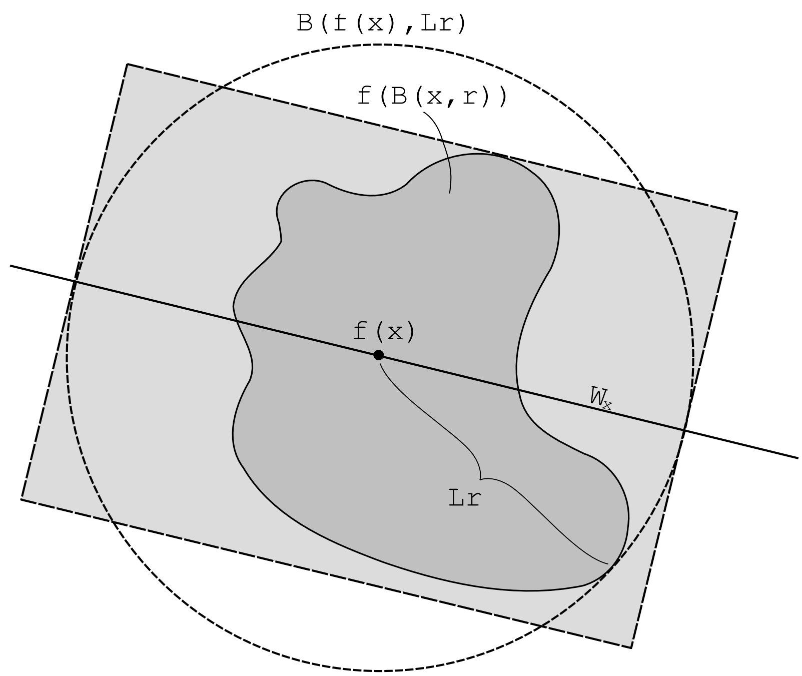
$$f(B(x, r)) \subset B(f(x), Lr).$$

Merkitään $W_x = \{Df(x)y + f(x) : y \in \mathbb{R}^m\}$. Koska $x \in A$, on $\dim W_x \leq m-1$. Nyt derivaatan määritelmää soveltaen kaikille $y \in B(x, r)$ pätee

$$\|f(y) - (Df(x)(y-x) + f(x))\| \leq r\delta(y-x),$$

missä $\delta(y-x) \to 0$ kun $y \to x$. Siten kaikille $\varepsilon > 0$ pätee pienillä $r > 0$

$$f(B(x,r)) \subset B(f(x)), Lr) \cap \{y : d(y, W_x) \leq \varepsilon r\}.$$



KUVA 3. Esimerkki tilanteesta $n = 2$

Nyt $f(B(x,r))$:n mittaa voidaan arvoida n-ulotteisen sylinterin mitan avulla. Jollakin vain m:stä ja n:stä riippuvalla vakiolla c pätee

$$\mathcal{H}^m_\infty(f(B(x,r)) \leq c\varepsilon r(Lr)^{m-1}.$$

Vitalin peitelauseen 2.9 avulla saadaan erilliset pallot $B_i = B(x_i, r_i)$, joille

$$\mathcal{L}^m(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$$

ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(B_i) < \mathcal{L}^m(A) + \varepsilon.$$

Lauseen 4.6 nojalla $\mathcal{H}^m(f(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) = 0$. Koska lisäksi

$$f(A) \subset (\bigcup_{i=1}^{\infty} f(B_i) \cup f(A \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)),$$

saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\infty}^m(f(A)) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\infty}^m(f(B_i)) \\
&\leq cL^{m-1}\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} (r_i)^m \\
&\leq cL^{m-1}\mathcal{L}(m)^{-1}\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(B_i) \\
&\leq cL^{m-1}\mathcal{L}(m)^{-1}\varepsilon(\mathcal{L}^m(A) + \varepsilon),
\end{aligned}$$

missä $\mathcal{L}(m)$ on se vakio, jolle $\mathcal{L}^m(B_i) = \mathcal{L}(m)(r_i)^m$. Lause seuraa tästä kun $\varepsilon \to 0$ soveltamalla lemmaa 3.4.

□

Seuraavassa lauseessa esiintyvä yläintegraali Lebesguen mitan $\mathcal{L}^m$ suhteen määritellään asettamalla

$$\text{ylä} \int_A f(x) d\mathcal{L}^m x = \inf \left\{ \int_A g(x) d\mathcal{L}^m x \ : \ f \leq g \text{ ja } g \text{ on } \mathcal{L}^m\text{-mitallinen} \right\},$$

kun f on (ei-$\mathcal{L}^m$-mitallinen) funktio, $f : X \longrightarrow [0, \infty]$, $A \subset X \subset \mathbb{R}^m$.

Lause 4.10. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz-kuvaus. Tällöin kaikille $s \in [m, n]$ pätee*

$$\textit{ylä} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{s-m}(A \cap \{x : f(x) = y\}) d\mathcal{L}^m y \leq \alpha(m) L(f)^m \mathcal{H}^s(A),$$

missä L on kuvauksen f Lipschitz-vakio ja $\alpha(m)$ on m:stä riippuva vakio.

Todistus. Jokaisella $k = 1, 2, 3, \ldots$ on olemassa A:n $1/k$-peite $E_{k,1}, E_{k,2}, E_{k,3}, \ldots$, joka on $1/k$-optimaalinen Hausdorffin $1/k$-mitan suhteen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_{k,i}) \leq \mathcal{H}_{1/k}^s(A) + 1/k.$$

Määritellään kuvapuolelle vastinjoukot $F_{k,i}$ asettamalla

$$F_{k,i} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : E_{k,i} \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset \right\}.$$

Olkoon L f:n Lipschitz-vakio. Koska $\operatorname{diam}(F_{k,i}) \leq L\operatorname{diam} E_{k,i}$, pätee

$$\mathcal{L}^m(F_{k,i}) \leq \mathcal{L}(m)(L\operatorname{diam}(E_{k,i}))^m.$$

Fatoun lemmaa soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
& \text{ylä}\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{s-m}(A \cap \{x : f(x) = y\}) d\mathcal{L}^m y \\
= & \text{ylä}\int_{\mathbb{R}^m} \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^{s-m}_{1/k}(A \cap \{x : f(x) = y\}) d\mathcal{L}^m y \\
\leq & \int_{\mathbb{R}^m} \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_{k,i} \cap \{x : f(x) = y\})^{s-m} d\mathcal{L}^m y \\
\leq & \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{F_{k,i}} \operatorname{diam}(E_{k,i} \cap \{x : f(x) = y\})^{s-m} d\mathcal{L}^m y \\
\leq & \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_{k,i} \cap \{x : f(x) = y\})^{s-m} \mathcal{L}^m(F_{k,i}) \\
\leq & \mathcal{L}(m) L^m \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_{k,i})^s \\
\leq & \mathcal{L}(m) L^m \liminf_{k\to\infty} (\mathcal{H}^s_{1/k}(A) + 1/k) \\
\leq & \mathcal{L}(m) L^m \mathcal{H}^s(A).
\end{aligned}$$

$\square$

5. Stepanovin lause

Rademacherin lausetta voidaan hieman yleistää. Kuvauksen ei tarvitse Lipschitz-kuvaus, jos rajoitetaan tarkastelu vain niihin pisteisiin, joissa sillä on lokaali Lipschitz-ominaisuus. Se riittää differentioituvuuteen.

Määritelmä 5.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^m$ ja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ kuvaus. Määritellään kuvauksen f *lokaali Lipschitz-vakio pisteessä* $x \in A$ asettamalla

$$\mathrm{Lip}(f,x) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}.$$

Lause 5.2. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ja $S(f)$ niiden pisteiden $x \in A$ joukko, joissa f on lokaalisti Lipschitz-kuvaus, ts.*

$$S(f) = \{x \in A : \mathrm{Lip}(f,x) < \infty\}.$$

Tällöin kuvaus f on differentioituva $\mathcal{L}^n$ -melkein kaikkialla joukossa $S(f)$.

Todistus. Olkoot $B_1, B_2, B_3, \ldots$ kaikki ne avoimet pallot, joiden keskipiste ja säde ovat rationaalisia, ja joissa f on rajoitettu. Jokaisessa pallossa B_j kuvausta f voidaan approksimoida ylhäältä ja alhaalta j-Lipschitz -kuvauksilla u, v. Määritellään kuvaukset u_j ja v_j näiden Lipschitz-kuvausten pisteittäisinä ylä- ja alarajoina:

$$u_j(x) = \inf \{u(x) : u \geq f \text{ ja u on j-Lipschitz}\},$$
$$v_j(x) = \sup \{v(x) : v \leq f \text{ ja v on j-Lipschitz}\}.$$

Tällöin u_j ja v_j ovat myös j-Lipschitz -kuvauksia, joten kun merkitään

$$N = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in B_j : u_j \text{ tai } v_j \text{ ei differentioituva } x\text{:ssä}\},$$

saadaan Rademacherin lauseen nojalla $\mathcal{L}^n(N) = 0$.

Olkoot $x \in S(f) \setminus N$ ja $L = \mathrm{Lip}(f,x) < \infty$. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että

$$|f(y) - f(x)| \leq L\,|y - x| \text{ kaikilla } y \in B(x,r).$$

Huomataan, että on olemassa äärettömän monta palloa B_j siten, että

$$B(x, r/2) \subset B_j \subset B(x,r),$$

ja niinpä voidaan valita indeksi $j \geq L$, jolla ylläoleva pätee. Tällöin

$$|f(y) - f(x)| \leq j\,|y - x| \text{ kaikilla } y \in B_j.$$

Tästä seuraa u_j:n ja v_j:n määritelmän nojalla $f(x) = u_j(x) = v_j(x)$. Koska u_j ja v_j ovat differentioituvia x:ssä ja $v_j \leq f \leq u_j$ kaikkialla pallossa B_j, on myös f differentioituva x:ssä.

□

Viitteet

[1] Pertti Mattila: Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Cambridge University Press (1995)
[2] E. Hewitt & K. Stromberg: Real and Abstract Analysis. Springer-Verlag (1965)
[3] Kenneth Falconer: Fractal Geometry. John Wiley & Sons Ltd (1990)
[4] Kenneth Falconer: The Geometry of Fractal Sets. Cambridge University Press (1985)