

27/2000

## MATEMATIIKKA PÄIVÄKODISSA

Varhaiskasvattajien käsityksiä matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta

Heli Oikkonen

Kasvatustieteen

pro gradu -tutkielma

Kevät 2000

Varhaiskasvatuksen laitos

Jyväskylän yliopisto



Kasvatustieteiden tiedekunnalle

Määrättyinä tarkastajina toteamme Heli Oikosen pro gradu -tutkielmaksi tarkoittamasta työstä "Matematiikkaa päiväkodissa. Varhaiskasvattajien käsityksiä matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta" seuraavaa:

Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, miten päivähoiton henkilöstö tulkitsee matematiikan tulemisen päivähoiton ja erityisesti esiopetuksen osa-alueeksi. Matemaattisten tietojen ja taitojen kehittäminen voidaan aloittaa jo hyvin varhain. Samanaikaisesti matematiikan opetukseen päivähoitossa saatetaan liittää voimakkaita kannanottoja puolesta ja vastaan. Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää haastattelututkimuksen keinoin, millaisia nämä uskomukset ja kokemukset ovat sellaisessa päiväkodissa, jossa toteutetaan matematiikkaprojektia. Tutkimuksen aihe on hyvin ajankohtainen ja tärkeä, koska vastaavien projektien onnistuminen edellyttää henkilöstön kouluttamista. Tämä tutkimus antaa lisätietoa sisältöalueista, joihin koulutuksessa tulisi kiinnittää huomiota.

Teoriataustassa esitellään varsin monipuolisesti matematiikkaan liittyviä kysymyksiä. Luku 2 (Käsitykset ja uskomukset) olisi ehkä voitu liittää yhteen luvun 3 kanssa (Käsityksiä matematiikasta). Tutkija on panostanut ehkä hieman liikaa toisiaan lähellä olevien käsitteiden määrittelyyn (käsitykset, uskomukset, asenteet, näkemykset, mielikuvat) ja niiden syntyyn liittyviin kysymyksiin. Toisaalta myös empiirisessä osassa tarkastellaan näitä kysymyksiä. Tästä seuraa, että tutkimuksen kiinnostavin kysymys eli matematiikan opettaminen päiväkodissa (luku 5 Matematiikan esiopetus) jää melko yleiselle tasolle. Samalla tavalle se jää hieman syrjään myös löydösosassa. Tutkija on kuitenkin perehtynyt aiheeseensa monipuolisesti ja hieman toisin jäsentämällä esitys olisi ollut nykyistä vakuuttavampi.

Tutkimusaineistona oli yhden päiväkodin henkilökunnan haastattelut. Yhteensä haastateltavia oli kahdeksan, jolta saatiin litteroitua aineistoa 59 sivua (käsinkirjoitettua 31 sivua, koneella kirjoitettua 28 sivua), kun aiheeseen liittymätön jutustelu oli jätetty pois. Lisäksi aineistona oli henkilökunnan kirjoittamat aiheesta "Minä ja matematiikka", yhteensä 14 sivua. Aineiston määrä on hieman niukka tutkimuksen tavoitteeseen nähden, mikä vähentää myös tutkimuksen uskottavuutta. Metodologisesti tutkimus pyrki olemaan fenomenografinen. Tutkimuksen toteutus ja aineiston analysointi kuvataan tarkasti ja myös vakuuttavasti. Sen sijaan uskottavuuden pohdiskelu (luku 8.4) olisi voinut olla perusteellisempi.

Löydökset ovat kiinnostavat ja kirjallisuuteen verrantaminen on tehty hyvin. Löydösosuus antaa kuvan, että tutkija on saanut paljon irti aineistostaan. Hän on myös kiinnostavasti tiivistänyt näkökulmiensa ydinasiat kuvioiksi ja taulukoiksi. Löydökset tuntuvat kuitenkin lähinnä haastateltavien teoreettisen ajatusten jäsennykseltä, jolloin elävän elämän ja omien matematiikan käytännön opettamisen kokemukset ja kuvaukset eivät ole läsnä tässä esityksessä. Tämä selittynee aineistolla eli haastattelu (ks. liite 2) on ehkä ollut enemmän abstraktilla tasolla kuin arkitoiminnan kuvauksissa.

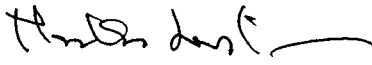
Pohdintaosuus on monipuolinen. Siinä korostuu jossain määrin liikaa kouluikään liittyvä kotimainen kirjallisuus. Tutkija olisi voinut pohtia löydöksiä enemmän varhaiskasvatuksen ja esiopetuksen näkökulmasta. Samoin tutkijan omaa roolia tutkimuksessa olisi voitu tarkastella enemmän.

Kokonaisuutena tutkielma osoittaa, että tutkija on perehtynyt aiheeseensa ja valittuun tutkimusmetodologiaan monipuolisesti. Tutkimuksen painopiste olisi voinut olla enemmän matematiikan opetuksessa varhaiskasvatuksen kontekstissa. Esitetystä kritiikistä huolimatta tutkielma täyttää hyvin pro gradu -tutkielmalle asetut vaatimukset. Valittu tutkimustehtävä on ollut haastava, mutta tutkija on

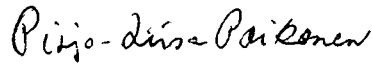
Postiosoite:	Puhelin:
PL 35	*(014) 260 1211
40351 Jyväskylä	Toimisto:
Käyntiosoite:	(014) 260 1760
Yliopistonkatu 9	(014) 260 1762
	(014) 260 1735
	Telefax:
	(014) 260 1761

tuonut tutkimuksellaan esille useita kiinnostavia näkökulmia, joita matematiikan opetuksen kehittämisessä on aiheellista huomioida. Esitämme tutkielman hyväksymistä arvolauseella *cum laude approbatur*.

Jyväskylässä 30.6.2000



Markku Leskinen  
ma professori



Pirjo-Liisa Poikonen  
assistentti

Oikkonen Heli. Matematiikka päiväkodissa. Varhaiskasvattajien käsityksiä matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta. Jyväskylän yliopisto. Varhaiskasvatuksen laitos. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma, kevät 2000. 77 s.

## TIIVISTELMÄ

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää varhaiskasvattajien käsityksiä matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta. Lisäksi tutkittiin, millainen merkitys päiväkodin matematiikkaan liittyvällä koulutuksella oli ollut kasvattajille. Käsitykset ovat erilaisten kokemusten ja koulutuksen kautta muodostuneita uskomuksia ja tietoperustaa.

Tutkimuksen lähestymistapa oli fenomenografinen. Fenomenografia tutkii ihmisten erilaisia tapoja käsittää ympäröivää maailmaa. Tutkimuksessa haastateltiin kahdeksaa Korpilahden päiväkodin työntekijää. He olivat toteuttaneet päiväkodissaan matematiikka-projektin Varhaiskasvatuksen laitoksen opettajan Anna-Maija Erämaa-Lätin johdolla. Projektiin oli kuulunut myös henkilökunnan koulutusta. Siten päiväkodin matematiikka oli heille tuttu asia, mikä saattoi helpottaa aiheen tietoista käsittelyä. Tutkimusmenetelmänä käytettiin haastattelun lisäksi kirjoitustehtäviä. Kasvattajat olivat kirjoittaneet otsikosta Minä ja matematiikka keväällä 1997 ja uudestaan keväällä 1998, jolloin tehtiin myös haastattelut. Analysoinnissa muodostettiin matematiikkaan, oppimiseen, opettamiseen, lapseen ja koulutukseen liittyvät sisältöalueet. Niiden sisällä muodostettiin erilaisista käsityksistä kategorioita, jotka nimettiin.

Käsityksistä matematiikasta voidaan erottaa kaksi eri osaa: haastateltavien kouluaikeisten kokemusten kautta muodostunut käsitys matematiikasta sekä elämäkokemuksen, työn ja koulutuksen kautta muodostunut tämän hetkinen käsitys matematiikasta. Asenne matematiikkaa kohtaan on muuttunut negatiivisesta positiivisemmaksi. Oppimisessa lapsi nähdään aktiivisena toimijana ja matematiikan opetuksessa korostuu konkreettisten materiaalien käyttäminen. Matemaattisten ongelmien ratkaisu ja luovuus saivat haastattelussa vain muutamia mainintoja. Niitä voitaisiin varhaismatematiikassa tuoda enemmän esiin. Matematiikkaprojektin ja siihen liittyvän koulutuksen haastateltavat kokivat myönteisenä ja se laajensi käsitystä matematiikasta. Tärkeää oli, että koko henkilökunta koulutettiin yhtä aikaa ja luennoimisen sijasta koulutettavat saivat itse kokeilla matematiikan välineitä, pelejä ja leikkejä. Tämän tyyppisen koulutuksen tulisi sisältyä jo lastentarhanopettajan koulutukseen. Kenenkään haastateltavan käsitykset eivät asettuneet selkeästi vain yhteen kategoriaan, vaan kuvastivat ilmiön eri ulottuvuuksia. Tutkimustulokset eivät ole yleistettävissä laajemmin, mutta niiden kautta lukija voi pohtia ja arvioida omia käsityksiään ja toimintaansa, sillä kasvattajan käsitykset matematiikasta ja sen oppimisesta muodostavat perustan matematiikan opetukselle, joka osaltaan vaikuttaa lapsen käsityksiin matematiikasta.

Asiasanat: matematiikka, oppimiskäsitys, uskomus, varhaiskasvatus, fenomenografia

## SISÄLLYS

1 JOHDANTO .....	5
2 KÄSITYKSET JA USKOMUKSET .....	7
2.1 Käsitteiden määrittelyä .....	7
2.2 Käsitusten syntyisestä ja muuttamisesta .....	8
3 KÄSITYKSIÄ MATEMATIIKASTA .....	11
4 OPPIMISKÄSITYKSISTÄ JA MATEMATIIKAN OPETTAMISESTA .....	16
4.1 Behavioristinen oppimiskäsitys .....	17
4.2 Konstruktivistinen oppimiskäsitys .....	19
5 MATEMATIIKAN ESIOPETUS .....	22
5.1 Matematiikan esiopetuksen sisällöt ja tavoitteet .....	22
5.2 Matematiikan esiopetuksen lähtökohdat .....	25
6 KÄSITYKSET MATEMATIIKASTA JA OPPIMISESTA OPETUSKÄSITYKSEN PERUSTANA .....	27
7 TUTKIMUSONGELMAT .....	31
8 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS .....	32
8.1 Korpilahden päiväkoti ja matematiikan esiopetuksen projekti .....	33
8.2 Tutkimusmenetelmä .....	34
8.3 Tutkimusaineiston analysointi .....	37
8.4 Tutkimuksen toteutuksen arviointia .....	42
9 PÄIVÄKODIN HENKILÖKUNNAN KÄSITYKSIÄ .....	44
9.1 Kokemukset ja suhtautuminen matematiikkaan .....	44
9.2 Käsitteitä matematiikasta .....	45
9.2.1 Kouluikäinen käsitys matematiikasta .....	45
9.2.2 Filosofinen käsitys matematiikasta .....	48
9.2.3 Käytännön työssä muovautunut käsitys päiväkodin matematiikasta .....	49
9.3 Matematiikan opetuksen tavoitteet .....	51
9.4 Oppimisen määrittelyä .....	52
9.5 Lapset oppijoina .....	53
9.6 Matematiikan opettaminen päiväkodissa .....	54
9.6.1 Aikuisen ja lapsen roolit oppimis-opettamistapahtumassa .....	54
9.6.2 Matematiikan opetuksen toteuttaminen .....	55
9.6.3 Koulun ja päiväkodin matematiikan vertailua .....	59
9.7 Haastateltavien ajatuksia matematiikkaprojektista .....	60
9.7.1 Koulutuksen merkitys .....	60
9.7.2 Matematiikkaprojektin ja koulutuksen arviointia .....	61

10 POHDINTA .....	63
10.1 Näkökulmia käsityksiin matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta ...	63
10.1.1 Käsityksiä matematiikasta ja oppimisesta .....	63
10.1.2 Käsitykset matematiikasta ja oppimisesta opetuksen perustana .....	65
10.2 Tutkimuksen arviointia ja jatkotutkimushaasteita .....	69
LÄHDELUETTELO .....	73
LIITTEET	

## 1 JOHDANTO

Tutkimuksessani selvitän päiväkodin henkilökunnan käsityksiä, uskomuksia ja mielikuvia matematiikasta päiväkodissa. Eräänlainen myytti on, että lapsi menettää lapsuutensa, jos vaikkapa päiväkodissa opetetaan matematiikkaa. Tietoista matematiikan opetusta ei haluta päiväkotiin, vaan se kuuluu kouluun ja kouluikäisille lapsille. Lapsilta itseltään ei ole kysytty, ovatko he kiinnostuneet matematiikasta. (Kinos 1994, 13.) Tämän myytin takana voi olla hyvin perinteinen käsitys matematiikan opiskelemisesta mekaanisten laskujen suorittamisena matematiikan kirjasta. Siksi olisikin pohdittava, mitä matematiikka oikeastaan on ja miten sitä pitäisi opettaa.

Jo pienellä lapsella on paljon matemaattisia kokemuksia määrästä, muodosta ja tilasta. Ne ovat osa sitä maailmaa, johon lapsi koko ajan tutustuu. Lapset ovat kiinnostuneita matematiikasta jo alle kouluikäisinä. Tärkeää olisikin tarttua tuohon kiinnostukseen ja antaa lapsille välineitä ja käsitteitä, joiden avulla sukeltaa matematiikan ihmeelliseen maailmaan. (Malaty 1998, 20-21.) Pienten lasten matematiikan opetusta ovat Suomessa kehittäneet esimerkiksi Hannele Ikäheimo ja George Malaty. Koulun puolella on aloitettu Luma-projekti, jonka tavoitteena on nostaa kansallinen matemaattis-luonnontieteellinen osaaminen kansainväliselle tasolle. Varhaiskasvatus on projektissa mukana epävirallisesti, koska se toimii eri ministeriön alaisuudessa.

Esiopetusta kehitetään koko ajan ja alkuopetuksen kanssa tehdään yhteisiä opetussuunnitelmia. Matematiikka on alkuopetuksessa yksi oppiaine. Esiopetuksessa voidaankin mielestäni tukea lapsen matematiikan opiskelussa tarvittavien perusoppimistaitojen kehittymistä ja myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan sekä yleensä ajattelun kehittymistä. Matematiikan ei tarvitse olla erillinen oppiaine, vaan se on osa lapsen arkipäivää ja tukee maailmankuvan muodostumista. Siksi se on kokonaisvaltaista ympäröivän maailman havainnointia ja kuvan rakentamista siitä.

Matematiikan opetus koulussa on aiheuttanut keskustelua ja se myös herättää vahvoja tunteita ja muistoja kouluajoilta. Matematiikka liitetään helposti kouluun, vaikka sitä tarvitaan koko ajan arkielämässä, ei pelkästään laskutoimituksia, vaan myös matematiikan käsitteitä, loogista ajattelua ja kykyä ratkaista mitä erilaisimpia ongelmia. Itse olen aina pitänyt matematiikasta; se on ollut haaste. Omassa lastentarhanopettajakoulutuksessani ei kuitenkaan ole ollut lasten matematiikan oppimiseen ja matematiikan pedagogiikkaan

liittyvää opintojaksoa. Tutustuessani myöhemmin päiväkodin matematiikkaan huomasin, kuinka jännittävää ja hauskaa se voi olla. Olen myös samaa mieltä kuin eräs tähän tutkimukseen haastattelemani päiväkodin työntekijä: *“et jos mullaki olis alotettu [matematiikan opetus] palikoilla ja tämmösillä, ni ehkä se ois menny perille”*.

Koulun puolella on tutkittu opettajien ja oppilaiden käsityksiä matematiikasta (esim. Lindgren 1995; Hoskonen 1996). Ei ole kuitenkaan tutkittu, miten päiväkodin kasvattajien mielestä matematiikkaa tulisi opettaa lapsille, miten lapset oppivat sitä parhaiten ja mitä matematiikka heidän mielestään on. Thompsonin (1992, 135) mukaan opettajan käsitykset matematiikasta liittyvät käsityksiin matematiikan opettamisesta. Ne myös heijastavat käsityksiä siitä, miten oppilaat oppivat matematiikkaa. Opetusmallien taustalla on aina jokin teoria oppimisesta, vaikka se ei olisikaan selkeä, järjestynyt kokonaisuus. Siten käsitykset matematiikasta vaikuttavat oppimis-opettamistilanteeseen luokassa. Näitä käsityksiä siirrämme edelleen lapsille toimiessamme heidän kanssaan.

Käsitykset määrittelen tässä tutkimuksessa yläkäsitteeksi niille uskomuksille ja tiedoille, mitä kasvattajilla on matematiikasta. Lindgrenin (1997, 7) mukaan uskomuksiin sisältyy asenteita ja affektioita. Siten käsityksiin sisältyy sekä affektiivinen että kognitiivinen puoli.

Tutkimukseni lähestymistapa on fenomenografinen. Fenomenografinen tutkimus pyrkii selvittämään, miten ihmiset kokevat tai ajattelevat laadullisesti eri tavoin jostakin ilmiöstä (Marton 1988, 144). Erilaisten käsitysten selvittämiseksi on annettava ihmisten itse puhua. Tutkimusta varten haastattelin Korpilahden päiväkodin kasvattajia (n=8) ja lisäksi he kirjoittivat ajatuksiaan matematiikasta otsikolla *Minä ja matematiikka*. Varhaiskasvatuksen laitoksen opettaja Anna-Maija Erämaa-Lätin johdolla päiväkodissa toteutettiin matematiikkaprojekti, johon on liittynyt koulutusta päiväkodin henkilökunnalle. Tavoitteenani tässä tutkimuksessa on selvittää kasvattajien käsityksiä matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta. Selvitän myös, miten päiväkodin henkilökunta on kokenut saamansa koulutuksen. Toivon, että tutkimukseni herättää lukijan pohtimaan matematiikan merkitystä päiväkodissa ja omia käsityksiään matematiikasta.



## 2 KÄSITYKSET JA USKOMUKSET

Pajaresin (1992, 307, 326) mukaan käsitysten ja uskomusten tutkiminen tuo uutta näkökulmaa pyrittäessä ymmärtämään opettajien toimintaa opetustilanteissa, sillä ne ovat pohjana opettajien opetusnäkemyksissä ja käytännön työn toteutuksessa. Tutkittaessa opettajien käsityksiä ja uskomuksia on käsitteitä määrittely eri tavoin eikä yhteistä käsitejärjestelmää ole. Pajares korostaakin käsitteiden huolellista määrittelyä.

### 2.1 Käsitteiden määrittelyä

Eri tutkimuksissa on käytetty eri käsitteitä: käsitykset (conceptions), uskomukset (beliefs), tieto (knowledge), asenteet (attitudes), näkemykset (views), mielikuvat (images). Lindgren (1995, 7) määrittää uskomukset kiistämättömiksi henkilökohtaisiksi totuuksiksi, joita ei voida vahvistaa oikeiksi tai vääriksi yleisillä perusteilla. Uskomukset sisältävät asennekomponentteja ja niihin sisältyy affektioita, jotka voivat olla hyvinkin voimakkaita.

Myös Pehkosen (1994, 28) mukaan uskomukset ovat ihmisen pysyviä, subjektiivisia tietoja jostakin asiasta. Uskomuksille ei aina löydy pätevää rationaalista perustelua. Uskomuksissa on aina mukana affektiivinen ulottuvuus, toisin kuin tiedossa. Tämä ulottuvuus vaikuttaa siihen, minkä roolin ja merkityksen uskomus saa yksilön uskomusten rakenteessa.

Ihmiset saattavat pitää uskomuksiaan tietona. Thompson (1992, 129-130) kuitenkin esittää joitakin ominaisuuksia, jotka erottavat uskomukset tiedosta. Ensimmäkin ihminen voi pitää toisia uskomuksia vakuuttavampina kuin toisia. Tiedon kohdalla ei näin ole. Toisena piirteenä uskomuksiin yhdistetään niiden kiistanalaisuus, kun taas tietoon yhdistetään totuus ja varmuus. Tiedon paikkansa pitävyyttä voidaan arvioida yleisesti hyväksytyillä kriteereillä toisin kuin uskomuksia. Tiedon kriteerit kuitenkin muuttuvat ajan kuluessa, kun vanhoja teorioita korvataan uusilla. Tiedosta voi tulla uskomus ja päin vastoin. Kasvatuksen ja koulutuksen alalla on monia vaihtoehtoisia teorioita. Kasvatuksen kenttä ei ole selkeä ja opettajat saavat vaikutteita eri suunnilta. Juuri tämän takia voi olla vaikea erottaa uskomuksia ja tietoa toisistaan.

Käsitykset ovat korkeamman tason uskomuksia ja niillä on yleisempi rakenne. Käsitykset sisältävät uskomuksia, merkityksiä, käsitteitä, perusteluja, sääntöjä ja mielikuvia. (Kupari 1995, 111.) Tässä tutkimuksessa määrittelen Kupariin pohjautuen käsitykset (conceptions) uskomusten (beliefs) ja tiedon (knowledge) yläkäsitteeksi. Käsityksillä tarkoitan siis uskomuksia, joissa on mukana affektiivinen ulottuvuus ja tietoa, jota on saatu esimerkiksi koulutuksessa. Päädyin tähän, koska uskomukset ja tieto ovat osittain kietoutuneet yhteen. Käsitykset eivät ole kaikilta osin tietoisia. Pehkonen (1995, 13) määrittää tiedostamattomat uskomukset perustaviksi uskomuksiksi, joissa määrävänä on affektiivinen komponentti. Tiedostetut uskomukset ovat käsityksiä, joissa korostuu kognitiivinen komponentti.

Opettajan käsitykset matematiikasta ja sen opettamisesta eivät ole yhden mallin mukaisia, vaan sisältävät näkökohtia useista malleista. Ne voivat olla epäjohdonmukaisia ja ristiriidassa keskenään. Se, miten koherentti ja integroitunut systeemi käsityksistä muodostuu, riippuu siitä, kuinka paljon opettaja on reflektoinut ja tehnyt näkyväksi uskomuksiaan, arvojaan ja hankkimaansa tietoa. (Thompson 1992, 137.)

Matematiikkakäsitysten pääosat ovat:

1. käsitys matematiikan luonteesta
2. näkemys matematiikan opetuksesta
3. näkemys matematiikan oppimisen prosessista

Käsitys matematiikan luonteesta kokonaisuutena muodostaa perustan matematiikan filosofialle. Kaikilla opettajilla ei välttämättä ole selkeää tietoa omasta filosofiaan. (Ernest 1989, 250.)

Kupari (1995, 111) muotoilee matematiikkakäsitysten pääosat kysymyksiksi:

1. Mitä on matematiikka tieteenä ja kouluaineena?
2. Miten sitä opetetaan?
3. Miten oppiminen tapahtuu?

Nämä kysymykset luovat konkreettisen ja tiivistetyn pohjan matematiikkakäsitysten tutkimiselle.

## 2.2 Käsitysten syntymisestä ja muuttamisesta

Haapasalo (1997, 167) esittää, että uskomukset syntyvät, kun ihminen yrittää tulkita ympäristöään ja omaa suhdettaan siihen. Ensin on aistihavainto, jonka pohjalta syntyvät kognitiivis-emotionaalisten prosessien tuotokset, omat käsitykset ja kokemukset havaittavasta asiasta. Tähän sekoittuu sosiaalisessa vuorovaikutuksessa toisten tulkintoja ja ulkopuolisilta auktoriteeteilta, esimerkiksi opettajilta, omaksuttuja malleja. Uskomukset matematiikasta ja sen opettamisesta ja oppimisesta syntyvät opettajan omien koulukokemusten pohjalta: millainen suhde hänellä oli opettajaan ja miltä tuntui olla oppilas. Opettaja usein olettaa, että oppilailla on samanlaisia oppimistyylejä, taipumuksia ja ongelmia kuin hänellä itsellään. (Kagan 1992, 154; Pehkonen 1995, 21.) Myös lastentarhanopettajilla ja lastenhoitajilla matematiikkakäsitysten taustalla ovat omat koulukoke-

mukset. Ne vaikuttavat erityisen paljon, jos myöhemmässä, ammattiin valmistavassa koulutuksessa ei ole käsitelty matematiikkaa ja matematiikan pedagogiikkaa.

Matematiikkaan liittyy paljon tunteita, mielikuvia ja uskomuksia. Myös opettajilla on erilaisia uskomuksia ja niillä on suuri vaikutus matematiikan opetukseen käytännössä. (Kupari 1995, 110; Hersh 1986, 13; Thompson 1992, 127.) Opettajien uskomuksilla on merkitystä heidän hankkiessaan ja tulkitessaan tietoa ja toteuttaessa opetusta. Siten opettajan käsitys matematiikasta ja matematiikan opettamisesta määrittää sitä ympäristöä, jonka hän luo luokkaan opetustilanteessa. Se taas vaikuttaa lasten käsityksiin matematiikasta. (Pajares 1992, 326; Schoenfeld 1992, 359.) Esimerkiksi jos opettajan mielestä matematiikkaa oppii parhaiten laskemalla tehtäviä, keskittyy hänen opettamisensa siihen, että tunnilla lasketaan mahdollisimman paljon. Opettajat, lastentarhanopettajat ja lastenhoitajat ovat malleina lapselle. Heidän toimintansa matematiikan opettajina vaikuttaa lapsen käsitykseen matematiikasta, sen opettamisesta ja oppimisesta sekä lapsen kuvaan itsestään (matematiikan) oppijana. Myös vanhemmat vaikuttavat lasten käsitysten muodostumiseen. Pehkosen (1995, 21) mukaan uskomukset voivat muodostua esteeksi tehokkaalle matematiikan oppimiselle. Jos lapsella on negatiivinen käsitys matematiikasta ja sen oppimisesta, voi hänen oppimisensa olla passiivista, jolloin ymmärtämisen sijasta korostuu muistaminen.

Uskomukset muodostuvat siis yksilöllisten kokemusten kautta ja usein syyt niiden syntymiseen ovat tiedostamattomia. Uskomuksen omaksuminen voi perustua johonkin yleisesti tiedettyyn tosiasiaan (tai uskomukseen) ja siitä tehtyihin johtopäätöksiin. (Pehkonen 1994, 28.) Uskomukset kehittyvät pitkän ajan kuluessa ja ovat muodostuttuaan stabiileja ja intensiivisiä. Ne saattavat muuttua vain uuden kokemuksen aiheuttaessa kognitiivisia ja/tai emotionaalisia ristiriitoja verrattuna sen hetkisiin uskomuksiin. Uskomukset voivat olla vahvoja tai hävitä riippuen tilanteesta ja henkilökohtaisesta kiinnostuksesta. (Philippou & Christou 1996, 79.) Nespor (1987, 321) puolestaan pitää uskomuksia pysyvinä, jolloin ne ennemminkin muuntuvat kuin muuttuvat. Tieto taas kasaantuu ja muuttuu hyvin perustellulla argumentaatiolla. Uskomukset eivät ole samalla tavalla avoimia arvioinnille ja tutkimukselle kuin tietorakenteet.

Ernest (1989, 249) toteaa, että uudistettaessa matematiikan opetusta, on huomioitava opettajien muodostama käsitys matematiikasta eli ne uskomukset ja tiedot, joita hänellä on. Käsitysten muuttuminen vaatii opettajan tietoista reflektiota ja mahdollisuutta itsenäisyyteen opettajana eli opetuksen toteuttamiseen persoonallisesti. Valmiina annettu malli opetuksesta jäykistää ajattelua. Sitä tukevat uskomukset ja tieto nousevat päällimmäisiksi ja näin oman ajattelun tiedostaminen ja arviointi vaikeutuvat. Pehkonen (1994, 31) huomauttaakin, että kun opettajat havaitsevat itse ja sisäistävät tarpeen muutokseen ja heille tarjotaan menetelmiä muutoksen toteuttamiseen, eivät opetussuunnitelma ja opetusmateriaalikaan ole esteenä muutokselle. Vain luennoimalla ja demonstroimalla menetelmiä ei saavuteta todellisia muutoksia, koska ollaan edelleen vain uskomusten pintatasolla. Jos opettaja kokee tapansa opettaa huonoksi, pitäisi hänen pohtia, mitä matematiikka todella on eikä sitä, mikä olisi paras tapa opettaa (Hersh 1986, 13).

Opettajaksi opiskelevat useimmiten käyttävät koulutuksessa saamaansa tietoa vahvistamaan uskomuksiaan eivätkä arvioimaan niitä uuden tiedon valossa ja korjaamaan ristiriitaisuuksia. Käytäntö saattaa olla hyvin erilaista verrattuna vastavalmistuneen opettajan

odotuksiin. Tämä ristiriita saattaa muuttaa hänen uskomuksiaan. (Kagan 1992, 154-155.) Ongelmana opettajankoulutuksessa on, miten muuttaa tulevien opettajien pitkään kestäneitä ja syvään juurtuneita käsityksiä matematiikasta ja sen opettamisesta ja oppimisesta lyhyiden kurssien aikana. (Thompson 1992, 135.) Philippou ja Christou (1998, 203) tutkivat opettajaksi opiskelevien asennetta matematiikkaa kohtaan. He totesivat, että huomattavan suurella osalla yliopistossa aloittavista opiskelijoista oli negatiivinen käsitys matematiikasta, aineesta, jota he pian tulisivat opettamaan.

Opettajan käsityksiin matematiikasta vaikuttaa omien uskomusten lisäksi myös tieto, kun päiväkodin henkilökunta saa koulutusta matematiikan toteuttamiseen päiväkodissa jo peruskoulutuksessaan tai täydennyskoulutuksella. Tieto ei kuitenkaan yksistään riitä muuttamaan uskomuksia. Opettajat on saatava tietoisesti pohtimaan omia käsityksiään ja kokemuksiaan, miten ajattelen tästä asiasta ja mitä muita näkökulmia on. Koulutuksessa käsitysten nostaminen näkyviksi mahdollistaa niiden arvioinnin ja ristiriitaisuuksien ja aivan uusienkin näkökulmien huomaamisen. Lindgren (1996, 54, myös Lindgren 1995) on aloittanut pitkittäistutkimuksen opettajaksi opiskelevien matematiikkakäsitysten muuttamisesta/muuttumisesta. Pyrkimyksenä on tukea konstruktivistisen oppimiskäsityksen muodostumista Hän olettaa, että käsitysten muuttamiseen ei riitä pelkästään metodikurssi, vaan opiskelijoiden on saatava itse kokea, että matematiikkaa voi oppia konstruktivistisesti.

Käsitykset ja käytäntö eivät aina vastaa toisiaan. Ympäristö vaikuttaa opetukseen. Oppilailta, vanhemmilta, muilla opettajilla ja viranomaisilla on odotuksia, ja myös opetussuunnitelma ja institutionalisoitunut koululaitos ohjaavat opetusta. Samassa koulussa olevat opettajat voivat toimia käytännössä hyvin samalla tavalla, vaikka käsitykset matematiikasta ja sen opettamisesta ja oppimisesta olisivat erilaisia. (Ernest 1989, 252-253; Lundgren, Svingby & Wallin 1983, 19). Päiväkodissa lapsiryhmässä työskentelee useampi aikuinen, jolloin toiminta voi muodostua samanlaiseksi yksittäisen aikuisen käsityksistä riippumatta tai pedagoginen näkemys voi muotoutua yhteneväksi.

Ernest (1989, 249) kokoaakin matematiikan opetuksen käytäntöihin vaikuttaviksi kahdeksi ulottuvuudeksi:

1. opettajan sisäiset mallit, erityisesti matematiikkaan ja sen opettamiseen ja oppimiseen liittyvät uskomus- ja käsitysrakenteet
2. opetustilanteen sosiaalinen konteksti, sen rajoitukset ja mahdollisuudet ja opettajan reflektointi

Siten matematiikan opetuksen perustana ovat sekä opettajan omien kokemusten ja koulutuksen kautta muodostuneet käsitykset että ympäristö, jossa opettaja toimii. Nämä taas osaltaan vaikuttavat lapsen matematiikkakäsityksen muodostumiseen.

Määriteltäessä opetusta ja muodostettaessa kokonaisuutta sen taustalla olevasta tiedosta opettajien käsityksillä on suuri rooli. Jos opetuskäytäntöä halutaan muuttaa, ei pelkkä ulkoinen muutos riitä, vaan myös opettajan sisäisten mallien on muututtava. Miksi sitten tutkimukseen perustuvat tiedot ja teoriat eivät korvaa uskomuksia? Nespor (1987, 324) mainitsee syyksi sen, että opettajien työskentely-ympäristö ja ongelmat, joita he kohtaavat, eivät ole rajattuja ja selkeitä. Uskomusten avulla opettajalla on mahdollisuus selkeyttää, saada järkeä tällaiseen kontekstiin.

### 3 KÄSITYKSIÄ MATEMATIIKASTA

Matematiikkaan liittyviä käsityksiä ja uskomuksia on tutkittu paljon eri näkökulmista. On tutkittu opettajien ja opiskelijoiden/lasten näkemyksiä matematiikasta ja sen opettamisesta ja oppimisesta. Myös käsitysten muuttumista ja muuttamista on selvitetty. Matematiikkaan liittyvien käsitysten ja uskomusten vaikutusta opettajien tapaan opettaa ja toisaalta niiden vaikutusta opiskelijoiden suoriutumiseen matematiikan opinnoista on tutkittu. Tutkimukset ovat keskittyneet koulu- ja yliopistomaailmaan ja ne ovat luonteeltaan sekä kvalitatiivisia että kvantitatiivisia tai niiden yhdistelmiä. Käsityksiä ja uskomuksia matematiikasta on tutkittu hyvin monipuolisesti, mutta päiväkodin kasvattajien käsityksiä matematiikkaan liittyen ei ole tutkittu. (Thompson 1992, 131; Current state of research on mathematical beliefs V 1998.)

Lasten käsityksiä matematiikasta ovat tutkineet esimerkiksi Martha Frank (1988), Kirsti Hoskonen (1996) sekä Markku Hannula ja Marja-Liisa Malmivuori (1996). Tutkimustuloksissa on koulun matematiikka muodostunut kontekstiksi lasten käsityksille matematiikasta. Frank (1988, 32-33) tutki 27 matemaattisesti lahjakasta yläasteen oppilasta, jotka kävivät yliopiston kahden viikon Ongelmanratkaisu tietokoneella -kurssia. Viittätoista oppilasta havainnoitiin päivittäin ja neljää haastateltiin heidän kokemuksistaan matematiikasta koulussa ja rohkaistiin keskustelemaan käsityksistään matematiikasta. Frank löysi viisi uskomusta matematiikasta:

1. Matematiikka on laskemista.

Oppilaan pitää muistaa aritmeettisiä faktoja ja algoritmeja. Askel askeleelta edeten ja käyttäen sääntöjä hän saavuttaa numeerisen vastauksen.

2. Matemaattiset ongelmat ovat nopeasti ratkaistavissa vain muutamin askelmin.

Matemaattiset ongelmat ovat rutiinitehtäviä, joihin sovelletaan algoritmeja. Luovat, ei-rutiininomaiset tehtävät eivät ole todellista matematiikkaa.

3. Päämääränä matematiikassa on saada oikeita vastauksia.

Matematiikan voi ajatella olevan täysin oikein tai täysin väärin. Tällöin huomio kohdistuu vastauksiin, joiden oikeellisuuden opettaja voi kertoa. Jos vastaus on väärin, kokee oppilas laskemisen olleen ajanhukkaa.

4. Matematiikan oppijan rooli on ottaa vastaan matemaattinen tietous ja näyttää osaamisensa. Matematiikka on kokoelempi faktoja, sääntöjä ja menetelmiä; sievä paketti, jonka voi vain passiivisesti vastaanottaa. Oppilaan on vain oltava tarkkana luokassa, käytävä läpi

matematiikan kirjaa ja tehtävä kotitehtävät. Osaamisensa voi näyttää saamalla oikeita vastauksia tehtävistä.

5. Matematiikan opettajan tehtävä on siirtää matematiikan tietous ja varmistaa, että oppilaat ovat omaksuneet tiedon.

Opettaja selvittää kirjan sisällön ja jos hän tekee sen hyvin, tuottavat oppilaat nopeasti ja helposti oikeita vastauksia. Oppilaiden osaamisen opettaja varmistaa tarkastamalla heidän tehtäviään.

(Frank 1988, 32-33.)

Suomalaisten lasten käsityksiä on tutkinut Kirsti Hoskonen (1996, 48-52). Hänen opettamansa 18 oppilasta kahdeksannelta luokalta muodostivat tutkimusryhmän. He täyttivät kyselyn ja heitä haastateltiin 3-4 oppilaan ryhmissä. Myös heille matematiikka oli laskeamista (53%) ja matematiikka sanana toi mieleen matematiikan välineet kuten kynän, kumin, viivaimen, kirjan ja vihkon (6%). Myös kokeet mainittiin (10%). Matemaattisen ongelmanratkaisun mainitsi 8%. Arvosanoja ei mainittu ollenkaan. Matematiikkaa pidettiin tärkeänä ja oppilaiden mielestä sitä tarvittiin myös koulun jälkeen. Matematiikka koettiin vaativana, mutta ei välttämättä vaikeana. Vain muutama sanoi matematiikan olevan hauskaa koulussa. Frankin tuloksiin verrattuna ei Hoskosen tutkimuksessa oppilaiden mielestä tarvitse saada aina oikeaa vastausta nopeasti. Oikean tuloksen luotettavaan ratkaisemiseen on yksi suora menetelmä, vaikka oikeita ratkaisuja voi olla useampia. Matematiikka vaatii tuumimista ja harkintaa. Matematiikkaa oppii parhaiten harjoittelemalla paljon. Oppiminen ei vaadi kuitenkaan erityistä lahjakkuutta.

Matematiikkaa on perinteisesti pidetty poikien alana. Siten käsitys matematiikasta on värjätynyt osittain sukupuolisesti. Hannula ja Malmivuori (1996, 31-32) vertasivat tyttöjen ja poikien käsityksiä ja suoriutumista matematiikasta. Tutkimukseen osallistui 739 9.-luokkalaista. Käsityksiä tutkittiin kyselyllä ja lisäksi kaikki oppilaat tekivät valtakunnallisen matematiikan kokeen. Myös opettajille tehtiin kysely heidän opetusmenetelmistään ja käsityksistään. Matematiikan kokeessa pojat menestyivät tyttöjä paremmin. Tytöt ja pojat eivät pitäneet matematiikasta kovinkaan paljon. Matematiikka oli heidän mielestään tärkeä aine, mutta se oli vaikeaa ja ikävyyttävää, toisin kuin Hoskosen tutkimuksessa. Tähän voi olla syynä se, että Hoskosen testiryhmä oli pieni. Lisäksi hän opetti näitä oppilaita, jolloin voisi olettaa, että matematiikasta ja sen tutkimisesta kiinnostunut opettaja saattaa myös tukea oppilaitaan tietoisesti näkemään matematiikan positiivisemmin kuin Hannulan ja Malmivuoren laajempi tutkimus osoittaa. Hoskonen käytti Malmivuoren kehittämää kyselylomaketta.

Sukupuolten välillä oli eroja kahdella selkeästi erottuvalla alueella. Tytöt olivat epävarmempia matemaattisista kyvyistään kuin pojat, vaikka heillä oli matematiikan kokeesta vastaavat tulokset. Vaikka tytöt olivat keskitasoa tai sen yläpuolella, eivät he luottaneet itseensä matematiikassa. Matematiikan oppimisessa tytöille oli yhteistyö tärkeämpää kuin pojille. Tytöt myös hyötyivät opetuksesta, jossa opettaja korosti yhteistyössä oppimista ja ryhmätyötä. Se lisäsi heidän itseluottamustaan. (Hannula & Malmivuori 1996, 32-36.)

Matematiikan olemusta ovat pohtineet sekä filosofit että matemaatikot. Reuben Hersh on matemaatikko ja hän on pohtinut myös matematiikan filosofiaa, sitä miten matematiikka nähdään tieteenä. Hän on erottanut kaksi näkemystä: platoninen ja formalistinen. Platoni- sen näkemyksen mukaan matematiikka on olemassa itsenäisesti. Matematiikka on olemas-

sa riippumatta siitä, mitä minä ajattelen tai tiedän aiheesta. Matematiikka näyttäytyy kokonaisuutena, joka on annettu jostain ihmisen tietoisuuden ja siten historian ja kulttuurin ulkopuolelta. Tällainen näkemys sopii yhteen uskonnollisen maailmankatsomuksen kanssa toisin kuin tieteellisen skeptisyyden kanssa. Vaihtoehto on tällöin formalismi. Matemaattiset teoreemat ovat symbolien muuntamista, muodollisen kaavamaisesti johdettuja. Matematiikka on peliä symboleilla. (Hersh 1986, 18.) Yliopistoissa on korostettu matematiikan formaalia luonnetta. Se on looginen ja muodollinen tieteenala ja vaatii täsmällisiä todistuksia sekä eksaktia kieltä. Opetuksessa pyritään vain käymään oppilaiden kanssa läpi uudelleen se, mikä on kirjoihin rakennettu aikojen kuluessa. Siten oppilaat eivät opi todella ymmärtämään, että matematiikka on syntynyt ongelmanratkaisuprosessissa. (Haapasalo 1997, 134.)

Yleensä oletetaan, että matematiikalla on oltava absoluuttisen luotettava perusta. Sekä platoninen että formalistinen näkemys korostaa matemaattisen tiedon varmuutta totuutena. Hershin mukaan epävarmuutta on matematiikassa kuitenkin paljon. Matemaatikot tekevät virheitä ja korjaavat niitä, ovat eri mieltä ja epävarmoja, ovatko todistelut oikein vai eivät. Matematiikka on työskentelyä ideoilla ja symbolit ovat vain ajattelun apuna, kuten nuotit ovat apuna musiikin esittämisessä. Määritelmät ja aksioomat ovat yritys kuvata matemaattisen idean ominaisuuksia. Aina matematiikassa ei pystytä saavuttamaan ymmärrystä, varmuutta ja selkeyttä. Hershin mielestä käytännössä ymmärtäminen varmistaa formaalin laskemisen oikeellisuuden eikä päinvastoin. (Hersh 1986, 18-21.)

Hersh pyrkii luomaan oman näkemyksen matematiikasta. Matematiikka on ideoita ja matemaattiset objektit ovat ihmisen keksimiä tai luomia. Ne syntyvät toimimalla jo olemassa olevien objektien kanssa sekä arkielämän ja tieteen tarpeista. Matemaattisilla objekteilla on määriteltyjä ominaisuuksia, joita voi olla vaikea löytää, kun ne ovat irtaantuneet konkreettisesta yhteydestään. Matemaattiset objektit eivät ole kuitenkaan sama asia kuin luonnolliset objektit, kuten kivet tai röntgensäteet. Kun matemaattiset objektit on luotu ja välitetty muille, niistä tulee osa kulttuuria, jaettua tietoisuutta. (Hersh 1986, 22-25.)

Freudenthal (1991, 10-11, 15) huomauttaa, että harvalla ihmiselle matematiikka tai sen rakenne on päämäärä itsessään. Matematiikka on pikemminkin hyödyllinen työkalu, jota käytetään yhä laajemmin tieteen ja yhteiskunnan eri alueilla. Ilman matematiikkaa ei voi olla. Matematiikka on aktiivista toimintaa, matematiikkaa tuotetaan ja toisaalta luodaan uudelleen eli ihminen rakentaa mieleensä jo tuotetun matematiikan uudelleen. Siten hän ymmärtää sen ja se on taas pohja uudelle prosessille. Myöskään Freudenthalin mielestä matematiikka ei ole ikuisesti varmaa, vaan osia siitä voidaan kumota tai pyritään yhä syvempään ymmärtämiseen. Siten ei pystytä sanomaan, mikä tulevaisuudessa on varmaa.

George Malaty on kehittänyt esi- ja alkuopetuksen matematiikan opetusta Suomessa. Hänen näkemyksensä matematiikasta on lähellä Hershin luomaa näkemystä: Malatyn mukaan matematiikkaa on kaikessa; luonnossa, meissä itsessämme ja kaikessa ihmisen tekemässä eli kulttuurissa. Kaikessa on määrä ja muoto ja ne ovat matematiikan peruskomponentteja, jotka ovat kiinnostaneet ihmisiä kautta aikojen. Matematiikka palvelee luonnontieteitä ja muita tieteitä sekä taiteita ja taitoja, mikä on tuttua tavalliselle ihmisellekin. Matematiikkaa harrastetaan myös pelkästään sen tekemisen ilosta. Matematiikkaa ei voi luokitella luonnontieteeksi, koska matematiikassa ei käsitellä sitä, mitä luonnossa on.

Luonnossa ovat kasvit, eläimet, lämpö, sähkökentät, metallit, mutta siellä eivät ole  $x$  ja  $\log x$ . (Vertaa Hersh 1986, 22-25.) Matemaattinen tuote on hyvin abstrakti, mikä heijastaa ihmisen kykyä abstrahoida. (Malaty 1997, 53-56.)

Paradoksaalista on, että mitä abstraktimpaa matematiikka on, sitä enemmän sitä nykyään sovelletaan. Itse matematiikka ei ole väline, vaan ajattelutapa, ainutlaatuinen, looginen, filosofinen, deduktiivis-aksiomaattinen tapa ajatella. Matematiikka on deduktiivinen tiede; lauseen totuuden osoittamista edeltävän lauseen tai lauseiden totuuden nojalla. Päättelminen etenee yleisestä uuteen yleiseen. Siksi matematiikka on jatkuvasti kasvava rakenne. (Malaty 1997, 56-57.)

Eri näkemykset kokoaa yhteen Paul Ernest (1989, 250). Hän on esittänyt kolme filosofiaa matematiikan luonteesta, jotka esiintyvät matematiikan ja tieteen filosofiassa sekä tutkimuksissa matematiikan opetuksesta. Instrumentaalisen käsityksen mukaan matematiikka on kasauma faktoja, sääntöjä ja taitoja, joita käytetään ulkokohtaisesti vain oikean lopputuloksen saavuttamiseksi. Matematiikka on kokoelema irrallisia, mutta hyödyllisiä sääntöjä ja tosiasioita. Instrumentaalinen käsitys matematiikasta on traditionaalinen ja siihen liittyy behavioristinen oppimiskäsitys (Haapasalo 1997, 132). Toisena on platoninen käsitys, jonka mukaan matematiikka on staattinen, mutta yhtenäinen kokonaisuus tietoa. Matematiikka on löydettävä eikä luotava. Kolmannen näkemyksen mukaan matematiikka voidaan nähdä myös ongelmanratkaisuna. Se on dynaaminen jatkuvasti laajeneva ihmisen luoma kulttuurituote. Se ei ole valmis tuote, vaan prosessi, jossa aina voidaan kysellä ja tietää enemmän. Matematiikan tulokset jäävät avoimiksi arvioinnille ja korjauksille. (Ernest 1989, 250.)

Konstruktivistinen matematiikka on ongelmanratkaisua. Ihmiset osallistuvat itse matematiikan rakentamiseen lähtiessään liikkeelle konkreettisista tilanteista ja omista ideoistaan ja niiden perustelemisesta. Matematiikka on ajatteluprosessien kehittämistä ja yhteyksien, sääntöjen ja toimintakaavojen rakentamista todellisista kokemuksista lähtien. Siten matematiikka on verkkomainen, monitasoinen ja ulottuu lähes kaikkialle. (Haapasalo 1997, 132-133.)

Näihin kolmeen näkemykseen voi lisätä Freudenthalin (1991, 10-11) ja Erkki Pehkosen (1998, 61) tekemän opettajien matematiikkakäsityksiä selvittävän tutkimuksen pohjalta kaksi lisäystä. Freudenthal ja Pehkonen tuovat esiin näkemyksen matematiikasta soveltamisena. Matematiikan taitoja tarvitaan arkipäivän elämässä. Pehkosen kyselyssä opettajat pitivät matematiikkaa myös mukavana harrastuksena.

Matemaattisen tiedon luonnetta pohtiessa voi kysyä, onko se olemassa tietäjistä riippumatta, eli se on vain löydettävä, vai onko se ihmisen konstruoimaa. Geometriassa ja aritmetiikassa oppija voi havaintojen ja järjelyn avulla arvioida konstruoimaansa tietoa. Matematiikkaa voi kuitenkin opetella myös painamalla mieleen pirstaletietoja, jolloin saadaan oikea lopputulos. Ymmärtäminen vaatii kuitenkin perustelemista; miten matematiikka muodostuu. Ihmiskunnan tuottaman tiedon välittämisen sijasta opettajan tehtävä on auttaa lasta itse löytämään uudelleen tieto. Tietysti on konkreettisesti perusteltavan tiedon lisäksi olemassa matematiikassa myös abstrakteja rakenteita, joiden alkuperäiset yhteydet todellisuuteen ovat katkenneet. Esiopetuksessa ja peruskoulussa tällaisia sisältöjä ei kuitenkaan ole. (Leino 1998, 43.)



Ihmiset rakentavat omaa näkemystään todellisuudesta, eikä se aina ole yhtäpitävä sen kanssa, jota voisi kutsua objektiiviseksi todellisuudeksi. Koska kokemuksemme maailmasta ovat enemmän tai vähemmän homogeenisia, kehitämme viime kädessä saman perspektiivin. Se on kuitenkin tulkintaa ja tulkinnat voivat olla virheellisiä ja epätarkkoja. Tulkintoja tuottavat selittävät rakenteet voivat olla hyvin pysyviä eli niitä on vaikea muuttaa. (Schoenfeld 1987, 24.) Asioita selittäessä ja tulkitessa ovat pohjalla ihmisen käsitykset ja toisaalta samalla käsityksiä muodostuu. Matematiikka on osa maailmaamme ja ihmiset rakentavat siitä omaa näkemystään.

#### 4 OPPIMISKÄSITYKSISTÄ JA MATEMATIIKAN OPETTAMISESTA

Oppimiskäsityksellä tarkoitetaan niitä perusolettamuksia, joita tehdään oppimisprosessin luonteesta. Opettajalla on käsitys oppimisesta ja se säätelee hänen toimintaansa. Opettajan oppimiskäsitykset muovautuvat käytännön opetustyössä. Oppimiskäsityksessä opettajan omat arvot, tottumukset, asenteet ja käsitykset psyykkisistä prosesseista yhdistyvät yleisiin käsityksiin ja yhteiskunnallisiin normeihin ja opetustyölle asetettuihin odotuksiin. Tutkimukset vaikuttavat oppimiskäsityksiin usein viiveellä. Tutkimuksen ja teorioiden merkitys opetustyölle näkyy niistä johdetuissa käytännöissä. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 103, 146.) Opettaja ei siis toimi irrallaan yhteiskunnasta. Oppimiskäsityksen muotoutumiseen vaikuttaa se sosiaalinen konteksti, jossa opettaja toimii.

Oppiminen on hyvin monimuotoinen ilmiö. Siksi oppimisen tutkimuksessa ja teorian rakentamisessa on erilaisia suuntauksia. Selkeästi voidaan erottaa kaksi pääperinnettä: behavioristinen ja kognitiivinen tutkimusperinne. Ne asetetaan usein vastakkain. Behavioristinen tutkimus on keskittynyt ihmisen käyttäytymiseen. 1960-luvulla nousi kognitiivinen tutkimussuuntaus, joka kohdistui ihmisen psyykkisiin prosesseihin ja toimintaan. Monet tämän hetken opetuskäytännöt on rakennettu suoraan tai välillisesti behaviorismin pohjalta. Kognitiivisen tutkimusperinteen toivotaan kehittävän vaihtoehtoisia opetustapoja, joissa korostuisi laatu. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 104, 112; Lehtinen, Kinnunen, Vauras, Salonen, Olkinuora & Poskiparta 1989, 17.) Kognitiivisen suuntauksen nykyvaiheena voidaan pitää konstruktivistista oppimiskäsitystä (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 120). Suomalaisessa varhaiskasvatuksessa behavioristinen oppimiskäsitys on korostunut 1970-luvulla. Nykyään nähdään tärkeänä kehittää oppimaan oppimisen taitoja, jolloin korostuu konstruktivistinen oppimiskäsitys. (Hujala, Puroila, Parrila-Haapakoski & Nivala 1998, 34, 50.)

Leinon (1995, 35) mukaan matematiikkaa on perinteisesti opetettu behavioristisesti. Tällä hetkellä matematiikan opetuksessa ollaan kuitenkin siirtymässä konstruktivistiseen oppimisteoriaan. Haapasalo (1997, 132, 134) esittääkin, että traditionaalinen käsitys matematiikasta ja behavioristinen oppimistraditio ovat osoittautuneet riittämättömiksi. Uutena suuntana hän näkee konstruktivismiin. Seuraavassa esittelen näiden kahden oppimisteorian pääpiirteitä.

#### 4.1 Behavioristinen oppimiskäsitys

Behavioristisen tutkimuksen taustalla on positivismin metodologiset periaatteet, jolloin tutkimus kohdistettiin ulkoisesti havaittavan toiminnan oppimiseen. Se pyrittiin selittämään mahdollisimman yksinkertaisten oppimislakien avulla. Monimutkaiset toiminnot rakentuvat näiden lakien mukaisesti yksinkertaisista, aiemmin opituista toiminnoista. (Lehtinen ym. 1989, 18.) Behaviorismin pohjana ovat SR-teoriat, joiden mukaan ihmisen ajattelu, oppiminen ja käyttäytyminen selittyvät niillä reaktioilla ja suorituksilla (Response), joita hän liittyy tiettyyn ärsykkeeseen tai tilanteeseen (Stimulus). SR-teoriat pohjautuvat eläinkokeisiin. (Haapasalo 1997, 67.)

Behaviorismin yksi merkittävin edustaja on B.F. Skinner. Hänen mukaansa opetettava aines on esitettävä pieninä yksikköinä, joista sitten rakentuu vähitellen hierarkkinen kokonaisuus. Lapselle esitetään tällainen tietoyksikkö, jokin asia ja siihen liittyvä kysymys (S). Lapsi vastaa tähän (R), mistä seuraa välitön palaute opettajalta. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 111.) Osittamalla opetettava aines voidaan vaadittava suoritus määritellä yksityiskohtaisesti. Siten on helposti todettavissa oppilaan onnistunut suoritus, josta voidaan heti antaa positiivista palautetta. Virheelliset suoritukset pyritään sivuuttamaan nopeasti, jotta ne eivät vakiintuisi eikä virheellinen muistikuva vahvistuisi. Onnistuneen suorituksen vahvistamisen vastakohtana on virheellisen suorituksen sammuttaminen. (Lehtinen ym. 1989, 19.)

Oppimisen mittaaminen on helppoa, koska ulkoiset, havaittavat toiminnot korostuvat ja osatavoitteet on suunniteltu strukturoidusti. Oikea vastaus tai toiminta kertoo asian oppimisesta. Opetussuunnitelma sisältää tavoitteet ja menetelmät, joilla tavoitteisiin pyritään. Tietorakenne nähdään pysyvänä, vaikka sen osasia korvattaisiinkin uudemmalla tiedolla. Siten opetussuunnitelmakin on melko pysyvä. Taustalla on usein myös oletus oppilaan kykyjen muuttumattomuudesta. Lapsen kykyjä mitataan ja eriytetään opetus tätä kykyrakennetta vastaavaksi. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 113.)

Yksi behavioristiseen oppimiskäsitykseen perustuva opetusmenetelmä on drillaus. Siinä toistetaan samantapaisia laskuja, jolloin toiminta automatisoituu ja kehittyy nopeus ja tarkkuus. Nykyäänkin drillaus on osa matematiikan opetusta, erityisesti aritmetiikassa. Harjoitustehtävissä on kuitenkin konkreettisia esimerkkejä, jotka liittyvät lapsen elämään. Drillauksen juuret ovat SR-teorioissa, ja sitä on kehittänyt Edward L. Thorndike. Toistuvan harjoittelun avulla syntyy ärsykkeen ja reaktion välille yhteys. Esimerkiksi "2 + 2" (Stimulus) on yhtä suuri kuin "4" (Response). Opettajan tehtävä on löytää opittavasta asiasta harjoiteltavat SR-yhteydet ja tarjota sopiva määrä harjoittelua oikeassa järjestyksessä. Ensin opetellaan helpoimmat, jotka ovat pohjana vaikeampien yhteyksien oppimiselle. Oppiminen on tehokkaampaa, jos harjoitustehtävät ovat mielenkiintoisia ja käytäntöön liittyviä. Aritmetiikka ei aina kuitenkaan ole niin yksinkertaista, että sen voisi ilmaista SR-yhteyksillä. Kvantitatiivinen ajattelu ei kehity, jos matematiikka nähdään vain joukkona erillisiä yhteyksiä eikä malleista ja periaatteista muodostuneena kokonaisuutena. (Resnick & Ford 1981, 11, 15, 35.)

Behavioristinen oppimiskäsitys näkyy varhaiskasvatuksessa suunnittelun aikuisjohtoisuudessa, jolloin aikuinen asettaa omista lähtökohdistaan tai oppaiden perusteella tavoitteet,

sisällöt ja menetelmät. Eri sisällöt eivät välttämättä liity toisiinsa. Maanantaina saatetaan keskittyä matematiikkaan ja tiistaina on musiikkia. Valmiit suunnitelmat eivät muodosta kokonaisuutta, eivätkä ne aina jouta lapsen yksilöllisten tarpeiden mukaan. Suunnittelu painottuu toimintatuokioihin ja kognitiivisen kehityksen tukemiseen. (Hujala ym. 1998, 34-35.)

Nopeasti muuttuva yhteiskunta tuo esiin behavioristisen oppimiskäsityksen heikkoudet. Tieto muuttuu, joten ei ole tarkoituksenmukaista opettaa faktoja, jotka pian vanhentuisivat. Pikemminkin on tuettava oppilaita oppimaan jatkuvasti uutta. Tärkeää on oppimaan oppimisen taito. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 18.) Behaviorismi ei pysty vastaamaan muuttuneen tiedonkäsityksen ja yhteiskunnallisen muutoksen asettamiin haasteisiin. Ulkoista toimintaa korostetaan unohtaen sisäiset prosessit, joita ei behavioristisen teorian mukaan voida tutkia. Siten ei pystytä tukemaan yleisempien ajattelutaitojen kehittymistä, jotka ovat sisäisiä prosesseja. Oppimisen laadullisten ominaisuuksien tarkastelun sijasta on keskitytty ulkoisten suoritusten määrälliseen arviointiin. (Lehtinen ym. 1989, 20-21, 23.)

Opettajan vastuulla on ohjata lapsen suoritusta, joten älyllinen vastuu on siirtynyt pois lapselta. Itsenäiset toimintastrategiat ja itsearviointi eivät pääse kehittymään. Lapsi pyrkii etsimään mahdollisimman nopeasti ne vihjeet, jotka johdattavat oikeaan suoritukseen ja myönteiseen palautteeseen. Laajemman ymmärryksen kehittyminen saattaa siten estyä. Korostettaessa opettajan antamaa palautetta motivoinnissa lapsen sisäinen motivaatio toimia jää käyttämättä. (Lehtinen ym. 1989, 21-22.)

Kun opittava aines on jaettu osiin, ei siitä muodostu kokonaisuutta. Esimerkiksi matematiikassa voidaan opetella mekaanisesti laskemaan tehtäviä tai luettelemaan geometrinen kuvioiden nimityksiä, mutta siitä ei itsestään muodostu laaja-alaista opiskellun asian ymmärrystä. (Lehtinen ym. 1989, 23.) Kun asiat on opeteltu pieninä erillisinä yksikköinä, eivät yksikköjen suhteet toisiinsa selviä, ellei opettaja kiinnitä tähän huomiota. Kokonaisuuden sijasta lapsi oppii pirstaletietoa, jota on vaikea soveltaa.

Behavioristinen vaikutus on kuitenkin pysynyt vahvana, koska se on muovautunut pitkän ajan kuluessa ja se on selkeä ja yksinkertainen. Siten se on opettajalle johdonmukainen ja turvallinen. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 113.) Vaikka oppimiskäsitykset muuttuvat, on opetuskäytänteiden muutos hidasta (Kivi 1995, 22).

Behaviorismin rinnalle nousi vähitellen 1950-luvulla eteenpäin kognitiivinen suuntaus, joka painottaa ymmärtävää oppimista, ihmistä tiedon käsittelijänä (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 17). Tutkimus on kohdistunut yksilön sisäisiin tajunnallisiin tapahtumiin, tiedollisiin prosesseihin. Behavioristien mukaan näitä ei voida tieteellisesti tutkia. (Lehtinen ym. 1989, 24.) Kognitiivisessa suuntauksessa tutkimukset keskittyivät aluksi ongelmanratkaisuun, muistiin ja kieleen. Oppiminen nähtiin kognitiivisen toiminnan taltioitumisena muistiin. 1960-luvulla alettiin kiinnostua tavoitteellisesta oppimisesta. Kognitiivisen suuntauksen nykyvaiheena voidaan pitää konstruktivismia. Kehityspsykologi Jean Piaget'a voidaan pitää konstruktivistisen ajattelutavan esitaistelijana. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 118, 120-121.)

## 4.2 Konstruktivistinen oppimiskäsitys

Leinon (1993, 4) mukaan konstruktivismi ei ole teoria, vaan ennemminkin lähestymistapa, koska kasvatustieteen alueella on monia konstruktivismeja. Kognitiivisessa oppimiskäsitteyksessä ihminen aktiivisesti ja valikoivasti havainnoi ja käsittelee siten saamaansa tietoa. Tätä tietoa hän suhteuttaa aiemmin oppimaansa ja säätelee toimintastrategioitaan. Tieto nähdään kuitenkin objektiivisena ja todellisuus ulkoisena, aistein havaittavana. Siten ihmisellä ei ole suurtakaan mahdollisuutta muodostaa omia yksilöllisiä konstruktioita. Tätä kutsutaan heikoksi konstruktivismiksi. (Haapasalo 1998, 61.) Opetuksen tavoitteena ja oppilaan ymmärtämisprosessin kohteena on tällöin ihmiskunnan rakentama tietorakenne. Tällaista valmista tietoa oppilas pystyy muistamaan ja antamaan opettajalle oikean vastauksen, vaikka aito tiedon konstruointi ja siten ymmärtäminen ei olisi vielä alkanutkaan. Perinteinen matematiikan opetus kaikilla koulutustasoilla edustaa pääasiassa tätä suuntausta. (Leino 1998, 49.) Opetus voidaan toteuttaa hyvin behavioristisesti, koska tavoitteena on valmiin tietorakenteen omaksuminen. Haapasalon (1997, 97) mukaan vahva/radikaali konstruktivismi puolestaan kiistää objektiivisen tiedon olemassaolon.

Piaget'n konstruktivismi on yksilökeskeistä. Ihmisen ajattelu kehittyy asteittain ja hän konstruoi itselleen merkityksellistä tietoa toimimalla esimerkiksi esineiden kanssa. Sen rinnalle on kehittynyt sosiaalinen konstruktivismi, jossa kieli, kulttuuri ja yhteiskunnan historia ovat opetuksen ja ihmisten toiminnan pohja. Ihminen konstruoi käsityksiään ympäröivästä todellisuudesta yhteisönsä osana. Matematiikka on yksi yhteisön kulttuurisektori. (Leino 1998, 39, 41.) Konstruktivismin eri perspektiiveissä on kuitenkin yhteisenä näkemys, että yksilö rakentaa tietorakennettaan vuorovaikutuksessa aikaisemman tiedon, tapahtumien ja toisten ihmisten kanssa (Dana & Davis 1993, 326). Selvitän seuraavassa konstruktivismin yleispiirteitä.

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen lähtökohtana on se, että hankkiessaan uutta tietoa oppilas ainakin osittain konstruoi sen uudelleen. Uudet tiedot sulautuvat hänen jo olemassa olevaan tietojärjestelmäänsä ja muuntavat sitä. (Haapasalo 1997, 97.) Tiedon sulautuminen ja tietojärjestelmän muuntuminen vastaavat Piaget'n assimilaation ja akkommodaation käsitteitä.

Lapsen aikaisempi tietovarasto ja opitut lähestymistavat vaikuttavat hänen havaintoihinsa ja tiedon oppimiseen. Opettajan on otettava huomioon tämä aikaisempi tieto ja kokemus ja mukautettava opetus siihen. (Leino 1998, 40.) Opettajan on tunnettava myös lapsen käyttämät oppimisen ja ongelmanratkaisun strategiat. Niitä voidaan käyttää pohjana uuden tiedon konstruomisessa. Siten uuden oppiminen ei koskaan ala alusta, vaan siihen vaikuttavat lapsen aikaisemmat käsitykset ja myös hänen asettamansa tavoitteet ja mielenkiinnon kohteet. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 122.)

Oppiminen on tulosta lapsen omasta toiminnasta, esimerkiksi lapsen kokeillessa omien konstruktoidensa toimivuutta. Pyrkiessään ymmärtämään jotakin asiaa tai tapahtumaa lapsi tulkitsee sitä oman laajemman tietorakenteensa pohjalta. Se, että lapsi on ymmärtänyt jonkin asian, näkyy hänen perustellessaan omia käsityksiään ja siirtäessään ja soveltaessaan niitä uusiin konteksteihin. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 123-124.)

Toiminta matematiikan parissa, kysymysten asettaminen ja ratkaisujen hakeminen paljastavat lasten ajattelutapoja. Matematiikan opetuksessa opettajalla onkin ymmärtämiskeinoina verbaalinen ja toiminnallinen kommunikaatio. (Leino 1993, 7, 17.) Kertoessaan ideoistaan lapset joutuvat myös muotoilemaan, perustelevaan ja todistamaan niitä toisilleen. Esittäessään ajatuksiaan eri tavoin kehittyvät lapsen käsitteet ja matemaattinen ajattelu. (James 1995, 6-7; Ikäheimo 1998, 241.) Schoenfeldin (1987, 29) mukaan avainasia opetuksessa on, miten oppilaat tulkitsevat sen mitä opetetaan, eikä se kuinka paljon he siitä ottavat vastaan. Heuristisilla kysymyksillä opettaja voi selvittää lapsen tapaa ajatella ja huomata siinä olevia ristiriitaisuuksia. Voi kysyä esimerkiksi, miksi lapsi on valinnut jonkin lähestymistavan ongelman ratkaisuun, miten hän on edennyt tiedon rakentamisessa, voisiko käyttää jotain muuta lähestymistapaa. Näin lapsen oppimaan oppimisen taidot kehittyvät.

Tiedon konstruointi on sekä individuaalista että sosiaalista. Jokaisella on omia yksilöllisiä kokemuksia eri asioista. Toisaalta kokemuksia jaetaan yhdessä, esimerkiksi keskustelemalla. Tiedon on oltava käyttökelpoista yksilön lisäksi myös sosiaalisessa kontekstissa. Esimerkiksi lapset voivat testata omia tietorakenteitaan kokeilemalla tai juttelemalla muiden kanssa, minkä Leino (1993) esitti edellä opettajan näkökulmasta. Konstruktivismissa oppiminen nähdään sosiaalisena prosessina, jossa pyritään ymmärtämään kokemuksia aikaisempien tietojen pohjalta. Tässä prosessissa oppija saattaa huomata ristiriitaisuuksia ajattelussaan. Hän joutuu käyttämään luovasti aikaisempaa tietorakennettaan uuden kokemuksen kautta. (Tobin & Tippins 1993, 4-5, 10.)

Jotta loogis-kognitiivinen ristiriita poistuisi ja syntyisi tasapainotila, tarvitaan jokin kehitys tai muutos yksilön tiedollisessa rakenteessa. Aikaisemmat rakenteet voivat hävitä mutta useimmiten niistä muodostuu kehittyneempiä struktuureja. Tieto on dynaamisena alati muuttuva prosessi. Lapsi saa jokapäiväisessä elämässään valtavan määrän kokemuksia, jotka aktivoivat ja muuntavat olemassa olevaa tietoa ja strategioita. Loogis-kognitiivinen ristiriita syntyy, kun:

- käytettävissä olevien strategioiden ja ongelman vaatimusten välillä on ristiriita
  - erilaisten skeemojen valinnasta aiheutuu ristiriita
  - ongelman ratkaisun ja epäkäytännöllisyyden tai hankaluuden välillä on ristiriita
  - ratkaisun ja sen perustelun puuttumisen takia on ristiriita
- (Haapasalo 1997, 103.)

Näkemyks ristiriidasta ajattelussa on peräisin Piaget'ltä ja viittaa tiedon konstruoinnin individuaalisuuteen. Vygotski taas pitää sosiaalista vuorovaikutusta oppimisen perustana. Sen puitteissa kehittyvät kognitiiviset prosessit ja tietoisuus. Kielellä on tässä keskeinen merkitys. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 118-120.)

Konstruktivistisen ajattelun pohjalta on asetettava kyseenalaiseksi vaatimukset, että oppilaan tulisi oppia tietty tieto tietyssä järjestyksessä tietyssä ajassa (Haapasalo 1997, 134). Opetuksen tulisi olla joustavaa ja huomioida oppijan valmiudet. Kaikille yhteisten tavoitteiden on siten oltava yleisiä ja vain kehyksenä opetukselle. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 121.) Leinon (1998, 48) mukaan on tärkeä hahmottaa matematiikan opetus opetussuunnitelman viitekehyksessä. Tarkoitus ei ole, että lapset saavat tehdä vain sitä, mitä he haluavat ja mistä he ovat kiinnostuneet. Opetuksen on oltava kasvattavaa ja

ajattelua laajentavaa, siinä on oltava johdonmukaisuutta. Opetussuunnitelman sisältöalueet eivät kuitenkaan saa sanella opetusta. (Leino 1998, 48.)

On vaikea murtaa sitä opettajan ja oppilaiden käsitystä, että opettaja opettaa ja oppilaat kuuntelevat (Haapasalo 1998, 61). Opettajasta, oppilaista ja vanhemmista voi tuntua, että opettaja ei tee mitään, kun oppilaat itse konstruoivat tietoa. Leino (1998, 43) esittää, että tiedon löytäminen tuottaa erilaista oppimista kuin opettajan valmiina antama tieto. Opettamisella on siis suuri vaikutus oppimiseen, koska opettaja ohjaa tiedon löytämistä.

Konstruktivistinen matematiikan opetus on vaativaa, koska opettajan on hahmotettava lasten aikaisemmat tietorakenteet ja käsitykset ja uskomukset. Lapsia on tuettava laajentamaan näitä rakenteita ja käyttämään niitä itsenäisesti. Tämä vaatii yksilöllistä ja lapsilähtöistä otetta. Paljon helpompaa on esitellä oppikirjan sisällöt, kuulustella niitä sitten kokeessa ja pitää ohjat tiukasti itsellä. (Leino 1998, 50.) Opettaja on vanhojen käsitysten ja mielikuvien ja toisaalta uusien vaatimusten ristipaineessa.

Patrikaisen (1997, 166-167) mukaan opettajan ajattelu ei ole luonteeltaan dikotomista joko behavioristiseen tai konstruktivistiseen äärelaitaan sijoittuva, vaan pikemminkin dimensionaalinen. Ajattelun ja toiminnan tasolla opettaja ikään kuin liukuu näiden ulottuvuuksien välillä tilanteesta riippuen. Opettajan ajattelussa konstruktivistinen näkemys oppimisesta sisältää myös oppimisen behavioristisen puolen hallinnan. Tällöin opettaja näkee sekä konstruktivistisen että behavioristisen ulottuvuuden. Patrikaisen tutkimustulosten mukaan opettajan pedagogisen ajattelun behavioristinen ulottuvuus ei näyttäisi sisältävän konstruktivistisen ajattelun tietoista hallintaa.

## 5 MATEMATIIKAN ESIOPETUS

Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (1996, 8) esiopetus tarkoittaa suunnitelmallista opetusta ja kasvatusta. Lapsella on mahdollisuus siihen ennen oppivelvollisuuteen kuuluvan opetuksen alkamista. Esiopetus sijoittuu päivähoitoon tai peruskoulun yhteyteen. Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet on tarkoitettu peruskoulun yhteydessä tapahtuvaan 6-vuotiaiden opetukseen ja toimintaan. Mielestäni se on hyvä perusta myös muulle esiopetukselle kattaen myös pienimmät päivähoitossa olevat lapset, koska se on hyvin yleinen ja perustuu tämän hetken käsityksiin lapsesta ja oppimisesta. Sen pohjalta voidaan laatia yksityiskohtaisempia opetussuunnitelmia.

Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (1996) ja Hannele Ikäheimon (1995, 1998) sekä Ikäheimon ym. (1997) matematiikan esiopetusta käsittelevissä kirjoissa on konstruktivistisen oppimiskäsityksen ideoita. Lapsi nähdään aktiivisena tiedon hankkijana ja rakentajana. Lapsen kokemukset, konkreettisuus ja kokonaisvaltaisuus ovat oppimisen lähtökohtia.

### 5.1 Matematiikan esiopetuksen sisällöt ja tavoitteet

Esiopetuksen sisältöalueina ovat kieli ja kommunikaatio, matemaattiset käsitteet, luonto- ja ympäristötieto, uskonto, etiikka, liikunta, terveys ja eri taidemuodot. Näitä alueita käsitellään kokonaisvaltaisesti teema- ja projektityöskentelyn avulla. Varsinaista oppiainejakoa ei ole. Tavoitteissa näkyvät tietojen ja taitojen ohella lapsen valmiuksien tukeminen, kokemuksellisuus ja etiikka. Esiopetuksessa tulisi huomioida lapsen spontaanit leikit, kiinnostuksen kohteet ja kokemukset, luovuus ja aktiivisuus. Näihin yhdistetään käsiteltävän asian tieto- ja taitosisällöt. (Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 1996, 20-23.) Esimerkiksi matematiikka on kokonaisvaltaisesti mukana lapsen arjessa: liikutaan tilassa, mitataan pituuksia, pelataan pelejä, opitaan käsitteitä.

Käsitteiden oppimisen nivominen peleihin, leikkeihin ja tarinoihin motivoi ja tuo käsitteet esille lapselle tutulla tavalla, mikä helpottaa oppimista. Opettajien omat koulukokemukset matematiikasta voivat johtaa kynä-paperi -työskentelyyn, yhteen- ja vähennyslaskujen



tekemiseen tehtäväkirjoista. Se tuntuu oikealta matematiikalta. Kuitenkin liian aikainen symbolitasolle siirtyminen voi vaikeuttaa käsitteiden ymmärtämistä, mikä jatkossa voi aiheuttaa oppimisvaikeuksia. Ikäheimo korostaa matemaattisten valmiuksien ja käsitteiden ymmärtämisen kehittymisen tukemista. (Ikäheimo 1998, 241.)

Kun matematiikan oppiminen on hauskaa ja leikinomaista, kehittyy lapselle myönteinen asenne matematiikkaa kohtaan. Lapsi muistaa elämyksellisesti myönteisesti koetut asiat. Leikinomaisuus motivoi, auttaa lasta keskittymään ja antaa onnistumisen elämyksiä. (Ikäheimo ym. 1997, 6; Malaty 1998, 20.) Myös haastavien tehtävien ratkaiseminen tuo kokemuksia onnistumisesta. Kun lapsen saavutus huomioidaan, lisää se hänen itseluottamustaan ja itsetuntoaan. Samalla lapsi tulee tietoiseksi oppimisestaan. Tällaiset hetket tukevat myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan. (McPherson & Payne 1987, 75-76.)

Matematiikan esi- ja alkuopetuksen sisältöalueet ovat (Ikäheimo ym. 1997, 10-17):

1. Luokittelu  
Muodostetaan ryhmiä eri ominaisuuksien perusteella.
2. Vertailu ja yksi-yhteen vastaavuus  
Vertaillaan ominaisuuksia ja etsitään samanlaisia ja erilaisia. Opetellaan esimerkiksi käsitteitä enemmän-vähemmän-yhtä monta, ylhäällä-alhaalla, painavampi-kevyempi-yhtä painava, aikaisemmin-myöhemmin-nyt.
3. Järjestykseen asettaminen ja sarjoittaminen  
Asetetaan järjestykseen esimerkiksi massan, pituuden, tilavuuden ja lukumäärän suhteen.
4. Päättelminen  
Päättelmissen taito kehittyy lapsella jatkuvasti.
5. Lukukäsite  
Käsitellään luonnollisia lukuja. Tärkeää on huomioida, että numero ei ole sama kuin luku. Esimerkiksi luku kaksikymmentäkolme merkitään numeroilla 2 ja 3.
6. Lukujonot  
Lukujen luetteleminen on edellytyksenä aritmeettisten operaatioiden hallinnalle.
7. Järjestysluvut  
Käsitellään järjestyslukuja, joita merkittäessä käytetään numeron jälkeen pistettä.
8. Lukujen osittaminen ja koonta  
Osittaminen ja koonta edeltävät yhteen- ja vähennyslaskuja.
9. Laskutoimitukset  
Konkreettiset materiaalit auttavat lasta ymmärtämään laskutoimitukset.
10. 10-järjestelmä  
Ymmärtämällä 10-järjestelmän selkeytyy lapselle lukujen maailma. Ulkoa oppiminen ei tuota ymmärtämistä. Luvut koostuvat ykkösistä, kymmenistä, sadoista jne. Tätä voidaan opetella erilaisten pelien avulla.
11. Mittaaminen  
Mitataan aikaa, massaa, pituutta ja tilavuutta.
12. Geometria  
Tutustutaan kappaleisiin ja tasokuvioihin. Hahmotetaan 2- ja 3-ulotteisuutta.
13. Tilastot  
Tehdään tilastoja eri aiheista, esimerkiksi säästä tai kotieläimistä.

Esiopetus aloitetaan kohdista 1-4 ja edetään lasten tahdissa. Kohtia 11-13 opetellaan rinnakkain kohtien 1-10 kanssa. (Ikäheimo ym. 1997, 10-17.)

Metz (1988, 185-192) puolestaan näkee pienten lasten matematiikan osa-alueina spatiaaliset käsitteet, mittaamisen ja numerot. Spatiaaliset käsitteet alkavat hahmottua lapselle jo hänen liikkueessaan tilassa ja tutkiessaan sitä. Tilan ja muodon lisäksi lapsia kiinnostaa mittaaminen. Mittaamisessa tarvitaan yksikköjä, jotka muodostavat sillan numeroihin. Ikäheimo ym. (1997) ovat esittäneet sisältöalueet yksityiskohtaisesti, mikä tukee opettajaa työssään. Opettajan on helppo hahmottaa opetuksen sisältöjä. Toisaalta yksityiskohtaiset sisältöalueet saattavat jäykistää opetuksen tiettyihin raameihin.

Esiopetuksen kokonaisvaltaisuuden pitäisi näkyä myös matematiikan opetuksessa. Ikäheimo (1995, 48, 50) esittää, että jos matematiikan sisällöt opiskellaan erillisinä, menetetään mahdollisuus huomata matematiikan soveltamisen merkitys jokapäiväisessä elämässä. Soveltaminen edellyttää matematiikan rakenteiden ymmärtämistä.

Ikäheimo (1995, 48) näkee matematiikan kuitenkin hierarkisena oppiaineena. Uuden oppimisen pohjana on edellisen asian hallinta, jolloin opetuksessa edetään johdonmukaisesti helposta vaikeampaan. Se vaatii opettajalta suunnittelua etukäteen. Leinon (1998, 46-48) mukaan opetussuunnitelma on viitekehys matematiikan opetukselle. Se ei kuitenkaan saa kahlita, sillä opetussuunnitelma hierarkisine järjestelmineen hahmottaa yksipuolista ja virheellistä käsitystä matematiikasta. Siten matematiikka ei näy lapsille elävänä ja muuttavana.

Kun opettajalla on selkeä käsitys siitä, mihin keskeisiin tavoitteisiin kaikkien oppilaiden osalta pyritään, antaa se opettajalle uskallusta eriyttämiseen. Lapset voivat toimia opettaja-johtoisesti, pienryhmissä yhdessä keskustellen ja toimien tai tehden yksilöllisesti eri taseisia tehtäviä. (Ikäheimo 1995, 45.) Opetussuunnitelma ja tavoitteet ovat kehyksenä, jonka sisällä matematiikan opetuksen tulisi olla joustavaa ja yksilöllistä huomioiden lasten kiinnostuksen kohteet.

Vanhemmille on tärkeää kertoa matematiikan opetuksen tavoitteista ja menetelmistä päiväkodissa (Ikäheimo 1995, 45). Vanhemmista voi tuntua, että matematiikka päiväkodissa on koulumaista pöydän ääressä istumista ja lapset eivät saa leikkiä tarpeeksi. Kun vanhemmille kerrotaan päiväkodin toiminnasta ja he itse saavat kertoa lapsestaan, välteään ennakkoluuloja.

Lapsen toiminnan havainnointi ja keskustelu auttavat opettajaa selvittämään lapsen kehityksen tason ja matemaattisen ajattelun etenemisen. Siten lapselle voidaan antaa haasteellista, mutta ei liian vaikeaa toimintaa. Oppimistulosten diagnosointi auttaa tavoitteiden asettamisessa, toiminnan arvioinnissa ja oppimisvaikeuksien ennaltaehkäisyssä. (Ikäheimo ym. 1997, 7; McPherson & Payne 1987, 80.)

## 5.2 Matematiikan esiopetuksen lähtökohdat

Esiopetuksen perustana on näkemys lapsesta aktiivisena tiedonhankkijana ja oman tietorakenteensa rakentajana, jolloin oppimisen perustana ovat lapsen omat kokemukset ja lähiympäristö. Lapsi haluaa ymmärtää ja hallita asioita ja kokea onnistumista. Tässä apuna ovat kokeileminen, tutkiminen ja ryhmässä toimiminen. (Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 1996, 14.) Jo pienellä lapsella on erilaisia kokemuksia matematiikasta esimerkiksi hänen tutkiessaan fyysistä ympäristöä. Tämä lapsen aikaisempi tietorakenne on hyvä lähtökohta opetukselle. (Metz 1988, 189, 197; McPherson & Payne 1987, 75.)

Lapsi oppii vuorovaikutuksessa ympäristön kanssa, jolloin keskustelun merkitys korostuu matematiikan opetuksessa (Metz 1988, 197). Kysymysten ja saamiensa vastausten avulla lapsi hahmottaa ympäristöään. Lapsen kysymyksiä voidaan hyödyntää oppimisessa. Kielen kehittyessä lapsi oppii uusia käsitteitä, joiden avulla hahmottaa ympäröivää todellisuutta. Vähitellen tämän pohjalta kehittyy myös abstraktinen ajattelu. Muotoilemalla ja ratkaisemalla itse ongelmia, perustelemalla ja soveltamalla oppimaansa uusiin tilanteisiin kehittyvä luova ajattelu. Siten aikuiselle myös selviää lapsen näkemykset ja menettelytavat. (Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 1996, 15.)

Aikuinen ohjaa oppimista ja osittain myös suuntaa lapsen kiinnostusta esimerkiksi oppimisympäristöä luodessaan. Hyvä oppimisympäristö innostaa lasta oppimaan uutta ja antaa mahdollisuuden monipuoliseen toimintaan. Myös lähiympäristö tarjoaa mahdollisuuksia erilaisten asioiden oppimiseen. Välineiden tulisi olla lasten ulottuvilla, mahdollisuuksien mukaan myös tietokone. (Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 1996, 18.)

Oppimisympäristön ja opetuksen pohjana on lapsen konkreettinen maailma. Kun lapsi omakohtaisesti oivaltaa opiskeltavan käsitteen, pystyy hän vastaanottamaan siihen liittyvää uutta asiaa. Erilaisten välineiden avulla voidaan konkretisoida käsitteitä. (Ikäheimo 1995, 44; Metz 1988, 200.) Sadut ja mielikuvitus motivoivat lasta, helpottavat ymmärtämistä ja uuden asian omaksumista. (Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 1996, 14.) Eri tutkimusten tulosten mukaan konkreettisten materiaalien käyttö matematiikan opetuksessa parantaa oppilaiden matemaattisia saavutuksia ja asennetta matematiikkaa kohtaan (Sowell 1989, 498).

Iso-Britanniassa lapset tulevat kouluun jo 5-vuotiaina. Kaikki 5-16-vuotiaat koululaiset opiskelevat yhtenäisen opetussuunnitelman mukaan, jossa ydinoppiaineet ovat englannin kieli, matematiikka ja luonnontieteet. Näiden lisäksi on seitsemän perusoppiainetta: historia, maantiede, teknologia, vieras kieli, kuvaamataito, musiikki ja liikunta. Tarkoitus on, että oppilaat eivät peruskoulussa erikoistu joillekin tietyille alueille. Opetussuunnitelmassa ovat valtakunnalliset tavoitelauseet ja arviointikäytäntö ikäryhmille 7, 11, 14 ja 16. (Berry 1990, 14-15.) Suomessa päiväkodeissa ja kouluissa tehdään yksikkökohtaisia opetussuunnitelmia, joita ohjaavat valtakunnalliset opetussuunnitelmien perusteet ja kuntatason opetussuunnitelmat. Erityisesti päiväkodeissa on pitkät perinteet yksikkö- ja ryhmäkohtaiselle sekä yksilölliselle suunnittelulle. Varhaiskasvattajilta ja opettajilta tämä vaatii paljon panostamista ja vastuuta suunnitteluun, mutta mahdollistaa myös valintojen tekemisen ja yksilöllisyyden sekä alueittaisten erityispiirteiden huomioimisen. Tavoitteet

ja opetuksen toteutus voivat vaihdella paljonkin eri yksiköiden ja ryhmien välillä myös matematiikassa.

Iso-Britanniassa matematiikan opetus on muuttunut 1980-luvulla. Aikaisemmin opettaja kirjoitti taululle esimerkkejä, joita lapset kopioivat ja harjoittelivat. Pyrkimyksenä on ollut muuttaa matematiikan opetusta opettajakeskeisestä oppilaskeskeisemmäksi. Matematiikka liitetään muihin oppiaineisiin. Oppitunneilla ratkaistaan käytännön tehtäviä ja ongelmia sekä tehdään ryhmissä tutkimustehtäviä. Matematiikka on aine, joka on käyttökelpoinen arkipäivässä ja hauskaa. Tarkoituksena on johdattaa oppilaat tekemään itse ja löytämään matemaattisia käsitteitä. Siten tarjotaan myös mahdollisuus perustaitojen ja laskurutiinien harjoitteluun ja lujittamiseen. (Berry 1990, 11.)

Myös Suomessa matematiikan opetusta pyritään kehittämään koulun puolella ja myös varhaiskasvatuksessa (kts Ikäheimo 1995; Ikäheimo ym. 1997). George Malaty (1997, 67) on Joensuussa kehittänyt ja kokeillut alkuopetuksen ja päiväkodin opettajien kanssa matematiikan opetuksen sisältöä, menetelmiä ja materiaaleja. Rauni Mutanen (1998) on tutkinut esiopetuksen merkitystä matematiikan opiskelulle alkuopetuksessa. Päiväkodissa matematiikkaa opiskelleet menestyivät jonkin verran vertailuryhmää paremmin matematiikassa alkuopetuksessa. Lisäksi heidän asennoitumisensa matematiikkaan ja matematiikan minäkäsitys olivat myönteisiä. Lindgren (1990) puolestaan on tutkinut toimintamateriaalin käyttöä matematiikassa. Kirja Peruskoulun matematiikan opetuksen kehityssuunnasta 1990-luvulla (Halinen ym. 1991, 26-30) korostaa opetusmenetelmien monipuolistamista:

1. Opetuksen tulisi olla oppilaskeskeisempää.
2. Matematiikan luonnetta käyttötieto -taitona olisi korostettava.
3. Lähestymistavan tulisi olla ongelmakeskeinen.
4. Matematiikan tunneilla pitäisi olla kommunikointia.
5. Projektityöskentelyä voitaisiin käyttää enemmän.

George Malaty (1998, 20) kritisoi suomalaisten matematiikan oppikirjojen tasoa. Vertailtaessa niitä OECD-maiden oppikirjoihin huomataan, että ensimmäisen luokan kirjoja vastaavia oppikirjoja tarjotaan muualla 5-6-vuotiaille. Opetushallituksen vuonna 1996 käynnistämän Luma-projektin tavoitteena on kehittää luonnontieteellisten ja matemaattisten aineiden opetusta ja osaamista. Tässä projektissa on varhaiskasvatus kuitenkin jäänyt sivuosaan. Malatyn mielestä Suomessa aliarvioidaan pientä lasta matematiikan oppijana. McPherson ja Payne (1987, 75) korostavat lapsen varhaisvuosien merkitystä perustana hänen myöhemmälle oppimiselleen myös matematiikassa. Lapsella on jo ennen kouluikää monia kokemuksia matematiikasta. Arkipäivän tilanteissa lapsi käyttää matemaattista kieltä ja ajattelua. Matematiikka on lapsille käytännöllistä toimintaa; esimerkiksi lapsen on ymmärrettävä suhteita, tunnistettava samankaltaisuuksia, muotoja ja symmetriaa ja käsiteltävä numeerista tietoa. Nämä lapsen aikaisemmat kokemukset tulisi ovat perusta matematiikan opetuksessa, niin päiväkodissa kuin koulussakin.

## 6 KÄSITYKSET MATEMATIIKASTA JA OPPIMISESTA OPETUSKÄSITYKSEN PERUSTANA

Oppimis- ja opetusteorioita on usein kehitetty toisistaan erillään. Perustana opetuskäytännöille pitäisi kuitenkin olla oppimisteoriat eli näkemys siitä, miten oppilaat oppivat. Siten opettajan huomio keskittyy oppimisprosessiin; hänestä tulee oppimisen ohjaaja. Oppimiseen ja opetukseen liittyvässä kirjallisuudessa käytetään samoja termejä, joten Vermunt ja Verloop kuvaavat oppimis- ja opettamistapahtumia toistensa peilikuviksi. Oppijan toiminta voidaan jakaa kolmeen osa-alueeseen: kognitiiviseen, affektiiviseen ja metakognitiiviseen. Myös opettaja toimii näillä alueilla. Kognitiivisella osa-alueella oppilas analysoi, soveltaa, valikoi, kun taas opettaja esittää ja selkeyttää opiskeltavaa aihetta. Affektiiviseen osa-alueeseen kuuluvat motivoituminen, keskittyminen, tunteiden käsittely. Opettaja taas pyrkii luomaan emotionaalisesti ja motivaation kannalta positiivisen ilmapiirin. Metakognitiivisella oppimisprosessin osa-alueella ovat oppilaan orientoituminen, suunnitteleminen ja arviointi ja opettaja puolestaan ohjaa oppimisprosessia. (Vermunt & Verloop 1999, 258-259, 265.)

Oppiminen ei ole vain tiedon siirtoa opettajalta oppilaalle, vaan oppilaan aktiivinen itseohjautuva prosessi. Tällaisessa prosessorientoituneessa opetuksessa tavoitteena on opettaa tiedon lisäksi oppimis- ja ajattelustrategioita, joita oppilaat tarvitsevat rakentaakseen, muuttaakseen ja käyttääkseen hyödyksi tietoa. (Vermunt & Verloop 1999, 274.) Matematiikan opetuksen tulisi perustua näkemykseen siitä, miten lapset matematiikkaa oppivat. Opetus on siten oppimisen heijastus. Sen tavoitteena on vastata oppilaiden tarpeisiin, ohjata heidän oppimisprosessiaan. Tällöin ei voida opettaa vain matemaattista tietoa, vaan myös strategioita sen soveltamiseen. Oppimis- ja tiedonkäsitys ovat opettamisen pohjana.

Opettajan käsitys oppimisesta voi liikkua kahdella ulottuvuudella. Oppimisen voi nähdä aktiivisena tiedon konstruointina vastakohtana passiiviselle tiedon vastaanottamiselle. Toisella ulottuvuudella kehitetään lapsen autonomisuutta ja kiinnostusta matematiikkaan vastakohtana näkemykselle oppijasta alistuvana ja mukautuvana. Tämän perusteella voidaan erottaa neljä mallia lapsen roolista oppimistapahtumassa. Lapsi on mukautuva, ja tärkeää on hallita erilaisia taitoja. Toisen mallin mukaan lapsi voidaan nähdä myös tiedon vastaanottajana. Kolmannen mallin mukaan lapsi on aktiivinen oman ymmärryksensä ra-

kentaja. Neljännen mallin mukaan lapsi on tutkija, joka itsenäisesti etsii oman kiinnostuksensa kohteita. (Ernest 1989, 251.)

Käsitykset matematiikasta ja sen opettamisesta ja oppimisesta liittyvät yhteen. Se, miten tieto (matematiikka) käsitetään, vaikuttaa oppimiskäsitykseen ja päinvastoin. Instrumentaalinen käsitys matematiikasta yhdistyy käsitykseen oppimisesta matemaattisten taitojen hallintana ja pyrkimyksenä oikeisiin suorituksiin. Tämä on behavioristisen oppimiskäsityksen mukainen. Konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen sopii käsitys matematiikasta ongelmanratkaisuna. Opettaja tukee lapsia itsenäiseen ongelmien muotoiluun ja ratkaisuun eli lapsi on aktiivinen oman ymmärryksensä rakentaja. Vahvaan konstruktivismiin sopii käsitys lapsesta itsenäisenä tutkijana ja omien kiinnostuksen kohteidensa määrittelijänä. Näiden väliin sijoittuu mielestäni platoninen käsitys matematiikasta, jossa tieto nähdään objektiivisena ja todellisuus ulkoisena, aistein havaittavana. Opettaja auttaa lapsia ymmärtämään käsitteellisesti matemaattisen tiedon rakennetta. Tätä kutsutaan heikoksi konstruktivismiksi (Haapasalo 1998, 61). Opettaja voi tällöin opettaa myös behavioristisesti tarjoten tämän paketin sopivina osasina.

Kuhn ja Ball ovat Thompsonin (1992, 136-137) mukaan esittäneet neljä näkemystä matematiikan opettamisesta.

1. Oppilaskeskeisessä näkemys korostaa oppijan omaa konstruktiota matemaattisesta tiedosta. Lapsi on silloin aktiivinen toimija. Se vastaa konstruktivistista oppimiskäsitystä ja käsitystä matematiikasta ongelmanratkaisuna.
2. Opetuksessa lähdetään matematiikan sisällöistä, mutta tärkeää on käsitteellinen ymmärtäminen. Pohjalla on platoninen näkemys matematiikasta. Tavoitteena on, että oppilas ymmärtää matemaattisten ideoiden loogiset suhteet ja matemaattisten menettelytapojen logiikan.
3. Kolmas näkemys eroaa kahdesta edellisestä keskittyen matematiikan sisältöön, sääntöihin, menetelmiin ja tehtävien suorittamiseen. Opetustapa on behavioristinen ja perustana on instrumentaalinen näkemys matematiikasta.
4. Opetuksessa keskeisenä on luokkahuone. Opetuksen on oltava strukturoitu ja tehokkaasti organisoitu. Opettaja keskittyy opetustilanteen hallintaan ja järjestyksen ylläpitoon.

Yksittäisen opettajan ajattelu ei yleensä ole puhtaasti jonkin näkemyksen mukainen, vaan siinä on osasia useammista näkemyksistä.

Sinikka Lindgren (1995, 37-41, myös 1996, 54-55) tutki opettajaksi opiskelevien käsityksiä matematiikasta ja sen opettamisesta. 105 opiskelijaa täytti Likert-tyyppisen kyselylomakkeen. Lisäksi 12 opiskelijaa valittiin haastatteluun ja heidän opetusharjoittelun aikana pitämiään tunteja videoitiin. Pitemmällä aikavälillä Lindgren tutkii heidän käsitystensä muuttumista opettajankoulutuksen aikana. Pohjana tutkimuksessa on Thompsonin (1992) teoria opettajien hierarkisista käsityksistä matematiikan opettamisesta. Lindgren käyttää Thompsonin tasosta 0 nimitystä Säännöt ja rutiinit (SR), taso 1 on Keskustelut ja pelit (KP) ja taso 2 on Avoin lähestyminen (AL). Tasojen määritelmiä ovat:

Avoin lähestyminen:

- näkemys, että saman tuloksen voi saavuttaa eri tavoilla
- oppilaiden tukeminen erilaisten ongelmanratkaisustrategioiden löytämiseen ja niistä keskustelemiseen

- konkreettien välineiden käyttö
- matemaattisen ajattelun tärkeyden korostaminen

#### Keskustelut ja pelit:

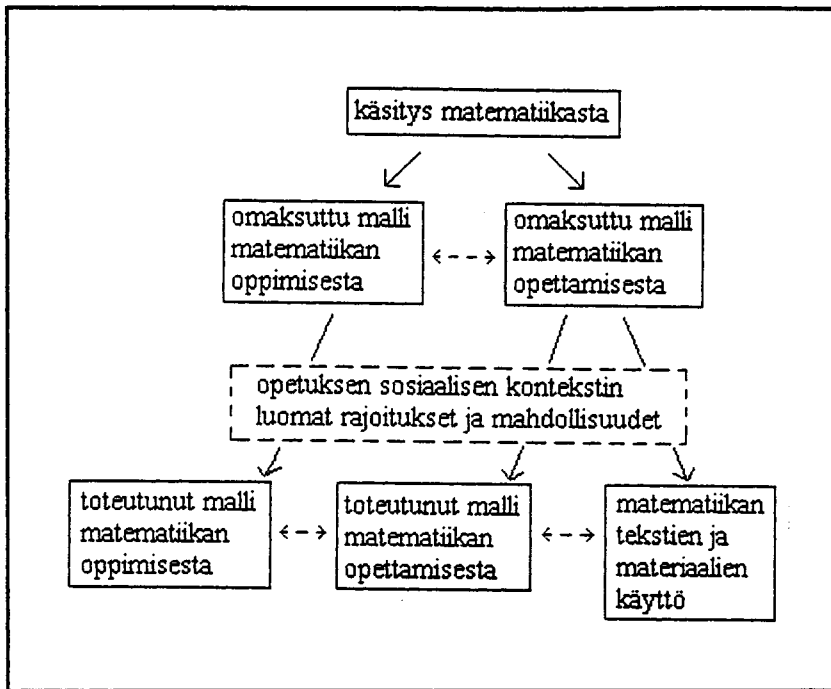
- opettajan tulisi mahdollistaa keskustelu luokassa
- opettaja ei saa korostaa yksilöllistä työskentelyä
- opettajan pitäisi antaa oppilaiden käyttää oppimislejää
- opettajan tulisi tukea oppilaiden kykyä työskennellä yhdessä

#### Säännöt ja rutiinit:

- matemaattisen tiedon opettaminen (säännöt, määritelmät...)
  - tärkeintä on, että oppilaat saavat oikeita vastauksia
  - oppilaiden on harjoiteltava paljon
  - oppilaiden on opittava hallitsemaan peruslaskut
  - opettajan tärkein tehtävä on pitää yllä järjestystä luokassa
- (Lindgren 1996, 55.)

Keskustelut ja pelit -tason Lindgren jakoi kolmeen sen mukaan, miten se meni päällekkäin AL- ja SR-tasojen kanssa. Tämän kolmeen osaan jaetun KP-tason hän näkee alueena, jossa käsitys matematiikan opettamisesta kehittyy. AL on korkein taso ja SR matalin. Keskimäinen näistä tasoista kuvaa opettajaa, jonka ajattelussa yhdistyvät kaikkien tasojen näkemykset matematiikan opettamisesta. (Lindgren 1996, 56.) AL-taso on lähempänä konstruktivistista näkemystä opettamisesta ja SR-taso behavioristista näkemystä. Taso SR vastaa Kuhnin ja Ballin edellä esitetyn ajattelun kohtia 3. ja 4. AL-tasoa vastaa oppilaskeskeinen näkemys ja KP-tasoa sisällön käsitteellinen ymmärtäminen.

Nämä eri tasot ja näkökulmat kokoavat yhteen eri käsitykset matematiikasta sekä yhdistävät ne käsityksiin oppimisesta ja opettamisesta. Samalla eri käsitykset konkretisoituvat esittäytyen matematiikan opetuksen käytännön näkökulmasta. Kuviossa 1 on esitetty eri käsitysten väliset yhteydet käytännön opetustyöhön.



Kuvio 1. Käsitukset suhteessa käytännön opetustyöhön (Ernest 1989, 252)



## 7 TUTKIMUSONGELMAT

Tutkimusongelmat olen muodostanut Paul Ernestin (1989, 250) matematiikkakäsitysten pääosien perusteella. Matematiikkakäsitys muodostuu käsityksistä matematiikan luonteesta, matematiikan opettamisesta ja oppimisesta. Nämä liittyvät läheisesti toisiinsa, toisaalta käsityksissä voi olla myös ristiriitaisuuksia. Käsitykset sisältävät uskomuksia ja tietoa matematiikasta. Ne muodostuvat omakohtaisten kokemusten ja tiedon pohjalta. Oppimiskäsityksistä behaviorismi on edelleen kouluopetuksen pohjana ja sen haastajana on konstruktivistinen oppimiskäsitys. Käsityksen matematiikan opettamisesta taustalla on näkemys siitä, miten lapsi oppii. Matematiikan luonne kuvaa käsitystä matematiikasta tieteenä ja kouluaineena. Näistä näkemyksistä muotoutui ensimmäinen pääongelma. Toisena pääongelmana on, miten päiväkodin työntekijöiden saama matematiikan koulutus on vaikuttanut, miten he ovat kokeneet koulutuksen ja onko se muuttanut heidän käsityksiään matematiikasta.

- 1 Millaisia ovat päiväkodin työntekijöiden käsitykset matematiikasta?
  - 1.1 Miten he tulkitsevat matematiikan luonteen?
  - 1.2 Miten he tulkitsevat matematiikan opettamisen?
  - 1.3 Miten he tulkitsevat matematiikan oppimisen?
- 2 Mitä matematiikkaprojekti ja siihen liittyvä koulutus ovat merkinneet päiväkodin työntekijöille?

## 8 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Matematiikan opetuksen tutkimuksissa on käytetty kahta erilaista metodologiaa. Toiset tutkijat ovat käyttäneet kyselyjä ja määrällistä tutkimusotetta. Toiset taas ovat keränneet aineiston haastattelujen ja havainnoinnin avulla ja päätyneet laadulliseen analyysiin. Näitä metodologioita voidaan myös yhdistää. (Pehkonen 1995, 30.)

Valitsin kvalitatiivisen lähestymistavan tutkimukseeni. Se mahdollistaa syvällisen, avoimen ja yksityiskohtaisen todellisuuden tutkimisen ja ymmärtämisen. Koska tutkittavien joukko on pieni kvantitatiivisiin tutkimuksiin verrattuna, vähentää se tutkimustulosten yleistettävyyttä. (Patton 1990, 14.) Laadullisessa tutkimuksessa aineisto tulisi kerätä niin, että se mahdollistaa monipuolisen tarkastelun. Kvalitatiiviselle aineistolle on ominaista ilmaisullinen rikkaus, monitasoisuus ja kompleksisuus. Siten näkökulmaa ei ole etukäteen rajattu. (Alasuutari 1994, 74-75.) Kvalitatiivisessa tutkimuksessa pyritään selvittämään ja ymmärtämään toisten ihmisten näkemyksiä maailmasta, kokemuksia, havaintoja ja tunteita. Niitä ei luokitella etukäteen, vaan annetaan ihmisten itse kertoa, miten he näkevät asiat. (Patton 1990, 24.)

Fenomenografinen tutkimus pyrkii selvittämään, miten ihmiset kokevat tai ajattelevat laadullisesti eri tavoin jostakin ilmiöstä. Se on kiinnostunut niistä suhteista, joita on ihmisen ja häntä ympäröivän maailman välillä; mikä on ajattelun sisältö, mikä on ihmisen käsitys maailmasta. (Marton 1988, 144.) Eri ihmisillä on eri käsityksiä samasta ilmiöstä. Ilmiö on ihmisen ulkoisesta tai sisäisestä maailmasta saama kokemus. Siitä hän aktiivisesti rakentaa käsityksen. Ilmiö ja käsitys ovat samanaikaisia ja siten erottamattomia. Käsitykset eroavat laadullisesti eli sisällöllisesti, koska ihmisten kokemustaustat ja kokemusten yhteydet muihin tapahtumiin ovat erilaisia. (Ahonen 1994, 114, 116.) Myös matematiikasta ja sen opiskelusta ja opettamisesta on ihmisillä erilaisia kokemuksia ja siten erilaisia käsityksiä. Ahosen (1994, 119) mukaan oppiminen koskee aina jotain sisältöä. Eri tiedonaloilla oppiminen voi olla erilainen prosessi ja fenomenografisissa tutkimuksissa onkin selvitetty erilaisten tiedonalojen prosesseja. Tutkimukseni tavoitteena on selvittää matemaatiikkaan liittyviä käsityksiä, joita lähestyn fenomenografisesti.

## 8.1 Korpilahden päiväkoti ja matematiikan esiopetuksen projekti

Valitsin tutkittavaksi Korpilahden päiväkodin lastentarhanopettajat ja lastenhoitajat, koska he ovat toteuttaneet matematiikkaprojektia päiväkodissaan. Heille matematiikka on tuttu ja tiedostettu asia, joten arvelin, että heillä olisi valmiuksia pohtia ja eritellä käsityksiään matematiikkaan liittyen. Tutkimusluvan sain Korpilahden päiväkodin johtajalta (liite 1).

Korpilahden päiväkodissa työskentelee vakituisesti viisi lastentarhanopettajaa ja neljä lastenhoitajaa. Lapsiryhmiä on kolme, joissa on yhteensä 65 lasta. Peukaloisten ryhmä on 1-4-vuotiaiden sisarusryhmä, Peipot on 4-6-vuotiaiden kokopäiväryhmä ja Pääskyt 6-vuotiaiden kokopäiväryhmä.

Matematiikan esiopetuksen projekti toteutettiin tammikuusta 1997 alkaen kevääseen 1998 Jyväskylän yliopiston Varhaiskasvatuksen laitoksen opettajan Anna-Maija Erämaa-Lätin vetämänä. Kaikki päiväkodin työntekijät olivat halukkaita sitoutumaan projektiin liittyvään koulutukseen ja kehittely- ja suunnittelutyöhön. Projekti toteutettiin toimintatutkimuksena. Tavoitteena oli:

- suunnitella, toteuttaa ja kehittää matematiikan esiopetusta päiväkotikäisille lapsille
- kehittää lasten matemaattisia valmiuksia leikin ja toiminnan kautta
- ennaltaehkäistä matematiikan vaikeuksia

Yhtenä tavoitteena oli myös oman kasvatuskäytännön ymmärtäminen ja kehittäminen. (Erämaa-Lätti & Kivelä 1999.)

Päiväkodin kasvatusvastuussa oleva henkilökunta sai kevään 1997 aikana koulutusta matematiikkaan liittyen noin parikymmentä tuntia. Kouluttajana toimi Anna-Maija Erämaa-Lätti. Koulutuksessa käytiin läpi esiopetuksen matematiikan sisältöjä, menetelmiä ja materiaaleja. Lapsen matemaattisen ajattelun kehittymistä lähestyttiin Piaget'n teorian kautta. Galperinin (1957) teorian avulla havainnollistettiin ulkoisen materiaalin tarpeellisuutta. Matematiikan opetuksen lähtökohdaksi oli lapsilähtöinen työskentelytapa, jossa huomioidaan nykyinen oppimis- ja tiedonkäsitys. Matematiikan esiopetuksen sisältöjen runkona oli edellä esittämäni Hannele Ikäheimon jaottelu (kts luku 5.1). Jo ennen matematiikkaprojektin toteuttamista on päiväkodissa oltu kiinnostuneita matematiikasta. Siellä on rakennettu esimerkiksi matematiikkaurakkaus, johon on koottu matematiikkaan liittyviä materiaaleja ja pelejä.

Haastattelin kahdeksaa päiväkodin työntekijää. Heistä yksi oli tullut päiväkotiin töihin vasta varsinaisen koulutuksen jälkeen, mutta hän oli talven ajan ollut mukana projektin toteutuksessa. Tämän haastateltavan osalta jäi koulutuksen merkitys haastattelusta pois. Haastattelut tein Korpilahden päiväkodissa 2.6. ja 3.6.1998, ensimmäisenä haastattelupäivänä kolme ja toisena viisi haastattelua. Haastattelupäivät oli valittu päiväkodin työntekijöille sopivana ajankohtana; kesäkuun alussa toiminta alkaa hiljentyä, mutta työntekijät eivät ole vielä ehtineet lähteä kesälomille. Haastattelujen kesto vaihteli reilusta puolesta tunnista lähes tuntiin.

## 8.2 Tutkimusmenetelmä

Fenomenografisen tutkimuksen keskeisin tapa kerätä tietoa on haastattelu (Marton 1988, 154). Taustalla on käsitys ihmisestä tietoisena subjektina, joka jäsentää kokemuksiaan ja rakentaa kuvaansa maailmasta. Kielen avulla ihminen ajattelee ja ilmaisee ajatuksiaan myös tutkijalle. (Ahonen 1994, 121.) Haastattelulla pyritään selvittämään asioita, joita ei pystytä suoraan havainnoimaan, esimerkiksi tunteet, aikomukset ja asioille annetut merkitykset. Tavoitteena on nähdä toisen henkilön perspektiivi. (Patton 1990, 278.) Erilaiset projektiiviset tehtävät täydentävät haastattelulla saatavaa aineistoa. Tällaisia tehtäviä ovat esimerkiksi kirjoittamis- ja piirtämistehtävät. Tutkittava voi tehtävässä ilmaista itseään ilman tutkijan läsnäoloa ja vaikutusta. Tehtävässä on jokin lähtökohta, joka vakioi tehtävän suoritusta. Tämä helpottaa tulkintaa, koska konteksti on selvillä. (Ahonen 1994, 141.)

Tutkimuksessa voi käyttää useampaa menetelmää aineiston keräämisessä. Tätä kutsutaan triangulaatioksi. Yksi menetelmä on kuin suodatin, joka antaa valikoivan kuvan todellisuudesta. Kun eri menetelmillä saadaan samanlaisia tuloksia, lisää se tutkimuksen luotettavuutta. (Cohen & Manion 1985, 254.) Triangulaatiota olisin voinut täydentää käyttämällä kyselyitä ja havainnointia.

Kun käytetään kyselyitä uskomusten tutkimiseen, saavutetaan usein vain pintataso eli tiedoiset uskomukset. Kyselylomaketta laatiessaan tutkija päättää sen kehyksen, jossa vastaajat pysyvät. Haastattelussa ja havainnoinnissa on mahdollista mennä syvemmälle ja selvittää myös tiedostamattomia uskomuksia. (Pehkonen 1995, 31.) Pohdin myös mahdollisuutta havainnoida matematiikan opetusta päiväkodissa. Päiväkodissa toiminta on kuitenkin hyvin kokonaisvaltaista, joten havainnoimalla vain joitakin matematiikan tuokioita olisi muu matematiikkaan liittyvä toiminta jäänyt huomioimatta. Lisäksi havainnoimalla saa kuvan käytännön toteutuksesta, mutta niiden takana olevat käsitykset jäävät silloin tutkijan arvioitaviksi. Siksi näin paremmaksi antaa tutkittavien itse puhua. Tutkimusmenetelminä käytin haastatteluja ja kirjoitelmia.

Haastatteluun on kolme lähestymistapaa. Epämuodollisessa keskustelunomaisessa haastattelussa kysymykset esitetään luonnollisessa vuorovaikutustilanteessa. Standardoidussa avoimessa haastattelussa kysymykset on muotoiltu ja järjestetty etukäteen, jotta haastattelu olisi kaikille samanlainen. Teemahaastattelussa on määritelty etukäteen teemat, jotka kaikkien haastateltavien kanssa käydään läpi. Näin varmistetaan, että tarvittavat tiedot saadaan kaikilta. Kysymysten sanamuoto ja järjestys on kuitenkin vapaa ja haastattelu etenee haastateltavan ehdoilla. (Patton 1990, 280.)

Valitsin teemahaastattelun, koska se on avoin, mutta siinä varmistuu olennaisten teemojen käsittely. Teemat (liite 2) muodostin tutkimustehtäväni pohjalta niin, että ne kattoivat kaikki tutkimusongelmat. Teemat menevät osittain päällekkäin, esimerkiksi käsitys oppimisesta ja opettamisesta ovat läheisesti yhteydessä, mutta niiden erottelu helpottaa haastattelun jäsentämistä.

Haastattelussa kysymysten tulisi olla mahdollisimman avoimia, jotta haastateltava voisi valita vastauksen ulottuvuuden. Tämä ulottuvuus on tärkeä osa aineistoa ja vaikuttaa

haastattelun suuntautumiseen. (Marton 1988, 154; Patton 1990, 290.) Fenomenografisessa tutkimuksessa haastattelun avoimuus johtuu ihmisten erilaisista käsityksistä tutkittavasta ilmiöstä. Haastateltava ei useinkaan vastaa tutkijan kysymykseen, vaan omaan tulkintaansa tästä kysymyksestä. Siten haastattelukysymyksiä voidaan alkaa rakentaa vasta, kun haastateltava on vastannut ensimmäiseen kysymykseen. (Gröhn 1992, 18.) Ahosen (1994, 137-138) mukaan haastattelussa runkona ovat tutkimusongelmiin liittyvät teemat ja muutama jäsentelevä kysymys.

Kaikissa haastatteluissa avauskysymyksenä kysyin: "Millaisissa tilanteissa teillä näkyy päiväkodissa matematiikka?" Kysymys johdatteli päiväkodin ja matematiikan maailmaan. Haastattelu alkoi siten hyvin konkreettiselta ja yleiseltä tasolta. Haastateltavat vastasivat tähän kysymykseen sisällöllisesti samalla tavoin, mutta suuntasivat vastauksellaan keskustelua eri tavoin. Useimmiten tästä siirryttiin pohtimaan matematiikan toteutusta päiväkodissa yleisellä ja sen jälkeen henkilökohtaisella tasolla sekä haastateltavan omaa suhtautumista matematiikkaan. Haastattelu saattoi suuntautua myös koulutuksen merkityksen pohtimiseen. Haastattelu eteni haastateltavan vastausten pohjalta. Teema-alueet kuitenkin varmistivat, että oleelliset asiat käsiteltiin. Tietoisesti pyrin ensin käsittelemään matematiikkaa konkreettisella tasolla haastateltavien omien kokemusten ja työn kautta. Enemmän pohtimista vaativat teemat matematiikan luonteesta ja oppimisesta käsiteltiin vasta tämän jälkeen. Viimeisenä kyselin koulutuksesta ja sen merkityksestä haastateltavalle. Tarkoituksena oli, että koulutuksesta saatu tieto ei olisi ohjannut haastateltavaa, vaan hän olisi pohtinut enemmän omia näkemyksiään. Etusijalla oli kuitenkin haastateltavan valitsema suunta haastattelun etenemisessä.

Haastattelu on kahden ihmisen välistä viestintää, joka perustuu kielen käyttöön, käsitteisiin ja merkityksiin (Hirsjärvi & Hurme 1984, 4-5). Haastattelijan tehtävä on helpottaa haastateltavan tiedon jäsentämistä ja esittämistä sekä motivoida. Haastattelijan on löydettävä kielellisen ilmaisun taso, joka sopii haastateltavan tasoon. On siis löydettävä yhteiset käsitteet. Kysymysten olisi sisällettävä oikea merkitys niin, että se välittyisi samanlaisena myös haastateltavalle. Hänen vastauksistaan haastattelijalla saa palautetta merkityksen ymmärtämisestä ja voi sen pohjalta tarkentaa käsitteitä ja esittää lisäkysymyksiä. (Hirsjärvi & Hurme 1985, 84-86.) Koska olen itse opiskellut lastentarhanopettajaksi, voi olettaa, että käsitteet ja merkitykset päiväkodin työntekijöiden kanssa ovat lähellä toisiaan. Toisaalta käytännön työ muokkaa niitä käytännön resurssien vaikuttaessa työhön. Työkokemus ja ikä antavat oman viitetaustan merkitysten muodostamiselle. Itselläni työkokemus on vähäistä, mutta päiväkodin arki ja siihen liittyvä kieli on tuttua. Viitetausta on siten melko samanlainen.

On tärkeää, että haastattelijan ja haastateltavan välille syntyisi luottamuksellinen vuorovaikutus, jotta tilanne ei olisi kuin kuulustelu, jossa haastateltava yrittää muistella kirjoista "oikeaa" vastausta (Ahonen 1994, 137). Kävin esittelemässä itseni ja tutkimukseni Korpilahden päiväkodissa tutustuakseni etukäteen haastateltaviin. Vietin myös kaksi päivää yhdessä lapsiryhmässä apuna, jolloin päiväkotituli tutummaksi. Mielestäni haastattelutilanne oli helpompi molemmille osapuolille, kun toisen tunsikin edes ulkonäöltä. Haastattelutilaksi rauhoitettiin päiväkodin kahvihuone. Haastattelutilanteeseen päiväkodin työntekijät tulivat keskeltä työtään, mikä saattoi vaikeuttaa keskittymistä työasioiden pyöriessä mielessä. Toisaalta he olivat jo "sisällä" päiväkodin maailmassa.

Aiheet, joihin liittyy voimakkaita sosiaalisia sovinnaisuuksia, houkuttelevat haastateltavaa vastaamaan sosiaalisesti suotavalla tavalla. Kun jokin tietty käyttäytyminen ja mielipiteen esittäminen on kunnioitettavampaa kuin jokin toinen, saattaa haastateltava väheksyä tai liioitella omaa käyttäytymistään ja mielipidettään. Tämä on haastattelijan kyettävä huomioimaan. (Hirsjärvi & Hurme 1984, 11.) Matematiikka herättää vahvoja tunteita ja asenteita, myös negatiivisia. On sosiaalisesti suotavaa kuitenkin suhtautua siihen positiivisesti. Siksi haastattelutilanteessa pyrin neutraaliuteen omassa asennoitumisessani ja kysymyksissäni. Myös päiväkodissa toteutettu koulutus olisi saattanut houkuttaa muistelemaan koulutuksessa esitettyjä ideoita eli etsimään sieltä ”oikeaa” vastausta. Siksi korostinkin jo tutkimuksen esittelyvaiheessa ja uudelleen haastattelussa, että halusin selvittää juuri haastateltavan omia käsityksiä ja ajatuksia ja kysyin vasta lopuksi koulutukseen liittyen sen merkityksestä vastaajalle. Haastateltavat kertoivatkin avoimesti negatiivisistakin kokemuksistaan matematiikkaan liittyen sekä esittivät myös kritiikkiä matematiikkaprojektia kohtaan.

Nauhoitin haastattelut ja kirjoitin haastattelupäivän jälkeen joitakin ajatuksiani ylös palauttaakseni tilanteen paremmin mieleeni aineiston analysointivaiheessa. Yhdessä haastattelussa loppui nauhurista virta, jolloin osa haastattelun keskivaiheilta liittyen haastateltavan oppimiskäsitykseen ei tullut nauhalle. Kävimme tätä aluetta läpi uudelleen vaihdettuani patterin nauhuriin. Lisäksi hän kirjoitti vielä myöhemmin paperille vastauksia tarkentaviin kysymyksiini. Näin kaikki teema-alueet tulivat käsiteltyä, mutta oppimiskäsitys jäi tämän haastateltavan osalta hiukan suppeammaksi.

Haastatteluja täydentämään käytin kirjoitelmia. Niissä haastateltavat kirjoittivat aiheesta Minä ja matematiikka. Ensimmäiset on tehty syksyllä 1997 ennen matematiikkakoulutuksen alkamista päiväkodin henkilökunnalle. Siten tämä kirjoitelma puuttuu yhdeltä haastateltavalta, koska hän ei vielä tässä vaiheessa ollut töissä tutkimuspäiväkodissa. Kirjoitelmat on alunperin laadittu koulutuksen toteuttajan käyttöön ja antamaan työntekijöille mahdollisuuden jäsentää tuntemuksiaan ja ajatuksiaan. Kirjoitelmat olivat hyvin vapaamuotoisia. Kevään 1998 aikana työntekijät kirjoittivat uudet kirjoitukset samalla otsikolla. Käytin kirjoitelmia vastaamaan lähinnä tutkimusongelmiin 1.1 käsitys matematiikasta ja 2 koulutuksen merkitys sekä pohjana haastattelurungon rakentamiseen. Kirjoitelmat antoivat alustavaa tietoa matematiikkaan liittyvistä käsityksistä ja niiden muuttumisesta. Niiden avulla oli myös mahdollisuus testata haastattelujen luotettavuutta.

Koska kirjoitelmat on saanut tuottaa vapaasti oman aikataulunsa mukaan eikä niitä ole suunnattu tutkimukseen, ovat kirjoittajat voineet kertoa vapaammin myös negatiivisista tunteistaan. Siten sosiaalisen suotavuuden vaikutus on mahdollisesti ollut pienempi. Toisaalta niitä ei ole suunniteltu juuri tätä tutkimusta varten. Kuitenkin otsikko Minä ja matematiikka ohjaa pohtimaan omaa suhtautumista matematiikkaan ja omia kokemuksia siitä. Kirjoitelman toistaminen antaa mahdollisuuden pohtia käsityksiä entistä tietoisemmin ja niistä on mahdollista nähdä muutoksia, joita koulutus on aiheuttanut. Toisaalta sosiaalinen suotavuus voi tulla näkyviin siinä, että kouluttajalle halutaan kertoa, että hänen koulutuksensa on ollut hyvä ja auttanut muuttamaan käsityksiä positiivisemmiksi.

### 8.3 Tutkimusaineiston analysointi

#### *Analysoinnin eteneminen*

Litteroin haastattelut, jotta voin palata niihin uudelleen. Litterointi tehdään sana sanalta puhutun kielen mukaisena, jotta vivahteet säilyisivät. (Ahonen 1994, 140.) Osa aineistosta on litteroitu käsin, osa tietokoneella. Käsin kirjoitettua tekstiä oli 31 sivua ja koneella kirjoitettua 28 sivua. Aineistosta jätin pois aiheeseen liittymättömät keskustelut, esimerkiksi alkujutustelut. Kuvaukset lasten matematiikkaan liittyvien leikkien säännöistä merkitsin lyhennettynä niin, että idea kävi selväksi, vaikka se ei ollutkaan sanasta sanaan litteroitu. Päiväkodin työntekijät olivat kirjoittaneet kirjoitelmat sekä käsin että koneella. Käsin kirjoitettua tekstiä oli seitsemän sivua, samoin kuin koneella kirjoitettua.

Kaikkea kvalitatiivisen aineiston rikkaudesta ei kuitenkaan saada tallennettua, koska aineistoa on tiivistettävä helpommin käsiteltävään muotoon. Esimerkiksi non-verbaalista viestintää ei haastattelussa saada välttämättä tallennettua. (Alasuutari 1994, 75-76.) Kvalitatiivinen aineisto on näyte tutkimuksen kohteesta. Analyysissä pyritään löytämään aineiston kulttuurinen paikka ja todistamaan aineiston avulla havaintojen merkitys mielekkääksi ja mahdolliseksi. Kvalitatiivisen aineiston analysointi- ja tulkintamahdollisuudet ovat moninaiset, koska informaatiomäärä on suuri. (Alasuutari 1994, 78-79.)

Pyrin lukemaan aineistoa avoimin mielin. Tämä vaatii omien oletusten ja ennakoasenteiden tiedostamista ja niiden siirtämistä taka-alalle (Perttula 1995, 91). Pohdin ja kirjasin ylös erilaisia käsityksiä oppimisesta ja opettamisesta sekä matematiikan luonteesta lukemani kirjallisuuden pohjalta. Näin halusin saada omat näkemykseni tietoisiksi. Tutkija tulkitsee ja pyrkii ymmärtämään merkityksiä. Koska tutkimuskohde ja tutkijan elämysmaailma ovat eri asia, on tutkijan pyrittävä irti omista merkityksistään, jotta hän ei tulkitsisi ilmiöitä vain oman kokemuksensa ja ymmärtämisensä kautta. Toisen elämysmaailmaa ei pysty kuitenkaan täysin ymmärtämään. (Varto 1992, 58-59.)

Tutkimushenkilöiden ilmauksista on etsittävä sen merkitys eli mikä intentio (ajatus tai tarkoitus) siihen sisältyy. Merkitys on usein asia- ja tilannesidonnainen, joten tutkimushenkilöiden vastauksia on tarkasteltava kokonaisuuksina. (Ahonen 1994, 123-124.) Tulkinta kohdistuu ajatukselliseen kokonaisuuteen, koska vain siitä voi tulkita merkityksen. Tutkija selvittää ajatusyhteydet haastattelutekstistä ja rajaa ja määrittelee siten tulkintayksiköitä. Tutkimuksen teoria ja ongelmanasettelu ovat tausta, jota vasten tulkintayksikköjen rajat voivat alkaa hahmottua. Teemahaastattelun teemat voivat olla tällaisia tulkintayksiköitä. Näiden sisällä voi olla useampia ajatuskokonaisuuksia, joista voi tulkita eri merkityksiä. Näin ajatuskokonaisuuksista muodostuu omia tulkintayksiköitä, vaikka ne teemaltaan liittyvätkin yhteen. Tulkintayksiköt asettuvat usein limittäin, koska ajatusyhteydet voivat ulottua laajalle. Sama ajatusyhteys voi tukea useampaa merkitystä. Siksi näitä yhteyksiä ei saa katkaista, vaan ilmaisu on otettava kokonaisuutena. (Ahonen 1994, 143.)

Perttula (1995, 91) käyttää käsitettä sisältöalue tulkintayksikön sijaan. Tutkimusaineistosta muodostetaan sisältöalueet, jotka jäsentävät joko koko tutkimusaineistoa tai yhdestä haastattelusta saatua aineistoa kerrallaan. Sisältöalueet voivat siten poiketa eri haastattelujen aineistojen välillä. Ne voivat vastata teema-alueita. Luin aineistoa läpi yhä uudelleen,

jolloin sisältöalueet (kts taulukko 2, sivu 42), jotka toistuivat eri haastateltavilla, alkoivat hahmottua. Nämä sisältöalueet pohjautuivat teema-alueisiin, haastattelukysymyksiin sekä haastateltavien tapaan käsitellä aihetta.

Tutkijan on eroteltava aineistosta relevantti epäoleellisesta. On löydettävä se, mikä ilmaisuihin kuvaa tapaa kokea ja ymmärtää ko. ilmiö. Analyysin edetessä tätä voidaan harkita uudelleen. Analyysissa on käsiteltävä kaikki aiheet ja ilmiöt, joita tutkitaan, yksi kerrallaan. (Marton 1994, 4428.) Etsin jokaiselta haastateltavalta yksilöllisesti oleelliset ilmaisut liittyen sisältöalueisiin. Alleviivasin ne eri väreillä, jotta sisältöalueet erottuivat selkeästi toisistaan. Osa haastateltavien ilmaisuihin sijoittui kahteen eri sisältöalueeseen. Esimerkiksi haastateltavan ilmaisussa, *“Tää on sillee ollu hyvä oppivuosi, et se tosiaan, et eihän se niinku ookaan sitä, että sitähan [matematiikkaa] on tosiaan joka puolella tässä meidän ympärillä. Sehän voi ollaki ihan hauskaa tekemistä...”*, esiintyy sisältöalueet: mitä on matematiikka ja koulutuksen merkitys.

Analysoinnissa tutkijan ei tulisi keskittyä arvioimaan, millä laajuudella haastateltavien vastaukset heijastavat ilmiön ymmärtämystä verrattuna tutkijan omaan näkemykseen, vaan samankaltaisuuksiin ja eroihin tavoissa, joilla ilmiö näyttäytyy haastateltaville. On tunnistettava erilaiset tavat ymmärtää ilmiö. Tietty ymmärrys tulee näkyväksi kahdella tavalla. Toinen perustuu samanlaisuuksiin, kaksi ilmaisua voivat olla sanojen tasolla erilaisia, mutta heijastavat samaa merkitystä. Se merkitsee tiettyä tapaa ymmärtää ilmiö. Kun kaksi ilmaisua heijastavat kahta eri merkitystä, voidaan kaksi eri tapaa ymmärtää ilmiö perustella niiden kontrastilla. Eli ilmaistut tavat ymmärtää jokin ilmiö tunnistetaan ja ryhmitellään. (Marton 1994, 4428.)

Tutkittavien henkilöiden käsitysten merkityssisällöt luokitellaan, jolloin aineisto on paremmin hallittavissa ja käsitysten erilaisuus paljastuu (Ahonen 1994, 125). Tutkimushenkilöiden kuvaukset kategorisoidaan. Tarkoitus on löytää piirteitä, jotka ovat tunnusomaisia juuri tälle aineistolle, ja merkitseviä eroja, jotka selvittävät, miten ihminen käsittää jonkin tietyn ilmiön. Pohjana kategorioille eivät ole valmiit luokitukset, joiden yleisyyttä tutkitaan. Tavoitteena on löytää ja luokitella alunperin määrittelemättömät tavat, mitä ihminen ajattelee jostakin todellisuuden osasta. (Marton 1988, 146-147.)

Kategorioiden muodostaminen pohjautuu teoreettiseen ajatteluun. Tutkijan tulkitsemista merkityksistä hän päättelee, mikä on teoreettisesti merkitsevää ja mitä erilaista merkityksissä on. Tämän pohjalta muodostetaan kategoriat ja päätellään, mitkä käsitykset kuuluvat yhteen. Tutkittavien ilmaisut ja niiden merkitykset tehdään siis ymmärrettäviksi eli selitetään sisällöllisessä mielessä merkityskategorioiden avulla. Kategorioita voidaan yhdistellä laaja-alaisemmiksi ja yleisemmiksi ylemmän tason kategorioiksi. Ne muodostavat tutkijan oman teorian, selityksen fenomenografisessa mielessä tutkittavalle asialle. (Ahonen 1994, 127-128.) Esimerkiksi haastateltavien käsitykset matematiikasta voi jakaa kolmeen eri ylemmän tason kategoriaan sen mukaan, mistä näkökulmasta he pohtivat sitä.

Kun oleelliset osat haastatteluista on ryhmitelty, siirretään huomio ilmausten välisten yhteyksien etsimisestä ryhmien välisiin yhteyksiin. Esitettäessä ratkaisevat ominaisuudet joka ryhmästä ja mitkä piirteet erottavat ryhmiä toisistaan kategoriat jäsenyivät ja kuvaavat tietyn ilmiön kokemisen, käsitteellistämisen ja ymmärtämisen vaihtelua. Kategorioiden välillä on loogisia suhteita, ne kuvaavat erilaisia mahdollisuuksia nähdä ilmiö suhteessa



annettuun kriteeraan. Näin käsityksistä vakiintuu hierarkia. (Marton 1994, 4428.) Tässä vaiheessa vertasin haastateltavien kategorioita toisiinsa. Etsin niistä samanlaisia ja erilaisia eli asettuvatko eri haastateltavien ilmaukset samoihin kategorioihin toisiinsa verrattuina. Kutsun tätä kokonaiskategorisoinniksi, joka kuvaa erilaisia käsityksiä tutkittavasta asiasta. Käsitykset on irrotettu yksilötasolta. Käsitykset voivat olla yhteydessä toisiinsa. Teoriataustan ja aineiston vuoropuhelu muodostaa sen kriterian, jonka perusteella käsityksiä voidaan suhteuttaa toisiinsa.

Koska käsitykset ovat erilaisia, on niitä pyrittävä tulkitsemaan niiden omista lähtökohdista ja niiden omaa logiikkaa noudattaen. Siten niitä ei ole tarkoitus asettaa paremmuusjärjestykseen tai kehittyneisyysjärjestykseen. (Ahonen 1994, 119.)

Sama henkilö voi ilmaista useamman tavan ymmärtää tietty ilmiö. Siksi yksilö ei ole analyysin yksikkö, vaan yksilöiden väliset rajat on tilapäisesti hylätty. Erilaiset huomaukset onkin nähtävä suhteessa kahteen kontekstiin. Toinen on merkitysten kokonaisuus, joka muodostuu siitä, mitä kaikki haastatellut ovat sanoneet samasta asiasta. Toinen taas on se kokonaisuus, mitä yksilö on sanonut eri asioista. Tässä otetaan huomioon rajat yksilöiden välillä. Fenomenografian hermeneuttinen elementti on juuri tämä kollektiivisen ja individuaalisen kontekstin huomioiminen. (Marton 1994, 4428.) Sisältöalueita muodostaessani luin haastatteluja nämä kaksi kontekstia huomioiden. Sen jälkeen keskityin yhteen henkilöön kerrallaan etsien eri sisältöalueisiin kuuluvia ilmauksia ja luokitellessani niitä samanlaisiin ja erilaisiin. Samanlaiset sijoitin samaan kategoriaan nimeten sen. Seuraavaksi ylitin yksilöiden väliset rajat verratessani eri kategorioita keskenään. Taulukossa 1 on esitetty analysoinnin eri vaiheet. Olen myös merkinnyt siihen sen kontekstin (kollektiivinen ja/tai individualistinen), joka on ollut ko. analysointivaiheen taustana.

Taulukko 1. Analysoinnin eteneminen

Analysoinnin eri vaiheet
litterointi
aineiston lukeminen (kollektiivinen ja individualistinen)
sisältöalueiden hahmottaminen (kollektiivinen ja individualistinen)
sisältöalueisiin liittyvien ilmausten tunnistaminen ja merkitseminen (individualistinen)
ilmausten ryhmittely sisältöalueiden sisällä (individualistinen)
kategorisointi eli ryhmiteltyjen ilmausten nimeäminen (individualistinen)
kokonaiskategorisointi eli millaisia käsityksiä aineistosta on noussut (kollektiivinen ja individualistinen)

Fenomenografisessa analyysissä eri askeleet on otettava interaktiivisesti. Jokainen peräkkäinen askelma vaikuttaa seuraavaan askelmaan, mutta myös sitä edeltäviin askelmiin. Siten analyysi on käytävä läpi useamman kerran, jotta eri askeleet asettuisivat kohdalleen toisiinsa nähden. (Marton 1994, 4428.)

### *Analyysikehikon rakentaminen*

Ernestin (1989, 250) mukaan muodostamani teema-alueet olivat runkona haastattelulle. Teema-alueet ovat osittain päällekkäisiä erityisesti oppimisen ja opettamisen osalta. Haastateltavat puhuivat paljon opettamisesta, mutta oppimisesta vähemmän. Kuitenkin heidän opettamiskäsityksensä heijastavat suoraan oppimiskäsitystä. Haastateltavat kertoivat, miten lasta tulisi opettaa, jotta hän oppisi parhaiten. Esimerkiksi päiväkodissa opetettaessa matematiikkaa olisi lapsella oltava käytössään konkreettisia välineitä. Lapsi siis oppii konkreettisten välineiden avulla. Opetus on helpompi hahmottaa, koska sen voi esittää konkreettisten esimerkkien kautta kertomalla omasta toiminnastaan ja lapsesta suhteessa siihen. Oppimista on vaikeampi jäsenellä.

Lahdes (1997, 14) määrittää opetuksen kasvatustavoitteista johdettavaksi tarkoitukselliseksi ja suunnitelluksi opettajan ja oppilaiden väliseksi vuorovaikutukselliseksi toiminnaksi. Sen tarkoituksena on luoda oppilaalle edellytykset oppimisen avulla tavoitteiden saavuttamiseen. Määrittelyssä korostuvat tarkoituksellisuus ja tavoitteiden saavuttaminen. Lahdes kuitenkin lisää, että opetus-oppimisprosessissa tärkein vaihe on oppiminen. Myös Kansanen (1993, 52-55) korostaa opetuksen tarkoituksellisuutta ja vuorovaikutusta opetusprosessissa. Opettajan tehtävä tässä prosessissa on luoda parhaat mahdolliset edellytykset oppilaan oppimiselle. Opetuksesta ei välttämättä seuraa oppimista ja oppimista voi tapahtua myös ilman opetusta.

Opettämisen ja oppimisen välillä on ontologinen riippuvuus. Jos ei olisi oppimista ei olisi myöskään opettamista. Oppimista voi kuitenkin tapahtua ilman opettamista. Siten riippuvuus näiden käsitteiden välillä ei ole kausaalinen. Opetuksen tarkoituksena on edistää oppilaan oppimista. (Fenstermacher 1986, 39.) Päiväkodissa puhutaan opetuksen sijasta usein kasvatuksesta, mikä voi johtua niiden erilaisesta määrittelystä. Lahdes (1997, 11) mukaan kasvatusta on usein määritelty persoonallisuuden affektiivisen alueen kehittämiseksi ja opetus kohdistuisi tietojen ja taitojen kehittämiseen. Ihminen on kuitenkin kokonaisuus ja siksi Lahdes esittääkin, että kasvatusta ja opetusta ovat samaa tarkoittavia synonyymejä.

Patrikaisen (1997, 150) mukaan opettajan pedagogisen ajattelun ja toiminnan keskeiset käsitteet ovat ihmis-, tiedon- ja oppimiskäsitys. Ne nousevat keskeisinä kasvatuksen teorioista ja myös hänen tutkimusaineistonsa analysoinnista. Myös esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (1996) nämä ovat tärkeä pohja opetussuunnitelman laatimisessa.

Opettajan pedagogisen näkemyksen perustana ovat hänen kokemuksensa ja koulutuksensa, elävä elämä, jonka pohjalta hän tekee päätöksiä opetuksestaan. Se koostuu tiedoista, olettamuksista, ennakkoluuloista ja arvoista. Pedagogisen näkemyksen muodostavat:

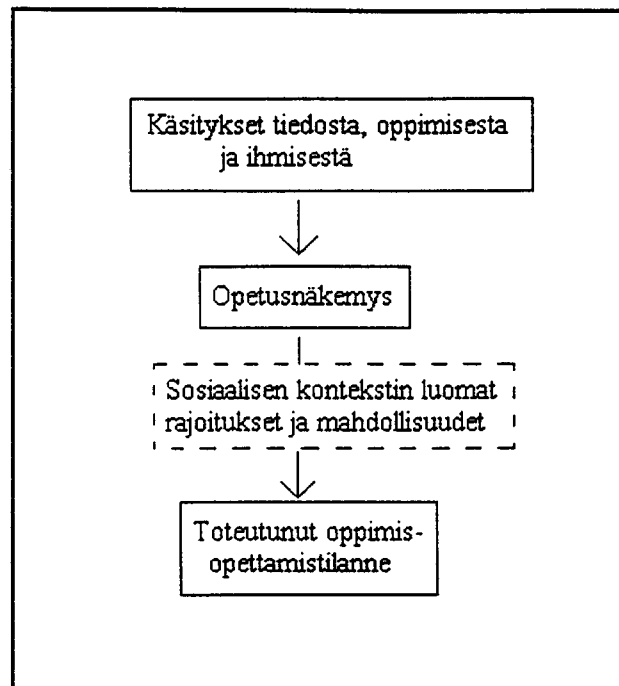
1. näkemys tiedosta: mitä tietoa tarvitaan, mikä tieto on oleellista esimerkiksi matematiikan kannalta, miten lapsen osaamista voidaan arvioida
2. näkemys oppimisesta ja didaktiikasta: miten lapset oppivat, mikä helpottaa oppimista, miten tiettyä ainetta (matematiikkaa) opetetaan, miten opettaja käyttää materiaalia, mikä on sopiva työskentelytapa, miten hän suunnittelee, toteuttaa ja kontrolloi opettamista
3. ihmiskäsitys: millainen lapsi on, miten eroavat toisistaan hyvät ja huonot oppilaat
4. näkemys yhteiskunnasta: yleiskäsitys yhteiskunnan kehityksestä ja rakenteista ja erityisesti koulun paikasta ja tehtävästä yhteiskunnassa. (Lundgren ym. 1983, 18-19.)

Analyysissa käytän kehyksenä Patrikaisen (1997) opettajan pedagogisen ajattelun peruskäsitteitä sekä Lundgrenin ym. (1983) muotoilemia kysymyksiä. Ensimmäistä tutkimusongelmaa vastaavat tiedonkäsitys ja oppimiskäsitys. Ihmiskäsitys ei tässä tutkimuksessa painotu, mutta se osaltaan kuvaa haastateltavien käsityksiä matematiikasta ja sen oppimisesta ja opettamisesta Lundgrenin ym. esittämien kysymysten kautta. Mielestäni Lundgrenin ym. (1983, 19) näkemys yhteiskunnasta sisältyy kolmeen ensimmäiseen. Päivähoidolle asetetut kasvatustavoitteet (Päivähoidon kasvatustavoitekomitean mietintö 1980); Esiopeutuksen opetussuunnitelman perusteet 1996) pohjautuvat yhteiskunnan arvostuksiin ja määrittelevät päivähoidon paikan ja tehtävän yhteiskunnassa. Ne myös osaltaan määrittelevät ihmis-, tiedon- ja oppimiskäsitystä. Jokainen tietysti kokee ja hahmottaa yhteiskunnan odotukset ja arvostukset omalla tavallaan, mutta sen selvittäminen ei ole tämän tutkimuksen tarkoitus. Lisäksi selvitän haastateltavien näkemyksiä koulutuksesta ja sen merkityksestä. Taulukossa 2 esitän analysoinnissa käyttämäni sisältöalueet jaoteltuna Patrikaisen esittämien opettajan pedagogisen ajattelun ja toiminnan keskeisten käsitteiden alle. Lisäksi taulukossa on tutkimusongelmaan 2 liittyvät sisältöalueet.

Taulukko 2. Sisältöalueet aineiston analysoinnissa

Sisältöalueet analysoinnissa	
<u>Tiedonkäsitys:</u>	
Käsitys matematiikasta Kokemukset matematiikasta ja suhtautuminen siihen Matematiikan merkitys (miksi sitä on opetettava lapsille)	
<u>Oppimiskäsitys:</u>	
Oppimisen määrittely (mitä on oppiminen)	Didaktiikka Käsitys matematiikan opettamisesta Aikuisen ja lapsen rooli Lapsen osaamisen arviointi
<u>Ihmiskäsitys:</u>	
Millainen on lapsi oppijana Miten lapset eroavat toisistaan oppijoina	
<u>Matematiikkaprojektiin liittyvä koulutus:</u>	
Koulutuksen merkitys Kokemuksia koulutuksesta	

Patrikainen (1997, 154) toteaa, että puhuessaan työstään opettaja käyttää ilmaisuja, joissa on mukana ihmis-, tiedon- ja oppimiskäsityksen merkityksiä toisiinsa liittyneenä. Jokin näistä on primaarimerkityksinen ja kaksi muuta tai toinen niistä on merkitykseltään sekundaarinen. Ihmis-, tiedon- ja oppimiskäsitys ovat perusta opettajan pedagogiselle ajattelulle ja siten toiminnalle lasten kanssa. Edellä esittämäni pohjalta olen muodostanut kuvion opettajan pedagogisen ajattelun rakentumisesta (kuvio 2) Ernestiä (1989, 252) mukaellen.



Kuvio 2. Opettajan pedagogisen toiminnan rakentuminen (Ernest 1989, 252 mukaellen)

#### 8.4 Tutkimuksen toteutuksen arviointia

Haastattelun luotettavuuden kannalta ovat tärkeitä käsite- ja sisältövalidius. Käsitevalidius edellyttää sitä, että haastattelussa tavoittaa ilmiön olennaiset piirteet ja teorian keskeiset käsitteet. Ne ovat pohjana haastattelurungolle. Käsitevalidiuden saavuttamiseksi on tärkeää teoreettinen perehtyminen ja tutustuminen haastateltaviin. Hyvän sisältövalidiuden kannalta on kysymysten tavoitettava halutut merkitykset. Siksi tema-alueet ja niihin liittyvät alustavat kysymykset on mietittävä huolella. (Hirsjärvi & Hurme 1985, 129.)

Eskola & Suoranta (1996, 167) puhuvat validiteetin sijasta uskottavuudesta, joka kuvaa paremmin kvalitatiivisen tutkimuksen luotettavuutta. Tutkijan käsitteellistysten ja tulkintojen on vastattava tutkittavien käsityksiä. Se on huomioitava sekä aineiston keruuvaiheessa että analysoinnissa. Perehdyin aluksi kirjallisuuteen, mikä auttoi laajentamaan näkemystäni tutkimusalueesta ja muodostamaan tema-alueita ja niihin liittyviä kysymyksiä. Siten pyrin varmistamaan, että kysymysten käsitteet ja niiden merkitykset muodostivat kokonaisuuden suhteessa tutkimusongelmiin ja teoriaan. Tutkijalle merkitykset eivät siten muutu, joten niitä on helpompi verrata haastateltavan merkityksiin.

Esihaastattelut ovat tärkeitä, jotta selviää, ovatko haastattelun kysymykset ymmärrettäviä. Samalla voi harjoitella kysymysten kehittämistä haastattelutilanteessa ja haastattelun kuljettamista eteenpäin haastateltavan ajatusten pohjalta. (Ahonen 1994, 137.) Tein esihaastattelun lastentarhanopettajalle, joka on opiskellut alkuopetuksen approbaturin. Tämän koulutuksen yhtenä sisältöalueena oli matematiikka, joten hän on verrattavissa tutkimuskohteena olevan päiväkodin työntekijöihin. Esihaastattelun jälkeen pohdimme

yhdessä, mitkä kysymykset olivat vaikeita, miten kysymyksiä voisi tarkentaa ja konkretisoida. Siten esihaastattelu oli apuna teoreettisten käsitteiden operationalisoinnissa.

Haastattelussa korostuu tutkijan rooli haastateltavan tukena tämän muodostaessa käsityksiään kielelliseen muotoon. Samalla tutkija ei kuitenkaan saa johdatella haastateltavaa. (Hirsjärvi & Hurme 1985, 84-86; Marton 1988, 154.) Tämä kaksijakoisuus paljastaa, että haastattelu ei ole helppo tutkimusmenetelmä. Siksi sen onnistumiseksi oli mielestäni tärkeää, että olin miettinyt huolella kysymysmuotoja ja apukysymyksiä teema-alueilta haastateltavan tueksi. Myös tuttu ja omakohtainen aihe auttoi haastateltavia jäsentämään ajatuksiaan, sillä matematiikkaprojektin yhtenä tavoitteena oli juuri oman kasvatuskäytännön ymmärtäminen ja kehittäminen.

Viitekehyksemme, tapamme puhua päiväkodin kasvatuksesta ja arjesta, oli samanlainen. Siinä mielessä merkitykset olivat samansuuntaisia. Teemat auttoivat jäsentelemään haastattelua. Olisin kuitenkin voinut vielä enemmän kysyä tarkentavia kysymyksiä, esimerkiksi mitä haastateltava tarkoittaa matematiikan opetuksessa etenemisellä konkreetista abstraktimpaan. Se olisi helpottanut tulkintaani tarkentaen yksityiskohtia. Haastateltavista toisille oli helpompi jäsentää ajatuksiaan käytännön työn kautta ja pyrin arjen työn kautta löytämään tapoja kysyä abstraktejakin asioita, kuten oppimisesta. Toisaalta jokainen haastateltava pystyi muodostamaan oman määritelmänsä oppimiselle ja matematiikalle abstraktilla tasolla.

Myös kirjoitelmat olivat jo osaltaan johdattaneet haastateltavia pohtimaan päiväkodin matematiikkaa. Niissä henkilökunta pohti aiempia kokemuksiaan matematiikasta ja nämä pohdinnat toistuivat samantyyppisinä jälkimmäisessä kirjoitelmassa. Lisäksi juuri ennen haastatteluja tehdyissä kirjoitelmissa oli mietitty omia kokemuksia matematiikkaprojektista. Kirjoitelmat ja haastattelut olivat näiltä osin samansuuntaisia.

Kirjasin analyysin etenemisen tarkasti helpottaakseni omaa työtäni. Lisäksi analyysin kuvaus ja aineistokatkelmat tulosten yhteydessä antavat lukijalle mahdollisuuden arvioida tutkimusta. Analysoinnissa vaikeutena oli sen moniportaisuus ja kollektiivisen ja individuaalisen kontekstin huomioiminen. Siksi luin aineistoa yhä uudelleen ja kävin analyysia läpi moneen kertaan. Pohdin kategorioita ja niiden ominaisuuksia ja tarkensin niitä. Palasin yhä uudelleen haastatteluihin. Tarkistin kategorisointiani ilmauksia haastattelusta varmistakseni, että olin tulkinnut oikein haastateltavan intention. Sijoittamalla ilmauksen takaisin kontekstiinsa, näkee kokonaisuuden, johon se liittyy. Peilasin haastatteluaineistoa siten aina jokaisen haastateltavan omaan kontekstiin ja toisaalta kokonaisuuteen. Näin pyrin varmistamaan analyysin uskottavuutta.

## 9 PÄIVÄKODIN HENKILÖKUNNAN KÄSITYKSIÄ

### 9.1 Kokemukset ja suhtautuminen matematiikkaan

Jokaisella kahdeksalla haastateltavalla on oma matematiikkaan liittyvä tarina kerrottavanaan. Tämä tarina alkaa kouluajoista. Omaa suhtautumista ja kokemuksia matematiikasta pohdittiin lähinnä koulun matematiikan kautta. Yhdelle haastateltavista matematiikka on aina ollut mielenkiintoista. Hän ei kokenut olleensa huippuhyvä koulussa, mutta se oli kuitenkin helpompaa kuin vaikkapa kielet. Matematiikka oli loogista ja siksi riitti, kun muisti tietyt asiat ja sillä pääsi jo aika pitkälle.

*Matematiikkaa ei tarvinnut "päntätä" samalla tavalla kuin kielten sanoja. Jos osasi tietyt kaavat, laskuista yleensä selvisi. Tuntui aina hyvältä, kun sai ratkaistua jonkun tehtävän, joka ensin vaikutti vaikealta. (H5, kirjoitelma)*

Kahdella on muistoja ensimmäisistä kouluvuosista, jolloin matematiikka oli mukavaa ja menestys ihan hyvää. Yhdelle haastateltavista suhtautuminen matematiikkaan on ollut melko välinpitämätöntä; ei niin kovasti kiinnostanut, mutta ei sitä vastaanakaan mitään ollut. Yhteistä kuitenkin lopuille seitsemälle haastateltavalle ovat osittain negatiiviset muistot matematiikasta koulussa. Toisilla ne ovat vahvempia kuin toisilla. Jotkut matematiikan osa-alueet olivat tuntuneet vaikeilta ja siksi ikäviltä tai matematiikan sijaan kiinnostivat muut oppiaineet, kuten kielet.

*Kouluvuodet ovat vaikuttaneet voimakkaimmin suhtautumiseeni matematiikkaan. (H8, kirjoitelma)*

*Mun kokemukset matematiikasta on sellasia, et niitä ei voi erottaa tai jollaki tavalla ne liittyi niin kouluajaksiin kokemuksiin. Sille ei voi mitään ja erityisesti minun mielestä kumma kyllä on just matematiikassa ja mä en ymmärrä minkä takia. Miksei se esimerkiksi oo niin voimakkaasti esillä ne kouluajaiset tapahtumat tai asiat niinku muitten asioiden, niinku äidinkielen tai kielten tai joittenki muitten. (H7, haastattelu)*

*Ala-asteella matikka oli kivaa. Joukkio, alkiot, yhteenlasku, vähennyslasku, kertominen ja jakaminen olivat hauskaa puuhaa. Päässälaskua kammosin - entäs jos en heti*

*hoksaakaan? Varsinkin, kun meidän luokalla oli minua niin paljon parempia ja nokkelampia... Sanallisia tehtäviä suorastaan inhosin. Jostain kumman syystä ne eivät minulta luonnistuneet. (H6, kirjoitelma)*

Opettajalla ja opetustavalla on ollut merkitystä matematiikkaan suhtautumisen ja kokemusten muotoutumiseen negatiivisiksi. Kuiva tai ankara jopa pelottava opettaja, joka ei ymmärtänyt lasten ajatusmaailmaa, ei osannut innostaa ja kannustaa. Haastateltavat arvioivat, että opettaja ei osannut tehdä matematiikasta mielenkiintoista, vaan se oli pakonomaista. He kokivat, että tunnilla edettiin tasatahtiin, havaintomateriaalia ei ollut, eivätkä oppilaat paljon kyselleet opettajalta.

## 9.2 Käsitteitä matematiikasta

Haastateltavien käsityksistä matematiikasta voi erottaa kolme eri näkökulmaa, jotka ovat osittain päällekkäisiä ja vaikuttavat toisiinsa. Ensimmäinen niistä on kouluaikainen käsitys matematiikasta, jota juuri koulun matematiikka on muovannut. Haastateltavat näkivät matematiikan silloin lähinnä niiden lasien läpi, jotka muodostuivat omista kokemuksista siitä koulussa. Toisena on haastateltavien tämän hetkinen filosofinen käsitys matematiikasta vastauksena kysymykseeni, mitä on matematiikka. Kolmantena on heidän käytännön työnsä kautta hahmotettava käsitys matematiikasta, päiväkodin matematiikasta. Nämä kolme käsitystä eivät sulje toisiaan pois. Kouluaikainen käsitys matematiikasta on pohjana ja perspektiivinä kahdelle jälkimmäiselle, jotka ovat muotoutuneet kokemuksen ja koulutuksen kautta.

### 9.2.1 Kouluaikainen käsitys matematiikasta

Aikaisemmin matematiikasta on haastateltaville tullut mieleen koulu aika: numeroita, laskemista, geometriaa, matematiikan kirjoja ja tehtäviä. Matematiikka yhdistettiin menestymiseen siinä joko todistuksen tai kokeiden numeroina tai mielikuvana, miten siitä suoriutui. Ne seitsemän haastateltavaa, jotka suhtautuivat matematiikkaan negatiivisesti ainakin jossain vaiheessa koulu aikaa, kokivat matematiikan tai osia siitä vaikeana. Oli noloa, jos matematiikkaa ei osannut. Jos ei jotain asiaa tunnilla ymmärtänyt, ei sitä kehdannut kysyä, ettei nolaisi itseään. Siten vähitellen putosi tahdist. Kaikkea ei siis matematiikasta ymmärtänyt ja se aiheutti huonommuuden tunnetta ja kokemuksen, että omat kyvyt, älykkyys, eivät riitä.

*Sillon tuli tämä joukko-oppi ja se oli niin uutta, et mä jotenki pääsin siihen sisälle. Must tuntu, et mä en koskaan silloin alkuaikoina päässy siihen sisälle, et mä oisin tajunnu, et se on kivaa ja mä oisin viittä jotain sen eteen. Sit tuli tää joukko-oppi ja must se oli kauheen kivaa. Ja sit mä oon aina tykänny geometriasta ja silloin aina ku oli geometriaa, ni mun matikkanumero nous. Mä kauheesti nyt, ku meil on tullu tätä [matematiikkaprojektia päiväkodissa], et jos mullaki olis alotettu palikoilla ja tämmösillä ni ehkä se ois menny perille. (H4, haastattelu)*

*Jos ei osannu, ni ei osannu ja koki ittiesä ihan huonoksi ja ei se oikeen innostavaa ollu kyllä. (H3, haastattelu)*

*Lukion aikana oli täysin vallalla ajatus niin opettajien kuin meidän oppilaidenkin keskuudessa, että matematiikkaan ei kannata paneutua, jos siihen ei ole lahjoja. (H7, kirjoitelma)*

Toisaalta menestyminen matematiikassa vaati myös työtä. Haastateltavien mielestä matematiikkaa olisi oppinut, jos olisi siihen todella viitsinyt paneutua. Muut aineet ovat saattaneet kiinnostaa haastateltavia kouluaikana enemmän tai vilkas lapsi ei ole jaksanut harjoitella tarpeeksi. Yksi haastateltavista koki, että opettaja suorastaan painosti ja piinasi oppilaita, jos he eivät osanneet matematiikan tehtäviä. Haastateltava sisuuntui ja teki niin paljon töitä matematiikan eteen, ettei opettaja enää saisi häntä kiinni osaamattomuudesta.

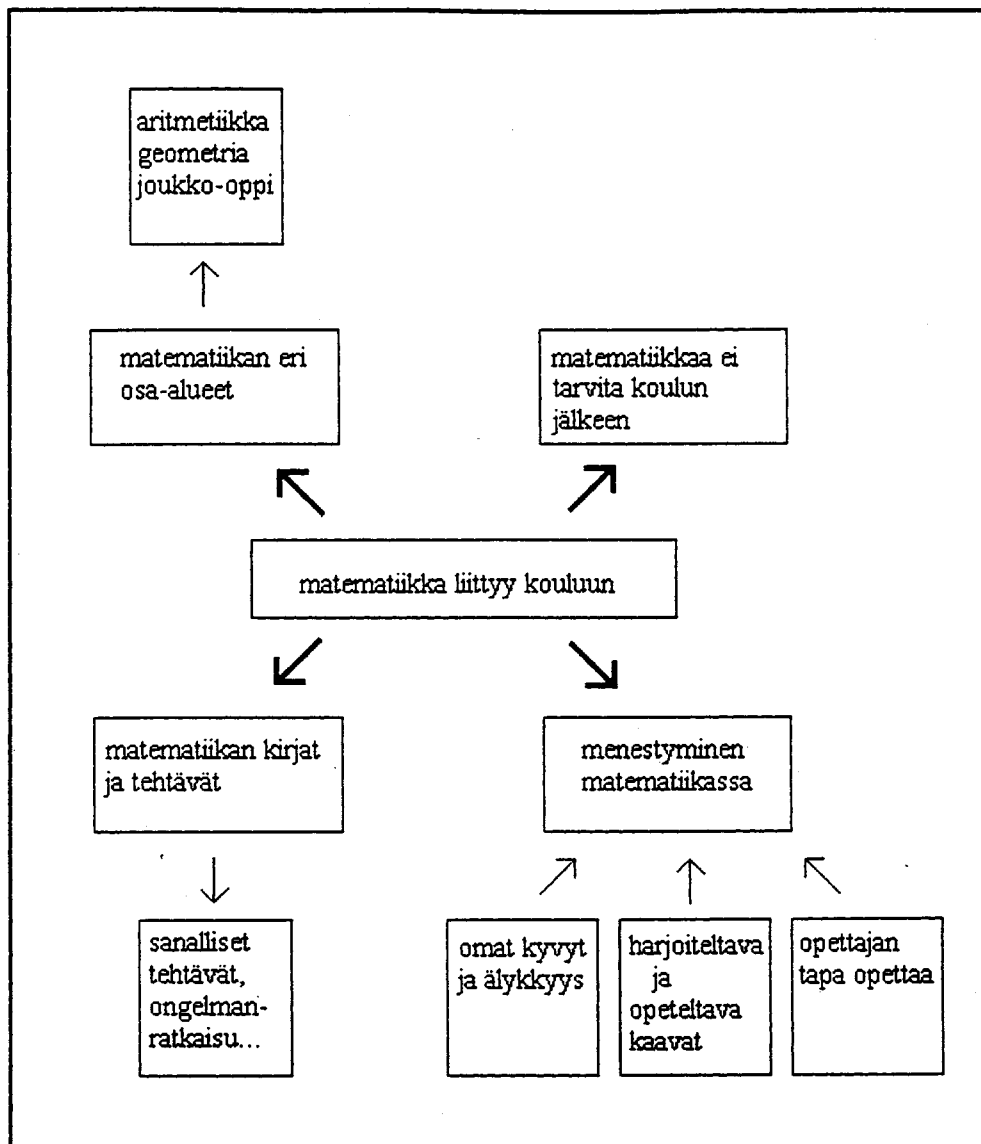
*Et mä kyllä menestyin sit kohtuullisesti ja mä tajusinki sitä, mut se sama opettaja mulla oli koko 5 vuotta ja hänhän olis välttämättä halunnu, et mä meen lukioon pitkää matematiikkaa opiskelemaan. Hänen mielestään mä olin niin hyvä. Mut ku mä tiesin, etten mä oo mikään erityisen lahjakas, vaan mä oon pikkusen niinku pelon voimalla. Mut mä opin kyllä tavallaan kyllä tykkäämään siitä matematiikasta jo silloin, vaikka se mua pelottiki koko ajan. Et mä pidän algebran ja geometrian loogisuudesta. Et jos vaan kaavat oli hallussa, ni kyllähän niitä on helppo soveltaa. Ja siihen aikaan oli vielä, et niitä ongelmanratkasutehtäviä oli vähemmän, ja tämänhän tyttö opetteli kaavat. Sit se tuntu oudolta, ku mä en menny matikkalinjalle lukioon ja tuli semmonen ns. tavallinen opettaja matikassa. Ni aivan ku mul ei ois matematiikkaa ollukaan. Mä edelleen sitä opiskelin, mut sitä ei tarvinnu enää ottaa niin vakavasti. (H8, haastattelu)*

Matematiikka on loogista. Jos koulussa osasi kaavat, pystyi niitä soveltamaan ja selvisi matematiikassa melko pitkälle. Kaksi mainitsi ongelmanratkaisun omaan kouluaikaan liitetynä. Toinen koki sen vaikeana. Toinen mainitsi, että sitä oli vähemmän. Myös sanalliset tehtävät ja tehtävien ratkaiseminen mainittiin. Kouluaikana haastateltavat olivat ajatelleet, että matematiikkaa ei välttämättä tarvinnut enää koulun jälkeen.

*Kuvittelin, etten ikinä tulisi tarvitsemaan matikkaa loppuelämässäni. (H6, kirjoitelma)*

Kuvioon 3 olen koonnut haastateltavien oman kouluaikansa kautta suodattamia käsityksiä matematiikasta.





Kuvio 3. Haastateltavien käsityksiä matematiikasta liitettynä koulu-aikaan

Haastateltavien koulu-aikaiset käsitykset matematiikasta ovat samantapaisia kuin Frank (1988), Hoskonen (1996) ja Hannula ja Malmivuori (1996) raportoivat tutkimustuloksissaan. Matematiikka liitettiin kouluun ja laskemiseen ja kokemukset siitä värittyivät negatiivisesti lukuun ottamatta yhtä haastateltavaa. Kasvatus- ja opetustyössä toimivat aikuiset näkivät syynä vaikeuksiin matematiikassa omien kykyjen ja työmäärän lisäksi opettajan tavan opettaa sitä. Negatiiviset asenteet matematiikkaa kohtaan liittyivät haastateltavien kokemukseen, että he eivät osanneet kaikkea matematiikan tunnilla. Opettajalta ei uskallettu kysyä neuvoa, mikä korostaa omien kykyjen merkitystä matematiikan oppimisessa. Koulukokemukset ja niistä syntyneet tuntemukset ovat siis osaltaan vaikuttaneet matematiikkakäsityksen muodostumiseen.

### 9.2.2 Filosofinen käsitys matematiikasta

Haastateltavien mielestä matematiikkaa on joka puolella, se on kaikessa mukana. Laskeamista on lauluissa ja peleissä, ominaisuuksia vertaillaan ja asetetaan järjestykseen saduissa ja leikeissä, syntymäpäiväkarkkeja jaetaan lasten kesken, lumiukko tehdään eri kokoisista palloista. Kaikessa on rytmi, matematiikkakin on rytmiä, jos ajattelee vaikkapa vuorokausirytmiiä. Matematiikkaa on luonnossakin. Kasvien ja eläinten yksityiskohdista löytyy geometrisia muotoja. Jos ajattelee kemiaa ja fysiikkaa, sitä mistä ihminen koostuu, niissäkin on matematiikkaa.

*Joo. Matematiikka, mä aattelen ite niin, että yliopistoissa opiskellaa matematiikkaa, ni se on matemaattis-luonnontieteellinen se tiedekunta, niin että voisko se olla jopa niin, että sillee filosofisesti ajateltuna, et se oiski osa tätä luontoo se matematiikka. Senköhän takia se liittyy siihen tiedekuntaan, onks se tosiaan niin, että luonnossahan kaikki on niin järjestynyttä, et onks se sitte yhtä eksaktia luonnossa ku matematiikassa tai matematiikka ja luonto. En mä tiiä. Et se ois niinku osa tätä koko maailmankaikkeutta se matematiikka. Ihmiset on sitte vaan keksineet niille asioille erilaisia symboleita ja sitte alkaneet käyttää näitä symboleita. Se on sitte sitä matematiikkaa. Mut jotenki mä toivon, et vois ajatella, että se ei ois mitää, niinku kaikista muistaki elämän asioista, ilmiöistä. Mä ajattelin mielellää, et ne on osa kaikkee ja osa toisiansa. Ettei mikää oo missää niinku erillää ja yksinään. (H7, haastattelu)*

Matematiikka on haastateltaville myös arkipäivää. Sitä tarvitaan jokapäiväisessä elämässä, esimerkiksi sitä tarvitsee, kun käy kaupassa ja pankissa; ottaa lainaa, laskee alennusprosentteja. Elämässä joutuu laskemaan, tekemään päätöksiä ja arvioimaan matematiikan kautta. Siten matematiikan avulla ihminen hallitsee omaa elämäänsä.

*Et mä en ymmärrä sitä, et joku sanoo, et mä en oo matematiikkaa tarvinnu sen jälkeen, ku mä koulun oven kiinni painoin. Must hän vaan ajattelee asiaa liian suppeasti, ei oo tullu ajatelleeksi, et itse asiassa hän käyttää matematiikkaa joka päivä. (H8, haastattelu)*

Matematiikka on ajattelua; hahmottelua, päättelyä. Haastateltavat yhdistivät matematiikan loogisuuteen.

*Se on mun mielestä semmosta tietynlaista loogista ajattelua, että semmosta jonkinlaista loogisuutta siinä ajatusmaailmassa. Osaa niinku ajatella asioista sillee järjestelmällisesti jollaki tietyllä tapaa. Vois kuvitella, et jonkinlainen järjestys, jos on niinku kaaos, se niinku matematiikka tekee sen, et siihen kaaokseen tulee jonkinlainen järjestys ja semmonen loogisuus ja semmonen jatkuvuuskin ehkä. (H3, haastattelu)*

Haastatteluissa tuli myös esiin matematiikka välineenä käsittää ympärillä olevaa maailmaa ja elämää ja hallita niitä. Matematiikassa tarvitaan siis käsitteitä. Haastateltavat esittivät, että matematiikan avulla voi kommunikoida kuten kielenkin avulla. Ihmisten välinen kanssakäyminen ja toiminta perustuu matematiikkaan tänä päivänä mutta myös varhaisemmissa yhteiskunnissa, esimerkiksi kaupankäynnissä ja muissa yhteiskunnan toiminnoissa. Seuraavassa taulukossa kokoon haastateltavien pohdintoja matematiikan luonteesta (taulukko 3).

Taulukko 3. Haastateltavien käsityksiä matematiikasta

Mitä on matematiikka?
Matematiikkaa on joka puolella.
Matematiikka on arkipäivää.
Matematiikka on ajattelua. *loogisuus *käsitteet
Matematiikka on kommunikointia.

### 9.2.3 Käytännön työssä muovautunut käsitys päiväkodin matematiikasta

Käsitys päiväkodin matematiikasta sisältää filosofisen käsityksen matematiikasta, mutta laajenee haastateltavien pohtiessa omaa työtään. Matematiikkakäsitykseen tulee uusia ulottuvuuksia. Päiväkodissa matematiikka liitetään lapselle tuttuun maailmaan (vrt matematiikka on arkipäivää). Haastateltavat korostivat, että se on kokonaisvaltaista sulautuen moneen toimintaan (vrt matematiikkaa on joka puolella). Matematiikka kehittää lapsen ajattelun ja kielen kehitystä (vrt matematiikka on ajattelua). Matematiikka nivoutuu yhteen äidinkielen kanssa käsitteiden ja nimeämisen kautta (vrt matematiikka on kommunikointia).

Haastateltavien mielestä päiväkodissa matematiikka on konkreettista tekemistä ja puhumista enemmän kuin tehtävien tekemistä pöydän ääressä. Matematiikka on iloista ja mielenkiintoista. Se antaa onnistumisen ja oivaltamisen kokemuksia. Haastateltaville matematiikasta tulee mieleen myös Hannele Ikäheimon ym. (1997) esittelemät esi- ja alkuopetuksen osa-alueet: luokittelu, vertailu, sarjoittaminen... Siten se on laskemista ja geometriaa, mutta myös paljon muuta. Matematiikka on hierarkkista: helposta vaikeampaan ja konkreettisesta abstraktimpaan etenevää. Seuraavassa taulukossa on koottu yhteen haastateltavien käsitykset matematiikasta (taulukko 4).

Taulukko 4. Haastateltavien tämän hetkiset käsitykset matematiikasta kokonaisuutena

Mitä on matematiikka?
Matematiikkaa on joka puolella.
Matematiikka on arkipäivää.
Matematiikka on ajattelua. *loogisuus *käsitteet
Matematiikka on kommunikointia.
Matematiikka on tekemistä.
Matematiikka on iloista ja mielenkiintoista.
Matematiikassa on eri osa-alueita.
Matematiikka on hierarkkista.

Haastateltavat kokivat päiväkodin matematiikan iloisena ja monipuolisena. Kontrastina olivat omat kouluaikaiset kokemukset matematiikasta.

*Matematiikkaa on kahdenlaista. On ikävää matematiikkaa, joka sisältää kaavoja, vaikeita ongelmanratkaisuja ja numeroiden jäljentämistä. Toisaalta on myös hauskaa matematiikkaa, johon kuuluu pelejä, muotoja ja kaikkea konkreettista. Päiväkodin matematiikka on hauskaa. Jokaisella lapsella tulisi olla oikeus ja mahdollisuus aloittaa matematiikan opiskelu miellyttävällä tavalla. (H4, kirjoitelma)*

Haastateltavien tämän hetkinen käsitys matematiikasta on osittain instrumentaalinen (Ernest 1989). Matematiikka on hyödyllinen väline koulussa ratkaistaessa laskuja kaavojen avulla ja arkielämässä laskettaessa vaikkapa alennusprosentteja tietyllä kaavalla. Kun nämä kaavat ja säännöt ovat muistissa, helpottuu ihmisen toiminta yhteiskunnassa. Freudenthalin (1991) mukaan monelle ihmiselle ei matematiikka tai sen rakenne olekaan tärkeintä, vaan sen käyttökelpoisuus yhteiskunnassa ja tieteissä (myös Malaty 1997, 53). Matematiikkaa sovelletaan arkipäivän tarpeisiin (Pehkonen 1998).

Haastateltavien käsitys siitä, että matematiikkaa on joka puolella, luonnossa ja päiväkodisakin, vastaa Ernestin (1989) ja Hershin (1986) esittelemää platonista käsitystä matematiikasta. Matematiikkaa on joka puolella ihmisestä riippumatta. Se on annettu ikään kuin ihmisen ulkopuolelta, jolloin se on löydettävä pikemminkin kuin luotava. Symboleiden avulla se voidaan kertoa muille tai kirjoittaa paperille. Hersh (1986; myös Malaty 1997) huomauttaa, että matemaattiset ja luonnolliset objektit eivät kuitenkaan ole sama asia. Luonnossa ovat mehiläisten kennot, sähkökentät ja kasvit, matematiikassa taas kuusikulmiot, logaritmit ja asteet. Platonista käsitystä voisikin tarkentaa niin, että luonnossa on esimerkiksi erilaisia määriä ja muotoja, joita voidaan kuvata matematiikan avulla eri symboleilla. Myös näiden säännönmukaisuuksia ja suhteita toisiinsa voidaan esittää matematiikan avulla. Haastateltavien käsityksessä, että matematiikka on joka puolella, on myös toinen puoli. Matematiikkaa on loruissa, peleissä ja leikeissä eli niissä käytetään matemaattisia käsitteitä.

Matemaattinen tuote on abstraktia, mutta se perustuu konkretiaan, se on lähtenyt käytännön tarpeista. Haastateltavien näkemys matematiikasta ajatteluna vastaa Ernestin (1989) kolmatta filosofista käsitystä matematiikasta ongelmanratkaisuna, vaikkakin sanan ongelmanratkaisu mainitsi vain kaksi haastateltavaa. Ajattelun kautta ihminen ratkaisee ongelmia ja konstruoi yhteyksiä ja sääntöjä luoden itse matematiikkaa. Tässä ajattelu-prosessissa ihminen voi tehdä virheitä, joten matematiikka ei ole täysin varmaa (Hersh 1986).

### 9.3 Matematiikan opetuksen tavoitteet

Haastateltavat kokivat, että päiväkodissa luodaan vahva, konkreettinen perusta matematiikan oppimiselle ja käyttämiselle myöhemmin vuosina, perusta, jolle on hyvä rakentaa uutta. Päiväkodissa keskitytään perustaitoihin havaintojen tekemisestä lähtien. Kun lapsi on pienestä pitäen tutustunut matematiikan maailmaan, on se hänelle helpompaa myöhemmin.

*...et ne oppis niitä varhaisempia taitoja ja tämmöstä tekemistä matematiikan kautta... mut ne on niinku ne ensimmäiset askeleet, mitä kautta ne pystyy kehittämään sitä omaa kykyä ja omaa taitoa. (H4, haastattelu)*

Päiväkodin matematiikka luo pohjan ja valmiuksia kouluun ja laajemminkin tulevaisuuteen, koska lapsi tarvitsee matematiikkaa myöhemmin arkielämässä ja työelämässä.

*...valmiuksia kaikkeen tulevaan, et niinku esikoulussa just kuusivuotiailla valmiudet siihen oppimiseen, mitä koulussa tapahtuu. Että on tietynlaisia pohjatietoja ja kokemuksia tulevalle elämälle. (H2, haastattelu)*

*...semmoset perusasiat vois olla jokaisen hallinnassa. Ei sitä voi arvatakaan, missä niitä tarvii. (H6, haastattelu)*

*...nykyaikaan näihin numeroihin ja koneisiin ja tällaisiin törmää todella paljon enemmän... (H1, haastattelu)*

Päiväkodin matematiikka tukee lapsen ajattelun kehittymistä ja havaintokykyä. Siten siitä on hyötyä koko lapsen kehitykselle, myös kielen kehitykselle. Matematiikka tukee lapsen käsitevaraston kehittymistä. Tarkoitus ei ole tehdä lapsista matematiikan opettajia tai professoreita, vaan että lapset saavat mahdollisuuden oppimiseen ja oivaltamiseen.

*Mun mielestä nimenomaan sen matemaattisen ajattelun pohjan ja perustan laskeminen on sitä mitä on tärkeä tehdä jo alle kouluikäsenä. Sillä tavalla se lapsen ajattelu kehittyy ja siitä on hyötyä sen lapsen koko kehitykselle siis ajatellen äidinkielen ja kielen kehitystä yleensä. Ja koska ne prosessit, jota sillä lapsella siellä pienessä päässä toimii, ni nehan on just tärkeitä. Ja matematiikan avulla just niitä ajattelun prosesseja voidaan kehittää ja vahvistaa. (H8, haastattelu)*

Haastatteluissa korostui, että päiväkodissa pyritään herättämään kiinnostus ja innostus matematiikkaan, että suhtautuminen sitä kohtaan olisi myönteistä.

*Et antaa paremman pohjan näille lapsille. Et ne kasvaa niinku huomaamatta, et niille ei tuu semmosta törmäysvaihetta niinku meikäläisellä. (H1, haastattelu)*

Sisällöllisiä tavoitteita matematiikan opettamiseen on tutkimuspäiväkodissa asetettu Ikäheimon ym. (1997) esittämän esi- ja alkuopetuksen matematiikan sisältöjen jaottelun pohjalta. Seuraavassa ovat yhteenvetona haastateltavien näkemykset matematiikan opetuksen tavoitteista (taulukko 5).

Taulukko 5. Matematiikan opetuksen tavoitteet päiväkodissa

Matematiikan opetuksen tavoitteet		
perusta myöhemmälle oppimiselle	*koulu	*tulevaisuus
ajattelun kehityksen tukeminen (myös havaintokyky ja kielen kehitys)		
myönteinen suhtautuminen matematiikkaan		

#### 9.4 Oppimisen määrittelyä

Haastateltavien mielestä oppiminen on oivaltamista, huomaamista, hoksaamista, sisäistämistä, käsittämistä. Se on omakohtaista opittavan asian merkityksen ymmärtämistä ja oivaltamista. Oppimisessa lapselle tulee uusia tietoja ja taitoja. Alussa oppiminen voi olla kuin lorun opettelua. Vaikkapa numeroita lapsi opettelee hokemalla ja toistamalla numeroita yhdestä kymmeneen. Päiväkodin työntekijät kuitenkin korostavat, että ulkoa opetteleminen ei riitä, vaan lapsen on ymmärrettävä, mistä on kysymys, mitä kolme tarkoittaa. Senkin jälkeen, kun lapsi on oppinut numerot ja niiden merkityksen lukumäärän ilmaisijana, hän toistaa niitä ja vahvistaa näin oppimista. Oppiminen on siten pitkä prosessi. Toisaalta se voi olla hetkellinen, nopea oivallus. Ihminen ottaa haltuun jotakin, mitä hän ei hetkeä aikaisemmin ole käsittänyt tai osannut tehdä.

*Tavallaa aivoihin piirtyy joku uus jälki, mitä ei hetkee aikasemmin oo ollu eli sillon on oppinu jotain elikkä pystyy ajattelemalla tai toimimalla, ajatteluahan se toimintaki vaatii, mut kuitenkin ni rakentaa maailmaansa eteenpäin. (H6, haastattelu)*

*Se on semmonen pitkä prosessi. Toisilla se kestää ja jatketaan sitä saman asian toistoa huomaamatta tai sit se sieltä vaan aukeaa. (H1, haastattelu)*

Oppiminen vaatii, että lapsi itsekkin ajattelee ja kokeilee ja tekee. Lapsi oppii oman toimintansa kautta ja vuorovaikutuksessa aikuisen ja muiden lasten kanssa.

*Kyllä ne niinku oppii, ku ne näkee, ottaa niinku mallia tavallaa, mut onko se sitte varsinaista oppimista. Se voi olla semmosta jäljittelyä, mut missä vaiheessa se sitte muuttuu, et ite ymmärtää, mitä tekee ja osaa. Et se tapahtuu sit siinä, ku ne ite kokeilee ja tekee, ni sit voi tulla semmonen ahaa- ja onnistumisen elämys. (H3, haastattelu)*

Uuden asian oppiminen rakentuu haastateltavien käsityksen mukaan aikaisemmin opitun pohjalta. Siten oppiminen on aktiivinen rakennelma, jossa uusi asia liitetään vanhaan. Kun jonkin asian oppii, sitä voi soveltaa ja hyödyntää erilaisissa tilanteissa ja siihen voi keksiä lisää ja laajentaa siten käsitystään asiasta.

*Lapsi oppii oman toimintansa kautta. Ja sillä tavalla, että se oppiminen on aktiivinen rakennelma, jossa se uusi asia, uuden asian oppiminen rakentuu sille aikaisemmin opitun pohjalla. (H7, haastattelu)*

Haastateltavien mukaan matematiikan oppimista tapahtuu kaikenlaisissa tilanteissa. Päiväkodissa on suunniteltuja matematiikan tuokioita, mutta se liittyy myös muuhun toimintaan. Lapset oppivat matematiikkaa ulkoleikeissä, perushoitotilanteissa, vapaassa leikissä, oikeastaan kaikessa toiminnassa.

Olen koonnut yhteen haastateltavien käsityksiä oppimisprosessista eli siitä, miten oppiminen tapahtuu (taulukko 6).

Taulukko 6. Haastateltavien käsityksiä oppimisprosessista

Oppimisprosessi
Lapsi oppii toistamalla opittavaa asiaa.
Lapsi oppii oman toimintansa ja ajattelunsa kautta sekä vuorovaikutuksessa muiden kanssa.
Oppimisessa uusi tieto liitetään vanhaan.

Käsitys oppimisesta nopeana oivalluksena tuo esiin oppimisen muutoksena, mutta ei kuvaa oppimisprosessia. Haastateltavat esittivät myös oppimisen eri tasoja, joita olen koonnut seuraavaan taulukkoon (taulukko 7).

Taulukko 7. Haastateltavien käsityksiä oppimisen tasoista

Oppimisen tasot
uusien tietojen ja taitojen saaminen
oivaltaminen ja omakohtainen ymmärtäminen
soveltaminen ja hyödyntäminen
laajentaminen

## 9.5 Lapset oppijoina

Lapset ovat päiväkodin työntekijöiden mielestä oppijoina yksilöllisiä. Se, millaisia asioita matematiikasta lapsi opettelee ja mistä hän on kiinnostunut, riippuu lapsen iästä, mutta myös saman ikäiset lapset oppivat eri tahtiin. Lapset voivat olla eri kehitysvaiheessa ja tällaisia kehitysvaiheita tulee luonnostaan lapsille. Ympäristö vaikuttaa siihen, kuinka paljon lapsella on kokemuksia jostakin asiasta. Lapset myös oppivat eri tavoin, esimerkiksi joku oppii visuaalisesti helpommin kuin toinen tai mielikuvituksensa avulla keksii asioita.

*[Onks lasten välillä eroa oppijoina?]*

*Siin onki vaikeempi kysymys. Tietenki lapsissa on valtavasti eroa, miten kenelläki on, missäkö kohassa ne on menossa milläki alueella. Ja sitte ku sitä on aika vaikee verrata, ku toisella on ollu se ympäristö ollu niin erilainen ku toisella. En mä tiää, onks niissä*

*sillä tavalla oppijoina eroa, et toiset oppii helpommin jollain eri tavalla, kun taas toiset oppii toisella tavalla. Et on siis erilaisia tapoja, miten lapsi oppii sanotaan vaikka herkemmin tai helpommin. Et joku tyyppi on visuaalinen tai niin edelleen. Sillä tavalla on eroo. Tietysti sit jos ajatella, et on joku, on oppimisvaikeuksia jollaki lapsella jossaki asiassa, ni sit tietysti on silläki tavalla eroo. Toisella ei sitä sit oo. Joku ei etene jollaki alueella samalla tavalla ku toinen. (H6, haastattelu)*

*...kyllähän lapsille tulee se tietty vaihe, et ne laittaa jonoo palikoita ja mittaailee. Et kyl se tulee niinku luonnostaa lapsille semmosia vaiheita. (H3, haastattelu)*

Lapset ovat innostuneita uusista asioista ja haluavat kokeilla kaikkea. Haastateltavat ovat huomanneet työssään, että matematiikka kiinnostaa lapsia ja he saattavat vapaan leikin aikanakin laskea ja leikkiä matematiikan materiaaleilla. Lapset osaavat kyllä sanoa, jos heitä ei jokin kiinnosta ja usein muut lapset ovat sitten samaa mieltä. Toiset ovat vilkkaampia, eivätkä jaksa niin kauan keskittyä kuin toiset. Lapset ovat ylpeitä osaamisestaan ja riemuitsevat oppimisesta.

*Must ne on kauheen innostuneita siitä [matematiikasta], et harvoin kukaan sanoo, et en mä viitti ja jaksa. Et ehkä ne ei ajattele, et niille opetetaan jotaki, ku ne tekee torneja ja jonoja ja rivejä ja tekee tätä vertailua. Ja sit on tietysti semmosia, jotka jatkuvasti vain peuhaisi patjoilla tai tekis jotain semmosta, ni niitten mukaan saaminen. (H4, haastattelu)*

## 9.6 Matematiikan opettaminen päiväkodissa

Matematiikkaa voi haastateltavien mielestä opettaa hyvin monella eri tavalla. Jokainen toteuttaa sitä persoonallisesti käyttäen omaa mielikuvitustaan. Opetukseen vaikuttaa ryhmä, siinä toimivat ihmiset.

### 9.6.1 Aikuisen ja lapsen roolit oppimis-opettamistapahtumassa

Haastateltavien mielestä päiväkodissa kasvattajat luovat puitteet ja antavat mahdollisuuksia matematiikan oppimiseen eli luovat oppimisympäristön. Aikuinen voi olla myös oppimisen ja toiminnan käynnistäjä ja havainnoitsija. Havainnoimalla lapsia eri tilanteissa aikuinen huomaa, mitä lapset osaavat ja millaisia valmiuksia heillä on. Sen pohjalta hän voi ohjata lasten oppimista.

*Must se välistä se ois ulkoisesti passiivinen sisäisesti aktiivinen, ettei nyt välttämättä olla joka hetki niin aktiivinenkaan, vain siis ulkoisesti, mut sisäisesti pitää olla tarkkana koko ajan, valmiina puuttumaan ja vedättämään ja huomaamaan, missä kohdassa sitä aikuista tarvitaan. (H8, haastattelu)*

*Ostettii semmosia laatikoita, missä oli sitte aina kymmenen eri kokosta [ruuvia] ja totta kai nehän kiinnostu pojat niistä. Ne tykkäs niitä ruplata ja sitte, ku mä vähän*



*vihjasin, et mikähän niistä ois pienin ja mikä pisin ja kaikkee tämmöstä, ni sittehän ne rupes niitä lajitteleen... Mut et siinä saa mieltä tarkkaan, et miten sen lapsen kanssa sitte tekis, et se tulis sillai niinku lapsesta käsin, ettei mee sanomaa, et nyt laitat ne pituusjärjestykseen siihen. (H3, haastattelu)*

Haastateltavat huomauttivat, että myös lapset aloittavat leikkejä ja toimintoja ja neuvovat ja opettavat toisiaan ja siten oppivat toisiltaan. Lapsi toimii ja on aktiivinen. Päiväkodin kasvattajat korostivat, että kokeilemalla, tekemällä ja arvioimalla lapsi oppii, saa oivalluksia ja ymmärtää matematiikan eri alueita. Aikuinen ei saa tehdä kaikkea liian valmiiksi, vaan lasten aktiivisuudelle on annettava tilaa ja lapsia on kuunneltava.

*Et ennen ku pelas lapsen kanssa, ni sitä helposti autto ja laski ite et pistä tähän se nappula. Et nyt sitä niinku oottaa, et se laps laskee ite ja yrittää ainaki oivaltaa, et mikä siinä on takana. (H4, haastattelu)*

*Esimerkiksi meille tuli odottelupeliks, lapset kehitteli semmosen oman ennen ku aina, missä asuu talonpoika ylhäällä vai alhaalla. Sillä ku odoteltii muita lapsia, et päästää taas jatkamaa, ulkoo esimerkiks ku tultii, niin se muuttu semmoseks bingoks yhtä äkkiä. Joku oli keksiny, et otetaa kaks noppaa ja heitetää ne ja sitä ennen sanotaan kaverin nimi ja kysytään paljonko. Sit jos se sano, et kaheksan. Heitettii ne kaks noppaa ja laskettii yhteen ne nopan silmäluvut. Sit jos tuli kaheksan, ni kaikki huusi kovasti, et bingo. Mut sit se oli jännää, tätä pelattii kauan, kohta siihen tuli semmonen piirre siihen leikkiin, että tuliki, jos esimerkiks piti saada kahdeksan, tuli seitsemän tai yhdeksän, ni se oli sivuosuma. Se liitty johonki televisio-ohjelmaan. Mut et se tuli tänne. Ja sit siinä oli ihan selkeesti ne keksivät tän yhteenlaskun ja suuremman ja pienemmän siihen itsekseen. Näitä tämmösiä leikkejä tuli paljo, missä ne keksi ja ne liitty matematiikkaan. (H7, haastattelu)*

#### 9.6.2 Matematiikan opetuksen toteuttaminen

Haastateltavien mielestä matematiikan opetuksessa puhe on tärkeää. Matematiikka nivoutuu yhteen äidinkielen kanssa esimerkiksi käsitteiden ja nimeämisen kautta. Oikeat nimet opetellaan vaikkapa geometrisille muodoille. Puheen avulla aikuinen voi myös selvittää, mitä lapsi on oppinut. Lapselle voi antaa pieniä konkreettisia tehtäviä tai tehdä kysymyksiä.

Matematiikan opetuksessa on käytettävä konkreettisia esineitä, välineitä ja materiaaleja, joilla lapset toimivat. Haastateltavat huomauttivat, että ostettujen pelien ja välineiden lisäksi käyvät myös kotoa löytyvät ruuvit, mittanauhut ja palikat sekä luonnonmateriaalit: kivet, kävyt ja lumipallot. Matematiikka liitetään lapselle tuttuun maailmaan. Lapsen on hyvä saada kokemuksia erilaisista asioista, ihmisistä ja tapahtumista.

Haastatteluissa painottui, että matematiikan opetus ei saa olla pakonomaista, sitä ei saa tuputtaa, vaan sitä on opetettava mielenkiintoisella tavalla. Leikit ja pelit ovat lapselle luontaista toimintaa. Niihin on hyvä yhdistää matematiikkaa. Matematiikka päiväkodissa onkin hyvin kokonaisvaltaista, esimerkiksi siihen tulee vaikutteita äidinkielestä ja musiikista. Leikkien lisäksi matematiikkaa tulee loruissa, jumpassa, rakentelussa, lauluissa ja

saduissa. Niiden kautta matematiikka ei ole pakonomaista, vaan oikeastaan opetus tapahtuu huomaamatta sulautuen jokapäiväiseen elämään. Aikuisen ei tarvitse sanoa ääneen, että nyt on matematiikkaa. Kun se kätkeytyy loruihin ja leikkeihin, eivät lapset välttämättä tule ajatelleeksi, että heille opetetaan jotakin.

*Lapsiin vaikuttaa se tyyli, millä asiat tuodaan esiin. Et jos tosiaan on semmosta kuivaa pakkoa, siinä ei kyllä herää mikään. Et päinvastoin semmonen, että tämä ei ainakaa kiinnostaa. (H2, haastattelu)*

*Ja tärkeitä on tietysti se, et sitä pystyttäs niin mielenkiintosella tavalla käsittelemää, ettei se oo lapsille mitää pakkopullaa, vähän niinku vaivihkaa, et se niinku leikkien kautta tulis. Et se vähän niinku salaa lasten tonne, et ne kokis sen niinku mielekkäänä. Et ei oo niinku, tykkää, et jos ne on jo päiväkodista lähtien, et yäk tää on tätä matikkaa, ku kouluun menee. (H5, haastattelu)*

Matematiikan on oltava mukavaa, iloista tekemistä. Silloin siitä ei tule vastenmielistä pakkopullaa. Iloa lapsille tuo myös oivaltaminen ja onnistuminen. Haastateltavien näkemysten mukaan lasten kiittäminen ja kannustaminen motivoi heitä eteenpäin ja vahvistaa myös itsetuntoa. Aikuinen voi vaikka taputtaa tai silittää tai kertoa onnistumisesta toistekin kuullen. Lapsi kertoo myös itse oppimistaan asioista vanhemmille ja muillekin.

Matematiikan opettamisessa edetään haastateltavien mukaan pienin askelin. Aloitetaan helposta ja konkreettisesta ja siirrytään vähitellen vaikeampaan ja abstraktimpaan. On mietittävä, mikä asia on opittava ensin, jotta jonkin toisen asian oppiminen mahdollistuisi. Haastateltavien mielestä opeteltavan asian toistaminen, kertaaminen vahvistaa oppimista. Esimerkkinä tästä yksi haastateltava esitti sadun Kultakutri ja kolme karhua, jossa toistuu pieni, suurempi ja kaikkein suurin. Pöytäteatterilla eri kokoja voidaan havainnollistaa. Lapsen oppimista helpottaa myös, jos keskittymistä vaativat jaksot ovat riittävän lyhyitä ja rytmitetty niin, että välillä on enemmän toimintaa.

*Kyllä se on mulle kirkastunu tässä projektin aikana se, että nimenomaan edetään konkreetista abstraktimpaan päin. Ja alle kouluikäisillä sen tarvii olla hyvin konkreettista. (H8, haastattelu)*

*Laps ku se harjottelee, ni sehän toistaa jotain. Ja must tuntuu, et sitteki ku se on oppinu jotain, ni se sitteki vielä toistaa sitä. Ettei se, et oho nyt mä opin tän ja nyt se panna sivi. Sillai se tavallaa niinku vahvistuu se oppiminen. (H3, haastattelu)*

*Et välillä tehää jotain vilkasta ja välillä väläytetää jotaki pientä osaa, missä keskitytää ja mietitää jotain asiaa ja sitte taas tehää jotain vilkkaampaa. Elikkä et se toiminta vaihtelee. (H4, haastattelu)*

Päiväkodin työntekijöiden mielestä on tärkeää, että aikuinen tuntee lapsen tason, jolloin toiminnan voi toteuttaa sopivan tasoisena. Liian helppo toiminta ei heidän mielestään motivoi lasta. Kun tekeminen vaikeutuu sopivasti lapsen kehittyessä, innostus säilyy. Liian vaativat tehtävät puolestaan turhauttavat lasta. Oikean tasoiset tehtävät antavat lapselle onnistumisen elämyksiä. Opetettava asia on osattava tuoda lapsille oikealla hetkellä, kun se kiinnostaa heitä. Saman ikäisetkin lapset voivat olla hyvin eri tasolla matematiikassa,

joten lapsille on annettava tehtäviä yksilöllisesti. Toteuttamalla toimintaa pienryhmissä voidaan lasten yksilöllisyys huomioida paremmin. Toisaalta suuremmassa ryhmässä toimintaa voidaan suunnata isommille lapsille, jolloin pienemmät seuraavat isomprien tekemistä ja yrittävät itsekin tehdä ja oppivat siten.

*Rakennetaan vaikka tornia, ni esim. jos mul se kori niitä palikoita ja ollaa lähös vaikka syömää, ni mä annan niille eripitusen tornin tehtäväks, et jotka mä tiedän, et laskee vaikka kuin pitkälle, ni rakenna torni, jos on 32 palaa ja sitte jos lapsi selviytyy 20, ni rakenna torni, jos on 19 palaa. Ja nuorimmat torni, jos on viis palaa. Ku kaikki saa eripitusen tornin, ni ei se lapsistakaan oo mikään semmmonen ihme. Ne vaa aattelee, et toi nyt vaan anto mulle tällä kertaa tommosen tehtävän. Ja sit ku ne tulee siihen sikinsokin. Sit kaikki on ylpeitä. (H8, haastattelu)*

Matematiikkaprojektin aikana lapset testattiin, jotta heidän tasonsa tiedettäisiin. Myös havainnoimalla, kyselemällä ja antamalla pieniä tehtäviä, kasvattajat huomaavat, missä lapsi tarvitsee tukea ja mitkä asiat ovat helppoja.

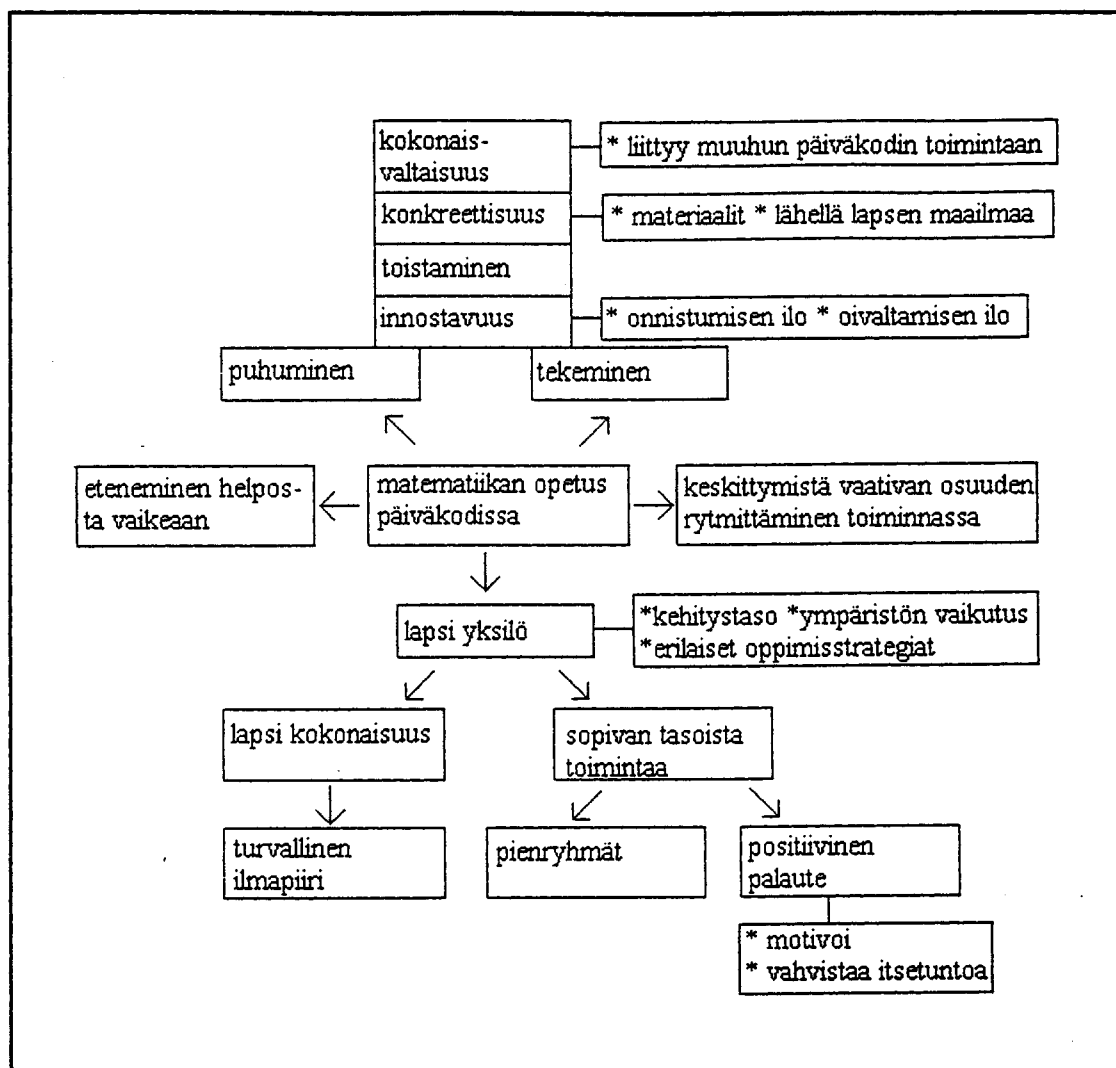
Opettamisessa on tärkeä huomioida myös emotionaalinen puoli. Turvallisella ilmapiirillä on haastateltavien mielestä merkitystä oppimisessa. Ilmapiirin on oltava sellainen, että lapsi kokee olevansa turvassa, voi olla oma itsensä, saa erehtyä ja kokeilla uudelleen ja sanoa myös ei aikuisillekin. Siten lapsen kapasiteetti keskittyy uuden oppimiseen. Myös lapsen vireystila, mieliala ja elämäntilanne on huomioitava. Jos lapset ovat vilkkaita, menee aikuiselta aikaa ja energiaa ryhmänhallintaan niin, että tilanne pysyy rauhallisena.

*Siel on se kaikki muu oleminen hirveen tärkeätä, että ne kokee olevansa turvassa. Semmosessa vaiheessa, ku siel on paljo lapsia, jotka vaeltaa paikasta toisee ja tulee niitä tönäisyjä. Jos se menee siihen, et tuntuu, et missää ei saa olla rauhassa. Et se ilmapiiri ei oo semmmonen, et siel keskittyis tekemää mitää. (H3, haastattelu)*

Työntekijöiden mielestä ei päiväkodissa matematiikka saa olla vain kynällä ja paperilla pöydän ääressä tekemistä. Mitä pienempiä lapset ovat, sitä konkreettisempaa on matematiikan oltava. Esiopetuksessa voidaan jo tehdä vähän enemmän, mutta se ei saa olla itsetarkoitus. Yksi haastateltavista koki, että vieläkin vähemmän voisi olla kynällä ja paperilla tekemistä.

*Eihän se suinkaa oo sitä, et me istutetaan ne paperin ja kynän kanssa johonki laskemaa tai jotain tehtäviä tekemää, et just siitä pitäis pyrkiä pois. Et ois semmmosta tekemistä, et toimintaa. (H3, haastattelu)*

Olen koonnut seuraavaan kuvioon käsittekarttamaisesti haastateltavien käsityksiä päiväkodin matematiikan opettamisesta (kuvio 4).



Kuvio 4. Käsitteitä päiväkodin matematiikan opettamisesta

Tiedon näkeminen staattisena, toistaminen ja opetettavan asian osittaminen (vrt. Ikäheimo ym. 1997, 10-17) viittaavat behavioristiseen oppimiskäsitykseen. Tutkimuspäiväkodissa on myös käytössä 3-6-vuotiaille opetussuunnitelmat, joissa on viikolle tehty lukujärjestys, jossa esimerkiksi matematiikka ja äidinkieli on erotettu omiksi aineikseen. Toisaalta haastattelussa tuli esiin vaatimus lapsen omasta toiminnasta ja opittavan asian ymmärtämisestä. Lapsia ei nähty passiivisina tiedon vastaanottajina, vaan aktiivisina ja yksilöllisinä ajattelijoina ja toimijoina. Matematiikan opetusta ei nähty irrallisena tuokiona päiväkodin toiminnassa, vaan osana arkipäivää. Siten tavoitteet ja suunnitelmat ovat aikuisen tukena, mutta niiden sisällä tulisi kuitenkin olla joustavuutta. Nämä erilaiset käsitykset tukevat Patrikaisen (1997) esittämää näkemystä, että opettajan ajattelu liukuu behavioristisen ja konstruktivistisen oppimiskäsityksen välisellä janalla.

Haastattelussa tuli esiin näkemys lapsesta kokonaisuutena. Tärkeää on, että lapsi kokee olonsa turvalliseksi päiväkodissa. Hän on luonnostaan aktiivinen toimija ja haluaa oppia, jos aikuinen ei sitä tukahduta. Tämä näkemys lähestyy humanistisen psykologian esittämää käsitystä oppimisesta. Siinä korostuu ihmisen arvo, ainutlaatuisuus ja luovuus sekä hänelle

ominaisten potentiaalien toteuttaminen. (Rauste-von Wright & von Wright 1995, 135-136.) Matematiikan opetuksessa koulussa tämä oppimiskäsitys ei ole korostunut. Huomionarvoista siinä kuitenkin on oppijan ja hänen mahdollisuuksiensa korostaminen.

Päiväkodin matematiikassa näen tärkeäksi haastateltavien lailla konkreettiset materiaalit ja toimimisen niillä. Ne ovat lapsen ajattelun apuna. Päiväkodin henkilökunnan koulutuksessa käsiteltiin Galperinin teoriaa, joka korostaa konkreettisuutta. Sen mukaan oppimisessa ulkoinen, materiaallinen toiminta sisäistyy henkiseksi toiminnaksi (Galperin 1957, 212). Lindgren (1990) on tutkinut toimintamateriaalin käyttöä matematiikan opiskelussa toisella luokalla. Hän totesi, että huolellisesti ja tarkoituksenmukaisesti valitun toimintamateriaalin käyttö edistää selvästi uusien matematiikan käsitteiden sisäistämistä ja hallintaa.

### 9.6.3 Koulun ja päiväkodin matematiikan vertailua

Haastateltavien mielestä koulussa tehdään enemmän tehtäviä matematiikan kirjoista. Siten matematiikka on abstraktimpaa, eikä havaintomateriaalia ole niin paljon kuin päiväkodissa. Päiväkodin ja koulun välillä onkin ollut turhan jyrkkä raja. Haastateltavat olivat kuitenkin sitä mieltä, että koulun matematiikka on lähentymässä päiväkodin toimintatapaa. Siinä on auttanut koulun ja päiväkodin välinen yhteistyö.

Edellä todettiin, että lapsen tulisi saada edetä matematiikan oppimisessa yksilöllisesti omaan tahtiinsa. Toisaalta koulun ja päiväkodin välillä on jonkinlainen raja. Se herätti haastateltavia pohtimaan, kuinka pitkälle lasten kanssa voidaan edetä matematiikassa. Toisaalta voidaan olla sitä mieltä, että vasta koulussa käydään tiettyjä sisältöjä, jotka kuuluvat koulun opetussuunnitelmaan. Toisaalta taas, jos lapsi on kiinnostunut matematiikasta, on siinä edettävä niin pitkälle kuin lapsi haluaa.

*Must tuntuu, et täällä meidän päiväkodissa tehää varmaa aika paljo, et en mä tiää, tehääkö jo enemmänki niitä kouluvalmiuksia, että mitä ehkä vois olla vasta koulussaki... Että niinku ne sanoo koulussa, et näähän on jo niin kypsiä, jotka siirtyy täältä, et mitä niille antaa haasteita eppuluokalla sitte. (H1, haastattelu)*

*Et tarkotushan on vaan, että lapsi oppii. Eihän sillä nii oo väliä, et missä ja miten se oppii, kuhan se vaan oppii. (H6, haastattelu)*

## 9.7 Haastateltavien ajatuksia matematiikkaprojektista

### 9.7.1 Koulutuksen merkitys

Tutkimuspäiväkodissa oli toteutettu matematiikkaa jo ennen matematiikkaprojektia. Haastateltavien mielestä koulutus herätti heidät huomaamaan, että he olivat tehneet monia asioita ajattelematta, että se oli oikeastaan matematiikan opetusta. Projektin myötä matematiikkaa alettiin toteuttaa systemaattisesti.

Koulutus sai työntekijät pohtimaan, mitä on matematiikka, mitä siihen sisältyy. Matematiikkaa on lauluissa ja peleissäkin. Haastateltavien mielestä heidän kuvansa matematiikasta laajentui. Koulutus teki heidät myös tietoisemmiksi matematiikan opetuksesta, erityisesti sen konkreettisuudesta. Matematiikka on tekemistä. Koulutuksesta he saivat teoriaperustaa ja käytännön ideoita matematiikan opetukseen. Toisaalta yksi haastateltavista koki, että teoreettinen osuus oli kuiva, vaikka se päättikin koulutuksen hyvin. Hän koki mielekkäimmäksi sen, että koulutuksen aikana sai itse kokeilla ja tehdä.

*...rupes enemmän iteki ajattelemaa, et mitä kaikkee siihen matematiikkaa loppujen lopuksi sisältyy. Et ehkä sitä ei muuten nii hirveen paljo ois tullu mietitty. (H2, haastattelu)*

*Et nyt tajuaa, et ku pelaa ni se on matematiikkaa. Et ikinä ennen ei ajatellu, et se on matematiikkaa ku lasketaa niitä, sitä on vaa niinku pelannu, et ei oo ajatellu, et se kehittää matemaattisia taitoja. Sit sen kautta on tullu sekin, et ennen ku pelas lapsen kanssa, ni sitä helposti autto ja laske ite et pistä tähän se nappula. Et nyt sitä niinku oottaa, et se laps laskee ite ja yrittää ainaki oivaltaa, et mikä siinä on takana. (H4, haastattelu)*

*Se on vaikuttanu ihan tähän mun oppimiskäsitykseeni, että justiin siihen, että mä oon yleensä saanu tietää, että millä tavalla voi matematiikkaa opettaa alle kouluikäisille lapsille, et mitä se esiopetuksen matematiikka voi olla. Minkälaisia välineitä ja materiaaleja voi olla ja mitkä on ne sisältöalueet, mitä voi näillä pienillä tulla kysymykseen. (H7, haastattelu)*

Haastateltavat kokivat, että koulutuksen myötä asenne matematiikkaa kohtaan muuttui positiivisemmaksi. Tähän vaikuttivat myös muut seikat, esimerkiksi omien lasten koulu-  
taipaleen seuraaminen.

*Ihan mielenkiintoinen juttu oli jotenki tämmönen, että tää matematiikka voi olla ihan kivaa, mukavaa, ilosta, mikä nyt ois oikee sana. (H2, haastattelu)*

*Viime vuosi on ollut päiväkodissamme todella matikkapainotteinen. Olisi ihme, ellei se olisi jollain tavoin muuttanut käsitystäni matematiikasta. Täytyy myöntää, positiiviseen suuntaan! (H1, kirjoitelma)*

Kouluttautuminen toi uusia tuulia työhön. Se innosti ja toi vaihtelua. Samalla tavalla voisi heidän mielestään syventää myös muita alueita. Koulutuksen myötä päiväkotiiin tilattiin

myös uutta materiaalia. Yhteinen koulutus lähensi työntekijöitä toisiinsa ja toisaalta tutustuminen muihin koulutuksessa oleviin toi uusia ihmissuhteita ja vaikutteita muualta.

### 9.7.2 Matematiikkaprojektin ja koulutuksen arviointia

Haastateltavat olivat etukäteen hiukan odottavalla kannalla kurssin suhteen miettien, että mitähän se tulee olemaan. Kaikki kuitenkin olivat innostuneita, vaikka se vaatikin järjestelyitä, koska koulutukset olivat illalla työajan jälkeen. Yhdestä haastateltavasta tahti tuntui liian kiireiseltä, koska aikaa ei jäänyt syventymiseen ja omien ajatusten kypsyttelemiseen.

*[Vastasko se koulutus sun odotuksia, mitä etukätee aattelit, mitä se vois olla?]  
Must tuntuu, et mä enempi niinku innostuin siitä asiasta, ku mitä mä odotinkaa etukätee. Ja just sen kautta, et mä aattelin, et mä jään taas kiinni siitä, et mä en osaa matematiikkaa. (H4, haastattelu)*

*Joskus tuntu, et ku oli sitä, et ensin työpäivän päälle lähtee. Mut sitte ku tuli, ni sit se taas tuntu, et tää on ihan kivaa. (H2, haastattelu)*

Haastateltavat kokivat hyvänä, että kouluttaja tuli heidän luokseen ja koko henkilökunta osallistui yhtä aikaa koulutukseen. Näin heille muodostui yhteinen pohja.

*Se näkyy ihan eri lailla, ku se on tämmöstä, et yhtä aikaa kaikkia koulutetaan. Jos joku on kurssilla ja innostuu ja tulee sit tänne, ni se lopahtaa. Ei sitä osaa toisille kertoa niin. Et ei siinä toiset pääse nii siihen samaan vireeseen, ku ei ne oo ollu mukana. (H3, haastattelu)*

Haastattelut on suoritettu keväällä ja matematiikkaprojekti oli alkanut edellisenä keväänä. Haastateltavat kokivat olevansa jonkinlaisessa taantumavaiheessa. Projektiin oli panostettu paljon ja nyt haluttiin antaa enemmän resursseja muihinkin osa-alueisiin, esimerkiksi kuvaamataitoon. Rahaa oli käytetty paljon matematiikan materiaaleihin ja nyt niitä haluttiin suunnata muuallekin. Haastateltavien mielestä matematiikka jää kuitenkin elämään päiväkotiin.

*Työpaikalla meillä on tällä hetkellä paljon matematiikkaa koskevaa materiaalia ja varmasti tietoa ja taitoakin. Siksi tuntuukin, että vaihteeksi voisi alkaa panostamaan enemmän vaikkapa äidinkieleen, luonto- ja ympäristökasvatukseen tai kuvaamataitoon. (H5, kirjoitelma)*

*Tää on ollu tämmöstä siirtymistä, et se varsinainen oppijaksohan meillä oli viime keväänä. Siinä on niinku vierähtäny. Tässähän on niinku tämmönen, sanotaanko taantuma menny. Mitenkä se on niinku jääny elämään tänne itseemme. (H1, haastattelu)*

Haastateltavien tämän hetkinen käsitys matematiikasta on syntynyt omien koulukokemusten, käytännön työn ja koulutuksen kautta. Siten siinä on mukana affektiivinen ja tiedollinen ulottuvuus. (Kagan 1992, 154; Pehkonen 1995, 13.) Siinä yhdistyvät kouluikäinen, filosofinen ja käytännön työn kautta muotoutunut käsitys matematiikasta. Kouluikäiset

käsitykset ovat osittain muuttuneet. Tärkeimpiä muutoksia ovat matematiikkaan suhtautumisen muuttuminen positiivisemmaksi ja matematiikkakäsityksen laajentuminen. Ne ovat antaneet pohjan kasvattajille pohtia päiväkodin matematiikan opetusta. Siitä on tullut tietoista.

Koko henkilökunnan yhteinen tekeminen koettiin hyvänä koulutusmuotona. Tobin ja Tippins (1993, 9) näkevät opettajien koulutuksen konstruktivistisesta näkökulmasta. Opettaja on oppija, jolla on kokemuksia oppimis-opettamistapahtumasta. Hän reflektoi näitä kokemuksia, antaa niille merkityksiä, jolloin aikaisempi tieto yhdistyy uuteen ymmärrykseen. Se rakentuu vuorovaikutuksessa kouluttajan ja kollegoiden kanssa. Opettajilla on kuitenkin oltava aikaa pohtia omia kokemuksiaan ja näkemyksiään, selvittää, kehitellä ja tutkia eri vaihtoehtojen etuja. Tärkeää lastentarhanopettajien koulutuksessa ja täydennyskoulutuksessa olisi huomioida opiskelijoiden aikaisemmat käsitykset sekä annettava heille uusia kokemuksia opiskeltavasta asiasta reflektoinnin pohjaksi. Pelkkä luennointi ei riitä (vrt. Lindgren 1995 ja 1996; Ernest 1989).

Thomas Cooneyn (1999, 168, 175) mukaan tieto pelkästään matematiikasta ei riitä, vaan opettajalla on oltava myös pedagogista tietoa. Hänellä on itsellään oltava samansuuntaisia kokemuksia matematiikasta kuin oletetaan tehokkaan matematiikan opetuksen olevan.



## 10 POHDINTA

Matematiikka ja oppiminen ovat abstrakteja käsitteitä, joita voi olla vaikea hahmottaa. Kun haastateltava pohtii omaa käytännön työtään, sitä miten hän toimii lasten kanssa ja opettaa heitä, on taustalla hänen ihmis-, oppimis- ja tiedonkäsitteensä. Omasta konkreettisesta työstä on helppo kertoa, mutta käsitystä oppimisesta ja tiedosta, tässä tapauksessa matematiikasta, voi olla vaikeampi jäsentää ja kertoa toiselle. Tuloksissa laajin alue onkin kasvattajien käsitykset matematiikan opettamisesta päiväkodissa. Käsitteet opettamisesta kertovat kuitenkin myös käsityksistä oppimisesta, matematiikasta ja lapsesta.

### 10.1 Näkökulmia käsitteisiin matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta

Tutkimuksessani pyrin tuomaan esiin erilaisia käsitteitä matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta. Haastateltavista kenenkään käsitteet eivät asettuneet vain yhteen kategoriaan, vaan he toivat esiin erilaisia näkemyksiä. Siten ne eivät olleet yhden mallin mukaisia eli kenenkään haastateltavan käsite esimerkiksi matematiikasta ei vastannut vain yhtä Ernestin (1989) tai Hershin (1986) esittämistä eri matematiikkakäsitteistä. (vrt. Thompson 1992, 137.) Joissakin tutkimuksissa taas on opettajien käsitteistä muodostettu hierarkkisia kategorioita, jolloin opettajien on nähty edustavan ajattelussaan ensisijaisesti jotakin näistä kategorioista (esim. Lindgren 1995; Laine 1992). Erilaiset käsitteet tuovat esiin oppimisen, opettamisen ja matematiikan moniulotteisina ilmiöinä. Esimerkiksi matematiikkaa oppiaineena ei voi kuvata vain ongelmaratkaisuna, vaan se on myös soveltamista ja väline.

#### 10.1.1 Käsitteitä matematiikasta ja oppimisesta

Haastateltavien käsite matematiikasta liukuu staattisuuden ja dynaamisuuden välisellä janalla. Instrumentaalisessa ja platonisessa käsitteessä matematiikka on staattista. Toimiviksi havaittuja kaavoja ja sääntöjä käytetään yhä uudelleen ja valmis matematiikan rakenne ei ole ihmisen muutettavissa. Matematiikassa tarvitaan formaalisuutta. Kuten kielissä, on matematiikassakin käytettävä oikeita nimityksiä ja merkintöjä, jotta viesti

menisi perille. Neliö on neliö ja  $1+1=2$ . Formaalisuus ei voi kuitenkaan olla itsetarkoitus, sillä silloin unohtuu yksi matematiikan ulottuvuus, ongelmanratkaisu. Matematiikassa ongelmanratkaisuna korostuu dynaaminen tiedonkäsitys. Ongelmaa ratkaistessa voi saada saman ratkaisun eri tavoin tai voidaan muotoilla useampia ratkaisuja.

Staattinen tiedonkäsitys keskittää huomion irrallisiin, muuttumattomiin faktoihin. Ne voidaan oppia ulkoa. Muuttuvassa, monimutkaisessa yhteiskunnassa staattinen tieto ei kuitenkaan riitä, koska se voi vanhentua nopeastikin. Tarvitaan dynaamista, muutosten lainalaisuutta koskevaa tietoa, jonka tärkeä ominaisuus on sovellettavuus. Perinteisen tiedon siirtämisen sijasta tuetaan ajattelun taitojen kehittymistä. (Voutilainen, Mehtäläinen & Niiniluoto 1990, 20-21.) Matematiikassa paradoksina onkin juuri sen valmis rakenne ja toisaalta soveltaminen ja ongelmien ratkaisu uudella, luovalla tavalla. Valmiskin tietorakenne on alunperin syntynyt ihmisen toiminnan tuloksena. Oppijan on ymmärrettävä se suhteessa omaan tietorakenteeseensa eli toiminnan kautta rakennettava se uudelleen. Tällainen tiedonkäsitys pakottaa miettimään matematiikan luonnetta ja sen pohjalta opetuksen toteutusta.

Haastateltavien käsityksessä oppimisesta tulee esiin muutos; oppimisessa tulee jotakin uutta, uusia tietoja ja taitoja. Lapsi myös ymmärtää asioita uudella tavalla. Haastatteluissa korostui sisäinen muutos, muutos lapsen ajattelussa. Lapsen on ymmärrettävä opittavan asian merkitys. Haastateltavat näkivät oppimisen myös prosessina, se ei ole pelkästään nopea oivallus.

Kaarina Laine (1992) on tutkinut lastentarhan-, luokan- ja aineenopettajaksi opiskelevien käsityksiä kasvatuksesta, opetuksesta ja oppimisesta. Oppimis-käsitteen ominaisuuksina hänen tutkimuksessaan olivat juuri muutos ja prosessi. Hänen tutkimuksessaan opiskelijat kuvasivat oppimisprosessia neljällä eri tasolla: oppiminen perustuu toistamiseen ja vahvistamiseen, oppiminen on oppijan aktiivista toimintaa, oppimisessa tieto liitetään kumulatiivisesti vanhaan ja oppiminen on uuden ja vanhan tiedon vuorovaikutusprosessi. (Laine 1992, 72-74.)

Tutkimuksessani haastateltavien käsitykset oppimisesta kuvastivat kolmea ensimmäistä tasoa painottuen käsitykseen oppimisesta oppijan aktiivisena toimintana. Oppiakseen lapsen on itse saatava pohtia ja toimia yksin ja yhdessä muiden kanssa. Kukaan haastateltavista ei esittänyt pelkästään yhdelle tasolle sijoittuvia näkemyksiä oppimisesta. Käsitys oppimisesta uuden ja vanhan tiedon vuorovaikutusprosessina, jossa myös vanha tieto muokkautuu, ei tullut haastatteluissa esiin.

Oppimisessa haastateltavat näkivät tärkeänä, että lapsi omakohtaisesti oivaltaa, mistä opittavassa asiassa on kyse. Jos lapsi on oppinut jotain, hän osaa soveltaa ja käyttää sitä myös jossakin toisessa tilanteessa. Laine (1992, 59, 78-79) kutsuu näitä oppimisen tasoiksi, jotka ovat tavoitteena opettamisessa. Niitä on kaikkiaan neljä: tietojen karttuminen ja muistaminen, tiedon ymmärtäminen ja oivaltaminen, tiedon hyväksikäyttäminen ja soveltaminen sekä luova ajattelu ja toiminta. Tietojen karttumista tutkimuksessani vastaa käsitys oppimisesta uusien tietojen ja taitojen saamisena. Haastatteluissa painottuivat omakohtainen ymmärtäminen ja tiedon soveltaminen.

Haastateltavat eivät mainitse luovaa ajattelua ja toimintaa oppimisen määrittelyn tai tavoitteiden yhteydessä, poikkeuksena yksi haastateltava, joka mainitsi, että "lapset kokevat iloa ja luovuutta oppiessaan matematiikkaa" (H2, kirjoitelma). He puhuvat kuitenkin siitä, että lapsi laajentaa käsitystään opittavasta asiasta ja keksii siihen lisää. Käytän tästä oppimisen tasosta nimitystä laajentaminen. Lapset ovat käyttäneet matematiikkaa päiväkodissa hyvin luovasti, esimerkiksi yhden haastateltavan kertoessa lasten keksimästä bingo-pelistä. Siinä lapsi sanoo jonkin luvun yhden ja kahdentoista väliltä. Toinen lapsi heittää kahta noppaa. Niiden silmäluvut lasketaan yhteen, esimerkiksi seitsemän. Jos lapsi on sanonut tämän luvun, kaikki huutavat bingo. Jos taas lapsi on sanonut kuusi tai kahdeksan, on se sivuosuma. Näin leikki jatkuu vuorotellen.

Matematiikka ja sen oppiminen luovana toimintana ja ajatteluna sekä ongelmanratkaisuna olen siis tulkinnut haastateltavien kertomuksista siitä, miten he toteuttavat matematiikkaa päiväkodissa. Esimerkiksi matematiikan (tiedon) soveltamisen haastateltavat mainitsivat suoraan, toisin kuin luovuuden ja ongelmanratkaisun. Nämä eivät välttämättä ole niin tietoisia, jolloin niiden tavoitteellinen tukeminen on vaikeaa.

### 10.1.2 Käsitykset matematiikasta ja oppimisesta opetuksen perustana

Kupari (1993, 82) esittää, että matematiikan osaamista voidaan kuvata tiedollisten saavutusten (menestyminen matematiikassa) lisäksi asenteina. Asenteissa on erotettavissa affektiivinen ja kognitiivinen alue. Affektiivinen alue sisältää matematiikasta pitämisen. Tässä tutkimuksessa haastateltavat pitivät matematiikasta jossakin vaiheessa koulu-uraa tai joistakin matematiikan osa-alueista, mutta eniten painottui se, mistä haastateltavat eivät pitäneet. Siten affektiivisella alueella haastateltavien negatiiviset asenteet korostuivat positiivisiin verrattuna. Kognitiiviseen alueeseen kuuluvat käsitykset matematiikan vaikeudesta ja tärkeydestä. Kun matematiikka oli vaikeaa, ei siitä pidetty, vaikka tiedolliset saavutukset (esim. koenumerot) olisivat olleet hyviäkin.

Kasvattajien omia kouluaikana negatiivisena kokemia asioita matematiikasta on pyritty päiväkodissa tekemään toisella tavalla. Omat kokemukset ovat siten vaikuttaneet oppimisympäristön luomiseen. Koulutus osaltaan on tehnyt tätä tietoiseksi. Esimerkiksi haastatteluissa korostui, että päiväkodin matematiikka ei ole pakonomaista, kuivaa kirjan tehtävien tekemistä, vaan iloista ja konkreettista toimintaa. Lasten ei haluttu kokevan sitä huonommuuden ja pakkopullan tunnetta, jota haastateltavat itse olivat kokeneet kouluaikoinaan.

Matemaattinen tieto on Leinin (1998, 46) mukaan käytännöstä lähtevää ja ihmisen konstruoimaa. Tämä tieto on irronnut konkreettiselta tasolta ja voi kontekstivapaana vaikuttaa puhtaalta teorialta. Tästä syntyy jännitekenttä matematiikan opetukseen. Opettaja ymmärtää, että oppilas konstruoi tietonsa ja pyrkii tukemaan tämän ymmärtämispohjan syntymistä. Toisaalta realiteetti on, että matematiikassa on tietojärjestelmiä ja vakiintuneita toimintamuotoja. Tässä jännitekentässä opettaja voi toteuttaa opetusta hyvin eri tavoin.

Mielestäni tämän jännitekentän tiedostaminen on tärkeää kasvattajan pohtiessa matematiikan opetusta. Toisaalta on oikea tapa ymmärtää jokin asia, esimerkiksi lukukäsite. Tällöin kasvattaja pyrkii vaikuttamaan lapsen tietorakenteeseen muuttaen sitä oikean ymmärrystä-

van mukaiseksi. Toisaalta ongelmanratkaisussa ei ole aina valmista tapaa ymmärtää jokin asia, vaan lapsi voi konstruoida sen hyvin eri tavoin. Matemaattinen tieto ei ole siten oppijan ulkopuolista ja ongelmatonta. Leinon (1998, 40, 46-47) mukaan tämä nostaa matematiikan opettamisen perustaksi matemaattisen tiedon luonteen ja merkityksen pohtimisen. Opettajan on huomioitava lasten käsitykset ja kiinnostuksen kohteet opetuksessa, jolloin hän voi tukea lapsen aikaisemman tietorakenteen laajenemista. Tämä ei sulje pois perinteisten käsitteiden ja nimitysten käyttöä.

Kun matematiikka ja oppiminen nähdään luovana toimintana ja ongelmanratkaisuna, vaatii opettaminen mielestäni konstruktivistista otetta. Metakognitiiviset taidot voidaan nähdä osana luovaa ajattelua ja ongelmanratkaisutaitoja; ne mahdollistavat oman ajattelun seuraamisen ja siten uusien reittien etsimisen sekä kysymysten asettamisen sen pohjalta, mitä opittavasta asiasta ymmärtää tai ei ymmärrä. Alle kouluikäisten lasten kanssa voi metakognitiivisia taitoja kehittää esimerkiksi tehtävillä, joissa lapsi joutuu itse miettimään vaikkapa edessään olevien esineiden luokitteluperusteet. Tai hänen on neuvottava toista lasta piirtämään jokin kuvio, jolloin hänen on kerrottava ääneen, miten itse piirtäisi kuvion. Myös heuristiset kysymykset ovat yksi tapa näiden taitojen kehittämiseen (Schoenfeld 1987). Metakognitiiviset taidot tulisikin huomioida matematiikan oppimisen tukemisessa, sillä tutkimustulokset osoittavat, että ne oppilaat, joilla on kehittynyt metakognitiivinen tietoisuus, ovat tehokkaampia oppijoita. He ymmärtävät syvällisemmin opiskeltavat asiat ja kykenevät oman toimintansa itsesäätelyyn oppimistilanteissa. (Oikinuora 1994, 59.)

McPherson ja Payne (1987, 77) pitävät ongelmanratkaisua erittäin tärkeänä osana matematiikan oppimisessa jo lapsen varhaisvuosina. Ongelmanratkaisu ei ole vain valmiin polun seuraamista, vaan kysymistä, arvaamista, kuvien piirtämistä, mallien muodostamista ja vihjeiden etsimistä. Kun ongelmaa voi lähestyä eri tavoin, on hyvä arvioida yhdessä, mikä ratkaisutapa olisi sillä kertaa sopivin. Ongelmanratkaisuprosessissa opettaja tukee lapsia yhteistyöhön ja ohjaa heidän etenemistään. Onnistunut ongelmanratkaisu tuo lapselle onnistumisen elämyksiä, mikä osaltaan vahvistaa itsetuntoa.

Haastateltavien käsitykset oppimisesta sisälsivät aineksia behavioristisesta sekä konstruktivistisesta oppimiskäsityksestä. Niitä ei tarvitse kuitenkaan laittaa vastakkain, jolloin behaviorismista pitäisi yksiselitteisesti pyrkiä konstruktivismiin (Patrikainen 1997). Ne tulisi enemmänkin nähdä erilaisina perspektiiveinä oppimiseen, jolloin niiden hyviä ja huonoja puolia voidaan arvioida kulloisenkin oppijan ja opetettavan asian näkökulmasta. Saman asian toistuminen esimerkiksi sadussa kiinnostaa pientä lasta. Yksi haastateltava kertoiikin esimerkkinä sadun Kultakutri ja kolme karhua, jossa vertaillaan karhujen kokoja ja eri esineitä toistuvasti. Samaa satua voidaan myös käsitellä eri tavoin: lukea, esittää konkreettisin esinein. Aikuinen voi kysymyksiin ja lasten toimintaa havainnoimalla selvittää lasten muodostamia tietorakennelmia. Näin toistaminen on monipuolista ja saman asian voi oppia eri tavoin, esimerkiksi visuaalisesti, auditiivisesti tai taktiilisesti. Drillaus kuitenkin ei ole matematiikan opetusmenetelmänä mielekäs.

Konstruktivismi antaa laajemman pohjan opetuksen kehittämiseen kuin behaviorismi, koska oppiminen ymmärretään syvemmin oppilaan näkökulman ja tiedon dynaamisuuden korostuessa. Konstruktivistinen oppimiskäsitys sisältää näkemyksen behaviorismista, mutta pedagogisen ajattelun behavioristinen ulottuvuus ei välttämättä sisällä konstruktivis-

tisen ajattelun tietoista hallintaa (Patrikainen 1997). Siksi matematiikan opetukseen liittyen olisi kasvattajien tärkeä tutustua erilaisiin näkemyksiin oppimisesta ja erityisesti konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen.

Danan ja Davisin (1993, 327) mukaan konstruktivismi ei ole opetusmetodi, vaan näkemys oppimisesta ja tiedon muodostuksesta. Siten se ei anna valmiita kikkoja opetuksen toteuttamiseen, vaan se on pohja ymmärtää oppimista ja sen kautta kehittää omaa opetusta. Opettamisen painottamisen sijasta tulisi reflektion keskiössä olla lapsesta lähtevä oppimisen pedagogiikka (Hujala ym. 1998, 27). Pohdittavia kysymyksiä ovat tällöin esimerkiksi, miten lapsi oppii ja miten lapsen oppimista voi tukea. Matematiikan opetuksessa korostuu myös sen luonteen pohtiminen eli tiedonkäsitys opetuksen perustana.

Hujalan ym. (1998, 27) mukaan kasvattajat kokevat usein toimivansa lapsilähtöisesti, mutta käytännön tasolla toiminta on aikuiskeskistä. Tässä tutkimuksessa ei havainnoitu käytännön tasoa, mutta kasvattajien käsityksissä tuli esiin lapsilähtöisyys ja toisaalta myös aikuisen vastuu oppimis-opettamistapahtumassa. Lapsi on aktiivinen toimija ja varsinainen oppija. Aikuisen rooli on luoda oppimiselle puitteet ja tukea ja ohjata lasta oppimisessa. Laineen (1992, 56-57) mukaan opetusprosessin ääripäitä ovat opettajakeskeisyys ja lapsilähtöisyys. Tavoitteiden saavuttamisen kannalta ei kumpikaan ääripää ole riittävä, vaan tärkeää on opettajan ja oppilaan välinen vuorovaikutus. Korpilahden päiväkodin kasvattajat toivat esiin myös lasten välisen vuorovaikutuksen merkityksen oppimisessa. Lasten välinen vuorovaikutus, saattaa helposti jäädä huomiotta, kun pohditaan matematiikan opetusta ja oppimista. Lapset matkivat, opettavat toisiaan, keskustelevat ja kiistelevät, ja samalla he vertailevat tietorakennelmiaan ja konstruoivat niitä edelleen.

Haastatteluissa painottui lapsilähtöisyys myös yksilöllisyyden kautta. Lapset ovat yksilöllisiä oppijoita; he oppivat eri tavoin ja toiset ovat nopeampia kuin toiset. Siten voisi ajatella, että pidemmälle edenneet lapset ovat lahjakkaampia matematiikassa. Kasvattajien näkemyksen mukaan kaikki kuitenkin voivat oppia matematiikkaa, kun sitä käsitellään lapsen sen hetkiseen tasoon sopivasti. Aikuisen on siis tunnettava lapsen kehitystaso. Vygotski (1982, 184) näkee opetuksen kannalta tärkeäksi lapsen lähikehityksen vyöhykkeen. Tehtävät, jotka lapsi pystyy ratkaisemaan itsenäisesti, määrittelevät hänen tosiasiallisen kehitystasonsa. Lähikehityksen vyöhyke on se alue, jossa lapsi työskentelee epäitsenäisesti, yhteistyössä muiden kanssa. Tämä alue tarjoaa lapselle haasteita ja mahdollisuuden ponnisteluun. Lapsi oppii uutta ja kehitys etenee, sillä lähikehityksen vyöhykkeellä oleva toiminta ja ajattelu muuttuu tosiasialliseksi kehitystasoksi lapsen oppiessa itsenäiseksi.

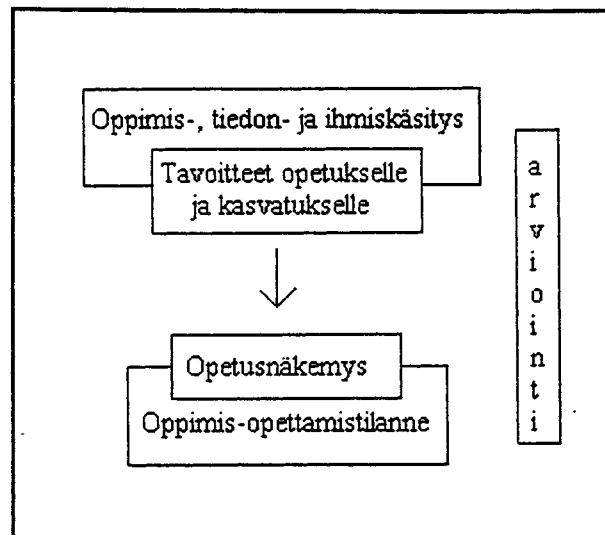
Yksilöllisyys ja lapsen tason mukainen toiminta pakottavat pohtimaan, kuinka pitkälle matematiikassa voidaan lasten kanssa edetä päiväkodissa. Haastatteluissa tuli esiin se, että lapset ovat matemaattisilta taidoiltaan eri tasoilla. Toiset laskevat jo laskuja, kun toiset opettelevat lukukäsitteen merkitystä. Kasvattajat korostivat, että lapsen on saatava edetä omaan tahtiinsa eikä häntä voi estää oppimasta. Toisaalta kokonaislukujen ja yhteen- ja vähennyslaskujen opetteleminen kuuluvat koulun opetussuunnitelmaan. Siten koulun ja päiväkodin toiminnassa voi tulla päällekkäisyyttä. Lapsen kannalta näkisin parhaana, että päiväkodissa tarjotaan lapselle yksilöllistä matematiikan opetusta, joka lähtee hänen kiinnostuksen kohteistaan ja vastaa hänen lähikehityksen vyöhykettään. Toiset lapset saattavat edetä päiväkodissa hyvinkin pitkälle. Tämä vaatii koulun opettajien ja päiväkodin henkilökunnan välille yhteistyötä, jolloin lapsi voi jatkaa koulussa siitä, mihin päivä-

kodissa jäi. Tätä helpottaisi päiväkodin ja koulun matematiikan opetustapojen yhteneväisyys. Päiväkodin työntekijöiden huomioima lasten innokkuus matematiikkaa kohtaan tukee osaltaan Malatyn (1998) näkemystä, että lapsia on aliarvioitu matematiikan oppijoina. Matematiikan oppiminen ei ala vasta koulussa, vaan lapsella on matemaattisia kokemuksia esimerkiksi tilasta ja muodoista jo syntymästä lähtien.

Yksilöllisen opetuksen ei tarvitse merkitä sitä, että jokainen tekee erilaisia asioita. Siinä tulevat resurssit vastaan. Mutta saman tehtävän voi tehdä eri tavoin, helpompana tai vaikeampana, lapset voivat työskennellä pienryhmissä ja auttaa toisiaan ja yhdessä voidaan pohtia jotakin ongelmaa. Matematiikan opetuksesta ei muodostu jäykkää kehikkoa, joka määrittää, mitä lasten on opittava milloinkin (Haapasalo 1997).

Miksi sitten matematiikkaa pitäisi opettaa lapsille jo päiväkodissa? Haastateltavien esittämät tavoitteet matematiikan opetukselle olivat laajat. Matematiikan oppiminen kehittää lapsen ajattelua ja luo siten perustan myöhemmälle matematiikan opiskelulle ja soveltamiselle. Tarkoituksena on myös tukea lapsen myönteistä suhtautumista matematiikkaan. Nämä vastaavat esittämiäni matematiikan esiopetuksen tavoitteita (mm. Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet, 1996; Ikäheimo ym., 1997). Päiväkodin matematiikan opetuksella on mahdollista tukea lapsen kehitystä ja pitkäjänteisyyden ja keskittymiskyvyn kehittymistä. Sen antamat haasteet innostavat lapsia, ja onnistumisen elämykset tukevat lapsen itsetuntoa. Se on myös yksi lenkki elinikäisen oppimisen ketjussa. Matematiikka on yksi tapa lapselle rakentaa maailmankuvaansa.

Tutkimuksen myötä on muotoutunut näkemykseni matematiikan opetuksen käytännön toteutuksen taustalla olevista tekijöistä (kuvio 5). Lähestymistavan tulisi olla oppimiskehinen. Oppimis-, tiedon- (käsitys matematiikasta) ja ihmiskäsitys ovat perustana asetettavissa tavoitteita opetukselle ja kasvatukselle. Näiden käsitysten pohjalta muotoutuu opettajan opetusnäkemys; miten matematiikkaa tulisi lapsille opettaa. Arvioinnin tulisi kohdistua varsinaisen oppimis-opettamistilanteen lisäksi sekä tavoitteisiin että opettajan omiin käsityksiin. Korpilahden päiväkodin työntekijöiden käsitykset voidaan sijoittaa tähän kuvioon, jolloin ne ovat taustana heidän toteuttamalleen matematiikan opetukselle päiväkodissa. Lapselle tästä kuviosta näyttäytyy konkreettisesti oppimis-opettamistapahtuma. Hän on osa sitä ja katselee tätä kuviota ikään kuin alhaalta päin. Ollessaan mukana arkipäivän toiminnassa lapsi kokee ne käsitykset, jotka opettajalla on oppimisesta, ihmisestä ja matematiikasta (tiedosta). Siten ne voivat muotoutua osaksi lapsen omaa käsitysjärjestelmää.



Kuvio 5. Matematiikan opetuksen muotoutuminen

Kasvattajan olisi pohdittava omia käsityksiään oppimisesta, lapsesta ja matematiikasta (tiedosta). Matematiikan esiopetuksessa korostuvat pieni lapsi oppijana ja matematiikan perusta. Erilaisiin käsityksiin voi tutustua lukemalla, koulutuksessa ja keskustelemalla muiden kanssa. Jos opettaja ei reflektoi opetuskäytäntöjään, jatkaa hän työtään pohtimatta ja ymmärtämättä sen perustaa. Parhaimmillaan koulutus saakin koulutettavat miettimään omia käsityksiään, jolloin niistä tulee tietoisia ja siten vahva pohja kasvatustyölle.

## 10.2 Tutkimuksen arviointia ja jatkotutkimushaasteita

Eskolan ja Suorannan (1996, 167) mukaan laadullisen tutkimuksen luotettavuutta pohties- sa on kiinnitettävä huomiota tutkimuksen uskottavuuteen, vahvistuvuuteen, siirrettävyy- teen ja varmuuteen. Näiden käsitteiden kautta tulee esiin laadullisen tutkimuksen luonne. Ahonen (1994, 129-131) pitää laadullisen tiedon luotettavuuden kriteerinä tulkintojen validiteettia. Fenomenografisessa tutkimuksessa sekä aineiston että kategorioiden validi- teettia on tarkasteltava tutkimushenkilöiden intentioiden ja tutkimuksen teoreettisten lähtökohtien muodostamassa kehikossa.

Uskottavuutta ja vahvistuvuutta vastaavat fenomenografisessa tutkimuksessa aitous ja relevanssi, jolloin tarkastellaan aineiston ja johtopäätösten validiteettia. Aineiston aitous tarkoittaa, että se vastaa tutkittavan ajatuksia. (Ahonen 1994, 152-153.) Häkkinen (1996, 47) kritisoikin fenomenografista tutkimusta, jossa otetaan usein itsestään selvyytenä, että kaikki tutkittavat haluavat ja voivat ilmaista käsityksensä tutkittavasta ilmiöstä. Ihmisillä on eroja ilmaisullisissa kyvyissä. Ne näkyivät tekemieni haastatteluiden pituudessa sekä vastausten jäsenyisyydessä. Haastattelun teemoittelu auttoi minua haastattelijana seuraamaan haastattelua niin, että kaikki oleelliset alueet käytiin läpi. Fenomenografisen tutkimuksen aineiston kerääminen on kuitenkin vaativaa, ja aina en osannut omilla tarkentavilla kysymyksilläni tai kommentaillani auttaa haastateltavaa jäsentämään ajatuk- siaan. Kirjoitelmat antoivat päiväkodin työntekijöille mahdollisuuden jäsentää ajatuksiaan

rauhassa omalla tyyllillään. Ne olivat samansuuntaisia haastattelujen kanssa, jolloin ne vahvistavat toisiaan. Pyrin haastattelukysymysten etenemisellä tukemaan haastateltavia käsitystensä jäsentämisessä aloittaessani konkreettiselta ja yleiseltä tasolta ja siirryin vasta tältä pohjalta abstraktille määrittelyjen tasolle.

Fenomenografiseen tutkimukseen liittyen Häkkinen (1996, 47) esittää aiheellisen kysymyksen: "Miten yksilö pystyisi kielen avulla ilmaisemaan sellaisia käsityksiä, joita hän ei itsekään tiedosta? Käsitykset ovat osittain tiedostamattomia ja siksi vaikeita tavoittaa. Haastateltavien matematiikkaprojekti ja siihen liittyvä koulutus ovat herätelleet heitä pohtimaan matematiikkaa ja keskustelemaan siitä, mikä on lisännyt tietoisuutta. Syvällä olevia uskomuksia pyrin tuomaan esiin kyselemällä haastateltavilta heidän kokemuksiaan ja suhtautumistaan matematiikkaan aikaisemmin. Tosin tässä ovat rajoituksena muistikuvien selkeys ja niiden suodattaminen juuri toteutetun matematiikkaprojektin läpi. Useampi haastattelukerta olisi tukenut tietoisempaa aiheen käsittelyä ja tarkentamista. Se olisi pakottanut kuitenkin rajaamaan joko haastateltavien tai tema-alueiden määrää. Projektii-viset tehtävät tukivat haastattelua.

Teoreettisen perehtyneisyyden käyttämisestä hyväksi haastattelutilanteessa Ahonen (1994, 154) kutsuu aineiston relevanssiksi. Haastattelun tema-alueet olin muodostanut tutkimusongelmien ja lukemani kirjallisuuden kautta pyrkien kattavuuteen ja johdonmukaisuuteen. Toisaalta antaessani haastateltavien kehittää itse ajatuskulkuaan halusin välttää johdattelemasta heitä. Yhteisymmärrystä tuki yhteinen viitetaustamme sekä tutustumiseni tutkimuspäiväkotii ennen haastatteluja.

Fenomenografisessa tutkimuksessa tulokset ovat aineistosta luokiteltuja kategorioita. Merkityskategorioiden validiteetin ulottuvuuksina ovat myös aitous ja relevanssi. Aitous tarkoittaa, että kategoriat vastaavat tutkittavien tarkoittamia merkityksiä. (Ahonen 1994, 154.) Analyysin on oltava kattava ja arvioitavissa (Eskola & Suoranta 1996, 170). Liitin tulososaan lainauksia haastatteluista esimerkkeinä tulkintani perusteista, jolloin lukija voi sitä arvioida. Pyrin kuvaamaan analyysin mahdollisimman tarkasti, koska se on fenomenografisen tutkimuksen oleellisin osa. Vaikeutena analyysissa oli sen kaksiulotteisuus ja interaktiivisuus. Aineistoa oli tarkasteltava sekä yksilön tasolla että koko aineiston tasolla (individuaalinen ja kollektiivinen ulottuvuus). Analyysin interaktiivisuus eli palaaminen edellisiin vaiheisiin oli välttämätöntä, jotta tulkitut merkitykset asettuivat paikoilleen aineistoa vasten eli kategoriat vastaisivat mahdollisimman hyvin tutkittavien merkityksiä. Tarkoitukseni oli siten myös muodostaa kokonaisuuden ja sen osien välille vuorovaikutusta, jolloin tutkimus muodostuisi yhtenäiseksi.

Kategorioiden on oltava relevantteja tutkimuksen teorian kannalta (Ahonen 1994, 130). Ernestin (1989) matematiikkakäsityksen pääosat muodostivat jäsenyyksen kategorioinnille. Kategorisointia vaikeutti kuitenkin se, että haastateltavien ilmauksissa oli ihmis-, tiedon- ja oppimiskäsityksen merkityksiä toisiinsa liittyneinä (Patrikainen 1997). Tema-alueet helpottivat primaarimerkityksen löytämistä. Kategoriat muodostuivat melko samansuuntaisiksi haastateltavien välillä, johon saattoi olla syynä heidän samanlainen taustansa matematiikkaprojektin suhteen. Käsitykset eivät kuitenkaan rajoittuneet vain yhteen näkökulmaan, vaan olivat monipuolisia.



Laadullista tutkimusta ei voida toistaa täysin samanlaisena. Jotta sitä voitaisiin arvioida, pyrin kuvaamaan tutkimusprosessin mahdollisimman tarkasti. Tutkimustulokset olivat samansuuntaisia muiden vastaavanlaisten tutkimusten kanssa (esim. Pehkonen 1995; Hoskonen 1996; Laine 1992). Se lisää tutkimuksen luotettavuutta, mutta nostaa toisaalta esiin kysymyksen aineiston ylitulkinnasta. Fenomenografisessa tutkimuksessa tutkija voi analyysissa ylitulkita aineistoa pakottaen ilmaisuja merkityskategorioihin riittämättömin aineksin (Ahonen 1994, 146). Teoreettinen perehtyneisyys auttoi minua jäsentämään ja tekemään tietoiseksi omia käsityksiäni matematiikasta. Pyrin siirtämään ne taka-alalle ja lukemaan aineistoa avoimin mielin ja muodostamaan kategoriat aineistolähtöisesti. Tutustuminen Korpilahden päiväkotiin helpotti orientoitumista haastateltavien näkökulmaan. Tutkija onkin fenomenografisessa tutkimuksessa tutkimusinstrumentti, koska hän on perehtynyt tutkimusalueeseen ja muokannut sen pohjalta haastattelukysymykset ja erotellut käsitysten eri elementit (Ahonen 1994, 124).

Siirrettävyys kertoo tutkimustulosten yleistettävyydestä. Fenomenografisella tutkimuksella ei päästä tilastolliseen yleistettävyyteen, koska tutkimusjoukko on pieni. Tämän tutkimuksen tulokset ovat Korpilahden päiväkodin kasvattajien käsityksiä matematiikasta haastateltavien luokalla. Käsitykset ovat muuttuvia ja kehittyviä. Siten tulokset eivät ole yleistettävissä laajemmin. Tavoitteeni on ennemminkin ollut tuoda esiin erilaisia käsityksiä matematiikasta ja niiden yhteyksiä toisiinsa. Niiden kautta lukija voi pohtia ja jäsentää omia käsityksiään. Yleistettävyyden sijasta Ahonen (1994, 152) mainitsee tulosten yleisyyden fenomenografisen tutkimuksen tavoitteena, jolloin käsitykset nostetaan teoreettiselle, yleiselle tasolle. Siten lukija voi hyödyntää tuloksia analogisen ajattelun tasolla verrattessaan omia käsityksiään tutkijan kategorioihin. "Tutkimus virittää ja kiteyttää omaa ajattelua."

Vaikka kategoriat ovat lähtöisin kontekstuaalisesta ymmärtämisestä, voivat ne olla käyttökelpoisia myös muissa konteksteissa. Kategoriat ovat osa laajempaa rakennetta ja tutkijan on löydettävä tämä rakennekehikko. Rakenteet ovat käyttökelpoisia yritettäessä ymmärtää toisten ihmisten käsityksiä. (Marton 1988, 147.)

Mielestäni erilaiset käsitykset matematiikasta, opettamisesta ja oppimisesta kuvastavat näiden ilmiöiden monimutkaisuutta. Ne eivät ole yksiselitteisiä. Tämän tutkimuksen tarkoitus on ollut nostaa esiin niitä eri käsityksiä, jotka liittyvät päiväkodin matematiikkaan. Näiden kautta lukija voi reflektoida omia käsityksiään. Kasvattajien käsitykset ovat pohjana toiminnan suunnittelulle, toteutukselle ja arvioinnille päiväkodissa. Kun käsitykset ovat tiedostettuja, on toiminnan suunnittelu ja toteutus perusteltavissa ja arviointi helpottuu. Koulutettaessa tulevia kasvattajia ja täydennyskoulutettaessa päiväkodin henkilökuntaa on kouluttajan tiedostettava erilaiset käsitykset koulutettavien ajattelun perustana. Käsitykset eivät ole paikalleen pysähtyneitä, vaan muuntuvat koulutuksen ja erilaisten kokemusten myötä. Kasvattajina me myös vaikutamme lasten käsityksiin.

Tässä tutkimuksessa ei painottunut päiväkodin työntekijöiden ihmiskäsitys, käsitys lapsesta matematiikan oppijana, tutkimusongelmien muotoilun kautta. Se olisikin yksi tärkeä jatkotutkimusalue, koska se osaltaan vaikuttaa opetuksen toteuttamiseen, esimerkiksi täytyykö matematiikassa menestyäkseen olla lahjakas. Jatkossa voitaisiin myös tutkia lasten omia käsityksiä sekä heidän toimintaansa matematiikan parissa. Näitä voitaisiin peilata kasvattajien käsityksiin ja matematiikan opetuksen käytännön toteutukseen.

Käytännön toteutus rajautui tästä tutkimuksesta pois. Se on sitä toimintaa, joka muotoutuu kasvattajien käsitysten pohjalta ja on lasten arkipäivää. Siksi sitä olisi tärkeä tutkia havainnoimalla ja yhdistämällä siihen myös haastatteluja. Tässä tutkimuksessa oli mukana vain yksi päiväkotia. Päiväkodin työntekijät olivat kiinnostuneita matematiikasta, mistä kertoo jo heidän lähtemisensä mukaan matematiikkaprojektiin. Kasvattajien käsitykset matematiikasta päiväkodissa saattavat kuitenkin olla erilaisia, jos matematiikkaa ei ole nostettu erityisesti esiin eikä siihen ole saatu koulutusta. Myös tässä viitetaustassa olisi käsityksiä tärkeä tutkia.

## LÄHDELUETTELO

- Ahonen, S. 1994. Fenomenografinen tutkimus. Teoksessa L. Syrjälä, S. Ahonen, E. Syrjäläinen, & S. Saari (toim.) Laadullisen tutkimuksen työtapoja. Helsinki: Kirjayhtymä, 113-160.
- Alasuutari, P. 1994. Laadullinen tutkimus. Tampere: Vastapaino.
- Berry, J. 1990. Soveltaminen koulumatematiikassa. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Cohen, L. & Manion, L. 1985. Research methods in education (2nd ed.). London: Croom Helm.
- Cooney, T. 1999. Conceptualizing teachers' ways of knowing. Educational studies in mathematics. An international journal, 38 (1-3), 163-187.
- Current state of research on mathematical beliefs V. Proceedings of the MAVI-5 workshop August 22-25, 1997. M. Hannula (toim.) Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusraportteja 184.
- Dana, T. & Davis, N. 1993. On considering constructivism for improving mathematics and science teaching and learning. Teoksessa K. Tobin (toim.) The practice of constructivism in science education. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum, 325-334.
- Ernest, P. 1989. The impact of beliefs on the teaching of mathematics. Teoksessa P. Ernest (toim.) Mathematics teaching. The state of art. New York: The Falmer Press, 249-254.
- Erämaa-Lätti, A-M. & Kivelä, L. 1999. Matematiikan esiopetusprojekti Korpilahden päiväkodissa. Varhaiskasvatuksen laitoksen julkaisun käsikirjoitus.
- Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 1996. Opetushallitus. Helsinki: Edita Oy.
- Eskola, J. & Suoranta, J. 1996. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä julkaisuja C13.
- Fenstermacher, G. 1986. Philosophy of research on teaching: Three aspects. Teoksessa M. Wittrock (toim.) Handbook of research on teaching. 3. painos. New York: MacMillan Publishing Company, 37-49.
- Frank, M. 1988. Problem solving and mathematical beliefs. Arithmetic teacher 35 (5), 32-34.
- Freudenthal, H. 1991. Revisiting mathematics education. China lectures. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Galperin, P. J. 1957. An experimental study in the formation of mental actions. Teoksessa B. Simon (toim.) Psychology in the Soviet Union. London: Routledge & Kagan Paul, 215-225.
- Gröhn, T. 1992. Fenomenograafinen tutkimusote. Teoksessa T. Gröhn & J. Jussila (toim.) Laadullisia lähestymistapoja koulutuksen tutkimisessa. Helsinki: Yliopistopaino.
- Grönfors, M. 1982. Kvalitatiiviset kenttätömenetelmät. Helsinki: WSOY.
- Haapasalo, L. 1997. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Toinen painos. Jyväskylä: Medusa.
- Haapasalo, L. 1998. Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen painos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 52-79.
- Halinen, I., Hänninen, L., Joki, J., Leino, J., Näätänen, M., Pehkonen, E., Pehkonen, L., Sahlberg, P., Sainio, E., Seppälä, R. & Strang, T. 1991. Peruskoulun matematiikan opetuksen kehityssuunnasta 1990-luvulla. Opetus ja kasvatustieteitä. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

- Hannula, M. & Malmivuori, M-L. 1996. Feminine structures in mathematical beliefs and performances. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Current state of research on mathematical beliefs III. Proceedings of the MAVI-3 workshop August 23-26, 1996. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusraportteja 170, 31-38.
- Hersh, R. 1986. Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. Teoksessa T. Tymoczko (toim.) New directions in the philosophy of mathematics. Boston: Birkhäuser, 9-28.
- Hirsjärvi, S. & Hurme, H. 1984. Merkityksen ongelma haastattelututkimuksessa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteen laitos A3/1984.
- Hirsjärvi, S. & Hurme, H. 1985. Teemahaastattelu. Helsinki: Gaudeamus.
- Hoskonen, K. 1996. Mathematical beliefs of eight-graders: What is mathematics? Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Current state of research on mathematical beliefs III. Proceedings of the MAVI-3 workshop August 23-26, 1996. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusraportteja 170, 48-52.
- Hujala, E., Puroila, A-M., Parrila-Haapakoski, S. & Nivala, V. 1998. Päivähoidosta varhaiskasvatukseen. Jyväskylä: Varhaiskasvatus 90 Oy.
- Häkkinen, K. 1996. Fenomenografisen tutkimuksen juuria etsimässä. Teoreettinen katsaus fenomenografisen tutkimuksen lähtökohtiin. Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 21
- Ikäheimo, H. 1995. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. Helsinki: Oy Opperi Ab.
- Ikäheimo, H. 1998. Matematiikan esi- ja alkuopetuksen kysymyksiä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen painos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 239-250.
- Ikäheimo, H., Aalto, A. & Puumalainen, K. 1997. Opi matematiikkaa leikkien esi- ja alkuopetuksessa. Helsinki: Oy Opperi Ab.
- James, A. 1995. Teaching methods and assesment. Teoksessa D. Broomes, G. Cumberbatch, A. James & O. Petty (toim.) Teaching primary school mathematics. Jamaica: Ian Randle Publishers/UNESCO Publishing, 1-28.
- Kagan, D. M. 1992. Professional growth among preservice and beginning teachers. Review of educational research 62 (2), 129-169.
- Kansanen, P. 1993. An outline for a model of teachers' pedagogical thinking. Teoksessa P. Kansanen (toim.) Discussions on some educational issues IV. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 121, 51-65.
- Kinos, J. 1994. Kohti lapsilähtöistä varhaiskasvatusta. Pedagogiikan jatkumomalli. Teoksessa M. Kankaanranta & E. Tiihonen (toim.) Joustavasti oppimaan. 5-8-vuotiaiden kasvatuksen ja opetuksen kehittämishankkeita. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 1-22.
- Kivi, T. 1995. Oppimisen ytimessä. Vantaa: Tummavuoren Kirjapaino Oy.
- Kupari, P. 1993. Laskutaidotko kadonneet? Peruskoululaiset matematiikan kokijoina ja taitajina. Teoksessa P. Linnakylä & H. Saari (toim.) Oppiiko oppilas peruskoulussa? Peruskoulun arviointi 90 -tutkimuksen tuloksia. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Jyväskylän yliopisto, 81-104.
- Kupari, P. 1995. Mathematics teachers' beliefs and conceptions of mathematics education. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the nordic conference on mathematics teaching (NORMA-94) in Lahti. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusraportteja 141, 110-115.
- Lahdes, E. 1997. Peruskoulun uusi didaktiikka. Helsinki: Otava.

- Laine, K. 1992. Opiskelijoiden kasvatus-, opetus- ja oppimiskäsitykset I. Lastentarhan-, luokan- ja aineenopettajaksi opiskelevien käsitysten kuvaaminen. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Julkaisusarja A:155.
- Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. Matikkatupakokeilu peruskoulun toisella luokalla. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis ser A vol 307.
- Lindgren, S. 1995. Pre-service teachers' beliefs and conceptions about mathematics and teaching mathematics. Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Julkaisuja A 4/1995.
- Lindgren, S. 1996. Prospective teachers' math views and educational memories. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Current state of research on mathematical beliefs III. Proceedings of the MAVI-3 workshop August 23-26, 1996. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusraportteja 170, 53-58.
- Lehtinen, E., Kinnunen, R., Vauras, M., Salonen, P., Olkinuora, E. & Poskiparta, E. 1989. Oppimiskäsitys koulun kehittämisessä. Opetus ja kasvatus-sarja. Helsinki: Valtionpainatuskeskus.
- Leino, J. 1993. Konstruktivismiin suuntauksia. Teoksessa L. Haapasalo & P. Kupari (toim.) Konstruktivismi matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman kehittämisessä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 6, 1-8.
- Leino, J. 1995. Constructive teaching in mathematics. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the nordic conference on mathematics teaching (NORMA-94) in Lahti. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusraportteja 141, 35-44.
- Leino, J. 1998. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen painos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 39-51.
- Lundgren, U., Svingby, G. & Wallin, E. (toim.) 1983. Inledning: Makt och kontroll över läroplaner - vad bestämmer läroplaners inriktning? Teoksessa Makten över läroplaner: en konferensraport. Högskolan för lärarutbildning i Stockholm Institutionen för pedagogik. Rapport 9, 9-26.
- Malaty, G., 1997. Lapsi matkalla matematiikan maailmaan. Teoksessa M. Siniharju (toim.) Esi- ja alkuopetuksen uusia tuulia. Jyväskylä: Opetushallitus, 51-90.
- Malaty, G. 1998. Lapsella on oikeus oppia myös matematiikkaa. Lastentarha 1/1998, 20-21.
- Marton, F. 1988. Phenomenography: A research approach to investigating different understanding of reality. Teoksessa R. Sherman & R. Webb (toim.) Qualitative research in education: Focus and methods. London: The Falmer Press.
- Marton, F. 1994. Phenomenography. Toinen painos. Teoksessa T. Husén & T. Postlethwaite (toim.) The international encyclopedia of education. Volume 8. Oxford: Pergamon, 4424-4429.
- McPherson, T. & Payne, G. 1987. "Is it an add, Miss?": Mathematics in the early primary years. Teoksessa M. Preston (toim.) Mathematics in primary education. London: The Falmer Press, 72-88.
- Metz, M. 1988. The development of mathematical understanding. Teoksessa G. Blenkin & A. Kelly (toim.) Early childhood education: A developmental curriculum. London: Paul Chapman Publishing, 184-201.
- Mutanen, R., 1998. Esiopetuksen merkitys matematiikan opiskelulle alkuopetuksessa. Joensuun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia n:o 67.

- Nespor, J. 1987. The role of beliefs in the practice of teaching. *Journal of curriculum studies*, 19 (4), 317-328.
- Olkinuora, E. 1994. Oppimis-, tieto- ja opetuskäsitykset toimintaa koulussa ohjaavina taustatekijöinä. Teoksessa J. Tähtinen (toim.) *Opettajaksi kasvaminen*. Turun luokanopettajakoulutuksen linjojen hahmottelua. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Julkaisusarja B 46, 54-73.
- Pajares, M. 1992. Teachers' beliefs and educational research. *Review of educational research*, 62 (3), 307-332.
- Patrikainen, R. 1997. Ihmiskäsitys, tiedonkäsitys ja oppimiskäsitys luokanopettajan pedagogisessa ajattelussa. Joensuun yliopiston kasvatustieteellisiä julkaisuja n:o 36.
- Patton, M. Q. 1990. *Qualitative Evaluation and Research Methods* (2nd ed.). Newbury Park, CA: Sage.
- Pehkonen, E. 1994. Teachers' and pupils' beliefs in focus - a consequence of constructivism. Teoksessa E. Pehkonen & M. Ahtee (toim.) *Constructivist viewpoints for school teaching and learning in mathematics and science*. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusraportteja 131, 27-33.
- Pehkonen, E. 1995. Pupils' view of mathematics. Initial report for an international comparison project. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusraportteja 152.
- Pehkonen, E. 1998. Teachers' conceptions on mathematics teaching. Teoksessa M. Hannula (toim.) *Current state of research on mathematical beliefs V*. Proceedings of the MAVI-5 workshop August 22-25, 1997. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusraportteja 184, 58-65.
- Perttula, J. 1995. Kokemus psykologisena tutkimuskohteena. Johdatus fenomenologiseen psykologiaan. Tampere: Suomen fenomenologinen instituutti.
- Philippou, G. & Christou, C. 1996. Changing pre-service teachers attitudes towards mathematics. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) *Current state of research on mathematical beliefs III*. Proceedings of the MAVI-3 workshop August 23-26, 1996. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusraportteja 170, 79-89.
- Philippou, G. & Christou, C. 1998. The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational studies in mathematics. An international journal*, 35 (2), 189-206.
- Päivähoidon kasvatustavoitekomitean mietintö. 1980. Komiteamietintö 1980:31. Helsinki.
- Rauste-von Wright, M. 1997. *Opettaja tienhaarassa konstruktivismia käytännössä*. Juva: WSOY.
- Rauste-von Wright, M. & von Wright, J. 1995. *Oppiminen ja koulutus*. Toinen painos. Juva: WSOY.
- Resnick, L. B. & Ford, W. W. 1981. *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Schoenfeld, A. H. 1987. *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Schoenfeld, A. H. 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan, 334-370.
- Sowell, E. 1989. Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education*, 20 (5), 498-505.

- Thompson, A. 1992. Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: MacMillan, 127-146.
- Tobin, K. & Tippins, D. 1993. Constructivism as a reference for teaching and learning. Teoksessa K. Tobin (toim.) The practice of constructivism in science education. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum, 3-22.
- Varto, J. 1992. Laadullisen tutkimuksen metodologia. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Vermunt, J. & Verloop, N. 1999. Congruence and friction between learning and teaching. Learning and instruction. The journal of the european association for research on learning and instruction, 9 (3), 257-280.
- Voutilainen, T., Mehtäläinen, J. & Niiniluoto, I. 1990. Tiedonkäsitys. Opetus ja kasvatus-sarja. Helsinki: Valtionpainatuskeskus.
- Vygotski, L. S. 1982. Ajattelu ja kieli. Espoo: Weilin+Göös

Heli Oikkonen  
Roninmäentie 6 M 16  
40500 Jyväskylä  
puh. 0400-919 757

ANOMUS

Liite 1

Johtaja  
Leena Kivelä  
Korpilahden päiväkoti

## TUTKIMUSLUPA-ANOMUS

Opiskelen Jyväskylän yliopistossa varhaiskasvatuksen maisteriksi.

Pro-gradu työni aiheena on **Päiväkodin työntekijöiden käsityksiä matematiikasta**. Pyydän lupaa saada suorittaa työhöni liittyvä päiväkodin henkilökunnan haastattelu Korpilahden päiväkodissa.


Tutkimukseni tarkoituksena on selvittää, millaisia käsityksiä päiväkodissa työskentelevillä lastentarhanopettajilla ja lastenhoitajilla on matematiikasta, matematiikan opettamisesta alle kouluikäisille lapsille ja matematiikan oppimisesta sekä miten heidän matematiikkaan liittyvä koulutuksensa on vaikuttanut käsityksiin.

Kohderyhmänä on Korpilahden päiväkodin lastentarhanopettajat ja lastenhoitajat.

Tutkimusmenetelmänä on haastattelu, jonka suoritan kesäkuun ensimmäisellä viikolla 1998. Tutkimuksen arvioitu valmistumisajankohta on vuoden 1999 alku.

Tutkimuksen ohjaajana on Helena Rasku-Puttonen.

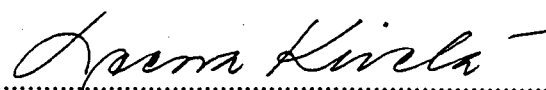
Jyväskylässä 13. toukokuuta 1998

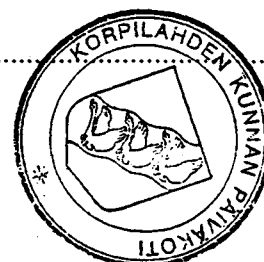
  
Helena Rasku-Puttonen  
varhais- ja alkukasvatuksen professori, PsT



Heli Oikkonen

TUTKIMUSLUPA MYÖNNETTY 19.5.1998

  
Korpilahden päiväkodin johtaja Leena Kivelä





## TEEMA-ALUEET

### Käsitykset matematiikan luonteesta

Miten koet matematiikan, millainen suhde sinulla on matematiikkaan, mitä ajatuksia matematiikka herättää?

Mitä matematiikka on?

Mikä siinä on tärkeää, mihin sitä tarvitaan, onko hyötyä, millaista?

Millaisissa tilanteissa teillä näkyy päiväkodissa matematiikka?

### Käsitykset matematiikan opettamisesta

Millaista on päiväkodin matematiikka, millaista sen pitäisi olla?

Mikä on tavoitteena?

Miten vertaisit sitä kouluun?

Jos teillä on aiheena vertailu, niin miten kävisit sitä lasten kanssa läpi, miten sen voisi käytännössä toteuttaa?

### Käsitykset matematiikan oppimisesta

Minkälainen pieni lapsi on matematiikan oppijana?

Onko eri lasten välillä eroja?

Jos ajattelet jotain oman ryhmäsi lasta, hän on oppinut jotain matematiikasta, miten oppiminen on edennyt, mitä on tapahtunut?/Miten lapselle tulee käsitys lukumäärästä?

Mitä on oppiminen?

Onko, miten lapsissa on näkynyt matematiikan opetus?

Miten oppimista voi tukea?

Mikä estää oppimista?

Mistä tietää, että lapsi on oppinut jonkin asian?

### Koulutuksen merkitys, onko se muuttanut käsityksiä

Mitä sinulle on merkinnyt saamasi koulutus?

Mitä siitä on saanut?

Mikä hyvää, huonoa?

Onko se muuttanut ajatuksiasi? (matematiikasta, opettamisesta, oppimisesta)