JYVÄSKYLÄ STUDIES IN EDUCATION, PSYCHOLOGY AND SOCIAL RESEARCH
278

Kauko Hihnala

Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen

Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

JYVÄSKYLÄ STUDIES IN EDUCATION, PSYCHOLOGY AND SOCIAL RESEARCH 278

Kauko Hihnala

Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen

Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä

Esitetään Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan suostumuksella
julkisesti tarkastettavaksi yliopiston vanhassa juhlasalissa (S212)
joulukuun 10. päivänä 2005 kello 12.

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

JYVÄSKYLÄ 2005

Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen

Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä

JYVÄSKYLÄ STUDIES IN EDUCATION, PSYCHOLOGY AND SOCIAL RESEARCH 278

Kauko Hihnala

Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen

Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

JYVÄSKYLÄ 2005

Editors
Pauli Kaikkonen
Department of Education, University of Jyväskylä
Pekka Olsbo, Marja-Leena Tynkkynen
Publishing Unit, University Library of Jyväskylä

Cover picture by Olavi Mäenpää

URN:ISBN:9513922790
ISBN 951-39-2279-0 (PDF)

ISBN 951-39-2289-8 (nid.)
ISSN 0075-4625

Jyväskylä University Printing House, Jyväskylä 2005

ABSTRACT

Hihnala, Kauko
Transition from the performing of arithmetic tasks to the understanding of concepts. The development of pupils' mathematical thinking when shifting from arithmetic to algebra in comprehensive school
Jyväskylä: University of Jyväskylä, 2005, 169 p.
(Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research
ISSN 0075-4625-278)
ISBN 951-39-2279-0
Summary
Diss.

This study clarifies what kind of prerequisites there would be to start the studying of algebra in comprehensive school earlier than during last years. The study was performed in two phases. The first phase included a four-year follow-up study as a case study targeted to single age group of 89 pupils. The study surveyed the mathematical skills of pupils from the sixth to the ninth grade on general level. The measurements were made in autumns and in the spring of the ninth grade with tests lasting for an hour. The follow-up was followed by a cross-study. Its measurements were made in the autumn 2001. The cross-study included 1,019 pupils from the sixth to the ninth grade from three primary schools and five secondary schools in a mid-size Finnish town. On the basis of this study the command of proportionality did not seem to be the qualification for skills in algebra. It rather seemed that pupils need similar abilities for these areas of mathematics. The skills in algebra were approximately the same among the pupils from the sixth to the eighth grade. On the basis of the results obtained it would be natural to teach proportionality and algebra simultaneously in comprehensive school, parallel and interlocked, at least from the sixth grade onwards.

Keywords: algebra, arithmetic, mathematical thinking, proportionality

Author´s address Kauko Hihnala
Opettajantie 4 A 2
40900 Säynätsalo
kaukoh@jippii.fi

Supervisors Professor (em) Maija Ahtee
University of Jyväskylä, Finland

Senior Researcher Pekka Kupari
Institute for Educational Research
University of Jyväskylä, Finland

Professor Jouni Viiri
Department of Teacher Education
University of Jyväskylä, Finland

Reviewers Professor Erkki Pehkonen
Department Applied Sciences of Education
University of Helsinki, Finland

Docent Kaarina Merenluoto
Department of Teacher Education
University of Turku, Finland

Opponent Professor Erkki Pehkonen
Department Applied Sciences of Education
University of Helsinki, Finland

ESIPUHE

Tämä työ sai alkunsa tarpeesta tutkia matematiikan osaamiseen liittyviä ongelmia erityisesti peruskoulun yläasteen oppilailla. Oppilaiden siirtyminen ala-asteelta yläasteelle muodostaa opiskelussa tärkeän nivelkohdan. Oppilaat siirtyvät kuusi vuotta kestäneestä luokanopettajan opetuksesta aineenopettajien opetukseen. Luokanopettajan ja aineenopettajan erilainen koulutustausta asettaa opetukselle erilaiset lähtökohdat. Myös luokanopettajan työn jakaantuminen monen oppiaineen kesken rajoittaa hänen mahdollisuuksiaan syventyä matematiikan opetuksen erityisvaatimuksiin. Vahvimpien kannanottojen mukaan ala-asteella opetettava matematiikka on eri oppiaine kuin yläasteen matematiikka.

Ala-asteen matematiikan opiskelu luo oppilaalle käsityksiä ja uskomuksia muun muassa omista kyvyistä ja matematiikasta. Jotkut uskomukset voivat vaikeuttaa yläasteen oppiainelähtöistä matematiikan opetusta. Uudet perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004 antavat pienen sysäyksen ala-asteen ja yläasteen opetuksen yhtenäistämiseen. Luokkien 6–9 opetussuunnitelmien käsitteleminen yhtenä kokonaisuutena on tärkeä tähän suuntaan vaikuttava rakenteellinen tekijä. Konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen perustuva opetussuunnitelma ja siihen liittyen ongelmakeskeinen opetustapa ovat myös omiaan yhdenmukaistamaan matematiikan opetusta eri luokkatasoilla.

Kun ryhdyin tutkimaan opetusta ja oppimista lähes 30 vuoden opetustyön jälkeen, havaitsin, ettei ole helppo asettua tutkijana tarkastelemaan asioita oman työn ulkopuolelta. Toisaalta opettajakokemus on suureksi hyödyksi, kun tutkimuksen tavoitteena on pyrkiä vaikuttamaan opetukseen ja oppisisältöihin.

Ensimmäisen impulssin tämän tutkimuksen käynnistämiseen sain professori Jouni Välijärveltä keväällä 1996. Keskustellessamme peruskoulun matematiikan opetuksen ongelmista nousi päällimmäisenä esiin edellä mainittu luokanopettaja – aineenopettaja asetelma. Arvioimme tuolloin, että ala-asteella oppilaille kehittyvät matematiikka-asenteet saattavat vaikuttaa merkittävästi yläasteen matematiikan opiskeluun. Näitä asioita selvitin lisensiaatintyössäni: Onnistumisen iloa ja tietämisen tuskaa – affektiivisia ja kognitiivisia kehityspiirteitä peruskoululaisen matematiikan opiskelussa 6. ja 7. luokalla (Hihnala 2000). Tulokset kuitenkin osoittivat, että varsinkaan ala-asteen ja yläasteen taitekohdassa ei ole nähtävissä matematiikan osaamisen ja matematiikka-asenteiden välillä sellaisia yhteyksiä, joihin puuttumalla voitaisiin oleellisesti parantaa yläasteen matematiikan opetusta. Oppisisältöjen tarkastelu tuntui antavan paremman lähtökohdan yläasteen matematiikan opiskelun ongelmien selvittämiseksi.

Vuosien opettajakokemus: vuosi kunnallisessa keskikoulussa, neljä vuotta lukiossa ja 23 vuotta peruskoulussa, oli osoittanut, että siirtyminen matematiikassa numeroluvuista kirjainlukuihin on monelle nuorelle hämmentävä tapahtuma. Asioiden muuttuminen abstrakteiksi koettelee oppilasta ennen kaikkea tunnetasolla. Moni oppilas kokee, että hänen aiemmin hyväksi havaitulla laskutaidollaan ei ole enää mitään merkitystä. Koska tutkimuskirjallisuudesta löytyi runsaasti tätä aihepiiriä käsitteleviä julkaisuja, oli innostavaa lähteä tutkimaan tarkemmin aritmetiikasta algebraan siirtymisen ongelmakenttää.

Tutkimukseni alkuvaiheessa tarvitsin ohjeita ja perustietoa siitä, miten empiirinen tutkimus toteutetaan. Professori Jouni Välijärvi Koulutuksen tutkimuslaitoksen johtajana ja pitkäaikaisena tutkijana oli oikea henkilö vastaamaan näihin haasteisiin. Hän tunnusti kuitenkin jo alkuvaiheessa, ettei hänen tietämyksensä matematiikasta ole riittävä minun tutkimukseni ohjaamiseen. Sain neuvon kääntyä erikoistutkija, tohtori Pekka Kuparin puoleen. Valmiin testistön saaminen empiirisen aineiston keräämistä varten ohjasi tutkimustani oikeaan suuntaan. Tohtori Kupari korosti erityisesti sitä, ettei kannata haksahtaa liian monimutkaisiin tutkimusmenetelmiin. Tärkeintä on pyrkiä esittämään saamansa tulokset selkeästi ja ymmärrettävästi. Koska tutkimusaineistoni paisui kuitenkin varsin laajaksi, tarvitsin asiantuntijan apua myös tutkimustulosten analysoinnissa. Sakari Valkonen suoritti ammattitaidolla tarvittavat tietokoneajot ja opasti tulosten tulkinnassa.

Lisensiaatintyötäni varten olin seurannut yhden ikäluokan (89 oppilaan) matematiikan osaamista kuudennen luokan syksystä kahdeksannen luokan syksyyn. Seuraamista oli luontevaa jatkaa peruskoulun loppuun asti. Jyväskylän koulujen opettajien myötävaikutuksella sain varsin vaivattomasti kerätyksi tarvitsemani empiirisen aineiston. Käyttämäni testit oli laadittu matematiikan tietojen ja taitojen mittaamiseen yleisellä tasolla, joten niiden perusteella ei saatu kovin tarkkaa kuvaa oppilaiden algebran osaamisesta. Syksyllä 2001 kerättiin lisää empiiristä aineistoa poikittaistutkimuksella, joka kohdistui 1019 peruskoulun kuudennesta yhdeksänteen luokkien oppilaaseen. Tällä mittauksella saatiin tietoa oppilaiden osaamisesta murtolukujen, verrannollisuuden, prosenttilaskun ja algebran alueella. Kun kaikille oppilaille esitettiin sama testi (kuudesluokkalaisille ilman prosenttilaskuja), saatiin kuva siitä, mitä algebran ymmärtämiseen tarvittavia valmiuksia oppilailla on ennen, kuin algebran opiskelu opetussuunnitelman mukaan aloitetaan. Kiitokset rehtori Jouko Rikkolalle, joka tarjosi koulun resursseja kyselylomakkeiden tuottamiseen ja myöhemmin tutkimustulosten esittelyyn.

Tutkimuksen tekoa hidasti alkuvaiheessa epätietoisuus siitä, voidaanko tällainen matematiikan opetusta ja oppimista käsittelevä väitöskirjatyö esittää matematiikan laitoksen julkaisuna. Eräässä seminaarissa käytyjen keskustelujen perusteella tämän kaltaisten tutkimusten suunniteltiin edustavan didaktista matematiikkaa, joka poikkeaisi jonkin verran kasvatustieteeseen perinteisesti kuuluvasta matematiikan didaktiikasta. Professori Maija Ahtee lopetti minun jahkailuni. Hän kehotti suorittamaan kasvatustieteen syventävät opinnot ja esittämään tutkimustyön opettajankoulutuslaitoksen julkaisuna. Professori Ahteen ohjaamat seminaari-istunnot sekä kasvatustieteen opintojen että opettajien tutkijakoulun merkeissä auttoivat etsimään oman tutkimuksen perusideaa. Vaivojaan säästämättä ja työtuntejaan laskematta professori Ahtee jaksoi neuvoa kädestä pitäen, millaisia kysymyksiä tutkijan tulee esittää ja miten niihin etsitään vastauksia.

Syksyllä 2002 sain tilaisuuden keskittyä kolmen kuukauden ajan päätoimisesti tutkimusraportin laatimiseen. Jyväskylän yliopiston kasvatustieteellinen tiedekunta teki sen taloudellisesti mahdolliseksi. Kesällä 2004 professori Esa Penttinen tutustui työhöni ja antoi täsmälliset ohjeet lähdeviittausten käyttöön ja kieliasun tarkistamiseen. Keväällä 2005 työn käsikirjoitus oli lopulta siinä vaiheessa, että se voitiin jättää tarkastettavaksi. Työni esitarkastajat kasvatustieteen tohtori dosentti Kaarina Merenluoto ja professori Erkki Pehkonen osoittivat kannustavilla lausunnoillaan, missä kohdin työni oli jäänyt keskeneräiseksi. Työn viimeistelyvaiheessa professori Jouni Viiri tutustui työhöni ja ohjasi minut tekemään tarpeelliset muutokset ja korjaukset.

Tutkimustyöni jatko-opintoineen oli alun perin suunniteltu kuuden vuoden mittaiseksi, mutta se kesti yhdeksän vuotta. Vaimoni Sirkku on kannustanut minua eteenpäin, vaikka tutkimustyöni on usein hallinnut perhe-elämää. Kriittiset kommentit ovat auttaneet minua selkeyttämään ilmaisua ja muistamaan, että tutkijan näkökulma on erilainen kuin opettajan. Tyttäreni Riikka on suomen kielen asiantuntijana oikonut kielen käyttöön liittyviä mutkia. Unohtamatta asiantuntijoiden korvaamatonta apua tutkimustyöni edistymisessä pidän perheen antamaa tukea korvaamattomana ja omistan tämän työn perheelleni. Esitän sydämelliset kiitokseni Teille kaikille työni tukijoille.

Säynätsalossa lokakuussa 2005
Kauko Hihnala

KUVIOT

TAULUKOT

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

”Mihin näitä tarvitaan?” Tämä oppitunneilla usein kuultu kysymys saa opettajan pohtimaan omaa toimintaansa. Olenko epäonnistunut työssäni? Enkö ole esittänyt riittäviä perusteluja vai onko opetus ollut epäjohdonmukaista?

Moni aikuinen muistaa kauhun hetkiä omilta kouluajoiltaan, kun matematiikassa siirryttiin aritmetiikasta algebraan. Numeroluvut vaihtuivat yhtäkkiä kirjaimiksi. Laskutehtävistä ei enää syntynytkään selkeää lopputulosta. Kirjainlausekkeita vain pyöriteltiin käsittämättömien sääntöjen mukaan ja joidenkin temppujen jälkeen saatiin hieman yksinkertaisempi lauseke. Oppilaan näkökulmasta koulumatematiikassa, varsinkin algebrassa, hänelle tarjotaan tietoa, jolle ei ole mitään käyttöä. Samalla ikään kuin mitätöidään oppilaan aikaisempi numerolukuihin perustuva laskutaito. Miten tilannetta voitaisiin korjata?

Nuorena opettajana uskoin, että harjoitus tekee mestarin. Sääntöjen ulkoa opetteleminen ja runsas rutiiniharjoittelu olivat se toimintamalli, johon olin tottunut jo kansakoulusta lähtien. Mutta kun samat ongelmat nousivat opetuksessa esiin vuodesta toiseen, aloin miettiä, voitaisiinko jotakin tehdä toisin. Ryhdyin selvittämään ensin matematiikka-asenteiden ja matematiikan osaamisen välisiä yhteyksiä (Hihnala 2000). Mielenkiintoni kääntyi kuitenkin koulumatematiikan sisältöihin. Varsinkin yläasteen alkaessa monet oppilaat kokivat, että hyvästä laskutaidosta huolimatta he eivät enää ymmärtäneet, missä mennään. Voitaisiinko algebran opetuksessa tukeutua paremmin oppilaan aikaisempaan kokemukseen ja laskutaitoon? Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2004 edellyttämä ongelmakeskeinen lähestymistapa näyttäisi tukevan tällaista suuntautumista.

PISA-tutkimusten mukaan Suomen peruskoululaisten matematiikan osaaminen oli kansainvälistä huippuluokkaa (Kupari 2003). Tarkempi erittely matematiikan osa-alueiden mukaan paljasti kuitenkin muutamia erikoispiirteitä. Muun muassa tulokset vahvistivat KASSEL-projektin ja TIMSS-tutkimuksen antamaa kuvaa, että erityisesti algebran alueella suomalaisten osaaminen oli puutteellista. Edelleen niin PISA- kuin TIMSS-tutkimuskin osoittivat, että hyvästä yleistasosta huolimatta Suomen peruskoululaiset olivat heikkoja nimenomaan niillä osa-alueilla, joita oli pyritty kehittämään runsaalla rutiiniharjoittelulla (Haapasalo 2003; Törnroos 2003). Oppilailla saattaa myös olla valmiuksia, joita ei ole opetuksella vielä edes pyritty luomaan. Esimerkiksi verrannollisuuden soveltaminen käytännön tilanteisiin onnistuu monilta ennen kuin sitä on matematiikassa käsitelty. Kuitenkaan murtolukujen ja prosenttilaskun opettaminen ei näytä pohjautuvan verrannollisuuteen. (Hihnala 2000)

Kansakoulun ja oppikoulun sekä myöhemmin peruskoulun matematiikan opetussuunnitelmien kolmijako: aritmetiikka, algebra, geometria, on käytännössä toteutunut seuraavasti. Ensin on opiskeltu numerolukuihin liittyvät laskutoimitukset, viimeisimpinä murtoluvut, verranto ja prosenttilasku. Tämän verrannollisuutta käsittelevän vaiheen jälkeen on siirrytty kirjainlukujen eli muuttujien käyttöön, siis esialgebraan ja vähitellen algebraan. Usein samassa vaiheessa on lisäksi otettu käyttöön negatiiviset luvut. Verrannollisuuden opiskelu on edeltänyt algebran opiskelua ja muutos on ollut varsin jyrkkä. Verrannollisuutta pidetään eräänä keskeisenä matematiikan ja luonnontieteiden ajatusmallina. On myös arvioitu, että verrannollisuuden ymmärtäminen on hitaasti kehittyvä valmius, jota kaikki eivät saavuta peruskoulun aikana, eikä osa aikuisenakaan.

Voitaisiinko joitakin verrannollisuuteen liittyviä asioita, esimerkiksi prosenttilaskua, myöhentää ja aloittaa esialgebran opiskelu nykyistä aikaisemmin kuudennelta tai kenties jo viidenneltä luokalta?

Tutkimuksen koehenkilöitä koskevat opetussuunnitelmat oli laadittu vuonna 1994 annettujen opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti, joten heidän matematiikan osaamistaan arvioidaan siltä pohjalta. Varsin pian vuoden 1994 opetussuunnitelmauudistuksen jälkeen havaittiin kuntakohtaisten ja koulukohtaisten liian väljien opetussuunnitelmien tuoma epävarmuus. Niinpä uusittuun Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin 2004 kohdistuu suuria odotuksia. Monissa suomalaisissa tutkimuksissa on käynyt selville, että opettajalle oppikirja on tärkeä opetussuunnitelman ilmentymä (Perkkilä 2002; Niemi 2004; Törnroos 2005). Tällä perusteella odotetaan, että uudet kehitteillä olevat kuntakohtaiset opetussuunnitelmat tarjoaisivat opettajalle selkeitä käytännön ohjeita ja periaatteita opetuksen toteuttamiseksi. Erityisesti ongelmakeskeisyyden mahdollisuudet ja joustava siirtyminen aritmetiikasta algebraan kiinnostavat tämän tutkimuksen tekijää.

Tässä tutkimuksessa seurataan ensin yhden 89 oppilaan ikäluokan matematiikan osaamista neljän vuoden ajan kuudennen luokan alusta peruskoulun loppuun asti. Tavoitteena oli alun perin kartoittaa oppilaiden matematiikan osaamista mahdollisimman laajasti ja liittää se matematiikka-asenteiden tutkimiseen, mutta vähitellen mielenkiinto suuntautui verrannollisuuden ja esialgebran hallintaan. Seurantatutkimus antoi yleiskuvan peruskoulun kuudennesta yhdeksänteen luokkalaisten matematiikan taidoista ja joitakin viitteitä heidän matemaattisesta ajattelustaan. Seurannasta muodostui tällä tavoin perusta poikittaistutkimukselle (1019 oppilasta), jossa taas keskitytään aritmetiikan ja algebran välimaaston kartoittamiseen.

Tärkeä kysymys on aritmetiikan osaamisen liittyminen algebran ymmärtämiseen. Onko peruslaskutaitojen merkitys algebran opiskelulle niin keskeinen, että niitä kannattaa harjoitella vielä esimerkiksi seitsemännellä luokalla ja aloittaa vasta sitten algebraan siirtyminen? Onko esimerkiksi verrannollisuuden ymmärtäminen, joka peruskoulussa edustaa aritmetiikan vaativimpia taitoja, välttämätön edellytys algebran ymmärtämiselle? Kenties kyseinen aritmetiikka-algebra-hierarkia on vain kansakoulun ja oppikoulun ajoilta periytynyt, sen ajan tarpeisiin sovitettu opiskelujärjestys. Nykyisen käsityksen mukaan aritmetiikan ja algebran välillä on kognitiivinen kuilu, jonka ylittäminen vaatii erityisiä toimenpiteitä (Herscovics & Linchevski 1994). Aritmetiikan laskulakeja korostamalla on luotu ”kompleksia aritmetiikkaa” ja toisaalta muuttujien ja helppojen yhtälöiden avulla ”esialgebraa” (Cooper ym. 1997). Tällä tavoin on pyritty lieventämään muutosta aritmetiikan proseduureihin keskittyvästä toiminnasta algebran rakenteita hallitsevaan eli strukturaaliseen ajatteluun. Toisaalta juuri siirtyminen proseduraalisen tiedon hallinnasta konseptuaalisen tiedon hallintaan kuvaa sitä muutosta oppilaan matemaattisessa ajattelussa, johon viitataan tämän työn otsikossa (Hiebert & Lefevre 1986; Joutsenlahti 2005).

Tässä tutkimuksessa nähdään peruskoululaisen aritmetiikan taidot voimavarana, jota pyritään hyödyntämään algebran opiskelussa. Oppilaalla pitäisi olla tilaisuuksia keksiä numerolaskuista sellaisia lainalaisuuksia, jotka pätevät myös algebrassa. Jäljittelyyn ja runsaaseen rutiiniharjoitteluun perustuva opiskelutapa ei välttämättä edistä algebran käsitteiden ymmärtämistä. Tärkeä kysymys on myös se, miten kuudennen tai seitsemännen luokan oppilas käsittää kirjainsymbolein ilmaistut esialgebran lausekkeet ja yhtälöt.

2 MATEMATIIKKA PERUSKOULUN OPPIAINEENA

2.1 Opetussuunnitelmat

Opetussuunnitelmat luovat pohjan ja kehyksen koulun opetukselle. Niissä koulun ylläpitäjä ilmoittaa tahtonsa opetuksen sisällöistä. Opetussuunnitelmassa määrätään mitä ja miten koulussa tulee opettaa. Kangasniemi (1989) tarkastelee opetussuunnitelmaa (IEA/SIMS) kolmella tasolla: kirjoitettu opetussuunnitelma, toimeenpantu opetussuunnitelma ja toteutunut opetussuunnitelma. Kirjoitettu opetussuunnitelma sisältää keskeiset toimenpiteet ja järjestelyt, joilla pyritään asetettuihin kasvatus- ja opetustavoitteisiin. Toteutunut opetussuunnitelma selviää vasta opetustapahtuman jälkeen. Se sisältää usein myös opetuksesta johdetut oppimistulokset eli tiedot, taidot ja asenteet. Kun kirjoitettu tai tarkoitettu opetussuunnitelma ja toteutunut opetussuunnitelma edustavat opettajan toimintaa ja ajattelua, kolmas taso on oppilaan kannalta koettu tai eletty opetussuunnitelma. Törnroos (2005) käytti TIMSS 1999 –tutkimuksen tulosten analysoinnissa nelitasoista opetussuunnitelman mallia, josta aiemmin ovat raportoineet muiden muassa Robitaille, Schmidt, Raizen, McKnight, Britton ja Nicol (1983) sekä Kupari, Reinikainen, Nevanpää ja Törnroos (2001). Nelitasoinen opetussuunnitelman malli on saatu lisäämällä kolmitasoiseen mahdollinen opetussuunnitelma. Mahdollinen opetussuunnitelma liittyy käytettyihin oppimateriaaleihin.

Haapasalo (1998a) kritisoi kouluopetusta ja opetussuunnitelman perusteita. Hän viittaa Blaisin (1988) näkemykseen, jonka mukaan oppilaat oppivat koulussa torjumaan reflektoimisen suuntaan esitettävät vaatimukset. Reflektoinnin sijaan oppilaat pyrkivät kehittämään nopeita 'tehtävistä selviytymisen temppuja'. Oppilaat eivät useinkaan tiedä, miksi heidän on tehtävä sitä, mitä he tekevät. (Haapasalo 1998a, 54.)

Korhosen (1999) mukaan Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa 1994 korostettiin ymmärtämistä ja soveltamista mekaanisen laskennan kustannuksella. Käsitteiden oppimisen tuli perustua ymmärtämiseen ja laskutaitojen osaamista oli varsinaisesti vasta niiden käyttö sopivassa asiayhteydessä. Seitsemästä luetellusta osa-alueesta kaksi: ongelmanratkaisu ja mallintaminen sekä käsitys matematiikan lauseista, päättelyn merkitys ja struktuurin rakentuminen, viittasivat selkeästi ajattelun taitoihin, menetelmiin tai prosesseihin. (Korhonen 1999, 15.)

Matematiikan osalta Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit 1999 määrittelee ensisijaiseksi tavoitteeksi oppilaan henkisen kasvun. Matematiikassa opitaan myös käsitteitä ajattelun jäsentämiseen ja menetelmiä ympäristön hahmottamiseen. Ajattelun taitoja, kirjallista ja suullista esittämistä enempää kuin ongelmanratkaisuakaan ei ole unohdettu. (Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit 1999, 52–55.)

Näyttää siltä, että vuoden 1994 peruskoulun opetussuunnitelman perusteet eivät antaneet riittävän täsmällisiä ohjeita kunta- ja koulukohtaisten opetussuunnitelmien laatijoille. Vuoden 2002 lopulla katsottiin jo tarpeelliseksi antaa huomattavasti tarkempia perusteita tai määräyksiä. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 määritellään yleiset tavoitteet, sisällöt aihealueittain ja hyvän osaamisen kriteerit. Paikallisen tason tehtäväksi on määrätty oppisisältöjen jakaminen vuosiluokkien kesken. Opetussuunnitelman tavoitteissa korostuu matemaattinen ajattelu ensimmäisistä luokista lähtien. Sitä ehdotetaan jopa alkuopetuksen ydintehtäväksi. Matemaattista tietoa käsitellään tämän tutkimuksen luvussa 3 ja matemaattista ajattelua luvussa 5.

Hakkaraisen (2002) mukaan opetussuunnitelmauudistus tarjoaa mahdollisuuden muuttaa opettajan ja oppilaan vuorovaikutusta. Toisaalta Hakkarainen kritisoi opetussuunnitelmien normirakennetta. Hän pitää mahdottomana, että ainesisältöjä opettamalla voitaisiin toteuttaa opetussuunnitelman yleiset periaatteet ja tukea oppilaan persoonallisuuden kehittymistä. Valtakunnalliset opetussuunnitelman perusteet eivät tarjoa konstruktivistiseen ja ongelmalähtöiseen oppimiskäsitykseen pohjautuvaa opetussuunnitelman mallia. Kunnalliset opetussuunnitelmat jäävät helposti taka-alalle ja käytännön opetustyötä ohjaavat edelleen paikalliset opetusjärjestelyt, oppimateriaalit ja didaktiset oppaat. (Hakkarainen 2002, 351–353.)

2.2 Opetussisältöjen luetteloista ongelmalähtöiseen tiedon rakentamiseen

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa 1994 (1994, 10) korostetaan oppilaan aktiivista roolia oman tietorakenteensa järjestäjänä. Oppilaan käsitykset ja odotukset ohjaavat informaation vastaanottoa ja sen tulkintaa. Kriittinen suhtautuminen tietoon ja sen totuudellisuuteen korostuu, koska tieteellisen tutkimuksen edistyessä vanha tieto mitätöityy yhä nopeammin. von Wrightin (1996) mukaan 1960-luvun kognitiivisen psykologian myötä syntyi aikaisemmasta poikkeava käsitys oppimisprosessin luonteesta. Oppiessaan ihminen valikoi tietoa ja tulkitsee sitä omien käsitystensä ja odotustensa pohjalta. Tiedon konstruointi tapahtuu aina jossakin kontekstissa, joka myös jättää jälkensä tiedon tulkintaan. (von Wright 1996, 10.)

Keeves (2002) arvioi, ettei konstruktivismiin pohjautuvissa opetussuunnitelmissa ole otettu huomioon niitä kokemuksia, jotka ovat välttämättömiä Piaget´n tarkoittamiin formaaleihin operaatioihin suuntautuvassa ajattelussa. Keeves toteaa edelleen, että noin 14 vuoden iässä oppilas on kykenevä sellaiseen formaaliin ajatteluun, jota deduktiivinen todistaminen vaatii. Edellytyksenä on kuitenkin se, että oppilas on tottunut käyttämään kyseisen aihepiirin symboleita. Symboleihin perustuva opetus on hyvin turhauttavaa sellaisille oppilaille, joiden ajattelu on tilannesidonnaista ja perustuu konkreetteihin operaatioihin. (Keeves 2002, 344–347.) von Wrightin (1996, 19) mukaan uusissa opetussuunnitelmissa korostuu asioiden ymmärtäminen ja tietojen soveltaminen uusiin tilanteisiin. Merkittävänä haasteena hän pitää sitä, että opetuksen säätelyn painopiste siirtyy opetussuunnitelmasta opettajalle. Opettajan tehtävä muuttuu entistä enemmän opiskelun ohjaajaksi ja oppimisympäristön suunnittelijaksi.

Aikaisempia peruskoulun opetussuunnitelmia on arvosteltu oppiaineiden sisältöihin keskittymisestä ja luettelomaisesta rakenteesta (Leino 1998, 48). Haapasalo (1998b) toteaa, että matematiikan opetuksessa tulisi korostaa erilaisia lähestymistapoja ja totuttaa oppilaita esittämään omia ideoitaan. Opettaja voi samalla vetäytyä taustahahmoksi ja ratkaisuprosessien tukijaksi. Kun ongelmanratkaisu muuttuu vähitellen luonnolliseksi osaksi opetusta, oppilaiden kommunikointikyky paranee ja he alkavat käyttää korkeamman tason ajatteluprosesseja. (Haapasalo 1998b, 87.)

Koulujen opetussuunnitelmissa esiintyvät asiat ovat Haapasalon (1994) mukaan yleensä vanhoja. Harvoin niissä esiintyvä matematiikan tieto on peräisin 1900-luvulta. Lähinnä tästä syystä tieto on strukturoitu luetteloiksi, jotka pyritään välittämään oppilaalle enimmäkseen opetuksen ulkoisia tekijöitä säätelemällä. On huomattava, että kulttuurin kannalta relevantti tieto on yleensä syntynyt ongelmanratkaisuprosessien seurauksena. Myös tiedemiehet ja tutkijat joutuvat uutta tietoa rakentaessaan käymään läpi samat vaiheet kuin oppilas uutta asiaa opiskellessaan. Mikäli tällaiset tiedon syntyprosessit systemaattisesti sivuutetaan, tuloksena on steriiliä tietämystä, joka ei tue ongelmanratkaisukulttuuria. (Haapasalo 1994, 29.)

2.3 Ongelmakeskeisyys opetussuunnitelman lähtökohtana

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 oppimiskäsitystä kuvataan seuraavasti: ”Oppiminen on kaikissa muodoissa aktiivinen ja päämääräsuuntautunut, itsenäistä tai yhteistä ongelmanratkaisua sisältävä prosessi”. Matematiikan opetusta kuvataan siten, että sen tulee ”kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua, ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin”. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, 158).

Ongelma-nimitystä käytetään monessa opetussuunnitelman perusteiden kohdassa, mutta mitään selitystä tai määritelmää ongelman käsitteelle ei anneta. Geometrian opiskelun tavoitteissa tai toiminnan kuvailussa ei ongelmanimitystä esiinny. Tästä voisi päätellä, että ongelmalla ei opetussuunnitelman perusteissa ainakaan tarkoiteta samaa kuin oppikoulun geometrian probleemoilla (esim. Kallio, Malmio & Apajalahti 1971, 15). Toisaalta englanninkielisessä kirjallisuudessa problem-sanalla voidaan tarkoittaa ”tavanomaista sanallista tehtävää” tai matemaattisesti hyvinkin vaativaa problem solving -tehtävää (esim. Schoenfeld 1985, 1992). Schoenfeldin ohella Malaty (1993) kiinnittää huomiota problem solving -termin kirjavaan käyttöön. Monenlaisia pulmatehtäviä on Malatyn mukaan luokiteltu tähän ryhmään, vaikka niissä ratkaisu perustuu tiettyyn niksiin eikä ”tosi matematiikkaan”.

Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteereissä (1999, 53) korostetaan, että ”Ongelmanratkaisun oppimiseksi on tärkeää suunnitella oppimistilanteet keskustelunomaisiksi, kokeileviksi ja ongelmakeskeisiksi”. Keranto (1998, 32) puolestaan toteaa, että oppilaille pitäisi antaa mahdollisuus itse ”ajatella tiensä” tiedon alueelle. Tämä tapa johtaisi Kerannon mukaan väittelyihin ratkaisuvaihtoehdoista ja keskusteluun niiden perusteluista. Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteereissä (1999, 54) viitataan edelleen arkielämän tilanteisiin ja niiden kuvaamiseen sanallisesti, taulukoilla, graafeilla ja matemaattisilla lausekkeilla. Kysymys näyttäisi olevan siitä, että peruskoulun päättövaiheessa matemaattinen ongelma ymmärretään huomattavasti laajempana käsitteenä kuin pelkkä sanallinen tehtävä.

Ongelmakeskeisyyden ohella on alettu puhua myös ongelmalähtöisyydestä. Tynjälä (1999, 164–165) näkee ongelmalähtöisen oppimisen yhtenä yhteistoiminnallisen eli kollaboratiivisen oppimisen lajina. Hän toteaa kuitenkin, että ongelmalähtöisen opetuksen ja oppimisen ideaa voidaan soveltaa myös yksilötasolla. Tynjälän mukaan ongelmalähtöisen opetuksen lähtökohtana on autenttinen ongelma, jonka ympärille opiskeltava asia rakentuu. Ongelmakeskeisen ja ongelmalähtöisen opetuksen erona näyttää olevan se, että ongelmalähtöisyys viittaa pyrkimykseen yleistää ongelmanratkaisusta saatua tietoa. Ongelmakeskeisyys taas vaikuttaa siltä, että hankittu tieto rajoittuu tietynlaisten ongelmien käsittelyyn.

Mikkilä-Erdmann, Olkinuora ja Mattila (1999) kartoittivat tutkimuksessaan vuoden 1994 opetussuunnitelmauudistuksen peruskoulun oppikirjoihin tuomia muutoksia. Oppikirja-analyysi osoitti, että opetussuunnitelman painotuksista huolimatta useimmissa teksteissä ei esiintynyt lainkaan ongelmakeskeisyyttä. Ainoastaan kolmessa prosentissa teksteistä esiintyi runsaasti pohdiskelevaa ainesta. Oppikirjat näyttivät edelleenkin pitäytyvän faktatietoon. Tekstityyppien tasolla tutkijat havaitsivat, että ala- ja yläasteen teksteistä suurin osa oli edelleen kuvailevia, vailla pyrkimystä lukijan ajattelun tukemiseen. Tiivistetysti voidaan sanoa, että uudistuneetkaan materiaalit eivät sisällä toivottavassa määrin oppilaan ajattelua, oppimista ja tiedon jäsentämistä edesauttavaa ohjausta. (Mikkilä-Erdmann, Olkinuora & Mattila 1999, 444–445.)

2.4 Peruskoulun matematiikan opetuksen tavoitteet

Kangasniemi (1997) luo katsauksen peruskoulun opetussuunnitelman kehittymiseen 30 vuoden aikana vuodesta 1967 lähtien, jolloin valmistui kokeiluperuskouluja varten väliaikainen opetussuunnitelma. Kangasniemi toteaa eräänä kehityspiirteenä sen, että väliaikaisen opetussuunnitelman mukaan riitti, että asiat oli opetettu kaikille, mutta nykyisin pyritään luomaan edellytyksiä asioiden ymmärtämiselle (Kangasniemi 1997, 421, 424). Peruskoulun syntyajoilta kirjoittajalle jäi mieleen, että silloisen opetussuunnitelman mukaan matematiikan opetuksessa oppilaille tuli tarjota ”mieluisia elämyksiä”, joita syntyi keksittäessä ratkaisuja haastaviin tehtäviin. Tasokurssien poistaminen vuonna 1985 puolestaan loi vaikutelman jonkinlaisesta matematiikan osaamisen ylikorostamisesta. Matemaattinen tieto oli ikään kuin jotakin yhteistä hyvää, jota piti jakaa kaikille mahdollisimman paljon.

Koulumatematiikka voidaan Pehkosen (2000, 375) mukaan ymmärtää ”yhdistelmänä laskutaitoa ja ajattelutaitoa”. Pehkonen pohtii ymmärtämisen merkitystä matematiikan opetuksessa. Hän toteaa, että matematiikan kouluopetuksella tähdätään sekä laskuvalmiuksiin että asioiden ymmärtämiseen. Ymmärtäminen ei synny pelkästään paljosta laskemisesta eikä myöskään laskutaito parane itsestään ymmärryksen lisääntyessä. Laskimet ja tietokoneet ovat helpottaneet numerolaskujen suorittamista. Laskinten ja tietokoneiden käyttö (Kupari 1999, 30) ei ole epäilyksistä huolimatta heikentänyt peruslaskutaitoja, eikä vähentänyt matematiikan opettamisen tarvetta.

Nykyään ymmärtämisessä painotetaan sen prosessiominaisuutta, kun aikaisemmin ilmaistiin, että oppilas ymmärtää tai ei ymmärrä (Pehkonen 2000, 376). Ymmärtäminen liittyy tiettyyn henkilöön, asiaan ja tilanteeseen. Pehkonen toteaa ymmärtämisen käsitteen ongelmallisuuden. Samat sanat voivat tarkoittaa eri ihmisille eri asioita. Ymmärtämisessä on myös nähtävissä eri asteita. Vaikka asiakokonaisuuden ymmärtäisi kuinka hyvin, sitä voidaan aina tarkastella uudesta näkökulmasta, joka lisää ymmärtämisen astetta. Tiettyä asiaa tai ideaa pidetään ymmärrettynä, kun se on tullut osaksi yksilön tietoverkkoa (Hiebert & Carpenter 1992, 67). Kerannon (1998, 33) mukaan matematiikan ymmärrys tarkoittaa todellisten matematiikan käytäntöjen ymmärtämistä. Näihin käytäntöihin kuuluu sekä soveltava että teoreettinen matematiikka.

Monen oppilaan mielestä matematiikka on liian teoreettista. Kun ei näy selkeää yhteyttä arkitodellisuuteen, mielenkiinto häviää. Keranto (1998) toteaa, että esimerkiksi todennäköisyyksiin liittyvät tehtävät kiinnostavat nuoria. Yhtenä syynä saattaa olla se, että tästä aihepiiristä on helppo keksiä tehtäviä, jotka eivät vaadi paljon matemaattisia tietoja mutta sitäkin enemmän relevantin tiedon erottamista epärelevantista. Ratkaisua etsiessään oppilas joutuu tekemään rohkeita hypoteeseja, joille hän sitten etsii perusteluja. Tässä mielessä todennäköisyyteen liittyvät tehtävät ovat varsin samankaltaisia kuin kokeelliset tutkimukset luonnontieteissä. (Keranto 1998, 28–29.)

Perusopetuksen vaarana on, että tietyt matematiikan asiat kytketään aina samaan kontekstiin, jolloin oppilas saattaa runsaan harjoittelun jälkeenkin olla kykenemätön soveltamaan tietoa uuteen tilanteeseen. Oppilas on tällöin omaksunut inerttiä tietoa (Feltovich, Spiro & Coulson 1993; von Wright 1996). Asiasta tietäminen ei takaa sitä, että oppilas tietää, mitä pitää tehdä uudessa tilanteessa. Tieto ei välttämättä ole aktivoitunut kyseisen yksilön tietojärjestelmässä.

Kouluopetuksessa pidetään monia matematiikan totuuksia itsestään selvyyksinä. Kerannon (1998) mukaan yllättävän vähän kiinnitetään huomiota terveeseen epäilyyn ja evidenssin vaatimukseen. Matematiikan ja luonnontieteiden kouluopetus toteutetaan pikemminkin tieteellisen tutkimuksen tuotosten kuin prosessien näkökulmasta. Tällä tavoin opiskeltaessa oppilaiden on mahdotonta päästä perille niistä asiayhteyksistä, konteksteista, joiden jäsentämistä varten kyseinen symboliikka on alun perin kehitelty. Myös korkeampien ajattelutaitojen kehittämisen kannalta on ongelmallista, jos oppimisympäristöt ovat sellaisia, että kaikki annetaan ”valmiiksi pureskeltuna”. (Keranto 1998, 18–20.)

Schoenfeld (1992, 235) toteaa, että hyvin matematiikkaa hallitsevat oppilaat omaavat monia taitoja. He pystyvät tulkitsemaan ja arvioimaan monen tyyppistä määrällistä tietoa, jota he päivittäin kohtaavat. He kykenevät joustavaan ajatteluun ja soveltamaan monia eri tekniikoita uusiin ongelmiin ja eri tilanteisiin. He kykenevät käsittelemään analyyttisesti sekä omia näkemyksiään että toisten esittämiä väitteitä. Haapasalo (1994) toteaa aiempiin tutkimuksiin viitaten, että oppijan toiminta ongelmanratkaisutilanteessa voi ääritapauksissa olla joko ekspertin tai noviisin tiedonhankintaa. Ekspertti hahmottaa nopeasti tilanteen käyttämällä hyväksi yleisiä strategioita. Hän kykenee yhdistämään konseptuaaliset ja proseduraaliset tiedot tilanteeseen sopivalla tavalla. Noviisi puolestaan on sidoksissa ongelmatilanteen yksityiskohtiin ja keskittyy niiden analysoimiseen. Hän ei kykene näkemään käsitteiden ja tilanteiden välisiä suhteita, minkä vuoksi hän joutuu helposti kognitiiviseen kaaokseen. (Haapasalo 1994, 60.)

de Lange (1996) korostaa matematiikan opetuksen kontekstilähtöisyyttä vastapainona niin sanotun uuden matematiikan käsitteiden määrittelyyn perustuvalle lähestymistavalle. Hänen mielestään perinteisessä matematiikan opetuksessa on järjestys ollut ”ensin matematiikka, sitten sovellukset”. Yleensä ei ole edes vaivauduttu ajattelemaan, että ”sovellusten reaalimaailman” ja ”oppilaiden oman reaalimaailman” välillä saattaa olla huomattava ero. (de Lange 1996, 56.) Kerannon (1998, 35) mielestä matematiikan opetuksessa on vaikeampaa kehittää ongelmakeskeisiä oppimisympäristöjä kuin välittää oppikirjojen antamaa nykyisen kaltaista kuvaa erehtymättömästä tieteestä.

2.5 Algebra peruskoulun opetussuunnitelman osana

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 korostetaan matemaattisen ajattelun merkitystä jo ensimmäisestä luokasta lähtien. Algebran oppiaines on sijoitettu pääosin luokille 6–9, mutta joitakin algebran aihealueita on jo alemmillakin luokilla. Ensimmäisen ja toisen luokan tavoitteena on oppia ”säännönmukaisuuksien, suhteiden ja riippuvuuksien näkeminen kuvista”. Kolmannesta viidenteen luokilla otetaan jo esiin muun muassa lausekkeen käsite, tutkitaan säännönmukaisuuksia ja riippuvuuksia sekä ratkaistaan yhtälöitä ja epäyhtälöitä päättelemällä. Luokkien 6–9 algebran alueessa mainitaan ensimmäisenä lausekkeen sieventäminen. Myöhemmin puhutaan muuttujan käsitteestä ja lausekkeen arvon laskemisesta sekä yhtälöistä ja ensimmäisen asteen yhtälön ratkaisemisesta. Algebran alueeseen kuuluvaksi luetaan myös verranto, joka tässä tutkimuksessa liitetään aritmetiikkaan. Kirjoittajalle on epäselvää, ovatko opetussuunnitelman laatijat luetteloineet asiat siihen järjestykseen, missä ne on tarkoitus opettaa tai yleensä johonkin tarkoitukselliseen järjestykseen.

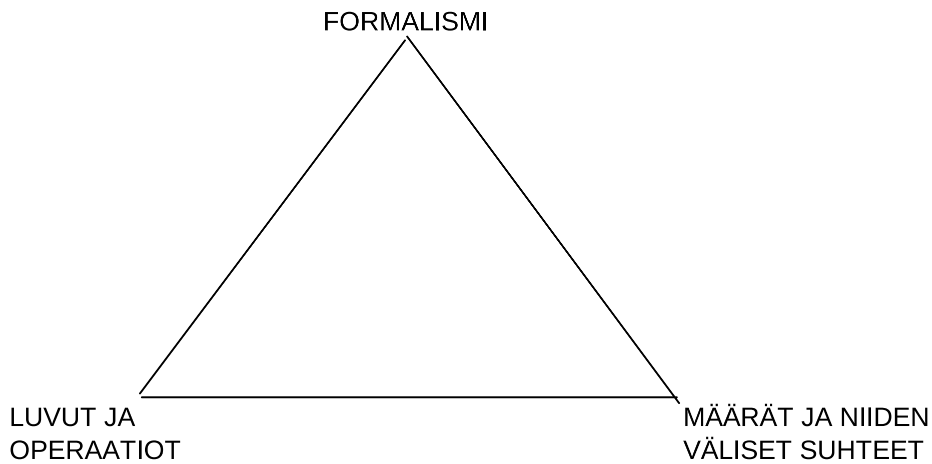
Peruskoulun matematiikan oppikirjoissa ei välttämättä edes mainita algebra-sanaa. Opettajalla on kuitenkin oman koulutustaustansa perusteella mielikuva siitä, mikä on algebraa ja mikä on muuta matematiikkaa. Siirtyminen numeroluvuista kirjainlukujen eli muuttujien käyttöön lienee näkyvin merkki aritmetiikan vaihtumisesta algebraksi.

Algebralla nähdään olevan merkitystä jatko-opintojen kannalta. Choike (2000) toteaa algebran olevan tärkeä avainalue niin ylempiin oppilaitoksiin kuin työelämäänkin valmentauduttaessa. Sen takia on tärkeää luoda algebran opettamisen strategioita, jotka soveltuvat kaikille oppilaille. Hän nimittää käsitteiden ymmärtämistä ”suurten ideoiden” keksimiseksi. Choike pitää tärkeänä monipuolisia esittämistapoja: sanallisesti, taulukoiden avulla, graafisesti ja symbolisesti. van Dyke ja Craine (1997, 617) havaitsivat, että tietyssä kontekstissa jokin esitystapa voi olla muita hyödyllisempi. Opetustapa, jossa yhdistyvät eri esitysmuodot tavoittaa paremmin eri oppimistyylin omaavat oppijat. Siinä on eräs algebran suuri idea. Choike tiivistää vielä, että algebra on prosessi, jonka avulla järjestetään se aritmetiikka, jota tarvitaan tuntemattomien suureiden ratkaisemiseen. (Choike 2000, 561.)

Friedlander ja Hershkovitz (1997) määrittelivät algebran lähtökohdan siten, että algebra nousee tarpeesta tutkia jännittäviä probleemoja. NCTM:n suositusten mukaisesti algebran alkuvaiheen pitäisi tähdätä muuttujan, lausekkeen, funktion ja yhtälön käsitteiden ymmärtämiseen sekä kykyyn konstruoida ja analysoida mutkikkaita numerolausekkeita. Algebran käyttöä järkeilyn välineenä selittämisessä ja todistamisessa ei useinkaan mainita. (Friedlander & Hershkovitz 1997, 442.)

Tutkimuksissaan Friedlander ja Hershkovitz (1997) havaitsivat, että ongelmatilanteiden käsittely kohotti oppilaiden motivaatiota. Tehtävät aiheuttivat matemaattista pohdiskelua, mutta kaikki ratkaisut eivät suinkaan edellyttäneet formaalin algebran käyttöä. Eräs perinteisen algebran opetuksen ongelma onkin siinä, että se tarjoaa keinoja monenlaisten ongelmien ratkaisuun, mutta monia näistä ongelmista ei tule oppilaille koskaan eteen. Tältä kannalta nykyinen koulumatematiikan jako aritmetiikkaan, algebraan ja geometriaan on mielivaltainen ja tarpeeton. (Friedlander & Hershkovitz 1997, 446.)

Tiedostetaanko opetussuunnitelmissa riittävästi aritmetiikan ja algebran välinen ero? Algebran symboleilla on eri merkitys kuin niillä on muissa konteksteissa (mm. Stacey & McGregor, 1997, 110). Pyritäänkö opetuksessa ja oppimateriaaleissa tietoisesti helpottamaan siirtymistä aritmetiikasta algebraan? Opettajillakin näyttää olevan se käsitys, että algebrassa vain aletaan soveltaa aritmetiikan laskulakeja muuttujiin eli kirjainlukuihin. Todellisuudessa monet oppilaat eivät osaa soveltaa vaihdanta-, liitäntä- ja osittelulakeja edes numerolukuihin (Linchevski & Livneh, 1999, 196). Esimerkiksi sekalukujen kertolaskussa voitaisiin mainiosti harjoitella osittelulain käyttöä, kuten esimerkiksi Schoenfeld (1992, 342) raportoi. Resnickin, Cauzinille-Marmechen ja Mathieun (1987) malli (kuvio 1) "mistä algebra saa merkityksensä" valaisee tilannetta. Siirtyminen käytännön läheisestä matematiikasta formaaliin suuntaan merkitsee "kolmiossa" nousua ylöspäin ja asioiden hallinnan vaikeutumista.



KUVIO 1 Resnickin, Cauzinille-Marmechen ja Mathieun (1987, 172) malli: Mistä algebra saa merkityksensä.

Aritmetiikasta algebraan siirtyminen kuuluu yläasteen matematiikan opiskelun kriittisiin vaiheisiin (Stacey & McGregor 1997, 110). Kouluopetuksen perusongelmia on se, otetaanko formaaleja käsitteitä käyttöön liian aikaisin ja heikoin perusteluin. Kenties samat asiat voitaisiin ratkaista aritmetiikan menetelmin (Linchevski & Herscovics 1996, 39). Formaalit rakenteet voitaisiin opetella sitten, kun pelkkä aritmetiikka ei enää riitä. Oppilaan näkökulmasta vaikuttaa siltä, että hänelle tarjotaan algebrassa matematiikan apuvälineitä, joille ei ole mitään käyttöä (Friedlander & Hershkowitz 1997, 446). Silver (1997) toteaa, että algebrassa saatetaan opettaa pitkä lista proseduureja, joiden tarkoitusta oppilaat eivät ymmärrä. Oppilaille tarjotaan algebran kursseja tietyltä luokka-asteelta lähtien vaativuudeltaan porrastettuna. Heidän ideoitaan ja luovuuttaan ei hyödynnetä. Silver tiivistää sanomansa, että opettajien, opetussuunnitelmien laatijoiden, tutkijoiden ja koulun ylläpitäjien ei pidä etsiä monimutkaiseen ongelmaan yksinkertaista ratkaisua. (Silver 1997, 207–208.)

3 MATEMATIIKAN OPPIMINEN JA OPETTAMINEN PERUSKOULUSSA

3.1 Oppija matemaattisen tiedon tulkitsijana

Malinen (1997) herättää kysymyksen, tutkitaanko kouluissa oppimista vai opiskelua? Hän viittaa konstruktivistiseen didaktiikkaan, missä korostetaan metakognitiivisia taitoja ja oppimaan oppimista. Oppiminen voidaan käsittää oppijan sisäiseksi prosessoinniksi, kun taas opiskelu on oppijan ulkoista prosessointia. Ulkoista prosessointia kuvaavat oppilaiden erilaiset orientaatiot opiskeluun. Ne perustuvat ennakkoasenteisiin, uskomuksiin, kokemuksiin ja muihin persoonallisuuden ominaisuuksiin. Opiskelun tutkimisen yhteydessä tutkitaan oppimistulosten lisäksi yleensä myös opetuksen sisällön sopivuutta, opetusjärjestelyjä, opiskelijoiden kokemuksia, uskomuksia opiskelusta jne. Tätä kaikkea on mahdotonta sisällyttää opetus-oppimisprosessin tutkimiseen. Omalta osaltaan nykyaikainen opetusteknologia on lisännyt kiinnostusta siihen, miten opiskelijat voivat aktiivisesti hankkia ja jäsennellä tietoa. (Malinen 1997, 191–196.)

Haapasalon (1998b) mukaan on tärkeää, että oppilaat oppivat arvostamaan matematiikkaa, uskovat kykyihinsä käyttää sitä, kypsyvät vähitellen matemaattisten ongelmien ratkaisijoiksi ja oppivat ilmaisemaan ajatuksensa matemaattisesti. Oppilaille on hyvä esittää myös sellaisia ongelmia, joiden ratkaisemiseen kuluu useita päiviä tai joihin ei löydy lainkaan ratkaisua. Ideointia, arviointia ja päättelyä sekä perustelujen esittämistä tulisi oppia arvostamaan enemmän kuin oikean vastauksen löytämistä. (Haapasalo 1998b, 91.)

Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteereissä (1999, 54–55) korostetaan laskutaitojen oppimisen ja peruskäsitteiden ymmärtämisen ohella mm. asioiden ongelmakeskeistä lähestymistä, arkielämän tilanteiden mallintamista ja omien suoritusten perustelemista. Pehkosen (2000, 376) mukaan monille oppilaille matematiikan opiskelu on symboleilla operointia ilman merkitystä.

Näyttää siltä, että yläasteelle tullessaan oppilaat ovat jo omaksuneet varsin selvän näkemyksen siitä, että matematiikassa tärkeintä on laskeminen ja oikean vastauksen löytäminen. Tämä näkemys sopii hyvin yhteen sellaisen oppimisympäristön kanssa, jossa jokainen oppilas tekee omaa työtään ja etenee omaan yksilölliseen tahtiinsa (Kupari 1999, 57). Toisaalta opetustilanteiden tulisi olla keskustelevia ja tuoda esiin eri ratkaisuvaihtoehtoja (Haapasalo 1998a, 75; Keranto 1998, 33; Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit 1999, 53). Kuparin (1999, 177) mukaan perinteinen ja laskutaitopainotteinen matematiikan opetus ei enää tuota sellaisia oppimiskokemuksia ja oppimistuloksia, jotka tämän ajan nuorille olisivat merkityksellisiä ja joita oppimistulosten arvioinnissa tällä hetkellä painotetaan.

Tirosh ja Stavy (1999) havaitsivat, että oppilaat reagoivat samalla tavalla käsitteellisesti hyvin erityyppisiin tehtäviin, jotka ulkonaisesti muistuttivat toisiaan. Monilla sisältöalueilla oppilaiden vastaukset olivat tyyppiä "enemmän A:ta - enemmän B:tä" tai ”sama A – sama B”. Kun esimerkiksi piti verrata säännöllisen viisikulmion ja säännöllisen kuusikulmion kulmia toisiinsa, enemmistö peruskouluikäisistä ja huomattava osa lukioikäisistä arvioi, että kulmat ovat yhtä suuret, jos sivut olivat yhtä suuret. (Tirosh & Stavy 1999, 52.)

Huhtala (2000) tutki lähihoitajaopiskelijoiden ”omaa matematiikkaa”. Hän syventyi muun muassa klinikkaopetuksessaan peruskoulunsa päättäneiden, heikosti matematiikkaa hallitsevien opiskelijoiden käsityksiin matematiikasta. Opiskelijoiden omaan matematiikkaan sisältyi monia uskomuksia, kuten ”jakaminen pienentää”, ”kertominen suurentaa”. (Huhtala 2000, 149.) Vastaavia havaintoja tekivät myös Fischbein (1999, 16) sekä Ahtee ja Pehkonen (2000, 42). Opiskelijat siis kuvittelivat, että luonnollisten lukujen ominaisuudet pätevät kaikille reaaliluvuille.

Feltovichin, Spiron ja Coulsonin (1993, 181) mukaan vaikean asian oppimisessa esiintyy kolmen tyyppisiä puutteita. Ensiksi: väärinymmärrykset ja virheellinen tieto, toiseksi: inertti tieto eli kykenemättömyys soveltaa aiemmin opittua uuteen tilanteeseen sekä kolmanneksi: hukattu tieto, kun aiemmin opittua ei kyetä palauttamaan mieleen. von Wright (1996) arvioi opettajan roolia oppilaiden ohjaamisessa. Hänen mukaansa nuoret oppivat enemmän asioita koulun ulkopuolella tai koulussa toisiltaan kuin varsinaisessa kouluopetuksessa. Koulussa opittavaksi tarkoitetun aineksen tulee kytkeytyä oppilaan mielessä laajempaan kontekstiin. Muutoin on vaarana, että kouluviisaus jää muusta tiedosta erilliseksi saarekkeeksi. Siitä tulee inerttiä tietoa, jota ei kyetä käyttämään uusissa asiayhteyksissä. (von Wright 1996, 14.)

Matematiikkaa on Kuparin (1999) mukaan pidetty pitkään erehtymättömänä tieteenä. Sama uskomus heijastuu matematiikan opetuksesta ja oppikirjoista oppilaiden käsityksiin. Oppilaiden taipumukseen omaksua tietoa ja uskoa sen todenperäisyyteen vaikuttaa yhtenä tekijänä Feltovichin tutkijaryhmän (1993, 193) mukaan myös itse tietolähde. Jos tärkeät ihmiset sanovat jotakin, asian täytyy olla niin.

Haapasalo (2004) näkee ongelmia siinä, miten oppimateriaalit välittävät tietoa oppilaalle. Kun oppilas ei kykene näkemään käsitteiden välisiä riippuvuuksia, hän yrittää soveltaa tilanteeseen sopimattomia ratkaisumenetelmiä. Epäonnistuttuaan oppilas tukeutuu opettajaan ja opettaja oppikirjaan. Haapasalon (2004, 72) mukaan on ajauduttu tilanteeseen, jossa pyritään välittämään ekspertin tietoa noviisin menetelmin.

Oppilailla ei yleensä ole mahdollisuuksia ymmärtää, saati kokea sitä, että tieto on syntynyt ongelmanratkaisuprosessien seurauksena (Haapasalo 1994, 30). Tietoon ja oppimiseen suhtaudutaan useimmiten joko jyrkän naivistisesti tai empiirisesti. ”Tiedon puu on jäänyt ilman juuria”. Tieto voi olla objektiivista vain siinä viitekehyksessä, jossa tietoa tuottava vuorovaikutus ympäristön kanssa ilmenee (Haapasalo 1994, 63).

3.2 Matematiikan käsitetieto

Matematiikka formaalina järjestelmänä rakentuu muutamien peruslauseiden eli aksioomien varaan. Peruslauseista johdetaan uusia lauseita (Thompson & Martinson 1994, 254). Lauseiden esittämiseen tarvitaan käsitteitä, jotka täytyy määritellä. Määritelmien yhteydessä sanat voivat saada erityisiä merkityksiä, joita ei esiinny tavanomaisessa kielenkäytössä. Spontaanisti omaksutut arkikäsitykset muuttuvat siten, että niiden taustalla olevat perusoletukset muuttuvat (Tynjälä 1999, 96).

Leinonen (2003) puhuu käsitteen määrittelyn vaikeudesta ja toteaa, että on parasta tyytyä vain luonnehtimaan käsitteitä. Matematiikassa puhutaan ominaisuuksista ja relaatioista. Esimerkiksi vaihdannaisuus on yhteenlaskun ominaisuus, ja joukon kuuluminen toiseen joukkoon ilmoittaa joukkojen välisen relaation. Ajattelu operoi käsitteillä. Kun kuulijalla ei ole tarvittavia käsitteitä käytössään, hän ei tavoita sanomaa eikä siis ymmärrä puhetta. Käsitteillä on tällöin välittävä tehtävä henkilön jäsentäessä maailmaa. Kuullun ymmärtäminen perustuu kuulijan tulkintaan ja valintaan, joiden avulla hän löytää tarkoitetun kohteen ja siihen soveltuvat attribuutit.

Silfverberg (1999, 65) pitää matemaattisen tiedon karttumista käsitetiedon lisääntymisenä ja menetelmätiedon oppimisena. Käsitetiedolle on ominaista tiedon osien välisten suhteiden moninaisuus. Menetelmätieto taas liittyy niihin toimenpiteisiin, joita laskutehtävässä on suoritettava tietyssä järjestyksessä vastauksen aikaansaamiseksi. Jos oppilaiden käsitteellinen tieto ja algoritmien käyttö eivät ole yhteydessä toisiinsa, oppilaille voi syntyä intuitiivinen tunne, että he ymmärtävät matematiikkaa, mutta eivät silti osaa ratkaista tehtäviä tai saavat vastauksen, mutta eivät ymmärrä mihin se perustuu (Hiebert & Lefevre 1986, 9).

Niiniluoto (1980, 120) hahmottaa merkityksen ja määritelmän käsitteitä intension ja ekstension avulla. Niiniluodon mukaan käsitteellä on intensio eli tarkoitus ja ekstensio eli jokin esiintymismuoto. Esimerkiksi luvun 2 intensio on ”kahtena oleminen” ja ekstensio on ”kahden objektin muodostamien joukkojen luokka” (ks. myös Wittgenstein 1981, 39–40). Merenluodon (2001) mukaan matemaattiset oliot ovat abstrakteja, joten niitä käsitellään erilaisten esitystapojen ja esimerkkien eli representaatioiden välityksellä. Matematiikan käsitteiden, esimerkiksi lukujen representaatioita voi piirtää ja mallintaa monella tavalla. Alkeismatematiikassa representaatioita tuotetaan konkreettien objektien avulla. Representaatiot voivat myös tarkoittaa matemaattisen olion nimeä tai merkitystä. Niillä voidaan tarkoittaa myös nimitykseen liittyvää mentaalista mielikuvaa käsitteestä ja matemaattista symbolikieltä, jonka tarkoitus on tehdä matemaattinen kommunikointi yksiselitteiseksi. Samaa käsitettä voidaan merkitä erilaisilla symboleilla ja samaan käsitteeseen liittyvät mentaaliset mielikuvat voivat olla hyvin erilaisia eri oppilailla. (Merenluoto 2001, 25.)

Merenluoto (2001) pohtii matematiikan käsitteiden kaksitahoista olemusta. Esimerkiksi luku + 2 voidaan käsittää operaationa, jossa siirrytään kaksi askelta oikealle lukusuoralla. Toisaalta se voidaan käsittää objektina, jolloin se edustaa kokonaislukua +2. (Merenluoto 2001, 25.) Luonnollisten lukujen yhteen ja vähennyslaskussa voidaan ajatella, että plus- tai miinusmerkki on linkki, joka kytkee kaksi lukua toisiinsa. Negatiivisten lukujen käyttöön ottaminen tuo plus- ja miinusmerkille aivan uuden merkityksen luvun etumerkkinä, joka voi samalla toimia myös laskutoimitusmerkkinä. Lausekkeen 2 – 3 tulkitseminen samaksi kuin – 3 + 2 vaatii aivan uudenlaista ajattelua verrattuna luonnollisten lukujen laskutoimituksiin. Luvun käsitteen tulkitsemisessa siirrytään operationaalisesta strukturaaliseen näkemykseen. Tällaiset muutokset, kuten siirtyminen aritmetiikasta algebraan, muodostavat helposti oppimisen epäjatkuvuuskohtia (Merenluoto 2001, 26; Sfard & Linchevski 1994, 195).

3.3 Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto

Matematiikan opettajien uskomuksiin matematiikasta tieteenä ja oppiaineena kuuluu matematiikan käsittäminen joko välinematematiikkana tai suhdematematiikkana (Kupari 1999, 83; Thompson 1992, 133). Välinematematiikan tieto muodostaa joukon ennalta määrättyjä ohjeita matemaattisen tehtävän suorittamiseksi. Sitä vastoin suhdematematiikka sisältää käsiterakenteita, joiden avulla on mahdollista konstruoida erilaisia polkuja tehtävän suorittamiseksi. Tällaista matemaattisen tiedon kahtia jakoa voidaan verrata käsitepariin proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto (Hiebert & Lefevre 1986; Haapasalo 1998a; Kupari 1999).

Proseduraalinen tieto liittyy sääntöihin, toimintakaavoihin ja algoritmeihin. Prosessia osataan viedä eteenpäin vaihe vaiheelta. Hiebertin ja Lefevren (1986, 6) mukaan proseduuri voidaan kuvitella tuotantosysteemiksi, joka käyttää tietynlaista raaka-ainetta ja valmistaa tuotteen, jonka seuraava proseduuri taas hyväksyy raaka-aineekseen.

Kieran (1992) käyttää nimityksiä proseduraalinen ja strukturaalinen tieto. Proseduraalinen liittyy aritmeettisiin operaatioihin esimerkiksi yhtälöiden ratkaisemisessa. Sfardin (1991) terminologiassa operationaalinen vastaa proseduraalista. Strukturaalinen taas tarkoittaa jokseenkin samaa Sfardin ja Kieranin terminologioissa. Esimerkiksi yhtälön $5x + 5 = 2x - 4$ ratkaiseminen edellyttää algebrallisten lausekkeiden käsittelyä, joten toiminta on strukturaalista (Kieran 1992, 392). Sfard (1991) pitää strukturaalista tietoa staattisena objektina, jota voidaan käsitellä kokonaisuutena. Jos taas jokin merkintä ymmärretään proseduurina, sen luonne paljastuu vasta tiettyjen toimintojen jälkeen. Tässä mielessä operationaalinen tieto on dynaamista, jonomaista ja yksityiskohtaista. (Sfard 1991, 4.) Oppilaan kyky käyttää operaatioita ilman konkreettia ja tilannesidonnaista ympäristöä osoittaa, että oppilas on noussut operaation käytössä abstraktimmalle tai strukturoidummalle tasolle (Slavit 1999, 256).

Silver (1986) toteaa, että joskus on hyödyllistä tarkastella proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välisiä eroja. Hän pitää kuitenkin tärkeämpänä niitä suhteita, jotka vallitsevat tiedon osasten välillä. Eroja saattaa olla tiedon staattisten elementtien välillä, mutta kun tietoa sovelletaan ongelmanratkaisuun tai johonkin muuhun ei-triviaaliin tehtävään, se tapahtuu dynaamisesti, jolloin suhteiden merkitys korostuu. (Silver 1986, 181.)

Fischbein (1999) korostaa, että kaikessa matematiikan opetuksessa on tärkeää, että opettaja ymmärtää ne vuorovaikutukset, jotka vallitsevat ymmärtämiseen, muistamiseen ja ongelmanratkaisuun liittyvien intuitiivisten, formaalisten ja proseduraalisten näkökohtien välillä. Jos intuitiiviset voimat sivuutetaan, ne jatkavat kuitenkin vaikuttamistaan oppilaan ratkaisuprosesseissa. Tämä vaikutus on kontrolloimatonta, ja se häiritsee yleensä matemaattista ajatteluprosessia. Jos taas formaali aspekti hylätään ja luotetaan pelkästään intuitiivisiin argumentteihin, se mitä opetetaan, ei ole matematiikkaa. (Fischbein 1999, 28.)

Hiebertin ja Lefevren (1986) mukaan konseptuaalista tietoa kuvaa parhaiten sen suhteiden paljous. Sitä voidaan pitää tietoverkkona, jonka osien väliset linkit ovat yhtä näkyviä kuin ne tiedon osaset, joita nämä linkit yhdistävät. Käsitteellisen tiedon osa ei voi olla erillinen tiedon palanen, vaan siihen kuuluu oleellisesti suhdeverkko, joka yhdistää palasen muuhun informaatioon. Konseptuaalista tietoa hankitaan rakentamalla suhdeverkkoa informaation palasten välille. Tämä voi tapahtua kahden ennestään muistissa olevan tiedon välillä, jolloin keksitään jotakin uutta, joka vallitsee näiden kahden asian välillä. Konseptuaalinen tieto voi lisääntyä myös siten, että havaitaan jokin yhteys aiemmin opitun ja uuden tiedon välillä. Tätä ilmiötä kutsutaan usein ymmärtämiseksi tai Piaget`n ilmausta käyttäen assimilaatioksi. Uusi tietoaines on assimiloitu aiempiin tietoverkkoihin tai struktuureihin. (Hiebert & Lefevre 1986, 4.)

Hiebertin ja Lefevren (1986) mielestä on hyödyllistä erottaa kaksi tasoa, joilla matemaattisen tiedon osasten välisiä suhteita voidaan luoda. *Primaari taso* on se sama taso, jolla itse tietokin esiintyy. Tällöin tiedon osien välinen suhde ei ole abstraktimpi kuin itse informaatio, jota kyseinen suhde yhdistää. Termi abstrakti viittaa tässä siihen, missä määrin tietoyksikkö on sidoksissa määrättyihin konteksteihin. Abstraktisuus lisääntyy, kun tieto vapautuu konteksteistaan. Jotkut suhteet rakentuvat korkeammalla, abstraktimmalla tasolla kuin se informaatio, jota ne yhdistävät. Tällaista tasoa kutsutaan *reflektoivaksi tasoksi*. Tämän tason suhteet ovat heikommin sidoksissa erityisiin konteksteihin. Toiminta reflektiivisellä tasolla liittyy usein siihen, että päällisin puolin erilaisista informaation osista tunnistetaan samoja ydinominaisuuksia. (Hiebert & Lefevre 1986, 4–5.)

Linchevski ja Williams (1999) käyttivät hyväksi arkipäivän tilanteita laajentaessaan lukualuetta negatiivisten lukujen alueelle. He totesivat, että siirtyminen proseduureista matemaattisiin objekteihin vaatii pitkän kehityksen. Tämä johtaa paradoksiin: proseduureja joudutaan käsittelemään objekteina ennen kuin oppilaat voivat mieltää ne sellaisiksi (Linchevski & Williams 1999, 131).

Haapasalon (2004, 53) mukaan proseduurien aikana ei välttämättä ajatella niitä ominaisuuksia, joita proseduureihin liittyvillä objekteilla on. Konseptuaalinen tieto taas on semanttinen verkko, jonka rakentamiseen ja tulkintaan yksilö kykenee osallistumaan. Hiebert ja Lefevre (1986, 9) tiivistävät proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välisen eron konkreettiin muotoon. Kun verrataan proseduraalista tietoa ja käsitetietoa kokonaisuutena, voidaan tarkastella proseduureja ilman käsitteitä, mutta ei ole yhtä helppo kuvitella käsitteellistä tietoa, joka ei liity mihinkään proseduureihin. Kahdessa seuraavassa alaluvussa käsitellään teorioita matemaattisen ajattelun tasoista.

3.4 van Hielen teoria matemaattisen ajattelun tasoista

Hollantilainen pitkän linjan matematiikan opettaja van Hiele (1986) tutki matematiikan kouluoppimista vuodesta 1955 lähtien 30 vuoden ajan. Hän piti lähtökohtanaan Piaget´n (1973) teoriaa, mutta korosti omassa teoriassaan seuraavia näkökohtia: oppimisessa on enemmän kuin kaksi tasoa, kielen rooli on tärkeä siirryttäessä tasolta seuraavalle, käsitteet ovat vain ihmisen luomia rakenteita, korkeampi taso saavutetaan alempien tasojen oppimistuloksena, struktuuri on väline, joka toimii tiettyjen lakien mukaan.

Struktuurin käsite näyttelee tärkeää osaa van Hielen teoriassa. Erilaisia struktuureja voi esittää esimerkiksi piirrosten tai lukujonojen avulla. Struktuurin tärkein ominaisuus van Hielen (1986) mukaan on, että se voidaan laajentaa sen rakenteen perusteella. Jos struktuuri on heikko, sille ei ole helppo luoda hyvää jatkoa. Struktuurin toinen ominaisuus on objektiivisuus, erilaiset ihmiset jatkavat sitä samalla tavalla. Annettu struktuuri voi olla isomorfinen (rakenteeltaan samanlainen) toisen struktuurin kanssa, jolloin niiden säännöt vastaavat toisiaan. Matematiikassa esimerkiksi yhteenlasku ja kertolasku ovat keskenään isomorfisia, koska niiden laskulait vastaavat täsmälleen toisiaan. (van Hiele 1986, 23.)

van Hiele (1986) kehitti viisiportaisen ajattelun tasojen teorian kuvaamaan lähinnä geometrisen ajattelun tasoa. Ero toisen ja kolmannen tason kohteiden välillä voidaan ilmaista myös erilaisin kirjoittamistavoin. Esimerkiksi toisen tason laskutoimitukset liittyvät konkreetteihin lukuihin:

$$4 \cdot 3 = 12 \quad \textit{ja} \quad 6 + 8 = 14$$

Ajattelun kolmannella tasolla tuloksia yleistetään

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Näissä yleistyksissä ei palata alkuperäisiin toisen tason objekteihin, numerolukuihin. Perustason, toisen tason ja kolmannen tason ajattelutavoilla on hierarkkinen järjestys. Toisen tason ajattelu ei ole mahdollista ilman perustasoa, eikä kolmannen tason ajattelu ilman toista tasoa. (van Hiele 1986, 51.)

Voidaan päätellä, että ajattelun korkeampi taso on johdettu perustasosta valitsemalla tietty näkökulma. Tätä korkeampaa tasoa voidaan kutsua alemman tason "deskriptiiviseksi" tasoksi. Algebran deskriptiivinen taso on erilainen kuin geometrian, koska algebran päähuomio kiinnittyy lukuihin ja geometrian muotoihin. Mutta kolmas taso (teoreettinen taso) algebrassa ja geometriassa on sama. Molemmissa deduktiivinen koherenssi on hallitseva. Asian havainnollistamiseksi on mahdollista muuttaa teoreettisen tason struktuureja merkkisysteemin avulla. Niinpä algebra antaa aritmetiikan teoreettisen tason rakenteen ja muodollinen logiikka vastaavasti algebran teoreettisen tason rakenteen. van Hielen ajattelun tasojen kannalta voidaan arvioida muun muassa murtolukujen laskusääntöjä. Jotkut ratkaisut perustuvat visuaaliseen malliin, toiset eivät:

$$\frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b}{c} \qquad \text{OK!}$$

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c \qquad \text{OK!}$$

Mutta

$$\frac{a + b}{a + c} = \frac{b}{c} \qquad \text{VIRHE!}$$

Kaikki kolme muunnosta on tehty saman visuaalisen rakenteen mukaan, mutta sellainen rakenne ei ole kyllin vahva kattamaan kaikkia kolmea tapausta.

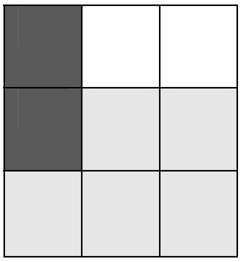
Esimerkki 3.1 "Laskeutuminen visuaaliselle tasolle"

Murtolukuyhtälö

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

on toisen tason määritelmä, joten visuaaliset struktuurit auttavat asian ymmärtämisessä (kuvio 2).

van Hielen teoriaa on sovellettu lähinnä geometrisen käsitetiedon arviointiin (mm. Silfverberg 1999). Teoria näyttäisi kuitenkin tarjoavan mahdollisuuksia esimerkiksi murtolukujen tulkintojen arviointiin.



KUVIO 2 Visuaalisen tason malli murtolukujen yhteenlaskusta (van Hiele 1986, 54)

3.5 Sfardin reifikaatioteoria

Sfard (1991) toteaa, että matematiikan määritelmiä ja esittämistapoja analysoimalla päädytään abstraktien merkintöjen, kuten lukujen ja funktioiden, kahteen täysin erilaiseen tulkintaan: strukturaaliseen eli objektitulkintaan ja operationaaliseen eli prosessitulkintaan. Operationaalisten ja strukturaalisten käsitysten välillä on syvä ontologinen kuilu. Sfardin teorian perusajatus on objektifiointi. Se tarkoittaa, että tietyn abstraktiotason objekteihin kohdistuvista toiminnoista eli prosesseista kehittyy vähitellen uusi objekti, joka edustaa seuraavaa abstraktiotasoa. Objektifiointi sisältää kolme osavaihetta: sisäistämisen, tiivistämisen ja reifikaation eli konkretisoinnin. Silfverberg (1999) toteaa Sfardin teoriasta, että esimerkiksi murto-osien muodostaminen symboloidaan objekteiksi eli murtoluvuiksi, joihin puolestaan seuraavan abstraktiotason operaatiot eli murtolukujen laskutoimitukset kohdistuvat. Silfverberg katsoo Sfardin mallin matemaattisen ymmärryksen kasvusta sisältävän pääosin van Hielen teorian perushypoteesit. Sfardin tutkimukset ovat kuitenkin suuntautuneet lähinnä algebran ja van Hielen tutkimukset geometrian käsitteiden tutkimiseen. Molempien teorioiden mukaan oppimisprosessi epäonnistuu, jos opetus tapahtuu eri tasolla kuin oppilaan ajattelu. Tuloksena voi olla esimerkiksi se, että oppija alkaa opetella matemaattista järjestelmää merkkipelinä ilman tulkinnallista merkitystä. (Silfverberg 1999, 61–62.)

Merenluoto (2001) sovelsi Sfardin teoriaa tutkiessaan lukiolaisten reaaliluvun käsitettä. Merenluoto (2001, 58) toteaa, että matematiikan käsitteiden operatiivinen ymmärtäminen on helpompi saavuttaa, kun taas strukturaalinen käsittäminen on kognitiivisesti vaativampi ja runsasta harjaannusta edellyttävä tavoite. Merenluoto selvitti tutkimuksessaan lukiolaisten reaalilukukäsitteen strukturoitumisen astetta. Hän jakoi oppilaiden ajattelussa tapahtuneet muutokset kahteen ryhmään: aikaisemman ajattelun rikastamiseen ja ajattelun radikaaliin muutokseen. Merenluodon (2001, 168) mukaan näyttää siltä, että kompleksien ja abstraktien käsitteiden oppimisessa on vielä jonkinlainen välitaso, jossa oppilas joutuu hyväksymään sen, ettei vielä kokonaan ymmärrä, mistä on kysymys. Käsitteellisen muutoksen teoriat näyttävät perustellusti selittävän oppimisen ongelmia myös matematiikan käsitteiden oppimisessa (Merenluoto 2001, 171).

3.6 Peruskoululaisen matemaattinen ajattelu

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 korostuu matemaattinen ajattelu ensimmäisistä luokista lähtien. Sitä ehdotetaan jopa alkuopetuksen ydintehtäväksi. Ylemmillä luokilla matemaattista ajattelua kehitetään. Näin vahva matemaattisen ajattelun korostus alkuopetuksesta lähtien viestii ainakin siitä, että matematiikan perusasioiden opettamiseen kaivataan muutosta. Opetussuunnitelman perusteet jättävät kuitenkin avoimeksi kysymyksen siitä, mitä on matemaattinen ajattelu.

Tutkijat ovat nähneet matemaattisen ajattelun liittyvän muun muassa ongelmanratkaisuun (Schoenfeld 1992; Korhonen 1999; Pehkonen 2000; Joutsenlahti 2005), jolloin korostuvat oppilaiden metakognitiiviset taidot. Malinen (1993) ja Niiniluoto (1983) puolestaan kiinnittävät huomiota päättelymenetelmien lähinnä induktion ja deduktion käyttöön. Merenluoto (2001) korostaa käsitteellisen muutoksen merkitystä tiedonhankinnassa.

Korhonen (1999, 15) arvioi, että Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (1994) sisältöalueet ongelmanratkaisu ja mallintaminen sekä käsitys matematiikan lauseista ja päättelystä viittaavat selkeästi ajattelun taitoihin, menetelmiin tai prosesseihin. Pehkonen (2000, 376) toteaa matemaattisen ajattelun liittyvän ymmärtämiseen. Ymmärtämisessä painotetaan nykyään prosessiominaisuutta, kun aiemmin ajateltiin, että oppilas joko ymmärtää tai ei ymmärrä. Myös Joutsenlahti päätyi tutkimuksessaan matemaattisen ajattelun tarkasteluun prosessien näkökulmasta. Hän toteaa, että ”yksilön matemaattinen ajattelu on hänen matemaattisten kykyjensä säätelemä prosessi” (Joutsenlahti 2005, 59). Joutsenlahti muotoilee Hiebertin ja Lefevren (1986) näkemysten pohjalta tiedon kolmijaon, johon kuuluu ongelmanratkaisutieto, sekä käsitteen muodostumiseen tarvittava tieto, joka sisältää proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon. Joutsenlahti liittää ymmärtämisen konseptuaaliseen ja taidon proseduraaliseen tietoon. (Joutsenlahti 2005, 82.)

Niemi (2004, 53–57) tarkastelee lasten matemaattisen ajattelun muodostumista ja vertailee eri tutkijoiden näkemyksiä. Konstruktivistinen oppimiskäsitys näyttää olevan monen tutkijan lähtökohtana. Tällöin korostuu oppilaan aikaisempi tieto ja ne merkitykset, joita hän asettaa opiskeltaville asioille. Oppilas valikoi ympäristöstään tarjolla olevaa tietoa. Kun yksilö reflektoi omaa toimintaansa, hän oppii ymmärtämään käsitteen sisällön. Toisaalta toiminnan kautta muodostuu uusia käsitteitä. Niemi näyttää liittävän matemaattisen ajattelun niihin prosesseihin, joiden kautta oppilas saa tietoa uusista käsitteistä.

Eri tutkijat ovat tehneet havaintoja oppilaiden matemaattisesta ajattelusta tai sen puutteesta. Strang (1990) totesi murtolukututkimustensa yhteydessä, että ala-asteen matematiikan opetuksesta, ainakin murtolukujen alueelta, puuttuivat systemaattinen käsitteen opettaminen ja matemaattisen ajattelun harjoittaminen. Slavit (1999) havaitsi, että jopa kuusi- ja seitsemänvuotiaat olivat melko kykeneviä muodostamaan syviä ymmärryksiä matemaattisista prosesseista ja osasivat omalla tavallaan ajatella algebrallisesti. Martinez (2001) havaitsi sanallisten tehtävien merkityksen oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittymiselle. Hän huomasi, että oppilaiden metakognitiivisia taitoja voitiin kehittää, kun heille annettiin houkuttelevia sanallisia tehtäviä. Oppilaat kehittelivät omia ratkaisustrategioitaan ja kirjoittivat kriittisesti omasta ajattelustaan.

3.7 Opettaja matemaattisen tiedon välittäjänä

Opettaja opettaa niin kuin häntä on opetettu. Opettajan uskomukset ja arvostukset tarttuvat helposti oppilaisiin. Jos opettaja on innostunut esittämästään asiasta, oppilaatkin saattavat innostua. Jos oppilas pitää opettajaansa ”tärkeänä” henkilönä, hän arvostaa opettajan jakamaa tietoa (Feltowich ym. 1993). Toisaalta nykyään oppilaiden saatavilla on runsaasti muita tietolähteitä koulutiedon lisäksi. Markkinahenkisen tiedon ohella opetus ja muu koulutieto ei aina tunnu oppilaasta yhtä houkuttelevalta.

Uusikylä (1998, 190) kirjoittaa, että opettajan ammatti vaatii jatkuvaa päätöksentekoa, olkoonpa kyse opetuksen suunnittelusta, opettamisesta tai opetuksen arvioinnista. Opettajan ajattelun tutkimisesta on tullut viime vuosina yksi keskeinen kasvatustieteen tutkimusalue. Opettaja halutaan nähdä reflektiivisenä praktikkona, joka analysoi kriittisesti omaa toimintaansa. Uusikylän mukaan syvällisesti ajattelevan opettajan ihanne on peräisin jo Matti Koskenniemen ajoilta 1960- ja 1970-luvuilta. Koskenniemeläinen näkökulma opetukseen korostaa opetustapahtuman erityisluonnetta. Opetusta ei voi redusoida pelkäksi oppimiseksi, vaan opetusta tulee tarkastella sen omista lähtökohdista ja pedagogisin käsittein. Opetukseen vaikuttavat opettaja, oppilaat yksilöinä ja ryhminä, opetuksen tavoitteet, oppiaines ja yhteiskunnalliset kehysmuuttujat. (Uusikylä 1998, 191.)

Kasvattaminen ja opettaminen on Kaikkosen (1999) mukaan usein nähty hyvinkin erilaisina tapahtumina. Kasvattaminen on kohdistunut yksilön henkisen kasvun ja kehityksen tukemiseen ja ohjaamiseen. Opettamista on taas pidetty kasvavan kognitiivisten valmiuksien kehittämisenä ja ohjaamisena. Kasvatus ja opetus kietoutuvat kuitenkin niin monin tavoin toisiinsa, että niitä voidaan pitää perustellusti toisensa sisältävinä käsitteinä. (Kaikkonen 1999, 429.)

Törmä (2001) arvioi, että oppimisprosessi liittyy merkitysten rakentumiseen. Oppimisen ohjaamisessa korostuu se, miten oppijan ja ohjaajan merkitysmaailmat kohtaavat. Opettaja kokee usein, että hänen tarkoittamansa merkitys ei välity oppijalle, vaan oppija tulkitsee viestin eri tavoin. Tällainen merkitysten kohtaamattomuus on ongelma perinteisen opetuksen näkökulmasta, mutta ei oppimisen kannalta. Opettajalla on oikeus tehdä omia tulkintojaan ja jäsentää omaa ajatteluaan opetuksen avulla. (Törmä 2001, 6, 9.)

Pelkkä matemaattinen tieto ei muutu itsestään paremmaksi opetukseksi (Cooney 1999, 163). Tarvitaan myös reflektointia ja joustavuutta sekä omien matematiikkaan liittyvien uskomusten arviointia. Varsin sitkeässä ovat esimerkiksi sellaiset käsitykset laskutoimituksista, että kertominen suurentaa ja jakaminen pienentää (Huhtala 2000; Ahtee & Pehkonen 2000).

Kuparin (1999) tutkimuksissa opettajien matematiikkauskomusten ja heidän opetuskäytäntöjensä välillä havaittiin johdonmukaisuutta, mutta yleisempi havainto oli uskomusten ja opetuksen toteutustapojen välinen ”yhteensopimattomuus”. Vaikka opettajaryhmien uskomuksissa ilmeni eroja, opetustoimenpiteet olivat samanlaiset. Samoin havaittiin, että vaikka opettajaryhmän uskomuksissa painottui oppijakeskeisyys, opettajat suosivat perinteisiä ja suorituskeskeisiä työmuotoja. (Kupari 1999, 175.)

Esimerkiksi luokanopettajien varsin vahvat oppijakeskeisyys-uskomukset eivät useinkaan Kuparin mukaan kanna opetuksen käytäntöön saakka. Vaikka tavoitteena olisikin toiminta, jossa opiskeltavaa sisältöä lähestytään erilaisia materiaaleja ja toiminnallisuutta hyväksi käyttäen, toteutuva työskentely saattaa olla hyvin yksilökeskeistä. Se, missä määrin opettajat reflektoivat (Cooney 1999, 184) omaa toimintaansa, näyttäisi olevan yhteydessä uskomusten ja opetuskäytäntöjen väliseen johdonmukaisuuteen (Kupari 1999, 176; ks. myös Perkkilä 2002, 154). Aaltonen ja Pitkäniemi (2001, 415) toteavat, että matematiikan opetuksesta on saatu tutkimustuloksia, joiden mukaan oppiminen tapahtuu paremmin, jos se perustuu opettajan laadukkaaseen pedagogiseen sisältötietoon. Sen sijaan aloitteleva opettaja on saattanut omaksua opettajankoulutuksessa modernin oppimiskäsityksen mukaisia teorioita, jotka eivät kuitenkaan toteudu opetuksessa. Niemi (2004, 191) puolestaan tuli siihen tulokseen, että opettajien lisäkoulutus tai matematiikkaan erikoistuminen ei välttämättä parantanut matematiikan oppimistuloksia alemmilla luokilla. Matematiikan opetuksen uudet tavoitteet, kuten ongelmakeskeinen työskentelytapa ja oppilaiden kokemusmaailman hyödyntäminen opiskelussa, ovat Kuparin (1999) mukaan usein ristiriidassa opettajien ydinuskomusten kanssa. Sen takia LUMA-hankkeiden kaltaiset ohjelmat saattavat toteutua vain pintauskomusten tasolla. Opettaja ehkä kuvittelee muuttaneensa opetusmenetelmiään, vaikka todellisuudessa näin ei ole tapahtunut. (Kupari 1999, 178.)

Wilson (1971) toteaa, että opettajat usein määrittelevät opettamiseen liittyvät tavoitteensa kaikkien neljän kognitiivisen tason: laskemisen, ymmärtämisen, soveltamisen ja analysoinnin, pohjalta. He haluavat oppilaidensa kykenevän luovaan ongelmanratkaisuun. Mutta heidän opetuksensa, kokeensa ja arvostelunsa painottuvat alemmille tasoille, kuten laskemiseen ja ymmärtämiseen. (Wilson 1971, 650.)

Näyttää siltä, että jos on tavoitteena kehittää matematiikan opetusta kouluissa, on pakko ottaa huomioon opettajien ja oppilaiden uskomukset (Pehkonen 1995, 24). Tavallisesti törmätään kokeneiden opettajien jäykkiin asenteisiin ja heidän pysyviin opetustyyleihinsä, jotka toimivat muutosten hitausvoimina. Haapasalo (1998a, 77) toteaa, että opetuksen kehittäminen näyttääkin vastoin varsin yleistä luuloa vähiten riippuvan oppilaista. Kuparin (1999) mielestä ei pidä myöskään arvostella eikä syyttää opettajia ”vanhan opetustavan” suosimisesta. Sen sijaan on vakavasti pohdittava niitä keinoja, joilla voidaan auttaa ja tukea matematiikan opettajia heidän ammatillisessa kehittymisessään. (Kupari

1999, 179). Samaa asiaa Pehkonen (1995) perää kysymyksellään, kuinka autetaan opettajia kehittämään ja laajentamaan omaa pedagogista tietämystään.

4 LASKUOPISTA MATEMATIIKKAAN

Peruskoulua edeltäneen rinnakkaiskoulujärjestelmän matematiikan opetus oli selvästi kaksijakoista. Kansakoulussa opetettiin laskentoa ja mittausoppia (esim. Suhonen & Kalliola 1950) ja vasta oppikoulussa matematiikkaa. Oppikoulun matematiikka oli kahtena ensimmäisenä kouluvuotena aritmetiikkaa, joka kolmantena kouluvuotena vaihtui algebraan ja geometriaan (Kangasniemi 1989, 84).

Perinteisesti aritmetiikalla tarkoitetaan koulumatematiikassa numeroluvuilla tapahtuvia laskutoimituksia, joihin kuuluu myös potenssiin korottaminen ja juurtaminen (Thompson & Martinson 1994, 34). Algebrassa taas käsitellään ”yleisiä lukuja”, joita tavallisesti merkitään kirjaimilla. Radford (2000) tutki oppilaiden käyttämiä merkintätapoja ja niiden merkityksiä algebran oppimisessa. Oppilasryhmien keskustelujen perusteella hän luokitteli oppilaiden toiminnat kolmelle tasolle:

(a) *aritmeettinen tutkimus*
(b) *yleistys luonnollista kieltä käyttäen*
(c) *yleistys algebran symbolein* (Radford 2000, 241)

Radford toteaa, että algebran kaavat eivät synny geometristen kuvioiden havainnoinnista, eivätkä ne voi perustua ylhäältä annettuihin esimerkkeihin. Tässä mielessä siirtyminen ei-symbolisesta symbolisiin algebran ilmaisuihin merkitsee ratkaisevaa eroa kahdesta asiasta, yhtäältä kaavojen geometrisesta havainnoinnista, toisaalta niiden numeerisesta luonteesta.

4.1 Kansakoulusta oppikouluun

Kansakoulun laskuopissa pitäydyttiin numerolukujen operaatioihin, vaikka monien tehtävien ratkaiseminen vaati samantasoista ajattelua kuin nykyisin yläasteen matematiikka. Esimerkkinä mainittakoon päättelylaskut eli ”päätöslaskut” (Suhonen & Kalliola 1950, 233), jotka nykykielellä ilmaistuna liittyivät suoraan ja kääntäen verrannollisuuteen. Sanallisesti esitetystä tehtävästä laadittiin ensin ”asettamus”, josta pääteltiin tarpeelliset kerto- ja jakolaskut. Vaativampi versio oli kaksiehtoinen päättelylasku.

Esimerkki 4.1 *12 miestä valmistaa erään työn, tehden 8 t päivässä, 35 päivässä. Kuinka monta päivää 8 miestä viipyy samassa työssä, kun työaika on 10 t päivässä?*

Asettamus:	*12 miestä*	-	*8 t*	-	*35 pv*
	8 miestä	-	*10 t*	-	*x pv*

Erinäisten vaiheiden jälkeen päädyttiin laskulausekkeeseen

$$x = \frac{8 \cdot 12 \cdot 35}{10 \cdot 8} = 42\,pv$$

Ainakin periaatteessa oli kysymys jonkinlaisen yhtälöparin ratkaisemisesta. Tällaisia tehtäviä käsiteltiin kansakoulun kuudennella luokalla (Suhonen & Kalliola 1950, 244). Prosenttilasku aloitettiin luontevasti murtolukujen ja verrannollisuuden opiskelun jälkeen (ks. Sweeney & Quinn 2000). Samaa johdonmukaisuutta ei näytä esiintyvän peruskoulun matematiikan kirjoissa (esim. Alho, Koivu, Luoma & Rantanen 2003; Latva, Tolvanen, Tuomaala, Järvinen & Makkonen 2004).

Oppikoulun opetussuunnitelman mukaan algebran opiskelu aloitettiin 13–15 vuoden iässä, riippuen siitä, kuinka monta luokkaa kansakoulua kukin oli käynyt. Algebran ensi askelia oli muuttujien tai yleisten lukujen käyttöönotto. Välittömästi seurasi luonnollisten lukujen joukon laajentaminen negatiivisten lukujen alueelle (Kallio, Kannisto & Poukka 1966; Väisälä 1965). Oppikirjatekstien perusteella sama aritmetiikka-algebra-jako näyttää jatkuvan peruskoulussa sillä erotuksella, että algebran opiskelun aloittamisen ikähaitari on poistunut ja kaikki aloittavat algebran opiskelun noin 13 vuoden iässä (esim. Alho, Koivu, Luoma & Rantanen 2003; Erkinjuntti, Hihnala, Juntunen, Järvinen, Kytölä & Laine 1994–1996; Latva, Tolvanen, Tuomaala, Järvinen & Makkonen 2004; Paasonen, Voutilainen & Kalla 1989). Toisin sanoen rinnakkaiskoulujärjestelmään sisältynyttä kahden vuoden yksilöllistä joustomahdollisuutta algebran opiskelun aloittamiseen ei peruskoulussa toistaiseksi ole.

4.2 Jakaminen ja suhteellisuus

4.2.1 Jakolasku ja murtoluvut

Kerto- ja jakolasku näyttäisivät uusien perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2004 mukaan tulevan oppijan ohjelmaan toisella luokalla. Aluksi laskutoimituksia suoritetaan konkreetein apuvälinein. Erityisesti apuvälineiden ja konkreettien mallien käyttö korostuu ala-asteella suosituksi tulleessa ”unkarilaisessa matematiikassa”. Hannulan (2001) mukaan unkarilaisessa matematiikassa on oleellista matemaattinen tapahtuminen. Toiminnassa oppilaan ajattelu saa konkreetin muodon.

Vaikuttaa siltä, että opetussuunnitelmien laatijat ovat heränneet 50-vuotisesta unestaan, kun ”sisältöjako” ja ”ositusjako” on ainakin nimityksinä otettu taas perusopetukseen. Sisältöjako liittyy usein mittauksiin. Jakolasku 12 m : 2 m = 6 tarkoittaa, että kahden metrin mitta sisältyy kuusi kertaa mitattavaan 12 metrin matkaan. Sen sijaan jakolasku 12 m : 2 = 6 m tarkoittaa, että 12 metrin matka on jaettu kahteen yhtä suureen osaan, joiden kummankin pituus on kuusi metriä. Tähän jakolaskun dualismiin tutustutaan luokilla 3–5. Sisältöjaon kytkeminen sille kuuluvaan kontekstiin eli mittaamiseen näyttää opetussuunnitelmissa edelleenkin hataralta. Entä olisiko vielä aihetta palata ”unkarilaisiin” merkintöihin, joita Suomessakin noudatettiin ainakin 1950-luvulla? Nimittäin ositusjako merkittiin jakoviivalla ja sisältöjako kaksoispisteellä (Suhonen & Kalliola 1950, 46–47).

Sisältöjakokäsitettä on peruskoulun matematiikassa yritetty korvata suhde-käsitteellä (mm. Erkinjuntti, Hihnala, Juntunen, Järvinen, Kytölä & Laine 1994), mikä tuntuu vähän oudolta, ellei samalla tutkita myös verrannollisuutta. Uudemmissakaan yläasteen oppikirjoissa (Alho, Koivu, Luoma & Rantanen 2003; Latva, Tolvanen, Tuomaala, Järvinen & Makkonen 2004) ei sisältöjako näytä olevan erityisemmin esillä, vaikka se liittyy myös algebrallisiin jakolaskuihin. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 suhteen ja verrannollisuuden käsitteet on sijoitettu luokkien 6–9 opetusohjelmaan. Kuitenkin oppikirjatekstien perusteella murtolukuja lavennetaan ja supistetaan jo viidennellä luokalla.

Strang (1990) tutki murtolukujen hallintaa peruskoulun 3.–6. luokilla. Hän analysoi myös oppikirjojen murtolukuja koskevaa oppiainesta. Strangin mukaan murtolukukäsitteen ymmärtämisen perusedellytys on tasajaon käsitteen sisäistäminen. Murtolukujen symbolimuoto on lapselle erityisen vaikea siksi, että se on ristiriidassa hänen aikaisemmin oppimiensa kokonaislukuskeemojen kanssa. Yhdeksänvuotiaan on symbolitasolla vaikea ymmärtää, että 1/3 on pienempi kuin 1/2, vaikka 3 on suurempi kuin 2. (Strang 1990, 51–52.)

Strangin (1990) mukaan oppimateriaaleissa kiinnitetään varsin vähän huomiota murtolukujen ekvivalenssiluokkien muodostamiseen, lähinnä vain laventamisen ja supistamisen mekaanisen harjoittelun kautta. Murtolukukäsitteen vahvistamiseksi voitaisiin valottaa eri näkökulmia: osa-kokonainen, suhde, osamäärä, mitta. Peruskoulun ala-asteen matematiikan opetuksesta, ainakin murtolukujen alueelta, puuttuu systemaattinen käsitteen opettaminen ja matemaattisen ajattelun harjoittaminen. (Strang 1990, 52–53.)

"Osan ottaminen jostakin" on Haapasalon (1992) mukaan yksi mielenkiintoisimpia murtolukuun liittyviä skeemoja. Esimerkiksi prosenttilaskenta perustuu tietyn murto-osan ottamiseen jostakin kokonaisuudesta. Kun oppilas ymmärtää, että 1/2 > 1/3, hänen on vielä omaksuttava murtolukujen suhteellinen luonne. Esimerkiksi 1/3 koripallosta on enemmän kuin 1/2 tennispallosta. Tämän suhteellisuusperiaatteen omaksuminen sotkee aiemmin omaksuttuja skeemoja. Oppilaan ajattelua helpottaa, jos lähdetään liikkeelle tutusta käytännön tilanteesta. (Haapasalo 1992, 16.)

Murtolukujen laskutoimituksissa oppilaat saattavat turvautua muistisääntöihin, vaikka heillä olisi edellytykset päätyä ratkaisuun aikaisempien tietojensa pohjalta. Eräs tällainen toimenpide on sekalukujen kertolasku. Neljäs ja viidesluokkalaiset osasivat soveltaa osittelulakia sekalukujen kertolaskuun, vaikkei heille ollut vielä opetettu murtolukujen kertolaskua (Brinker 1998; Schoenfeld 1992). Lee (2000) tutki murtolukujen käsittelyä kuudennesta yhdeksänteen luokkien oppikirjoissa. Hän totesi, että tarjolla oli runsaasti numerolaskuja: murtolukuja, desimaalilukuja, potensseja ja sekalukuja, mutta hyvin vähän etumerkein varustettuja lukuja. Välttyminen vaikeilta laskutoimituksilta aiheuttaa sen, että nämä asiat näyttävät algebrassa uusilta. Merkkisäännöt täytyy opettaa, niitä ei voi keksiä. (Lee 2000, 174.)

4.2.2 Suhteellisuus matemaattisena ajatusmallina

Suhteen käsite on suomenkielen kannalta ongelmallinen. Suhde tarkoittaa laajasti ymmärrettynä relaatiota, esimerkiksi suuruusjärjestystä kahden luvun välillä. Suppeammassa mielessä suhde tarkoittaa kahden luvun tai suureen välistä osamäärää. Kahden suureen välistä relaatiota, jossa suureet riippuvat lineaarisesti toisistaan, kutsutaan suoraan verrannollisuudeksi. Usein puhutaan myös lyhyemmin verrannollisuudesta tai suhteellisuudesta.

Monet tutkijat korostavat suhteellisuuden merkitystä koulumatematiikan keskeisenä relaationa. Suhteellisuuden periaate opitaan jo alimmilla luokilla, mutta monet oppilaat eivät täysin hallitse sitä yläasteen päättyessäkään (Johnson & Lauten 2000, 102). Vaikka suhteellisuusajattelua pidetään yhtenä tärkeimmistä nuoruudessa hankituista formaalin ajattelun komponenteista, kyseinen taito kehittyy luultua hitaammin, eikä huomattava osa väestöstä saavuta sitä koskaan (Flores 1995, 425; Hoffer & Hoffer 1992, 303; Riddle & Rodzwell 2000, 202). Suhteellisuusajattelu on avainkäsite matematiikan ja luonnontieteiden opetuksessa aina ala-asteelta yliopistoon (de Bock, van Dooren, Jansson & Verschaffel 2002, 311).

Kouluopetuksessa verrannollisuuteen liittyvät taidot jäävät Langrallin ja Swaffordin (2000) mukaan usein vähemmälle huomiolle, kun symbolien ja kaavojen hallintaa pidetään tärkeämpänä. Puutteellinen verrannollisuuden hallinta aiheuttaa todennäköisesti ongelmia korkeamman tason matematiikassa, varsinkin algebrassa. (Langrall & Swafford 2000, 254.) Slovinin (2000, 58) mukaan suhteen ja verrannon opiskelu luo perustan ensimmäisen vuoden algebralle ja myöhemmälle matematiikan opiskelulle. Ristiin kertomisen osaaminen verrannossa ei takaa, että oppilas on ymmärtänyt suhteellisuuden merkityksen. Monissa oppikirjoissa kuitenkin käsitellään verrantojen ratkaisumenetelmiä enemmän kuin käsitteiden ymmärtämistä. Kerannon (1991, 40–41) mielestä suhteen ja suhteellisuuden (*ratio and proportion*) opettaminen tulisi aloittaa sellaisista arkielämän tilanteista ja ongelmista, jotka suoraan liittyvät ympäröivän maailman suhteellisuuteen. Asteittainen eteneminen tapahtuisi ajatusratkaisusta (*mental solution*) kirjoitettuun suhteen ja suhteellisuuden käyttöön.

Copeland (1984) arvioi murtoluvun käsitteen ja suhteellisuuden ymmärtämistä eri ikäkausina. Alkuvaiheessa lapset ymmärtävät murtoluvun siten, että kun lohkaistaan pieni pala, syntyy yksi osa – siis, kuinka monta jakoa, niin monta osaa. Kokonaisuuden säilyminen on oleellinen ehto operationaaliselle jakamiselle. Tämän seikan tajuaminen ei yleensä kehity ennen 6–7 ikävuotta. Suhteellisuuden idea: kaksi suhdetta ovat ekvivalentit, ymmärretään yleensä vasta 9–10-vuotiaana. Toisaalta intuitio nopeudesta, joka on matkan ja ajan suhde, saattaa olla jo 6-vuotiaalla. (Copeland 1984, 177–178.)

Streefland (1991) tutki oppimisprosessin sisäistä kehittymistä murtolukujen opiskelussa. Hän määritteli oppilaiden ratkaisuprosesseille viisi tasoa sen mukaan, miten he suhtautuivat kognitiiviseen konfliktiin. Alimmalla tasolla oppilaat eivät havainneet lainkaan saamiensa tulosten välistä ristiriitaa. Esimerkiksi murtolukujen yhteenlaskussa he saivat tuloksen $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, vaikka he toisaalta tiesivät, että $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Jotkut arvelivat, että tulosten erilaisuus johtui eri ratkaisumenetelmistä. Oppilas merkittiin ylimmälle eli viidennelle tasolle, jos hän ei ollut vuoden mittaisen seurannan aikana tehnyt yhtään edellä kuvatun kaltaista alkeellista virhettä. (Streefland 1991, 218–219.)

Langrall ja Swafford (2000) kartoittivat suhteellisuuteen liittyviä tehtävätyyppejä peruskoulun matematiikassa. He päätyivät neljään tehtävätyyppiin:

(a) *osa – osa – kokonaisuus, esim. pojat – tytöt – oppilaat*
(b) *joukot – määrät, esim. pallot – eurot, ihmiset – pizzat, leivokset – pakkaukset*
(c) *tunnetut suhteet, esim. nopeus tai yksikköhinta*
(d) *kasvaminen tai väheneminen: kahden jatkuvan määrän välinen suhde*

Haastateltuaan 5–8–luokkalaisia oppilaita he laativat neliportaisen asteikon suhteellisuuden tulkinnalle (*proportional reasoning*). *Nollatasolla* ei esiinny lainkaan suhteellisuusajattelua. Toimintaa tällä tasolla kuvaa pikemminkin lisäämiseen kuin kertolaskuun perustuva vertailu tai lukujen ja operaatioiden sattumanvarainen käyttö. *Ykköstasolla* oppilaat soveltavat epämuodollista (*informaalia*) suhteellisuutta. He pystyvät ilmaisemaan suhteen käsitettä esineiden, kuvien tai muiden mallien avulla. Langrallin ja Swaffordin mielestä on hyödyllistä kehittää oppilaiden strategioita tällaisten mallien avulla, ennen kuin heille aletaan opettaa verrantoja ja ristiin kertomisen sääntöä. *Kakkostasolla* oppilaat osaavat käsitellä määriä ilman konkreetteja apuvälineitä ja osaavat liittää malleihinsa numeerisia laskutoimituksia. *Kolmostasolla* oppilaat hallitsevat verrannollisuuden formaalin käsittelyn. He osaavat käyttää muuttujia ja ratkaista muuttujan arvon ristiin kertomalla tai ekvivalenttien murtolukujen avulla. Langrall ja Swafford tunnistivat eräitä seikkoja, joiden perusteella voi paremmin ymmärtää oppilaiden rajoittuneen kyvyn käyttää suhteellisuutta. Oppilaan täytyy tunnistaa, onko muutos absoluuttinen eli yhteenlaskuun perustuva vai suhteellinen eli kertolaskuun perustuva. Hänen on myös kyettävä selvittämään, voiko kyseisen tilanteen ratkaista suhteen avulla. Jos suureet muuttuvat samassa suhteessa, niiden välillä on muuttumaton eli invariantti suhde. Tarvitaan myös taito jakaa määrät sopivan suuruisiin, keskenään samankokoisiin osiin. (Langrall & Swafford 2000, 256–259.)

Verrannollisuuden soveltamisen kannalta on Hihnalan (2005) mukaan oleellista, että oppilaat harjaantuvat käsittelemään verrannollisuutta keskenään jaollisilla luvuilla ja suureilla, ennen kuin heille opetetaan formaaleja ratkaisumenetelmiä. Langrallin ja Swaffordin teorian kannalta on tällöin kysymys siitä, että toimitaan ensin kakkostasolla ja siirrytään vasta sen jälkeen kolmostasolle. Jos siirrytään liian nopeasti formaalien menetelmien, esimerkiksi verrannon ristiin kertomisen käyttöön, jää oppimisen ketjuun aukko kakkostasolle eli digitaalitasolle. Voi käydä niin, että kun kolmostason ratkaisuun ei löydy valmista mallia, aletaan kokeilla satunnaisesti eri laskutoimituksia, jolloin itse asiassa pudotaan Langrallin ja Swaffordin nollatasolle. Oppilaalta puuttuu kakkostason muodostama ”turvaverkko”, jolta hän voisi luontevasti ponnistaa kolmostasolle. (Hihnala 2005, 67–68.)

Suhteellisuus muodostaa tärkeän lähtökohdan prosenttilaskulle. Drier (2000) kokeili tutkivaa matematiikkaa kolmasluokkalaisten prosenttilaskun opetuksessa. Ensin etsittiin esimerkiksi murtolukua, joka vastaisi 20 prosenttia. Kun sellainen löytyi, mietittiin, miten saataisiin sen kanssa ekvivalentteja murtolukuja. Huomattiin, että kun murtoluvun 1/5 osoittajaan lisätään jokin luku ja nimittäjään sama luku viisinkertaisena, saadaan alkuperäisen kanssa ekvivalentti murtoluku (31/155, 32/160, 33/165,…). Ekvivalenteista murtoluvuista etsittiin lopuksi prosenttilaskuun sopiva edustaja. (Drier 2000, 361.)

Dole (2000, 382) puolestaan esittää neljän askelen prosessin prosenttilaskujen ratkaisemiseen kahdeksannella luokalla:

(a) *prosenttiasetelman elementtien tunnistaminen*
(b) *prosenttiasetelman esittäminen suhteena, visuaalisesti tai kaksoislukusuoralla*
(c) *siirtyminen visuaalisesta informaatiosta suhteen esittämiseen*
(d) *suhdeyhtälön ratkaiseminen: kolmen sääntö, ristiin kertominen*

Dole korostaa verrannollisuuden merkitystä prosenttilaskennan ajatusmallina. Hän toteaa myös, että verrannon ristiin kertominen voidaan opettaa oppilaan ymmärrykseen perustuen. Samalla prosenttilaskujen käsittely lisää oppilaiden ymmärrystä verrannollisuudesta. Dolen havaintojen mukaan prosenttilaskuista helpoimpia olivat ne, joissa piti ottaa luvusta tietty prosentti.

Langrall ja Swafford (2000) kritisoivat myös oppikirjojen tapaa esittää suhteellisuuteen liittyviä tehtäviä. Heidän tarkastelemissaan luokkatasojen 5–8 oppikirjoissa piti ratkaista verrannosta tuntematon, mutta kertaakaan ei pyydetty vertaamaan suhteita. Näytti siltä, että oppikirjoissa pyrittiin enemmän kehittämään proseduraalisia taitoja kuin käsitteiden ymmärtämistä. Ristiin kertomisen sääntö esitettiin ilman, että oppilaalle annettiin mahdollisuutta tutustua aiheeseen kuvien ja konkreettien mallien avulla. (Langrall & Swafford 2000, 260.)

5 ARITMETIIKASTA ALGEBRAAN

Pelkkä sana algebra herättää Moseksen (1997) mukaan monien aikuisten mielissä kauhukuvia omilta kouluajoilta. Yhtälöiden ratkaiseminen, tekijöihin jakaminen ja sanalliset tehtävät muistuttavat koetusta epäonnistumisesta. Kirjainlausekkeiden käsittely siihen liittyvine laskutoimituksineen on koettu sarjaksi temppuja ilman konkreettia tarkoitusta. Siirtymisen 2000-luvulle tulisi johtaa Moseksen mielestä algebran opiskelua symbolien manipuloinnista toisenlaiseen käsitykseen, jonka mukaan algebra on tapa ajatella ja menetelmä erilaisten relaatioiden ilmaisemiseen. (Moses 1997, 624.) Myös Haapasalo (2003, 17) katsoo, että matemaattisen työskentelyn pitäisi olla oppilaan kannalta tarkoituksenmukaista. Työskentelyssä korostuvat erityisesti kysymykset: mitä, miksi ja millä tavalla.

Algebran käsitteiden monenlaiset merkitykset tuottavat oppilaille vaikeuksia. Sfard ja Linchevski (1994, 191) ilmaisivat ongelman sanomalla, että algebran symbolit eivät puhu puolestaan. Esimerkiksi lauseke $3(x + 5) + 1$ voidaan lukea laskutoimituksena, tiettynä lukuna, funktiona, funktiojoukkona tai pelkkänä symboliketjuna, joka ei edusta mitään. Algebran symboleilla on eri merkitys kuin niillä on muissa konteksteissa (mm. Stacey & McGregor, 1997, 110).

Aritmetiikasta algebraan siirtyminen kuuluu yläasteen matematiikan opiskelun kriittisiin vaiheisiin (Stacey & McGregor 1997, 110). Kouluopetuksen perusongelmia on se, otetaanko formaaleja käsitteitä käyttöön liian aikaisin ja heikoin perusteluin. Kenties samat asiat voitaisiin ratkaista aritmetiikan menetelmin (Linchevski & Herscovics 1996, 39). Formaalit rakenteet voitaisiin opetella sitten, kun pelkkä aritmetiikka ei enää riitä. Oppilaan näkökulmasta vaikuttaa siltä, että hänelle tarjotaan algebrassa matematiikan apuvälineitä, joille ei ole mitään käyttöä (Friedlander & Hershkowitz 1997, 446).

Schoenfeld (1985) kuvaa tavallista opetusprosessin kulkua seuraavaan tapaan. Opetuksen lähtökohtana on (hiljainen) oletus, että oppilas on ”tabula rasa”. Opettaja näyttää, kuinka tietty proseduuri suoritetaan. Sitten oppilas harjoittelee proseduuria, kunnes hän hallitsee sen. Jos joku oppilas ei saa oikeaa vastausta, opettaja olettaa, että oppilas ei ole vielä oppinut asiaa. Hän esittää proseduurin vielä kertaalleen ja harjoittelua jatketaan. On voitu tutkimuksin osoittaa, että sellainen pedagogiikka ei ole kovin tuloksellista. Oppilaiden samana pysyvä virhe osoittaa, että he ovat omaksuneet jotakin, nimittäin virheellisen muodon halutusta proseduurista. Jos oppilas tekee proseduurissa jatkuvasti saman virheen, luullen tekevänsä oikein, oikean proseduurin esittämisestä uudelleen ei ole hyötyä. Oppilaan virheellisen ajattelun syy on selvitettävä: hänen ”tietovarastonsa on purettava”. Vasta sen jälkeen hänen on mahdollista suorittaa proseduuri oikein. (Schoenfeld 1985, 62–63.)

Schoenfeld (1985) esittelee Matzin (1982) kuvaamia selityksiä kehittyneemmässä algebrassa esiintyviin itsepintaisiin virheisiin. Eräs tällainen tulkinta liittyy neliöjuuriin

$$\sqrt{A^2 + B^2} \Rightarrow A + B$$

missä $\Rightarrow$ tarkoittaa, että ”on virheellisesti korvattu” lausekkeella. Matzin mukaan tämä tulkinta kuuluu ”ymmärrettäviin ekstrapolaatiovirheisiin”. Kysymys on muotoa $f(X * Y) \Rightarrow f(X) * f(Y)$ olevan yleisen lain epäonnistuneesta ekstrapolaatiosta. Virhe ei yleensä ole kuitenkaan ekstrapolaatiotekniikassa, vaan lain soveltamisessa tilanteeseen, jossa se ei toimi. Esimerkki 5.1 äsken mainitun lain oikeasta ja väärästä soveltamisesta valaisee asiaa.

Esimerkki 5.1

$$\frac{B + C}{A} = \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \qquad \text{oikea tulkinta}$$

$$\frac{A}{B + C} \Rightarrow \frac{A}{B} + \frac{A}{C} \qquad \text{väärä tulkinta.}$$ (Schoenfeld 1985, 63–64.)

Stylianou, Kenney, Silver ja Alacaci (2000) syventyivät oppilaiden ajatteluun tarkastelemalla selityksiä, joita nämä antoivat omille vastauksilleen. He toteavat, että katsomatta tarkkaan oppilaiden työskentelyä ja selityksiä tai puhumatta heille heidän ratkaisustrategioistaan on vaikea ymmärtää heidän ajatteluaan ja sen tuottamia ”monenkirjavia” vastauksia. Kun oppilaat joutuvat perustelemaan johtopäätöksiään, he huomaavat samalla dokumentoinnin ja kommunikoinnin tarpeen matematiikassa, mikä on luonnollinen tie ymmärtää todistamisen tarve. (Stylianou, Kenney, Silver & Alacaci 2000, 142.)

5.1 Negatiiviset luvut peruskoulun matematiikassa

Peruskoululainen on yläasteelle tullessaan jo tottunut siihen, että aika ajoin laajennetaan lukualuetta. Kymmeniä seuraavat sadat ja tuhannet, luonnollisia lukuja murtoluvut ja desimaaliluvut. Uusimpien opetussuunnitelman perusteiden (2004) mukaan negatiivisiin kokonaislukuihin tutustutaan jo luokilla 3–5. Negatiivisten lukujen laskutoimituksia opetellaan ylemmillä luokilla.

Negatiivisilla luvuilla laskeminen edellyttää uudenlaista laskutoimitusten tulkintaa. Esimerkiksi lukujen 3 ja 2 välinen vähennyslasku 3 – 2 voidaan muuttaa yhteenlaskuksi 3 + (-2) (Kallio, Kannisto & Poukka 1966, 23; Väisälä 1965, 12). Miinusmerkki esiintyy kahdessa merkityksessä: etumerkkinä ja laskutoimitusmerkkinä. Yhteen ja vähennyslaskua voidaan havainnollistaa myös lukusuoralla. Plus merkitsee siirtymistä oikealle ja miinus vasemmalle (Alho, Koivu, Luoma & Rantanen 2003, 35; Latva, Tolvanen, Tuomaala, Järvinen & Makkonen 2004, 23; Merenluoto 2001, 25). Luvun 2 vähentäminen voidaan myös tulkita operaattoriksi –2, jonka vaikutus kohdistetaan johonkin samassa lausekkeessa esiintyvään lukuun. Monissa oppikirjoissa esiintyy tällainen tulkinta, vaikka sitä ei ole tarkasti selitetty. Näyttää siltä, että hankala asia jätetään oppilaan mieleen kypsymään (esim. Alho ym. 2003; Erkinjuntti ym. 1994; Latva ym. 2004). Vaihdantalain soveltaminen muodossa $3 + 2 = 2 + 3$ tuntuu itsestään selvyydeltä, mutta identiteetin $3 - 2 = -2 + 3$ ymmärtäminen vaatii oppilaalta erilaista ajattelua kuin luonnollisten lukujen laskutoimitukset.

Kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslaskua on helppo havainnollistaa lukusuoralla, mutta kertolaskulle $(-2) \cdot (-3)$ on vaikea keksiä mitään konkreettia tulkintaa. Voidaan tietysti uskotella, että kun $(+2) \cdot (-3) = 2 \cdot (-3) = -3 - 3 = -6$, laskutoimitus $(-2) \cdot (-3)$ ei voi johtaa samaan tulokseen, koska siinä on yhdellä luvulla eri etumerkki, joten tuloksen täytyy olla +6. On havaintoja siitä, että juuri negatiivisten lukujen käyttöönotto muodostaa suurimpia ongelmia aritmetiikasta algebraan siirryttäessä (Gallardo 2002, 173). Vlassis (2002, 349) toteaa, että negatiiviset luvut aiheuttivat ongelmia yhtälöiden ratkaisemisessa. Negatiivisten lukujen esiintyminen yhtälöissä nosti niiden abstraktiotasoa ja edellytti oppilailta algebrallisia operaatioita.

5.2 Yhtäsuuruusmerkin tulkinta

Oppilaat tottuvat alaluokilla käyttämään yhtäsuuruusmerkkiä samaan tapaan kuin laskutoimitusmerkkejä. Yleensä yhtäsuuruusmerkin jälkeen kirjoitetaan laskutehtävän tulos. Tutkijat ovat nähneet ongelmia oppilaiden yhtäsuuruusmerkin tulkinnassa (Goodson-Espy 1998; Cooper ym. 1997; Falkner ym. 1999; Hihnala 2003).

Cooperin, Bolton-Lewisin, Atwehin, Pillayn ja Mutchin (1997) tutkimusten perusteella oppilailla oli kahdenlaisia käsityksiä yhtäsuuruusmerkin tarkoituksesta. Yhtäältä sitä pidettiin syntaktisena indikaattorina, joka edellyttää vastauksen kirjoittamista. Toisaalta se nähtiin operaattorin merkkinä, kehotuksena tehdä jotakin. Sen sijaan oppilaat eivät nähneet yhtäsuuruusmerkkiä kahden lausekkeen ekvivalenttisuuden ilmaisijana. Tämä rajoittunut käsitys yhtäsuuruudesta näytti jatkuvan ala-asteelta yläasteelle ja vielä myöhemmillekin kouluasteille. (Cooper ym. 1997, 89–90.)

Prosessi/objekti-dualismissa, esimerkiksi yhtälössä $3 + 4 = 7$ oppilas näkee Goodson-Espyn (1998, 222) mukaan vain laskutehtävän ja sen tuloksen 7, jolloin hän keskittyy yhteenlaskuprosessiin. Tämä tietää hänelle vaikeuksia esialgebrassa tyyppiä $3 + x$ olevien lausekkeiden kanssa. Peruskoulun alemmilla luokilla totutaan eräänlaiseen aritmeettiseen ajatteluun tai lähestymistapaan (*method of arithmetic proceeding*) (Hihnala 2003, 74). Oppilaat kirjoittavat laskulausekkeita seuraavaan tapaan: 7 – 5 = 2 + 6 = 8 : 4 = 2, jossa = merkki on signaali vastauksen etsimiseksi (Kieran 1992, 393). Menettelyssä ei oteta huomioon yhtäsuuruusmerkin symmetrisyyttä ja transitiivisuutta. Esimerkiksi laskimella laskiessa operoidaan vain yhteen suuntaan, joten merkinnän epäsymmetrisyys ei aiheuta ongelmia. Hihnalan (2003) mukaan menetelmä toimii myös yksinkertaisia yhtälöitä ratkaistessa. Mutta tähän tulkintaan takertuminen vaikeuttaa yhtälön rakenteen ymmärtämistä. Esimerkiksi yhtälöä 2x – 5 = 8 + x ratkaistessa saatetaan saada kaksi eri tulosta: x = 4, koska 2 · 4 = 8, toisaalta x = – 5 vastinpariajattelun nojalla. Syntynyttä ristiriitaa ei välttämättä havaita. (Hihnala 2003, 79.)

Falkner, Levi ja Carpenter (1999) toteavat, että opettajakaan ei ole aina perillä oppilaidensa tekemistä tulkinnoista. Kun kuudennen luokan opettajia pyydettiin selvittämään, miten heidän oppilaansa tulkitsevat yhtäsuuruusmerkin yhtälössä 8 + 4 = [ ] + 5, asia vaikutti opettajien mielestä itsestään selvältä. Oppilaiden tulkinnat eivät kuitenkaan vastanneet opettajien ennakkoodotuksia. Kaikki 145 oppilasta ilmoitti tuloksen 12 tai 17. Oppilaat suorittivat siis merkittyjä laskutoimituksia piittaamatta yhtäsuuruusmerkistä. Oikea tulos olisi tietenkin ollut 7.

Cooper ym. (1997) raportoivat siitä, miten seitsemäsluokkalaiset tulkitsivat yhtäsuuruusmerkin eri tilanteissa. Kun tehtävänä oli selittää yhtäsuuruusmerkin tarkoitus lausekkeessa 28 + 7 + 20 =, yhtä oppilasta lukuun ottamatta kaikki (N = 51) vastasivat, että kyseessä on vastauksen etsiminen laskutehtävään. Sen sijaan yhtälössä 28 : 7 + 20 = 60 – 36 puolet oppilaista ei osannut sanoa, mitä yhtäsuuruusmerkki tarkoitti. Algebran ymmärtämisen kannalta ovat tärkeitä myös keskeiset laskulait: vaihdantalaki, liitäntälaki ja osittelulaki sekä laskujärjestyssopimukset. Laskulakien ymmärtämiseen liittyi seuraava kysymys: ”Miten laskutehtävässä 6 · 13 voidaan käyttää hyväksi laskulauseketta 60 + 18?” Kolmasosalla oppilaista ei ollut mitään käsitystä asiasta. Oikean tulkinnan osittelulain mukaisesti osasi antaa 39 % vastaajista. Loput vastaajista selittivät, että luvun 6 perään pannaan 0 ja lukuun 13 lisätään luku 5. (Cooper ym. 1997, 89–90, 92–93.)

Laskulakien soveltaminen tulee algebrassa välttämättömäksi, kun muuttujia sisältäviä laskutoimituksia ei voida suorittaa ”normaalissa järjestyksessä”. Vaihdanta-, liitäntä- ja osittelulait pitäisi hallita numeroluvuilla, jotta niitä voisi soveltaa kirjainlukuihin. Schoenfeld (1992, 342) toteaa, että jotkut oppilaat käyttävät osittelulakia sekalukujen kertolaskussa. Kieranin (1992, 393) mukaan monien oppilaiden on vaikea ymmärtää, että lausekkeet 2(a + b) ja 2a + 2b tarkoittavat samaa. Ongelma näyttää kytkeytyvän siihen, että algebrallinen lauseke tulkitaan prosessiksi eikä matemaattiseksi objektiksi.

5.3 Muuttuja ja muuttujan lausekkeet

Kirjainluvuilla laskeminen ja kirjainlausekkeiden sieventäminen nähdään usein ensimmäisinä askelina siirryttäessä aritmetiikan proseduureista kohti algebran strukturaalista ajattelua. Matemaattisten objektien strukturaalista luonnetta on mahdollista kuvailla myös pelkillä numeroluvuilla (Osborne & Wilson 1995; Linchevski & Livneh 1999). Toisaalta numerolaskujen liika harjoitteleminen tässä tarkoituksessa voi johtaa oppilaiden stressaantumiseen.

Edwardsin (2000) mukaan algebran kaksi oleellista käsitettä ovat muuttuja ja funktio. Tarkoitus on, että jo 3.–5. luokilla kaikki oppisivat esittämään tuntemattomia määriä muuttujien avulla ja 6.–8. luokilla oppilaat ymmärtäisivät muuttujan käsitteenä. Kyky yleistää aritmeettisia ominaisuuksia on usein algebran oppimisen kynnyskysymys. (Edwards 2000, 28.)

Thornton (2001) toteaa, että muuttujia, lausekkeita ja yhtälöitä voidaan havainnollistaa muun muassa piirrosten ja konkreettien mallien avulla. Konkretisointiin liittyy kuitenkin myös ongelmia. Voidaan päätyä ”hedelmäsalaattialgebraan”, jossa a on appelsiini ja b on banaani. Tällainen lähestymistapa voi näyttää aluksi hedelmälliseltä, mutta johtaa myöhemmin väärinkäsityksiin, kun symboleita ei ymmärretä lukuina. (Thornton 2001, 391.) Eräs tapa lähestyä algebran käsitemaailmaa on esittää sama asia monessa eri muodossa: sanallisesti, symbolein, graafisesti ja taulukkona (mm. Haapasalo 2003, 3; Yerushalmy 2001, 143).

Monet tutkijat ovat selvittäneet oppilaiden käsityksiä muuttujista (Briscoe & Stout 2001; Cooper ym. 1997; Chalouh & Herscovics, 1988; Kieran 1992; Kücheman 1981; Schoenfeld 1985). Briscoe ja Stout (2001) antoivat opettajakokelaille (N = 106) tehtäväksi tutkia orsivaa´an tasapainoehtoa. Mittauksia tekemällä piti kehittää yhtälö, josta voitiin etukäteen laskea tietynkokoisen punnuksen paikka tasapainon vallitessa. Kolmannes opiskelijaryhmistä ei saanut parin päivän aikana tyydyttävää tulosta. Tutkijat luokittelivat opiskelijoiden työskentelyn kolmeen ryhmään:

(a) *kirjainta käytettiin muuttujana (ylin taso)*
(b) *kirjain esiintyi objektina: kullekin kirjaimelle hyväksyttiin vain ennalta määrätty arvo ja kaavat edustivat lähinnä aritmeettisia operaatioita*
(c) *yhtäsuuruusmerkkiä käytettiin väärin, myös tässä ryhmässä käytettiin kirjaimia objekteina, algebrallisia lausekkeita pidettiin lauseiden lyhenteinä, eikä myöskään huomattu yhtälön oikean ja vasemman puolen ekvivalenssia*

(Briscoe & Stout 2001, 237)

Cooper, Bolton-Lewis, Atweh, Pillay ja Mutch (1997) näkevät muuttujalla neljä eri merkitystä: aritmetiikan yleistys, ratkaisuprosessin tuntematon, määrien välinen suhde ja abstraktin järjestelmän osa. Jotkut tutkijat (esim. Chalouh & Herscovics, 1988) ovat esittäneet, että "tuntematon" ei ole sopiva tulkinta muuttujan käsitteelle, koska se ei edusta muuttujan kaikkia ulottuvuuksia. Heidän mielestään muuttujan merkitys on yleisemmällä tasolla. Kieran (1992) toteaa, että oppilaiden on vaikea erottaa, mihin eri tarkoituksiin kirjaimia käytetään algebrassa. Hän esittelee Küchemanin (1981) kehittämää asteikkoa kirjainlukujen tulkinnasta. Kücheman havaitsi opiskelijoiden kirjainlukujen tulkinnassa kuusi eri tasoa:

a) *kirjaimelle annettiin numeroarvo*
b) *kirjain hylättiin tarpeettomana*
c) *kirjainta pidettiin konkreettina objektina*
d) *kirjainta pidettiin tuntemattomana lukuna*
e) *kirjainta pidettiin yleisenä lukuna, joka saattoi saada eri arvoja*
f) *kirjainta pidettiin muuttujana* (Kieran 1992, 396).

Küchemanin havaintojen mukaan oppilaat operoivat yleensä kolmella ensimmäisellä tasolla. Enemmistö tutkituista 3000 brittiläisestä yläasteen oppilaasta (73 % 13-vuotiaista, 59 % 14-vuotiaista ja 53 % 15-vuotiaista) käsitteli kirjainlukuja konkreetteina objekteina tai hylkäsi ne.

Stacey ja MacGregor (1997) tutkivat Australiassa 11–15-vuotiaiden algebran opiskelua. Erityisesti heitä kiinnosti yleistetty aritmetiikka ja tuntemattomien esiintyminen sanallisissa tehtävissä. Seuraavassa on esimerkkitehtävä (esimerkki 5.2) ja oppilaiden esittämiä ratkaisuja tulkintoineen (taulukko 1).

Esimerkki 5.2 *David on 10 cm pitempi kuin Con. Conin pituus on h. Kuinka voit merkitä Davidin pituuden?*

TAULUKKO 1 Oppilaiden tulkintoja henkilön pituudesta

Oppilaan ratkaisu	**Tutkijan tulkinta**
Dh	Davidin pituus
C + 10 = D	C = Conin pituus, D = Davidin pituus
h = h + 10	h = pituuden symboli ja myös mainittu pituus
18	koska h on aakkosissa kahdeksas ja 8 + 10 = 18
R	kymmenes kirjain aakkosissa h:n jälkeen
160	Conin järkevä pituus on 150 ja siihen lisätään 10
11	jokainen kirjain tarkoittaa lukua 1, kunnes toisin päätetään, 10 + h = 10 + 1 = 11
h10 tai 10h	h10 tarkoittaa, että 10 enemmän kuin h
h + 10	oikea ratkaisu

Oikeaan ratkaisuun päätyi puolet ensimmäisen vuoden algebran opiskelijoista ja 75 % 3.–4. vuoden algebran opiskelijoista. (Stacey & MacGregor 1997, 112.) Esimerkistä 5.2 käy ilmi, että oppilaat saattavat keksiä muuttujalle arvon jopa aakkosjärjestyksen perusteella. Schoenfeldin (1985) mukaan oppilailla esiintyy virhetulkintoja, jotka perustuvat kielelliseen ilmaisuun merkityksen asemasta, kuten esimerkistä 5.3 havaitaan.

Esimerkki 5.3 *Oletetaan, että S tarkoittaa opiskelijoiden ja P professorien lukumäärää. Opiskelijoita on kuusi kertaa niin paljon kuin professoreita. Kirjoita yhtälö, joka kuvaa opiskelijoiden ja professorien lukumäärien välistä yhteyttä.*

Tehtävän ratkaisu on ilmeinen S = 6P. Yksinkertaistako? Ei. Ensimmäisen vuoden insinööriopiskelijoista 37 % ilmoitti yhtälön P = 6S. Opiskelijoilla, jotka eivät olleet erityisesti perehtyneet luonnontieteisiin, matematiikkaan ja teknologiaan, virheprosentti oli noin 50. Vastaavissa tehtävissä, joissa esiintyi sanallisesti ilmaistuja suhdelukuja, virheprosentti oli noin 65. Eräs vakuuttava selitys edellä mainitulle virhetulkinnalle P = 6S on ”suora käännös” sanallisesta ilmaisusta symbolikielelle:

$$\begin{array}{cccccc} & \text{kuusi} & \text{kertaa} & \text{opiskelijoita} & \text{kuin} & \text{professoreita} \\ \text{tulos} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 6 & \times & S & = & P \end{array}$$

Käännös on tapahtunut kielellisesti eli syntaktisesti ja merkitys eli semantiikka on unohdettu. Toisaalta tulkinta vaikuttaa samankaltaiselta kuin mittayksiköiden muunnoksessa: yksi jaardi vastaa kolmea jalkaa eli 1 jaardi = 3 jalkaa. (Schoenfeld 1985, 65.)

5.4 Yhtälöt peruskoulun matematiikassa

Yhtälöä voidaan pitää aritmetiikkaan, esialgebraan tai algebraan kuuluvana sen mukaan, millainen on yhtälön rakenne ja millaisia ratkaisutoimenpiteitä se vaatii. Yhtälöllä tarkoitetaan peruskoulussa yleensä ensimmäisen asteen yhtälöä eli lineaarista yhtälöä. Yhtälönimitys voidaan liittää jo pelkkiin numerolukuihinkin. Kolmen luvun välinen ”aritmeettinen identiteetti”, esimerkiksi 5 = 7 – 2 on eräänlainen yhtälö. Se voidaan ratkaista minkä tahansa noiden kolmen luvun suhteen.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 mainitaan yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaiseminen päättelemällä luokkien 3–5 tavoitteissa. Oppilaan hyvää osaamista viidennen luokan päättyessä kuvaa muun muassa se, että ”oppilas tietää laskutoimitusten väliset yhteydet”.

Oppikirjatekstien perusteella yhtälöiden ratkaisemista harjoitellaan yleensä ensin kokeilemalla tai käänteisten laskutoimitusten avulla (esim. Alho, Koivu, Luoma & Rantanen 2003, 193). Takaperin laskeminen käy helposti yhtälöissä, joissa tuntematon esiintyy vain yhdessä kohdassa. Mutkikkaampia yhtälöitä voidaan havainnollistaa muun muassa tasapainomallien avulla. Periaatteena on saman termin lisääminen tai vähentäminen puolittain. Yhtälö voidaan myös kertoa tai jakaa puolittain samalla luvulla (esim. Latva, Tolvanen, Tuomaala, Järvinen & Makkonen 2004, 126). Samaan tilanteeseen päästään siirtämällä termejä yhtälön puolelta toiselle merkkiä vaihtaen.

Oppilaat eivät aina huomaa lausekkeiden ja yhtälöiden välistä eroa. Kieranin (1992, 412) mukaan siinä vaiheessa, kun yhtälöiden ratkaisutekniikoita on jonkin verran harjoiteltu, tulkitaan lauseke usein yhtälöksi. Kun yhtäsuuruusmerkin molemmille puolille on saatu jotakin, pyritään tekemään puolittaisia operaatioita niin, että tehtävästä saadaan lopulta vastaukseksi numeroluku. Myös Edwards (2000) toteaa saman ongelman. Algebran opiskelun alkuvaiheessa käsitteet muuttuja ja yhtälön tuntematon menevät monilta oppilailta täysin sekaisin. Liian varhainen yhtälöiden ratkaisemiseen keskittyminen saattaa hämärtää muuttujan käsitettä. Havainto, että ensimmäisen asteen yhtälöllä on tasan yksi ratkaisu, poikkeaa täysin siitä tosiasiasta, että avoin lause toteutuu äärettömän monella muuttujan arvolla. Esimerkiksi, kun oppilaat ovat ratkaisseet yhtälön $3x - 2 = 10$ ja saaneet tuloksen $x = 4$, he tuskin ajattelevat, että x on jokin muuttuja. Tehtävä voitaisiin esittää toisella tavalla: ”Etsi sellainen luku x, että $3x - 2 = 10$” tai ”Millä x:n arvolla lauseke $3x - 2$ on yhtä suuri kuin 10 tai 13 tai 16?” Mainitunlaisella kysymysten asettelulla on mahdollista valottaa muuttujan x todellista luonnetta, vaikka kyseessä onkin yksinkertaisten yhtälöiden ratkaiseminen. (Edwards 2000, 29.)

Kieran (1992) viittaa yhtälön ratkaisutekniikoiden näennäiseen oppimiseen. Oppilaat, jotka osaavat siirrellä termejä yhtälön puolelta toiselle, eivät välttämättä ole tietoisia toimenpiteen strukturaalisesta merkityksestä. Useiden tutkimusten mukaan yläasteella vain 7–10 % oppilaista osoitti lausekkeiden ja yhtälöiden strukturaalista käsittämistä. (Kieran, 1992, 408.)

5.4.1 Lineaarisen yhtälön ratkaisumenetelmiä

Lineaarisella yhtälöllä tarkoitetaan tässä ensimmäisen asteen yhtälöä, jossa on yksi tuntematon, ja jonka kertoimet ovat rationaalilukuja. Tällaisen yhtälön graafinen ratkaisu määräytyy kahden suoran leikkauspisteen koordinaateista. Boulton-Lewisin, Cooperin, Atwehin, Pillayn, Wilssin ja Mutchin (1997) mukaan yhtälössä $2x + 3 = 11$ on ratkaisemisen kannalta kolme tärkeää komponenttia: yhtäsuuruusmerkki, useamman kuin yhden operaation jono ja muuttuja x. Yhtälön ratkaiseminen edellyttää binaarioperaatioiden 2x ja $y + 3$ (missä $y = 2x$) ymmärtämistä. Sen sijaan yhtälö $x + 5 = 6$ voidaan ratkaista aritmeettisesti muuttamatta mitenkään alkuperäistä yhtälöä. (Boulton-Lewis ym. 1997, 187.)

Yhtälön ratkaiseminen vaatii erilaisia tekniikoita sen mukaan, minkä tyyppinen yhtälö on kyseessä. Moniin tilanteisiin soveltuu ”vaakamenetelmä”. Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä tai niistä vähentää sama luku tai yhtälö voidaan kertoa tai jakaa puolittain samalla luvulla. Eräs toimenpide, jota useimmat oppilaat eivät näytä yhtälöiden ratkaisemisen alkuvaiheessa huomaavan, on saman termin eliminointi yhtälön molemmilta puolilta (Hihnala 2003, 80–81). Operaatio vaikuttaa varsin mekaaniselta, mutta sillä on syvällisempikin merkitys. Kun termejä vähennetään, yhtälö yksinkertaistuu. Jos erityisesti onnistutaan hävittämään tuntemattoman sisältäviä termejä, yhtälö saattaa muuttua algebrallisesta aritmeettiseksi. Joka tapauksessa yhtälön ratkaisun abstraktiotaso alenee, jolloin ratkaisu helpottuu. (Ks. myös Vlassis 2002, 352.)

Linchevski ja Herscovics (1996) esittävät edellä kuvattua monimutkaisemman version eliminointimenetelmästä yhtälön ratkaisemisessa. Ellei yhtälön molemmilla puolilla satu olemaan samaa termiä, voidaan jokin termi merkitä summana, jossa esiintyy eliminoitava termi. Tutkijat tekivät tämän kokeilun, ennen kuin oppilaille oli lainkaan opetettu algebraa.

Esimerkki 5.4

a) *Eliminoidaan identtiset numerotermit*

$$
\begin{aligned}
8n + 11 &= 5n + 50 \\
8n + 11 &= 5n + 11 + 39 \\
8n &= 5n + 39
\end{aligned}
$$

b) *Eliminoidaan tuntemattoman sisältävät termit*

$$
\begin{aligned}
8n &= 5n + 39 \\
5n + 3n &= 5n + 39 \\
3n &= 39 \\
n &= 13
\end{aligned}
$$

(Linchevski & Herscovics 1996, 55)

On helppo huomata, että jos yhtälössä esiintyy negatiivisia lukuja, tarvitaan algebrallisia operaatioita, ennen kuin puolittainen eliminointi onnistuu. Näin ollen tähän menetelmään liittyy samoja rajoituksia kuin vaakamenetelmän käyttöön.

Vlassis (2002) oli tietoinen niistä ristiriitaisista tuloksista, joita eri tutkijat (esim. Herscovics & Kieran 1980; Filloy & Rojano 1989; Linchevski & Herscovics 1996) olivat saaneet konkreettien mallien käytöstä lineaaristen yhtälöiden ratkaisemisessa. Oppilaiden työskentelyä tarkasteltaessa ja heidän selityksiään lukiessa oli paljastunut, että eniten vaikeuksia tuottivat sellaiset algebralliset yhtälöt, joissa esiintyi negatiivisia lukuja. Vlassis syventyi erityisesti vaakamenetelmän käyttöön tyyppiä Ax + B = Cx + D olevien yhtälöiden ratkaisemisessa. Opetuskokeilujen jälkeen Vlassisin tutkijaryhmä, johon kuului sekä vaakamallin kannattajia että vastustajia, oli yhtä mieltä siitä, että vaakamalli ei toiminut, kun yhtälössä oli negatiivisia lukuja. (Vlassis 2002, 341, 353.)

Kieranin (1992, 401) mukaan kokeilu yhtälöiden ratkaisumenetelmänä näytti muodostavan paremman intuitiivisen pohjan strukturaalisille ratkaisumenetelmille kuin oikealta vasemmalle purkaminen. Viime mainittu menetelmä onnistuu vain yhtälöissä, joissa tuntematon esiintyy kertaalleen. Linchevskin ja Herscovicsin (1996) tutkimustulosten perusteella lineaaristen yhtälöiden aritmeettinen ratkaiseminen on sopivampi keino aloittaa muuttujilla operointi kuin eteneminen muuttujista lausekkeisiin ja edelleen yhtälöihin.

Knuth (2000) havaitsi, että monilla oppilailla on rajoittunut käsitys yhtälöiden ja niiden kuvaajien välisestä yhteydestä. Enemmistö testiin osallistuneista (N = 284) ei tajunnut, että kuvaaja sisälsi informaatiota, joka voisi helpottaa ratkaisun löytämistä. Vaikka kysymyksillä pyrittiin rohkaisemaan oppilaita graafiseen lähestymistapaan, vastaukset osoittivat luottamusta algebrallisiin menetelmiin. Oppilaiden tason huomioon ottaen järjettömien vastausten lukumäärä oli hälyttävä. (Knuth 2000, 48–51.)

5.4.2 Lineaarisen yhtälön ratkaiseminen algebrallisen ajattelun kuvaajana

Lineaaristen yhtälöiden ratkaisemisen kannalta voidaan lähtökohtana pitää oletettua vaikeusastehierarkiaa. Aritmeettinen identiteetti on pelkkien numerolukujen välinen yhtälö ja se edustaa helpointa yhtälöiden lajia. Jos yhtälö sisältää muuttujan, mutta on rakenteeltaan yksinkertainen, se kuuluu esialgebraan. Vaikeinta lajia yhtälöiden hierarkiassa edustaa algebrallinen yhtälö, jota ei voi ratkaista aritmetiikan menetelmin. Seuraavassa tarkastellaan muutamien tutkijoiden näkemyksiä edellä kuvatun kaltaisesta hierarkiasta ja sen merkityksestä aritmetiikan ja algebran välistä rajaa etsittäessä.

Monet tutkijat (mm. Brown, Eade & Wilson 1999; English & Sharry 1996; Filloy & Rojano 1989; Goodson-Espy 1998; Kieran 1992) ovat hahmotelleet aritmetiikan ja algebran välistä eroa yhtälöiden ratkaisemisen näkökulmasta. Heidän mielestään tyyppiä $Ax + B = Cx + D$ oleva yhtälö on algebrallinen, koska siinä tuntematon esiintyy yhtälön molemmilla puolilla. Sen sijaan yhtälö $Ax + B = C$ on aritmeettinen, koska tuntematon on vain yhtälön toisella puolella, joten oppilaat pystyvät ratkaisemaan sen aritmetiikan keinoin (Filloy & Sutherland 1996, 145).

Kieran (1992) tarkentaa aritmetiikan ja algebran välistä rajaa käsitteiden proseduuri ja struktuuri avulla. Proseduraalinen liittyy aritmeettisiin operaatioihin, joita suoritetaan numeroluvuilla. Esimerkiksi algebrallisen lausekkeen $3x + y$ arvon laskeminen, kun $x = 4$ ja $y = 5$ tai yhtälön $2x + 5 = 11$ ratkaiseminen kokeilemalla ovat aritmeettisia operaatioita. Sen sijaan lausekkeen $3x + y + 8x$ sieventäminen tai yhtälön $5x + 5 = 2x - 4$ kanssa ekvivalentin yhtälön $5x - 2x + 5 = 2x - 2x - 4$ kirjoittaminen ovat strukturaalisia operaatioita, joiden sekä alussa että lopussa on algebrallinen lauseke tai yhtälö. (Kieran 1992, 392.)

Brown, Eade ja Wilson (1999) vertailevat Filloyn ja Rojanon (1989) teoriaa aritmetiikasta algebraan siirtymisestä Linchevskin ja Herscovicsin (1996) vastaavaan teoriaan. Filloy ja Rojano käyttävät ilmaisua didaktinen katkos (*didactic cut*) aritmetiikan ja algebran välillä. Heidän mielestään tällainen katkos ilmenee, kun oppilaiden aritmetiikan taidot eivät enää riitä lineaaristen yhtälöiden ratkaisemiseen. Erityisesti ongelmia alkaa ilmetä, kun yhtälössä esiintyy tuntematon molemmilla puolilla. Filloyn ja Rojanon esittämää rajaa aritmetiikan ja algebran välillä voidaan pitää matemaattisesti määriteltynä. Herscovics ja Linchevski (1994) puolestaan puhuvat kognitiivisesta kuilusta (*cognitive gap*). Kognitiivista kuilua luonnehtii oppilaiden kyvyttömyys operoida tuntemattomilla. Herscovics ja Linchevski korostavat, että ongelmana ovat oppilaiden käsitykset, jotka ovat aritmetiikassa eri kehitystasolla kuin algebrassa. (Brown, Eade & Wilson 1999, 57–58.)

Goodson-Espy (1998) selvitti haastattelemalla college-opiskelijoiden abstraktin ajattelun kehittymistä siirryttäessä aritmetiikasta algebraan. Goodson-Espy tarkasteli oppilaiden ongelmanratkaisuprosessia muun muassa Sfardin ja Linchevskin (1994) reifikaatioteorian kannalta. Mainitun teorian mukaan abstraktia ajattelua voi esiintyä kolmella tasolla: sisäistäminen, tiivistäminen ja konkretisointi. Goodson-Espy havaitsi, että operointi korkeammilla tasoilla mahdollisti käsitteiden tarkastelemisen sekä prosesseina että abstrakteina objekteina. Tämän kyvyn kehittyminen näytti olevan kriittinen kohta siirtymisessä aritmetiikasta algebrallisten metodien käyttöön. Oppilaat eivät esimerkiksi ymmärtäneet prosessia, joka tarvittiin ei-aritmeettisen yhtälön $3x + 8 = 7x + 4$

ratkaisemiseen, koska he eivät hyväksyneet alkuoletusta, että nämä kaksi lauseketta (määrää) ovat ekvivalentit. (Goodson-Espy 1998, 222–225.)

Vlassis (2002) päätyi yhtälöiden suhteen edellä esitettyä tarkempaan jaotteluun. Aritmeettinen yhtälö voi hänen mukaansa olla konkreetti tai abstrakti sen mukaan, esiintyykö siinä negatiivisia lukuja tai esiintyykö tuntematon useammassa kuin yhdessä termissä. Esimerkiksi yhtälöt $-x = 7$ ja $2x + 3x = 10$ ovat Vlassisin luokittelussa abstrakteja aritmeettisia yhtälöitä. Toisaalta yhtälön $Ax + B = Cx + D$ ratkaisu voi perustua tuttuun malliin tai luonnollisten lukujen laskutoimituksiin, jolloin se on tyypiltään esialgebran yhtälö. Varsinaisia algebrallisia yhtälöitä ei voida ratkaista minkään konkreetin mallin avulla. Niiden vaatimilla operaatioilla on merkitys vain algebran kontekstissa. (Vlassis 2002, 351–352.) Vlassisin luokittelu täsmentää aritmetiikan ja algebran välistä rajaa. Ratkaisevana erona on vaadittavien operaatioiden abstraktiotaso eikä niinkään yhtälöiden ulkonainen rakenne.

Kieran (1992) selvitti useiden aikaisempien tutkimusten pohjalta, miten matematiikan opettamisella voitaisiin luoda pohjaa algebran strukturaaliselle ymmärtämiselle. Hänen mielestään tulisi kuluttaa nykyistä enemmän aikaa proseduraalisten käsitysten kanssa. Oppikirjoihin tarvittaisiin lisää materiaalia, joka tähtää siirtymiseen proseduraalisista strukturaalisiin tarkasteluihin. Toisaalta rakennettaessa yhteyksiä aritmetiikasta algebraan olisi kaiken aikaa ylläpidettävä yhteyttä myös toiseen suuntaan. Tehtävästä ja tilanteesta riippuen olisi mahdollista valita joko proseduraalinen tai strukturaalinen näkökulma. Koska monet opettajat perustavat opetuksensa lähinnä oppikirjaan (ks. Perkkilä 2002; Niemi 2004; Törnroos 2005), tarvittaisiin tutkimustietoa siitä, miten opettajat tulkitsevat sisällön ja yrittävät siirtää sen oppilaiden tietovarastoon. (Kieran 1992, 413.)

5.5 Joustava siirtyminen aritmetiikasta algebraan

Aritmetiikasta algebraan siirtymisen ajankohta on aiheuttanut tutkijoiden ja pedagogien piirissä runsaasti pohdintaa. Onko parempi kerrata vuosi aritmetiikkaa ja aloittaa algebran kurssi kahdeksannella luokalla vai aientaa algebran opiskelun aloittamista? Silverin (1997) mukaan algebrassa saatetaan opettaa loputtomalta näyttävä lista proseduureja, joiden tarkoitusta oppilaat eivät ymmärrä. Hänen mielestään opettajien, opetussuunnitelmien tekijöiden, opetuksen tutkijoiden, hallintoihmisten ja lainlaatijoiden ei pidä etsiä yksinkertaista ratkaisua monimutkaiseen ongelmaan. (Silver 1997, 208.)

Suomessa ongelma on jätetty kuntakohtaisesti ratkaistavaksi. Opetussuunnitelman perusteissa 2004 algebran alueeseen kuuluva oppiaines on sijoitettu pääosin luokkien 6-9 opetusohjelmaan. Oppiaineksen järjestämiselle luokkatasojen sisällä (6.-9.lk.) ei ole asetettu selviä kriteerejä.

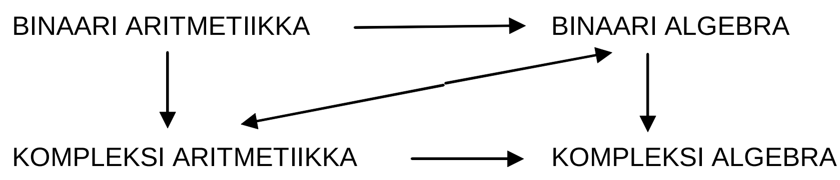
Australialaiset English ja Sharry (1997) tutkivat 5-luokkalaisten ja 12-luokkalaisten algebrallista ajattelua esittämällä heille yhtälöitä, jotka piti luokitella siten, että keskenään samankaltaiset sijoitettiin samaan ryhmään. Tutkijat tulivat Sfardin ja Linchevskin (1994) kanssa samaan tulokseen siitä, että oppilaat tarvitsevat ensin algebran prosesseihin suuntautuvia kokemuksia, jotka sitten johtavat tarkoituksenmukaisten algebrallisten abstraktioiden hankintaan. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että oppilaille ensin esitetään ”valmiiksi koottuja tietopaketteja”, jolloin heillä ei ole mahdollisuutta havaita algebrallisiin abstraktioihin liittyvien lausekkeiden luonnetta. (English & Sharry 1997, 155; ks. myös Keranto 1998, 32.)

Lambdin, Lynch ja McDaniel (2000) tutkivat kuudesluokkalaisten algebran taitoja, erityisesti graafisen esityksen soveltumista muutoksen kuvaamiseen. Muutos on heidän mielestään äärimmäisen tärkeä käsite matematiikassa. Perustasolla muutosta etsitään, kun lukujoukosta pyritään löytämään jokin säännönmukaisuus (vrt. Bay-Williamsin 2001 tiilikivimallit). Syvällisemmässä mielessä muutokset ovat funktioiden ja niihin liittyvän laskennan peruselementtejä. Keskiluokilla (3–5) oppilailla tulisi olla säännöllisesti tilaisuuksia käyttää sanallista ilmaisua, taulukoita, graafeja ja yhtälöitä sellaisten käytännön ongelmien ratkaisemiseen, joissa on kysymys erilaisista muutoksista. (Lambdin, Lynch & McDaniel 2000, 196.)

Yackel (1997) arvioi, että mallintamalla, säännönmukaisuuksia keksimällä ja rakenteita tutkimalla oppilaat (noin 12-vuotiaat) omaksuvat erilaisia ajattelutapoja, jotka helpottavat algebran ymmärtämistä. Monet tutkijat (mm. Feigenbaum 2000; Witzel, Smith ja Brownell 2001) ovat selvittäneet, kuinka voidaan auttaa algebran oppimisvaikeuksissa olevia oppilaita. Samalla on saatu tietoa siitä, millaisten ymmärrysten kautta algebran oppiminen yleensä tapahtuu.

Linchevski ja Herscovics (1996) kokeilivat seitsemännen luokan oppilailla uutta menetelmää aritmetiikan ja algebran välisen kognitiivisen kuilun ylittämiseksi. He yrittivät välttää lausekkeisiin ja yhtälöihin liittyviä ongelmia palaamalla muutaman askelen taaksepäin. He kartoittivat oppilaiden hallitsemien esialgebran tietojen ylärajan, ennen kuin aloittivat algebran opetuksen. Oppilaat saivat työskennellä omien intuitioidensa varassa niin kauan, kuin he itse siihen tyytyivät. Vasta sitten, kun he tiedustelivat, eikö olisi mitään helpompaa ratkaisukeinoa, heille alettiin opettaa strukturoidumpia menetelmiä. (Linchevski & Herscovics 1996, 40.)

Australialaiset tutkijat Cooper, Bolton-Lewis, Atweh, Pillay ja Mutch (1997) selvittivät kaksitiemallin käyttöä aritmetiikasta algebraan siirtymisessä (kuvio 3). Binaari aritmetiikka viittaa kahden numeroluvun välisiin operaatioihin ja binaari algebra muuttujan ja numeroluvun välisiin operaatioihin. Usein puhutaan esialgebrasta, jonka osana myös binaarialgebra voidaan nähdä.



KUVIO 3 Cooperin ym. (1997, 91) kaksitiemalli aritmetiikasta algebraan siirtymisessä.

Cooperin ym. (1997) mukaan siirtymistä aritmetiikasta algebraan voidaan valmistella binaarialgebran tai kompleksin aritmetiikan avulla. Algebraan siirtymisen kannalta he pitivät oppilaiden taitoja binaariaritmetiikassa tyydyttävinä. Kuitenkin jakolaskussa ja yhtäsuuruuden ymmärtämisessä oli ongelmia. Binaarialgebrassa suurin ongelma oli tuntemattoman monikertojen (esim. 3x) ymmärtämisessä. Kompleksissa aritmetiikassa tarvittaisiin parannusta laskujärjestyksen tulkintaan ja yhtäsuuruuden ekvivalenssimerkityksen ymmärtämiseen (vrt. Hihnala 2003, 74). Samankaltaisia ongelmia ekvivalenssikäsitteen ymmärtämisessä on havaittu suomalaisissa murtolukututkimuksissa (mm. Keranto 1986, Strang 1990).

Kaksitiemalli näytti tutkijoiden (Boulton-Lewis, Cooper, Atweh, Pillay, Wilss & Mutch 1997, 187–189) mukaan toimivan kumpaakin reittiä, tosin ongelmia ilmeni molemmissa lähestymistavoissa. Tulokset viittasivat siihen, että algebran oppimista voidaan helpottaa, kun vastaavia (isomorfisia) struktuureja harjoitellaan kompleksissa aritmetiikassa. Esimerkiksi helppojen lineaaristen yhtälöiden ratkaiseminen aritmeettisesti näytti helpottavan siirtymistä algebraan. Useat tutkijat esittävät samansuuntaisia kommentteja. Algebran ajatteleminen aritmetiikan yleistyksenä näytti motivoivan opiskelijoita (Slavit 2001, 378). Kun tajuttiin, että algebra ratkaisee yksittäisen ongelman asemasta kokonaisia ongelmaluokkia, ymmärrettiin algebran opiskelun mielekkyys (McConnell &Battacharya 1999, 492). Day ja Jones (1997) tutkivat, miten sanallisia tehtäviä ratkaisemalla voidaan rakentaa siltoja algebralliseen ajatteluun. He arvioivat, että siinä vaiheessa kun oppilaat alkavat esittää sanallisen tehtävän ratkaisuprosessia muuttujien avulla, heidän algebrallinen ajattelunsa on alkanut.

Fernandez ja Anhalt (2001, 236) esittävät, että ”askarointi” fysikaalisten mallien, taulukoiden, graafien ja symbolien kanssa luo valmiuksia oppilaan siirtymiselle algebraan. Friedland (1998, 382–383) käytti menestyksellä taulukkolaskentaohjelmaa laskukaavojen keksimiseen seitsemännellä luokalla ilman, että varsinaista muuttuja-nimitystä otettiin esille.

Pugalee (2001a) havaitsi, että kirjoittamisella on tärkeä merkitys oppimisessa ja opettamisessa. Kun oppilaat kirjoittivat omasta ongelmanratkaisustaan, voitiin arvioida heidän toimintansa metakognitiivisia piirteitä: orientoitumista ja organisointia. Pugalee (2001b) toteaa edelleen, että varsinkin alempien luokkien opettajat eivät vaadi oppilaitaan perustelemaan ratkaisujaan. Erityisesti heikommilla oppilailla tekniikka, kuten graafiset laskimet, näyttivät helpottavan käsitteiden ymmärtämistä. Dickensheets (2001, 40) toteaa, että teknologia on matematiikan opetukselle hyvä apuväline. Opettajat ovat kuitenkin epäluuloisia kaikkien uudistusten suhteen. Ensin pitäisi todistaa, että opetusohjelma toimii ja että sen hyväksyvät myös muut opettajat sekä oppilaat. Lisäksi oppilaiden pitäisi pystyä soveltamaan oppimiaan käsitteitä myös ilman tietokonetta eli soveltamaan uutta tietoa vanhaan oppimisympäristöön.

Kieran (1992, 402) viittaa Filloyn ja Rojanon (1985) tutkimuksiin yhtälöiden ratkaisumallien käytöstä. Heidän mukaansa konkreetit tasapaino- ja pinta-alamallit eivät oleellisesti parantaneet oppilaiden kykyä operoida symbolitasolla yhtälöiden ratkaisemisessa (ks. myös Vlassis 2002, 353; Lubinski & Otto 1997, 295). Jotkut oppilaat pitäytyivät konkreetissa mallissa, vaikkei se enää toiminut. Sierpinska (1993, 48–49) viittaa tapaukseen, jossa sanallinen tehtävä sujui luokalta vaivattomasti symbolimuodossa. Mutta kun se esitettiin konkreettien mallien avulla, neljännes luokasta sai väärän tuloksen. Kukaan ei onnistunut ratkaisemaan tehtävää konkreettia apuvälinettä käyttäen.

Leitze ja Kitt (2000) uskovat, että algebran ymmärtäminen on mahdollista kaikille oppilaille. Valitettavasti monet oppilaat yrittävät opetella algebraa ulkomuistin varassa ja monet opettajat tukevat opetuksellaan tätä pyrkimystä. Leitze ja Kitt kokeilivat muun muassa paperista tehtyjä nelikulmioita negatiivisten lukujen ja yhtälöiden opettamisessa.

5.6 Ongelmia peruskoululaisten algebrallisessa ajattelussa

Stacey ja MacGregor (1997) havaitsivat oppilaiden algebrallisessa ajattelussa monia vaikeuksia. Oppilaiden tulkinnat algebran symboleista perustuivat muualta saatuihin kokemuksiin, joista ei ollut tässä yhteydessä hyötyä. Kirjainten käyttö algebrassa ei ollut samaa kuin muissa konteksteissa. Algebran kielioppisäännöt eivät olleet samoja kuin tavalliset kielioppisäännöt. Algebra ei voinut sanoa monia niistä asioista, joita oppilaat halusivat sen sanovan.

Sfard (1997) seurasi oppilaiden toimenpiteitä muuttujan lausekkeiden sieventämisessä. Monet osasivat kirjoittaa lausekkeen 2x + 3x muotoon 5x ilman opastusta. Uusi symboli x ei kuitenkaan näyttänyt edustavan lukua, vaan pikemminkin esineen tai tuotteen nimeä. Tulkinta varmistui, kun oppilaat muuttivat lausekkeen 2x + 3 muotoon 5x. Selitys oli se, että kun kahteen pannaan kolme lisää, saadaan 5. Virheellinen tulkinta saatiin häviämään, kun lausekkeeseen lisättiin kertomerkki (2 · x + 3). Sfard toteaa, että kertomerkki suuntasi oppilaiden ajattelun arkielämän malleista matematiikan käsitteisiin. Muuttujien käsittelyssä korostuivat kontekstin merkitys ja kielellisen ilmaisun tehokkuus.

Vlassisin (2002) tutkimuksessa kaksi kahdeksatta luokkaa (N = 40) osallistui opetuskokeiluun. Ensi vaiheessa oppilaille annettiin sanallisia tehtäviä, joiden ratkaisemiseksi heillä ei ollut muuta keinoa kuin kokeilu. Tavoitteena oli saada oppilaat huomaamaan aritmeettisten menetelmien rajoitukset. Tarkoitus oli myös tuoda esiin yhtäsuuruusmerkin käyttöä ekvivalenttisuuden symbolina aikaisemman ”tee jotakin” tulkinnan asemesta. Toisessa vaiheessa tehtäviä esitettiin piirretyn vaakamallin avulla. Molemmissa vaakakupeissa oli tuntemattomia ja tunnettuja ”punnuksia”. Osa tehtävistä annettiin yhtälön muodossa, mutta siten, että niiden ratkaisemisessa tarvittiin vain luonnollisten lukujen laskutoimituksia. Kolmannessa eli formaalissa vaiheessa oppilaiden oli ratkaistava ei-aritmeettisia yhtälöitä, jotka eivät perustuneet konkreettiin malliin, ja joissa oli myös negatiivisia lukuja. Ensimmäinen ja toinen vaihe Vlassisin kokeilussa sujuivat luontevasti. Oppilaiden oli helppo ymmärtää tekemänsä virheet ja omaksua uudet käsitteet. Sen sijaan kolmas vaihe ei sujunut ongelmitta. Kaikki alkoivat kylläkin soveltaa vaakaperiaatetta eli eliminoida samoja termejä yhtälön molemmilta puolilta, mutta monilla esiintyi seuraavanlaisia virheitä:

a) *Yhtälöstä $3x + 4 = 19$ saatiin jakamalla puolittain x:n kertoimella yhtälö $x + 4 = 6{,}333$ eli vakiotermi 4 jäi jakamatta*

b) *Lisäämällä yhtälön $4x + 4 + x = 5$ molemmille puolille termi -4 saatiin yhtälö $x + x = 5 - 4$, jolloin paitsi vakiotermi 4 myös x:n kerroin 4 on eliminoitu*

c) *Negatiiviset luvut aiheuttivat mm. seuraavanlaisen virheen:*

$$2 - 3x + 6 = 2x + 18$$
$$-2x \qquad\qquad -2x \quad \text{vähennetään puolittain } 2x$$
$$2 - 1x + 6 = 18$$

Termissä -3x etumerkki tulkittiin vähennysmerkiksi eikä luvun 3 etumerkiksi.

Vlassis esitti kaksi mahdollista selitystä oppilaiden virheille. Ensimmäinen näytti olevan vaakamallin virheellinen soveltaminen ja toinen liittyi miinusetumerkin tulkintaan irralliseksi vähennyslaskun merkiksi. Erityisen vaikeaksi osoittautui muuttujan ”irroittaminen” sen edessä olevasta negatiivisesta kertoimesta. Vlassis viittaa Filloyn ja Rojanon (1989) tulkintaan, jonka mukaan näissä virheissä on kysymys juuttumisesta konkreettiin malliin ja kyvyttömyys yleistää hankkimaansa tietoa. (Vlassis 2002, 344–345.)

Kahdeksan kuukautta opetuskokeilun jälkeen Vlassisin (2002) tutkimuksessa haastateltiin viittä kokeiluun osallistunutta oppilasta. Havaittiin, että negatiiviset luvut muodostivat ongelman riippumatta siitä, esiintyikö tuntematon molemmilla puolilla yhtälöä. Kukaan haastatelluista ei kyennyt eliminoimaan yhtälön molemmilta puolilta negatiivista termiä. Koska oppilaat eivät kyenneet konkretisoimaan negatiivisia lukuja, heillä oli ongelmia myös aritmeettisissa yhtälöissä. Sekä opetuskokeilu että haastattelut tukivat Filloyn ja Rojanon (1989) esittämää käsitystä ”didaktisesta katkoksesta”. Tämä katkos erottaa yhtälöt, joissa tuntematon esiintyy vain toisella puolen, niistä yhtälöistä, joissa tuntematon esiintyy molemmilla puolilla. Vlassis tuli kuitenkin siihen tulokseen, että vaikka aritmeettiset yhtälöt olivatkin helpompia kuin ei-aritmeettiset, helppous tai vaikeus ei johtunut yhtälöiden rakenteesta vaan niiden abstraktisuuden asteesta. (Vlassis 2002, 352.)

Oppilaat saattavat mieltää algebrallisen lausekkeen merkinnäksi, jossa kirjaimilla ei ole lukujen luonnetta. He saattavat laskea esimerkiksi, että $3x - x = 3$, jolloin matemaattiselta kannalta vähentämisen sijasta on suoritettu jakolasku (Edwards 2000, 28). Jotkut käsittelevät lausekkeita kuten yhtälöitä, koska tehtävästä täytyy saada lopputulos (Kieran 1992, 412). Yhtälöstä saattaa myös tulla kaksi eri ratkaisua. Tämä voi Hihnalan (2003, 77) mukaan johtua siitä, että yhtälössä oikean puolen ensimmäinen luku nähdään vasemman puolen laskun tuloksena (ks. myös Falkner, Levi & Carpenter 1999, 233). Jos yhtälön molemmilla puolilla esiintyy kaksi termiä (esimerkki 5.5), saatetaan ajatella, että ne vastaavat pareittain toisiaan, jolloin myös päädytään kahteen ratkaisuun.

Esimerkki 5.5 *Yhtälön $4x - 7 = 8 - x$ ratkaiseminen vastinparien avulla*

$4x - 7 = 8 - x$

$4x = 8$ *ja* $-7 = -x$ *joten*

$x = 2$ *ja* $x = 7$

Oppilas näyttää ajatelleen, että molempien puolien ensimmäiset termit vastaisivat toisiaan ja toiset termit toisiaan. Siten hän on päätellyt, että $4x = 8$ ja $-7 = -x$, jolloin hän on saanut tulokset $x = 2$ ja $x = 7$.

5.7 Aritmetiikan ja algebran osaaminen tutkimustulosten valossa

5.7.1 Kansainvälisiä tuloksia

Suomi osallistui ensimmäiseen kansainväliseen matematiikan koulusaavutustutkimukseen (IEA/SIMS), jonka aineisto kerättiin keväällä 1964. Tutkimuksen toinen vaihe toteutettiin Suomessa 1981 (Kangasniemi 1989). Myöhempiä tutkimuksia ovat muun muassa KASSEL-projekti (Soro & Pehkonen 1998), TIMSS 1999 ja PISA.

Kangasniemi (1989) arvioi matematiikan asemaa ja opetuksen kehystekijöitä sekä analysoi matematiikan opetussuunnitelmaa ajanjaksona (IEA/SIMS-tutkimusten kannalta), jonka kuluessa Suomi siirtyi rinnakkaiskoulujärjestelmästä yhtenäiseen peruskouluun. Tuloksia verratessa on otettava huomioon, että vuonna 1964 osa oppilaista kävi kansakoulua ja osa oppikoulua, joilla oli varsin erilaiset opetussuunnitelmat. Samoin vuonna 1981 peruskoulussa oli käytössä tasokurssijärjestelmä, joten silloinkaan kaikille oppilaille ei ollut opetettu samoja asioita. Niinpä koetehtävät kattoivat opetusohjelmasta tyypillisesti noin 60–64 %, kun esimerkiksi TIMSS-tutkimuksessa (1999) kattavuus oli keskimäärin yli 80 % (Kupari, Reinikainen, Nevanpää & Törnroos 2001, 27).

Kolmannessa kansainvälisessä matematiikka- ja luonnontiedetutkimuksessa (TIMSS 1999) todettiin suomalaisten seitsemäsluokkalaisten matematiikan osaamisen olevan varsin hyvätasoista. Maamme tulokset olivat selvästi kansainvälistä keskitasoa parempia, vain kuusi maata oli Suomea tilastollisesti merkitsevästi parempia. Suomalaisoppilaista matematiikan huippuosaajia oli vähän, mutta toisaalta myös heikkojen oppilaiden määrä oli pieni. Suomessa parhaiten osattuja sisältöalueita olivat luvut ja laskutoimitukset sekä tilastot ja todennäköisyys (Kupari ym. 2001, 37).

TIMSS 1999 -tutkimuksessa määriteltiin Kuparin, Reinikaisen, Nevanpään ja Törnroosin (2001) mukaan kolme matematiikan ja luonnontieteiden opetussuunnitelmia jäsentävää tekijää: sisältöalueet, suoritusodotukset ja näkökulmat. Matematiikan sisältöalueet olivat luvut ja laskutoimitukset, mittaaminen, geometria, algebra sekä tilastot ja todennäköisyys. Matematiikassa suoritusodotusten pääluokat olivat tietäminen, perusmenetelmien käyttö, tutkiminen ja ongelmanratkaisu, matemaattinen päättely ja viestintä. (Kupari ym. 2001, 23.)

Oppilaat jaettiin matematiikan osaamisen perusteella viiteen suoritustasoon (Kupari ym. 2001). Taso 5 kuvasi parasta ja taso 1 heikointa matematiikan osaamista. Tasolle 5 sijoitettiin 10 % parhaiten suoriutuneista oppilaista. Tasot 4, 3 ja 2 tarkoittivat vastaavasti pistemäärää, jonka saavutti 25 %, 50 % ja 75 % osallistuneista. Tasolle 5 sijoittui Suomen oppilaista 6 %, kun parhaiten menestyneen Singaporen oppilaista sijoittui tälle tasolle 46 %. Tason 5 saavuttaneiden oppilaiden taitoja luonnehdittiin seuraavasti: ”Tämän tason oppilaat osasivat jäsentää matemaattista tietoa, tehdä yleistyksiä ja selittää ratkaisutapojaan totutusta poikkeavissakin ongelmanratkaisutilanteissa.” (Kupari ym. 2001, 40.)

TIMSS-tutkimuksessa arvioitiin algebran sisältöalueen osaamista 33 tehtävällä. Nämä tehtävät jaettiin vielä kuuteen alaluokkaan: verrantoyhtälöt, lausekkeet, tilanteiden esittäminen ja kaavat, yhtälönratkaisu, epäyhtälöt sekä lukujonot ja säännöt (Törnroos 2005, 148.) Asiantuntijat katsoivat, että muun muassa suhde ja verranto eivät olleet yhteensopivia Suomen seitsemännen luokan opetussuunnitelmien kanssa.

Algebra oli ainoa sisältöalue, jossa Suomen suoritustaso jäi selvästi OECD-maiden keskitason alapuolelle. Haapasalon (2003, 17) mielestä tämä on yllättävää, koska kouluopetuksessa on erityisesti painotettu lukujen ja symbolien käyttöön liittyvää harjoittelua (ks. myös Törnroos 2003, 72). Törnroos (2005, 149) toteaa edelleen Suomen seitsemäsluokkalaisten algebran osaamista kuvatessaan, että erityisesti algebran merkintätapojen heikko osaaminen tuli esiin lausekkeiden ymmärtämistä mittaavissa tehtävissä.

Törnroos (2005, 223) uskoo TIMSS-tutkimuksen tuloksia arvioidessaan, että Suomen 13-vuotiaat ovat yhtä kehittyneitä kuin samanikäiset muissa maissa ja pystyvät siten ”ymmärtämään x:n ja y:n”. Hän on myös huolestunut siitä, että uusissa opetussuunnitelman perusteissa (2004) formaali algebra näyttää tyystin häviävän viidenneltä luokalta ja siirtyvä kuudennesta yhdeksänteen luokille. Soro ja Pehkonen (1998) puolestaan esittävät KASSEL-projektin raportoinnissaan, että formaalia algebraa ei tarvitsisi lainkaan opettaa kaikille peruskoululaisille.

PISA-tutkimuksen ensimmäinen kierros toteutettiin vuonna 2000, jolloin kohteena olivat lukutaito, matematiikka ja luonnontieteet. Tutkimuksen tuloksista ovat raportoineet muiden muassa Kupari ja Törnroos (2003), Välijärvi, Linnakylä, Kupari, Reinikainen, Malin ja Puhakka (2002). Tutkimuksen painopistealueena oli tällä kertaa lukutaito. Tutkimus on tarkoitus toistaa kolmen vuoden välein. PISA-tutkimuksella pyrittiin selvittämään, millaiset ovat tulevaisuuden osaamistarpeet koulussa, millaista on todellisuutta jäljittelevä tiedonkäyttö ja miten oppilaat osaavat käyttää ja soveltaa oppimaansa tietoa. Tarkastelun kohteena eivät siten olleet matematiikan tiedot ja taidot sellaisina kuin niitä yleensä on kuvattu koulun opetussuunnitelmassa (Kupari & Törnroos 2003, 41).

PISA-tutkimuksen perusjoukkona oli 15-vuotiaiden ikäluokka. Tällöin suomalaiset olivat käyneet koulua 1-2 vuotta vähemmän kuin muut heidän ikätoverinsa. Tutkimuksessa oli mukana 28 OECD maata, jotka oli velvoitettu mukaan, lisäksi muutama ulkopuolinen maa (Välijärvi ym. 2002, 6). Huomattakoon, että esimerkiksi IEA oli maiden välistä vapaaehtoista yhteistyötä. PISA-tutkimuksessa matematiikan osaamista jäsennettiin kolmella dimensiolla: matematiikan prosessit, matematiikan sisällöt ja tilanteet, joissa matematiikkaa käytetään.

PISA-tutkimuksessa matematiikan prosessit määriteltiin Kuparin ja Törnroosin (2003) mukaan yleisten matemaattisten kompetenssien avulla. Näihin kuuluivat muun muassa matemaattisen ajattelun taidot sekä kyky muotoilla ja ratkaista ongelmia. Tehtävät ryhmiteltiin vielä kolmeen taitoluokkaan, joista ensimmäinen koostui yksinkertaisista laskutehtävistä ja määritelmistä. Toisen taitoluokan tehtävissä edellytettiin tietojen yhdistelemistä ja suoraviivaisten ongelmien ratkaisemista. Kolmannen taitoluokan tehtävissä painottuivat matemaattinen ajattelu, yleistäminen ja oivaltaminen. Matematiikan sisällöt määriteltiin laajahkoina sisältökokonaisuuksina, joista tällä kertaa otettiin arviointiin mukaan muutos ja kasvu sekä tila ja muoto. (Kupari & Törnroos 2003, 42.)

Muutos ja kasvu -sisältökokonaisuuden tuloksista nousivat Kuparin ja Törnroosin (2003, 48) mukaan selkeästi esille kuvaajien ja diagrammien vahva osaaminen Suomessa. Sitä vastoin algebran perustaitojen (yhtälöt ja kaavat) osaaminen näytti olevan edelliseen verrattuna heikompaa ja oli vain OECD-maiden keskitasoa. Algebran perustaitojen heikko osaaminen näytti olevan yhteispohjoismainen ilmiö. Kupari (2003, 88) toteaa myös, että monet suomalaiset (21–55 %) jättivät vastaamatta tehtäviin, joissa vaadittiin yleistyksiä tai selittämistä.

Matematiikan osaamisessa Suomi kuului Välijärven, Linnakylän, Kuparin, Reinikaisen, Malinin ja Puhakan (2002) mukaan selkeästi OECD-maiden parhaimpaan neljännekseen. Sisällöllisesti suomalaisnuorten osaaminen oli tasaista. Molemmissa tutkituissa sisältökokonaisuuksissa, muutos ja kasvu sekä tila ja muoto, miltei kaikkien tehtävien ratkaisuprosentit olivat Suomessa korkeammat kuin OECD-maissa keskimäärin. Edellä mainittujen tutkijoiden mukaan oppilaiden käyttämillä opiskelustrategioilla havaittiin olevan osaamiseen kohtalainen yhteys. Korkeatasoiseen osaamiseen liittyi tietoisuus omasta oppimisesta ja pyrkimys opiskelun säätelyyn. Opittavan aktiivinen ja omaehtoinen työstäminen ennakoi hyvää suoritusta, kun taas taipumus painaa asioita mieleen mekaanisesti toistamalla ja ulkoa opetellen ei näyttänyt edistävän osaamista. (Välijärvi ym. 2002, 16, 50.)

5.7.2 Kansallisia tuloksia

Tässä luvussa tarkastellaan eräitä kansallisia matematiikan osaamista käsitteleviä tutkimuksia, joihin on osallistunut tuhansia oppilaita. Tällaisia ovat olleet muun muassa Koulutuksen tutkimuslaitoksen organisoimat tutkimukset (Kupari 1993a), 9. luokan valtakunnalliset kokeet (Pehkonen 1995), 6. luokan valtakunnalliset kokeet 2000 (Niemi 2004), Opetushallituksen 1998 järjestämät valtakunnalliset kokeet (Korhonen 1999), TIMSS 1999 raportointi (Törnroos 2005), ylioppilaskirjoitusten matematiikan kokeen tulokset (Joutsenlahti 2005). Tarkemmin tässä luvussa käsitellään vain Kuparin (1993a) ja Korhosen (1999) tutkimuksia. Muihin edellä mainittuihin tutkimuksiin viitataan muualla tässä raportissa.

Kupari (1993a) raportoi siitä, millainen oli peruskoulun matematiikan opetuksen tila vuonna 1990. Erityisen kiinnostavaa oli tietää, olivatko oppilaiden peruslaskutaidot tallella, kun tasokursseista oli luovuttu 1985. Vertailuperusteena Kupari käytti vuonna 1979 kerättyä tutkimustietoa. Tietoa kerättiin sekä matematiikka-asenteista että tiedollisista saavutuksista neljänsiltä, kuudensilta ja yhdeksänsiltä luokilta. Tiedollisia tuloksia tarkasteltiin kolmella tavalla: ratkaisuprosenttien, suorituspistemäärien ja yhteisen tavoitetason pohjalta. Ratkaisuprosenteilla kuvattuna oppimistulokset vuonna 1990 olivat keskimäärin joko paremmat tai samantasoiset kuin vuonna 1979. Neljäsluokkalaiset paransivat keskimääräisiä suorituksiaan noin 7 prosenttiyksikköä. Kuudesluokkalaisten tulokset olivat keskimäärin samantasoiset kuin vuonna 1979, sama oli tilanne vuonna 1990 peruskoulunsa päättäneiden eli yhdeksäsluokkalaisten osalta. (Kupari 1993a, 81, 91–93.)

Kuparin (1993a) tutkimuksen perusteella oppilailla ilmeni puutteita muun muassa käsitteellisen osaamisen tasolla. Tämä näkyi siten, että oppilaat eivät hallinneet tiedonosasten välisiä yhteyksiä. Havaittu kehitys on Kuparin mielestä huolestuttavaa siksi, että juuri käsitteiden hallinnalla on todettu olevan tärkeä merkitys soveltamis- ja ongelmanratkaisutaitojen kehittymiselle. Tutkimuksessa selvitettiin myös sitä tavoitetasoa, jota kullekin ikäluokalle opettajat pitivät yhteisenä vaatimuksena. Ala-asteella noin viidennes ja yläasteella noin neljännes ei saavuttanut tätä tasoa. Kun vuonna 1990 tavoitetasoa konkretisoitiin kouluarvosanoin, päädyttiin ala-asteella numeroon 6+ ja yhdeksännellä luokalla numeroon 6- (Kupari 1993a, 101–103).

Matematiikan taitojen ja asenteiden mittaamisen ohella Kupari (1993a) teki eräitä mielenkiintoisia havaintoja. Opetusryhmän koolla ei näyttänyt olevan suoraa yhteyttä matematiikassa menestymiseen. Sen sijaan neljännen luokan oppilaiden suoritusten ja kotitehtäviin käyttämän ajan välillä vallitsi negatiivinen yhteys. Mitä paremmat olivat oppilaan matematiikan suoritukset, sitä vähemmän hän tarvitsi aikaa kotitehtäviinsä. Kuparin selitys ilmiölle liittyy opetukseen ja oppimateriaaleihin. Enemmistö neljäs ja kuudesluokkalaisista pystyy oppituntien aikana omaksumaan käsitellyt asiat ja tekemään osan annetuista kotitehtävistä. Näille oppilaille riittää 10–20 minuuttia kotitehtäviin. Sen sijaan jos oppilas joutuu käyttämään paljon aikaa kotitehtäviinsä, se on merkki jonkinasteisista oppimisvaikeuksista. Jatkossa olisi syytä kiinnittää huomiota kotitehtäviin käytetyn ajan ohella tehtävien määrään ja laatuun. (Kupari 1993a, 99.)

Kupari (1993b) raportoi matematiikan opetuksen ja opiskelun muutoksista vuosien 1979 ja 1990 välillä. Opetuksen painotuksia ja muotoja koskevat tulokset antoivat kaksijakoisen kuvan tapahtuneesta kehityksestä. Yhtäältä tulokset osoittivat, että laskutaitojen osuus oli vähentynyt ja aikaisempaa enemmän oli pantu painoa soveltamis- ja ongelmanratkaisutaidoille. Toisaalta matematiikan opetus näytti nojaavan edelleen tukevasti opettajien opetukseen ja tehtävien laskemiseen itsekseen kirjasta. (Kupari 1993b, 21.)

Entä mitä peruskoululaisten matematiikan oppimiselle tapahtui 1990-luvun alun lamavuosina? Kupari (1996) viittaa opetussuunnitelman perusteiden 1994 laadintaan, johon liittyi myös joitakin tuntijakomuutoksia ja toiveita oppisisältöjen uudelleen ryhmittelystä. Peruskoulun arviointi 95 -tutkimus osoitti, että yhdeksäsluokkalaiset osasivat matematiikan koetehtävät kokonaisuutena vähintään yhtä hyvin kuin vuonna 1990. Keskimääräiset tulokset heikkenivät lievästi laskutoimitusten ja algebran kohdalla, mutta paranivat funktioopin, yhtälöiden ja soveltavan matematiikan sisältöalueilla. (Kupari 1996, 441.)

Kupari (1999) tutki väitöskirjatyössään matematiikan opettajien uskomuksia ja niiden vaikutusta opetustoimintaan. Kaksitasomallin avulla tutkimuksessa arvioitiin opettajien uskomusten vaikutusta oppilaiden oppimistuloksiin. Erityisesti voimakkaat esitys- ja menettelytapauskomukset näyttivät johtavan heikompiin oppimistuloksiin. Yhtä voimakkaita oppilaiden suoritusten selittäjiä olivat matematiikan oppikirja ja oppilaan sukupuoli. Yhdeksännellä luokalla voimakkaimpia oppimistulosten selittäjiä olivat oppilaan luottamus matematiikan oppimiseen ja jatkokoulutushalukkuus. (Kupari 1999, 168.)

Opettajien haastatteluissa kävi ilmi, että opettajilla oli taipumusta aliarvioida oman opetuksensa uudistuneisuutta ja pikemminkin nähdä perinteinen opetustapa hyveenä. Toisaalta Kupari (1999) havaitsi ristiriitaa opettajien uskomusten ja opetuskäytännön välillä. Opettajaryhmän uskomuksissa saattoivat painottua oppijakeskeisyyttä suosivat piirteet, mutta opetustyö oli käytännössä hyvin perinteistä ja suorituskeskeistä. Mainittua ristiriitaa näytti vähentävän se, jos opettajalla oli taipumus reflektoida omaa toimintaansa. (Kupari 1999, 175–176.)

Tutkimuksen keskeinen tulos oli Kuparin mukaan se, että perinteinen ja laskutaitopainotteinen matematiikan opetus ei enää tuota tämän ajan nuorille merkityksellisiä ja hyödyllisiä oppimiskokemuksia. Monet uudistukset (LUMA ym.) jäävät pinnallisiksi, koska niiden toimintatavat ovat ristiriidassa opettajien ydinuskomusten kanssa. (Kupari 1999, 179.)

Korhonen (1999) raportoi Opetushallituksen keväällä 1998 toimeenpanemasta matematiikan oppimistulosten kansallisesta arvioinnista. Peruskoulun yhdeksäsluokkalaisten perusjoukosta arvottiin otokseen 3575 oppilasta. Oppimistuloksia mitattiin kaksiosaisella koulusaavutuskokeella: perustaitoja monivalintatehtävillä ja soveltamistaitoja tuottamistehtävillä (Korhonen 1999, 3). Perustaitokokeen tulos osoitti keskimäärin hyvää taitojen hallintaa: summapistemäärien keskiarvo oli kaksi kolmasosaa maksimipistemäärästä. Soveltamistaitojen puutteet näkyivät siinä, että tuottamiskokeen tulos jäi alle puoleen maksimipistemäärästä. (Korhonen 1999, 68.)

6 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

Tutkimus jakaantuu kahteen osaan. Pitkittäistutkimukseen, jossa tarkastellaan yhden ikäluokan matematiikan taitojen ja matemaattisen ajattelun kehittymistä neljän vuoden ajan ja poikittaistutkimukseen, jossa keskitytään matemaattisen ajattelun tutkimiseen kahdella matematiikan osa-alueella: verrannollisuudessa ja algebrassa. Verrannollisuus sisältää murtoluvut, suhteen ja verrannon. Myös prosenttilasku sisältyy käsitteidensä puolesta verrannollisuuteen, mutta koska se ei sisältynyt kuudetta luokkaa edeltäviin opetussuunnitelmiin, sitä käsitellään tässä tutkimuksessa verrannollisuuden soveltamisena.

Matemaattista ajattelua tutkitaan pääasiassa oppilaiden ratkaisutapoja analysoimalla. Tulosten käsittelyn yhteydessä havaitsin murtolukulaskuissa ja verrantotehtävissä eräitä virhevalintoja tai virheellisiä tulkintoja, joiden arvelin merkitsevän oppilaan puutteellista käsitteiden hallintaa kyseisellä matematiikan osa-alueella. Kutsun näitä virhevalintoja tässä yhteydessä triviaaleiksi virheiksi. Asiaa käsitellään tarkemmin kohdassa 6.5.1. Kun oppilaan testisuoritukset antavat kuvan hänen matemaattisesta osaamisestaan, triviaaleihin virheisiin liittyvät tulkinnat antavat tietoa hänen matemaattisesta ajattelustaan.

Peruskoulun matematiikan oppikirjoissa ei esiinny algebra-nimitystä. Tutkimuksen teoriaosassa (luku 5.4.2) etsittiin aritmetiikan ja algebran välistä rajaa lineaaristen yhtälöiden ratkaisemisen näkökulmasta (mm. Brown ym. 1999; English & Sharry 1996; Filloy & Rojano 1989; Goodson-Espy 1998; Kieran 1992; Vlassis 2002). Erityisesti Vlassis päätyi tulokseen, että ratkaisevinta yhtälön luokittelussa aritmeettiseksi tai algebralliseksi on yhtälön ratkaisemisen vaatima abstraktiotaso. Kyseisen luokittelun näkökulmasta tutkimuksen empiirisessä osassa lähestytään aritmetiikan ja algebran välistä rajaa, joka tulee yhtälöitä ratkaistessa vain niukasti ylitetyksi. Matematiikan opetuksen kannalta on kuitenkin oleellista nähdä siirtymävaihe aritmetiikasta algebraan. Tämä ”harmaa alue” on niiden oppisisältöjen kokonaisuus, joka vaatii oppilaalta abstraktimpaa ajattelua kuin tavanomaisten numerolaskujen suorittaminen. Algebran osa-aluetta edustavat tässä tutkimuksessa osittelulain soveltaminen, kirjainlukujen eli muuttujien käyttö erilaisten määrien ilmaisemiseen sekä lineaaristen yhtälöiden ratkaiseminen. Algebra sisältää empiirisen osan tarkasteluissa myös kompleksin aritmetiikan ja esialgebran (ks. myös Cooper ym. 1997, 91).

6.1 Tutkimustehtävä

Tässä tutkimuksessa selvitetään peruskoululaisten matemaattisen ajattelun kehittymistä aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Matemaattista ajattelua ja matematiikan ymmärtämistä tarkastellaan tiedon prosessoinnin kannalta (Pehkonen 2000, 376; Joutsenlahti 2005, 82). Oppilaan proseduraalinen tieto jalostuu opiskelun edetessä konseptuaaliseksi tiedoksi. Oppilaiden testisuorituksia tarkkailemalla analysoidaan lähinnä proseduraalista tietoa, mutta toisaalta juuri proseduurit muuttavat konseptuaalista tietoa havaittavaan muotoon (Hiebert & Lefevre 1986, 9). Vertaamalla oppilaiden virheellisiä ratkaisutapoja voidaan myös päätellä jotakin siitä, millaisia käsityksiä heillä on matematiikan struktuureista. Jos oppilas ratkaisee oikein monivalintatehtävän, ei voi olla varma, onko hän "ymmärtänyt" kyseisen matemaattisen rakenteen. Jos hän sen sijaan valitsee väärän vaihtoehdon, on mahdollista arvioida, kuinka alkeellinen eli triviaali hänen ajattelutapansa on ollut. Tuottamistehtävä kertoo monivalintatehtävää enemmän oppilaan laskuvalmiuksista ja ajattelutavasta, mikäli laskusuoritukset ovat näkyvissä. Luokittelemalla oppilaiden suorituksia tehtäväkohtaisesti 3-5 luokkaan laadittiin poikittaistutkimuksessa asteikko oppilaiden matemaattisen ajattelun tason arvioimiseksi.

Siirtymistä aritmetiikasta algebraan tarkastellaan myös käsitteellisenä muutoksena (Sfard 1991; Sfard & Linchevski 1994). Kun oppilaalla on taito suorittaa johonkin matematiikan käsitteeseen liittyviä operaatioita, hänellä on käsitteestä proseduraalista tietoa. Jos taas oppilas ymmärtää, mihin proseduurit perustuvat ja millaisia rajoituksia niillä on, hänellä on kyseisestä käsitteestä konseptuaalista tietoa.

Keskeisen ongelman aritmetiikasta algebraan siirryttäessä näyttää muodostavan numerolukujen vaihtuminen kirjainlukuihin eli muuttujiin (Küchemann 1981; Kieran 1992). Muuttujilla operointi jaetaan usein kahteen tasoon: operationaaliseen (Sfard 1991) eli proseduraaliseen (Kieran 1992) ja strukturaaliseen (Kieran 1992; Sfard 1991). Alempaa eli proseduraalista tasoa edustaa muuttujia sisältävän lausekkeen konstruointi tai lausekkeen arvon laskeminen ja ylempää eli strukturaalista tasoa lausekkeiden manipulointi, esimerkiksi sieventäminen. Koska tämän tutkimuksen koehenkilöjoukko koostui 6–9-luokkalaisista, testeissä pitäydyttiin alemman tason operaatioihin. Tämäkin taso on vielä jaettavissa kolmiportaiseen hierarkiaan: lausekkeen tunnistaminen, arvon laskeminen ja konstruointi. Cooperin tutkijaryhmän (1997) esittämän kaksitiemallin yhteydessä kyseisten alemman tason operaatioiden katsotaan kuuluvan binaarialgebraan, jota tässä tutkimuksessa lähinnä vastaa esialgebra.

Lineaaristen yhtälöiden ratkaisemista arvioimalla pyrin saamaan tarkemman kuvan oppilaiden algebrallisesta ajattelusta (Kieran 1992; English & Sharry 1996; Goodson-Espy 1998; Brown ym. 1999). Jos testeissä käytettyjä yhtälöitä katsotaan Kieranin teorian (1992) näkökulmasta, vain yksi yhtälö (osio 15) edustaa strukturaalista tasoa. Vlassisin (2002) mukaan kyseinen yhtälö on algebrallinen. Mittareissa käytetyt yhtälöt ovat näin ollen pääasiassa esialgebran yhtälöitä. Toisaalta juuri esialgebran kautta on mahdollista pehmentää aritmetiikasta algebraan siirtymistä (Cooper ym. 1997).

6.2 Tutkimuksen ongelmat

Perinteinen koulumatematiikan jako aritmetiikkaan ja algebraan on toiminut siten, että ensin on opiskeltu aritmetiikkaa mahdollisimman pitkälle (murtoluvut, suhde, verranto, prosentit) ja sitten siirrytty kokonaan algebraan. Vaikka algebra voidaan nähdä edelleenkin aritmetiikan yleistyksenä, on aiheellista selvittää, kuinka laajasti aritmetiikkaa on hallittava, jotta algebran ymmärtäminen olisi mahdollista. Eräitä aritmetiikan laskulakeja, esimerkiksi osittelulakia, tarvitaan aika harvoin numerolaskuissa. Sen sijaan kirjainlukujen laskutoimitukset ovat mahdollisia vain näiden laskulakien perusteella. Oppilaat eivät yleensä ole tottuneet aritmetiikan operaatioiden yleistämiseen, vaan siihen tarvitaan valmentautumista esimerkiksi kompleksin aritmetiikan tai esialgebran kautta. On myös mahdollista, että oppilailla on valmiuksia, joita ei ole osattu riittävästi hyödyntää numeroluvuista kirjainlukuihin siirryttäessä. Tältä pohjalta muotoiltiin seuraavat tutkimusongelmat.

1. **Miten oppilaan matematiikan tiedot ja taidot muuttuivat kuudennen luokan alusta yhdeksännen luokan loppuun mennessä?**

   1.1 Miten oppilaiden yleinen matematiikan osaaminen kehittyi kuudennen luokan syksystä yhdeksännen luokan kevääseen?
   1.2 Miten kuudennen luokan alussa parhaiten ja heikoimmin matematiikassa suoriutuneet oppilaat säilyttivät suoritustasonsa peruskoulun päättyessä?
   1.3 Miten kuudennen luokan alun suoriutuminen murtolukujen, esialgebran ja prosenttilaskennan alueilla muuttui yhdeksännen luokan kevääseen mennessä?

2. **Miten verrannollisuuden hallinta liittyi algebran hallintaan?**

   2.1 Miten algoritmit hallitsivat oppilaiden ajattelua verrannollisuuden soveltamisessa?
   2.2 Miten oppilaiden virheelliset tulkinnat verrannollisuudesta liittyivät menestymiseen algebrassa?
   2.3 Miten oppilaiden verrannollisuuden hallinnan taso erosi algebran hallinnan tasosta?

3. Millaisia valmiuksia peruskoulun 6–9-luokkalaisilla oli algebran opiskeluun?

3.1 Millaisia olivat oppilaiden algebran taidot eri luokka-asteilla?
3.2 Mitä lineaaristen yhtälöiden ratkaiseminen kertoi oppilaiden algebrallisesta ajattelusta?
3.3 Miten oppilaiden aritmeettinen ajattelu ilmeni algebran alueella?
3.4 Millaisia ongelmia oppilailla esiintyi algebran ymmärtämisessä?
3.5 Miten oppilaiden matemaattinen ajattelu kehittyi 6.–9. luokkien aikana?

6.3 Tutkimusasetelma ja tutkimusmenetelmät

Peruskoulua käydessään oppilas on mukana pitkässä opiskeluprosessissa. Tähän prosessiin vaikuttavat oppilaan lisäksi opettaja, oppilastoverit, oppikirja ja monet muut tekijät. Tässä tutkimuksessa arvioin opiskeluprosessin tuotoksia eräillä matematiikan osa-alueilla. Tutkimusasetelma viittaa jo 1960-luvulla tunnettuun prosessi-produkti-paradigmaan (Pitkäniemi 1997, 367). Tällöin prosessilla ymmärretään koko sitä tapahtumaketjua, joka opettajan johdolla on vaikuttanut oppilaaseen siten, että jotakin opetussuunnitelman tarkoittamasta sisällöstä on siirtynyt oppilaan tietovarastoon tai valmiuksiin. Produktia edustavat oppilaan suoritukset matematiikan testeissä.

Tutkimus oli kaksivaiheinen. Pitkittäistutkimuksessa seurattiin yhden ikäluokan matematiikan taitojen kehittymistä kuudennen luokan alusta yhdeksännen luokan loppuun. Tämän vaiheen empiirinen aineisto kerättiin vuosina 1996–2000. Matematiikan taitoja mitattiin syksyisin yhden oppitunnin mittaisella kirjallisella testillä, jolla pyrittiin kattamaan koko siihen mennessä opiskeltu matematiikan alue. Testiä laajennettiin vuosittain siten, että mukaan otettiin viimeksi opetettujen asioiden hallitsemista mittaavia osioita. Koska vastauslomakkeet varustettiin oppilaiden nimillä, oli mahdollista seurata kunkin oppilaan yksilöllistä kehitystä noin neljän vuoden ajan. Mittausten ajankohta valittiin tarkoituksella elo-syyskuulle, jottei viimeksi opiskeltujen asioiden osaaminen korostu liikaa. Pitkittäistutkimuksessa etsittiin vastauksia ongelmaan 1. Tutkimustuloksia kahdelta ensimmäiseltä vuodelta (luokat 6–8) on jo raportoitu lisensiaatintyössäni (Hihnala 2000). Tutkimuksen kestäessä vahvistui sellainen käsitys, että oppilaat saattaisivat ymmärtää luokkatasoaan vaativampiakin asioita, jos ne esitettäisiin ilman vaikeaa terminologiaa, lähinnä sanallisesti. Tältä pohjalta suunniteltiin poikittaistutkimus, ottamalla huomioon lähinnä Kieranin (1992) analysoima tutkimustieto.

Poikittaistutkimuksessa keskityn verrannollisuuden ja algebran tietojen ja taitojen arviointiin. Empiirinen aineisto kerättiin elo-syyskuussa 2001. Kaikille tutkimukseen osallistuneille 6.–9. luokkien oppilaille tehtiin sama matematiikan testi (6.lk:lle ilman prosenttilaskuja). Testi sisälsi pääasiassa sanallisia tehtäviä, joissa oli mahdollisimman vähän matemaattisia termejä. Testi oli yhden oppitunnin mittainen, eikä se kattanut koko peruskoulun matematiikan aluetta. Tarkoitus oli erityisesti selvittää murtolukuihin, suhteeseen ja verrantoon sekä muuttujan käsitteeseen ja yhtälöiden ratkaisemiseen liittyviä ongelmia. Poikittaistutkimuksella etsin vastauksia ongelmiin 2 ja 3.

6.3.1 Pitkittäistutkimus ja tutkimusjoukko

Pitkittäistutkimus oli luonteeltaan tapaustutkimus, joka kohdistui erään kaupunkimaisen taajaman yhteen ikäluokkaan. Neljä vuotta kestäneen seurannan kohteeksi valitsin harkinnan perusteella kaksi keskisuuren suomalaisen kaupungin asuinaluetta, joiden oppilaat tulevat pääasiassa samalle yläasteelle. Koehenkilöjoukkona olivat ne 89 oppilasta, jotka syksyllä 1996 aloittivat mainituilla alueilla peruskoulun kuudennen luokan ja päättivät yhdeksännen luokan samassa yläasteen koulussa keväällä 2000, taulukko 2. Tutkimuksen kohteena olleet ala-asteen opetusryhmät (5 ryhmää, kolmesta eri koulusta) erosivat taustaltaan muun muassa sen suhteen, kuinka kauan luokalla oli ollut sama opettaja. Näiden taustatekijöiden vaikutusta en kuitenkaan tarkastele tässä tutkimuksessa.

TAULUKKO 2 Pitkittäistutkimukseen osallistuneet oppilaat (poikia 54 ja tyttöjä 35) opetusryhmittäin ala-asteella ja siirtyminen yläasteen ryhmiin

Ala-asteen ryhmä	Oppilaita yhteensä	Osallistui tutkimukseen	Yläasteen ryhmä			
			7A	7B	7C	7D
6 A	20	13	6	6		1
6 B	20	12	1	4	7	
6 C	19	10	3	3	2	2
6 D	25	25	4	3	7	11
6 E	28	27	7	6	7	7
Muut	2	2		1	1	
Yhteensä	114	89	21	23	24	21

Pitkittäistutkimuksella oli tarkoitus selvittää peruskoulun 6.–9. luokkien oppilaiden matematiikan tietoja ja taitoja yleisellä tasolla. Testaukset tehtiin suunnilleen vuoden välein, kaikkiaan viisi kertaa. Testit olivat kirjallisia, yhden oppitunnin mittaisia ja ne suoritettiin oman opettajan johdolla. Testeissä ei käytetty laskinta, koska alimmilla luokilla laskimen käyttö vaihteli jonkin verran ja eri vuosien tuloksia piti kuitenkin pystyä vertaamaan keskenään.

Kaikki testaukset, viimeistä lukuun ottamatta, tehtiin elo-syyskuussa mahdollisimman pian koulutyön alkamisen jälkeen. Oletin, että kesän kuluessa ”turha muistitieto” on karissut ja pysyvämpi järkeilyyn perustuva matematiikan osaaminen tulee paremmin esiin. Viimeinen testi tehtiin yläasteen loppuvaiheessa toukokuussa 2000.

6.3.2 Poikittaistutkimus ja tutkimusjoukko

Poikittaistutkimus kohdistui suppeammalle alueelle kuin pitkittäistutkimus. Kun pitkittäistutkimuksessa pyrin selvittämään matematiikan osaamista mahdollisimman laajasti, keskitin poikittaistutkimuksessa tarkastelun kahdelle mielestäni keskeiselle matematiikan osa-alueelle, verrannollisuuteen ja algebraan. Tarkoitus oli selvittää paitsi oppilaiden suoriutumista tietynlaisista tehtävistä, ennen kaikkea heidän ajattelutapojaan, varsinkin virheellisiä.

Pitkittäistutkimuksen alkuvaiheessa oli ilmennyt eräitä seikkoja, jotka kuvastivat kuudes, seitsemäs ja kahdeksasluokkalaisten tapaa tulkita verrannollisuutta. Varsinkin nuoremmilla oppilailla oli ongelmia murtoluvun muuttamisessa desimaaliluvuksi. Monet näyttivät operoivan visuaalisen havainnon perusteella (Hihnala 2000). Myös murtolukujen väliset laskutoimitukset kuvastivat pikemminkin ulkomuistiin kuin järkeilyyn perustuvaa laskutapaa. Poikittaistutkimuksella pyrin selvittämään laajemmin, millaisia yhteyksiä verrannollisuuden tulkinnoilla on algebran käsitteiden ymmärtämiseen (ongelma 2).

Pääkysymys (ongelma 3) on kuitenkin se, missä määrin peruskoulun kuudennella ja seitsemännellä luokalla on jo niitä algebran opiskelun valmiuksia, joita opetussuunnitelman mukaan edellytetään vasta kahdeksannella ja yhdeksännellä luokalla. Näihin valmiuksiin kuuluu osittelulain ymmärtäminen, kyky vertailla ja muodostaa muuttujan sisältäviä lausekkeita sekä ratkaista lineaarisia yhtälöitä. Poikittaistutkimuksen mittaukset tehtiin elo-syyskuussa 2001 saman kaupungin alueella kuin pitkittäistutkimus. Koehenkilöt (N = 1019) valittiin yhteistyössä heidän opettajiensa kanssa kolmelta ala-asteelta ja viideltä yläasteelta, taulukko 3.

TAULUKKO 3 Poikittaistutkimuksen koehenkilöt kouluittain ja luokka-asteittain

Koulu	6. lk.	7. lk.	8. lk.	9. lk.	Opp. yht.
1	63				63
2	29				29
3	20				20
4		73	84	35	192
5		98	138	116	352
6		20	23	17	60
7		91	83	60	234
8		35	22	12	69
Opp. yht.	112	317	350	240	1019

Poikittaistutkimuksen perusjoukkona ovat keskisuuren keskisuomalaisen kaupungin peruskoulun 6–9-luokkien oppilaat. Perusjoukosta valittiin tutkimuksen kohteeksi ryppäitä, jotka olivat peruskoulun luokkia (taulukko 3). Tyypillisesti testiin osallistuneilta luokilta oli poissa yhdestä kahteen oppilasta, mikä vastaa noin 10 % koehenkilöjoukosta. Tavoitteena oli muodostaa mahdollisimman edustava oppilasjoukko, jolta palautteen saaminen olisi erittäin todennäköistä. Otantamenetelmiä käyttämällä olisi jouduttu tyytymään pienempään koehenkilöjoukkoon ja osallistuminen testeihin olisi ollut epävarmempaa. Koska käytännön syistä testit olisi joka tapauksessa teetetty kokonaisille luokille, jätin opettajille mahdollisuuden toimia kunkin koulun olosuhteiden mukaan. Koehenkilöjoukon satunnaistaminen ei ollut tarpeen, kun tutkimuksen päähuomio kiinnittyy oppilaiden käyttämiin ratkaisumenetelmiin verrannollisuuteen ja algebraan liittyvissä tehtävissä. Normatiivista arviointia käytetään pääasiassa vain eri ratkaisumenetelmien toimivuuden kuvailuun.

6.4 Mittaukset

6.4.1 Pitkittäistutkimuksen testien rakenne ja perustelut

Tutkimuksen alkuvaiheessa minua kiinnosti matematiikan osaaminen ala-asteelta yläasteelle siirtymisen vaiheessa. Koska kokemukseni ala-asteen matematiikan opetuksesta ovat vähäiset, vain yksi vuosi opetusta kuudennella luokalla, oli luonnollista turvautua tietojen hankinnassa valmiiksi koeteltuun testistöön. Peruskoululaisten matematiikan tietoja, taitoja ja asenteita oli jo useiden vuosien ajan kartoitettu laajoissa Koulutuksen tutkimuslaitoksen (KTL) tutkimuksissa. Näissä testeissä hioutunut tehtävämateriaali tarjosi luotettavan lähtökohdan matematiikan osaamisen arviointiin luokilla 6–9. Niinpä valitsin pitkittäistutkimuksen testien pohjaksi Kuparin (1993a) ”Peruskoulun arviointi 90” tutkimuksessa käyttämät kuudennen luokan matematiikan testistöt. Ensimmäiseen testiin (liite 1) valitsin 17 osiota Kuparin käyttämästä testistöstä. MENSA:n testistöstä muotoilin kaksi osiota, joilla pyrin mittaamaan vaakaperiaatteen ymmärtämistä yhtälön ratkaisemisessa (osio 6) ja avaruudellista hahmottamista (osio 9). Testistö rakennettiin hierarkkisesti siten, että edelliseen testiin lisättiin kunakin vuonna opiskeltua uutta aineistoa koskevia osioita. Testien aihealueet ja niitä kuvaavat osiot on esitetty kuviossa 4. Seuraavaan testiin (liite 2) lisättiin kuudennen luokan oppiainesta käsittelevää materiaalia mm. prosenttilaskua, murtolukujen laskutoimituksia ja tilavuuden laskemista siten, että seitsemännen luokan testissä oli 25 osiota. Kahdeksannen luokan testistä karsittiin yhdeksän aikaisempaa osiota, jotka liittyivät lähinnä lukuihin ja laskutoimituksiin. Vastaavasti otettiin tilalle yhtä monta, negatiivisiin lukuihin, suhteeseen ja verrantoon sekä geometriaan liittyvää tehtävää (liite 3, osiot 1, 2, 10–12, 14, 15, 18, 19).

MAT1 osioiden vastaavuus ja aihealueet **Osioiden numerot**

Matematiikan osa-alue	6.LK	7.LK	8.LK	9.LK SY	9.LK KE
Luonnollisten lukujen väh.lasku, sanall.	1	1			
Luonnollisten lukujen kertolasku, sanall.	2	2			
Tasajako, sanallinen	4	4			
Vaaán tasapaino punnussymbolein	6	6			
Diagrammin tulkinta	11	11			
Suorakulmion piiri, sanallinen	14	14			
Suunnikkaan konstruoiminen	15	15			
Jakolaskun määritelmä	16	16			
Murtolukujen ekvivalenssi	19	19			
Kuution hahmottaminen	9	9	7		
Jakokulmassa jakaminen	3	3	3	3	3
Luonnollisen luvun seuraaja, a ... a+1	5	5	4	4	4
Murdes, murtoluvusta desimaaliluvuksi	7	7	5	5	5
Osittelulain sovellus, luonnolliset luvut	8	8	6	6	6
Markat ja pennit, suhteen arvo	10	10	8	8	8
Jaollisuus	12	12	9	9	9
Murtoluvun vähentäminen kok. luvusta	17	17	16	16	16
Matka, aika, nopeus, sanallinen	18	18	17	17	17
Yksikön muunnos (vastaava)	13	13	13	13	13
Lukujonon jatkaminen		20	25	25	25
Verrannollisuus, sanallinen		21	21	21	21
Prosenttiluvun laskeminen		22	22	22	22
Akvaarion tilavuus		24	20	20	20
Sekaluvun kertominen kokonaisluvulla		25	24	24	24
Prosenttiosuuden laskeminen		23	23	23	23
Negatiiviset luvut			1	1	1
Sanallinen lukujen suuruuden vertailu			2	2	2
Ale %:sta alkuperäinen hinta			10	10	10
Suunnikkaan määritelmä			11	11	11
Ositusjako			12	12	12
Mehun laimennus			14	14	14
Laskujärjestys			15	15	15
Kolmion kulmat			18	18	18
Suunnikkaan ala			19	19	19
Polynomien kertominen				26	26
Suoran yhtälö				27	27
Pythagoraan lause				28	28
Yhtälön ratkaiseminen				29	29
Välimatkan päätteleminen				30	30
Yhtälöryhmä				7	7

KUVIO 4 Pitkittäistutkimuksen testien aihealueet ja niitä kuvaavien osioiden numerot

Yhdeksännen luokan testi (liite 4) saatiin lisäämällä muuttujiin ja yhtälöihin liittyviä osioita kuusi kappaletta ja poistamalla osio 7 (kuution avaruudellinen hahmottaminen). Kaikissa viidessä testissä oli kahdeksan yhteistä (ja yksi matemaattisesti vastaava) peruslaskutoimituksiin liittyvää tehtävää (kuvio 4), jotka pohjautuivat Kuparin (1993a) käyttämiin testistöihin. Niiden avulla pyrittiin arvioimaan peruslaskutaitojen kehittymistä kuudennen luokan alusta yhdeksännen loppuun.

Jokaiseen testiin sisältyi 12 monivalintaosiota, joissa kussakin oli viisi vastausvaihtoehtoa. Vaihtoehdot pyrittiin asettamaan loogiseen järjestykseen, esimerkiksi luvut pienimmästä suurimpaan. Jokaiseen vaihtoehtoon oli mahdollista päätyä jonkin ”logiikan” perusteella. Oppilaiden valitsemia vaihtoehtoja vertaamalla voitiin myös arvioida oppilaiden ajattelutapaa ja ajattelun tasoa.

Testiosiot pisteytettiin siten, että monivalintatehtävän oikeasta ratkaisusta sai yhden pisteen ja tuottamistehtävästä kaksi pistettä. Tuottamistehtävissä jopa pelkästä oikeasta vastauksesta annettiin täydet pisteet. Oikeansuuntaisesta mutta kesken jääneestä suorituksesta annettiin yksi piste. Näin ollen testin summapistemäärän maksimi oli 26, 38, 38, 48 ja 48 pistettä testien ajankohtien 6.sy, 7.sy, 8.sy, 9.sy ja 9.ke mukaisessa järjestyksessä. Kaikki testit suoritettiin oman opettajan johdolla jollakin matematiikan tunnilla. Laskinta ei saanut käyttää. Oppilaille myös ilmoitettiin, että kaikki testiin liittyvät tiedot ovat luottamuksellisia, eivätkä testin tulokset vaikuta koulun antamiin arvosanoihin. Testin ratkaisuja ei missään vaiheessa selitetty oppilaille, jotta samoja tehtäviä voitiin käyttää useampaan kertaan.

6.4.2 Poikittaistutkimuksen mittarin laadinta ja sen perustelut

Poikittaistutkimuksella oli tarkoitus varmistaa eräitä verrannollisuuteen liittyviä kysymyksiä, joita pitkittäistutkimus oli herättänyt. Päätavoite oli kuitenkin selvittää aritmetiikasta algebraan siirtymisen ongelmia. Testi (liite 5) suunniteltiin mittaamaan matematiikan osaamista kolmella osa-alueella: verrannollisuudessa (murtoluvut, suhde, verranto), osiot 4–12 ja algebrassa (osittelulaki, muuttujan lausekkeet, yhtälöt), osiot 15–23, sekä prosenttilaskuissa, osiot 24–26. Osittelulain soveltamista testattiin osiossa 21. Osittelulakia tarvitaan harvoin aritmetiikassa, mutta muuttujien yhdistämisessä se on välttämätön. Muuttujan käyttö määrien ilmaisemisessa on esialgebran toimintaa, jossa ei välttämättä tarvitse yhdistellä muuttujan lausekkeita. Muuttujan käytön hallintaa mitattiin osioilla 16, 18 ja 19. Aritmetiikasta algebraan siirtymisen kriteereinä pidettiin oppilaiden kykyä ja tapaa ratkaista lineaarisia yhtälöitä, osiot 15, 20, 22 ja 23. Prosenttilaskut, osiot 24–26, liittyivät verrannollisuuden soveltamiseen. Osioiden tarkemmat aihealueet on esitetty taulukossa 4.

Testiin (liite 5) otettiin kaikkiaan neljä suoranaisesti murtolukuihin ja viisi muuta verrannollisuuteen liittyvää tehtävää. Osio 10 liittyi hintojen vertailuun. Tehtävän 10 asettelussa oli ehkä monille oppilaille outoa se, että toisen tuotteen hinta oli esitetty implisiittisesti. Väisälä (1965, 47) käytti samaa asetelmaa pyrkiessään osoittamaan, kuinka yhtälöiden avulla voidaan ratkaista arkielämään liittyviä ongelmatilanteita. Murtolukutehtäviin kuului kaksi varsin vaativaa, sanallisessa muodossa esitettyä osiota, osiot 7 ja 8. Nämä osiot päätettiin hylätä testin suorituspistemääriä laskiessa, koska niiden korrelaatiot testin kokonaispistemäärään olivat alhaiset ($r = -0{,}030$ ja $0{,}053$). Niistä saadaan kuitenkin hyödyllistä tietoa oppilaiden ratkaisutapojen arviointiin.

TAULUKKO 4 Poikittaistutkimuksen testiosioiden aihealueet ja ongelmat, joihin niillä etsitään vastauksia

Poikittaistutkimuksen aihealueet	Osion nro	Ongelman nro
Murdes, murtoluvusta desimaaliluvuksi	4	2.1, 2.2 ja 2.3
Murtolukujen ekvivalenssi	5	
Murtolukujen kertolasku	6	
Verrannollisuus, sanallinen	9, 12	
Implisiittisesti ilmaistu määrä	10	
Diagrammin tulkinta	11	
Osittelulain sovellus, luonnolliset luvut	21	3.1
Luonnollisen luvun seuraaja, a ... a+1	16	
Pituus muuttujan lausekkeena	18	
Suorakulmion ala muuttujan avulla	19	
Yhtälön ratkaiseminen	15, 20, 22	3.2
Yhtälöiden ekvivalenttisuus	23	
Prosenttiluvun laskeminen	24	2.1
Prosenttiosuuden laskeminen	25	
Perusarvon laskeminen	26	

Pitkittäistutkimuksen alkuvaiheen tuloksista (Hihnala 2000) oli havaittu, että prosenttiluvun laskeminen on huomattavasti vaikeampaa kuin matemaattiselta rakenteeltaan vastaavan verrantotehtävän ratkaiseminen. Tätä havaintoa päätettiin vielä varmistella sijoittamalla testiin kaksi sanallista verrantotehtävää, joista toisessa (osio 12) oli samat luvut kuin vastaavassa prosenttilaskussa (osio 24). Verrannollisuuden ja lineaarisuuden ymmärtämistä kartoitettiin myös kahdella graafisia kuvaajia käsittelevällä osiolla (osiot 11 ja 14). Osio 14 kuitenkin hylättiin, johtuen sen alhaisesta korrelaatiosta (r = 0,084) testin kokonaispistemäärään. Sama toimenpide päätettiin tehdä osion 13 kohdalla (r = – 0,131). Prosenttikäsitteen hallintaa testattiin kolmessa muodossa: prosenttiluvun laskeminen (osio 24), prosenttiosuuden laskeminen (osio 25) sekä prosenttiluvun ja suhteen vertaaminen (osio 26).

Pitkittäistutkimuksessa oli jo mukana kaksi esialgebran osiota. Toinen liittyi luonnollisen luvun seuraajan ilmoittamiseen muuttujan avulla (osio 5, liite1) ja toinen osittelulain soveltamiseen luonnollisten lukujen kertolaskussa (osio 8, liite 1). Samat osiot sisällytettiin poikittaistutkimuksen mittariin. Esialgebraan kuuluvina voidaan pitää myös osioita 17, 18 ja 19 (liite 5). Osio 17 kuitenkin hylättiin alhaisen korrelaation (r = 0,079) takia.

Aritmetiikasta algebraan siirtymisen vaikeuksiin syvennyttiin yhtälöiden ratkaisemista tutkimalla. Erilaisten lineaaristen yhtälöiden ratkaisemiseen perustui neljä osiota 15, 20, 22 ja 23. Tehtävän 22 yhtälö (Kieran 1992) sisälsi pelkkiä kokonaislukuja ja tuntematon oli kuvattu tyhjällä ruudulla. Yhtälön ratkaisemisen lisäksi tarkasteltiin oppilaiden kykyä eliminoida yhtälön molemmilta puolilta sama termi. Eliminoimisen tai sen puuttumisen katsottiin kertovan jotakin oppilaan strukturaalisesta ajattelusta (Kieran 1992; Hihnala 2003). Osio 23 sisälsi kolme yhtälöä, jotka piti tunnistaa keskenään ekvivalenteiksi. Osiossa 15 piti ratkaista lineaarinen yhtälö, jonka kertoimet olivat kokonaislukuja ja tuntematon esiintyi molemmilla puolilla. Osion 15 yhtälöä voitiin kappaleessa 5.5.2 esitettyjen kriteerien (Kieran 1992; Goodson-Espy 1998; Brown ym. 1999; Vlassis 2002) perusteella pitää algebrallisena. Yhtälö esitettiin kuitenkin sellaisessa muodossa (kertomerkit näkyvissä), että kuudesluokkalaistenkin oli mahdollista ratkaista se kokeilemalla. Osioon 20 sijoitettiin yhtälön 15 vasen puoli ja oikea puoli erillisinä lausekkeina. Oli etsittävä sellainen luku x, että lausekkeet ovat yhtä suuret. Kyseessä oli siis lausekkeiden arvon laskeminen, vaikka se liittyi toisaalta myös yhtälön ratkaisemiseen. Yhtälön 15 abstraktiotasoa alennettiin tarkoituksella osiossa 20 eli siirryttiin algebrasta esialgebraan. Vertaamalla osioiden 15 ja 20 ratkaisuja pyrittiin selvittämään, missä määrin on kysymys oppilaan kyvystä ratkaista yhtälö ja missä määrin kyvystä ymmärtää yhtälön ratkaisemiseen liittyvä terminologia (Edwards 2000, 29).

6.5 Tutkimusaineiston analysointi

Tutkimuksen aineisto hankittiin kyselylomakkein pitkittäistutkimuksella ja poikittaistutkimuksella. Pitkittäistutkimuksessa seurattiin oppilaan matemaattisen ajattelun kehittymistä neljän vuoden ajan. Vaikka testeillä pyrittiin mittaamaan matematiikan osaamista mahdollisimman laajasti, päähuomio kiinnitettiin lopulta neljään osa-alueeseen: peruslaskutaidot, murtoluvut, prosenttilasku ja esialgebra. Testisuoritukset pisteytettiin, jolloin saatiin oppilaan matematiikan osaamista kuvaavat summamuuttujat. Matematiikan osaamisessa tapahtuneita muutoksia arvioin tavanomaisten tilastomenetelmien: ristiin taulukoinnin, varianssianalyysin sekä tilastollisten testien (t-testi, χ^2-testi, F-testi) ja tunnuslukujen lisäksi seuraamalla viiden heikoimmin menestyneen ja viiden parhaiten menestyneen oppilaan testituloksia. Lisäksi seurannan alussa koehenkilöjoukko jaettiin viiteen yhtä suureen ryhmään testitulosten perusteella ja seurannan lopussa tarkasteltiin ryhmien koostumuksessa tapahtuneita muutoksia (ongelma 1).

Poikittaistutkimuksen mittariin laadin kaksitasoisen pisteytyksen. Ensin pisteytin oppilaiden suoritukset oikein/väärin periaatteella. Kun paperit oli alustavasti tarkastettu, alkoivat hahmottua keskeisten osioiden tyypilliset virheratkaisut. Näiden valintojen ja ratkaisutapojen perusteella laadin kuhunkin osioon 3–5-portaisen ratkaisutapaluokittelun. Tämän luokittelun perusteella asetin oppilaiden ratkaisut lopulliseen järjestykseen. Monivalintaosioissa oli viisi vaihtoehtoa, joten ratkaisutapaluokittelu niissä oli viisiportainen. Ratkaisutapojen luokittelun avulla pyrin saamaan tarkemman käsityksen oppilaan ajattelusta kuin mitä pelkkä oikein/väärin tulos kertoo. Erityisesti halusin nähdä, liittyisikö alkeellisten virheiden tekeminen verrannollisuuden alueella heikkoon suoriutumiseen jollakin muulla osa-alueella. Pidin mahdollisena, että eräät virheelliset ratkaisutavat kasaantuisivat joillekin oppilaille.

6.5.1 Verrannollisuuden virheindeksi

Murtolukulaskuihin ja verrantotehtäviin liittyi eräitä virhevalintoja tai virheellisiä tulkintoja, joiden arvelin merkitsevän oppilaan puutteellista käsitteiden hallintaa kyseisellä matematiikan osa-alueella. Kutsun näitä virhevalintoja tässä yhteydessä triviaaleiksi virheiksi. Pyrin kartoittamaan näiden virheiden yleisyyttä, yhteen kuuluvuutta ja yhteyttä muihin laskusuorituksiin. Tässä tarkoituksessa määrittelin verrannollisuuden virheindeksin IV. Valitsin seitsemän osiota IV-indeksin määrittelyn pohjaksi, taulukko 5.

TAULUKKO 5 Oppilaan saamiin virheindeksien IV ja IVred arvoihin vaikuttaneet valinnat (triviaalit virheet) ja tapahtuneiden valintojen frekvenssit

Osio	Triviaali tulkinta	Valitsi tämän ratkaisun (%)	Vastanneita yhteensä
4	Murtoluku $\frac{5}{4}$ on desimaalilukuna 5,4	26,5	1007
5	Lavennettaessa murtoluvun arvo suurenee	17,7	982
6	Sekaluvun kertominen kokonaisluvulla siten, että vain kokonaisosa kerrotaan tai kerrotaan sekä kokonaisosa että murto-osan osoittaja ja nimittäjä	70,3	997
9	Verrannollisuuden tarkastelussa on pantu osa vastaamaan kokonaisuutta (osat 3 + 5, jolloin 3 on pantu vastaamaan vertailussa koko määrää)	23,1	811
10	Implisiittisesti ilmaistua määrää on käsitelty eksplisiittisenä. Kahden tuotteen yhteishinnan ja hintojen eron perusteella on laskettu toisen tuotteen hinta suoraan vähentämällä.	72,9	959
11	Lineaarisen muutoksen graafisena kuvaajana on pidetty vaakasuoraa viivaa.	12,1	897
12	Määrien vertailussa on päädytty tulokseen, että osa on suurempi kuin kokonaisuus.	6,3	758

Jokainen alkeellinen virhetulkinta ko. osioissa kasvatti virheindeksiä yhdellä. Näin ollen IV-indeksi vaihteli välillä 0–7. Toisaalta indeksin arvo riippui myös oppilaan vastausten lukumäärästä. Kaikki oppilaat eivät vastanneet kaikkiin tehtäviin. Oppilaan antamien vastausten lukumäärän huomioon ottamiseksi määrittelin redusoidun indeksin IV_{red}, joka saatiin jakamalla oppilaan saama IV-indeksin arvo oppilaan suorittamien murtoluku- ja verrantotehtävien lukumäärällä. Näin ollen oppilaskohtainen IV_{red} indeksi vaihteli välillä 0–1.

Tällä indeksillä pyrin kuvaamaan tiettyjen virheellisten valintojen keskittymistä murtoluku- ja verranto-osioissa samoille oppilaille. Tarkoitus oli myös arvioida, miten algebran tehtävistä suoriutuminen liittyy verrannollisuuden virheindeksin arvoon. Oppilaat vastasivat kahdesta seitsemään murtoluku- ja verrantotehtävään, keskimäärin 6,3 tehtävään ja 94 % oppilaista vastasi vähintään neljään näistä tehtävistä. Vastaavasti algebran tehtävissä, joita oli kahdeksan, oppilaat vastasivat keskimäärin 5,8 tehtävään ja 77 % vastasi vähintään puoleen näistä tehtävistä. Algebran tehtäviin vastaaminen oli siis jonkin verran vähäisempää kuin verranto- ja murtolukutehtäviin vastaaminen. Yhtenä syynä saattoi olla se, että algebran tehtävät olivat testin loppupuolella. Prosenttilaskuista, joita ei ollut kuudesluokkalaisilla, yli puolet oppilaista vastasi kahteen tehtävään kolmesta ja kolmannes oppilaista vastasi kaikkiin kolmeen tehtävään.

6.5.2 Aritmeettisen ajattelun indeksi

Monet oppilaat ovat tottuneet kirjoittamaan numerolaskujen lausekkeita peräkkäin sitä mukaa, kun lasku etenee, esimerkiksi 2 + 3 = 5 – 4 = 1. Tässä aritmeettisessa lähestymistavassa (Hihnala 2003), jota kutsun aritmeettiseksi ajatteluksi, ei ajatella laskutoimitusta ja yhtäsuuruusmerkintää siten, että niiden pitäisi olla voimassa myös oikealta vasemmalle. Vaikka kyseinen menettely toimii laskinta käyttäessä, se saattaa aiheuttaa ongelmia algebrassa. Yhtälöiden ratkaisemisessa ilmeni tulkintoja, joissa yleensä pidettiin yhtälön oikean puolen ensimmäistä termiä vasemman puolen lausekkeen tuloksena ja lisäksi saatettiin saada kaksi eri ratkaisua, taulukko 6.

TAULUKKO 6 Oppilaiden saamien indeksien IA ja IA_{red} arvoihin vaikuttaneet ratkaisut ja tällaisia ratkaisuja tehneiden oppilaiden määrät

Osio	Aritmeettista ajattelua kuvaava oppilaan tulkinta	Prosenttia vastanneista	Vastaajia yhteensä
15	Algebrallisesta yhtälöstä saatiin kaksi eri ratkaisua. Ensimmäistä termiä yhtälön oikealla puolella pidettiin vasemman puolen laskun tuloksena.	5,5 37,5	560
20	Lausekkeiden yhtäsuuruuden vertailussa saatiin muuttujalle kaksi eri arvoa aritmeettisen ajattelun tai vastinpariajattelun tuloksena.	12,5	543
22	Numeerinen yhtälö ratkaistiin laskemalla molemmat puolet erikseen, vaikka olisi voitu eliminoida puolittain sama termi.	25,2	747

Aritmeettinen ajattelu ilmeni myös sillä tavoin, että numeerista yhtälöä ei osattu yksinkertaistaa eliminoimalla yhtälön molemmilta puolilta sama termi, vaan kumpikin puoli laskettiin erikseen omana proseduurinaan. Tämä ratkaisutapa viittasi siihen, että oppilas ei ymmärtänyt yhtälön struktuuria, vaan käsitteli yhtälöä kahtena erillisenä lausekkeena. Aritmeettista ajattelua ilmeni kolmessa osiossa (osiot 15, 20 ja 22). Tällöin aritmeettisen ajattelun indeksi IA saattoi saada arvot 0–3, sen mukaan, kuinka monessa osiossa oppilaalla esiintyi aritmeettista ajattelua. Redusoitu indeksi IA_{red} määriteltiin jakamalla IA-indeksin arvo oppilaan kyseisiin osioihin antamien vastausten lukumäärällä. Tällöin IA_{red} indeksin arvo vaihteli välillä 0–1. Tutkimuksessa arvioidaan aritmeettisen ajattelun esiintymistä eri luokkatasoilla ja mahdollista yhteyttä muihin laskusuorituksiin.

6.5.3 Matemaattisen ajattelun tason mittaaminen

Tutkimuksessa tarkastellaan oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittymistä algebran ymmärtämisen kannalta. Matemaattinen ajattelu tulee näkyviin matemaattisten prosessien suorittamistavoissa ja vastausvaihtoehtojen valinnoissa. Matemaattisen ajattelun tasoa arvioidaan poikittaistutkimuksessa viidellä dimensiolla: verrannollisuuden virheindeksi, prosenttilaskun hallinta, muuttujien tulkinta, yhtälöiden ratkaisemisen taito ja aritmeettisen ajattelun indeksi yhtälöiden ratkaisemisessa. Mainituista dimensioista kaksi ensimmäistä liittyy aritmeettisiin operaatioihin ja kolme viimeksi mainittua algebran peruskäsitteisiin.

Verrannollisuuden virheindeksi muodostaa aritmeettisen näkökulman oppilaan ajatteluun, mutta sillä saattaa olla yhteyttä myös algebran ymmärtämiseen. Ennen kaikkea oli kiinnostavaa nähdä, oliko verrannollisuuden hallinta yleensä algebran hallinnan edellytys. Verrannollisuuden virheindeksin luomisessa pidettiin lähtökohtana oppilaan triviaalia eli alkeellista ajattelua, jota edusti muun muassa visuaalinen ratkaisutapa numeerisissa tehtävissä (van Hielen taso 1, van Hiele 1986).

Prosenttilaskenta luetaan aritmetiikan alueeseen kuuluvaksi. Kouluopetuksessa prosentin käsitteeseen kytketään kuitenkin nimityksiä ja symboleja, jotka nostavat käsittelyn abstraktiotasoa. Esimerkiksi perusarvon laskeminen liittyy yhtälön ratkaisemiseen. Prosenttilaskuista on myös nähty muodostuvan tehtävätyyppien mukainen vaikeusasteen hierarkia: prosenttiosuuden laskeminen, prosenttiluvun laskeminen ja perusarvon laskeminen. Mainittu hierarkia muodostaa tässä tutkimuksessa toisen dimension oppilaiden matemaattisen ajattelun kuvaamiseen.

Kolmas matemaattisen ajattelun dimensio liittyy muuttujien tulkintoihin. Muuttujien, joita yleensä merkitään kirjaimilla, eli kirjainlukujen tulkinta voi Küchemanin (1981) mukaan tapahtua kuudella tasolla. Tässä tutkimuksessa mitataan kolmea alinta tasoa: muuttujan numeroluvuksi muuttamista, muuttujan hylkäämistä ja muuttujan pitämistä konkreettina objektina.

Yhtälöiden ratkaisemisessa itse yhtälöt muodostivat oman abstraktiotasonsa mukaisen hierarkian: numeerinen yhtälö, lausekeyhtälö (esialgebran yhtälö) ja algebrallinen yhtälö. Mainituista yhtälötyypeistä kaksi ensimmäistä edusti operationaalista eli proseduraalista tasoa ja algebrallinen yhtälö strukturaalista tasoa (Sfard 1994; Kieran 1992). Yhtälöiden ratkaisutaidoista muodostui matemaattisen ajattelun neljäs dimensio. Korkeinta ajattelun tasoa tämän neljännen dimension kohdalla edusti ekvivalentin yhtälöketjun muodostaminen.

Yhtälöiden ratkaisemiseen liittyen tarkasteltiin erikseen yhtäsuuruusmerkin tulkintaa muodostamalla aritmeettisen ajattelun indeksi. Tässä erityisessä merkityksessä aritmeettisella ajattelulla tarkoitetaan sitä, että oppilas kirjoittaa yhtälöketjun, joka ei pidä paikkaansa. Yhtälöketju ei täytä symmetrisyys- eikä transitiivisuusominaisuutta. Hän saattaa myös pitää yhtälön oikean puolen ensimmäistä termiä vasemman puolen laskun tuloksena tai ajatella, että oikean ja vasemman puolen termit vastaavat pareittain toisiaan (Kieran 1992; Hihnala 2003). Aritmeettisen ajattelun indeksi kuvaa oppilaan käyttämiä yhtälönratkaisumenetelmiä.

6.5.4 Tutkimuksen luotettavuus

Tässä luvussa käsitellään tutkimuksen luotettavuuden kriteereitä yleisesti ja käytettyjen mittareiden luotettavuutta yksityiskohtaisesti. Laajempi koko tutkimusta koskeva pätevyyden ja luotettavuuden tarkastelu on tulosten jälkeen luvussa 7.5.

Kokemus on Alkulan, Pöntisen ja Ylöstalon (1995) mukaan osoittanut, että pysyvien tosiasioiden survey-mittausten reliaabelius on tavallisesti hyvä (0,8–0,9) eli tiedoissa on satunnaista virhettä 10–20 %. Sen sijaan esimerkiksi yksittäisten asennekysymysten reliaabelius on varsin alhainen (0,3–0,4). Muuttuvien tosiasioiden ja konkreettisen käyttäytymisen luotettavuus on jossakin edellä mainittujen välimailla. (Alkula ym. 1995, 129.)

Mittauksen korkea reliaabelius tarkoittaa sitä, että satunnaisilla tekijöillä on ollut vain vähän vaikutusta mittaustuloksiin. Reliaabeliuteen liitetään käsitteet objektiivisuus eli antaako mittari samoja tuloksia, jos sitä käyttää eri henkilö; ekvivalenssi eli missä määrin samaan mittariin kytketyt osoittimet mittaavat samaa asiaa; stabiilius eli missä määrin mitattava kohde pysyy samana peräkkäisissä testauksissa ja sisäinen konsistenssi eli testin johdonmukaisuus. (Borg ym. 1989, 257–261.) Cronbachin α kuvaa mittarin reliaabeliutta. Se perustuu osioiden välisiin korrelaatioihin. Sierpinska (1993) mainitsee vielä erikseen tieteellisen tutkimuksen laadun kriteereiksi alkuperäisyyden ja ennustavuuden.

Mittarin toimivuutta kuvataan reliaabeliuden ja validiuden avulla. Validiuteen vaikuttavat sekä pysyvät että satunnaisvirheet, mutta reliaabeliuteen vain satunnaisvirheet. Validiuden osa-alueita ovat muiden muassa sisällön validius, ennustevalidius, kilpailuvalidius ja rakennevalidius (Borg & Gall 1989, 250–256; Gilbert 1993, 27–28).

Validiuden perinteinen kahtiajako liittyy sisäiseen ja ulkoiseen validiuteen. Sisäisellä validiudella ymmärretään varmuutta siitä, että tulokset ovat syntyneet suoritetuista koejärjestelyistä. Ulkoinen validius taas tarkoittaa sitä, missä määrin saadut tulokset ovat yleistettävissä toisiin olosuhteisiin ja ehtoihin, erityisesti luonnollisempiin ehtoihin. Kilpatrickin (1993) ja Schoenfeldin (1991) mukaan nykyisin validiutta katsotaan laajemmasta perspektiivistä. Rakennetaan silta siitä, mitä tutkittiin, siihen, mitä halutaan yleistää. Tutkimus ei ole itsessään validi, vaan validius liittyy tutkimuksesta tehtyihin johtopäätöksiin. Jos tutkimusraportti auttaa muodostamaan teorian, kyseessä on perustutkimus, riippumatta siitä, mitä tutkija on tarkoittanut. Jos raportti taas auttaa ratkaisemaan käytännön ongelmia, kyseessä on soveltava tutkimus. (Kilpatrick 1993, 22.)

Edellä kuvatuista mittarin reliaabeliuden kriteereistä ekvivalenssia jouduttiin arvioimaan, kun eräät esialgebran osiot antoivat ristiriitaisen kuvan oppilaan taidoista. Seurantatutkimus osoitti vakauden oppilaiden peruslaskutaidoissa. Eräiden osioiden kohdalla Cronbachin α sai lähellä nollaa olevia arvoja. Ilmiö tulkittiin testin epäjohdonmukaisuudeksi. Tällä perusteella jätettiin poikittaistutkimuksen viisi osiota (osiot 7, 8, 13, 14, 17, liite 5) ottamatta huomioon testin kokonaispistemääriä laskettaessa. Toisaalta näistä osioista saatiin hyödyllistä tietoa oppilaiden ratkaisutapojen analysointiin.

Pitkittäistutkimuksen testien luotettavuutta arvioitiin Cronbachin α:n perusteella ja vertaamalla testituloksia oppilaiden saamiin matematiikan todistusarvosanoihin, taulukko 7.

TAULUKKO 7 Pitkittäistutkimuksen ja poikittaistutkimuksen testien luotettavuusarvioita (Cronbachin α)

	Pitkittäistutkimus					Poikittaistutkimus				
Luokkataso	6.sy	7.sy	8.sy	9.sy	9.ke	6.– 9.lk.			7.– 9.lk.	
Osioiden lukumäärä	19	25	25	30	30	8	7	15	3	18
Cronbachin α	0,72	0,85	0,86	0,88	0,89	0,62	0,68	0,76	0,50	0,81
Korrelaatio läh. mat. tod.		0,77	0,76	0,84	0,90					
Testausalue	Koko testi					Alg.	Verr.	Koko testi	Pros. lasku	Koko testi

Taulukosta 7 havaitaan, että mittareiden reliaabelius kasvaa sitä mukaa, kun tutkimus etenee ja testi laajenee. Peruskoulun päättövaiheessa seurantatutkimuksen mittarin reliaabelius (Cronbachin α) on peräti 0,89. Myös testisuoritusten korrelaatiot lähimpiin matematiikan kouluarvosanoihin ovat samoissa lukemissa.

Korhosen (1999) mukaan koulusaavutuskokeen pätevyyden ulkoisena kriteerinä käytettiin koetuloksen ja oppilaan todistusarvosanan välistä korrelaatiota. Kevään 1998 kokeelle tämä korrelaatio oli 0,77. Kokeen luotettavuuden indeksinä Korhonen sai peruslaskutaitokokeelle Cronbachin α-kertoimeksi 0,86 ja tuottamiskokeelle 0,83.

Seurantatutkimuksen testitulokset korreloivat erittäin merkitsevästi (esim. alin korrelaatio $r = 0{,}76$, $N = 85$, $p = 0{,}000$) matematiikan kevättodistusten arvosanoihin, vahvimmin lähimpään arvosanaan. Testi näytti selvästi mittaavan samaa asiaa kuin matematiikan todistusarvosana.

TAULUKKO 8 Pitkittäistutkimuksen osatestien välinen korrelaatiomatriisi, kaikki korrelaatiot olivat erittäin merkitseviä ($p < 0{,}001$)

	Testien ajankohdat ja keskinäiset korrelaatiot				
Testien ajankohdat	6.sy	7.sy	8.sy	9.sy	9.ke
6.sy	1	0,69	0,73	0,70	0,66
7.sy		1	0,82	0,81	0,80
8.sy			1	0,85	0,85
9.sy				1	0,92
9.ke					1

Myös eri testien välillä näytti olevan johdonmukaisuutta eli testien stabiilius oli hyvä, taulukko 8. Odotusten mukaisesti ajallisesti lähimmät testit korreloivat keskenään voimakkaimmin ja ylempiä luokkia kohti korrelaatio vahvistui.

Käsillä oleva tutkimus perustuu pääosin määrällisiin mittauksiin, mutta erityisesti matemaattisen ajattelun kuvaamiseen tarvitaan myös laadullisia mittareita. Laadullinen kasvatustieteellinen tutkimus kohdistuu ihmiseen. Kysymys on lähinnä siitä, mitä merkityksiä tapahtumissa kasvu ja kasvatus syntyy. Kaikkosen (1999) mukaan kielellä ja sen merkityksillä tartutaan todellisuuteen. Kun merkityksiä analysoidaan, annetaan todellisuudesta tietynlainen tulkinta. Laadullisen tutkimuksen uskottavuutta arvioidaan eri perustein kuin määrällisen. Reliaabelius ja validius kuvaavat kvantitatiivisen tutkimuksen tulosten pysyvyyttä ja mittausmenetelmien pätevyyttä. Laadullisen tutkimuksen uskottavuus perustuu siihen, että lukija voi tutkimusraportoinnista itse vakuuttua tutkijan ja tutkimuksen tulkintojen uskottavuudesta. (Kaikkonen 1999, 433.)

Luokittelemalla oppilaiden ratkaisumenetelmiä saadaan tarkempi kuva heidän matemaattisesta ajattelustaan kuin pelkästä ratkaisujen oikein – väärin arvioinnista. Monivalintatehtävien vastausvaihtoehdot ovat eräs etukäteen suunniteltu laadullinen luokitus. Tämän tutkimuksen tehtäväosioista suunnilleen puolet oli monivalintatehtäviä, joissa esitettiin viisi vastausvaihtoehtoa. Loput olivat tuottamistehtäviä. Poikittaistutkimuksen 11 tuottamistehtävästä laadittiin oppilaiden ratkaisujen perusteella 3–5-kohtainen ratkaisutapojen luokittelu, joka kuvasi oppilaan matemaattisen ajattelun tasoa.

Perinteisen tavan mukaan tässäkin tutkimuksessa käytettiin välimatka-asteikoille tyypillisiä analysointimenetelmiä, vaikka huomattava osa muuttujien arvoista oli saatu järjestysasteikkoja käyttämällä. Esimerkiksi vertailtavien muuttujien varianssit eivät aina täyttäneet t-testin ja F-testin edellyttämää yhtäsuuruuden kriteeriä. Mahdolliset riskit on kuitenkin luotettavuustestauksissa otettu huomioon. Muutama keskiarvojen vertaamiseen liittyvä t-testi on toteutettu Excel-ohjelmalla, joka ei ilmoita testisuureen arvoa eikä vapausastetta.

7 TUTKIMUKSEN TULOKSET

7.1 Matematiikan taitojen kehittyminen kuudennelta yhdeksännelle luokalle pitkittäistutkimuksen valossa

Tässä luvussa käsitellään ensin pitkittäistutkimuksen tuottamia testituloksia kokonaisuutena ja verrataan tulostason kehitystä ajallisesti lähinnä vastaaviin matematiikan todistusarvosanoihin (kohta 7.1.1). Erityistä huomiota kiinnitetään testeissä parhaiten ja heikoimmin menestyneisiin oppilaisiin. Oppilasjoukko jaettiin testisuoritusten perusteella viidenneksiin kuudennen luokan alussa ja yhdeksännen luokan lopussa. Tällä perusteella arvioidaan parhaiten ja heikoimmin menestyneiden suoritustason muuttumista seurannan lähtötilanteesta loppuvaiheeseen. Arviota tarkennetaan vielä seuraamalla viiden parhaiten ja viiden heikoimmin menestyneen oppilaan testituloksia vuosittain.

Kohdassa 7.1.2 tarkastellaan matematiikan osaamista tämän tutkimuksen kannalta tärkeillä matematiikan osa-alueilla: murtoluvuissa, esialgebrassa ja prosenttilaskennassa. Muutamat yksittäiset osiot nousivat pitkittäistutkimuksessa erityisasemaan. Sen takia käsitellään vielä erikseen murtoluvun muuttamista desimaaliluvuksi (kohta 7.1.3) sekä verrannollisuuden ja prosenttilaskun välistä yhteyttä (kohta 7.1.4). Kohdassa 7.1.5 arvioidaan esialgebran taitojen muuttumista kuudennen luokan alusta yhdeksännen luokan loppuun mennessä parhaiten ja heikoimmin menestyneiden oppilaiden osalta.

Kohdassa 7.1.6 on yhteenveto pitkittäistutkimuksen tuloksista ja siinä arvioidaan, missä määrin kuudennen luokan alun testisuoritusten perusteella voidaan ennustaa oppilaiden matematiikan osaamista peruskoulun päättövaiheessa.

7.1.1 Matematiikan taitojen yleinen kehittyminen

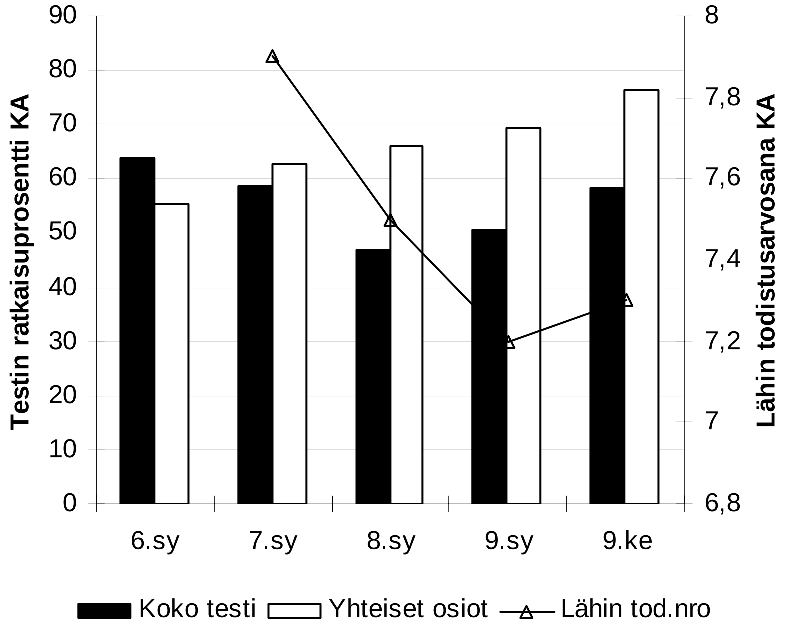
Neljän vuoden seurantatutkimuksessa oppilaiden matematiikan taitoja mitattiin viisi kertaa suunnilleen vuoden välein. Jotta eri testien tuloksia olisi helpompi verrata keskenään, testipistemäärät muutettiin ratkaisuprosenteiksi.

Taulukkoon 9 on koottu testien ratkaisuprosentit, yhteisten osioiden ratkaisuprosentit, lähimmät matematiikan todistusarvosanat sekä vastaavat keskihajonnat. Oppilasmäärien vaihtelu 85 oppilaasta 87 oppilaaseen johtuu satunnaisista poissaoloista. Yhdestä testistä poissaolon takia oppilaita ei jätetty seurannan ulkopuolelle. Siirtymisessä ala-asteelta yläasteelle näkyy todistusarvosanoissa selkeä lähes puolen numeron pudotus kuudennen luokan keskiarvosta 7,9 seitsemännen luokan keskiarvoon 7,5. Samansuuntainen muutos havaitaan testituloksissa. Kuudennen ja seitsemännen luokan testit poikkesivat kuitenkin toisistaan siinä määrin, ettei muutoksen merkitystä voinut suoraan arvioida.

TAULUKKO 9 Matematiikan testin ratkaisuprosentin kehittyminen pitkittäistutkimuksen aikana ja kuhunkin testiin liittyvä ajallisesti lähin matematiikan todistusarvosana

Mittaus	**6.sy**	**7.sy**	**8.sy**	**9.sy**	**9.ke**
Koko testi ka (%)	63,7	58,6	47,0	50,5	58,3
keskihajonta (%-yks.)	19,6	21,6	22,3	23,7	23,9
oppilaita	85	87	85	85	85
Yhteiset osiot ka (%)	55,4	62,6	65,9	69,4	76,3
keskihajonta (%-yks.)	24,1	25,1	27,4	26,1	22,4
oppilaita	85	87	85	85	85
Lähin kevättodistus		**6.ke**	**7.ke**	**8.ke**	**9.ke**
mat. arvosanojen ka		7,9	7,5	7,2	7,3
keskihajonta		1,2	1,3	1,3	1,3
oppilaita		89	89	89	89

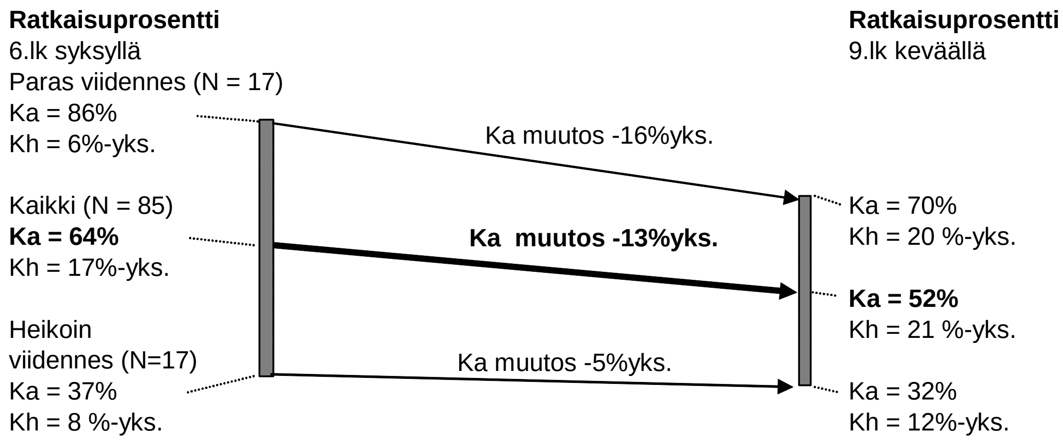
Seurannan tuloksia on havainnollistettu kuviossa 5. Oppilaiden testisuoritukset heikkenivät jonkin verran 7–8-luokilla kuudennen luokan tasosta, mutta paranivat hieman yhdeksännen luokan loppuun mennessä. Kun ajallisesti lähin eli edellisen kevättodistuksen matematiikan arvosana yhdistettiin kuvioon, voitiin verrata todistusten arvosanoja ja testisuorituksia. Testin ratkaisuprosentti vaihteli samansuuntaisesti kuin oppilaiden todistusarvosanat. Kuitenkin yläasteen loppuvaiheessa testisuoritukset näyttävät hieman paremmilta kuin matematiikan todistusarvosanat. Testin yhteisten osioiden (8 osiota) ratkaisuprosentti parani tasaisesti neljän vuoden seurannan aikana, kuvio 5. Muutos oli tilastollisesti merkitsevä siirryttäessä kuudennelta seitsemännelle luokalle (t-testi, $p = 0{,}007$) ja melkein merkitsevä yhdeksännen luokan syksystä kevääseen (t-testi, $p = 0{,}042$). Testitulosten perusteella voidaan arvioida, että peruslaskutaidot paranivat koko tarkastelujakson ajan. Tämä tapahtui siitä huolimatta, että yläasteella käytettiin matematiikan tunneilla laskinta ja testi oli suoritettava ilman laskinta. Sen sijaan vuosittain testiin otettavat lisäosiot näyttivät vaikeuttavan testiä. Oppilaiden matematiikan taitojen heikkenemisestä ei liene kysymys.



KUVIO 5 Matematiikan taitojen kehittyminen neljän vuoden seurannan aikana ja ajallisesti lähin matematiikan todistusarvosana

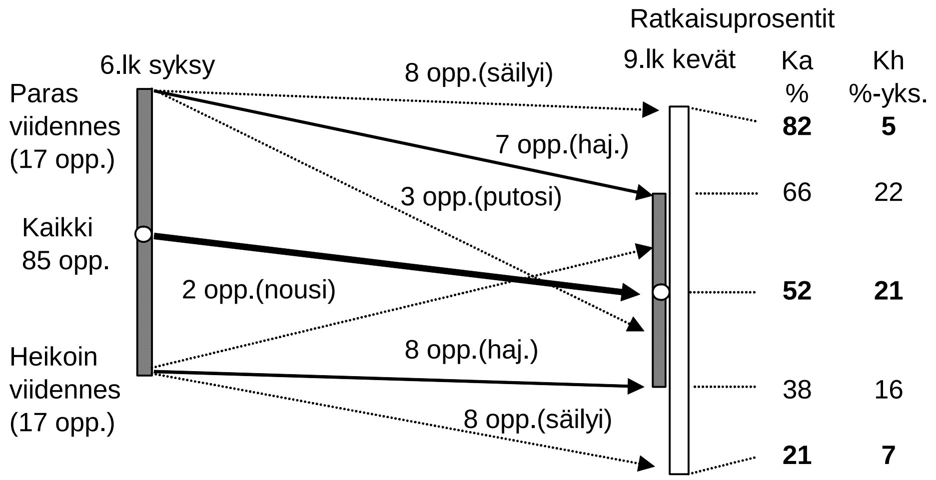
Tätä käsitystä tukee se, että yhdeksännen luokan lopussa testin ratkaisuprosentti oli kahdeksan prosenttiyksikköä parempi kuin luokan alussa, samalla testillä mitattuna. Voisi ajatella, että toistettaessa samaa testiä tapahtuu oppimisvaikutusta, mutta tässä tutkimuksessa tehtävien ratkaisuja ei kuitenkaan selitetty oppilaille eikä papereita palautettu. Myös lähes vuoden mittainen tauko peräkkäisten testien välillä merkinnee sitä, ettei tehtäviä juurikaan ratkaistu muistitiedon perusteella.

Oppilaiden matematiikan taitojen kehittymistä neljän vuoden seurannan aikana arvioitiin myös jakamalla koehenkilöjoukko kuudennen luokan alussa viidenneksiin testitulosten perusteella, kuvio 6. Todellisuudessa kaksi heikointa oppilasta jouduttiin jättämään tämän tarkastelun ulkopuolelle, koska he olivat poissa yhdeksännen luokan kevään mittauksesta. Kuviossa 16 on esitetty, miten parhaiten ja heikoimmin menestyneet oppilasjoukon viidennekset ovat ryhminä säilyttäneet asemansa neljän vuoden aikana. Näyttää siltä, että alussa heikoimmin menestyneet ovat parhaiten säilyttäneet suoritustasonsa (muutos – 5%-yks.), kun taas koko joukon suoritustaso on alentunut 13 prosenttiyksikköä ja parhaan viidenneksen 16 prosenttiyksikköä. Huomiota kiinnittää myös se, että seurannan aikana viidennesten ratkaisuprosenttien keskihajonnat ovat kasvaneet. Suurinta kasvu on ollut parhaassa viidenneksessä, jossa keskihajonta on muuttunut kuudesta prosenttiyksiköstä 20 prosenttiyksikköön eli kasvanut 14 prosenttiyksikköä. Muutos kuvaa sitä, että lähtötilanteessa varsin samansuuruiset ratkaisuprosentit ovat peruskoulun päättövaiheessa jakaantuneet laajemmalle alueelle. Tämä merkitsee myös sitä, että kuudennen luokan alussa matematiikan testissä hyvin menestyneistä osa on menestynyt selvästi heikommin päättövaiheen testissä.



KUVIO 6 Kuudennen luokan alussa muodostettujen viidennesten (N=17) testitulosten muuttuminen parhaan ja heikoimman viidenneksen osalta, Ka = testin ratkaisuprosenttien keskiarvo, Kh = keskihajonta

Parhaan ja heikoimman viidenneksen suoritusten välinen ero, joka oli alussa 49 prosenttiyksikköä oli seurannan aikana kaventunut 38 prosenttiyksikköön. Kun seurannan päättömittauksen perusteella tehtiin uusi jako samansuuruisiin viidenneksiin (kuvio 7), havaittiin, että parhaan ja heikoimman viidenneksen välinen ratkaisuprosenttien keskiarvojen ero oli kasvanut 49 prosenttiyksiköstä 61 prosenttiyksikköön.

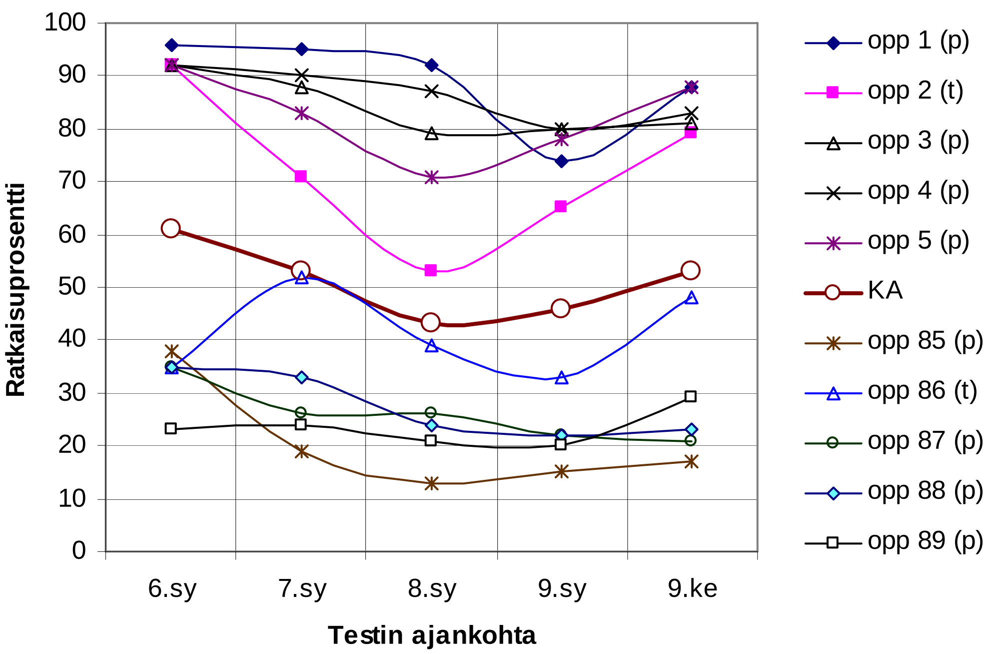


KUVIO 7 Kuudennen luokan alussa ja yhdeksännen luokan lopussa muodostettujen viidennesten (N=17) testitulokset parhaan ja heikoimman viidenneksen osalta, mustat palkit kattavat 6.lk syksyn ja valkoinen palkki 9.lk kevään viidennesten ratkaisuprosenttien keskiarvojen jakauman (N = 85)

Kuviosta 7 on lisäksi nähtävissä, että noin puolet eli kahdeksan oppilasta sekä heikoimmasta että parhaasta viidenneksestä on säilyttänyt tasonsa eli kuuluu seurannan päättyessä samaan viidennekseen kuin seurannan alkaessa. Parhaasta viidenneksestä kolmen oppilaan suoritustaso on pudonnut alle tutkimusjoukon keskiarvon. Vastaavasti heikoimman viidenneksen oppilaista kaksi on suoriutunut yli keskiarvon. Parhaan viidenneksen oppilaista seitsemän on hajaantunut alempiin, mutta kuitenkin yli keskitason suoriutuneisiin viidenneksiin.

Heikoimman viidenneksen oppilaista kahdeksan on noussut ylempiin, mutta kuitenkin alle keskitason suoriutuneisiin viidenneksiin.

Koehenkilöjoukon ääripäiden suoritustasoa arvioitiin vielä seuraamalla viiden parhaiten ja viiden heikoimmin menestyneen oppilaan matematiikan taitojen kehittymistä vuosittain kuudennen luokan alusta yhdeksännen luokan loppuun, kuvio 8. Kuudennen luokan alussa ja yhdeksännen luokan lopussa oppilaiden suoritustasot näyttivät olevan keskenään samassa ryppäässä, parhaat omassaan ja heikoimmat omassaan, vaikka välillä oli tapahtunut huomattavaa heilahtelua. Alku- ja lopputilanteessa sekä heikoimmin että parhaiten suoriutuneiden viiden oppilaan ryhmien tuottamat ratkaisuprosentit (kuvio 8) näyttivät olevan jokseenkin samaa tasoa kuin vastaavien viidennesten keskiarvot (kuviot 6 ja 7). Heikoimmin menestyneistä kuitenkin yksi oppilas oli noussut lähelle keskitasoa.



KUVIO 8 Viiden heikoimman ja viiden parhaan oppilaan matematiikan testien ratkaisuprosenttien kehittyminen neljän vuoden aikana, p = poika, t = tyttö

Seurannan perusteella näyttää siltä, että kuudennen luokan alussa parhaiten ja heikoimmin menestyneiden oppilaiden väliset tasoerot kaventuivat neljän vuoden aikana, kun asiaa tarkasteltiin oppilasryhmien (viidennesten) näkökulmasta. Oppilaskohtaiset suoritustasot muuttuivat kuitenkin siinä määrin, että todellisuudessa parhaiten ja heikoimmin menestyneiden oppilaiden välinen tasoero oli kasvanut ratkaisuprosentilla mitattuna noin 49 prosenttiyksiköstä 61 prosenttiyksikköön. Syyt näihin heilahteluihin eivät selviä tästä tutkimuksesta. Opettajakokemuksen perusteella arvelen, että eräät oppilaiden väliset sosiaaliset tekijät aiheuttavat osaltaan näitä suoritustasojen muutoksia. Käsittelen asiaa tarkemmin tulosten yhteenvedossa luvussa 7.4.

7.1.2 Oppilaiden taidot matematiikan osa-alueilla

Oppilaiden matematiikan taitoja seurattiin erityisesti murtolukujen ja esialgebran alueilla kuudennen luokan alusta lähtien ja prosenttilaskun alueella seitsemännen luokan alusta lähtien. Murtolukujen hallintaa mitattiin neljällä osiolla (7, 10, 12 ja 17, liite 1), joissa oli muutettava murtoluku desimaaliluvuksi, määritettävä rahamäärien suhde, sovellettava jaollisuutta ja vähennettävä murtoluku kokonaisluvusta. Esialgebran hallintaa puolestaan kuvaavat luonnollisen luvun seuraajan tunnistaminen (osio 4, liite 1) ja osittelulain soveltaminen luonnollisiin lukuihin (osio 6, liite 1). Taulukkoon 10 on koottu oppilaiden ratkaisuprosenttien keskiarvot ja keskihajonnat luokkatasoittain.

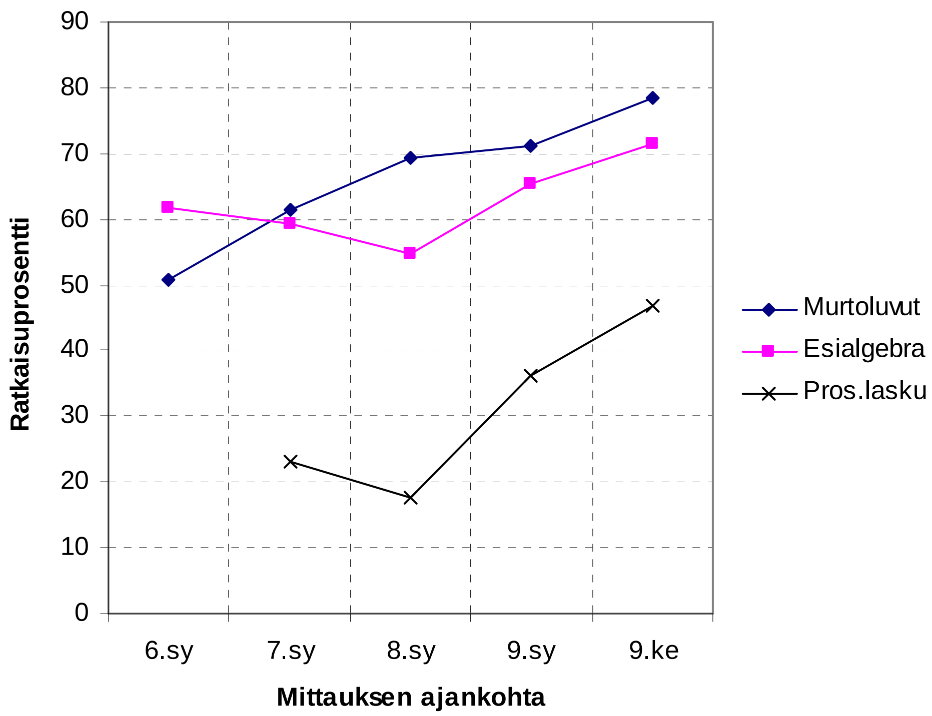
Prosenttilaskun osaaminen oli oma lukunsa. Sitä mitattiin kahdella osiolla: prosenttiluvun laskeminen (osio 24, liite 1) ja prosenttiosuuden laskeminen (osio 25, liite 1). Prosenttilaskun hallinta näytti kehittyvän samansuuntaisesti esialgebran kanssa (taulukko 10). Kuitenkin prosenttilaskun hallinta oli alkuvaiheessa noin 36 prosenttiyksikköä heikompaa kuin esialgebran hallinta. Peruskoulun päättyessäkin ero oli vielä noin 24 prosenttiyksikköä.

TAULUKKO 10 Pitkittäistutkimuksen ratkaisuprosenttien keskiarvot luokkatasoittain murtoluvuissa, esialgebrassa ja prosenttilaskussa sekä Cronbachin α

Matematiikan osa-alue		**6.sy**	**7.sy**	**8.sy**	**9.sy**	**9.ke**
Murtoluvut, 4 osiota	Ka (%)	50,8	61,4	69,4	71,2	78,5
	Kh (%-yks.)	29,4	30,8	31,3	31,3	28,1
	α	0,32	0,50	0,54	0,56	0,57
Esialgebra, 2 osiota	Ka (%)	61,8	59,2	54,7	65,3	71,4
	Kh (%-yks.)	35,9	37,0	35,9	38,6	34,3
	α	0,15	0,24	0,05	0,45	0,25
Prosenttilasku, 2 osiota	Ka (%)		23,0	17,7	36,2	46,7
	Kh (%-yks.)		32,2	29,6	40,4	36,6
	α		0,44	0,53	0,70	0,45
Oppilasmäärä		85	87	85	85	85

Prosenttilaskun tulokset vaikuttivat sikäli erikoisilta, että seitsemännen, kahdeksannen ja yhdeksännen luokan syksyllä keskihajonnat olivat suuremmat kuin ratkaisuprosenttien keskiarvot. Tilanne johtui ilmeisesti siitä, että prosenttilaskun pistemäärät noudattivat lähes binaarijakaumaa, jossa suurin frekvenssi oli pistemäärällä nolla.

Taulukossa 10 esitettyjä tuloksia havainnollistetaan kuviossa 9. Esialgebran hallinta näytti olevan kuudennen luokan alussa parempaa kuin murtolukujen hallinta (ratkaisuprosenttien ero t-testillä, p = 0,004). Kahdeksannen luokan alussa esialgebran osaaminen putosi kuitenkin murtolukujen osaamista alemmalle tasolle (t-testi, p = 0,000), mutta läheni taas murtolukujen osaamisen tasoa peruskoulun loppuvaiheessa. Yhdeksännellä luokalla matematiikan taidot paranivat kaikilla tässä esitetyillä osa-alueilla. Tämä siitä huolimatta, että opetuksen näkökulmasta kahdeksas luokka on yleensä vaikein kehitysvaihe. Näytti siltä, että prosenttilaskun taidot alkoivat varmistua vasta peruskoulun päättövaiheessa (kuvio 9). Tulos tukee osaltaan sitä käsitystä, että verrannollisuuden ymmärtäminen, johon prosenttilasku perustuu, kehittyy monilla oppilailla vasta yläasteen loppuvaiheessa.



KUVIO 9 Ratkaisuprosenttien keskiarvot luokkatasoittain murtoluvuissa, esialgebrassa ja prosenttilaskussa pitkittäistutkimuksessa

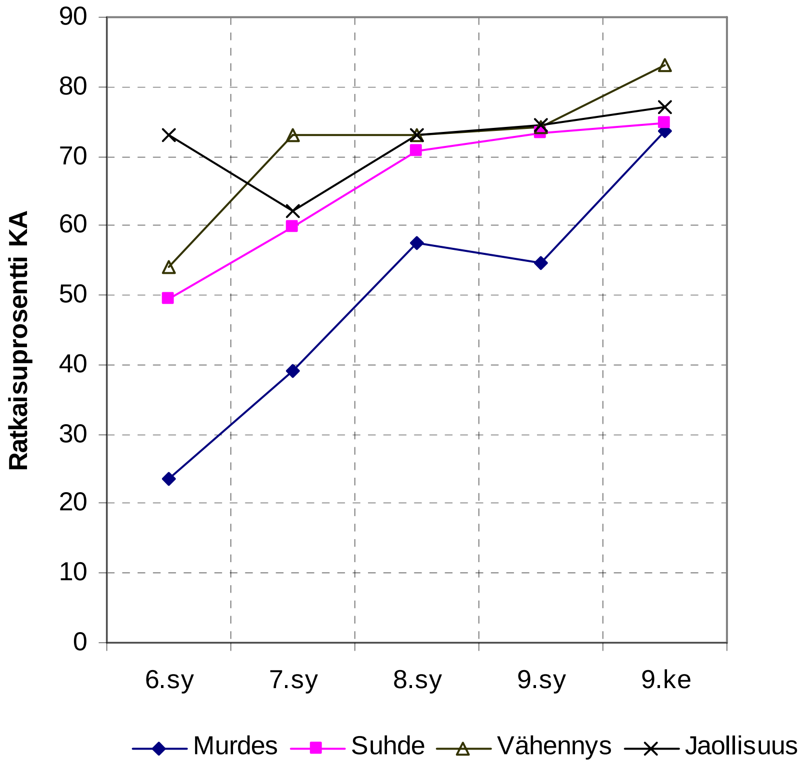
TAULUKKO 11 Prosenttilaskun taitojen riippuvuus sukupuolesta pitkittäistutkimuksessa

Sukupuoli	Ratkaisuprosenttien ka (oppilasmäärä)			
	7.sy	8.sy	9.sy	9.ke
Pojat	27,4 (54)	25,0 (52)	47,5 (52)	55,0 (52)
Tytöt	16,4 (33)	7,5 (33)	20,0 (33)	35,0 (33)
Ratkaisuprosenttien ero	+11,0	+17,5	+27,5	+20,0
Vapausaste	85	83	83	83
t-arvo	1,57	2,58	3,32	2,34
p-arvo	0,119	0,012	0,001	0,022

Tässä tutkimuksessa ei ollut tavoitteena selvittää poikien ja tyttöjen välisiä eroja matematiikan osaamisessa. Esimerkkinä voidaan kuitenkin mainita prosenttilasku, jossa sukupuolten väliset erot olivat suurimmat, taulukko 11. Tytöt hallitsivat prosenttilaskun hieman poikia heikommin (taulukko 11). Suurin ero havaittiin yhdeksännen luokan alussa.

7.1.3 Murtoluvut ja desimaaliluvut

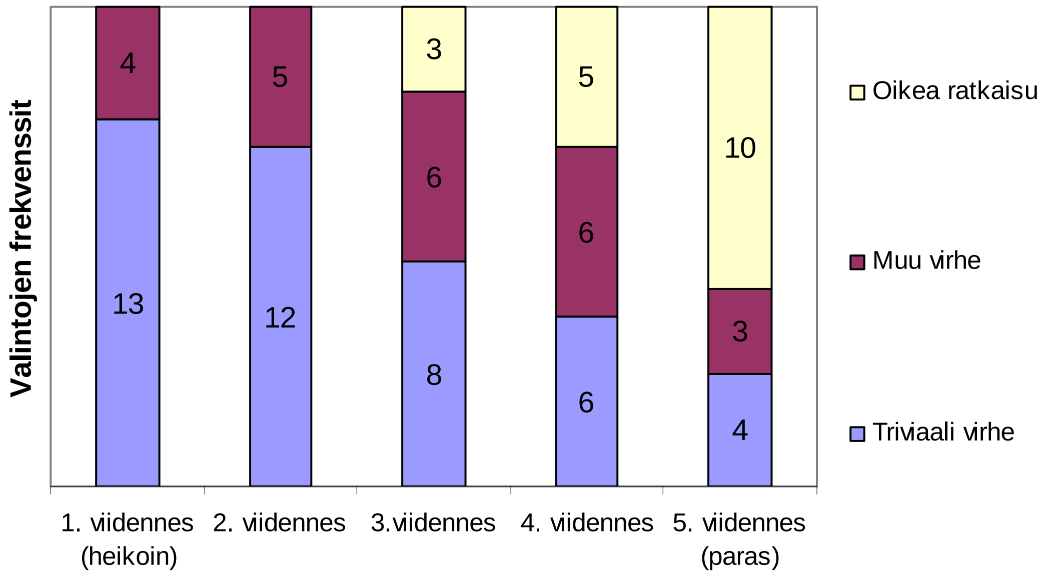
Murtolukuihin ja luonnollisten lukujen jaollisuuteen liittyviä yhteisiä osioita oli pitkittäistutkimuksessa neljä kappaletta. Osioiden 7, 10, ja 12 (liite 1) arvosteluasteikot olivat dikotomisia, joten niiden ratkaisutulosten kuvaamiseen riittävät oikeiden vastausten prosenttiosuudet. Yhtenäisyyden vuoksi ilmoitetaan myös tuottamistehtävästä 17 vain ratkaisuprosentit. Osiossa 7 piti muuttaa murtoluku desimaaliluvuksi. Osiossa 10 piti ilmoittaa annettujen penni- ja markkamäärien suhde. Osiossa 17 kokonaisluvusta vähennettiin murtoluku ja osio 12 oli sanallinen tehtävä luonnollisten lukujen jaollisuudesta. Tästä neljän osion kokonaisuudesta käytetään nimitystä murtoluvut, kun puhutaan pitkittäistutkimuksen mittareista.



KUVIO 10 Pitkittäistutkimuksen murtolukuihin liittyvien osioiden (liite 1) ratkaisuprosenttien keskiarvot luokkatasoittain
Murdes: murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi, osio 7
Suhde: penni- ja markkamäärien suhde, osio 10
Vähennys: murtoluvun vähentäminen kokonaisluvusta, osio 17
Jaollisuus: sanallinen tehtävä luonnollisten lukujen jaollisuudesta, osio 12

Kuviossa 10 on esitetty näiden osioiden ratkaisuprosenttien kehittyminen neljän vuoden aikana. Murtolukujen laskutaidot näyttivät paranevan koko seurannan ajan. Suhteen, vähennyslaskun ja jaollisuuden ratkaiseminen noudatti samaa linjaa seitsemännestä luokasta lähtien. Kuudennella luokalla jaollisuus oli ymmärretty hieman paremmin kuin muut murtolukuihin liittyvät kysymykset. Tämän tapaisissa arkielämän tilanteita kuvaavissa perustehtävissä voi odottaa korkeita onnistumisprosentteja. Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi asetti nuoremmille oppilaille enemmän haasteita kuin sanalliset tehtävät. Murto- ja desimaalilukujen symbolien hallinta oli kuudes- ja seitsemäsluokkalaisilla melko hataraa kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaisiin verrattuna.

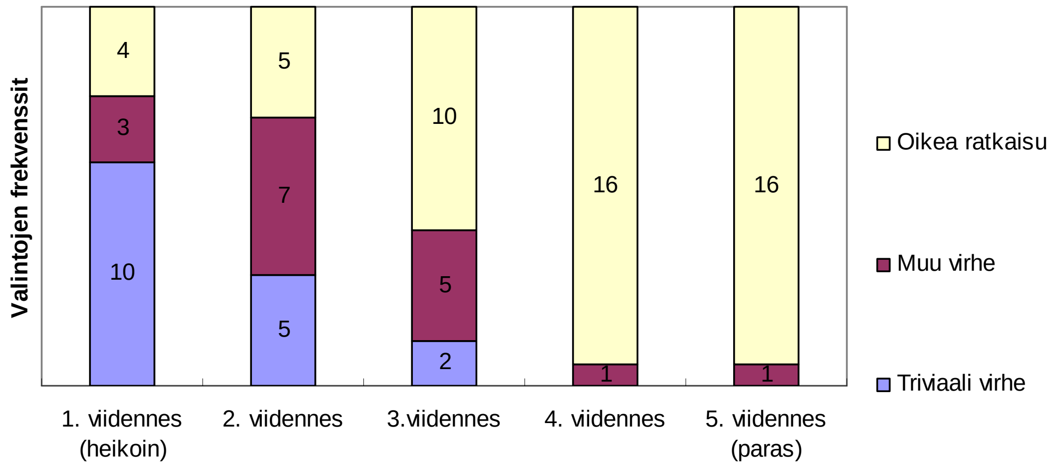
Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi nousi muutenkin erityisasemaan. Varsinkin nuoremmista oppilaista monet päätyivät visuaaliseen ratkaisuun 6/5 = 6,5. Oppilaiden tapaa muuttaa murtoluku desimaaliluvuksi analysoitiin vielä jakamalla koehenkilöjoukko viidenneksiin testitulosten perusteella. Jako uudistettiin kullakin testikerralla. Kuvion 11 perusteella kuudennen luokan alussa triviaalia virhettä (6/5 = 6,5) esiintyi kaikissa viidenneksissä, mutta oikeita ratkaisuja vain parhaissa viidenneksissä.



KUVIO 11 Murdes-tehtävän ratkaisutapojen jakauma oppilasjoukon viidenneksissä 6. lk. syksyllä; oppilaita kussakin viidenneksessä 17

Kuviosta 11 havaitaan, että kuudennen luokan alussa oppilaat tekivät triviaaleja ratkaisuja murdes-tehtävässä (eli valitsivat vaihtoehdon $\frac{6}{5} = 6{,}5$) riippumatta siitä, mihin viidennekseen he kuuluivat. Oikeita ratkaisuja oli selvästi eniten parhaassa viidenneksessä, joten murdes-tehtävä erotteli kuudennen luokan alussa hyvin matematiikkaa osaavat. Seitsemännestä luokasta lähtien triviaaleja valintoja ei esiintynyt parhaassa viidenneksessä. Triviaalit valinnat alkoivat kasaantua heikoimpaan viidennekseen.

Kahden vuoden kuluessa eli kahdeksannen luokan alkuun mennessä tilanne oli muuttunut, kuvio 12. Oikeita ratkaisuja esiintyi kaikissa viidenneksissä, mutta triviaaleja virheitä ei enää esiintynyt kahdessa parhaassa viidenneksessä. Triviaalit valinnat vähenivät siten, että yhdeksännen luokan lopussa triviaalin valinnan teki enää neljä oppilasta. Kahdeksannen luokan alussa murdes-tehtävä näyttäisi osoittavan heikosti matematiikkaa osaavat, muttei enää yhtä selvästi hyvin matematiikkaa osaavia kuin kuudennen luokan alussa.



KUVIO 12 Murdes-tehtävän ratkaisujen jakauma oppilasjoukon viidennesten kesken, 8.lk syksyllä

Kun oppilaiden ratkaisutapaa murdes-tehtävässä seurattiin kuudennen luokan alusta yläasteen loppuun, havaittiin, että niistä 13 heikoimman viidenneksen oppilaasta, jotka aluksi tekivät triviaalin valinnan, vain kolme teki saman valinnan kaikissa viidessä testissä. Sen sijaan alussa oikean valinnan tehneistä kymmenestä parhaan viidenneksen oppilaasta kahdeksan teki oikean valinnan myös kaikissa myöhemmissä testeissä.

7.1.4 Verranto ja prosenttiluku

Testeihin sisältyi verrannollisuuteen perustuva sanallinen tehtävä (osio 21, liite 2), jonka ratkaiseminen ei perustunut mihinkään ennalta tuttuun matemaattiseen malliin. Prosenttilaskuissa oli vastaavaan asetelmaan liittyvä tehtävä (osio 22, liite 2), jossa piti laskea prosenttiluku. Matemaattisen ratkaisumallin kannalta tehtävät vaikuttivat samantasoisilta.

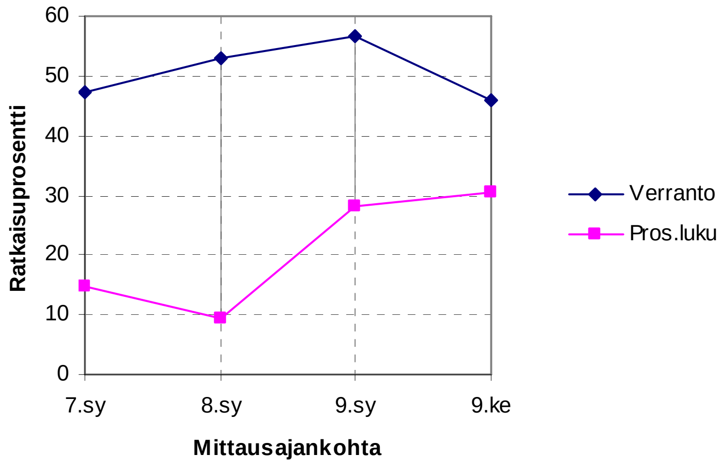
Osio 21: *Liikenteen tarkkailussa havaittiin, että kahdeksan autoilijaa kymmenestä käytti turvavyötä. Kuinka monta autoilijaa 35:stä käyttää turvavyötä, jos turvavyön käyttäminen on yhtä yleistä kuin edellä mainitussa tapauksessa?*

Ratkaisun verrantomalli $\frac{8}{10} = \frac{x}{35}$

Osio 22: *Tarhassa on 9 mustaa ja 16 harmaata lammasta. Kuinka monta % lampaista on mustia?*

Ratkaisun verrantomalli $\frac{9}{9+16} = \frac{x}{100}$

Kuviossa 13 on esitetty verrantotehtävän (osio 21) ja prosenttilukutehtävän (osio 22) ratkaisuprosenttien kehittyminen yläasteen aikana.



KUVIO 13 Verrannon ja rakenteellisesti vastaavan prosenttitehtävän ratkaiseminen luokilla 7–9 seurantatutkimuksessa (7.lk N=87, muut luokat N= 85), osioiden ratkaisuprosenttien eron merkitsevyys 9.lk keväällä, t-testillä, p = 0,002

Näyttää siltä (kuvio 13), että verrantotehtävän osasi ratkaista suunnilleen puolet tarkasteltavasta oppilasjoukosta. Taidot eivät juuri muuttuneet yläasteen aikana.

7.1.5 Esialgebran taitojen kehittyminen

Esialgebran taitoja mitattiin kahdella osiolla, jotka olivat mukana kaikilla testauskerroilla. Osiossa 5 (liite 1) oli etsittävä luonnollisen luvun a seuraaja. Osiossa 8 sovellettiin kertolaskun osittelulakia luonnollisiin lukuihin.

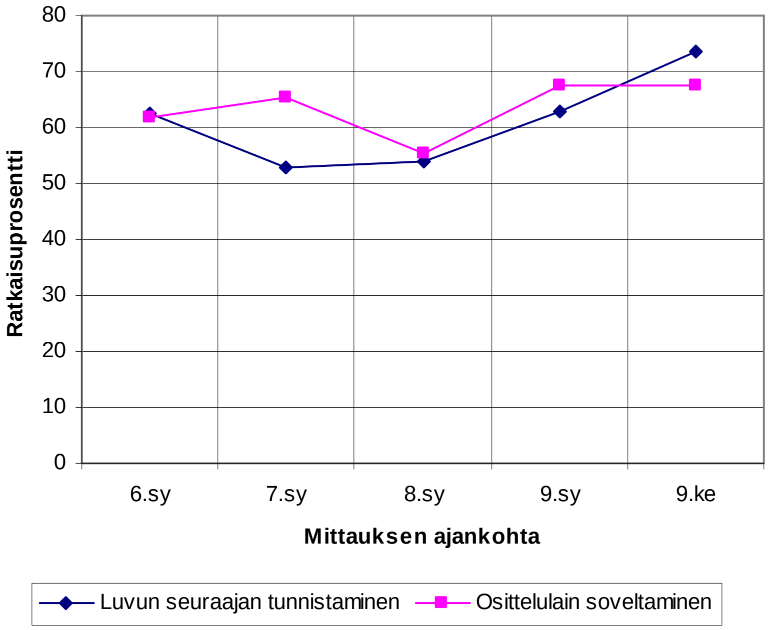
Osio 5. *Olkoon a jokin luonnollisista luvuista 1, 2, 3,... Mikä on silloin lukua a seuraava luonnollinen luku?*

A $a + 1$ *B* $a - 1$ *C* $a - 10$ *D* $a + 10$ *E* $10\,a$

Osio 8. *Mikä seuraavista lausekkeista on yhtä suuri kuin* $7 \cdot (3 + 9)$?

A $(7 \cdot 3)+(7 \cdot 9)$ *B* $(7 \cdot 9)+(3 \cdot 9)$ *C* $(7 \cdot 3)+(3 \cdot 9)$ *D* $7 \cdot 27$ *E* $21 \cdot 9$

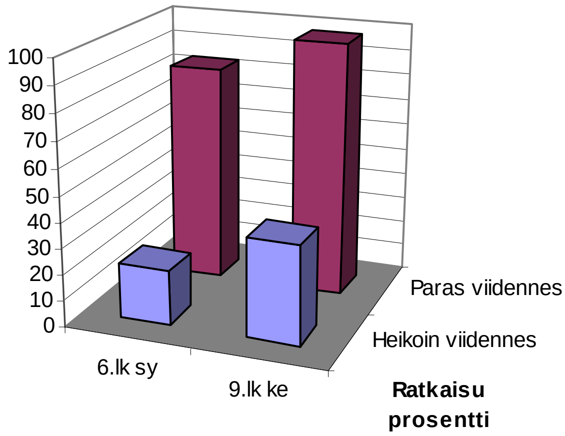
Myöhemmin mukaan otettuja esialgebran tai algebran lisäosioita ei analysoida tässä yhteydessä. Ne ovat mukana vain testin kokonaispistemäärää laskettaessa. Kuviossa 14 on esitetty esialgebran osioiden ratkaisuprosentit luokka-asteittain.



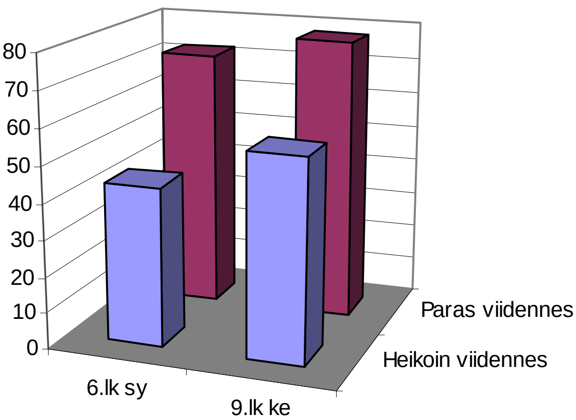
KUVIO 14 Esialgebran osioiden ratkaisuprosenttien keskiarvot luokkatasoittain pitkittäistutkimuksessa (7.lk N = 87, muut N = 85)

Vertailun vuoksi murtolukuihin (kuvio 15) ja esialgebraan (kuvio 16) liittyviä taitoja arvioitiin myös oppilasjoukon heikoimmassa ja parhaimmassa viidenneksessä. Kuudennen luokan alussa havaittiin peräti 63 prosenttiyksikön ero murtolukutaidoissa oppilaiden parhaimman ja heikoimman viidenneksen välillä, kuvio 15. Yhdeksännen luokan lopussakin heikoin viidennes ylsi alle puoleen (38 %) siitä mitä paras viidennes (98 %). Sen sijaan esialgebran taidoissa, kuvio 16, heikoin viidennes (44 %) ylsi jo kuudennen luokan alussa yli puoleen siitä mitä paras viidennes (72 %) ja peruskoulun päättyessä viidennekset olivat hieman lähentyneet toisiaan (heikoin 56 % ja paras 78 %).

Näiden ryhmien koostumus oli sellainen, että niistä oppilaista, jotka kuudennen luokan alussa kuuluivat joko parhaaseen tai heikoimpaan viidennekseen, yhdeksännen luokan lopussa suunnilleen puolet kuului edelleen samaan viidennekseen. Näyttää siltä, että oppilaiden väliset erot murtolukutaidoissa ovat suurempia kuin esialgebran taidoissa. Lisäksi puutteet murtolukutaidoissa vaikuttavat pysyvämmiltä kuin puutteet esialgebran taidoissa.



KUVIO 15 Heikoimman (N=17) ja parhaimman (N=17) viidenneksen ratkaisuprosentit murtolukutehtävissä pitkittäistutkimuksen alussa ja lopussa



KUVIO 16 Heikoimman (N=17) ja parhaimman (N=17) viidenneksen ratkaisuprosentit esialgebran tehtävissä pitkittäistutkimuksen alussa ja lopussa

Parhaiden oppilaiden esialgebran taidot eivät myöskään näytä kehittyneen yläasteen aikana samassa määrin kuin heikoimpien oppilaiden vastaavat taidot. Tulosten merkitystä arvioitaessa on syytä muistaa, että esialgebran tehtävillä oli huomattavan alhainen korrelaatio testin kokonaispistemäärään. Alhaista korrelaatiota selittää osaltaan se, että oppilaiden vastaukset peräkkäisinä vuosina olivat epäjohdonmukaisia. Esimerkiksi kuudennella luokalla osioon 5 (luonnollisen luvun seuraajan tunnistaminen) oikein vastanneista 53 oppilaasta suunnilleen puolet vastasi väärin vuotta myöhemmin.

7.1.6 Koulumatematiikassa menestymisen ennustaminen neljän vuoden päähän

Tarkastelen seurannan aikana ilmennyttä kehitystä kuudennesta yhdeksänteen luokkien oppilaiden matematiikan osaamisessa toisaalta koehenkilöjoukon sisäisenä muutoksena ja toisaalta matematiikan osa-alueiden hallinnassa tapahtuneena muutoksena. Lähinnä murtolukuihin ja esialgebraan liittyvien testisuoritusten perusteella saatiin viitteitä myös oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittymisestä. Vuoden välein toteutettu matematiikan testi koostui kahdeksasta peruslaskutaitoja mittaavasta tehtävästä (testien yhteiset osiot, 8 osiota) ja vuosittain muuttuvista lisätehtävistä (11–22 osiota).

Kuudennen luokan alussa poikien ja tyttöjen matematiikan taidoissa ei havaittu eroja. Vasta seitsemännen luokan jälkeen alkoi näkyä selkeitä eroja. Erot olivat suurimmillaan yhdeksännen luokan alussa. Näytti siltä, että prosenttilaskut ja jossakin määrin myös murtolukulaskut tuottivat tytöille enemmän ongelmia kuin pojille.

Pitkittäistutkimuksen perusteella näytti siltä, että parhaiten ja heikoimmin matematiikassa menestyvien oppilaiden väliset tasoerot kasvoivat kuudennen luokan alusta peruskoulun loppuun mennessä. Kuitenkaan yksittäisen oppilaan kannalta ei voi tarkasti ennustaa tulevaa matematiikassa menestymistä neljän vuoden päähän. Vain puolet parhaiten ja heikoimmin menestyneistä oppilaista säilytti suhteellisen tasonsa seurannan alusta sen loppuvaiheeseen.

Matematiikan osa-alueiden kannalta peruslaskutaidot kehittyivät tasaisesti koko seurannan ajan. Kiinnostavaa oli, että prosenttilaskun hallinta parani ratkaisevasti vasta kahdeksannen luokan aikana. Vaikeudet murtolukulaskuissa näyttivät varsin pysyviltä. Yksittäisenä toimenpiteenä oppilaan tapa muuttaa murtoluku desimaaliluvuksi (murdes-osio) näytti ennustavan oppilaan menestymistä muillakin matematiikan osa-alueilla. Visuaalinen tulkinta ($6/5 = 6{,}5$) näytti myös liittyvän matemaattisen ajattelun alkeellisuuteen.

Esialgebran tehtävät olivat samat koko seurannan ajan. Ilmeisesti tehtävien monivalintarakenne oli sellainen, että se aiheutti tavallista enemmän satunnaisvaihtelua, koska tehtäväryhmän reliaabelius oli ajoittain erittäin matala. Kuvaavaa oli, että esimerkiksi muuttujan lausekkeen tunnistamisessa oikean valinnan tehneistä (50–60 % oppilaista) saattoi puolet tehdä vuotta myöhemmin virheellisen valinnan. Vaikutti siltä, että kuudes- ja seitsemäsluokkalaisten matemaattisessa ajattelussa luku $a + 1$ ei merkinnyt luonnollisen luvun a seuraajaa, vaan jotakin muuta.

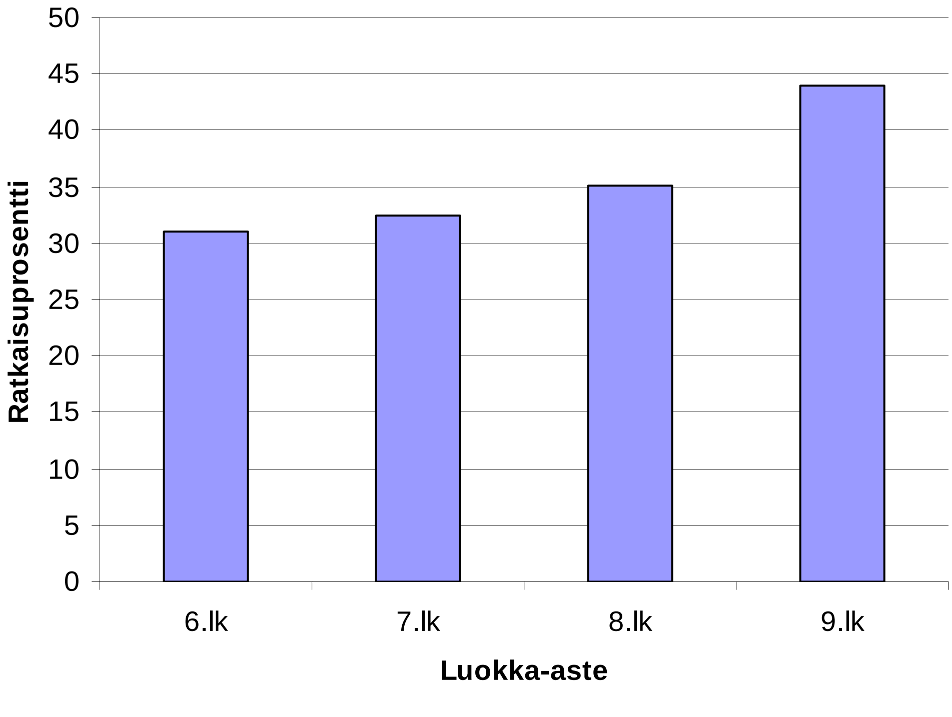
Esialgebrassa erot parhaiten ja heikoimmin menestyneiden välillä olivat pienempiä kuin murtolukualueella. Yläasteen loppuun mennessä erot vielä kaventuivat. Lisäksi näytti siltä, että parempien oppilaiden valmius osittelulain soveltamiseen suorastaan heikkeni yläasteen aikana. Havaintoja esialgebran taidoista voidaan tässä vaiheessa pitää ainoastaan viitteinä, koska testi oli siltä osin suppea eikä toiminut kovin johdonmukaisesti. Esialgebran ja algebran osaamista tarkastellaan laajemmin poikittaistutkimuksessa.

7.2 Verrannollisuuden hallinta ja algebran ymmärtäminen luokilla 6–9 poikittaistutkimuksessa

Tässä alaluvussa tarkastellaan poikittaistutkimuksen tuloksia oppilaiden matemaattisen ajattelun kannalta. Ensin arvioidaan kuitenkin yleistä matematiikan osaamista eri luokka-asteilla. Kohdassa 7.2.2 tarkastellaan oppilaiden ratkaisuja murtolukutehtävissä ja niiden merkitystä verrannollisuuden soveltamisen kannalta.

7.2.1 Matematiikan yleinen osaaminen

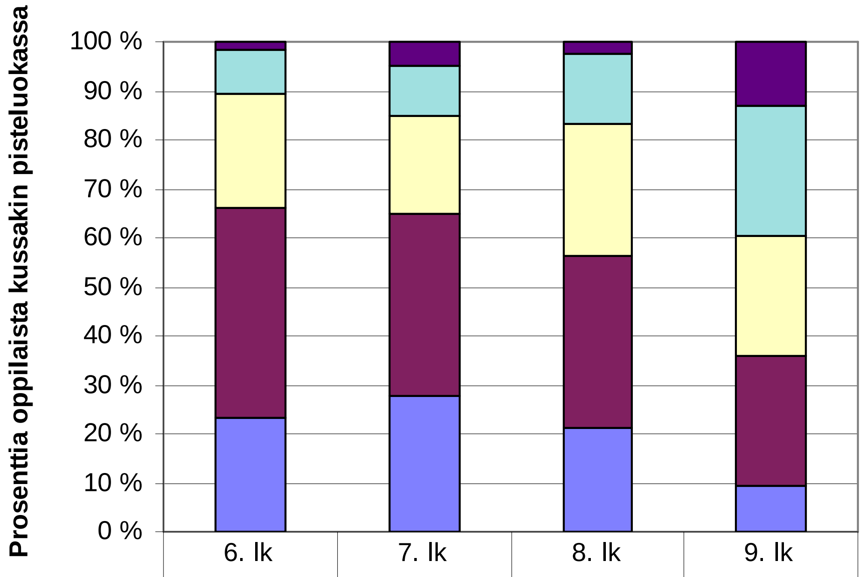
Ongelma 1.1
Poikittaistutkimuksen perusteella saatiin yleiskuva oppilaiden matematiikan osaamisesta verrannollisuuden ja algebran alueilla. Kuviossa 17 on esitetty matematiikan testitulokset luokka-asteittain ratkaisuprosenttien keskiarvoja käyttäen. Kaikille oppilaille esitettiin sama testi (tämä yhteinen osuus käsitellään ilman prosenttilaskuja).



KUVIO 17 Ratkaisuprosenttien keskiarvot luokkatasoittain poikittaistutkimuksessa

Luokka-aste	6.	7.	8.	9.	Yht.
Ka (%)	31,0	32,4	35,1	44,0	35,9
Kh (%-yks.)	18,5	22,5	21,0	23,5	22,3

Luokka-asteiden väliset erot ja niiden merkitsevyydet ovat tarkemmin liitteessä 9. Kuvion 17 perusteella kuudennen ja seitsemännen luokan suorituksissa oli vain vähäisiä tasoeroja. Seitsemännen ja kahdeksannen luokan välinen ero oli jo huomion arvoinen (t-testi, p = 0,015). Tilastollisesti erittäin merkitsevä muutos oli kuitenkin tapahtunut siirryttäessä kahdeksannelta yhdeksännelle luokalle (t-testi, p = 0,000). Koska mittaukset tehtiin lukuvuoden alussa, tämä viittaa siihen, että erityisesti kahdeksannen luokan opiskelu oli tuottanut tulosta. Tämä oli sikäli mielenkiintoinen havainto, että monen opettajan mielestä juuri kahdeksannella luokalla on vaikea motivoida oppilaita matematiikan opiskeluun.



	6. lk	7. lk	8. lk	9. lk
12 - 15 pist.	1.8	5	2.6	12.9
9 - 11 pist.	8.9	10.1	14	26.6
6 - 8 pist.	23.2	19.9	26.9	24.4
3 - 5 pist.	42.9	37.2	35.1	26.6
0 - 2 pist.	23.2	27.8	21.4	9.5

KUVIO 18 Oppilaiden jakaantuminen luokkatasoittain pisteluokkiin poikittaistutkimuksessa (N=1019)

Tutkimuksen osanottajat jaettiin suoritusten mukaan viiteen pisteluokkaan, kuvio 18. Jakaumat muistuttavat toisiaan siten, että kaikilla luokka-asteilla pisteluokkiin 3–5 ja 6–8 kuuluu yhteensä noin 51–66 % oppilaista. Yhdeksäs luokka erottuu muista ratkaisevasti alimpaan ja ylimpään pisteluokkaan kuuluvien osalta. Kun alempien luokkien oppilaista kuuluu heikoimpaan pisteluokkaan yli 20 %, yhdeksännellä luokalla vastaava osuus on alle 10 %. Kahteen ylimpään pisteluokkaan kuuluu yhdeksäsluokkalaisista noin 40 %, kun osuus alemmilla luokilla on 11–17 %.

Kuvion 18 perusteella näyttää siltä, että suoritusten kohoaminen peruskoulun viimeisillä luokilla perustuu pääosin siihen, että heikoimpien suoritusten määrä vähenee ja parhaiden lisääntyy. Keskitason suoritusten määrä muuttuu huomattavasti vähemmän. Muutos sinänsä lienee sellainen, että oppilaita siirtyy kautta linjan ylempiin pisteluokkiin, mutta lopputulos on edellä kuvatun kaltainen.

7.2.2 Algoritmit verrannollisuuden soveltamisessa

Ongelma 2.1
Poikittaistutkimuksessa testattiin verrannollisuuden osaamista murtolukujen laskutoimituksissa, murtolukujen soveltamisessa ja sanallisissa verrantotehtävissä. Ensimmäisenä tehtävänä (osio 4) oli murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi.

Osio 4 *Murtoluku* $\frac{5}{4}$ *on desimaalilukuna*

A	*5,4*	*B*	*1,4*	*C*	*1,1*	***D***	***1,25***	*E*	*1,05*

Murtoluvun muuttamisen desimaaliluvuksi ($\frac{5}{4} = 1{,}25$) hallitsi 56,5 % koehenkilöistä, kun vastaus oli valittava viidestä vaihtoehdosta. Kuitenkin 26,5 % vastaajista valitsi ”visuaalisen tulkinnan” ($\frac{5}{4} = 5{,}4$). Voisi ajatella, että murtoviivan tulkinta desimaalipilkkua vastaavaksi määritteeksi on vain pieni kömmähdys. Tarkempi analysointi kuitenkin osoitti, että tämän virhetulkinnan taakse kätkeytyi syvällisempiäkin ongelmia matematiikan ymmärtämisessä. Murtolukujen laskusääntöjä, lähinnä kertolaskun ja laventamisen välisen eron tuntemusta, testattiin osiossa 5.

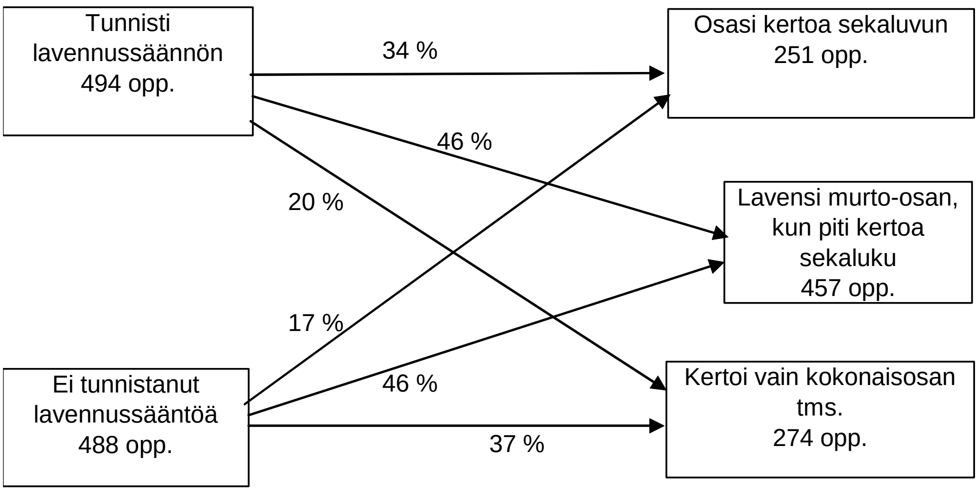
Osio 5. *Jos murtoluvun osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla*

		Prosenttia vastanneista (N= 982)
A	*murtoluvun arvo pienenee*	*8,0*
B	***murtoluvun arvo säilyy***	***50,3***
C	*murtoluvun arvo suurenee*	*17,7*
D	*tulos riippuu siitä, onko kertoja suurempi kuin 1 vai pienempi kuin 1*	*16,7*
E	*tehtävää ei voi ratkaista annettujen tietojen perusteella*	*7,3*

Osio 6 *Kertolaskun* $4 \cdot 5\frac{3}{8}$ *tulos on*

		Prosenttia vastanneista (N = 997)
A	$21\frac{1}{2}$	***24,4***
B	$20\frac{12}{32}$	*46,7*
C	$20\frac{3}{8}$	*23,6*
D	$\frac{23}{8}$	*2,5*
E	$\frac{172}{32}$	*2,8*

Osion 5 vastaajista 50,3 % osasi valita oikean vaihtoehdon. Mutta kun seuraavassa tehtävässä (osio 6) piti kertoa sekaluku kokonaisluvulla ($4 \cdot 5\frac{3}{8}$), siinä onnistui neljännes oppilaista ja vain 34,5 % laventamissäännön (osio 5) tunnistaneista, kuvio 19. Enemmistö heistä lavensi (vaihtoehto B, osio 6), kun piti kertoa. Toisaalta lähes neljäsosa vastaajista kertoi sekaluvun kokonaisosan ja jätti murto-osan kokonaan kertomatta (vaihtoehto C). Laventaminen ja kertominen näyttivät sotkeentuneen toisiinsa. Vaikuttaa siltä, että laventamisen ja kertomisen laskusäännöt ovat monille vain joitakin murtolukuihin viittaavia kielellisiä ilmaisuja.



KUVIO 19 Laventamissäännön tunnistaminen (osio 5) ja sekaluvun kertominen (osio 6) poikittaistutkimuksessa

Kuviossa 19 on verrattu laventamissäännön tunnistamista ja sekaluvun kertomista. Laventamissäännön tunnisti (osio 5) suunnilleen puolet vastaajista, mutta heistä vain kolmannes osasi seuraavassa tehtävässä (osio 6) kertoa sekaluvun kokonaisluvulla. Vastaavasti lähes puolet oppilaista lavensi, kun piti kertoa murtoluku, riippumatta siitä, olivatko he tunnistaneet laventamissäännön vai eivät. Edelleen 17 % niistä, jotka eivät tunnistaneet laventamissääntöä, osasi kuitenkin kertoa sekaluvun kokonaisluvulla. Näyttää siltä, että huomattava osa oppilaista ei todellisuudessa ymmärrä, mitä eroa on kertomisella ja laventamisella.

TAULUKKO 12 Triviaalien virheiden esiintyminen eri luokka-asteilla murtolukujen algoritmeihin liittyvissä tehtävissä poikittaistutkimuksessa

Osio	Triviaali virhe	Prosenttia luokkatason oppilaista			
		6.lk	7.lk	8.lk	9.lk
4	Valittu $\frac{5}{4} = 5{,}4$	38,4	34,3	22,3	18,5
6	Valittu $4 \cdot 5\frac{3}{8} = 20\frac{12}{32}$	**42,9**	37,5	54,0	**43,3**
7	Valittu $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2+3}{3+5} = \frac{5}{8}$	72,3	38,5	58,3	48,3

Osion 6 tulkinta, jossa murtoluku lavennetaan kertomisen asemasta, oli yhtä yleinen kuudennella ja yhdeksännellä luokalla (noin 43 % oppilaista), taulukko 12. Havaitaan, että triviaali virhe osiossa 4 esiintyy yli kolmanneksella kuudes ja seitsemäsluokkalaisista. Ylemmillä luokilla kyseinen virhe vähenee noin viidennekseen oppilaista. Murtolukujen soveltamiseen liittyivät osiot 7 ja 8. Molemmat osoittautuivat vaikeiksi sekä paremmin että heikommin testissä menestyneille oppilaille.

Osioiden reliaabeliudet jäivät alhaisiksi, Cronbachin α oli –0,026 osiossa 7 ja 0,045 osiossa 8. Tämän takia kyseiset osiot sivuutettiin testin yhteispistemääriä tarkasteltaessa. Osiokohtaisesti analysoimalla saatiin kuitenkin tarpeellista tietoa oppilaiden ratkaisutavoista. Osiossa 7 havaittiin (liite 6), että sanallisessa murtolukutehtävässä yli puolet oppilaista (N = 994) valitsi vaihtoehdon, jossa oli laskettu osoittajat yhteen ja nimittäjät yhteen. Vaikka ratkaisu osoitti matemaattisessa mielessä puutteellista käsitteiden hallintaa, se oli kuitenkin käytännön kannalta järkevä, koska tulos (5/8 = 0,625) oli numeerisesti hyvin lähellä oikeaa arvoa (12/19 ≈ 0,632). Tehdyistä valinnoista ei voitu päätellä, oliko oppilas päätynyt vaihtoehtoon järkeilemällä vai valitsemalla ensimmäisenä mieleen tulevan (virheellisen) algoritmin.

Osio 8 *Hakkaraisen perhe päätti maalauttaa omakotitalonsa kuistin. Kahdelta maalarilta tiedusteltiin työhön kuluvaa aikaa. Mikkonen sanoi maalaavansa kuistin 8 tunnissa ja Timonen 6 tunnissa. Koska työllä oli kiire, Hakkaraiset päättivät palkata molemmat maalarit. Kuinka kauan heiltä kesti maalauksen suorittaminen yhdessä? Esitä päättelyt ja perustelut.*

Osion 8 ratkaisemisessa (taulukko 13) onnistui vain kaksi oppilasta. Puolet vastaajista (N = 877) ilmoitti työn suoritusajaksi 7 tuntia, mikä on erillisten suoritusaikojen 6 tuntia ja 8 tuntia keskiarvo. Tämä tulos oli jokseenkin yhtä yleinen kuudesluokkalaisilla (n. 46 % vastaajista) ja yhdeksäsluokkalaisilla (n. 43 % vastaajista).

TAULUKKO 13 Osion 8 ratkaisutapojen luokittelu ja vastaajien prosenttijakauma näiden luokkien kesken

Kahden työntekijän kuluttama aika	$3\frac{3}{7}\,h$	$3\frac{1}{2}h$ *tai* $\langle 6h$	7 h	14 h tai jokin muu
Ratkaisun tulkinta	**Oikea ratkaisu**	Järkevä arvio	Keskiarvo	Yhteenlasku 6h + 8 h = 14 h
Vastaajien jakauma (%, N=877)	**0,2**	33,4	49,9	16,5

Oppilaiden tulkinta näytti kytkeytyvän harhakuvaan lineaarisuudesta eli suoraan verrannollisuudesta, vaikka tehtävässä oli kyse kääntäen verrannollisuudesta. Samalla kun oppilas tukeutui lineaarisuuteen tai keskiarvon laskemisen algoritmiin, hän näytti unohtavan yhteyden todellisuuteen. Miten on ymmärrettävissä, että kahdelta henkilöltä kuluu tietyn työn suorittamiseen 7 tuntia, kun toinen heistä olisi voinut tehdä työn yksinään 6 tunnissa. Vielä suurempi ristiriita arkitodellisuuden kanssa oli niillä oppilailla, jotka päätyivät tulokseen 14 tuntia (6 + 8 = 14). Tällaisen tuloksen sai noin 16 % vastaajista.

7.2.3 Verrannollisuuden hallinnan yhteys prosenttilaskun hallintaan

Ongelma 2.1
Pitkittäistutkimuksessa ilmenneitä yhteyksiä verrannollisuuden ja prosenttilaskun välillä haluttiin vielä varmistaa poikittaistutkimuksessa. Näitä yhteyksiä mitattiin osioilla 9, 12 ja 24.

Osio 9. *Kati ja Miia tarkkailivat ohikulkevia poikia. He havaitsivat, että kolmella pojalla kahdeksasta oli siniset farkut.Oletetaan, että sinisten farkkujen käyttö koulun pojilla on yhtä yleistä kuin edellä mainituissa tapauksissa. Kuinka moni koulun 72 pojasta käyttää sinisiä farkkuja?*

Toteutuneiden ratkaisutapojen luokittelu on esitetty taulukossa 14.

TAULUKKO 14 Osion 9 ratkaisuvaihtoehtojen luokittelu ja vastaajien jakauma luokkien kesken

Ratkaisutapa	Prosenttia vastaajista N = 811
Suhteet $\frac{3}{8}$ ja 72:8 = 9 tulo 9 · 3 = **27**	**42,8**
Suhde $\frac{3}{8}$ tai 72:8 = 9 jatko virheellinen	9,7
Laskettu 72:3 tai 72:5 tai 72 – 3 – 5	23,1
Muu virheellinen menettely	24,4

Osio 9 muodostui varsin pitkästä sanallisesta selityksestä. Joidenkin oppilaiden saattoi olla vaikea hahmottaa näin pitkää kokonaisuutta. Siitä huolimatta 42,8 % vastaajista päätyi oikeaan ratkaisuun. Ratkaisutapa 3 näytti pohjautuvan siihen, että pantiin osa (3 tai 5) vastaamaan kokonaisuutta tai suhteellinen osuus yritettiin laskea vähentämällä. Reilu viidennes 23,1 % tukeutui tällaiseen ratkaisutapaan, jonka katsottiin tämän tehtävän kohdalla merkitsevän alkeellisinta ajattelutapaa, joka oli kuitenkin selvästi luokiteltavissa.

Osio 12. *Kauhallinen pilkkisaalista sisälsi 8 särkeä ja 17 ahventa. Kuinka monta särkeä tämän perusteella voidaan arvioida olevan 100 kalan pilkkisaaliissa?*

Osio 12 sisälsi lyhyen sanallisen selityksen, jonka tulkitsi oikein yli puolet vastaajista (N=758). Osioissa 9 ja 12 vertailtiin lukumääriä niiden suhteen perusteella. Osion 9 ratkaisu perustui verrantoon $\frac{3}{3+5}=\frac{x}{72}$ ja osion 12 ratkaisu verrantoon $\dfrac{8}{8+17}=\dfrac{x}{100}$. Osiossa 12 esiintyneet ratkaisutavat on luokiteltu taulukossa 15.

TAULUKKO 15 Osion 12 ratkaisuvaihtoehtojen luokittelu ja vastaajien jakauma näiden luokkien kesken

Ratkaisutapa	Prosenttia vastaajista N = 758
Verranto $\frac{8}{25}=\frac{x}{100}$ tai suhde $\frac{8}{25}$ ja oikea tulos **32**	**56,3**
Suhde $\frac{8}{25}$ tai summa 25, mutta tulos > 100	6,3
Satunnainen laskutoimitus 100:8 tai 100 – 8 – 17	15,7
Muu virheellinen menettely	21,7

Oikeiden ratkaisujen osuudet olivat 42,8 % vastanneista (N = 811) osiossa 9 ja 56,3 % (N = 758) osiossa 12. Kun jälkimmäiseen verrantoon johtava tehtävä esitettiin prosenttilaskun muodossa (osio 24), oikein vastasi 29,3 % oppilaista (N = 650).

Osio 24 *Luokalla on 17 poikaa ja 8 tyttöä. Kuinka monta prosenttia luokan oppilaista on poikia?*

Näyttää siltä, että kun verrantotehtävissä (osiot 9 ja 12) oppilaat saivat järkeillä ratkaisunsa ilman ennalta arvattavia algoritmeja, he onnistuivat paremmin, kuin soveltaessaan prosenttilaskun algoritmeja. Ehkä he eivät olleet myöskään tottuneet käsittelemään prosenttilaskuja verrantojen avulla.

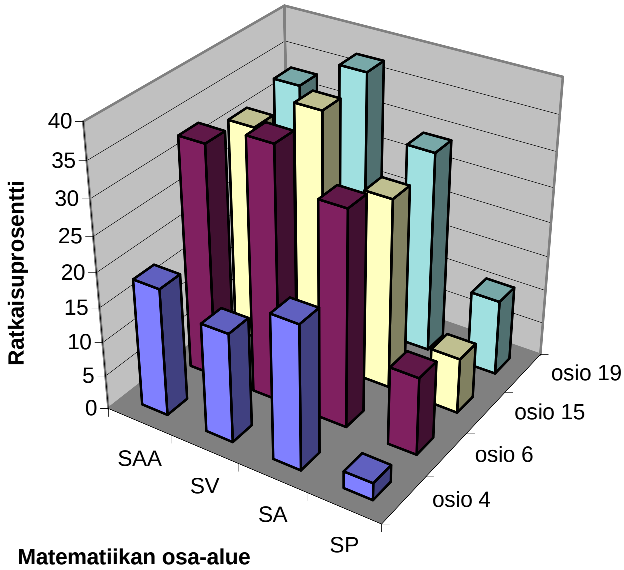
Prosenttilaskuja oli testissä kaikkiaan kolme. Niissä onnistuminen noudatti selvää vaikeusastehierarkiaa. Helpointa oli prosenttiarvon laskeminen (osio 25), jossa onnistui 48,3 % vastaajista (N = 493). Vaikein tehtävä taas oli perusarvon laskeminen (osio 26). Sen ratkaisi oikein 5,9 % (N = 684) ja prosenttilukutehtävän (osio 24) 29,3 % vastaajista (N = 650).

7.2.4 Triviaalien virhetulkintojen yhteys algebran hallintaan

Ongelma 2.2

Tässä luvussa tarkastellaan aluksi eräiden triviaalien virheiden yhteyttä oppilaiden suoriutumiseen verrannollisuudessa, algebrassa, prosenttilaskussa ja koko testissä. Sitten keskitytään verrannollisuuden virheindeksin ja algebran osaamisen väliseen yhteyteen.

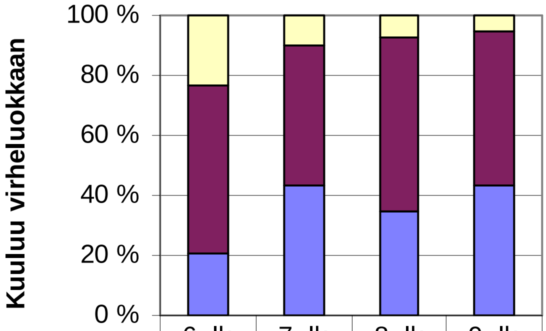
Poikittaistutkimuksessa kiinnitettiin runsaasti huomiota oppilaiden virheellisten ratkaisutapojen analysointiin. Perusoletuksena oli se, että tietyt virhevalinnat edustavat alkeellisempaa ajattelua kuin jotkut muut virheet. Tulokset osoittivat, että muutamilla triviaaleilla virheillä oli selvästi muita kiinteämpi yhteys joihinkin matematiikan osa-alueisiin. Toisaalta eräillä päällisin puolin samantyyppisillä virheillä ei näyttänyt olevan yhteyttä oppilaiden testituloksiin. Triviaaleja virheitä katsottiin esiintyvän sekä verrannollisuuteen että algebraan liittyvissä tehtävissä.



KUVIO 20 Osioissa 4, 6, 15 ja 19 triviaaleja virheitä tehneiden oppilaiden ratkaisuprosentit poikittaistutkimuksessa, SAA = koko testi, SV = verrannollisuus, SA = algebra, SP = prosenttilasku
osio 4 = murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi
osio 6 = sekaluvun kertominen kokonaisluvulla
osio 15 = algebrallisen yhtälön ratkaiseminen
osio 19 = muuttujan sisältävän alan lausekkeen konstruointi

Kuviosta 20 havaitaan, että triviaali virhe osiossa 4 liittyi vahvasti heikkoon osaamiseen kaikilla testin osa-alueilla: koko testissä, verrannollisuudessa, algebrassa ja prosenttilaskussa. Sen sijaan murtoluvun virheellinen kertominen osiossa 6 ei näyttänyt merkitsevän sanottavaa heikennystä testituloksiin muilla alueilla kuin prosenttilaskussa. Yksi selittävä tekijä on murtolukujen, desimaalilukujen ja prosenttien vastaavuus. Jos näistä ei ymmärrä yhtä, on mahdollista, että toisenkin kanssa on vaikeuksia. Prosenttilaskun heikko osaaminen näytti kauttaaltaan liittyvän triviaaleihin virheisiin.

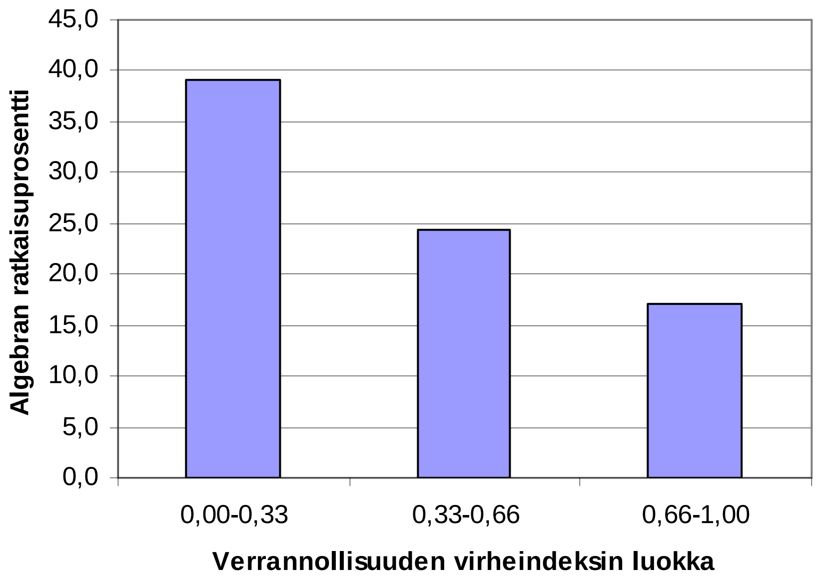
Tutkimuksen eräänä tavoitteena oli selvittää, millä tavoin verrannollisuuden ymmärtäminen on algebran opiskelun edellytyksenä. Verrannollisuuden yhteydessä esiintyvien alkeellisten tulkintojen katsottiin kuvastavan oppilaan puutteellista käsitystä verrannollisuudesta. Tätä taipumusta pyrittiin tiivistämään määrittelemällä verrannollisuuden virheindeksi IV_{red} (luku 6, taulukko 5), joka suhteutettiin oppilaan antamien verrannollisuutta koskevien vastausten lukumäärään. Indeksin määrittely perustui seitsemässä eri osiossa tehtyihin virheisiin. Kuviossa 21 on yhteenveto eri luokka-asteiden oppilaiden sijoittumisesta verrannollisuuden virheindeksin IV_{red} luokkiin.



	6. lk	7. lk	8. lk	9. lk
Runsaasti virheitä	23,2	10,1	7,1	5
Kohtalaisesti virheitä	56,3	46,7	58,3	51,7
Vähän virheitä	20,5	43,2	34,6	43,3

KUVIO 21 Oppilaiden jakautuminen luokka-asteittain verrannollisuuden virheluokkiin: virheitä vähän (IV_{red} = 0,00–0,33), kohtalaisesti (IV_{red} = 0,33–0,66), runsaasti (IV_{red} = 0,66–1,00)

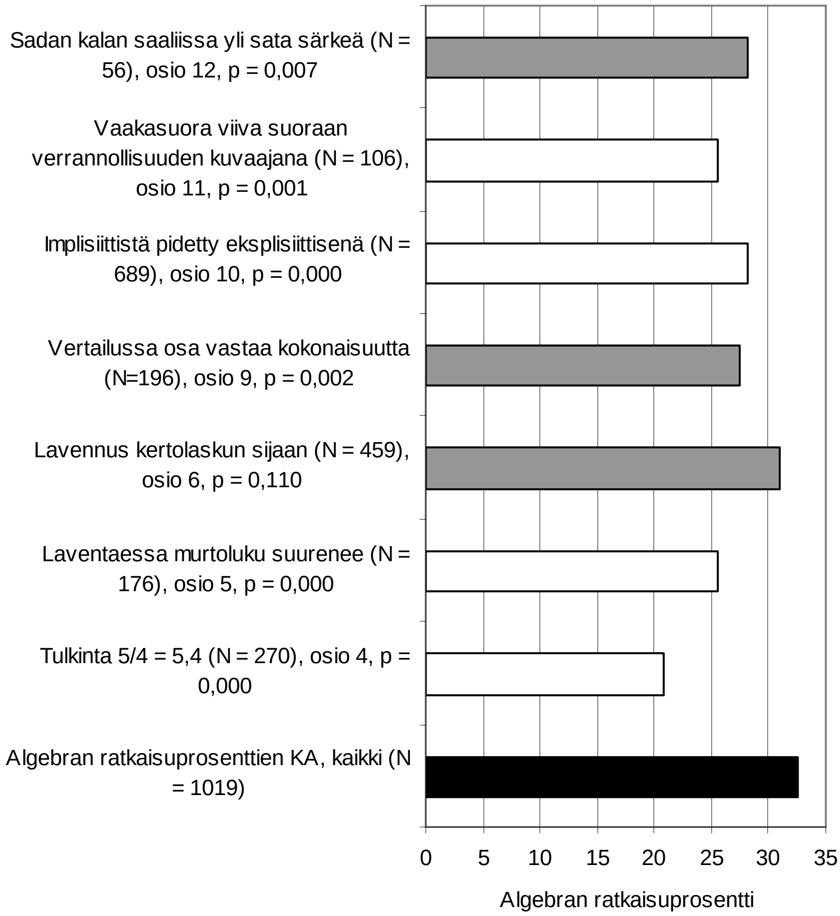
Näyttää siltä, että kaikkien luokka-asteiden oppilaista suunnilleen puolet kuului keskimmäiseen indeksiluokkaan eli he olivat tehneet kohtalaisesti triviaaleja virhevalintoja verrannollisuuteen liittyvissä tehtävissä. Kuudesluokkalaisia kuului selvästi muita luokkia enemmän (noin 23 %) suurimman virheindeksin luokkaan (IV_{red} = 0,66–1,00), kun muilla luokilla vastaava osuus oli 5–10 %. Vastaavasti kuudesluokkalaisia sijoittui pienimmän virheindeksin luokkaan vähemmän, vain noin viidennes, kun muista luokista siihen kuului vähintään kolmannes. Tämän perusteella kuudesluokkalaisten verrannollisuuden ymmärtäminen ei ollut läheskään samalla tasolla kuin ylempien luokkien oppilaiden. Hieman yleistäen voidaan sanoa, että verrannollisuuden triviaalit virheet (taulukko 5) olivat yhtä yleisiä kaikilla yläasteen luokilla. Sen sijaan kuudennella luokalla niitä oli selvästi enemmän. Verrannollisuuteen liittyvä matemaattinen ajattelu näytti tämän perusteella olevan kuudennen luokan alussa selvästi alkeellisempaa kuin yläasteella.



KUVIO 22 Verrannollisuuden virheindeksin IV_{red} yhteys algebran alueella menestymiseen poikittaistutkimuksen mukaan. Testin algebran alueen ratkaisuprosentin riippuvuus indeksiluokasta,testattu varianssianalyysillä, df = 1017, F = 104,3, p = 0,000

Kuvion 22 perusteella oppilaiden menestyminen algebran tehtävissä riippui olennaisesti siitä, mihin verrannollisuuden virheindeksin (IV_{red}) luokkaan he kuuluivat. Toisaalta korrelaatioita tarkastelemalla havaitaan, että verrannollisuuteen liittyvistä tehtävistä saatu suorituspistemäärä (SV) korreloi hieman vahvemmin algebrasta saatuun pistemäärään (SA) kuin verrannollisuuden virheindeksi (IV_{red}) (r(SV, SA) = 0,504, p = 0,000 ja r(IV_{red}, SA) = –0,449, p = 0,000, N = 1019). Tämän perusteella näyttää siltä, että virheindeksi IV_{red} ei selitä algebran osaamista yhtään enempää kuin verrannollisuuteen liittyvistä tehtävistä suoriutuminen. Voisi ajatella, että algebran osaamisen kannalta on samantekevää, millaisia virheitä oppilas tekee verrannollisuudessa. Seuraavassa saadaan kuitenkin tarkempaa tietoa siitä, miten yksittäiset verrannollisuuden triviaalit virhetulkinnat liittyivät algebran osaamiseen.

Kuvioon 23 on koottu verrannollisuuden virheindeksiin vaikuttaneet ratkaisuvaihtoehdot. Eniten vaikeuksia algebrassa oli niillä oppilailla, jotka muuttivat murtoluvun desimaaliluvuksi visuaalisen mallin mukaan (5/4 = 5,4). Mielenkiintoista on havaita osioita 5 ja 6 vertaillessa, että laventamissäännön virhetulkinta: laventaessa murtoluku suurenee, liittyi heikkoon algebran osaamiseen, mutta laventamisen käyttö kertomisen asemasta ei liittynyt. Osiossa 10 implisiittisen ilmaisun pitäminen eksplisiittisenä liittyi heikkoon algebran osaamiseen (t-testi, p = 0,000), vaikka kyseisen ratkaisun tehneiden oppilaiden algebran suoritukset poikkesivat vain 4,5 prosenttiyksikköä koko tutkimusjoukon suoritusten keskiarvosta. Kysymys on siitä tilastollisesta tosiasiasta, että vertailtavat ryhmät ovat huomattavan suuria (689 ja 1019), jolloin pieni ero voi olla merkitsevä.



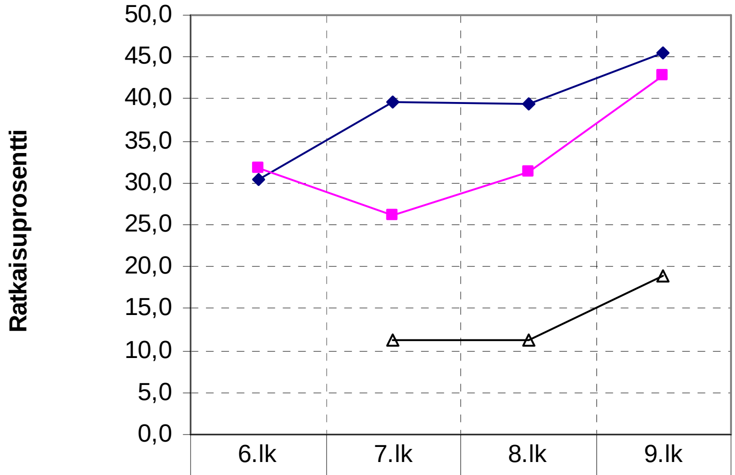
KUVIO 23 Verrannollisuuteen liittyvissä tehtävissä alkeellisia virheitä tehneiden suoriutuminen algebran tehtävistä poikittaistutkimuksessa, vaaleat palkit: poikkeama keskiarvosta erittäin merkitsevä, harmaat palkit: poikkeama keskiarvosta "vähemmän merkitsevä" musta palkki: algebran ratkaisuprosenttien ka = 32,6 %, kh = 23,0 %-yks.

Edellä kuvatut triviaalit virheet liittyivät kaikki jossakin määrin murtolukujen algoritmeihin. Neljä seitsemästä virheestä liittyi selvästi heikkoon algebran osaamiseen. Tästä ei siis voi päätellä, että kaikki triviaalit virheet algoritmien käytössä olisivat kriittisiä algebran ymmärtämisen kannalta. Näyttää hiukan siltä, että arkitodellisuuden kanssa ristiriidassa olevat ratkaisut (osioissa 6, 9 ja 12) eivät liittyneet heikkoon algebran osaamiseen. Sen sijaan ne osiot, jotka liittyivät enemmän laskutekniikkaan tai kuvion tai sanallisen lauseen tulkintaan, olivat yhteydessä algebran osaamiseen.

7.2.5 Oppilaiden verrannollisuuden hallinta algebran hallintaan verrattuna

Ongelma 2.3

Pitkittäistutkimuksessa seurattiin oppilaiden matematiikan taitojen kehittymistä yleisellä tasolla, mutta erityisesti esialgebran, murtolukujen ja prosenttilaskun alueella (tuloksia esiteltiin luvussa 7.1.2). Poikittaistutkimuksessa testiosioita lisättiin ja aluetta laajennettiin murtoluvuista verrannollisuuteen ja esialgebrasta algebraan. Testi myös vaikeutui ja se näkyi ratkaisuprosenttien putoamisena suunnilleen puoleen pitkittäistutkimuksen tulostasosta. Asiaan toki saattaa vaikuttaa myös se, että koehenkilöjoukko vaihtui. Poikittaistutkimuksen testitulokset verrannollisuuden, algebran ja prosenttilaskun alueilta on koottu kuvioon 24. Muutokset luokka-asteelta toiselle näyttävät varsin samansuuntaisilta kuin pitkittäistutkimuksessa(kuvio 9, luvussa 7.1.2).



	6.lk	7.lk	8.lk	9.lk
Verrannollisuus	30,3	39,6	39,4	45,4
Algebra	31,8	26,1	31,4	42,9
Prosenttilasku		11,3	11,3	19,0

KUVIO 24 Verrannollisuuden, algebran ja prosenttilaskun taidot eri luokka-asteilla poikittaistutkimuksessa (N = 1019)

Kuudesluokkalaisten matematiikan taidot olivat verrannollisuudessa ja algebrassa samaa tasoa, kuvio 24. Seitsemännen luokan alkaessa algebran osaaminen oli selvästi heikompaa kuin verrannollisuuden osaaminen (ratkaisuprosenttien keskiarvojen t-testi, p = 0,000). Algebran osaaminen seitsemäsluokkalaisilla oli jopa heikompaa kuin kuudesluokkalaisilla (t-testi, p = 0,005). Ylemmillä luokilla algebran ja verrannollisuuden taidot kuitenkin lähenivät toisiaan niin, että yhdeksännen luokan alkaessa ne olivat melkein samalla tasolla (t-testi, p = 0,014).

TAULUKKO 16 Ratkaisuprosenttien eroja luokka-asteiden välillä matematiikan eri osa-alueilla poikittaistutkimuksessa, erojen merkitsevyys t-testillä

Matematiikan osa-alue	Erot luokkien välillä prosenttiyksikköä					
	6./7.lk	p	7./8.lk	p	8./9.lk	p
Verrannollisuus	+ 9,3	0,005	– 0,2		+ 6,0	0,006
Algebra	– 5,7	0,007	+ 5,3	0,000	+ 11,5	0,000
Prosenttilasku			+ 0,0		+ 7,7	0,000

Matematiikan osaamisen eroja luokkatasojen välillä on koottu taulukkoon 16. Algebrassa kuudennen ja kahdeksannen luokan taidot olivat samaa tasoa ja vähän paremmat kuin seitsemännellä luokalla. Suurin peräkkäisten luokkatasojen välinen ero algebrassa oli kahdeksannen ja yhdeksännen luokan välillä. Matematiikan taidoista erottui prosenttilaskun osaaminen, joka oli kaiken aikaa huomattavasti alemmalla tasolla kuin muu matematiikan hallinta. Huomattakoon, että prosenttilaskun vaikeustasoa ei etukäteen pyritty suhteuttamaan muiden tehtävien vaikeustasoon. Ainakin yksi prosenttilasku, osio 26, jossa oli kyseessä perusarvon laskeminen, oli monille oppilaille ylivoimainen. Myös sillä seikalla saattoi olla vaikutusta, että prosenttilaskut oli sijoitettu testin loppuun. Muutamat oppilaat raportoivat vastauslomakkeissaan suoritusajan riittämättömyydestä. Koko testiä ajatellen oli kiinnostavaa, että testi osoitti kahdeksannen luokan aikana tapahtuneen selvää edistymistä kaikilla testatuilla matematiikan osa-alueilla, myös prosenttilaskussa.

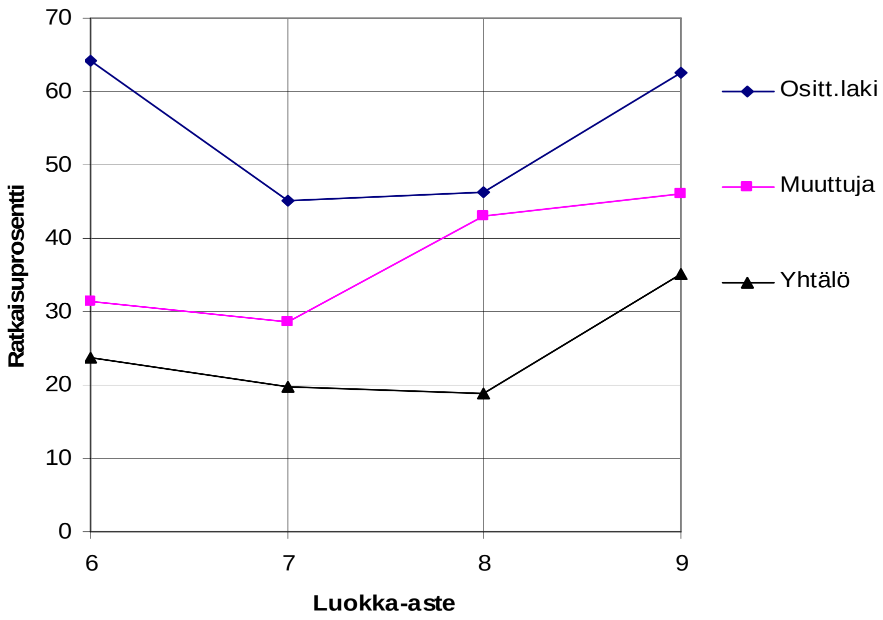
7.3 Peruskoulun 6–9-luokkalaisten valmiudet algebran opiskeluun poikittaistutkimuksen valossa

Tässä alaluvussa arvioidaan ensin algebran taitoja kokonaisuutena eri luokka-asteilla ja käydään sitten yksityiskohtaisesti läpi algebran osaamista ja algebrallista ajattelua mitanneet osiot (tutkimuksen pääongelma 3). Algebran hallintaa kuvasivat osittelulain soveltaminen, muuttujien käyttö ja yhtälöiden ratkaiseminen (kohta 7.3.2). Muuttujiin ja yhtälöihin liittyvistä tulkinnoista ja ratkaisutavoista pääteltiin minkä tasoista oppilaiden matemaattinen ajattelu oli algebran alueella. Erityisen huomion kohteena oli oppilaiden aritmeettinen ajattelu yhtälöiden ratkaisemisessa (kohta 7.3.3). Lopuksi kohdassa 7.3.4 kootaan yhteen niitä ongelmia, joita oppilailla esiintyi algebran alueella.

7.3.1 Algebran taidot eri luokka-asteilla

Ongelma 3.1
Esialgebra määriteltiin tämän tutkimuksen näkökulmasta luvussa 6. Osittelulain soveltaminen sekä muuttujan lausekkeiden laatiminen ja tunnistaminen edustavat esialgebraa. Vaikka osa poikittaistutkimuksessa käytetyistä yhtälöistä kuuluisi helppoutensa takia esialgebraan, käsitellään yhtälöiden hallitsemista erillisenä algebran osa-alueena.

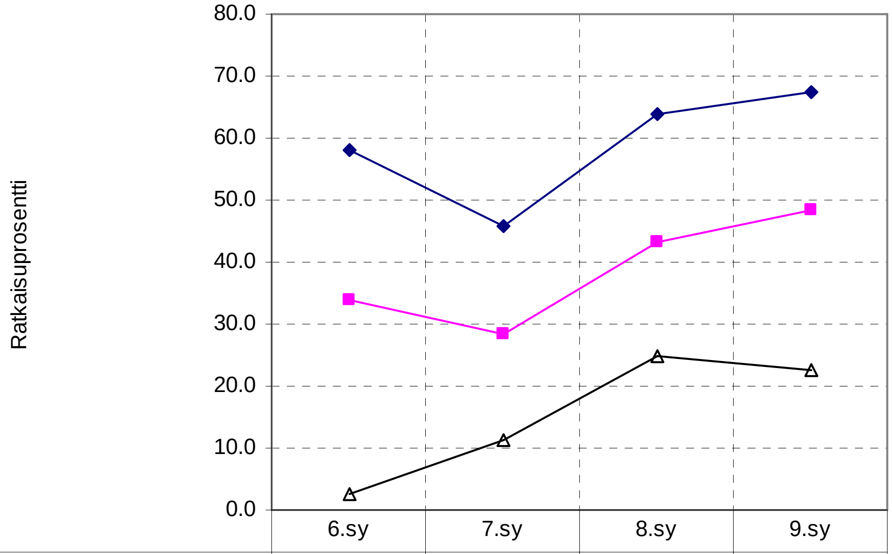
Kuvion 25 perusteella kuudesluokkalaiset hallitsivat osittelulain yhtä hyvin kuin yhdeksäsluokkalaiset ja selvästi paremmin (ero t-testillä, 6./8.lk, $p = 0{,}000$) kuin seitsemäs- ja kahdeksasluokkalaiset. Muuttujan hallinta näytti olevan kuudes- ja seitsemäsluokkalaisilla samaa tasoa (n. 30 %), mikä oli selvästi alhaisempi kuin ylemmillä luokilla (ero t-testillä, 6./8.lk, $p = 0{,}000$). Osiokohtainen vertailu (kuvio 25) näytti, että muuttujan käsittelyssä kuudesluokkalaiset olivat selvästi seitsemäs- ja kahdeksasluokkalaisia heikompia ainoastaan osiossa 19 (ero t-testillä, 6./7.lk, p = 0,000), jossa piti muodostaa muuttujan sisältävä suorakulmion alan lauseke. Yhtälöiden ratkaisemisessa (kuvio 25) kuudesluokkalaiset olivat jopa taitavampia kuin seitsemäs ja kahdeksasluokkalaiset (ero t-testillä, 6./8.lk, p = 0,045), mutta hävisivät selvästi yhdeksäsluokkalaisille (ero t-testillä, p = 0,000).



KUVIO 25 Ratkaisuprosentit (koko koehenkilöjoukosta laskettuna, N = 1019) algebran osa-alueilla (osittelulaki, muuttuja, yhtälöt) luokka-asteittain

Osiot 16 ja 18 edustavat lausekkeen tunnistamista ja osio 19 lausekkeen tuottamista. Kuviosta 26 havaitaan, että selvästi helpoin muuttujiin liittyvä tehtävä oli luonnollisen luvun n seuraajan tunnistaminen (osio 16). Siinä onnistui yli puolet oppilaista. Astetta vaativammaksi tehtäväksi osoittautui pojan pituuden lausekkeen tunnistaminen (osio 18). Vaikein tehtävä taas oli laatia suorakulmion alan lauseke, kun siihen sisältyi muuttuja (osio 19).

Alemmilla luokilla itse alan laskeminenkin saattoi tuottaa vaikeuksia. Jotkut laskivat alan asemesta piirin tai korvasivat muuttujan numeroluvulla. Vain muutama kuudesluokkalainen ja kymmenesosa seitsemäsluokkalaisista onnistui tässä tehtävässä. Ratkaisun onnistuminen näytti muuttuvan luokka-asteittain samansuuntaisesti kaikissa kolmessa osiossa, kuvio 26. Näistä osioista muodostui kolmitasoinen hierarkia, jossa tasojen väli ratkaisuprosentilla arvioituna oli noin 20 prosenttiyksikköä. Alinta tasoa edusti luonnollisen luvun seuraajan tunnistaminen, toista tasoa muuttujan sisältävän mittaluvun tunnistaminen ja ylintä tasoa muuttujan sisältävän lausekkeen konstruointi.

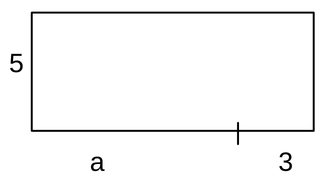


	6.sy	7.sy	8.sy	9.sy
Luonnollisen luvun seuraajan tunnistaminen, osio 16	58.0	45.7	63.7	67.5
Pojan pituuden lausekkeen tunnistaminen, osio 18	33.9	28.4	43.1	48.3
Suorakulmion alan lausekkeen laatiminen, osio 19	2.7	11.4	24.9	22.5

KUVIO 26 Muuttujan lausekkeiden tunnistaminen ja laatiminen poikittaistutkimuksessa, osiot 16, 18 ja 19

TAULUKKO 17 Suorakulmion alan lausekkeen konstruoinnissa esiintyneitä vaihtoehtoja

Osio 19. *Ilmoita oheisen suorakulmion alan lauseke*



Ratkaisutapa tai virheellinen tulkinta	Prosenttia vastanneista (N = 599) valitsi tämän menetelmän
Saatu oikea lauseke $5 \cdot (a+3)$ tai 5a + 15	**28,1**
Algebrallinen virhe tai $\frac{5 \cdot 3}{a}$ tai $5 \cdot a3 = 5a^3$ tai 3a + 5 tms.	33,1
Laskettu alan asemasta piiri 5 + 5 + a + 3 + a + 3 tms.	3,6
Pelkkä numerolauseke $a = 2 \cdot 5$ tai $3 \cdot 5$ tai $5 \cdot 3 : 2 =$	28,1
Mitattu kanta ja korkeus cm:ssä tai muu virhe	7,1

Taulukossa 17 on esitetty oppilaiden ratkaisuja suorakulmion alan muodostamiseksi osiossa 19. Vajaa kolmannes vastanneista päätyi oikeaan ratkaisuun. Yhtä suuri osa vastaajista käsitteli lauseketta kuin ei muuttujaa olisi ollut lainkaan. Yksi kolmannes taas hyväksyi muuttujan lausekkeeseen, mutta teki algebrallisen laskuvirheen. Noin seitsemän prosenttia vastaajista turvautui mittaamiseen ja ilmoitti tuloksen cm-asteikolla.

7.3.2 Lineaaristen yhtälöiden ratkaiseminen oppilaiden algebrallisen ajattelun kuvaajana

Ongelma 3.2
Poikittaistutkimuksessa oli kolme suoranaisesti yhtälön ratkaisemiseen liittyvää tehtävää ja lisäksi yksi tehtävä, jossa piti tunnistaa ekvivalentti yhtälöryhmä. Seuraavassa yhtälötehtävät on esitetty järjestyksessä helpoimmasta vaikeimpaan ennakkoarvioiden perusteella. Ensimmäisenä on numeerinen yhtälö. Ratkaisuvaihtoehdoista laaditut osiokohtaiset luokittelut ovat taulukoissa 18, 19 ja 20.

TAULUKKO 18 Osion 22 ratkaisuvaihtoehtojen toteutuminen

Osio 22. Mikä luku tulee sijoittaa tyhjään ruutuun, jotta seuraava yhtälö olisi tosi? (235 + [ ]) + (679 – 122) = 235 +679		Prosenttia vastanneista N = 708
Vaakaperiaate: samat termit eliminoitu puolittain, oikea tulos **122**		**30,9**
Ekvivalentti yhtälöketju	Oikein	**0,4**
	Väärin	0,8
Aritmeettinen ajattelu: Laskemalla molemmat puolet erikseen	Oikein	**13,4**
	Väärin	11,8
Erittelemätön virhe		42,7

Taulukosta 18 nähdään, että noin 31 % vastaajista ymmärsi yhtälön rakenteen kahden lausekkeen merkittynä yhtäsuuruutena, koska he osasivat eliminoida yhtälön molemmilla puolilla esiintyvän saman termin. Toisaalta noin 13 prosenttia vastaajista päätyi oikeaan tulokseen aritmeettisin menetelmin laskemalla yhtälön kummankin puolen erikseen. Osioon 20 sisältyi lausekkeiden vertailuun perustuva esialgebran yhtälö. Oppilaiden tekemien ratkaisujen vertailussa päädyttiin viiteen ryhmään, taulukko 19.

Taulukon 19 perusteella noin 56 % vastanneista päätyi oikeaan ratkaisuun. Tosin alle puolet koehenkilöistä vastasi tähän tehtävään. Ilmeisesti kirjainlausekkeet sinänsä estivät osaa oppilaista syventymästä tehtävään. Poikittaistutkimuksen osioissa oli yksi algebrallinen yhtälö, osio 15. Sen ratkaisut jaettiin kuuteen ryhmään. Taulukon 20 perusteella noin 8 % vastanneista osasi muodostaa algebrallisen yhtälön ratkaisusta ekvivalentin yhtälöketjun. Toisaalta melkein sama määrä eli noin 7 % vastaajista päätyi kokeilemalla tai eri tavoin päättelemällä oikeaan ratkaisuun.

TAULUKKO 19 Lausekeyhtälön ratkaisemisessa esiintyneitä vaihtoehtoja

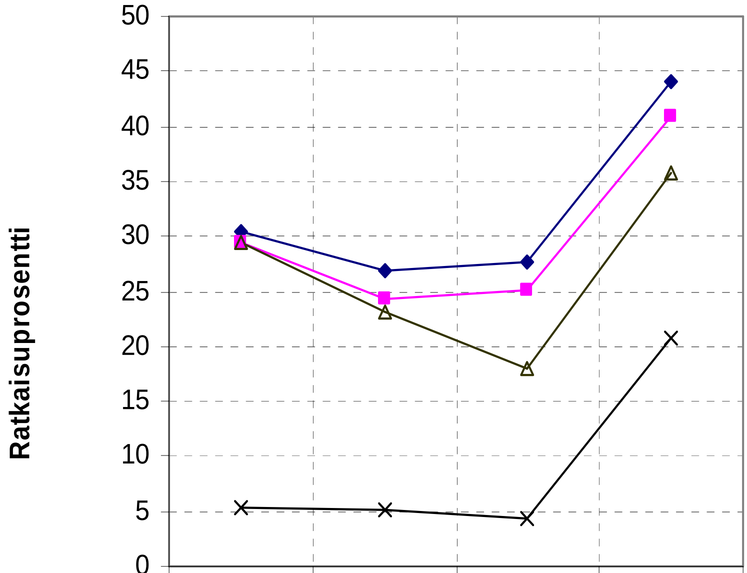
Osio 20. Etsi sellainen luku x, että lausekkeet $4 \cdot x - 7$ ja 8 – x ovat yhtä suuret?	Prosenttia vastanneista N = 504
Yhtälön ratkaisu tai kokeilu, oikea tulos **x = 3**	**56,4**
Yhtäsuuruus selvitetty, tulos väärä, aritmeettinen ajattelu	8,7
Vasemmalla eri x kuin oikealla, vastinparit, aritmeettinen ajattelu	12,5
Virheellinen yhtälön ratkaisutekniikka, esim. $4 \cdot x - 7 = 4x - 7 - 8 - x = 3x - 7 - 8 = 3x - 15$	3,3
Muu virheellinen ratkaisutapa	19,1

Osiot 15 ja 20 sisälsivät matemaattiselta kannalta saman yhtälön. Vain niiden sanalliset ratkaisuohjeet olivat erilaiset. Kun verrataan tehtävien 15 ja 20 ratkaisuosuuksia, havaitaan, että kun yhtälö esitettiin kahden lausekkeen yhtäsuuruuden vertailuna (osio 20), sen ratkaisi lähes nelinkertainen määrä verrattuna algebrallisen yhtälön (osio 15) ratkaisseiden määrään. Näyttää siltä, että yhtälön ratkaisun onnistuminen riippuu oleellisesti siitä, miten yhtälö on esitetty. Kuviosta 27 havaitaan, että numeerinen yhtälö edusti suunnilleen samaa vaikeustasoa kuin kahden lausekkeen vertailuna esitetty yhtälö. Nämä tehtävät onnistui ratkaisemaan reilu neljännes kuudennesta kahdeksanteen luokkien oppilaista. Vasta yhdeksännellä luokalla ratkaisuprosentti oli selvästi korkeampi, lausekeyhtälössä noin 41 % ja numeerisessa yhtälössä noin 44 %.

TAULUKKO 20 Algebrallisen yhtälön ratkaisemisessa esiintyneitä vaihtoehtoja

Osio 15. Ratkaise x yhtälöstä $x - 8 = 7 - 4 \cdot x$	Prosenttia vastanneista N = 521
Ekvivalentti yhtälöketju (vaakaperiaate), oikea tulos **x = 3**	**8,2**
Kokeilu tai oikea tulos ilman perustelua	**7,1**
Algebrallinen virhe, yhteenlasku ↔ kertolasku tai tuntematon jäänyt lausekkeeseen	15,7
Kaksi eri ratkaisua, esim. x = 15 ja 5	5,5
Aritmeettinen ajattelu: ensimmäinen luku oikealla on vasemman puolen tulos, esim. x = 15 tai x = 1	37,5
Muu virheellinen ratkaisutapa	25,9

Samaa jakaumaa noudatteli algebrallisen yhtälön ratkaisuprosentti. Tosin sen ratkaisemisessa onnistui vain yksi kahdestakymmenestä kuudennesta kahdeksanteen luokkien oppilaista ja joka viides yhdeksännen luokan oppilaista. Kun sama algebrallinen yhtälö esitettiin lausekkeiden vertailutehtävänä, kasvoi ratkaisuprosentti noin 20 prosenttiyksiköllä. Testissä kyseiset osiot eivät sijainneet peräkkäin ja algebrallinen yhtälö esiintyi ennen lausekkein esitettyä yhtälöä. Ratkaisutavoista päätellen oppilaat eivät tunnistaneet näiden kahden osion välistä yhteyttä.



	6.sy	7.sy	8.sy	9.sy
Numeerinen yhtälö, osio 22	30,4	26,8	27,7	44,2
Lausekeyhtälö, osio 20	29,5	24,3	25,1	40,8
Ekvivalentti yhtälöryhmä, osio 23	29,5	23,0	18,0	35,8
Algebrallinen yhtälö, osio 15	5,4	5,0	4,3	20,8

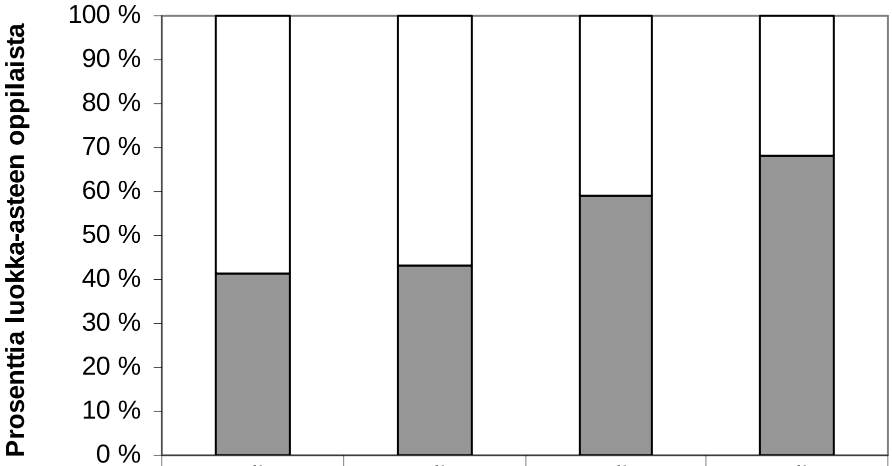
KUVIO 27 Yhtälöiden ratkaisuprosentit luokka-asteittain ja yhtälötyypeittäin koko koe henkilöjoukosta laskettuna (N = 1019)

Kuvion 27 perusteella lähes kolmannes kuudesluokkalaisista onnistui muiden yhtälöiden paitsi algebrallisen yhtälön (osio 15) ratkaisemisessa. He olivat kaikkien yhtälöiden ratkaisemisessa vähintään yhtä taitavia kuin seitsemäs ja kahdeksasluokkalaiset. Vasta yhdeksäsluokkalaiset tekivät selvän eron muihin luokkiin yhtälön tyypistä riippumatta. Vain muutama kuudennesta kahdeksanteen luokkien oppilas onnistui ratkaisemaan algebrallisen yhtälön. Yhdeksäsluokkalaisista sen ratkaisi viidennes.

7.3.3 Oppilaiden aritmeettinen ajattelutapa algebran alueella

Ongelma 3.3
Aritmeettisella ajattelulla tarkoitetaan tässä yhteydessä sitä, että oppilas tähtää suorituksessaan ainoastaan lopputulokseen. Hän voi kirjoittaa pitkiä yhtälöketjuja, jotka eivät pidä paikkaansa. Tässä luvussa tarkastellaan aritmeettisen ajat-

telutavan esiintymistä eri luokka-asteilla ja yhteyttä muuhun matematiikan osaamiseen.

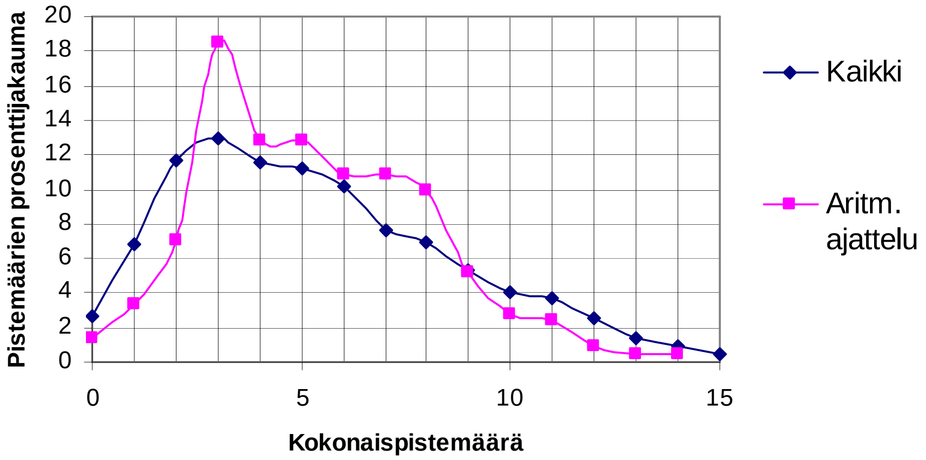


	6.lk	7.lk	8.lk	9.lk
□ IAred > 0	58,6	56,6	41,1	31,7
■ IAred = 0	41,4	43,4	58,9	68,3

KUVIO 28 Oppilaiden jakaantuminen aritmeettisen ajattelun indeksiluokkiin (N = 1019), $IA_{red} = 0$ tarkoittaa, että oppilaan suorituksissa ei ilmennyt aritmeettista ajattelua, $IA_{red} > 0$ tarkoittaa, että oppilas sovelsi 1–3 yhtälössä (osiot 15, 20 ja 22) aritmeettista ajattelua

Kuvion 28 perusteella näyttää siltä, että kuudes ja seitsemäsluokkalaisista lähes 60 prosentilla esiintyi aritmeettista ajattelua ainakin yhdessä yhtälön ratkaisussa kolmesta mahdollisesta tapauksesta (osiot 15, 20 ja 22). Kahdeksas ja yhdeksäsluokkalaisilla aritmeettinen ajattelu oli vähentynyt siten, että yhdeksäsluokkalaisilla sitä esiintyi enää vajaalla kolmanneksella vastanneista. Kun verrattiin keskenään niitä oppilaita, joilla ei esiintynyt aritmeettista ajattelua (N = 515) ja niitä, joilla esiintyi aritmeettista ajattelua (N = 416), havaittiin, että aritmeettisella ajattelulla ei ollut merkitsevää yhteyttä koko testin, verrannollisuuden eikä algebran tulokseen (koko testi $t(929) = 1,26$, $p = 0,208$, verrannollisuus $t(929) = 0,86$, $p = 0,392$ ja algebra $t(929) = 1,36$, $p = 0,174$). Tämä havainto viittaa siihen, että kokeilu ei ole muita menetelmiä huonompi yhtälöiden ratkaisemisen alkuvaiheessa.

Osiossa 15 aritmeettinen ajattelu näytti kuvion 29 perusteella hieman kaventaneen testin kokonaispistemäärien jakaumaa kummastakin päästä. Aritmeettisen ajattelun soveltaminen ei tässäkään näyttänyt olevan yhteydessä testin kokonaispistemäärään. Kaikkien oppilaiden kokonaispistemäärien keskiarvo oli 5,38 pistettä ja aritmeettista ajattelua osoittaneiden vastaava keskiarvo 5,35 pistettä.

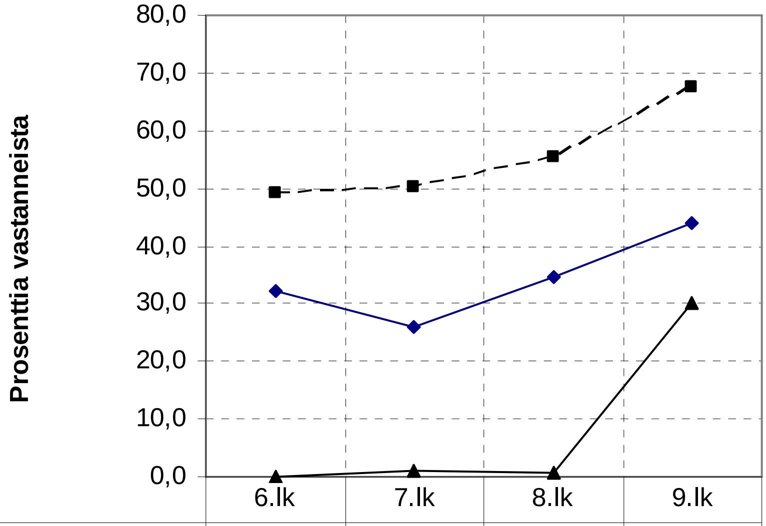


KUVIO 29 Aritmeettisen ajattelun (osiossa 15) yhteys oppilaan testin kokonaispistemäärään (N = 521)

Aritmeettinen ajattelu (liite 9) näytti olevan algebrallisen yhtälön ratkaisemisessa selvästi yleisempää (5,5 % + 37,5 % eli 43 % vastanneista) kuin numeerisen yhtälön ratkaisemisessa (13,4 % + 11,8 % eli n. 25 % vastanneista). Ero selittynee osaltaan sillä, että aritmeettinen yhtälö oli oppilaille tutun näköinen ja houkutteli suoriin numerolaskuihin sen sijaan, että miettisi lukujen siirtelemistä tai eliminointia. Numeerisen yhtälön ratkaisussa reilu puolet aritmeettista ajattelua soveltaneista päätyi oikeaan ratkaisuun, kun algebrallisessa yhtälössä tämä ei onnistunut keneltäkään. Lausekkeiden vertailussa aritmeettista ajattelua soveltaneista noin 9 %:lla oppilaista oli edellytykset oikeaan ratkaisuun, mutta he tekivät väärän johtopäätöksen. Ilmeisesti aritmeettinen ajattelu toimii hyvin numeerisissa yhtälöissä mutta ei lainkaan algebrallisten yhtälöiden ratkaisemisessa.

Numeerinen yhtälö (liite 9) houkutteli enemmän oppilaita vastaamaan (708 oppilasta eli 71 % koehenkilöjoukosta) kuin kirjainlausekkeita sisältävät yhtälöt (lausekeyhtälössä 504 oppilasta eli 51 % ja algebrallisessa yhtälössä 521 oppilasta eli 53 % koehenkilöjoukosta). Numeerisessa yhtälössä vaakaperiaatetta sovelsi onnistuneesti 22 % kaikista testiin osallistuneista. Algebrallisessa yhtälössä vastaava osuus oli 4–8 %. Vaihteluväli johtuu siitä, että puolet algebrallisessa yhtälössä oikean vastauksen saaneista oli päätynyt ratkaisuun joko kokeilemalla tai arvaamalla. Tällöin ei saatu varmuutta siitä, miten he olivat ymmärtäneet yhtälön rakenteen. Toisaalta 29 % oppilaista osasi ratkaista saman yhtälön, kun se esitettiin kahden lausekkeen yhtä suuruutena. Näyttää siltä, että oppilaiden on vaikea ymmärtää symbolein esitettyä yhtälöä. Yhtälön esittäminen numeerisesti (piilotettu luku) tai algebrallisten lausekkeiden vertailemisen näkökulmasta helpottavat yhtälön ymmärtämistä, vaikka ne johtaisivat samoihin matemaattisiin operaatioihin kuin vastaava symbolein esitetty yhtälö.

Kuviossa 30 on esitetty arvioita oppilaiden osoittamasta strukturaalisesta ajattelusta yhtälöiden ratkaisemisessa. Ylin käyrä liittyy yhtälöön, jossa piti selvittää, millä muuttujan arvolla kaksi lauseketta saavat saman arvon (osio 20). Kyseisessä tehtävässä yhtälön struktuuri on esitetty oppilaille valmiina. Siitä huolimatta lähes kymmenesosa vastaajista, laskettuaan lausekkeiden arvot oikein, ei osannut ilmoittaa tehtävän ratkaisua.



	6.lk	7.lk	8.lk	9.lk
Lausekeyhtälö (N=504)	49,3	50,3	55,3	67,6
Numeerinen yhtälö (N=708)	32,1	26,1	34,7	44,0
Algebrallinen yhtälö (N=521)	0,0	1,1	0,6	30,3

KUVIO 30 Strukturaalinen ajattelu yhtälöiden ratkaisemisessa poikittaistutkimuksen mukaan

Kun sama yhtälö esitettiin algebrallisessa muodossa (osio 15), tosin termit eri järjestyksessä, kuudes-, seitsemäs- ja kahdeksasluokkalaisista vain pari oppilasta ymmärsi, mistä on kysymys. Kuitenkin noin 3 % mainittujen luokkien oppilaista (N = 779) onnistui jotenkin kokeilemalla saamaan oikean lopputuloksen. Heidän joukossaan oli myös kuudesluokkalaisia. Vasta yhdeksäsluokkalaiset osasivat muodostaa ekvivalentin yhtälöketjun ja päätyivät sitä kautta oikeaan ratkaisuun. Kuvion 30 perusteella algebrallisen yhtälön ratkaisemisessa onnistui noin 30 % tehtävään vastanneista yhdeksäsluokkalaisista. Kun otetaan huomioon koko koehenkilöjoukko (N = 1019), osoitti strukturaalista ajattelua algebrallisen yhtälön ratkaisemisessa noin 5 % kaikista luokkien 6–9 oppilaista. Jos sama osuus lasketaan testiin osallistuneista yhdeksäsluokkalaisista (N=240), strukturaalista ajattelua osoitti noin 19 % heistä.

Kuvion 30 perusteella kuudennen, seitsemännen ja kahdeksannen luokan oppilailla ei esiintynyt juuri lainkaan strukturaalista ajattelua algebrallisen yhtälön ratkaisemisessa. Numeerisen yhtälön voi ratkaista miettimättä sen enempää, millaista matematiikan rakennetta yhtälö edustaa. Noin kolmannes vastanneista näytti ymmärtävän numeerisen yhtälön rakenteen. Kahden lausekkeen vertailuna esitetyn yhtälön rakenne oli tehtävässä jo selvitetty, joten ei ole ihme, että yli puolet oppilaista onnistui ratkaisemaan kyseisen tehtävän.

Tämän tutkimuksen mukaan strukturaalista ajattelua algebrallisen yhtälön ratkaisemisessa osoitti noin 8 % vastanneista (N = 521) ja alle 5 % koko koehenkilöjoukosta (N = 1019). Huomattakoon, että lisäksi noin 7 % vastaajista eli noin 4 % koehenkilöjoukosta osasi ratkaista algebrallisen yhtälön kokeilemalla, jolloin heidän mahdollisesta strukturaalisesta ajattelustaan ei saatu tietoa. On siis mahdollista, että koehenkilöjoukosta lähes 9 % olisi ymmärtänyt algebrallisen yhtälön rakenteen.

7.3.4 Algebran ymmärtämisen ongelmia eri luokka-asteilla

Ongelma 3.4
Osittelulakia soveltaessa jotkut oppilaat kertoivat vain yhden summan jäsenen tai laskivat seuraavaan tapaan $5 \cdot (a+3) = 3a+5$. Muuttuja saatettiin hylätä lausekkeesta tai toisaalta yhtälöitä ratkaistessa tuntematon jättää ratkaisulausekkeeseen. Potenssin käsitteeseen liittyi virheellinen tulkinta $5 \cdot a3 = 5a^3$, jossa tulontekijä muuttui eksponentiksi. Algebrallisesta yhtälöstä $4 \cdot x - 7 = 8 - x$ kehittyi yhtälöketju $4 \cdot x - 7 - 8 - x = 3x - 7 - 8 = 3x - 15$. Termien siirto tapahtui kuten yhtälössä, tosin merkkivirheen kera, sitten jatkui lausekkeen sievennys. Yhtälön ja lausekkeen käsite menivät sekaisin.

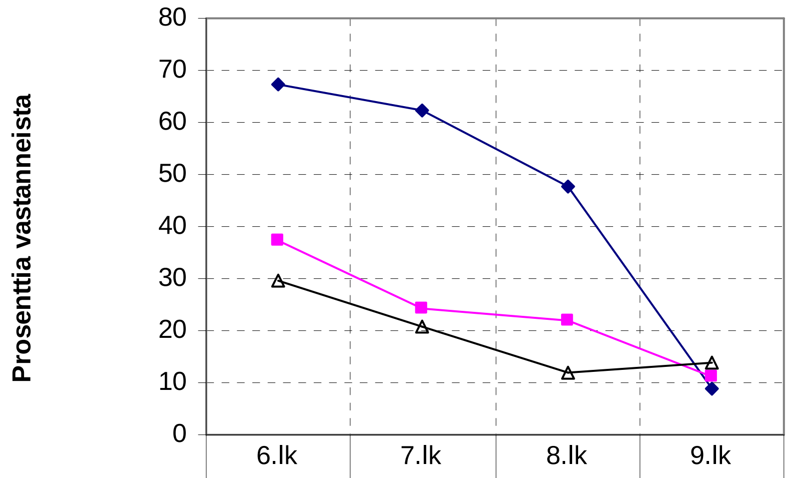
Yhtälön kanssa ekvivalenttina oppilaat pitivät lähinnä vain sellaista yhtälöä, jossa oikea ja vasen puoli olivat vaihtaneet paikkaansa. Oppilaat osaisivat laskuteknisesti ratkaista yhtälön, mutta he eivät ymmärrä, mitä heidän edellytetään tekevän. Tärkeä piirre näytti olevan se, että tehtävästä saadaan ”kunnollinen” vastaus, joka on numeroluku. Näyttää siltä, että varsinkin alemmilla luokilla kirjainluvut ovat lähinnä kielellisiä symboleja, joilla ei ole luvun merkitystä.

Yhtälöä ratkaistessa saattoi yhteenlasku vaihtua kertolaskuksi tai päinvastoin. Tuntematon saattoi myös jäädä ratkaisun lausekkeeseen tai se unohdettiin kokonaan.

Vakiotermi ja tuntemattoman sisältävä termi saatettiin yhdistää, esimerkiksi $7 - 4 \cdot x = 3 \cdot x$. Tällöin laskujärjestys oli virheellinen. Aritmeettinen ajattelu, jossa yleensä pidettiin jotakin yhtälön oikean puolen lukua vasemman puolen laskun tuloksena, johti seuraavanlaisiin tulkintoihin:

__x__ – 8 = 7 – 4 · __x__ koska x – 8 = 7 täytyy olla x = 15, joten
__15__ – 8 = 7 – 4 ·__15__ tai
__1__ – 8 = 7 – 4 ·__1__ jolloin on tullut myös merkkivirhe 1 – 8 = 7.

Aritmeettista ajattelua käyttäen monet päätyivät numeerisessa yhtälössä (osio 22) oikeaan ratkaisuun. He siis ymmärsivät kuitenkin sen, että oikean ja vasemman puolen lausekkeista pitää saada sama tulos, vaikka eivät nähneet yhtälöä kokonaisena struktuurina. Toisaalta lausekkeita verratessa (osio 20) muutamat saivat lausekkeille saman arvon, jonka he ilmoittivat vastaukseksi. He eivät siis ymmärtäneet, että ratkaisu on se x:n arvo, jolla lausekkeet saavat saman arvon. Myös tätä menettelyä pidettiin aritmeettisena ajatteluna. Algebrallisessa yhtälössä (osio 15) kukaan aritmeettista ajattelua soveltaneista ei päätynyt oikeaan ratkaisuun. Kuvioon 31 on koottu tiedot aritmeettisen ajattelun esiintymisestä yhtälöiden ratkaisemisessa.



	6.lk	7.lk	8.lk	9.lk
Algebrallinen yhtälö (N=521)	67,4	62,5	47,7	9,0
Lausekeyhtälö (N=504)	37,3	24,2	22	11,0
Numeerinen yhtälö (N=708)	29,7	20,6	11,9	14,0

KUVIO 31 Aritmeettinen ajattelu yhtälöiden ratkaisemisessa eri luokka-asteilla

Kuvion 31 perusteella kaksi kolmannesta kuudes ja seitsemäsluokkalaisista sekä puolet kahdeksasluokkalaisista turvautui aritmeettiseen ajatteluun algebrallisen yhtälön ratkaisemisessa. He siis tulkitsivat esimerkiksi, että ensimmäinen luku yhtälön oikealla puolella on vasemman puolen laskun tulos tai että termien oikealla ja vasemmalla puolella täytyy vastata pareittain toisiaan. Vasta yhdeksännellä luokalla alettiin nähdä yhtälö matemaattisena struktuurina.

Numeerisen yhtälön ja kahden lausekkeen vertailuna esitetyn yhtälön tulkinnat vaihtelivat huomattavasti vähemmän eri luokka-asteiden välillä. Niissäkin aritmeettinen ajattelu väheni selvästi ylemmille luokille mentäessä. Numeerisessa yhtälössä aritmeettinen ajattelu tarkoittaa sitä, ettei huomata eliminoida yhtälön molemmilta puolilta samaa termiä. Tehtävän käsittely voi silti johtaa oikeaan lopputulokseen. Algebrallisessa yhtälössä sama toimenpide usein alentaa yhtälön abstraktiotasoa, koska yhtälön termit vähenevät ja mahdollisesti tuntematon esiintyy toimenpiteen jälkeen vain yhdessä termissä.

7.4 Yhteenveto tuloksista

Tässä luvussa vertaillaan pitkittäis- ja poikittaistutkimuksen tuloksia yhtäältä luokkatason näkökulmasta ja toisaalta verrannollisuuden, prosenttilaskun ja algebran alueilla. Luvun lopussa (kohdassa 7.4.4) tarkastellaan oppilaiden matemaattista ajattelua aritmetiikasta algebraan siirtymisen kannalta. Pitkittäistutkimuksessa seurattiin oppilaiden matematiikan osaamista noin neljän vuoden ajan. Poikittaistutkimus taas kohdistui samanaikaisesti neljään peräkkäiseen ikäluokkaan. Molemmissa tutkimuksissa mittaukset tehtiin toisiaan vastaavina ajankohtina kuudennen, seitsemännen, kahdeksannen ja yhdeksännen luokan syksyllä. Lisäksi pitkittäistutkimuksessa tehtiin yksi mittaus peruskoulun päättövaiheessa.

7.4.1 Keskeiset matematiikan tiedot ja taidot luokilla 6–9

Ongelma 1
Pitkittäistutkimuksessa koko testistä suoriutuminen heikkeni hieman kuudennelta seitsemännelle ja edelleen kahdeksannelle luokalle siirryttäessä. Sama notkahdus näkyi matematiikan todistusarvosanoissa (tuloksia havainnollistettiin kuviossa 7.1). Tällainen kehitys saattoi johtua osaltaan koulun vaihtumisesta ja luokanopettajan vaihtumisesta aineenopettajaan. Suurin syy notkahdukseen lienee kuitenkin ollut testin monipuolistuminen ja vaikeutuminen.

Pitkittäistutkimuksessa heikoimman ja parhaimman viidenneksen testien ratkaisuprosenttien välinen ero oli kaventunut kuudennen luokan syksyn 49 prosenttiyksiköstä yhdeksännen luokan kevään 28 prosenttiyksikköön. Mutta kun jako viidenneksiin tehtiin uudelleen peruskoulun päättyessä, havaittiin, että parhaan ja heikoimman viidenneksen välinen ero oli 61 prosenttiyksikköä. Vaikutti siltä, että kuudennen luokan alussa havaittavat oppilasryhmien väliset suoriteerot kaventuivat huomattavasti yläasteen aikana. Toisaalta oppilaiden suoriutuminen yksilötasolla muuttui siten, että erot heikoimpien ja parhaimpien ryhmien suoritustasojen välillä todellisuudessa kasvoivat.

Peruslaskutaitoja (mittarina testien yhteiset osiot) arvioitiin vain pitkittäistutkimuksessa. Havaittiin, että oppilaiden peruslaskutaidot paranivat vuosi vuodelta. Vaikka muutos oli vain kolmesta seitsemään prosenttiyksikköä, sitä voitiin pitää osoituksena laskutaitojen kehittymisestä. Etukäteen saattoi nimittäin olettaa, että testitulokset heikkenisivät, kun oppitunneilla alettiin käyttää laskimia ja testi oli kuitenkin suoritettava ilman laskinta. Peruslaskutaitojen muutokset kuudennelta seitsemännelle luokalle ja kahdeksannelta yhdeksännelle luokalle olivat myös tilastollisesti merkitseviä (t-testillä muutos 6./7.lk $p = 0{,}000$, muutos 8./9.lk $p = 0{,}021$). Muutokset saattoivat johtua osittain siitä, että sekä ala-asteen että yläasteen loppuvaiheessa opetuksella pyritään varmistamaan kaikkien oppilaiden peruslaskutaidot.

Murtolukutehtävistä suoriutuminen parani jonkin verran neljän vuoden aikana. Vähiten parannusta tapahtui esialgebran taidoissa. Pitkittäistutkimuksen mukaan heikoin viidennes jäi eniten parhaasta viidenneksestä jälkeen murtolukujen hallinnassa. Kuudennen luokan alkaessa ratkaisuprosenttien ero oli 63 ja peruskoulun päättyessä 60 prosenttiyksikköä. Sen sijaan esialgebran taidoissa parhaiden ja heikoimpien välinen ero oli seurannan alussa 28 ja lopussa 22 prosenttiyksikköä.

Prosenttilaskun taitoja mitattiin ensimmäisen kerran seitsemännen luokan syksyllä, jolloin pitkittäistutkimuksen mukaan noin neljännes oppilaista suoriutui näistä tehtävistä. Vaikka prosenttilaskenta oli seitsemännen luokan opetussuunnitelman keskeinen osa-alue, näyttivät prosenttilaskun taidot suorastaan heikkenevän kahdeksannen luokan syksyyn mennessä. Siitä huolimatta prosenttilaskenta hallittiin kohtalaisesti yhdeksännen luokan syksyllä (ratkaisuprosentti n. 36). Peruskoulun päättyessä lähes puolet oppilaista suoriutui näistä tehtävistä (yhteenveto tuloksista esitettiin taulukossa 10). Näytti siltä, että kahdeksannen luokan aikana oppilaiden matemaattinen ajattelu oli kehittynyt siihen suuntaan, että prosenttilaskun idea alettiin ymmärtää. Kahdeksannen luokan opetuksessa verrannollisuuden painottuminen saattoi osaltaan auttaa asiaa. Poikittaistutkimuksen mukaan pojat hallitsivat verrannollisuuden (t-testi, $t(1017) = 3{,}50$, $p = 0{,}000$) ja prosenttilaskennan ($t(905) = 2{,}26$, $p = 0{,}024$) tyttöjä paremmin. Yhdeksännen luokan alussa prosenttilaskennan hallitsi noin viidennes oppilaista. Poikittaistutkimuksen mittarissa yksi kolmesta prosenttilaskun osiosta edellytti perusarvon laskemista, mikä alensi jonkin verran prosenttilaskennan suoritustasoa.

7.4.2 Verrannollisuuden hallinnan ja algebran hallinnan välinen yhteys

Ongelma 2

Merkittävin muutos kuudennelta seitsemännelle luokalle oli pitkittäistutkimuksessa murtolukujen hallinnan ja poikittaistutkimuksessa verrannollisuuden hallinnan paraneminen. Verrannollisuuden hallintaa testattiin poikittaistutkimuksessa murtolukulaskuissa ja sanallisissa verrantotehtävissä. Murtoluvun muuttamisen desimaaliluvuksi hallitsi yli puolet luokkien 6–9 oppilaista ($N = 1007$). Neljännes vastaajista valitsi visuaalisen tulkinnan ($\frac{5}{4} = 5{,}4$). Tarkempi analysointi osoitti, että visuaalisen tulkinnan valinneilla oli suuria vaikeuksia kaikilla tutkituilla matematiikan osa-alueilla, erityisesti prosenttilaskussa.

Oppilailla näytti olevan murtolukujen laskusääntöihin liittyvää näennäistietoa. Satunnaisiin algoritmeihin turvautuminen murtolukutehtävissä näytti sitä yleisemmältä, mitä vaativampi tehtävä oli. Poikittaistutkimuksen mukaan puolet vastaajista tunnisti viiden vaihtoehdon joukosta sanallisesti esitetyn murtolukujen laventamissäännön, mutta heistä vain kolmannes erotti käytännössä murtolukujen kertomisen ja laventamisen. Koko koehenkilöjoukosta neljännes hallitsi murtolukujen kertolaskun. Tyypillinen virhe murtoluvun kertomisessa kokonaisluvulla oli se, että kerrottiin sekä osoittaja että nimittäjä. Kyseinen virhe oli yhtä yleinen kuudennella kuin yhdeksännellä luokalla, noin 43 prosentilla oppilaista.

Pitkittäistutkimuksessa verrattiin oppilaiden suoriutumista sanallisesta verrantotehtävästä ja samaan matemaattiseen rakenteeseen johtavasta prosenttitehtävästä. Seitsemännen luokan syksyllä verrantotehtävästä suoriutui noin 47 % ja prosenttitehtävästä noin 15 % oppilaista (N = 87). Yhdeksännen luokan keväällä verrantotehtävästä suoriutui noin 46 % ja prosenttitehtävästä noin 30 % oppilaista (N = 85). Poikittaistutkimuksen vastaava tulos oli samansuuntainen. Verrantotehtävästä suoriutui noin 42 % ja prosenttitehtävästä noin 21 % kaikista seitsemännestä yhdeksänteen luokkien oppilaista (N = 907).

Verratessa peruskoulun oppilaiden matematiikan taitoja eri luokka-asteilla havaittiin, että kuudennen luokan alkaessa algebran ja verrannollisuuden taidot olivat samaa tasoa, ratkaisuprosentti poikittaistutkimuksessa oli noin 31 %. Seitsemännellä ja kahdeksannella luokalla nämä taidot erkanivat selvästi algebran tappioksi, mutta palautuivat taas yhdeksännen luokan alussa lähes samalle tasolle, ratkaisuprosentti algebrassa oli noin 43 ja verrannollisuudessa noin 45. Verrattaessa algebran ja verrannollisuuden taitoja kuudennen ja seitsemännen luokan välillä, havaittiin, että algebran mittaustulokset seitsemännellä luokalla olivat noin neljä prosenttiyksikköä heikommat kuin kuudennella luokalla. Vastaavasti verrannollisuuden mittaustulokset olivat yhdeksän prosenttiyksikköä paremmat kuin kuudennella luokalla. On kuitenkin huomattava, että mahdollista koulun vaikutusta ei kontrolloitu. Vertailussa kuudesluokkalaiset (N = 112) olivat eri oppilaita kuin seitsemäsluokkalaiset (N = 317). Tutkimukseen osallistuneista seitsemäsluokkalaisista vain kolmannes oli lähtöisin samoilta ala-asteilta kuin edellä mainitut kuudesluokkalaiset.

Heikkoa verrannollisuuden hallintaa ja alkeellisten virheiden kasaantumista tietyille oppilaille kuvattiin verrannollisuuden virheindeksillä. Koko tutkimusjoukossa virheindeksin ja algebran pistemäärän välinen korrelaatiokerroin oli –0,449 (N = 1019, p = 0,000) ja verrannollisuuden pistemäärän ja algebran pistemäärän välinen korrelaatiokerroin 0,504 (N = 1019, p = 0,000). Korrelaatiot viittaavat siihen, että alkeellisten virheiden kasaantuminen oppilaalle merkitsi heikkoa algebran osaamista. Virheindeksi ei kuitenkaan selittänyt heikkoa algebran osaamista yhtään enempää kuin verrannollisuuden suorituspistemäärä. Tämä merkitsee sitä, että verrannollisuuteen liittyvät tehtävät mittasivat huomattavassa määrin samoja matematiikan taitoja kuin algebran tehtävät. Vaikuttaa siltä, että tämän tutkimuksen perusteella verrannollisuuden hallintaa ei voi pitää algebran hallinnan edellytyksenä.

7.4.3 Peruskoulun 6–9-luokkalaisten valmiudet algebran opiskeluun

Ongelma 3

Esialgebran taidoissa ei kuudennen ja seitsemännen luokan välillä havaittu muutosta pitkittäistutkimuksen mukaan ja poikittaistutkimuksen mukaan algebran taidot olivat seitsemännellä hieman heikommat kuin kuudennella luokalla (t-testi, p = 0,005). Algebrassa kuudennen ja kahdeksannen luokan taidot olivat samaa tasoa ja vähän paremmat kuin seitsemännellä luokalla. Suurin peräkkäisten luokkatasojen välinen ero algebrassa oli kahdeksannen ja yhdeksännen luokan välillä. Algebran taidoissa ei havaittu merkittäviä sukupuolten välisiä eroja.

Pitkittäistutkimuksessa algebran ymmärtämistä mitattiin vain kahdella osiolla, jotka toistuivat koko seurannan ajan. Osittelulain hallinta ja muuttujan lausekkeen tunnistaminen antoivat alustavia viitteitä oppilaiden algebran taidoista. Kyseisten osioiden ratkaisuprosentit vaihtelivat kuudennen luokan syksyn noin 60 %:sta yhdeksännen luokan kevään noin 70 %:iin. Poikittaistutkimuksessa olivat mukana kaksi edellä mainittua esialgebran osiota. Lisäksi testattiin muuttujan lausekkeen konstruointia ja yhtälöiden ratkaisemista. Poikittaistutkimuksen mukaan muuttujan käsitteen ymmärtäminen oli kuudesluokkalaisilla suunnilleen samaa tasoa kuin seitsemäsluokkalaisilla. Tosin kuudesluokkalaiset onnistuivat lausekkeiden tunnistamisessa paremmin kuin seitsemäsluokkalaiset ja vastaavasti lausekkeen muodostamisessa heikommin kuin seitsemäsluokkalaiset. Muuttujan käsitteen hallinnassa kuudes- ja seitsemäsluokkalaiset olivat kuitenkin alemmalla tasolla kuin kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaiset.

Poikittaistutkimuksen mukaan helpoin muuttujiin liittyvä tehtävä oppilaille oli luonnollisen luvun seuraajan tunnistaminen, jossa onnistui yli puolet oppilaista. Kolmannes kuudennen ja seitsemännen luokan oppilaista sekä vajaa puolet ylempien luokkien oppilaista tunnisti pojan pituuden lausekkeen, joka sisälsi muuttujan. Pitkittäistutkimus antoi jo viitteitä siitä, että muuttujiin liittyvät monivalintatehtävät eivät olleet kovin luotettavia. Niinpä tässä voitaneen pitää lausekkeen laatimista luotettavampana mittarina kuin lausekkeen tunnistamista. Oppilaiden monenlaiset virhetulkinnat kirjainluvuista saattoivat olla osasyynä monivalintatyyppisten muuttujatehtävien epäjohdonmukaisiin ratkaisuihin.

Yhtälöiden ratkaisemista ei ollut pitkittäistutkimuksessa kuudes- ja seitsemäsluokkalaisten testeissä, joten yhtälöiden hallintaa käsitellään vain poikittaistutkimuksen osalta. Yhtälöiden ratkaiseminen näytti pääosalle oppilaista kirkastuvan vasta kahdeksannen luokan jälkeen. Yhtälöiden ratkaisutaitoja mitattiin numeerisen yhtälön, lausekkeiden vertailun, algebrallisen yhtälön ja ekvivalentin yhtälöryhmän avulla. Yhtälön esitystapa näytti vaikuttavan oleellisesti ratkaisun onnistumiseen. Kun arvioitiin koko koehenkilöjoukkoa (N=1019), numeerisen yhtälön ja lausekkeiden vertailuna esitetyn yhtälön onnistui ratkaisemaan noin neljännes kuudes-, seitsemäs- ja kahdeksasluokkalaisista. Yhdeksäsluokkalaisista nämä yhtälöt ratkaisi reilu kolmannes. Algebrallisen yhtälön ratkaisi vain 5 % alempien luokkien oppilaista ja 21 % yhdeksäsluokkalaisista.

Lähes kolmannes kuudesluokkalaisista onnistui muiden yhtälöiden paitsi algebrallisen yhtälön (osio 15) ratkaisemisessa. He olivat kaikkien yhtälöiden ratkaisemisessa vähintään yhtä taitavia kuin seitsemäs ja kahdeksasluokkalaiset. Yhdeksäsluokkalaiset erottuivat selvästi alempien luokkien oppilaista yhtälöiden ratkaisemisessa. Vain muutama kuudennesta kahdeksanteen luokkien oppilas onnistui ratkaisemaan algebrallisen yhtälön. Yhdeksäsluokkalaisista sen ratkaisi viidennes.

7.4.4 Oppilaiden matemaattinen ajattelu luokilla 6–9 algebran opiskelun näkökulmasta

Tutkimuksessa arvioitiin oppilaiden matemaattisen ajattelun tasoa (laatua) tarkastelemalla heidän ratkaisutapojaan matematiikan testeissä erityisesti muuttujiin ja yhtälöihin liittyvissä osioissa. Myös eräiden murtolukuihin liittyvien tulkintojen katsottiin kuvastavan oppilaiden matemaattista ajattelua. Varsinkin vaikeissa murtoluku- tai verrantotehtävissä oppilaat tukeutuivat usein satunnaisiin algoritmeihin, eivätkä huomanneet ristiriitaa saamiensa tulosten ja arkitodellisuuden välillä. Esimerkiksi sadan kalan pilkkisaaliissa saattoi oppilaiden laskujen perusteella olla yli sata särkeä tai he päätyivät tulokseen, jonka mukaan kahdelta työntekijältä kului aikaa tietyn työn tekemiseen enemmän kuin toiselta heistä yksinään.

Poikittaistutkimuksen tuloksista muodostettiin verrannollisuuden virheindeksi, jolla pyrittiin kuvaamaan alkeellisen matemaattisen ajattelun kasaantumista tietyille oppilaille ja sen vaikutusta algebran hallintaan. Kyseinen indeksi ei kuitenkaan näyttänyt selittävän algebran osaamista yhtään paremmin kuin verrannollisuuteen liittyvistä tehtävistä suoriutuminen. Indeksin arvo perustui seitsemään testiosioon, jotka yhtä lukuun ottamatta (osio 10) liittyivät verrannollisuuteen. Kullekin osiolle määriteltiin ratkaisutapa, jonka katsottiin kuvastavan muita ratkaisuvaihtoehtoja alkeellisempaa matemaattista ajattelua. Tällaista oppilaan käyttämää ratkaisutapaa kutsuttiin alkeelliseksi tai triviaaliksi virheeksi. Neljä seitsemästä triviaalista virheestä oli selvästi yhteydessä heikkoon algebran osaamiseen.

Verrannollisuuden triviaalien virheiden yhteyttä algebran hallintaan tarkasteltiin myös osioittain. Eniten vaikeuksia algebrassa oli niillä oppilailla, jotka muuttivat murtoluvun desimaaliluvuksi visuaalisen mallin mukaan (5/4 = 5,4). Mielenkiintoinen havainto oli, että laventamissäännön virhetulkinta: laventaessa murtoluku suurenee, liittyi heikkoon algebran osaamiseen, mutta laventamisen käyttö kertomisen asemasta ei liittynyt. Implisiittisen ilmaisun pitäminen eksplisiittisenä taas liittyi heikkoon algebran osaamiseen.

Verrannollisuuteen liittyvien virhetulkintojen tarkastelu viittasi siihen, että arkitodellisuuden kanssa ristiriidassa olleet ratkaisut eivät liittyneet heikkoon algebran osaamiseen. Sen sijaan ne virheet, jotka liittyivät enemmän laskutekniikkaan tai kuvion tai sanallisen lauseen tulkintaan, olivat yhteydessä heikkoon algebran osaamiseen.

Muuttujan käyttöön liittyvissä tehtävissä kuudesluokkalaiset ohittivat seitsemäsluokkalaiset ja osoittivat lähes samaa suoritustasoa kuin kahdeksasluokkalaiset, kun kyseessä oli muuttujan lausekkeen tunnistaminen (luku 7.3.1, kuviot 25 ja 26). Mutta muuttujan lausekkeen muodostamisessa näkyivät aika selvästi luokkatasojen väliset erot (ratkaisuprosentit: 6.lk n. 3 %, 7.lk 11 %, 8.lk 25 %, 9.lk 23 %). Melkoinen osa oppilaista (N = 179) kuittasi muuttujan lausekkeen pelkällä numerolausekkeella. Tämä alkeellinen ajattelutapa oli yleisempi alemmilla luokilla (6.lk n. 30 %, 7.lk 21 %, 8.lk 12 %, 9.lk 14 %). Kyseinen tulkinta heijastui jossakin määrin myös algebran suoritustasoon (kyseisen ratkaisun tehneiden ja koko tutkimusjoukon ratkaisuprosenttien ero algebrassa t-testillä, $p = 0{,}036$).

Muuttujiin liittyvien tulkintojen ohella oppilaiden algebrallista ajattelua seurattiin yhtälöiden ratkaisemisen yhteydessä. Oppilaan katsottiin osoittavan strukturaalista ajattelua yhtälön ratkaisemisessa, jos hän osasi muodostaa algebrallisesta yhtälöstä ekvivalentin yhtälöketjun tai numeerisessa yhtälössä eliminoida yhtälöstä puolittain saman termin. Kun otetaan huomioon koko koehenkilöjoukko (N = 1019), osoitti strukturaalista ajattelua numeerisen yhtälön ratkaisemisessa noin 22 % ja algebrallisen yhtälön ratkaisemisessa noin 5 % kaikista luokkien 6–9 oppilaista. Jos sama osuus lasketaan testiin osallistuneista yhdeksäsluokkalaisista (N = 240), strukturaalista ajattelua osoitti numeerisen yhtälön ratkaisemisessa noin 44 % ja algebrallisen yhtälön ratkaisemisessa noin 19 % heistä. Eri luokkatasoilla esiintyvää strukturaalista ajattelua arvioitaessa on tietenkin otettava huomioon, että kuudennella ja seitsemännellä luokalla muuttujien ja yhtälöiden käsittely oli ollut vähäistä.

Aritmeettista ajattelua, jossa yhtälön vasenta ja oikeaa puolta käsiteltiin erillisinä lausekkeina, esiintyi suunnilleen puolella alempien luokkien oppilaista ja se väheni oleellisesti vasta yhdeksännen luokan alkuun mennessä. Aritmeettisella ajattelulla ei ollut kuitenkaan yhteyttä koko testistä suoriutumiseen. Tässä mielessä aritmeettista yhtälöiden ratkaisutapaa voidaan pitää harmittomana välivaiheena, joka ei pitemmän päälle haittaa yhtälön rakenteen ymmärtämistä.

Algebrallisia virheitä eli lähinnä virheellisiä muuttujien välisiä laskutoimituksia esiintyi kolmella prosentilla oppilaista lausekkeiden vertailussa ja 16 prosentilla algebrallisen yhtälön ratkaisemisessa. Tiivistäen voidaan sanoa, että tässä tutkimuksessa muuttujan lausekkeen konstruointi ja algebrallisen yhtälön ratkaiseminen mittasivat parhaiten oppilaan algebrallisen ajattelun tasoa.

7.5 Tutkimuksen pätevyyden ja luotettavuuden arviointi

Tehdyn tutkimuksen lähtökohta oli pitkän opettajakokemuksen luoma näkemys peruskoulun algebran opetuksesta ja siihen liittyvistä ongelmista. Keskeisille ongelmille löytyi runsaasti tukea aikaisemmista tutkimuksista, etenkin ulkomaisista julkaisuista. Kotimaiset tutkimukset taas toivat vahvasti esiin opetussuunnitelmien jäykkyyden ja luettelomaisuuden. Tutkimusraporteissa korostuivat myös opettajien uskomukset sekä luokanopettajien ja aineenopettajien erilainen koulutustausta. Tutkimusjoukko valittiin harkinnan perusteella keskikokoisen suomalaisen kaupungin alueelta. Tällä tavoin varmistettiin kaikkien kohderyhmien osallistuminen. Myös asianomaisten luokkien opettajien sitoutuminen yhteistyöhön lisäsi uskoa siihen, että testit suoritettiin asianmukaisissa olosuhteissa.

Tämän tutkimuksen suunnittelussa ennakoitiin perusopetuksen opetussuunnitelmien muutosta siten, että luokkia kuudennesta yhdeksänteen käsiteltiin yhtenä kokonaisuutena. Tarkastelujakson valinnasta oli se etu, että ala-asteen ja yläasteen nivelkohta kuudennelta seitsemännelle luokalle saatiin mukaan. Valinta aiheutti kuitenkin myös rajoituksia. Negatiivisiin lukuihin liittyvät valmiudet jouduttiin jättämään pois seurannasta, koska niitä olisi voitu mitata ensimmäisen kerran vasta kahdeksannen luokan alussa. Samasta syystä muuttujiin ja yhtälöihin liittyvää osaamista mitattiin varsin yksinkertaisilla testeillä. Edelleen oppilaiden formaalin tason ajattelun selvittäminen jäi varsin suppeaksi. Myös peruskoulun algebraan keskeisenä käsitteenä liittyvä funktio jätettiin kokonaan tarkastelun ulkopuolelle.

Tutkimuksen perusajatukseen kuului testata oppilaiden ”pysyviä” valmiuksia ja ”pysyvää” matemaattista ajattelua. Tässä tarkoituksessa mittaukset tehtiin yhtä lukuun ottamatta syksyllä varsin pian kesäloman jälkeen. Järjestelyllä pyrittiin minimoimaan viimeksi opiskeltujen asioiden painottuminen testisuorituksissa.

Mittausajankohta oletettavasti heikensi jonkin verran tulostasoa. Poikittaistutkimuksen ratkaisuprosentti yhdeksännellä luokalla (44 %) oli samaa tasoa kuin Kuparin (1993a) tutkimuksessa (46 %). Sen sijaan kuudennen luokan ratkaisuprosentti (31 %) oli vain puolet siitä, mitä se oli vastaavassa Kuparin tutkimuksessa. Ero selittyy ainakin osittain sillä, että tässä tutkimuksessa kaikille luokkatasoille tehtiin sama testi, joka sisälsi alempien luokkien oppilaille vierasta matematiikkaa.

Tutkimuksessa käytetyt mittarit perustuivat koeteltuihin testistöihin (Kupari 1993a; Kieran 1992), joista muotoiltiin kuhunkin testiin sopivat osiokokonaisuudet. Empiirisen aineiston keruun jälkeen osioiden reliaabeliutta arvioitiin muun muassa Pearsonin korrelaatiokertoimen ja Cronbachin α:n avulla. Poikittaistutkimuksen viisi osiota hylättiin kokonaispistemääriä laskettaessa alhaisen reliaabeliuden takia. Eräistä hylätyistä osioista saatiin kuitenkin hyödyllistä tietoa oppilaiden ratkaisutapoja analysoidessa. Alhainen reliaabelius saattoi johtua tehtävän asetelmasta tai vaikeusasteesta. Pitkittäistutkimuksen mittarin reliaabelius vaihteli välillä 0,72–0,89 ja testin korrelaatio ajallisesti lähimpään matematiikan todistusarvosanaan välillä 0,76–0,90. Tehdyt testit näyttivät mittaavan samaa asiaa kuin matematiikan todistusarvosanat. Yläasteen loppua kohti tämä yhdenmukaisuus lisääntyi selvästi.

Poikittaistutkimuksen mittarin reliaabelius luokilla 6.–9. oli 0,76 ja luokilla 7.–9. (prosenttilaskut mukana) 0,81. Verratessa reliaabeliuksia keväällä 1998 Opetushallituksen toimeenpanemaan yhdeksäsluokkalaisten valtakunnalliseen kokeeseen (N = 3575) todetaan, että pitkittäistutkimuksen reliaabeliudet olivat vähintään samaa tasoa kuin opetushallituksen kokeessa ja poikittaistutkimuksen reliaabeliudet hieman alhaisemmat (Korhonen 1999).

Seurantatutkimuksen ongelmana saattaa olla se, että samat tai samantapaiset testiosiot toistuvat. Tehdyssä pitkittäistutkimuksessa mittaukset suoritettiin suunnilleen vuoden välein. Tehtäväpapereita ei palautettu oppilaille eikä tehtävien ratkaisuja selitetty heille missään vaiheessa. Tällä perusteella on syytä uskoa, ettei oppimisvaikutusta syntynyt merkittävästi seurannan aikana. Seurantatutkimuksen kaikissa mittareissa oli 12 monivalintaosiota ja 7–18 tuottamistehtävää. Monivalintaosiot näyttivät toimivan johdonmukaisesti, paitsi yhdessä tapauksessa. Kun oppilaiden oli valittava viiden vaihtoehdon joukosta luonnollisen luvun a seuraaja, teki puolet kuudennella luokalla oikean valinnan tehneistä vuotta myöhemmin väärän valinnan. Havainto herätti kysymyksen siitä, miten oppilaat yleensä tulkitsevat muuttujan, silloin kun sitä ei ole heille vielä opetettu. Poikittaistutkimus osoitti, että muuttujan lausekkeen muodostaminen mittaa luotettavammin oppilaan matemaattista ajattelua kuin muuttujan lausekkeeseen liittyvä tunnistamistehtävä.

Mittareiden reliaabeliutta kuvaavia Cronbachin α:n arvoja 0,32–0,70 voidaan pitää kohtuullisina murtolukujen ja prosenttilaskun mittareille, vaikka lukemat eivät ylläkään valtakunnallisten kokeiden tasolle (0,83–0,86, Korhonen 1999). Esialgebran kohdalla reliaabeliudet olivat alhaisempia ja vaihtelivat vuosittain huomattavasti. Tulos viittaa siihen, että oppilaiden tekemät esialgebran ratkaisut olivat epäjohdonmukaisia. Eräät oppilaat osasivat tulkita osittelulain (osio 6, 6.lk.), mutta eivät tunnistaneet luonnollisen luvun seuraajaa (osio 4, 6.lk.) annettujen vaihtoehtojen joukosta. Osalle oppilaista taas oli käynyt päinvastoin. Mittarin kannalta tämä tarkoittaa sitä, että kyseiset kaksi osiota eivät mitanneet samaa asiaa. Oppilaiden vastauksia seuraamalla paljastui muutakin. Kahdeksasluokkalaisista molemmat osiot ratkaisi oikein 26 oppilasta ja molemmat väärin 18 oppilasta. Toisaalta ensimmäinen osio oli oikein ja toinen väärin 20 oppilaalla ja ensimmäinen väärin ja toinen oikein 21 oppilaalla. Näistä ristikkäisistä tuloksista aiheutuu tilastollisesti erittäin alhainen luotettavuutta kuvaava Cronbachin $\alpha = 0,05$. Kuitenkin yli puolella oppilaista osioiden 4 ja 6 ratkaisut tukevat toisiaan eli heidän kohdallaan voidaan sanoa, että molemmat osiot näyttävät mittaavan samaa asiaa.

Pitkittäistutkimus antoi jo viitteitä siitä, että muuttujiin liittyvät monivalintatehtävät eivät olleet kovin luotettavia. Niinpä tässä voitaneen pitää lausekkeen laatimista luotettavampana mittarina kuin lausekkeen tunnistamista. Oppilaiden monenlaiset virhetulkinnat kirjainluvuista saattoivat olla osasyynä monivalintatyyppisten muuttujatehtävien epäjohdonmukaisiin ratkaisuihin. Jatkotutkimuksia ajatellen on syytä harkita muuttujiin liittyvien monivalintatehtävien kontrollointia vastaavilla tuottamistehtävillä.

Tämän tutkimuksen molempia osia, pitkittäistutkimusta ja poikittaistutkimusta, voidaan pitää tapaustutkimuksina. Ne kuvaavat tietyn asuinalueen 12–15-vuotiaiden matematiikan osaamista tietyillä keskeisillä matematiikan osa-alueilla. Tutkimustuloksia ei voi koehenkilöjoukon perusteella yleistää koko valtakuntaan. Tulokset antavat kuitenkin selkeitä viitteitä siitä, miten tietyn ikäiset pojat ja tytöt ratkaisevat matematiikan tehtäviä, millaisia käsityksiä heillä on aritmetiikan ja algebran käsitteistä ja kuinka abstraktia matematiikkaa he voivat tietyssä iässä oppia.

8 SIIRTYMINEN ARITMETIIKASTA ALGEBRAAN PERUSKOULUN MATEMATIIKASSA

Tässä tutkimuksessa selvitettiin aritmetiikasta algebraan siirtymisen ongelmia luokkien 6–9 matematiikan opiskelussa. Kansakoulun ja oppikoulun ajoilta peräisin oleva opetussuunnitelma on varsin pitkään viitoittanut peruskoulun matematiikan opiskelua. On ajateltu, että hyvä aritmetiikan hallinta on algebran opiskelun aloittamisen edellytys. Aritmetiikan vaikeimpien osa-alueiden, kuten murtolukujen, verrannollisuuden ja prosenttilaskun perinpohjainen käsittely on merkinnyt sitä, että algebran opiskelu on rajoittunut lähinnä peruskoulun kahteen ylimpään luokkaan. Tässä tutkimuksessa selvitettiin mahdollisuutta aloittaa esialgebran opiskelu nykyistä aiemmin.

Tutkimus oli kaksivaiheinen. Ensimmäisen vaiheen muodosti noin neljä vuotta kestänyt seurantatutkimus, joka suuntautui keskisuuren kaupungin kahteen asuinalueeseen. Tutkimusjoukkona olivat ne syksyllä 1996 peruskoulun kuudennen luokan aloittaneet oppilaat (N = 89), jotka myöhemmin jatkoivat opiskeluaan samalla yläasteella. Pitkittäistutkimuksessa kartoitettiin yhden ikäluokan matematiikan taitoja mahdollisimman monella matematiikan osa-alueella. Tässä raportissa rajoitutaan yhtäältä peruslaskutaitojen ja toisaalta murtolukulaskujen, esialgebran ja prosenttilaskujen hallinnan arviointiin. Joitakin viitteitä saatiin myös oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittymisestä neljän vuoden aikana.

Toisen vaiheen muodosti poikittaistutkimus, johon osallistui 1019 oppilasta saman kaupungin kolmelta ala-asteelta ja viideltä yläasteelta syksyllä 2001. Poikittaistutkimuksessa mittauksia syvennettiin matemaattisen ajattelun suuntaan. Matematiikan osa-alueet valittiin siten, että verrannollisuus sisälsi murtoluku- ja verrantotehtävät. Algebran alueeseen puolestaan kuuluivat osittelulain soveltaminen ja muuttujan lausekkeen tunnistaminen, jotka pitkittäistutkimuksessa edustivat esialgebraa. Lisäksi algebraan kuului muuttujan lausekkeen konstruointia ja yhtälöiden ratkaisemista. Prosenttilaskentaa arvioitiin molemmissa tutkimuksissa omana osa-alueenaan seitsemännestä luokasta lähtien.

8.1 Peruskoululaisen matematiikan osaamisen yleinen kehittyminen kuudennen luokan alusta peruskoulun loppuun

Pitkittäistutkimuksessa oppilaiden testisuoritukset heikkenivät hieman kuudennelta seitsemännelle ja edelleen kahdeksannelle luokalle siirryttäessä. Sama notkahdus näkyi matematiikan todistusarvosanoissa. Tällainen kehitys saattoi johtua osaltaan koulun vaihtumisesta ja luokanopettajan vaihtumisesta aineenopettajaan. Suurin syy notkahdukseen lienee kuitenkin ollut testin monipuolistuminen ja vaikeutuminen.

Pitkittäistutkimuksessa heikoimman ja parhaimman viidenneksen välinen suoritustasojen ero kaventui neljän vuoden seurannan aikana. Kun jako viidenneksiin tehtiin uudelleen peruskoulun päättyessä, havaittiin, että ero oli todellisuudessa suurentunut. Heikoimmin ja parhaiten menestyneiden oppilasryhmien koostumus muuttui seurannan aikana siten, että puolet oppilaista säilyi entisissä tasoryhmissään. Lähtötilanteessa parhaiten menestyneillä muutokset olivat suurempia kuin lähtötilanteessa heikoimmin menestyneillä. Viiden parhaiten ja viiden heikoimmin menestyneen oppilaan asema edellä kuvatussa tasoryhmityksessä oli peruskoulun päättyessä jokseenkin sama kuin kuudennen luokan alussa.

Pitkittäistutkimuksessa tehdyt matematiikan tietojen ja taitojen testaukset näyttivät mittaavan samaa asiaa kuin matematiikan todistusarvosanat. Testitulosten korrelaatio lähimpään todistusarvosanaan oli peruskoulun päättövaiheessa noin 0,9. Vaikutti siltä, että ei ole kovin helppo kuudennen luokan alussa ennustaa yksittäisen oppilaan menestymistä matematiikassa yhdeksännen luokan lopussa. Neljän vuoden aikana ehti tapahtua yllättävän suuria yksilötason muutoksia varsinkin parhaiten menestyneillä oppilailla. Selityksiä havaitulle kehitykselle voi löytyä monelta taholta. Kun aiemmin numerolaskuissa hyvin menestynyt oppilas havaitsee, ettei hän ymmärrä kirjainlukujen merkitystä, saattaa motivaatio kadota lopullisesti. Opetusryhmän ilmapiiri saattaa myös kehittyä sellaiseksi, että osaamista ja sen aktiivista julkituomista joko suositaan tai paheksutaan. Yksittäisen oppilaan tai oppilasryhmän motivaatio matematiikan opiskeluun riippuu myös siitä, millaisena nähdään matematiikan merkitys omien jatko-opintojen kannalta.

Oppilaiden peruslaskutaitoja arvioitiin vain pitkittäistutkimuksessa. Havaittiin, että kyseiset taidot paranivat vuosi vuodelta. Peruslaskutaitojen muutokset kuudennelta seitsemännelle luokalle ja kahdeksannelta yhdeksännelle luokalle olivat myös tilastollisesti merkitseviä. Muutokset saattoivat johtua osittain siitä, että sekä ala-asteen että yläasteen loppuvaiheessa pyrittiin asioita kertaamalla varmistamaan kaikkien oppilaiden peruslaskutaidot. Laskinten käyttö oppitunneilla ja testien suorittaminen ilman laskimia ei näyttänyt vaikuttaneen oppilaiden peruslaskutaitoihin.

Pitkittäistutkimuksen perusteella murtolukutehtävistä suoriutuminen parani jonkin verran neljän vuoden aikana. Heikoin viidennes näytti jäävän pysyvästi jälkeen parhaasta viidenneksestä murtolukujen hallinnassa. Esialgebran taidot eivät juuri muuttuneet seurannan aikana, eikä myöskään heikoimman viidenneksen ja parhaan viidenneksen välillä ollut kovin suurta eroa kyseisellä matematiikan osa-alueella.

Nopeinta matematiikan valmiuksien, tietojen ja taitojen kehittyminen oli molempien osatutkimusten valossa kahdeksannen luokan aikana. Pitkittäistutkimuksen mukaan muutosta tapahtui erityisesti prosenttilaskennan ja esialgebran alueilla, poikittaistutkimuksen mukaan kaikilla matematiikan osa-alueilla. Opettajan näkökulmasta tulos on kiinnostava, koska yleensä koetaan, että juuri kahdeksannella luokalla on vaikeinta motivoida oppilaita varsinkin teoreettisten asioiden opiskeluun. Murrosikään liittyvä kehitysvaihe hämmentää oppilaita ja aiheuttaa keskittymisongelmia.

8.2 Verrannollisuuden soveltaminen

Tässä tutkimuksessa verrannollisuus sisälsi murtolukulaskut ja verrantoon liittyvät sanalliset tehtävät. Prosenttilaskuja käsiteltiin verrannollisuuden soveltamisena. Verrannollisuuden ymmärtämistä mitattiin vain keskenään jaollisilla luvuilla eli Langrallin tutkijaryhmän (2000) luokittelun mukaan tasolla 2 eli diskreetillä tasolla. Tasoa 3 eli formaalia tasoa, missä luvut ovat keskenään jaottomia, pidettiin etenkin kuudesluokkalaisille liian vaikeana, kun laskinta ei saanut käyttää.

Kansakoulun laskennossa verrannollisuuden käsittely edelsi prosenttilaskennan opiskelua (Suhonen ym. 1950). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 opiskeltavien asioiden järjestystä on muutettu. Verrannollisuuteen liittyvät käsitteet: murtoluvut, murtolukujen muunnokset, mittakaava ja prosentin käsite opiskellaan pääosin luokilla 3–5. Kuitenkin suhde ja verranto, joiden luulisi olevan peruskäsitteitä esimerkiksi murtolukujen ekvivalenssiluokkia muodostaessa, mainitaan ensimmäisen kerran vasta luokkien 6–9 opetussuunnitelmissa.

Oppilaiden osoittama verrannollisuuden hallinta parani vain hiukan kuudennelta yhdeksännelle luokalle kestäneen tarkastelujakson aikana. Havainto tukee aikaisempia käsityksiä siitä, että verrannollisuuden ymmärtäminen on hitaasti kehittyvä valmius (mm. Johnson & Lauten 2000; Riddle & Rodzwell 2000).

Prosenttilaskun taitoja mitattiin ensimmäisen kerran seitsemännen luokan syksyllä, jolloin pitkittäistutkimuksen mukaan noin neljännes oppilaista suoriutui näistä tehtävistä. Siitä huolimatta, että prosenttilaskenta oli seitsemännen luokan opetussuunnitelman keskeinen osa-alue, näyttivät prosenttilaskun taidot suorastaan heikkenevän kahdeksannen luokan syksyyn mennessä, kuitenkin prosenttilaskenta hallittiin kohtalaisesti yhdeksännen luokan syksyllä. Peruskoulun päättyessä lähes puolet oppilaista suoriutui näistä tehtävistä. Näytti siltä, että kahdeksannen luokan aikana oppilaiden matemaattinen ajattelu oli kehittynyt siihen suuntaan, että prosenttilaskun idea alettiin ymmärtää. Kahdeksannen luokan opetuksessa verrannollisuuden painottuminen saattoi osaltaan auttaa prosentin käsitteen ymmärtämistä.

Pitkittäistutkimuksen mukaan prosenttilaskennan hallitsi yhdeksännen luokan alkaessa noin kolmannes ja poikittaistutkimuksen mukaan noin viidennes oppilaista. Molemmissa osatutkimuksissa prosenttilaskennan mittari sisälsi prosenttiosuuden laskemisen ja prosenttiluvun määrittämisen. Tältä osin mittarit olivat toisiaan vastaavat. Poikittaistutkimuksen mittarissa oli lisäksi kolmas tehtävä, joka liittyi perusarvon laskemiseen. Tämä tehtävätyyppi osoittautui selvästi muita prosenttilaskuja vaikeammaksi ja oli siten yhtenä syynä prosenttilaskennan heikohkoon suoritustasoon poikittaistutkimuksessa. Toisena syynä voidaan pitää prosenttilaskennan osioiden sijoittumista tehtävälomakkeen viimeisiksi. Muutama oppilas valitti vastauspaperissaan suoritusajan niukkuutta.

8.3 Verrannollisuuden hallinnan yhteys algebran hallintaan

Poikittaistutkimuksen perusteella kuudennen luokan alussa verrannollisuutta ymmärrettiin suunnilleen yhtä hyvin kuin algebraa. Ylemmillä luokilla kyseiset taidot kuitenkin eriytyivät siten, että vasta yhdeksännellä luokalla algebraa ymmärrettiin yhtä hyvin kuin verrannollisuutta.

Kansakoulun ja oppikoulun matematiikassa verrannollisuuden opiskelu edelsi algebran opiskelua. Sama järjestys on jatkunut näihin päiviin asti peruskoulussa. Eräänlaisena ”piilo-opetussuunnitelmana” on näkynyt, että verrannollisuuden ymmärtämistä on pidetty algebran opiskelun edellytyksenä.

Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi asetti nuoremmille oppilaille enemmän haasteita kuin sanalliset tehtävät. Murto- ja desimaalilukujen symbolien hallinta oli kuudes- ja seitsemäsluokkalaisilla melko hataraa kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaisiin verrattuna. Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi nousi muutenkin erityisasemaan. Varsinkin nuoremmista oppilaista monet päätyivät visuaaliseen ratkaisuun 6/5 = 6,5. Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi näytti osoittavan kuudennen luokan alussa parhaiten matematiikkaa osaavat ja kahdeksannen luokan alussa heikoimmin matematiikkaa osaavat oppilaat.

Pojat menestyivät tyttöjä paremmin verrannollisuudessa ja prosenttilaskussa. Sen sijaan algebran osaamisessa ei havaittu sukupuolten välisiä eroja. Koko tutkimusjoukon osalta heikko verrannollisuuden hallinta liittyi heikkoon algebran osaamiseen, mutta verrannollisuuden triviaalien virheiden kasaantuminen tietyille oppilaille ei tuottanut oleellista lisätietoa asiasta. Nämä tarkastelut eivät tue sitä käsitystä, että verrannollisuuden hallinta olisi algebran ymmärtämisen edellytys. Verrannollisuuden ja algebran hallinta näyttivät pohjautuvan ainakin osittain samoihin matematiikan valmiuksiin, tietoihin ja taitoihin.

8.4 Peruskoululaisen algebran hallinta luokilla 6–9

Pitkittäistutkimuksessa arvioitiin oppilaiden esialgebran hallintaa vain kahden osion perusteella. Luonnollisen luvun seuraajan tunnistaminen ja osittelulain soveltaminen numerolukuihin eivät näyttäneet oikein hyvin mittaavan samaa asiaa. Oppilaiden vastauksiin liittyvät epäjohdonmukaisuudet peräkkäisten vuosien välillä herättivät kysymyksen siitä, miten oppilaat tulkitsevat kirjainlukuja, ennen kuin niitä on heille opetettu. Kirjainluvuista saatetaan tehdä kielellisiä tulkintoja, kun pitäisi tulkita niiden merkitystä, kuten Schoenfeld (1985) mainitsee tai tulkinta voi perustua jopa aakkosjärjestykseen, niin kuin Staceyn ja McGregorin (1997) tutkimuksissa.

Poikittaistutkimuksessa muuttujiin liittyvistä osioista muodostui kolmitasoinen hierarkia, jossa tasojen väli ratkaisuprosentilla arvioituna oli noin 20 prosenttiyksikköä. Alinta tasoa edusti luonnollisen luvun seuraajan tunnistaminen, toista tasoa muuttujan sisältävän mittaluvun tunnistaminen ja ylintä tasoa muuttujan sisältävän lausekkeen konstruointi. Kieranin (1992) esittämän teorian mukaan nämä kaikki tasot liittyvät proseduraaliseen ajatteluun. Muuttujan lausekkeen konstruointi ja yhtälöiden ratkaiseminen näyttivät kertovan eniten oppilaiden algebrallisesta ajattelusta. Testiin sisältyi kolmen yhtälön ja yhden yhtälöryhmän ratkaiseminen. Yhtälöistä yksi oli numeerinen, toinen esitettiin kahden lausekkeen vertailuna ja kolmas ylsi Vlassisin (2002) luokittelun mukaan algebran tasolle tai Kieranin (1992) luokittelun mukaan strukturaaliselle tasolle. Yhtälöiden vaikeusaste oli kuitenkin tämän tutkimuksen tavoitteiden mukainen. Tarkoitus ei ollut kartoittaa koko peruskoulun algebraa, vaan selvittää nimenomaan aritmetiikan ja algebran välisen siirtymävaiheen ongelmia.

Tutkimuksessa havaittiin, että algebrallinen yhtälö oli huomattavasti helpompi ratkaista, kun se esitettiin kahden lausekkeen yhtäsuuruuden vertailuna eli yhtälön struktuuri purettiin proseduurien tasolle. Havainto tukee Kieranin (1992) käsitystä siitä, että kokeilu auttaa paremmin ymmärtämään yhtälön rakennetta kuin yhtälön purkaminen käänteisiä laskutoimituksia käyttäen.

Kirjoittaja on päätynyt käytännön opetustyössä samalle kannalle kuin Linchevskin tutkijaryhmä (1996), jonka mukaan lineaaristen yhtälöiden aritmeettinen ratkaiseminen on sopivampi keino aloittaa muuttujilla operointi kuin eteneminen muuttujista lausekkeisiin ja edelleen yhtälöihin. Oppilaiden motivoinnin kannalta aloitus sanallisista tehtävistä, siirtyminen yhtälöihin sitten, kun muut konstit eivät auta ja yhtälöiden ratkaisutekniikka vasta viimeksi, on kirjoittajan mielestä osoittautunut parhaaksi tavaksi opiskella yhtälöitä. Mainittu opiskelujärjestys saa tukea tutkimuskirjallisuudesta (Stacey ym. 1997; Linchevski & Herscovics, 1996; Friedlander ym. 1997).

Yhtälöiden ratkaisutaidot näyttivät kehittyvän siten, että kuudennesta kahdeksanteen luokkien oppilaat olivat suunnilleen samaa tasoa ja vasta peruskoulun päättöluokan alkaessa kyseiset taidot olivat selvästi parantuneet. Arvioimalla oppilaiden valitsemia yhtälöiden ratkaisumenetelmiä vaikutti siltä, että vain noin 5–9 % kuudennesta yhdeksänteen luokkien oppilaista ymmärsi algebrallisen yhtälön matemaattisen struktuurin. Heistä pääosa oli yhdeksäsluokkalaisia ja heistä laskettuna vastaava osuus oli noin viidennes. Tulos on varsin lähellä Kieranin (1992) arviota, että 7–10 % yläasteen oppilaista osoittaa lausekkeiden ja yhtälöiden strukturaalista käsittämistä.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 algebran käsitteistä lauseke ja yhtälöt mainitaan luokkien 3–5 keskeisissä sisällöissä. Tästä voisi päätellä, että algebran opiskelun aloittamista halutaan varhentaa. Toisaalta muuttujakäsite ja lausekkeen arvon laskeminen, jotka kuuluvat algebran perusasioihin, mainitaan vasta luokkien 6–9 opetussuunnitelmissa. Opetussuunnitelman perusteista näyttää puuttuvan selkeä käsitteiden välinen hierarkia. Tämän tutkimuksen perusteella kuudes-, seitsemäs- ja kahdeksasluokkalaiset hallitsivat muuttujiin ja yhtälöihin liittyvät perusasiat jokseenkin yhtä hyvin, joten algebran opetus voitaisiin aloittaa vähitellen viimeistään kuudennelta luokalta lähtien.

8.5 Peruskoululaisen matemaattinen ajattelu luokilla 6–9 algebran opiskelun näkökulmasta

Peruskoululaisten matemaattista ajattelua tarkasteltiin tässä tutkimuksessa matematiikan prosessien näkökulmasta. Joutsenlahti (2005) käytti samaa näkökulmaa tutkiessaan ylioppilaskokelaiden matemaattista ajattelua. Lähtökohtana pidettiin oppilaan kykyä suoriutua erilaisista matematiikan tehtävistä. Matemaattisen ajattelun kuvaa syvennettiin arvioimalla oppilaan valitsemia ratkaisuvaihtoehtoja tai käyttämiä ratkaisumenetelmiä. Virheellisistä ratkaisutavoista valittiin ne, joiden katsottiin edustavan alkeellisinta eli triviaaleinta ajattelutapaa kyseisissä tilanteissa. Tällä periaatteella muodostettiin verrannollisuuden virheindeksi ja aritmeettisen ajattelun indeksi. Edellisellä kuvattiin verrannollisuuteen liittyvien alkeellisten virheiden kasaantumista tietyille oppilaille. Jälkimmäinen indeksi taas ilmaisi alkeellisten virheiden kasaantumista yhtälöiden ratkaisemisessa.

8.5.1 Verrannollisuuden hallinta oppilaan algebrallisen ajattelun selittäjänä

Murtolukujen katsottiin kuuluvan verrannollisuuden alueeseen. Verrannollisuuteen liittyvien virhetulkintojen tarkastelu viittasi siihen, että arkitodellisuuden kanssa ristiriidassa olleet ratkaisut, joiden katsottiin edustavan alkeellista ajattelua, eivät liittyneet heikkoon algebran osaamiseen. Sen sijaan ne virheet, jotka liittyivät enemmän laskutekniikkaan tai kuvion tai sanallisen lauseen tulkintaan, olivat yhteydessä heikkoon algebran osaamiseen.

Murtolukutehtävien yhteydessä ilmeni eräitä seikkoja, joilla näytti olevan merkitystä myös muiden matematiikan osa-alueiden hallinnassa. Erityisasemaan nousi osio, jossa piti muuttaa murtoluku desimaaliluvuksi. Osa oppilaista valitsi vastausvaihtoehdon ”visuaalisin perustein”, esimerkiksi 5/4 = 5,4. Pitkittäistutkimuksessa seurattiin visuaalisen vaihtoehdon valintaa vuosittain jakamalla tutkimusjoukko testipisteiden perusteella tasasuuriin viidenneksiin. Kuudennen luokan alussa visuaalisia ratkaisuja esiintyi kaikissa viidenneksissä ja oikeita ratkaisuja vain parhaissa viidenneksissä. Kyseinen tehtävä näytti tuolloin osoittavan parhaiten matematiikkaa osaavat oppilaat. Kahdeksannen luokan alkaessa oikeita ratkaisuja esiintyi kaikissa viidenneksissä ja visuaalisia ratkaisuja vain heikoimmissa viidenneksissä. Tällöin tehtävä näytti osoittavan heikosti matematiikkaa osaavat oppilaat. Tehdyn havainnon perusteella parhaiten menestyneille voitaisiin tarjota vaativampia lisätehtäviä jo kuudennella luokalla. Sen sijaan heikommin menestyneet oppilaat kaipaisivat tukitoimia vasta kahdeksannella luokalla. Johtopäätös on viitteellinen, koska se perustuu vain yhteen osioon.

Poikittaistutkimuksessa varmistui, että murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi visuaalisen mallin mukaan on yhteydessä muuhun matematiikan osaamiseen. Niillä oppilailla, jotka valitsivat visuaalisen vaihtoehdon, ilmeni vaikeuksia kaikilla tutkituilla matematiikan osa-alueilla, erityisesti prosenttilaskennassa. Molemmissa osatutkimuksissa esiintyi murtolukujen algoritmeihin perustuvia tehtäviä, joiden katsotaan edustavan van Hielen (1986) teoriassa tasoa 2. Saman teorian kannalta murtoluvun visuaalinen tulkinta desimaaliluvuksi edustaa tasoa 1. Ainakin tässä kohden van Hielen teoria, joka alun perin liittyi geometrisen ajattelun tason kuvaamiseen, näyttäisi toimivan myös algebrassa.

Molemmissa osatutkimuksissa olivat mukana sanallisesti esitetty verrantotehtävä ja samaan matemaattiseen malliin perustuva prosenttiluvun määrittäminen. Verrantotehtävästä selviytyi poikittaistutkimuksen mukaan lähes puolet, mutta vastaavasta prosenttilaskusta vain noin viidennes. Yksi selitys mainitulle erolle on prosenttilaskennan termit ja symbolit, jotka edellyttävät abstraktimpaa ajattelua kuin verrannon numeroluvut. Toinen selitys on, että prosenttilaskennan opetus ei perustu verrannollisuuteen (ks. Suhonen ym. 1950; Haapasalo 1992; Drier 2000). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004 ei myöskään ota huomioon yhteyttä verrannollisuuden ja prosenttilaskun välillä, koska verrantoa käsitellään vasta luokilla 6–9 ja prosentin käsite opetetaan aiemmin.

Poikittaistutkimuksessa esitetyt prosenttilaskut muodostivat kolmiportaisen vaikeusastehierarkian. Tehtävät helpoimmasta vaikeimpaan olivat: prosenttiosuuden laskeminen, prosenttiluvun laskeminen ja perusarvon laskeminen. Vaikka prosenttilaskenta yleensä liitetään numerolukuihin ja niiden välisiin algoritmeihin, havaittiin prosenttilaskun hallinnalla olevan yhteyksiä moniin matematiikan osa-alueisiin. Verrannollisuuteen liittyvien alkeellisten virheiden lisäksi muuttujan lausekkeen konstruoinnissa ja yhtälöiden ratkaisemisessa esiintyneet ongelmat olivat yhteydessä heikkoon prosenttilaskennan hallintaan. Tällä perusteella myös prosenttilaskun hallinnan voi katsoa kertovan jotakin oppilaan matemaattisen ajattelun tasosta. Prosenttilaskun abstraktisuudesta kertoo myös se, että sekä pitkittäis- että poikittaistutkimuksen mukaan oppilaiden prosenttilaskentaan liittyvät taidot paranivat oleellisesti vasta yhdeksännen luokan alkuun mennessä.

8.5.2 Muuttujiin liittyvät tulkinnat ja yhtälöiden ratkaiseminen oppilaan matemaattisen ajattelun kuvaajina

Poikittaistutkimuksessa muuttujaan liittyvät tulkinnat muodostivat oppilaiden ratkaisuprosenttien perusteella kolmiportaisen hierarkian. Alinta tasoa edusti luonnollisen luvun seuraajan tunnistaminen, keskitasoa muuttujan sisältävän mittaluvun tunnistaminen ja ylintä tasoa muuttujan lausekkeen konstruointi. Peräkkäisten tasojen väli oli ratkaisuprosentilla mitattuna noin 20 %. Kieranin (1992) esittämässä luokittelussa: proseduraalinen – strukturaalinen, nämä kaikki kolme tasoa kuuluvat proseduraaliseen alueeseen.

Muuttujan lausekkeen konstruoinnissa oppilaiden ratkaisut luokiteltiin viiteen tasoon, joista alinta eli ensimmäistä tasoa edusti mittaaminen, jonka tuloksena päädyttiin numerolukuihin (7 % vastaajista, joita oli 638). Toisen tason ratkaisun, jossa hylkäämällä muuttuja päädyttiin numerolausekkeeseen, teki noin 28 % vastaajista. Näiden tasojen voi katsoa vastaavan Küchemanin (1981) kuusiportaisen luokituksen kahta alinta tasoa. Muutama oppilas päätyi kertolaskun asemasta yhteenlaskuun. Tätä vaihtoehtoa ei voitu kytkeä Küchemanin luokitukseen. Sen sijaan noin 33 % vastaajista teki erilaisia algebrallisia virheitä, jotka viittasivat siihen, että muuttujat olivat jotakin muuta kuin tavanomaisia lukuja. Näiden oppilaiden tulkinta ei täysin vastaa Küchemanin kolmannen tason ratkaisua, mutta on kuitenkin selvästi kehittyneempi vaihtoehto kuin kaksi edellä mainittua tulkintaa. Ylintä eli viidettä tasoa edusti oikean ratkaisun aikaan saaminen, jota voitaneen pitää Küchemanin neljänteen tasoon kuuluvana, koska se edustaa selvästi edellä esitettyjä vaihtoehtoja strukturoidumpaa ajattelua.

Oppilaiden matemaattista ajattelua pyrittiin varsinaisten testisuoritusten ohella arvioimaan kartoittamalla triviaaleja virheitä. Virheellisiä ratkaisutapoja yhdistelemällä laadittiin verrannollisuuden virheindeksi IV_{red} ja aritmeettisen ajattelun indeksi IA_{red}. Tulokset osoittivat, että eräillä verrannollisuuden triviaaleilla virheillä oli yhteyttä heikkoon matematiikan osaamiseen. Erityisesti murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi visuaalisen mallin mukaan (esim. 5/4=5,4), liittyi heikkoon menestymiseen kaikilla tutkituilla matematiikan osa-alueilla, varsinkin prosenttilaskussa. Useiden verrannollisuuteen liittyvien alkeellisten virheiden kasaantuminen tietyille oppilaille näytti olevan alemmille luokkatasoille tyypillistä, mutta ilmiö ei kuitenkaan selittänyt heikkoa algebran osaamista paremmin kuin heikko verrannollisuuden hallinta sinänsä. Virheindeksin avulla ei siis pystytty osoittamaan, että olisi jonkinlainen verrannollisuuteen liittyvä virheellisten ajattelutapojen kasautuma, joka merkitsisi vaikeuksia algebran ymmärtämisessä.

Alemmilla luokilla opittua kirjoittamistapaa, jossa peräkkäisiä yhtäsuuruusmerkkejä käyttäen kirjoitetaan laskulausekkeiden ketju, joka ei pidä paikkaansa, kutsutaan tässä tutkimuksessa aritmeettiseksi ajatteluksi. Aritmeettinen ajattelu aiheutti hämmennystä yhtälöitä ratkaistessa. Oppilas tulkitsi yleensä, että yhtälön oikean puolen ensimmäinen termi on yhtälön vasemman puolen laskun tulos. Usein yhtälön ratkaisemiseen liittyi vielä tulkinta, että yhtälön oikean ja vasemman puolen termit vastaavat pareittain toisiaan, jolloin yleensä saatiin yhtälölle kaksi eri ratkaisua. Aritmeettista ajattelua esiintyi yli puolella kuudes- ja seitsemäsluokkalaisista, ylemmillä luokilla selvästi vähemmän. Aritmeettinen ajattelu on opettajan kannalta kiusallinen ilmiö silloin, kun opetellaan yhtälöiden ratkaisutekniikkaa, se ei kuitenkaan kytkeytynyt heikkoon matematiikan osaamiseen, eikä heikkoon algebran osaamiseen. Aritmeettinen ajattelu näytti olevan harmiton välivaihe edettäessä laskutoimituksiin painottuvasta aritmetiikasta kohti algebran strukturaalista ajattelua.

8.6 Ideoita jatkotutkimukselle ja vaihtoehtoja käytännön opetustyöhön

Tehdyn tutkimuksen perusteella verrannollisuuden hallinta ei näyttänyt olevan algebran osaamisen edellytys. Pikemminkin vaikutti siltä, että verrannollisuus ja algebra ovat matematiikan osa-alueita, joiden opiskelu edellyttää samantapaisia valmiuksia, joita ilmeni murtolukujen, verrantojen, prosenttilaskujen, muuttujan lausekkeiden ja yhtälöiden käsittelyssä. Esialgebran taidot olivat jokseenkin samaa tasoa kuudennesta kahdeksanteen luokkien oppilailla. Saatujen tulosten perusteella tuntuisi luontevalta opettaa peruskoulussa verrannollisuutta ja algebraa samanaikaisesti, rinnakkain ja lomittain, ainakin jo kuudennelta luokalta lähtien. Algebran opiskelun rajaaminen omaksi alueekseen tietyille luokka-asteille ja arkitodellisuuden sivuuttava symbolilaskenta eivät ainakaan helpota oppilaan siirtymistä aritmetiikasta algebraan.

Näyttää siltä, että pelkästään oppilaiden virheellisiä ratkaisuja analysoimalla ei saada luotettavaa kuvaa heidän matemaattisesta ajattelustaan. Tutkimuksessa havaittiin joillakin yksittäisillä verrannollisuuden virhetulkinnoilla olevan yhteyksiä heikkoon matematiikassa menestymiseen, mutta myös päinvastaisia esimerkkejä löytyi. Myöskään oppilaiden satunnaisiin algoritmeihin painottuva ja kognitiivisia ristiriitoja sisältävä ratkaisutapa ei välttämättä merkinnyt erityisiä ongelmia algebran opiskelussa.

Peruskoulun matematiikan opetukseen kohdistuu odotuksia, jotka näyttävät keskenään ristiriitaisilta. Uusien opetussuunnitelman perusteiden 2004 mukaan pyritään matemaattisen ajattelun herättämiseen oppilaissa jo ensimmäisestä luokasta lähtien. Kysymys on lähinnä asioiden pohtimisen ja ymmärtämisen nostamisesta laskutehtävien suorittamisen rinnalle. Tämä merkitsee matematiikan opetuksen ja oppimisen abstraktiotason nostamista ja opiskelun painopisteen siirtämistä algebran suuntaan. Tavoite on samansuuntainen kuin esimerkiksi TIMSS- ja PISA-tutkimusten raportoinneissa on esitetty. Algebran osuutta peruskoulun matematiikassa tulisi vahvistaa. Toisaalta on nähty oppilaiden turhautuminen ja heissä herännyt epäily, että peruskoulun matematiikassa opetetaan asioita, joita ei missään tarvita (Linchevski & Herscovics 1996;

Friedlander ym. 1997; English ym. 1997; Stacey ym. 1997; Keranto 1998; Slavit 2001).

Tämän tutkimuksen perusteella oppilaiden monet algebran ymmärtämiseen liittyvät valmiudet ovat suunnilleen samaa tasoa kuudennella, seitsemännellä ja kahdeksannella luokalla. Havainto viittaa siihen suuntaan, että algebran opiskelu voitaisiin aloittaa nykyistä aiemmin. Edellä kuvattu algebran opiskeluun liittyvä ristiriita voidaan välttää, kun algebra nähdään aritmetiikan yleistyksenä. Oppilaan uskomusten kannalta on tärkeää, että matematiikan tehtävistä saadaan kunnollinen vastaus. Tavoite toteutuu luontevasti muun muassa sanallisten tehtävien ja yhtälöiden ratkaisemisessa. Abstraktiotasoa voidaan nostaa vähitellen luokkatason ja oppilaiden edistymisen mukaan. Oppilaan matemaattisen ajattelun tukeminen vaatii opettajilta ja oppimateriaalien tekijöiltä matematiikan käsitejärjestelmien ja hierarkioiden tuntemusta. Esimerkiksi negatiivisten lukujen operaattoriluonne ja kirjainlukujen käsittelyyn liittyvä hierarkia ovat jääneet oppimateriaaleissa liian vähälle huomiolle. Toisaalta oppikirjoista välittyvä uskomus ”harjoitus tekee mestarin”, on opetusmetodina kyseenalaistettu monissa tutkimuksissa (esim. Kupari 1999; Haapasalo 2003; Törnroos 2003). Muun muassa TIMSS- ja PISA-tutkimuksissa Suomen peruskoululaiset ovat menestyneet huonosti nimenomaan niillä osa-alueilla, joihin on kohdistunut runsasta rutiiniharjoittelua.

8.6.1 Verrannollisuuden soveltaminen murtolukuihin ja prosenttilaskentaan

Verrannollisuuden ymmärtäminen on hitaasti kehittyvä taito, mutta suunnilleen kolmannes kuudesluokkalaisista ja puolet yläasteen oppilaista hallitsee intuitiivisesti verrannollisuuden, kun se liittyy keskenään jaollisiin lukuihin. Verrannollisuuden soveltamiseen voitaisiin harjaantua esimerkiksi murtolukujen ekvivalenssiluokkiin tutustuessa laventamisen ja supistamisen yhteydessä. Samaa periaatetta jatkamalla saataisiin luonteva yhteys murtoluvuista ja verrannollisuudesta prosenttilaskentaan.

Perinteisen opetusmateriaalin ohella voitaisiin ryhtyä kehittämään ja kokeilemaan tietyn matematiikan osa-alueen kattavia opetusohjelmia tai paketteja. Ne pohjautuisivat ongelmakeskeiseen lähestymistapaan ja oppilaan ajattelua tukevaan tehtävämateriaaliin. Ohjelma jatkuisi esimerkiksi viidennen luokan alusta yläasteen loppuun. Eräs tällainen osa-alue voisi olla murtolukujen ja prosenttilaskun esittäminen suhteen ja verrannollisuuden pohjalta, kuten tehtiin kansakoulussa ja monien tutkijoiden mielestä olisi syytä tehdä edelleen. Osittelulain soveltaminen sekalukuihin, kuten Brinker (1998) ja Schoenfeld (1992) suosittelevat, perehdyttäisi oppilaat erääseen keskeiseen algebran laskusääntöön. Murtolukuihin, desimaalilukuihin ja potensseihin voitaisiin ottaa etumerkkejä mukaan. Kun merkkisäännöt olisi opeteltu jo numeroluvuilla, ne näyttäisivät tutuilta algebrassa (esim. Lee 2000).

Verrantoja olisi luontevaa tarkastella murtolukujen ja mittakaavojen yhteydessä. Oppilaat voisivat keksiä verrannoille omia ratkaisumenetelmiään, ennen kuin ristiin kertominen otetaan käyttöön. Ristiin kertomisen osaaminen verrannon ratkaisemisessa ei takaa, että oppilas on ymmärtänyt suhteellisuuden merkityksen (Slovin 2000).

Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin verrannollisuutta Langrallin tutkijaryhmän (2000) teorian tasolla 2 eli digitaalitasolla. Tämä taso kuitenkin riittäisi murtolukujen kerto- ja jakolaskun perustelemiseen. Siirtyminen formaalille eli jatkuvalle tasolle (Langrallin ym. 2000 taso 3) voisi tapahtua esimerkiksi yhdenmuotoisten kuvioiden tai prosenttilaskujen yhteydessä siten, että suhteita verrattaisiin desimaalilukujen muodossa. Desimaalilukujen käyttö suhteen ja verrannon yhteydessä antaisi myös mahdollisuuden hyödyntää laskimia nykyistä tehokkaammin.

8.6.2 Algebran opetuksen aikaistaminen

Joidenkin algebran perusasioiden hallinnassa ei näyttänyt olevan suurta eroa kuudennen, seitsemännen ja kahdeksannen luokan välillä. Tämä houkuttelee kokeilemaan esialgebran opettamista nykyistä aikaisemmassa vaiheessa. Sopiva osa-alue voisi olla muuttujat, lausekkeet ja yhtälöt. Muuttujan käyttö voisi lähteä tutuista suureista, joiden esittämiseen riittää sanallinen ilmaisu. Keskinopeus saadaan, kun kuljettu matka jaetaan käytetyllä ajalla. Aika puolestaan saadaan, kun matka jaetaan keskinopeudella. Kytkentä arkielämän tilanteisiin on omiaan vahvistamaan oppilaiden päättelytaitoa. Seuraavassa vaiheessa muuttujaa merkittäisiin kirjaimella. Muuttujan lausekkeiden manipulointi, jota usein kutsutaan sieventämiseksi, on käsitteellisesti vaativampi operaatio kuin esimerkiksi lausekkeen laatiminen tai lausekkeen arvon laskeminen. Luontevaa olisi pohtia lausekkeiden sieventämistä silloin, kun sitä tarvitaan esimerkiksi yhtälöiden ratkaisemisessa.

Jo numerolaskuja suorittaessa oppilaan on hyvä tiedostaa, että kyseessä on yhtälö, esimerkiksi 2+3=5, joka voidaan muuttaa moneen eri muotoon. Seuraavaksi tarkasteltaisiin muuttujan sisältäviä lausekkeita. Lauseke saa eri arvoja, kun muuttujan arvoa vaihdellaan. Kun lausekkeen arvo määrätään etukäteen ja etsitään sille sopivaa muuttujan arvoa, on kyseessä yhtälön ratkaiseminen. Tällainen lähestymistapa antaa muuttujasta monipuolisemman kuvan kuin yhtälön ratkaiseminen mekaanisia temppuja tekemällä. Yhtälöiden ratkaisemista voidaan helpottaa käyttämällä symbolien ohella sanallista ilmaisua. Tällöin tietoisesti alennetaan tehtävien abstraktiotasoa.

Oppilaita voidaan kannustaa käyttämään omia ratkaisumenetelmiään. Esimerkiksi kokeilun käytön yhtälöiden ratkaisukeinona on todettu antavan hyvän pohjan lausekkeiden ja yhtälöiden rakenteen ymmärtämiselle. Tärkeintä on oppia perustelemaan ratkaisunsa. Kun oppilaan käsitystä siitä, että matematiikan tehtävästä saadaan aina ”kunnollinen” vastaus, joskus useitakin, tuetaan mahdollisimman pitkään, helpotetaan siirtymistä proseduurien suorittamisesta struktuurien ymmärtämisen tasolle. Kun oppilaat huomaavat vähitellen, että algebra on tapa ajatella ja ratkaista mutkikkaita sanallisia tehtäviä, he ymmärtävät paremmin algebran käyttökelpoisuuden.

SUMMARY

Object of research, theoretical frame and research method

The division of mathematics teaching curriculum to arithmetic, algebra and geometry in Finnish schools dates back to former parallel school system in Finland and hitherto has marked out the framework of mathematics teaching in comprehensive school. It has been thought that arithmetic and, as its most demanding areas, proportionality and percentage calculation, are necessary prerequisites for the studying of algebra. In practice this has meant that the studying of algebra has been limited to the two highest classes of comprehensive school.

In this study I have clarified what kind of prerequisites there would be to start the studying of algebra earlier by connecting the basic concepts of algebra to number calculations and by postponing the use of difficult symbol language.

The study was performed in two phases. The first phase included a four-year follow-up study as a case study targeted to single age group of 89 pupils. The study surveyed the mathematical skills of pupils from the sixth to the ninth grade on general level. The measurements were made in autumns and in the spring of the ninth grade with tests lasting for an hour. The follow-up was followed by a cross-study. Its measurements were made in the autumn 2001. The cross-study included 1,019 pupils from the sixth to the ninth grade from three primary schools and five secondary schools in a mid-size Finnish town. All pupils were tested with otherwise similar written one-hour test, with the exception that the test for sixth-graders did not include percentage calculations.

The frame of this study was based on the theory performed by Kieran (1992) and Sfard (1991). They wrote that shifting from arithmetic to algebra means going from procedural (operational) to structural thinking.

In the study I examined the developing of pupils´ mathematical thinking from the point of view of understanding algebra. Mathematical thinking could be seen in the ways mathematical processes were performed (Joutsenlahti 2005) and how different alternatives were chosen for answers. The level of mathematical thinking was estimated with five dimensions in the cross-study: the error index of proportionality, the command of percentage calculation, the interpretation of variables, the skills in solving equations and the index of arithmetic thinking in solving equations. The first two dimensions mentioned were connected to arithmetic operations and the last three to the basic concepts of algebra.

The error index of proportionality formed an arithmetic point of view to the pupils´ thinking, but it also had an observable connection to the understanding of algebra. The basis in creating the error index of proportionality was the pupils´ trivial i e elementary thinking, of which one example is solving numeric exercises visually (van Hieles level 1, van Hiele 1986). Percentage calculation is counted among the area of arithmetic. In school

mathematics the concept of percentage is, however, linked with terms and symbols which raise the abstraction level of the procedures. For example the calculation of the original amount is connected to solving equations. Understanding of percentage calculation formed the second dimension to the description of the pupils´ mathematical thinking in this study.

The third dimension of mathematical thinking was connected to the interpretation of variables. The interpretation of variables or literal terms can, according to Kücheman (1981) take place on six levels. In this study mainly the three lowest levels were perceived: changing a variable into numbers, abandoning a variable and regarding a variable as a concrete object.

In solving equations it was the types of equations that formed a hierarchy on grounds of abstraction level: numeric equation, expression equation (prealgebraic equation) and algebraic equation. The first two of the equation types above represented the operational i e procedural level whereas algebraic equation represented the structural level (Sfard 1994; Kieran 1992). Skills in solving equations formed the fourth dimension of mathematical thinking. The highest level of thinking in this fourth dimension was represented by the forming of an equivalent sequence of equations.

Related to solving equations, the interpretation of equality sign was examined separately by forming an index of arithmetic thinking. In this particular sense, by arithmetic thinking it is meant that the pupil wrote a sequence of equations which was incorrect. The sequence of equations did not fulfil the characteristics of symmetry and transitivity. He or she might also regard the first term on the right side of the equation as the result of the calculation on the left. Further he or she might think that the terms on the right and on the left were equivalent to each other as pairs (Kieran 1992; Hihnala 2003). The index of arithmetic thinking described the methods the pupils used in solving equations.

Results and discussion

The study reveals that the basic calculation skills of the pupils improved steadily during the four-year monitoring period. However, mechanical operations were characteristic for many calculation processes. Especially in more demanding exercises the pupils could not see any conflict between a calculated value and real life. Proportionality seemed to be a model of thought that nearly every second pupil could intuitively apply to a written exercise, whereas less than one third of the pupils could solve a percentage calculation based on the same mathematical model. The procedure the pupils used in fraction exercises and percentage calculations did not seem to be based on proportionality. However, faulty use of algorithms, for example, the mixing of converting to higher terms and multiplying that occurred in all class levels and arithmetical proceeding that was typical for the pupils of sixth and seventh grade, did not mean that the mathematical skills of the tested pupils would have been poor.

The results support the idea represented by several researchers that the understanding of proportionality is a slowly progressing skill. According to the performed study this skill did not change very much during secondary school. The framework curriculum of comprehensive school in 2004 emphasises the constructive model of learning and a problem-centric approach as the centre of studying. This is a clear impulse to the direction that the teaching of fractions and percentage calculations should be based on proportionality that is already intuitively commanded by pupils. Even extensive practising of percentage calculation in the seventh class did not seem to improve the understanding of the concept of percentage. However, until the beginning of the ninth grade there had been a significant improvement in these skills, which suggests that the thinking skills of the pupils had been developed.

The accumulation of trivial errors in proportionality to certain pupils was linked with the weak command of algebra. The error index of proportionality that describes the phenomenon did not give much additional information of the pupils´ mathematical thinking. It seemed that the trivial errors that led to a contradiction with real life had less meaning in the study of algebra than the trivial errors that were connected to the rules of calculation or the interpretation of figures.

There did not seem to be remarkable differences in the command of basic concepts of algebra between the sixth, seventh and the eighth grade. It was clearly more difficult for pupils to produce an expression including variables than to identify one. Approximately half of the pupils were able to solve arithmetic and prealgebraic equations. But, when estimating the problem-solving methods the pupils had used, it was found that only about 5-9 % of the pupils from the sixth to the ninth grade understood the mathematical structure of algebraic equation. Most of them were in the ninth grade, totalling approximately one fifth of the ninth-graders.

On the basis of this study the command of proportionality did not seem to be the qualification for skills in algebra. It rather seemed that pupils need similar abilities for these areas of mathematics. The skills in algebra were approximately the same among the pupils from the sixth to the eighth grade. On the basis of the results obtained it would be natural to teach proportionality and algebra simultaneously in comprehensive school, parallel and interlocked, at least from the sixth grade onwards. Limiting the study of algebra as a separate area in certain grades as well as symbol calculation which goes beyond everyday reality do not make it easier for pupils to proceed from arithmetic to algebra.

LÄHTEET

Aaltonen, K. & Pitkäniemi, H. 2001. Opettajan ajattelun ja opetuksentoteutuksen välinen mysteeri: voidaanko se paljastaa? Kasvatus 32 (4), 402–418.

Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: Edita.

Alkula, T., Pöntinen, S. & Ylöstalo, P. 1995. Sosiaalitutkimuksen kvantitatiiviset menetelmät. Helsinki: WSOY.

Bay-Williams, J. M. 2001. What is algebra in elementary school? Teaching children mathematics 8 (4), 196–200.

Blais, D. M. 1988. Constructivism – a theoretical revolution for algebra. Mathematics Teacher 81 (8), 624–631.

de Bock, D., van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. 2002. Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students´ errors. Educational studies in mathematics 50, 311–334.

Borg, W. & Gall, M. 1989. Educational research. New York & London: Longman.

Boulton-Lewis, G. M., Cooper, T. J., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L. & Mutch, S. 1997. The transition from arithmetic to algebra: a cognitive perspective. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the 21st conference of the international group for the psychology of mathematics education, 14–19.5.1997. University of Helsinki. Lahti Research and Training Centre. Vol. 2, 185–192.

Brinker, L. 1998. Using recipes and ratio tables. Teaching children mathematics 5 (4), 218–224.

Briscoe, C. & Stout, D. 2001. Prospective elementary teachers´ use of mathematical reasonings in solving a lever mechanics problem. School science & mathematics 101 (5), 228–235.

Brown, T., Eade, F. & Wilson, D. 1999. Semantic innovation: Arithmetical and algebraic metaphors within narratives of learning. Educational studies in mathematics 40, 53–70.

Chalouh, L. & Herscovics, N. 1988. Teaching algebraic expressions in a meaningful way. Teoksessa A. F. Coxford (toim.) The ideas of algebra, K-12.1988 yearbook. Reston, VA: NCTM, 33–42.

Choike, J. R. 2000. Teaching strategies for "algebra for all". Mathematics teacher 93 (7), 556–560.

Cooney, T. J. 1999. Conceptualizing teachers´ ways of knowing. Educational studies in mathematics 38, 163–187.

Cooper, T. J., Boulton-Lewis, G. M., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L. & Mutch, S. 1997. Thetransition from arithmetic to algebra: initial understanding of equals, operations and variable. Julkaisussa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the 21st conference of the international group for the psychology of mathematics education, 14–19.5.1997. University of Helsinki. Lahti Research and Training Centre. Vol. 2, 89–96.

Copeland, R. W. 1984. How children learn mathematics. New York: MacMillan.

Day, R. & Jones, G.A. 1997. Building bridges to algebraic thinking. Mathematics teaching in the middle school 2 (4), 208–212.

Dickensheets, K. 2001. Not just computers: learning by doing. Multimedia schools 8 (1), 40–43.

Dole, S. 2000. Promoting percent as a proportion in eighth-grade mathematics. School science & mathematics 100 (7), 380–389.

Drier, H.S. 2000. Investigating mathematics as a community of learners. Teaching children mathematics 6 (6), 358–363.

van Dyke, F. & Craine, T. V. 1997. Equivalent representations in the learning of algebra. Mathematics teacher 90 (8), 616–619.

Edwards, T. G. 2000. Some "big ideas" of algebra in the middle grades. Mathematics teaching in the middle school 6 (1), 26–31.

English, L. D. & Sharry, P. V. 1996. Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. Educational studies in Mathematics 30, 135–157.

Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T. P. 1999. Children´s understanding of equality: A foundation for algebra. Teaching children mathematics 6 (4), 232–236.

Feigenbaum, R. 2000. Algebra for students with learning disabilities. Mathematics teacher 93 (4), 270–274.

Feltovich, P. J., Spiro, R. J. & Coulson, R. L. 1993. Learning, teaching and testing for complex conceptual understanding. Teoksessa N. Frederiksen, R. J. Mislevy & I. I. Bejar (toim.) Test theory for a new generation of tests. Hillsadale, NJ: LEA, 181–218.

Fernandez, M. L. & Anhalt, C. O. 2001. Transition toward algebra. Mathematics teaching in the middle school, 7 (4), 236–241.

Filloy, E. & Rojano, T. 1985. Operating on the unknown and models of teaching. Teoksessa S. K. Damarin & M. Shelton (toim.) Proceedings of the seventh annual meeting of PME-NA. Columbus, OH: Ohio State University, 75–79.

Filloy, E. & Rojano, T. 1989. Solving equations: transition from arithmetic to algebra. For the learning of mathematics 9 (2), 19–25.

Filloy, E. & Sutherland, R. 1996. Designing curricula for teaching and learning algebra. Teoksessa A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (toim.) International handbook of mathematics education. Part 2. Vol. 4. Dordrecht: Kluwer, 139–160.

Fischbein, E. 1999. Intuitions and schemata in mathematical reasoning. Educational studies in mathematics 38, 11–50.

Flores, A. 1995. Connections in proportional reasoning: Levers, arithmetic means, mixtures, batting averages and speeds. School science & mathematics 95 (8), 423–430.

Friedland, A. 1998. An excellent bridge to algebra, Mathematics teacher 91 (5), 382–383.

Friedlander, A. & Hershkowitz, R. 1997. Reasoning with algebra. Mathematics teacher 90 (6), 442–447.
Gallardo, A. 2002. The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. Educational studies in mathematics 49, 171–192.
Gilbert, N. 1993. Research, theory and method. Teoksessa N. Gilbert (toim.) Researching social life. Lontoo: Sage, 18–31.
Goodson-Espy, T. 1998. The roles of reification and reflective abstraction in the development of abstract thought: transitions from arithmetic to algebra. Educational studies in mathematics 36, 219–245.
Haapasalo, L. 1992. Murtolukukäsitteen konstruktivistinen oppiminen. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Julkaisusarja A. Tutkimuksia 51.
Haapasalo, L. 1994. Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu. Jyväskylä: Medusa.
Haapasalo, L. 1998a. Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 52–79.
Haapasalo, L. 1998b. Ongelmanratkaisun oppimisesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 80–98.
Haapasalo, L. 2003. The conflict between conceptual and procedural knowledge: Should we need to understand in order to be able to do, or vice versa? Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen (toim.) Towards meaningful mathematics and cience education. Proceedings on the IXX symposium of the finnish mathematics and science research assosiation. University of Joensuu. Bulletins of the faculty of education 86, 1–20.
Haapasalo, L. 2004. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 50–83.
Hakkarainen, P. 2002. Opetussuunnitelma ja kehittävä opetustyö. Kasvatus 33 (4), 350–362.
Hannula, M. 2001. Miksi unkarilaista matematiikkaa? Kielikukko 2001 (4), 6–11.
Herscovics, N. & Kieran, C. 1980. Constructing meaning for the concept of equation. Mathematics teacher 73 (8), 572–580.
Herscovics, N. & Linchevski, L. 1994. A cognitive gap between arithmetic and algebra. Educational studies in mathematics 27 (1), 59–78.
Hiebert, J. & Carpenter, T. P. 1992. Learning and teaching with understanding. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 65–97.
Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.)

Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: LEA, 1–27.
van Hiele, P. M. 1986. Structure and insight. A theory of mathematics education. Orlando: Harcourt Brace Jovanovich.
Hihnala, K. 2000. Onnistumisen iloa ja tietämisen tuskaa. Affektiivisia ja kognitiivisia kehityspiirteitä peruskoululaisen matematiikan opiskelussa 6. ja 7. luokalla. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan laitos. Lisensiaatintyö.
Hihnala, K. 2003. Procedural thinking in solving linear equations. Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen (toim.) Towards meaningful mathematics and science education. Proceedings on the IXX symposium of the finnish mathematics and science research assosiation. University of Joensuu. Bulletins of the faculty of education 86, 74-82.
Hihnala, K. 2005. How students from the sixth to the ninth grade apply the principle of proportionality in word problems. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Problem solving in mathematics education proceedings of the proMath meeting june 30 – july 2, 2004 in Lahti. Helsingin yliopisto. Research report 261, 59–70.
Hoffer, A. R. & Hoffer, S. A. 1992. Ratios and proportional thinking. Teoksessa T. R. Post (toim.) Teaching mathematics in grades K-8. Research-based methods. Second edition. Boston: Allyn and Bacon, 303–330.
Huhtala, S. 2000. Lähihoitajaopiskelijan oma matematiikka. Helsingin yliopisto, OKL. Tutkimuksia 219.
Johnson, A. & Lauten, A.D. 2000. The jurassic classroom. Mathematics teacher 93 (2), 102–110.
Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampereen yliopisto. Acta universitatis Tamperensis 1061.
Kaikkonen, P. 1999. Laadullinen tutkimus kasvatus- ja opetustyössä. Kasvatus 30 (5), 427–435.
Kangasniemi, E. 1989. Opetussuunnitelma ja matematiikan koulusaavutukset. Toisen kansainvälisen (IEA) matematiikkatutkimuksen kansallisia tuloksia. Jyväskylän yliopisto, Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 28.
Kangasniemi, E. 1997. Valmistakaa tietä peruskoululle; peruskoulun väliaikaisesta opetussuunnitelmasta 30 vuotta. Kasvatus 28 (5), 415–428.
Keeves, J. 2002. Learning in schools: a modelling approach. Kasvatus 33 (4), 338–349.
Keranto, T. 1986. Verrannollisen päättelyn luokkatestien kehittely ja yhteydet matematiikan kouluopetukseen. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Matematiikan opetuksen tutkiminen ja kehittäminen 1985:4. Matematiikan didaktiikan päivät Helsingissä 27.–28.9.1985. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 40, 32–34.
Keranto T. 1991. A contextual approach to the teaching of mathematics: outlining a teaching strategy that makes use of pupil´s real world experiences

and strategies, and the results of the first teaching experiment of the project. Teoksessa Pekka Kupari (toim.) Mathematics education research in Finland, Yearbook 1989-90. University of Jyväskylä. Institute for educational research. Publication series B. Theory into practice 66, 36–60.

Keranto, T. 1998. Kriittinen ajattelu ja tieteentuntemus matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 18–38.

Kieran, C. 1992. The learning and teaching of school algebra. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 390–419.

Kilpatrick, J. 1993. Scientific quality and relevance. Teoksessa G. Nissen & M. Blomhöj (toim.) Criteria for scientific quality and relevance in the didactics of mathematics. Report from symposium held in Gilleleje, Denmark, 27.4.–2.5.1992. Roskilde University, IMFUFA, EXTENSION 2263, 13–35.

Knuth, E. J. 2000. Understanding connections between equations and graphs. Matematics teacher 93 (1), 48–53.

Korhonen, H. 1999. Peruskoulun 9. luokan kansallinen matematiikan koe 1998. Opetushallitus. Tutkimuksia.

Kupari, P. 1993a. Laskutaidotko kadonneet? Peruskoululaiset matematiikan kokijoina ja taitajina. Teoksessa P. Linnakylä & H. Saari (toim.) Oppiiko oppilas peruskoulussa? Peruskoulun arviointi 90 -tutkimuksen tuloksia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 81–104.

Kupari, P. 1993b. Millä tavoin matematiikan opiskelu ja opetus on muuttunut? Teoksessa V. Brunell & P. Kupari (toim.) Peruskoulu oppimisympäristönä. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos, 81–104.

Kupari, P. 1996. Miten peruskoululaisten oppimiselle on käynyt säästöjen kourissa? Teoksessa R. Jakku-Sihvonen, A. Lindström & S. Lipsanen (toim.) Toteuttaako peruskoulu tasa-arvoa? Helsinki: Opetushallitus, 436–450.

Kupari, P. 1999. Laskuharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikanopettajien matemaattiset uskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7.

Kupari, P. 2003. Finnish students´ mathematical literacy in the PISA 2000 study. Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen (toim.) Towards meaningful mathematics and science education. Proceedings on the IXX symposium of the finnish mathematics and science research assosiation. University of Joensuu. Bulletins of the faculty of education 86, 83–90.

Kupari, P., Reinikainen, P., Nevanpää, T. & Törnroos, J. 2001. Miten matematiikkaa ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Kolmas kansainvälinen matematiikka- ja luonnontiedetutkimus TIMSS 1999 Suomessa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kupari, P. & Törnroos, J. 2003. Miten suomalaisnuoret osaavat matematiikkaa? Teoksessa J. Välijärvi & P. Linnakylä (toim.) Tulevaisuuden osaajat. Pisa 2000 Suomessa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos, 41–56.

Küchemann, D. 1981. Algebra. Teoksessa K. M. Hart (toim.) Children´s understanding of mathematics, 11–16. Lontoo: John Murray, 102–119.
Lambdin, D. V., Lynch, R. K. & McDaniel, H. 2000. Algebra in the middle grades. Mathematics teaching in the middle school 6 (3), 195–198.
de Lange, J. 1996. Using and applying mathematics in education. Teoksessa A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (toim.) International handbook of mathematics education. Part 2. Vol. 4. Dordrecht: Kluwer, 49–97.
Langrall, C. W. & Swafford, J. 2000. Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. Mathematics teaching in the middle school 6(4), 254–261.
Lee, M. A. 2000. Analysis of concatenations and order of operations in written mathematics. School science and mathematics 100 (4), 173–180.
Leino, J. 1998. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 39–51.
Leinonen, J. 2003. Käsite ja ymmärtäminen. Kasvatus 34 (1), 56–65.
Leitze, A. R. & Kitt, N. A. 2000. Using homemade algebra tiles to develop algebra and prealgebra concepts. Mathematics teacher 93(6), 462–467.
Linchevski, L. & Herscovics, N. 1996. Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. Educational studies in mathematics 30, 39–65.
Linchevski, L. & Livneh, D. 1999. Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. Educational studies in mathematics 40,173–196.
Linchevski, L. & Williams, J. 1999. Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children´s extension of their number concept to include the negative numbers. Educational studies in mathematics 39, 131–147.
Lubinski, C. A. & Otto, A. D. 1997. Literature and algebraic reasoning. Teaching children mathematics 3 (6), 290–295.
Malaty, G. 1993. Geometrinen ajattelu 1. Didaktiikkka. Espoo: Weilin+Göös.
Malinen, P. 1993. Can finnish elementary school pupils think logically? Teoksessa P. Kupari & L. Haapasalo (toim.) Constructivist and curriculum issues in school mathematics education. Mathematics education in Finland: yearbook 1992–1993. University of Jyväskylä. Institute for educational recearch. Publication series B. Theory into practice 82, 35–41.
Malinen, P. 1997. Tutkitaanko kouluissa oppimista vai opiskelua? Kasvatus 28 (2), 191–196.
Martinez, J. G. R. 2001. Thinking and writing mathematically: "Achilles and the tortoise" as an algebraic word problem. Mathematics teacher, 94 (4), 248–253.
Matz, M. 1982. Towards a process model for high school algebra errors. Teoksessa D. Seeman & J. S. Brown (toim.) Intelligent tutoring systems. New York: Academic press, 25–50.

McConnell, M. & Bhattacharya, D. N. 1999. Using the elegance of arithmetic to enhance the power to algebra. Mathematics teacher, 96 (6), 492–495.

Merenluoto, K. 2001. Lukiolaisen reaaliluku. Lukualueen laajentaminen käsitteellisenä muutoksena matematiikassa. Turun yliopiston julkaisuja. Sarja C, osa 176.

Mikkilä-Erdmann, M., Olkinuora, E. & Mattila, E. 1999. Muuttuneet käsitykset oppimisesta ja opettamisesta - haaste oppikirjoille. Kasvatus 30 (5), 436–449.

Moses, B. 1997. Algebra for a new century. Teaching children mathematics 3 (6), 264–265.

Niemi, E. K. 2004. Perusopetuksen oppimistulosten kansallinen arviointi ja tulosten hyödyntäminen koulutuspoliittisessa kontekstissa. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000. Turun yliopiston julkaisuja, sarja C 216.

Niiniluoto, I. 1980. Johdatus tieteenfilosofiaan. Käsitteen- ja teorianmuodostus. Helsinki: Otava.

Niiniluoto, I. 1983. Tieteellinen päättely ja selittäminen. Helsinki: Otava.

Osborne, A. & Wilson, P. S. 1992. Moving to algebraic thought. Teoksessa T. R. Post (toim.) Teaching mathematics in grades K-8. Boston: Allyn and Bacon, 421–442.

Pehkonen, E. 1995. Pupils´ view of mathematics: Initial report for an international comparison project. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Researchreport 152.

Pehkonen, E. 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. Kasvatus 31 (4), 375–381.

Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 195.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994. 2000. 4. korjattu painos. Helsinki: Opetushallitus.

Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit. 1999. Arvosanan hyvä (8) kriteerit yhteisissä oppiaineissa. Helsinki: Opetushallitus.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. http://www.oph.fi/info /ops/pops_web.pdf.MSN 14.9.2004.

Piaget, J. 1973. Main trends in psychology. London: William Clowers.

Pitkäniemi, H. 1997. Opetuksen tutkimuksen paradigmat ja niiden kehittäminen. Kasvatus 28 (4), 364–375.

Pugalee, D. K. 2001a. Writing, mathematics and metacogniton: looking for connections through students' work in mathematical problem solving. School science & mathematics 101 (5), 236–245.

Pugalee, D. K. 2001b. Algebra for all: the role of technology and constructivism in an algebra course for at-risk students. Preventing school failure 45 (4), 171–176.

Radford, L. 2000. Signs and meanings in students´ emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. Educational studies in mathematics 42, 237–268.

Resnick, L. B., Cauzinille-Marmeche E. & Mathieu , J. 1987. Understanding algebra. Teoksessa J. A. Sloboda & D. Rogers (toim.) Cognitive processes in mathematics. Oxford: Oxford university press, 169–203.

Riddle, M. & Rodzwell, B. 2000. Fractions: What happens between kindergarten and the army? Teaching children mathematics 7 (4), 202–206.

Robitaille, D. F., Schmidt, W. H., Raizen, S., McKnight, C., Britton, E. ja Nicol, C. 1983. Curriculum frameworks for mathematics and science. 2. painos. Vancouver: Pacific Educational Press.

Schoenfeld, A. H. 1985. Mathematical problem solving. Orlando: AP.

Schoenfeld, A. H. 1991. On pure and applied research in mathematics education. Journal of Mathematical behavior 10, 263–276.

Schoenfeld, A. H. 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 334–370.

Sfard, A. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational studies in mathematics 22, 1–36.

Sfard, A. 1997. Framing in mathematical discourse. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the 21st conference of the international group for the psychology of mathematics education, 14–19.5.1997. University of Helsinki. Lahti Research and Training Centre. Vol. 4, 144–151.

Sfard, A. & Linchevski, L. 1994. ”The gains and pitfalls of reification – the case of algebra”. Educational studies in mathematics 26, 191–228.

Sierpinska, A. 1993. Criteria for scientific quality and relevance in the didactics of mathematics. Teoksessa G. Nissen & M. Blomhöj (toim.) Criteria for scientific quality and relevance in the didactics of mathematics. Report from symposium held in Gilleleje, Denmark, 27.4.–2.5.1992. Roskilde University, IMFUFA, EXTENSION 2263, 35–74.

Silfverberg, H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Acta Universitatis Tamperensis 710.

Silver, E. A. 1986. Using conceptual and procedural knowledge: A focus in relationships. Teoksessa J. Hiebert (toim.) Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: LEA, 181–198.

Silver, E. A. 1997. “Algebra for all“ – increasing students´ access to algebraic ideas, not just algebra courses. Mathematics teaching in the middle school 2 (4), 204–207.

Slavit, D. 1999. The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. Educational studies in mathematics 37, 251–274.

Slavit, D. 2001. Revisiting a difference of squares. Mathematics teaching in the middle school, 6 (6), 378–381.

Slovin, H. 2000. Moving proportional reasoning. Mathematics teaching in the middle school 6 (1), 58–61.

Soro, R. & Pehkonen, E. 1998. KASSEL-projekti, osa I. Peruskoulun oppilaiden matemaattiset taidot kansainvälisessä vertailussa. Helsingin yliopisto, OKL. Tutkimuksia 197.

Stacey, K. & MacGregor, M. 1997. Ideas about symbolism that students bring to algebra. Mathematics teacher 90 (2), 110–113.

Strang, T. 1990. Murtoluvut peruskoulun ala-asteella. Teoksessa M. Ahtee, M. Erätuuli ja V. Meisalo (toim.) Opettajankoulutus ja koulun uudet työtavat. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Helsingissä 29.–30.9.1989. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 82, 51–61.

Streefland, L. 1991. Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of developmental research. Vol 8. Dordrecht: Kluwer.

Stylianou, D. A., Kenney, P. A., Silver, E. A. & Alacaci, C. 2000. Gaining insight into students´ thinking through assessment tasks. Mathematics teaching in the middle school 6 (2), 136–144.

Sweeney, E. S. & Quinn, R. J. 2000. Concentration: connecting fractions, decimals & percents. Mathematics teaching in the middle school 5 (5), 324–328.

Thompson, A. G. 1992. Teachers´ beliefs and conceptions: A synthesis of the research. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 127–146.

Thompson, J. & Martinson, T. (toim.) 1994. Matematiikan käsikirja. 2. painos. Helsinki: Tammi.

Thornton, S. J. 2001. New approaches to algebra: have we missed the point? Mathematics teaching in the middle school 6 (7), 388–393.

Tirosh, D. & Stavy, R. 1999. Intuitive rules: A way to explain and predict students´reasoning. Educational studies in mathematics 38, 51–66.

Tynjälä, P. 1999. Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Helsinki: Kirjayhtymä.

Törmä, S. 2001. Merkityksellinen oppiminen ja tiedon rakentuminen kasvatuksen haasteena. Kasvatus 32 (1), 5–14.

Törnroos, J. 2003. Finnish mathematics results in TIMSS 1999 – a more detailed analysis. Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen (toim.) Towards meaningful mathematics and science education. Proceedings on the IXX symposium of the finnish mathematics and science research assosiation. University of Joensuu. Bulletins of the faculty of education 86, 64–73.

Törnroos, J. 2005. Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset. Seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13.

Uusikylä, K. 1998. Pedagogisen lahjakkuuden ulottuvuuksia. Kasvatus 29 (2), 190–200.

Vlassis, J. 2002. The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. Educational studies in mathematics 49, 341–359.

Välijärvi, J., Linnakylä, P., Kupari, P., Reinikainen, P., Malin, A. & Puhakka, E. 2002. Suomen tulevaisuuden osaajat. 15-vuotiaiden nuorten lukutaito sekä

matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen kansainvälisessä vertailussa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos.
Wilson, J. W. 1971. Evaluation of learning in secondary school mathematics. Teoksessa B. S. Bloom, J. T. Hastings & G.F. Madaus (toim.) Handbook on formative and summative evaluation of student learning. New York: McGraw-Hill, 644–696.
Witzel, B., Smith, S. W. & Brownell, M. T. 2001. How can i help students with learning disabilities in algebra? Intervention in school & clinic 37 (2), 101–104.
Wittgenstein, L. 1981. Filosofisia tutkimuksia. Suomentanut Heikki Nyman. Helsinki: WSOY.
von Wright, J. 1996. Oppimisen tutkimuksen opetukselle asettamia haasteita. Kasvatus 27 (1), 9–21.
Yackel, E. 1997. A foundation for algebraic reasoning in the early grades. Teaching children mathematics 3 (6), 276–280.
Yerushalmy, M. 2001. Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. Educational studies in mathematics 43, 125–147.

Oppikirjalähteet

Alho, K., Koivu, T., Luoma, M. & Rantanen, M. 2003. Kantti. Matematiikkaa luokille 7–9. Luvut I–III. Helsinki: Otava.
Erkinjuntti, R., Hihnala, K., Juntunen, A., Järvinen, M., Kytölä, R. & Laine, S. 1994–1996. Luvut ja kuviot, yläasteen matematiikka 1–3. Helsinki: WSOY.
Järvinen, R., Latva, O., Makkonen, J. & Vahviainen, S. 2003. Kartio 1–2. Perusopetuksen matematiikkaa, kurssit 1–3 ja 4–5. Helsinki: Tammi.
Kallio, N., Kannisto, E.A. & Poukka, K.A. 1966. Keskikoulun algebra. 9. painos. Helsinki: Otava.
Kallio, N., Malmio, B. & Apajalahti, S. 1957/1971. Geometria I. Keskikoulun oppimäärä. 23. painos. Helsinki: Otava.
Latva, O., Tolvanen, A., Tuomaala, T., Järvinen, R. & Makkonen, J. 2004. KOLMIO: Matematiikan tietokirja. Kolmannen laitoksen 1. painos. Helsinki: Tammi.
Latva, O., Tolvanen, A., Tuomaala, T., Järvinen, R. & Makkonen, J. 2004. KOLMIO. Matematiikan harjoituskirja 1. Helsinki: Tammi.
Paasonen, J., Voutilainen, E. & Kalla, H. 1987/1989. Ahaa matematiikkaa 7. Helsinki: WSOY.
Suhonen, E. M. & Kalliola, K. 1950. Kansakoulun laskento- ja mittausoppi. 13. uudistettu painos. Helsinki: WSOY.
Väisälä, K. 1965. Algebran oppi- ja esimerkkikirja. 14. painos. Helsinki: WSOY.

LIITTEET

LIITE 1

MATEMATIIKAN LÄHTÖTASOTESTI, 6. LK., SYKSY 1996

MONIVALINTATEHTÄVÄT

1. Messuilla kävi kaikkiaan 23 184 ihmistä. Kävijöistä oli lapsia 16 579. Kuinka paljon oli aikuisia?
A 39 753 B 17 605 C 13 415 D 6 615 E 6 605

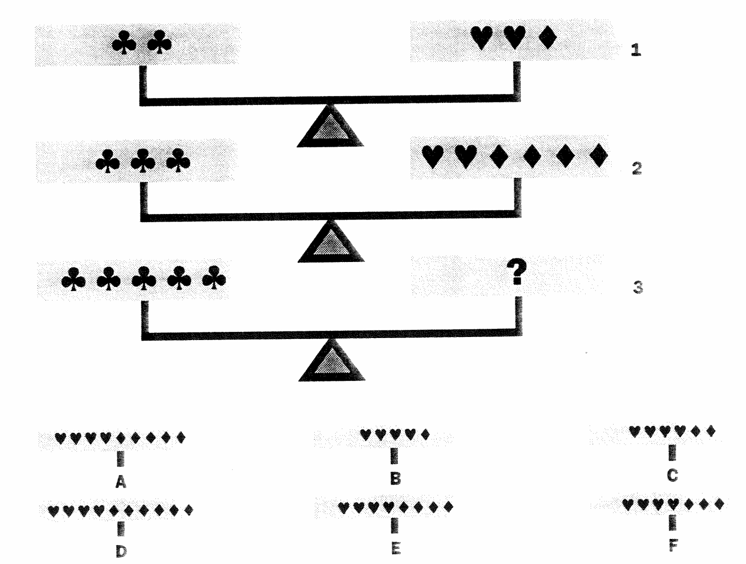
2. Lentomatkustaja voi ulkomaanlennolla ottaa 20 kg matkatavaraa. Kuinka paljon matkatavaraa voi 18 matkustajan seurue ottaa yhteensä?
A 38 kg B 36 kg C 360 kg D 1620 kg E 1820 kg

3. Laske 7696:37 =
A 28 B 208 C 235 D 280 E 2080

4. 280 käytettyä ja 20 uutta postimerkkiä jaetaan tasan 30 lapsen kesken. Kuinka monta merkkiä kukin lapsi saa?
A 50 B 40 C 30 D 20 E 10

5. Olkoon a jokin luonnollisista luvuista 1, 2, 3,.... Mikä on silloin lukua a seuraava luonnollinen luku?
A $a + 1$ B $a - 1$ C $a - 10$ D $a + 10$ E $10\,a$

6. Vaa´at 1 ja 2 ovat tasapainossa. Mikä vaakakupeista A - F on asetettava kysymysmerkin paikalle, jotta myös vaaka 3 olisi tasapainossa?



7. Merkitse luku $\frac{6}{5}$ desimaalilukuna
A 6,5 B 1,5 C 1,2 D 1,25 E 1,05

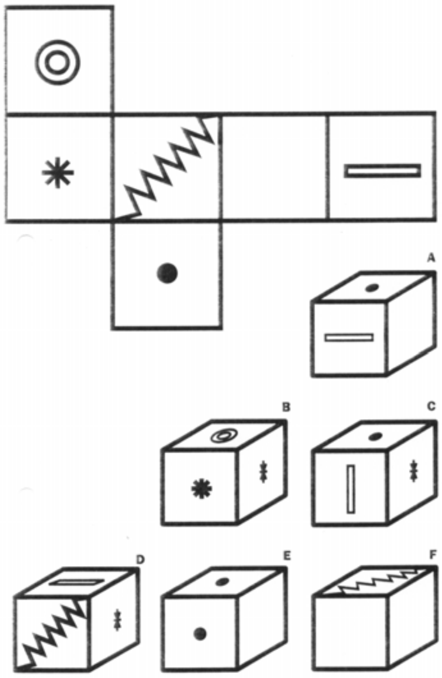
(jatkuu)

LIITE 1 (jatkuu)

8. Mikä seuraavista lausekkeista on yhtä suuri kuin 7·(3 + 9)?

A (7·3)+(7·9) *B (7·9)+(3·9)* *C (7·3)+(3·9)* *D 7·27* *E 21·9*

9. Kuvitellaan, että oheinen kuvio leikataan reunaviivaa myöten irti paperista.
Mikä laatikoista A - F voidaan rakentaa irtileikatusta paperista?

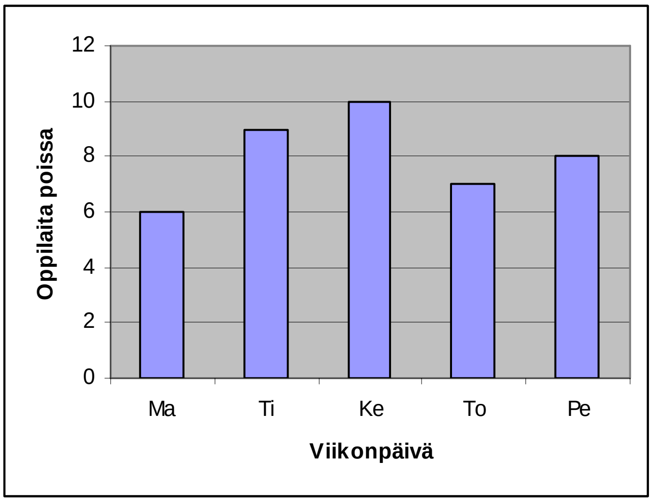


10. Mikä osa 30 p on 4 mk:sta?
A 3/4 B 3/40 C 40/3 D 4/30 E 30/4

(jatkuu)

LIITE 1 (jatkuu)

11. Alla oleva diagrammi kuvaa oppilaiden poissaoloa koulusta erään viikon aikana. Minä päivänä oli yhdeksän oppilasta poissa?
A Maanantaina *B Tiistaina* *C Keskiviikkona* *D Torstaina* *E Perjantaina*



12. Pekka ja Pirkko päättivät ryhtyä säästämään. Pekka pystyy säästämään 3 mk ja Pirkko 5 mk kuukaudessa. Jos kumpikin jatkuvasti säästää mainitun rahamäärän, kuinka monen kuukauden kuluttua Pirkolla on tasan 10 mk enemmän kuin Pekalla?
A 2 kk *B 3 kk* *C 4 kk* *D 5 kk* *E 8 kk*

TUOTTAMISTEHTÄVÄT

13. Suorita yksikönmuunnos *35 dl = _______ l ______ dl*

14. Pallokenttä oli 100 m pitkä ja 60 m leveä. Harjoituksissa tytöt juoksivat kentän ympäri ja siksi he halusivat tietää, kuinka pitkän matkan he juoksivat. Mikä oli kentän ympärysmitta?

15. a) Piirrä suorakulmio, jonka sivut ovat 2 cm ja 4 cm.
b) Jaa suorakulmio lävistäjällä kahdeksi kolmioksi.
c) Muodosta uusia kuvioita asettamalla kolmiot siten, että niillä on yksi yhteinen sivu.
d) Nimeä syntyneet kuviot.

16. Millä luvulla luku 60 on jaettava, jotta osamäärän arvo olisi 12?

17. Laske $1-\frac{1}{5}=$

18. Perhe suunnitteli lomamatkaa Lappiin. Kuinka kauan kestäisi 560 km:n automatka Jyväskylästä Rovaniemelle 80 km/h keskinopeudella ajettaessa, kun lepotaukoihin aiottiin käyttää kolme tuntia?

(jatkuu)

LIITE 1 (jatkuu)

19. Yhdistä viivalla keskenään samansuuruiset murtoluvut

$\frac{5}{5}$	$\frac{21}{15}$
$1\frac{6}{15}$	$\frac{3}{6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{4}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{9}{21}$	$2\frac{1}{3}$

LIITE 2

MATEMATIIKAN LÄHTÖTASOTESTI, 7. LK., SYKSY 1997
VASTAAVAAN 6. LK:N TESTIIN LISÄTYT OSIOT

20. Alla olevaan lukujonoon sisältyy jokin säännönmukaisuus. Lisää puuttuvat luvut ruutuihin ja selitä, mikä säännönmukaisuus lukujonoon sisältyy.

$$2 \rightarrow 5 \rightarrow 11 \rightarrow 23 \rightarrow \quad \rightarrow$$

Säännönmukaisuus on sellainen, että ______________________________

21. Liikenteen tarkkailussa havaittiin, että kahdeksan autoilijaa kymmenestä käytti turvavyötä. Kuinka monta autoilijaa 35:stä käyttää turvavyötä, jos turvavyön käyttäminen on yhtä yleistä kuin edellä mainitussa tapauksessa?

22. Tarhassa on 9 mustaa ja 16 harmaata lammasta. Kuinka monta % lampaista on mustia?

23. Juustohampurilaisen hinta oli aikaisemmin 18,00 mk. Hintaa korotettiin 5 %. Mikä oli hinta korotuksen jälkeen?

24. Akvaarion sisämitat ovat pituus 62 cm, leveys 28 cm ja korkeus 30 cm. Kuinka monta kokonaista litraa akvaarioon mahtuu vettä?

25. Laske kertolasku $5 \cdot 4\frac{3}{8}$ ja ilmoita lopputulos mahdollisimman yksinkertaisena seka- tai murtolukuna.

LIITE 3

MATEMATIIKAN LÄHTÖTASOTESTI, 8. LK., SYKSY 1998

MONIVALINTATEHTÄVÄT

1. Laske - (+12) - (-9) =
A *-31* **B** *-21* **C** *-3* **D** *+3* **E** *+21*

2. Vertaillaan keskenään lukuja 9 ja 18. Mikä seuraavista vaihtoehdoista pitää paikkansa?
A *luku 9 on kaksi kertaa pienempi kuin luku 18*
B *luku 9 on kaksi kertaa niin pieni kuin luku 18*
C *luku 18 on puolta suurempi kuin luku 9*
D *luku 18 on kaksi kertaa suurempi kuin luku 9*
E *luku 18 on kaksi kertaa niin suuri kuin luku 9*

3. Laske 7696:37 =
A *28* **B** *208* **C** *235* **D** *280* **E** *2080*

4. Olkoon a jokin luonnollisista luvuista 1, 2, 3,.... Mikä on silloin lukua a seuraava luonnollinen luku?
A *a + 1* **B** *a - 1* **C** *a -10* **D** *a +10* **E** *10 a*

5. Merkitse murtoluku $\frac{6}{5}$ desimaalilukuna

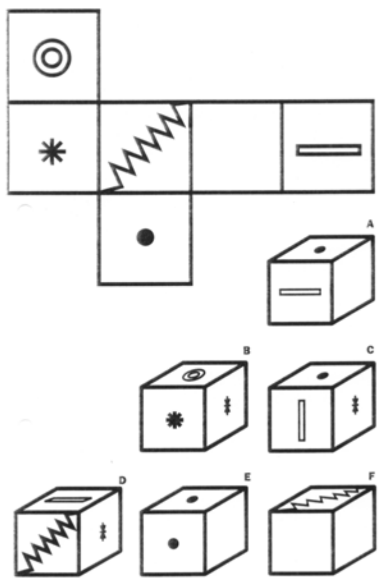
A *6,5* **B** *1,5* **C** *1,2* **D** *1,25* **E** *1,05*

6. Mikä seuraavista lausekkeista on yhtä suuri kuin $7 \cdot (3+9)$?
A *(7 · 3) + (7 · 9)* ***B*** *(7 · 9) + (3 · 9)* ***C*** *(7 · 3) + (3 · 9)*
D *7 · 27* ***E*** *21 · 9*

(jatkuu)

LIITE 3 (jatkuu)

7. Kuvitellaan, että oheinen ruudukko leikataan irti paperista. Mikä laatikoista A - E voidaan taitella irtileikatusta paperista?



8. Mikä osa 30 p on 4 mk:sta?

A $\frac{3}{4}$ **B** $\frac{3}{40}$ **C** $\frac{40}{3}$ **D** $\frac{4}{30}$ **E** $\frac{30}{4}$

9. Katri ja Ville päättivät ryhtyä säästämään. Ville pystyy säästämään 9 mk ja Katri 15 mk kuukaudessa. Jos kumpikin säästää jatkuvasti mainitun rahamäärän, kuinka monen kuukauden kuluttua Katrilla on tasan 30 mk enemmän kuin Villellä?

A 2 kk **B** 3 kk **C** 4 kk **D** 5 kk **E** 8 kk

10. Puseron hintaa oli alennettu 15%:lla. Alennus oli 72 mk. Puseron alentamaton hinta oli

A 48 mk **B** 87 mk **C** 240 mk **D** 480 mk **E** 720 mk

11. Minkä nimisen geometrisen kuvion määrittelee lause: "Nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät" ?

Kuvio on nimeltään

A neliö **B** suorakulmio **C** suunnikas **D** puolisuunnikas **E** tasakylkinen kolmio

12. Kopiopaperin paksuus ilmoitetaan merkinnällä 80 g/m^2. Yksi neliömetri paperia painaa siis 80 grammaa. Neliömetri paperia muodostuu 16 arkista kopiopaperia. Tämän perusteellayhden kopiopaperiarkin massa on noin

A 0,16 g **B** 5 g **C** 16 g **D** 20 g **E** 64 g

13. Suorita yksikönmuunnos 320 g = _________ kg

(jatkuu)

LIITE 3 (jatkuu)

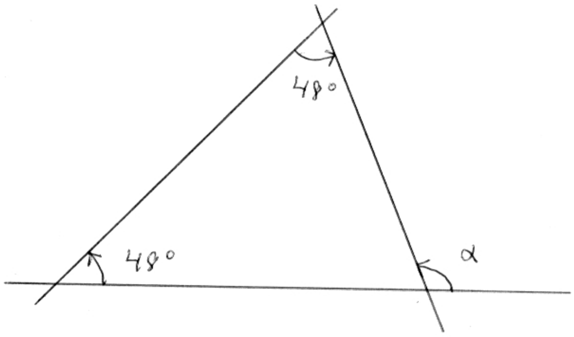
14. Jukka valmistaa 1,5 litran kannullisen mehujuomaa lisäämällä mehutiivisteeseen vettä. Ohjeen mukainen laimennussuhde on 1:5. Kuinka paljon Jukka tarvitsee mehujuomaan vettä?

15. Laske 4 - 4 ·(2+6:2) =

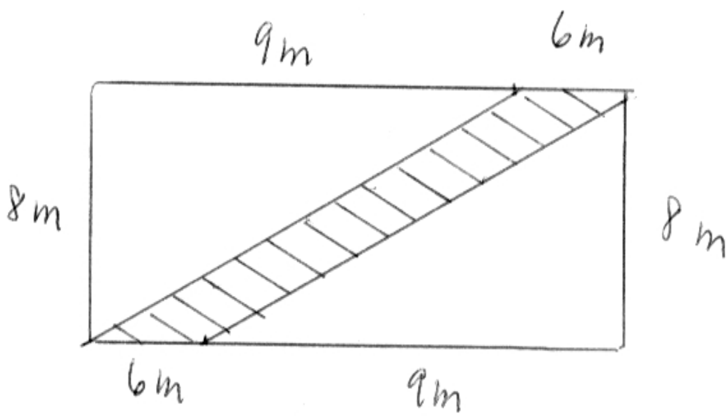
16. Laske 1 - 1/5 =

17. Perhe suunnitteli lomamatkaa Lappiin. Kuinka kauan kestäisi 560 km:n automatka Jyväskylästä Rovaniemelle 80 km/h keskinopeudella ajettaessa, kun lepotaukoihin aiottiin käyttää kolme tuntia?

18. Laske oheisessa kuviossa kulman α suuruus.



19. Laske oheisesta suorakulmiosta tummennetun alueen pinta-ala.



20. Akvaarion sisämitat ovat pituus 62 cm, leveys 28 cm ja korkeus 30 cm. Kuinka monta litraa akvaarioon mahtuu vettä?

21. Liikenteen tarkkailussa havaittiin, että kahdeksan autoilijaa kymmenestä käytti turvavyötä. Kuinka monta autoilijaa 35:stä käyttää turvavyötä, jos turvavyön käyttö on yhtä yleistä kuin edellä mainitussa tapauksessa?

(jatkuu)

LIITE 3 (jatkuu)

22. Tarhassa on 9 mustaa ja 16 harmaata lammasta. Kuinka monta % lampaista on mustia?

23. Kultasormus sisältää puhdasta kultaa 75 %. Kuinka paljon kultaa on 5,0 grammaa painavassa kultasormuksessa?

24. Laske kertolasku $5 \cdot 4\,3/8$ ja ilmoita tulos mahdollisimman yksinkertaisena seka- tai murtolukuna.

25. Alla olevaan lukujonoon sisältyy jokin säännönmukaisuus. Lisää ruutuun puuttuva luku ja selitä, mikä säännönmukaisuus lukujonoon sisältyy.
$2 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 17 \rightarrow$
Säännönmukaisuus on sellainen, että

____

LIITE 4

9.lk syksyn ja kevään testi

MONIVALINTATEHTÄVÄT

1. Laske - (+12) - (-9) =
   A -31
   B -21
   C -3
   D +3
   E +21

2. Vertaillaan keskenään lukuja 9 ja 18. Mikä seuraavista vaihtoehdoista pitää paikkansa?
   A luku 9 on kaksi kertaa pienempi kuin luku 18
   B luku 9 on kaksi kertaa niin pieni kuin luku 18
   C luku 18 on puolta suurempi kuin luku 9
   D luku 18 on kaksi kertaa suurempi kuin luku 9
   E luku 18 on kaksi kertaa niin suuri kuin luku 9

3. Laske 7696:37 =
   A 28
   B 208
   C 235
   D 280
   E 2080

4. Olkoon a jokin luonnollisista luvuista 1, 2, 3,.... Mikä on silloin lukua a seuraava luonnollinen luku?
   A a + 1
   B a - 1
   C a -10
   D a +10
   E 10 a

(jatkuu)

LIITE 4 (jatkuu)

5. Merkitse murtoluku $\frac{6}{5}$ desimaalilukuna

A 6,5
B 1,5
C 1,2
D 1,25
E 1,05

6. Mikä seuraavista lausekkeista on yhtä suuri kuin $7 \cdot (3+9)$?

A (7 · 3) + (7 · 9)
B (7 · 9) + (3 · 9)
C (7 · 3) + (3 · 9)
D 7 · 27
E 21 · 9

7. Oletetaan, että yhtälö P = M + N on tosi. Tarkastellaan seuraavia yhtälöitä I, II ja III

I N = P - M
II P - N = M
III N + M = P

Mikä seuraavista vaihtoehdoista on silloin totta?

A vain yhtälö I on tosi
B vain yhtälö III on tosi
C vain yhtälöt I ja II ovat tosia
D vain yhtälöt II ja III ovat tosia
E yhtälöt I, II ja III ovat tosia

8. Mikä osa 30 p on 4 mk:sta?

A $\frac{3}{4}$
B $\frac{3}{40}$
C $\frac{40}{3}$
D $\frac{4}{30}$
E $\frac{30}{4}$

9. Katri ja Ville päättivät ryhtyä säästämään. Ville pystyy säästämään 9 mk ja Katri 15 mk kuukaudessa. Jos kumpikin säästää jatkuvasti mainitun rahamäärän, kuinka monen kuukauden kuluttua Katrilla on tasan 30 mk enemmän kuin Villellä?

A 2 kk
B 3 kk
C 4 kk
D 5 kk
E 8 kk

(jatkuu)

LIITE 4 (jatkuu)

10. Puseron hintaa oli alennettu 15%:lla. Alennus oli 72 mk. Puseron alentamaton hinta oli

A 48 mk
B 87 mk
C 240 mk
D 480 mk
E 720 mk

11. Minkä nimisen geometrisen kuvion määrittelee lause: "Nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät"?

Kuvio on nimeltään

A neliö
B suorakulmio
C suunnikas
D puolisuunnikas
E tasakylkinen kolmio

12. Kopiopaperin paksuus ilmoitetaan merkinnällä 80 g/m^2. Yksi neliömetri paperia painaa siis 80 grammaa. Neliömetri paperia muodostuu 16 arkista kopiopaperia. Tämän perusteella
yhden kopiopaperiarkin massa on noin

A 0,16 g
B 5 g
C 16 g
D 20 g
E 64 g

TUOTTAMISTEHTÄVÄT

13. Suorita yksikönmuunnos 320 g = _________ kg

14. Jukka valmistaa 1,5 litran kannullisen mehujuomaa lisäämällä mehutiivisteeseen vettä. Ohjeen mukainen laimennussuhde on 1:5. Kuinka paljon Jukka tarvitsee mehujuomaan vettä?

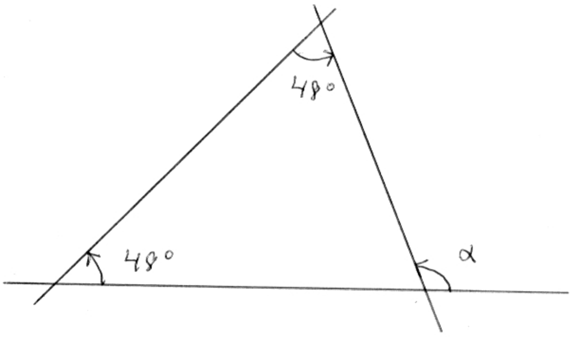
15. Laske 4 - 4 · (2 + 6:2) =

16. Laske $1-\frac{1}{5}=$

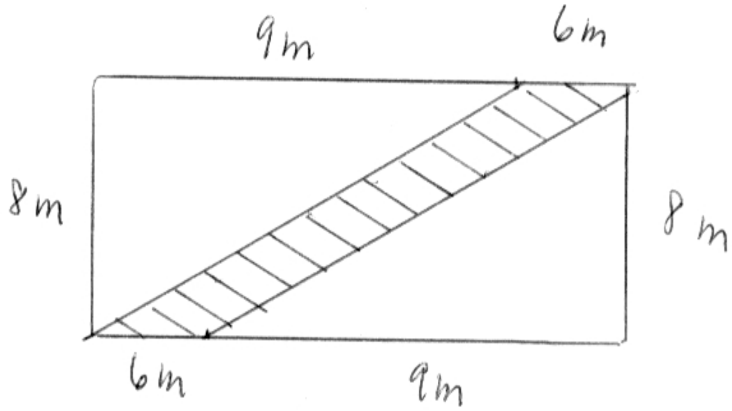
17. Perhe suunnitteli lomamatkaa Lappiin. Kuinka kauan kestäisi 560 km:n automatka Jyväskylästä Rovaniemelle 80 km/h keskinopeudella ajettaessa, kun lepotaukoihin aiottiin käyttää kolme tuntia?

LIITE 4 (jatkuu)

18. Laske oheisessa kuviossa kulman α suuruus.



19. Laske oheisesta suorakulmiosta tummennetun alueen pinta-ala.



20. Akvaarion sisämitat ovat pituus 62 cm, leveys 28 cm ja korkeus 30 cm. Kuinka monta litraa akvaarioon mahtuu vettä?

21. Liikenteen tarkkailussa havaittiin, että kuusi autoilijaa kahdeksasta käyttää turvavyötä. Kuinka monta autoilijaa 36:sta käyttää turvavyötä, jos turvavyön käyttö on yhtä yleistä kuin edellä mainitussa tapauksessa?

22. Tarhassa on 11 mustaa ja 14 harmaata lammasta. Kuinka monta % lampaista on mustia?

23. Kultasormus sisältää puhdasta kultaa 75 %. Kuinka paljon kultaa on 5,0 grammaa painavassa kultasormuksessa?

24. Laske kertolasku $6 \cdot 3\frac{3}{8}$ ja ilmoita tulos mahdollisimman yksinkertaisena seka- tai murtolukuna.

25. Alla olevaan lukujonoon sisältyy jokin säännönmukaisuus. Lisää ruutuun puuttuva luku ja selitä, mikä säännönmukaisuus lukujonoon sisältyy.

$$2 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 17 \rightarrow$$

Säännönmukaisuus on sellainen, että

____

26. Sievennä lauseke $(x - 6)(x + 4) =$

(jatkuu)

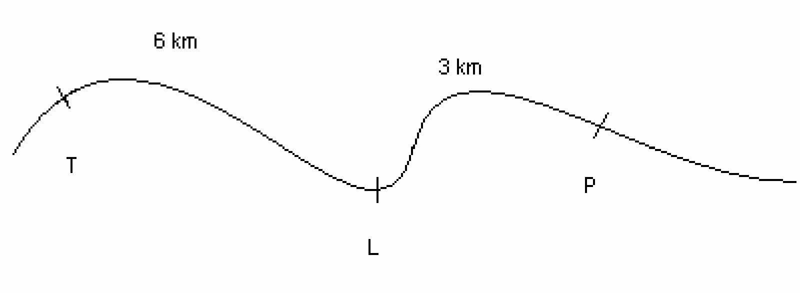
LIITE 4 (jatkuu)

27. Ilmoita suoran y = 2x - 1 ja x-akselin leikkauspisteen koordinaatit.

28. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 10 cm ja toisen kateetin pituus 8 cm. Laske toisen kateetin pituus.

29. Ratkaise yhtälö $3x - 8 = 5x - 2$

30. Oheisessa kuvassa T, L ja P ovat kyliä tien varrella. Kylä L on kaksi kertaa niin kaukana kylästä T kuin kylästä P. Tämän tien varrella on toinenkin kylä, joka on kaksi kertaa niin kaukana kylästä T kuin kylästä P. Kuinka kaukana kyseinen kylä on kylästä L?



LIITE 5 Poikittaistutkimuksen matematiikan testi

Hyvä oppilas!

Tämä testi liittyy matematiikan opetuksen ja oppimisen kehittämiseen. Tavoitteena on selvittää, kuinka sinä ja ikätoverisi ratkaisette tietynlaisia matematiikan tehtäviä. Oikean vastauksen ohella halutaan tietää, kuinka olette päätyneet esittämiinne ratkaisuihin.

Osa tehtävistä on **monivalintatyyppisiä**, jolloin tarkalleen yksi esitetyistä vaihtoehdoista on oikea. Rengasta valitsemasi vastausvaihtoehto (A, B, C, D tai E). Voit myös merkitä laskutoimitukset tehtävän vieressä olevaan vapaaseen tilaan.

Muissa ns. **tuottamistehtävissä** sinun tulee suorittaa tarpeelliset laskutoimitukset ja esittää niiden mahdolliset perustelut. Merkitse **kaksoisalleviivauksella** saamasi ratkaisu. Ratkaise tehtävät **ilman laskinta**. Kaikkia antamiasi tietoja käsitellään luottamuksellisesti.

1. Sukupuoli 1 poika
   2 tyttö
2. Koulu: ______
3. Luokka: ______

TEHTÄVÄT

4. Murtoluku $\frac{5}{4}$ on desimaalilukuna

   A 5,4 B 1,4 C 1,1 D 1,25 E 1,05

5. Jos murtoluvun osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla
   A murtoluvun arvo pienenee
   B murtoluvun arvo säilyy
   C murtoluvun arvo suurenee
   D tulos riippuu siitä, onko kertoja suurempi kuin 1 vai pienempi kuin 1
   E tehtävää ei voi ratkaista annettujen tietojen perusteella

6. Kertolaskun $4 \cdot 5\frac{3}{8}$ tulos on

   A $21\frac{1}{2}$ B $20\frac{12}{32}$ C $20\frac{3}{8}$ D $\frac{23}{8}$ E $\frac{172}{32}$

7. Erään kaupungin miehistä $\frac{2}{3}$ ja naisista $\frac{3}{5}$ on naimisissa (lapsia ei oteta huomioon). Kuinka suuri osa kaupungin aikuisista on naimisissa?

   A $\frac{2}{5}$ B $\frac{5}{8}$ C $\frac{19}{15}$ D $\frac{19}{30}$ E $\frac{12}{19}$

8. Hakkaraisen perhe päätti maalauttaa omakotitalonsa kuistin. Kahdelta maalarilta tiedusteltiin työhön kuluvaa aikaa. Mikkonen sanoi maalaavansa kuistin 8 tunnissa ja Timonen 6 tunnissa. Koska työllä oli kiire, Hakkaraiset päättivät palkata molemmat maalarit. Kuinka kauan heiltä kesti maalauksen suorittaminen yhdessä? Esitä päättelyt ja perustelut.

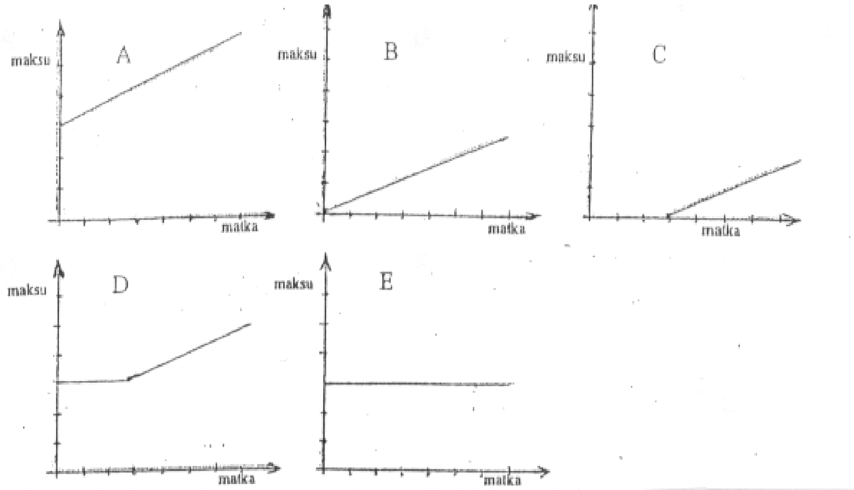
9. Kati ja Miia tarkkailivat ohikulkevia poikia. He havaitsivat, että kolmella pojalla kahdeksasta oli siniset farkut. Oletetaan, että sinisten farkkujen käyttö koulun pojilla on yhtä yleistä kuin edellä mainituissa tapauksissa. Kuinka moni koulun 72 pojasta käyttää sinisiä farkkuja?

(jatkuu)

LIITE 5 (jatkuu)

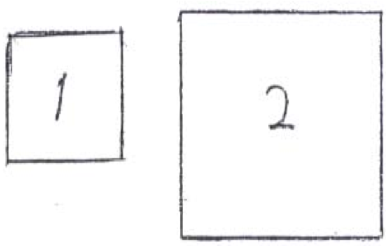
10. Puukko ja tuppi maksavat yhteensä 25 mk. Puukko maksaa 20 mk enemmän kuin tuppi. Kuinka paljon tuppi maksaa?

11. Taksi perii asiakkaalta 30 mk perusmaksun ja 5 mk ajokilometriltä. Mikä seuraavista diagrammeista kuvaa taksin perimän maksun riippuvuutta ajokilometreistä?



12. Kauhallinen pilkkisaalista sisälsi 8 särkeä ja 17 ahventa. Kuinka monta särkeä tämän perusteella voidaan arvioida olevan 100 kalan pilkkisaaliissa?

13. Tarkastellaan kahta eri kokoista neliötä 1 ja 2. Pienemmässä neliössä alan suhde piirin pituuteen
    A on suurempi kuin suuremmassa neliössä
    B on pienempi kuin suuremmassa neliössä
    C on yhtäsuuri kuin suuremmassa neliössä.
    D on puolet suuremman neliön vastaavasta suhteesta
    E ei ole ratkaistavissa



(jatkuu)

LIITE 5 (jatkuu)

14. Oheiseen kuvaajaan liittyy yhtälö

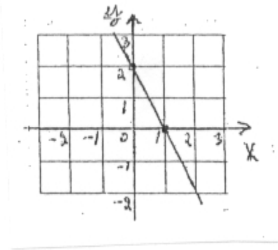
A $y = 2 \cdot x$

B $y = \frac{1}{2} \cdot x$

C $y = x + 1$

D $y = -2 \cdot x + 2$

E $y = 2 - x$



15. Ratkaise x yhtälöstä $x - 8 = 7 - 4 \cdot x$

16. Olkoon n jokin luonnollisista luvuista 1, 2, 3, ... Lukua n seuraava luonnollinen luku on silloin

A n + 1
B n - 1
C n - 10
D n + 10
E 10 n

17. Kymmenten numero eräässä kaksinumeroisessa luvussa on kaksi kertaa niin suuri kuin ykkösten numero. Jos ykkösten numeroa merkitään kirjaimella x, mainittu kaksinumeroinen luku voidaan esittää muodossa

A $3 \cdot x$

B $12 \cdot x$

C $21 \cdot x$

D $30 \cdot x$

E $20 + x$

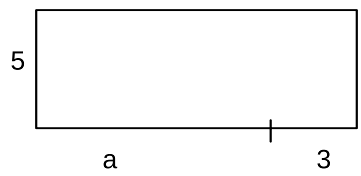
18. Riku on 10 cm pitempi kuin Perttu. Pertun pituus on h cm. Tällöin Rikun pituus senttimetreissä on

A P + 10 = R
B h = + 10
C h = R + 10
D h 10
E h + 10

(jatkuu)

LIITE 5 (jatkuu)

19. Ilmoita oheisen suorakulmion alan lauseke



20. Etsi sellainen luku x, että lausekkeet $4 \cdot x - 7$ ja $8 - x$ ovat yhtä suuret?

21. Mikä seuraavista lausekkeista on yhtä suuri kuin lauseke $7 \cdot (3+9)$?

A $(7 \cdot 3) + (7 \cdot 9)$

B $(7 \cdot 9) + (3 \cdot 9)$

C $(7 \cdot 3) + (3 \cdot 9)$

D $7 \cdot 27$

E $21 \cdot 9$

22. Mikä luku tulee sijoittaa tyhjään ruutuun, jotta seuraava yhtälö olisi tosi?

$$(235 + [\quad]) + (679 - 122) = 235 + 679$$

Kysytty luku on _________

23. Oletetaan, että yhtälö P = M + N on tosi. Tarkastellaan seuraavia yhtälöitä I, II ja III

I N = P – M
II P - N = M
III N + M = P

Mikä seuraavista vaihtoehdoista on silloin tosi?

A vain yhtälö I on tosi
B vain yhtälö III on tosi
C vain yhtälöt I ja III ovat tosia
D vain yhtälöt II ja III ovat tosia
E yhtälöt I, II ja III ovat tosia

24. Luokalla on 17 poikaa ja 8 tyttöä. Kuinka monta prosenttia luokan oppilaista on poikia?

25. Kultainen kaulakoru sisältää 75 % puhdasta kultaa. Kuinka paljon kultaa on 4,2 grammaa painavassa kaulakorussa?

26. Sairaanhoitajien koulutustilaisuudessa on 99 naista ja 1 mies. Kuinka monen naisen täytyy poistua, jotta naisten osuus olisi 98 %?

KIITOS VASTAUKSISTASI!

LIITE 6 Matematiikan testin ratkaisuprosentit ja niiden erot luokkatasoittain poikittaistutkimuksessa, erojen p-arvot t-testillä

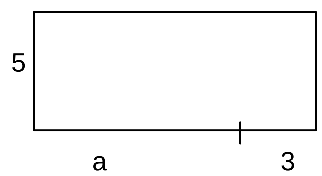
Luokkataso	**6**	**7**	**8**	**9**
Oppilaita	112	317	350	240
Ratkaisuprosentti	31,0	32,4	35,1	44,0
Ero 6.lk/7.lk prosenttiyksikköä		+1,4		
Ero 7.lk/8.lk prosenttiyksikköä			+2,7	
Ero 8.lk/9.lk prosenttiyksikköä				+8,9
Keskiarvoeron merkitsevyys p-arvo		0,265	0,050	0,000

LIITE 7 Toteutuneet ratkaisuvaihtoehdot poikittaistutkimuksen osiossa 7

Osio 7 Erään kaupungin miehistä 2/3 ja naisista 3/5 on naimisissa (lapsia ei oteta huomioon). Kuinka suuri osa kaupungin aikuisista on naimissa?

Ratkaisu	A	B	C	D	E
Ratkaisuvaihtoehdot	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{19}{15}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{12}{19}$
Ratkaisutavan kuvailu	Kertolasku $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$	Osoittajien ja nimittäjien yhteenlasku $\frac{2+3}{3+5}$	Yhteenlasku $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{10}{15}+\frac{9}{15}$	Lavennus ja osoittajien ja nimittäjien yhteenlasku $\frac{10}{15}+\frac{9}{15}=\frac{19}{30}$	**Osoittajien laventaminen samoiksi sekä osoittajien ja nimittäjien yhteenlasku** $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ ja $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ $\frac{6+6}{9+10}=\frac{12}{19}$
Valinnan yleisyys (%, N = 994)	3.5	52.1	33.3	9.0	**2.1**

LIITE 8 Poikittaistutkimuksen muuttujan käsitteeseen liittyvien osioiden ratkaisutapojen luokittelu

Osio 16 *Olkoon n jokin luonnollisista luvuista 1, 2, 3, ... Lukua n seuraava luonnollinen luku on silloin*					
Ratkaisu	A	B	C	D	E
Ratkaisu-vaihtoehdot	**n+1**	n-1	n-10	n+10	10n
Valinnan yleisyys (%, N = 886)	**67,2**	5,4	5,5	7,2	14,6
Osio 18 *Riku on 10 cm pitempi kuin Perttu. Pertun pituus on h cm. Tällöin Rikun pituus senttimetreissä on*					
Ratkaisu	A	B	C	D	E
Ratkaisu-vaihtoehdot	P+10 = R	h = +10	h = R+10	h 10	**h+10**
Valinnan yleisyys (%,N = 905)	17,6	16,6	15,1	7,1	**43,6**
Osio 19 *Ilmoita oheisen suorakulmion alan lauseke* 					
Ratk. luokitus	1	2	3	4	5
Ratkaisutavan kuvailu	**5·(a+3)** oikea tulos	Alg. virhe $\frac{5\cdot 3}{a}$ tai $5a^3$ tai 3a+5 tms.	Piiri 5+5+a+ 3+a+3	Pelkkä numerolauseke $a = 2\cdot 5$ tai 3·5 tai 5·3:2	Mitt. cm ym.tai muu virhe
Ratkaisutavan yleisyys (%, N = 599)	**28,1**	33,2	3,6	28,1	7,1

LIITE 9 Poikittaistutkimuksen yhtälöihin liittyvien ratkaisutapojen luokittelu

Osio 15 *Ratkaise x yhtälöstä* $x - 8 = 7 - 4 \cdot x$					
Ratk.luokitus	1	2	3	4	5
Ratkaisutavan kuvailu	a) Ekvivalentti yhtälöketju, oikea tulos **x=3** b)Kokeilemalla tai ilman perusteluja oikea tulos	Algebrallinen virhe, yht.lasku <--> kertolasku tai tuntematon jäänyt lausekkeeseen tai hylätty	Kaksi eri ratk.	Aritmeettinen ajattelu, ensimmäinen luku oikealla on vasemman puolen tulos	Muu virhe
Ratkaisutavan yleisyys (%, N = 521)	a) **8,4** b) **7,1**	15,5	5,5	37,5	29,5
Osio 20 *Etsi sellainen luku x, että lausekkeet* $4 \cdot x - 7$ *ja* $8 - x$ *ovat yhtä suuret?*					
Ratk.luokitus	1	2	3	4	5
Ratkaisutavan kuvailu	Oikea ratk. **x=3** yhtälö tai lausekk. vert.	Lausekkeen arvo = 5 selvitetty, vastaus väärä, x=5 tms.	Vas. eri x kuin oik. 2 ja 7 tai 2 ja 9 tai 1 ja 11	Virh. yht.ratk. tekniikka $4 \cdot x - 7 =$ $4x - 7 - 8 - x =$	Muu virhe
Ratkaisutavan yleisyys (%, N = 504)	**56,4**	8,7	12,5	3,3	19,2
Osio 22 *Mikä luku tulee sijoittaa tyhjään ruutuun, jotta seuraava yhtälö olisi tosi?* $(235 + [\ \ ]) + (679 - 122) = 235 + 679$					
Ratk.luokitus	1	2	3	4	5
Ratkaisutavan kuvailu	Vaakaperiaate, oikea tulos [ ] = 122	Ekvivalentti yhtälöketju a) oikein b) väärin	Laskemalla molemmat puolet, oikea tulos	Laskemalla molemmat puolet, väärä tulos	Muu virhe
Ratkaisutavan yleisyys (%, N = 708)	**30,9**	a) **0,4** b) 0,8	**13,4**	11,8	42,7
Osio 23 *Oletetaan, että yhtälö P = M + N on tosi. Tarkastellaan seuraavia yhtälöitä I, II ja III* **I** *N = P – M* **II** *P – N = M* **III** *N + M = P Mikä seuraavista vaihtoehdoista on silloin tosi?*					
Ratkaisu	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Vaihtoehdot	Vain I tosi	Vain III tosi	Vain I ja III tosia	Vain II ja III tosia	**I, II ja III tosia**
Ratkaisutavan yleisyys (%, N = 837)	5,1	38,8	14,0	11,4	**30,5**

LIITE 10 Poikittaistutkimuksen ratkaisuprosenttien muutokset ja niiden merkitsevyydet luokka-asteelta seuraavalle siirryttäessä

Muutos luokalta seuraavalle	Koko testi	Verrannollisuus	Algebra	Prosenttilasku
Kuudennelta seitsemännelle, prosenttiyksikköä	+ 1,4	+ 9,3	– 5,4	
Muutoksen merkitsevyys t-testillä, p-arvo	0,265	0,001	0,010	
Seitsemänneltä kahdeksannelle, prosenttiyksikköä	+ 2,6	– 0,1	+ 5,3	0,0
Muutoksen merkitsevyys t-testillä, p-arvo	0,050	0,484	0,001	0,965
Kahdeksannelta yhdeksännelle, prosenttiyksikköä	+ 8,7	+ 6,0	+ 11,5	10,0
Muutoksen merkitsevyys t-testillä, p-arvo	0,001	0,010	0,000	0,001

LIITE 11 Verrannollisuuden virheindeksin IV_{red} yhteys algebran alueella menestymiseen poikittaistutkimuksen mukaan. Testin algebran alueen ratkaisuprosentin riippuvuus indeksiluokasta, testattu varianssianalyysillä, df = 1017, F = 104,3, p = 0,000.

IV_{red}	Ratkaisuprosentit algebran alueella		Oppilaita
	Keskiarvo (%)	Keskihajonta (%-yks.)	
0,00-0,33	39,2	21,6	402
0,34-0,66	24,4	15,8	560
0,67-1,00	17,0	11,9	96