

LUKUMÄÄRÄÄN LIITTYVIEN VARHAISTEN MATEMAATTISTEN
TAITOJEN KEHITYS ESIOPETUSVUODEN AIKANA

Elina Kuivamäki

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma

Syky 2006

Opettajankoulutuslaitos

Jyväskylä yliopisto

TIIVISTELMÄ

Kuivamäki, E. 2006. Lukumäärään liittyvien varhaisten matemaattisten taitojen kehitys esiopetusvuoden aikana. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. 59 sivua.

Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää lasten lukumäärään liittyvien taitojen kehitystä esiopetusvuoden aikana. Tutkimuksessa tarkasteltiin myös missä määrin lasten lukumäärätaitojen hallinta konkreettisia välineitä ja toimintaa sisältävissä tehtävissä oli yhteydessä tietokone tehtävään, jonka avulla arvioitiin lukumäärien määrittämisen hallintaa ja subitisaation hyödyntämistä. Lisäksi selvitettiin missä määrin lasten lukumäärätaidot olivat yhteydessä matemaattisten käsitteiden ymmärtämiseen. Tutkittavana oli 139 esiopetusikäistä 13 esiopetusryhmästä. Lasten lukumäärään liittyviä taitoja ja matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä arvioitiin syksyllä ja keväällä. Tulokset osoittivat, että esiopetusikäiset hallitsivat pääsääntöisesti lukumäärien laskemisen pienellä alle kymmenen lukualueella, mutta sanalliset vertailua vaativat ja lukujen hajottamista edellyttävät tehtävät olivat vielä haastavia. Lukumäärätaitoja arvioineissa tehtävissä suoriutuminen oli yhteydessä lukumäärän määrittämisen hallintaa ja subitisaatiota arvioineissa tietokone tehtävässä suoriutumiseen. Matemaattisten käsitteiden ja lukumäärätaitojen välillä havaittiin myös selvä yhteys. Lisäksi tulokset osoittivat, että taso, jolla lapset suoriutuivat lukumäärän hallintaan liittyvistä tehtävistä esiopetusvuoden alussa, oli vahvasti yhteydessä suoriutumiseen vastaavissa tehtävissä esiopetusvuoden lopussa. Siten olisi tärkeää tunnistaa jo esiopetusvuoden alussa lapset, joilla on tarvetta matemaattisten valmiuksien ja käsitteiden kehityksen tukeen esiopetusvuoden aikana.

AVAINSANAT: Varhaiset matemaattiset taidot, lukumäärätaidot, subitisaatio, matemaattiset käsitteet, esiopetus

SISÄLLYS

1 JOHDANTO	4
2 VARHAISET MATEMAATTISET TAIDOT.....	6
2.1 Varhaisten matemaattisten taitojen jaottelua	6
2.2 Käsitteiden määrittelyä	8
3 MATEMAATTISTEN TAITOJEN KEHITYMINEN	11
3.1 Matemaattisten taitojen perusta	11
3.2 Varhaisen iän matemaattiset havainnot	12
3.3 Subitisaatio	14
3.4 Aritmeettisten perustaitojen kehitys	16
4 MATEMATIIKAN OPPIMISEEN VAIKUTTAVIA TEKIJÖITÄ	22
4.1 Yksilölliset erot lasten matemaattisissa valmiuksissa ja kokemuksissa	22
4.2 Varhaiset matemaattiset käsitteet	25
5 TUTKIMUSONGELMAT.....	28
6 MENETELMÄ	29
6.1 Tutkittavat.....	29
6.2 Tutkimusmenetelmät	30
6.2.1 Lukumäärätaitojen arviointi	31
6.2.2 Lukumäärän määrittämistä ja subitisaatiota arvioiva tietokonetehtävä	34
6.2.3 Käsitteiden ymmärtäminen.....	35
6.3 Aineiston analyysi	36
7 TULOKSET	37
7.1 Lukumäärätaitojen arviointi	37
7.2 Lukumäärätaitojen ja lukumäärien määrittämisen hallintaa ja subitisaation hyväksikäyttöä arvioineen tietokonetehtävän yhteys	42
7.3 Lukumäärätaitojen ja matemaattisten käsitteiden hallinnan yhteys	44
7.4 Alaryhmätarkastelu.....	45
8 POHDINTA.....	48
8.1 Tulosten tarkastelua	48
8.2 Tutkimuksen arviointia ja jatkotutkimuksen haasteita.....	50
LÄHTEET	55

1 JOHDANTO

Matemaattiset taidot alkavat kehittyä jo hyvin varhain. Ennen kouluikää saavutetut taidot koskien esimerkiksi lukumääriä, vertailua, luokittelua ja käsitteitä luovat pohjan koulumatematiikan oppimiselle. Esiopetusikäisten matemaattisista taidoista on tehty suhteellisen vähän tutkimusta verrattuna esimerkiksi lukutaidon tutkimukseen. Kiinnostus varhaisten matemaattisten taitojen tutkimiseen on kuitenkin kasvanut viime vuosien aikana.

Perustana matemaattisten taitojen kehitykselle ovat ihmisille luontaiset synnynäiset kyvyt kuten lukumäärien havaitseminen (ks. Geary 1995; 2000; Dehaene 2001). Näiden synnynäisten kykyjen perustalle rakentuvien matemaattisten taitojen kehitykseen vaikuttavat esimerkiksi kieli, kulttuuri, lähiympäristö sekä yksilön kyvyt, suuntautuneisuus ja kiinnostus. Esiopetuksessa tapahtuva valmiuksien tukeminen vaikuttaa merkittävästi siihen, millaiseksi lapsen matemaattiset taidot muodostuvat ennen koulun aloittamista. Esiopetuksen tavoitteena tällä osa-alueella on matematiikan oppimisen pohjan luominen ja vahvistaminen. Toiminnallisuuden ja konkretian avulla pyritään avartamaan lasten käsitystä matematiikasta sekä tukemaan myönteistä suhtautumista matematiikkaa kohtaan. Opetussuunnitelman perusteissa nostetaan esiin myös käsitteiden ymmärtäminen, jota tulisi tukea esiopetusvuoden aikana sekä painotetaan myös matemaattisen ajattelun kehityksen tukemista. (Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2000, 11-12.)

Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa ei määritellä tiettyjä matemaattisia taitoja, jotka lapsen on hallittava esiopetusvuoden lopussa. Matemaattisten taitojen arviointi on kuitenkin tärkeää jo esiopetusiässä, sillä lasten välillä saattaa olla suuria eroja näissä taidoissa koulun alkaessa (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi 2004). Lasten joukosta olisi tärkeää tunnistaa ne, joiden matemaattiset taidot ovat heikot, jolloin taitojen kehityksen tukeminen voidaan aloittaa jo esiopetusvuoden aikana. Näin edellytykset koulumatematiikan oppimiselle parantuisivat näiden lasten kohdalla, ja eroja lasten välillä saataisiin tasoittumaan. Tällä hetkellä Suomessa käytössä on muutamia menetelmiä, joiden kautta esiopetusikäisten matemaattisia taitoja

voidaan arvioida. Uusien arviointimenetelmien tarve on kuitenkin tiedostettu ja uusia menetelmiä ollaankin parhaillaan kehittelemässä.

Matemaattisten taitojen kenttä on hyvin laaja. Tässä tutkimuksessa tarkastelun kohteena ovat lukumäärän hallintaan liittyvät taidot, joita ovat mm. lukusanojen hallinta, lukumäärien määrittäminen luettelemalla laskien tai subitisaatiota hyödyntämällä, yksi yhteen -vastaavuus, lukumäärien vertailu sekä matemaattisten käsitteiden hallinta. Tavallisesti ennen kouluikää lapsille on kehittynyt ymmärrys siitä, että millä tahansa joukolla on lukumäärä (kardinaalisuus) ja että luvut ovat merkityksellisesti yhteydessä toisiinsa (ordinaalisuus). Koulutulokkaat hallitsevat tyypillisesti myös lukujen luettelemisen eteen- ja taaksepäin lukualueella 1-10 ja osaavat hyödyntää luettelemalla laskemisen periaatteita lukumäärien määrittämiseksi. Osa koulutulokkaista osaa lisäksi käyttää lukuja yhtäsuuruuden toteamisessa sekä yhteen- ja vähennyslaskua sisältävissä tehtävissä. (ks. Geary 2000, 12; Kinnunen, Lehtinen & Vauras 1994, 65-67.)

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää esiopetusikäisten lukumäärään liittyviä taitoja ja niiden kehittymistä esiopetusvuoden aikana. Tutkimuksessa tarkasteltiin myös missä määrin lasten lukumäärätaitojen hallinta konkreettista toimintaa sisältävissä tehtävissä oli yhteydessä lukumäärien määrittämiseen subitisaation hyödyntämistä mittaavassa tietokonetehtävässä sekä missä määrin lasten lukumäärätaidot olivat yhteydessä matemaattisten käsitteiden ymmärtämiseen. Tutkittavina oli 139 esiopetusikäistä lasta, joiden taitoja arvioitiin esiopetusvuoden syksyllä ja keväällä käyttäen kolmea testiä.

2 VARHAISET MATEMAATTISET TAIDOT

2.1 Varhaisten matemaattisten taitojen jaottelua

Varhaisten matemaattisten taitojen jaottelu on osoittautunut haastavaksi, sillä käytännössä erilaiset osataidot nivoutuvat yhteen ja muodostavat yhdessä laajempia taitokokonaisuuksia. Suomessa Kinnunen ym. (1994, 56-61) ovat käsitelleet matemaattisten taitojen kehitystä seuraaviin kolmeen pääalueeseen jaoteltuna: 1) luku- ja jonotaitojen kehittyminen, 2) aritmeettisten perustaitojen kehittyminen ja 3) matemaattislooginen ajattelu. Ahonen, Lamminmäki, Närhi ja Räsänen (1995, 184) ovat puolestaan kuvanneet matemaattisten taitojen kehittymistä peräkkäin etenevien vaiheiden kautta. He ovat erottaneet varhaisten matemaattisten taitojen kehityksestä seuraavat neljä vaihetta:

- *Esikielelliset kyvyt* (ikävuodet 0 - 2): pienten lukumäärien erottelu
- *Varhaiset numeeriset taidot* (ikävuodet 2 - 4): lukusanojen oppiminen, muutosten havaitseminen pienissä lukumäärissä
- *Luonnolliset aritmeettiset taidot* (ikävuodet 3 - 7): yksi yhteen –vastaavuus, kardinaali- ja ordinaaliperiaatteet, lukumäärän säilyvyys, laskuoperaatioiden peruseriaatteet
- *Formaalit matemaattiset taidot* (6. tai 7. ikävuosi): luettelemalla laskemisen automatisoituminen ja sisäistyminen muistirakenteiksi, algoritmien oppiminen

Myös Mattinen (2006) on kuvannut varhaisen numeerisen tiedon ja taidon (ikävuodet 0-8) kehittyvän erilaisten vaiheiden kautta painottaen kehityksen hierarkkista luonnetta. Hänen mukaansa lapsen numeerisen tiedon ja taidon kehittymisen lähtökohtana on numeerisen tiedon synnynnäinen biologinen perusta. Tämän perustan päälle rakentuu vaihe vaiheelta tiedon uudelleenrakentamisprosessin kautta abstrakti, monimuotoinen luvun käsitteen ymmärtäminen. (ks. Mattinen 2006, 32-33.)

Vainionpää, Mononen ja Räsänen (2003, 294) ovat puolestaan eritelleet varhaisten matemaattisten taitojen (laskutaidon) kehitystä neljän osa-alueen kautta:

- *Suhdekäsitteet*: toiminnan, ominaisuuksien ja vertailun kautta hahmottuvien käsitteiden ymmärtäminen (esim. paljon, lisää, enemmän - vähemmän)
- *Lukujen luettelutaito*: mm. lukusanat, *lukujonoon* liittyvät taidot, jotka etenevät kyvystä luetella lukusanojen listaa, kykyyn katkaista lukujono ja viimein lukujonotaitojen kehittyneimpään vaiheeseen (lapsi osaa hyödyntää lukujonoa aritmeettisissa operaatioissa)
- *Lukukäsitteet*: mm. kyky havaita ja erotella määriä, yksi yhteen - vastaavuuden periaatteen ymmärtäminen ja soveltaminen, kardinaalisuus, lukumäärän säilyvyyden ymmärtäminen
- *Laskutaito*: varhaisvaiheessa esineiden lukumäärän laskeminen, lukumäärien vertailu

Vainionpään ym. (2003) edellä esitetty osa-alueittainen jaottelu ei ota selkeää kantaa taitojen kehityksen hierarkiaan muutoin kuin siltä osin, että laskutaidossa yhdistyvät sekä lukujonotaidot ja lukukäsitteeseen liittyvää ymmärrys. Lukukäsitteiden hallinta puolestaan edellyttää lukujen luettelun ja lukujonotaitojen kehittymistä. Laskutaidon Vainionpää ym. (2003) määrittelevät kyvyksi laskea määriä, niiden muutoksia (lisääntymistä tai vähentymistä) sekä vertailla lukumäärien välisiä suhteita. Suhdekäsitteet viittaavat tässä varhaisiin käsitteisiin, jotka voivat näkyä pienellä lapsella toiminnan kautta jo ennen kielellisten nimikkeiden tuottamista (esim. lapsi osaa ottaa pyydettyä yhden palikan lisää tai näyttää missä kasassa on enemmän palikoita ja missä vähemmän). (Vainionpää ym. 2003, 295-296.) Koska jo hyvin perustavanlaatuiset matemaattiset taidot koostuvat useasta osatekijästä, on niiden jaottelu haasteellista, mistä johtuen myös varhaisia matemaattisia taitoja on vaikea mitata erillisinä.

2.2 Käsitteiden määrittelyä

Ulkomaisesta tutkimuskirjallisuudesta ei ole helppoa löytää selkeää varhaisten matemaattisten taitojen jaottelua eikä myöskään käsitteiden käyttö ole yksiselitteistä. Seuraavaksi esittelen joitakin keskeisiä varhaiseen matemaattiseen kehitykseen liittyviä käsitteitä mainiten mikäli mahdollista sekä suomen- että englanninkielisen termin. Käsitteellä kardinaalisuus (”cardinality”, ”cardinal”) viitataan joukon yksiköitten lukumäärään, josta käytetään toisinaan myös määrän käsitettä (”quantity”) (ks. Anghileri 2000, 18). Ordinaalimerkityksessä (”ordinal”) lukuja käytetään kuvaamaan jonkun luvun paikkaa suhteessa toiseen. Nominaalimerkityksessä (”nominal”) luvuilla ei ole matemaattista merkitystä, vaan niitä käytetään pikemminkin nimikkeenä esimerkiksi puhelinnumeroissa tai bussin numeroissa (ks. Irons 2002, 3). Numeroihin liittyvistä englanninkielisistä termeistä käytetään seuraavanlaisia suomalaisia vastineita: ”digit” on numero (esim. ”two digit number” = kaksinumeroinen luku), ”number” on luku ja ”number word” on lukusana (esim. kirjoitettuna lukusana kolme).

Termi ”number sense” on ollut viime aikoina vahvasti esillä tutkimuskirjallisuudessa, ja vaikka siitä ei ole yhtä vakiintunutta määritelmää, tutkijoiden luonnehdinnat käsitteen sisällöstä ovat samansuuntaisia. Esimerkiksi Dehaenen (2001, 16) mukaan ”number sense” viittaa aritmeettisten taitojen perustana olevaan biologispohjaiseen kykyyn ymmärtää ja käsitellä lukumääriä koskevaa informaatiota. Anghileri (2000, 4-5) ymmärtää ”number sense” -käsitteen laajasti taipumuksena ja kykynä käyttää lukuja ja määrällistä ajattelua kommunikoinnissa ja informaation prosessoinnissa. Suomessa muun muassa Aunio (2006, 5) on tutkimuksessaan käyttänyt ”number sense” -termiä, sillä hänen mukaansa se kuvaa hyvin sitä, mikä on keskeistä varhaisessa matemaattisessa tietämyksessä eli lapsen ymmärrystä lukumäärästä, lukusanoista ja numerosymboleista. Käsitteelle ei ole vielä vakiintunutta suomennosta, mutta esimerkiksi Vilenius-Tuohimaa (2005, 37-38) on esittänyt sen suomenkieliseksi vastineeksi *lukutajua*.

Englanninkielisen termin ”numerosity” kääntäminen on hankalaa, sillä tutkijat ovat antaneet sille erilaisia merkityksiä. Geary (1995; 2000) käyttää termiä viitatessaan primaariin lukumäärän hahmottamiseen. Butterworthin (2005, 3) mukaan ”numerosity” viittaa joukon yksiköiden lukumäärään, ja se on kognitiivinen vastinpari käsitteelle kardinaalisuus, joka on yleisemmin käytössä matematiikan tutkijoiden keskuudessa. Butterworth (ks. 2005, 3-4) katsoo, että lukumäärän käsitteen (”concept of numerosity”) hallinta edellyttää lapselta ymmärrystä seuraavista: 1) yksi yhteen -vastaavuuden ymmärtäminen, 2) ymmärrys siitä, että joukoilla on lukumäärä ja että muutokset joukossa vaikuttavat lukumäärään, 3) ymmärrys siitä, että myös abstrakteilla asioilla voi olla lukumäärä, 4) kyky tunnistaa pieniä lukumääriä (alle 5 yksikköä) visuaalisesti ilman luettelemalla laskemista (vrt. subitisaatio). Suomalaiset tutkijat ovat käyttäneet sekä termiä *lukuisuus* (mm. Kinnunen ym. 1994) että *lukumääräisyys* (mm. Räsänen 1999) viittaamaan siihen, että kaikilla joukoilla on lukumäärä, joka voidaan määrittää. Termillä *lukukäsite* (”number concept”) viitataan lukumäärän ymmärtämiseen ja myös lukumäärän laskemiseen (Vilenius-Tuohimaa 2005, 38). Kirjallisuudessa käytetään termistä myös monikkomuotoa *lukukäsitteet* (”number concepts”) (esim. Vainionpää 2003; Mix 2002; Resnick 1989), mikä kuvaa yksikkömuotoa paremmin lukukäsitteen koostuvan useista osataidoista (mm. käsitys siitä, mitä voi laskea, yksi-yhteen vastaavuus ja kardinaalisuus).

Lukujonotaidoilla (”number sequence skills”) viitataan lukujonoon ja sen käyttämiseen liittyviin taitoihin (Hannula 2005, 23). Lukujonotaitoihin sisältyy yhtenä osaitona *luettelemalla laskeminen* (”counting”). Luettelemalla laskeminen voi tapahtua yksi luku kerrallaan luettelemisen lisäksi myös esimerkiksi kahden, viiden, kymmenen tai sadan ryhmissä (Anghileri 2000, 4). Gelmanin ja Gallistel (1978) mukaan luettelemalla laskeminen edellyttää lapselta ymmärrystä seuraavista kolmesta periaatteesta: yksi yhteen -vastaavuus lueteltujen lukusanojen ja esineiden välillä, pysyvä järjestys lukujen luettelussa ja kardinaalisuusperiaate. Jotta lapsi kykenee soveltamaan edellä mainittuja periaatteita käytäntöön, on hänellä oltava myös ymmärrys siitä, että minkä tahansa joukon lukumäärä voidaan laskea. Lisäksi lapsen on ymmärrettävä, että laskemisjärjestyksellä ei ole merkitystä, vaan tulos pysyy samana riippumatta siitä, missä järjestyksessä joukon yksiköt laskee. (Gelman & Gallistel 1978, 77-82.)

Aritmeettisilla perustaidoilla viitataan ennen kouluikää rakentuneisiin taitoihin, jotka luovat pohjaa formaalin eli koulussa opiskeltavan aritmetiikan oppimiselle. Nämä taidot kehittyvät yhdessä kardinaalisuuden ymmärtämisen ja lukujonotaitojen sekä määrällisen kasvun ja vähenemisen ymmärtämisen kanssa. Lisäksi ne mahdollistavat kehityksen myötä esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskun lukusanojen avulla. (Hannula 2005, 24.) Englanninkielisessä tutkimuskirjallisuudessa näihin taitoihin viitataan esimerkiksi termein ”basic number skills”, ”simple arithmetic” ja ”arithmetical abilities”.

3 MATEMAATTISTEN TAITOJEN KEHITTYMINEN

Tutkijoiden keskuudessa ollaan yksimielisiä siitä, että matemaattisten taitojen pohja kehittyy jo varhaislapsuudessa. Matemaattisten taitojen varhaiseen kehitykseen vaikuttavat monet tekijät, joita Aunio, Hannula ja Räsänen (2004, 217) ovat kuvanneet olevan mm. lapsen kognitiivinen kykyrakenne, lapsen oma suuntautuneisuus ja kiinnostuneisuus, lähiympäristön toiminta, kieli sekä kulttuuriset tekijät ja arvostukset. Aluksi matemaattinen tietämys on vahvasti sidoksissa käytännön toimintaan ja havaitsemiseen. Vähitellen kokemusten ja harjoittelun kautta tiedot ja taidot kehittyvät niin, että lapsi kykenee käsittelemään matemaattista informaatiota mielessään ilman välittömien havaintojen ja konkretian tukea. Varhaislapsuudessa ennen koulun aloittamista rakentuneella matemaattisella tietämyksellä on tärkeä merkitys, sillä se viitoittaa tien matematiikan oppimiselle koulussa. (Baroody 1987, 26-28.) Mahdollisten tulevien koulussa esiintyvien matemaattisten oppimisvaikeuksien ennaltaehkäisyn kannalta onkin tärkeää tukea lapsen varhaisia matemaattisia taitoja, sillä usein koulun alkaessa erot matemaattisissa taidoissa lasten välillä ovat hyvin suuria (Aunola ym. 2004).

3.1 Matemaattisten taitojen perusta

Tutkijoiden keskuudessa on erilaisia näkemyksiä siitä, miten varhainen matemaattinen tietämys kehittyy. Empiristisen selityksen mukaan ihmiset hankkivat yksinkertaisimmankin ymmärryksen numeerisista suhteista havainnoimalla ympäristöä. Nativistinen selitys puolestaan esittää, että osa numeroihin liittyvästä ymmärryksestä on synnynnäistä. (Wynn 1998, 3.) Räsänen (1999) mukaan tutkijat alkavat olla kohtalaisen yksimielisiä siitä, että ihmisellä on olemassa biologispohjaisia mekanismeja, joiden avulla ympäristössä olevia lukumääriä havaitaan spontaanisti. Kiistanalainen kysymys tutkijoiden kesken on se, ovatko tällaiset mekanismit kehittyneet evoluution myötä nimenomaisesti lukumäärien havaitsemista varten vai onko kyseessä havaintomekanismeihin liittyvä sivutuote. (Räsänen 1999, 341.)

Dehaene (2001) esittää, että ihmisillä on evoluution myötä kehittyneitä synnynnäistä intuitiivista ymmärrystä koskien esimerkiksi lukuja, joukkoja, lukumääriä ja ilmiöiden tai tapahtumien logiikkaa. Evoluutio on muokannut aivoja sopeutuaksemme paremmin ulkoiseen maailmaan, ja ihmisellä sekä useilla eläinlajeilla ilmenee hermostollisia mekanismeja esimerkiksi koskien alkeellista aritmetiikkaa. (Dehaene 2001, 31.) Myös Geary (1995; 2000) esittää, että osa lukumääriin liittyvästä tietämyksestä on synnynnäistä ja evoluution mukana kehittyneitä. Hänen mukaansa ihmisellä on jo syntyessään perustavanlaatuisia kykyjä hahmottaa lukumääriä. Geary nimittää tällaisia ihmiselle luontaisia, biologisten tekijöiden ohjaamia kykyjä biologisesti primaareiksi kyvyiksi. Ne ilmenevät riippumatta formaalista opetuksesta ja niitä esiintyy kaikissa kulttuureissa. Gearyn mukaan tällaisia primaareja taitoja matematiikassa ovat mm. pienten lukumäärien tarkka ja nopea määrittäminen, perustavanlaatuisen ymmärrys lukujen keskinäisistä suhteista, valmius luettelemalla laskemisen kehittämiseen ja herkkyys perustavanlaatuisiin aritmeettisiin operaatioihin. Suurin osa lukumääriin liittyvistä taidoista, joita opiskellaan koulussa, ja jotka ovat tärkeitä teollistuneissa yhteiskunnissa, eivät kuitenkaan ole tällaisia ihmiselle luonnostaan kehittyviä kykyjä, vaan ne vaativat oppimista ja harjoittelua. Tällaisia taitoja Geary nimittää biologisesti sekundaareiksi. Sekundaarien taitojen kehittyminen voi vaihdella kulttuureittain ja sukupolvesta toiseen, eikä niiden kehityksestä näin ollen ole olemassa universaalia mallia. (Geary 1995, 28-29; 2000, 12.) Kulttuurien kehittymisen myötä ihmiset ovat rakentaneet kielen avulla biologisten tekijöiden ohjaamiin eli primaareihin kykyihin tukeutuvia laskemisjärjestelmiä. Näin ihmiset ovat kyenneet ylittämään tarkassa laskemisessa havaintojärjestelmänsä rajat. Primaarien kykyjen pohjalta syntyneiden sekundaaristen laskemistaitojen hallitseminen edellyttää harjoittelua, tarkkaavaisuuden kohdentamista ja ylläpitoa sekä useampien suoritusten ja taitojen samanaikaista koordinoitua. (Aunio ym. 2004, 201.)

3.2 Varhaisen iän matemaattiset havainnot

Jo hyvin pienillä lapsilla on todettu olevan käsityksiä lukumääristä ja niiden välisistä suhteista. Tutkimuksissa on osoitettu, että alle vuoden ikäisinä, paljon ennen ensimmä-

mäisten sanojenkaan oppimista, lapset osaavat erottaa lukumäärältään erisuuruisia ryhmiä toisistaan. Tutkimuksissa on esimerkiksi todettu, että jo alle puolen vuoden ikäisinä lapset kykenevät erottamaan kahden kolmesta, kun lukumäärät esitetään näkö- tai kuuloärsykkein. Useissa tutkimuksissa on myös havaittu, että vauvoilla on kyky erottaa toisistaan suurempiakin lukumääriä, kunhan lukumäärien välinen ero on riittävä suuri (esimerkiksi kontrasti 8:n ja 16:n välillä). Lisäksi joidenkin tutkimushavaintojen mukaan viiden kuukauden ikäiset lapset ymmärtävät yhteen- ja vähennyslaskun idean pienillä luvuilla käytettäessä konkreettisia esineitä (ks. Wynn 1998 tai Spelke 2000).

Tutkimukset, joita on tehty vauvojen lisäksi eri eläinlajeille ja aikuisille, viittaavat siihen, että lukumäärän hahmottaminen jakautuisi kahteen prosessiin. Pienten lukumäärien ja niiden erojen hahmottaminen onnistuu hyvin, mutta kun lukumäärä kasvaa, käy hahmottaminen epätarkemmaksi ja verrattavien lukumäärien suhteesta riippuvaiseksi. Mitä suuremmista lukumääristä on kyse, sitä suurempi on oltava määrien välisen eron, jotta ne koettaisiin erisuuruisiksi. Yksinkertaisimmillaan nämä lukumäärän hahmottamisen kaksi mekanismia, pienten lukumäärien tarkka hahmottaminen ja lukumäärien suhteellinen hahmottaminen, eivät edellytä kielen oppimista tai harjoittelua. (Vainionpää ym. 2003, 295; Aunio ym. 2004, 201).

Jotta ihmiset kykenisivät käsittelemään myös suurempia lukumääriä tarkasti, tarvitaan avuksi kieltä tai muuta symbolijärjestelmää, joka mahdollistaa lukumäärien hahmottamisen vastaavuuksien avulla. Lukuihin liittyviä kielellisiä ilmauksia sekä symboleita aletaan kulttuurissamme oppia varhain. Tavallisesti jo ennen kahden vuoden ikää lapset alkavat käyttää puheessaan lukusanoja, joilla ei kuitenkaan aluksi näytä olevan varsinaisesti matemaattista sisältöä. (Räsänen 1999, 341-345; Hartikainen, Vuorio, Mattinen, Leppävuori & Pahkin 2001, 84.) Haastetta oppimiselle asettaa muun muassa se, että arkielämän tilanteissa lukuja ja numeroita käytetään monenlaisissa erilaisissa merkityksissä (mm. Butterworth 2005). Selvästi muista erottuva numeristen ilmausten tarkoitus on kuitenkin joukkojen lukumäärien osoittaminen. Tämä tekee numeroista ainutlaatuisia, sillä joukon lukumäärä ei ole esineeseen liittyvä ominaisuus kuten esimerkiksi väri tai muoto, vaan lukumäärä on mistä tahansa koostuvan joukon ominaisuus. Esimerkiksi kolmen kissan, kolmen tuolin ja kolmen

toiveen joukkojen lukumäärä on sama. Jotta joukon lukumäärän voi selvittää, on joukon jäsenten ominaisuudet (esim. väri, muoto ja koko) jätettävä huomiotta. (Butterworth 2005, 3.) Joukkojen lukumääräisyyden havaitseminen onkin edellytys sille, että lukumäärän ja sitä vastaavan käsitteen välille voi syntyä miellelyhtymä, joka puolestaan on edellytyksenä laskutaidon kehittymiselle (Räsänen 1999, 337).

3.3 Subitisaatio

Kun ihmisille esitetään pieni määrä kohteita, kuten pisteitä, he pystyvät helposti ja tarkasti päättelemään oikean lukumäärän. Tällaista nopeaa laskematta tapahtuvaa lukumäärän määrittämistä kutsutaan subitisaatioksi (engl. subitizing). (Wender & Rothkegel 2000, 81.) Sophianin (1998) mukaan subitisaatio ei ole vielä täysin ymmärretty mekanismi, mutta sen ajatellaan tarjoavan informaatiota hyvin pienistä lukumääristä nopeammin kuin laskeminen. Pienen joukon yksiköiden visuaalinen hahmottaminen tapahtuu yleensä yhtäaikaaisesti (simultaanisesti) eikä perättäin järjestyksessä edeten (sekventiaalisesti). (Sophian 1998, 29.) Kun joukon yksiköiden määrä kasvaa yli neljän, lukumäärän määrittämiseen vaaditaan yleensä jo laskemista. Tällöin lukumäärän määrittämisen prosessi hidastuu ja tulee alttiimmaksi virheille (Wender & Rothkegel 2000, 82; Piazza, Mechelli, Butterworth & Price 2002, 435).

Subitisaation käsitteeseen sisältyvät niin puhtaasti havaintopohjainen esikielellinen lukumäärien havaitseminen (esim. vauvoilla) kuin myös tavoitteellisempi visuaalisiin havaintoihin perustuva lukumäärien määrittäminen (Hannula 2005, 13; Benoit, Lehalle & Jouen, 2004, 305). Tällaisen laskematta tapahtuvan lukumäärän määrittämisen on kuitenkin todettu perustuvan pohjimmiltaan samaan kykyyn vauvoista aikuisiin (Starkey & Cooper 1995, 418). Hannula (2005) esittää, että vaikka visuaaliseen havaitsemiseen perustuva lukumäärien tunnistaminen vaikuttaakin hyvin helpolta ja vaivattomalta, se ei ole kokonaan automaattinen (pre-attentional) prosessi. Tarkka lukumäärän määrittäminen luonnollisissa tilanteissa vaatii ensinnäkin huomion kiinnittämistä lukuisuuteen eli siihen, että havaittavana on erillisistä yksiköistä muodostuva joukko, jonka lukumäärä voidaan laskea. Toiseksi joukko on määritettävä koko-

naisuudessaan ennen kuin sen yksiköiden lukumäärä voidaan tarkasti ratkaista. (Hannula 2005, 12.)

Trickin ja Pylyshynin (1994) mukaan lukumäärän määrittäminen subitisaation kautta tapahtuu, kun henkilö oman valintansa kautta tai pyydettyä pyrki määrittämään joidenkin kohteiden lukumäärän ja kun lukumäärä pysyy riittävän pienellä lukualueella. He esittävät, että subitisaatio voidaan nähdä kaksivaiheisena prosessina. Ensimmäinen henkilö tulee tietoiseksi siitä, että hänen näkökentässään on lukumäärältään laskettavissa oleva joukko, mutta lukumäärän tunnistamista ei ole vielä tapahtunut. Vastatämän jälkeen lukumäärä tunnistetaan ja joukon lukumäärä voidaan kertoa lukusanoin. (Trick & Pylyshyn 1994, 88.) Myös Wenderin ja Rothkegelin (2000) tutkimustulokset osoittavat, että lukumäärän määrittäminen subitisaation alueella saavutetaan kahdessa vaiheessa. Ensimmäinen ihminen hahmottaa laskettavat kohteet taustasta kokonaisuutena, ja tämän jälkeen tapahtuu lukumäärän määrittäminen (Wender & Rothkegel 2000, 91.)

Lukualue, jolla subitisaatiota voidaan onnistuneesti hyödyntää, laajenee iän myötä. Starkey ja Cooper (1995, 416-417) ovat tutkimuksensa perusteella esittäneet, että alle 2-vuotiaat kykenevät määrittämään lukumääriä yhdestä kolmeen, 3 ½ -vuotiaat yhdestä neljään ja 4-5-vuotiaat yhdestä viiteen. Yksilöiden välillä on kuitenkin eroja siinä, miten laajalla lukualueella subitisaatio onnistuu. Tämä selittää myös osaltaan sitä, miksi aikuisille tehdyissä tutkimuksissa subitisaation käyttöalue on vaihdellut yhdestä neljään, viiteen tai kuuteen.

Lapset käyttävät subitisaatiota hyväkseen määrittäessään pieniä lukumääriä jo ennen kuin he kykenevät kielen avulla tapahtuvaan lukumäärän määrittämiseen (Starkey & Cooper 1995, 416). Subitisaatiota voidaankin pitää lukusanojen merkityksen oppimisen edellytyksenä. Pienten lukumäärien hahmottaminen ”yhdellä silmäyksellä” mahdollistaa ymmärryksen pienten lukumäärien ja niitä vastaavien lukusanojen yhteydestä. Subitisaation avulla lapsi siis kykenee hahmottamaan, mitä sanat yksi, kaksi, kolme ja neljä tarkoittavat. Lapsen yhdistäessä nämä kokemukset luettelemalla laskemiseen, hän ymmärtää, että jokainen lukusana sarjassa tuottaa kasvavaan joukkoon yhden lisää. (Aunio ym. 2004, 202; Benoit ym. 2004, 304.) Vaikka lapsi oppiikin

hyödyntämään luettelemalla laskemista lukumäärien määrittämiseksi, subitisaatio säilyy kuitenkin pienien lukumäärien määrittämisen keinona. Nämä kaksi erillistä kykyä määrittää lukumääriä toimivat ja kehittyvät toistensa rinnalla. (Starkey & Cooper 1995, 417.)

Vaikka subitisaation ajatellaan olevan keskeinen taito matemaattisten taitojen kehityksessä, sen yhteyttä muiden matemaattisten taitojen kehitykseen on tutkittu hyvin vähän. Hiljattain subitisaation yhteyttä muiden matemaattisten taitojen kehitykseen ovat tutkineet Suomessa Hannula, Räsänen ja Lehtinen (painossa). He selvittivät, missä määrin spontaani huomion kiinnittäminen lukumääriin, subitisaatioon perustuva lukumäärän määrittäminen ja lukumäärien laskeminen ovat yhteydessä toisiinsa 4-5-vuotiailla lapsilla. Tutkimus on ensimmäinen, jonka perusteella näyttäisi siltä, että nämä kolme taitoa ovat yhteydessä toisiinsa. Lapset, joilla oli vahva spontaani taipumus lukumäärien havaitsemiseen, kykenivät määrittämään subitisaation avulla suurempia lukumääriä, ja heillä oli paremmat lukujonotaidot 5-vuotiaana. Tämän tutkimuksen perusteella ei kuitenkaan voida tehdä tulkintoja taitojen suhteesta toisiinsa tarkemmin ja tutkijat huomauttavat, että vaikka nämä tulokset ovatkin lupaavia, tulisi niihin suhtautua varauksella. (Hannula ym. painossa.)

3.4 Aritmeettisten perustaitojen kehitys

Kuten edellä on kuvattu, aritmeettisten taitojen perusta kehittyy jo hyvin varhain. Butterworth (2005, 15) on laatinut yhteenvetotaulukon (ks. taulukko 1), johon on koottu aritmeettiseen kehitykseen liittyviä keskeisiä virstanpylväitä viitaten kyseisestä taidosta havaintoja tehneisiin tutkijoihin. Vaikka taulukossa on ilmaistu keskimääräinen ikä taidon ilmenemiselle, Butterworth korostaa, että näiden taitojen ilmenemiselle ei ole olemassa ikänormeja, sillä lasten välillä on hyvinkin suuria yksilöllisiä eroja siinä, milloin he saavuttavat kyseiset taidot. Tutkimuksissa keskiössä ei ole ollut niinkään tutkittavien ikä vaan kehitykseen ja taidon omaksumiseen liittyvä vaihe. (Butterworth 2005, 15.)

Taulukko 1. Varhaisen aritmeettisen kehityksen virstanpylväät (Butterworth 2005, 12)

Ikä ^a	Virstanpylväs (suluissa kyseistä taitoa selvitelty tutkimus)
0;0	Osaa tehdä erotteluja pienten lukumäärien perusteella (Antell & Keating, 1983)
0;4	Osaa lisätä ja vähentää yhden (Wynn 1992)
0;11	Erottaa lukumäärältään kasvavan ja vähenevän sarjan (Brannon, 2002)
2;0	Alkaa oppia luettelemaan lukusanoja loruna (Fuson, 1992); Osaa hyödyntää yksi yhteen -vastaavuuden periaatetta kohteiden jakamisessa (Potter & Levy, 1968)
2;6	Ymmärtää, että lukusanat viittaavat lukumääriin (Wynn, 1990)
3;0	Laskee luetellen pienen lukumäärän sisältäviä joukkoja (Wynn, 1990)
3;6	Osaa lisätä ja vähentää yhden käyttäen esineitä ja lukusanoja (Starkey & Gelman, 1982); Osaa käyttää kardinaalisuuden periaatetta määrittäessään joukon lukumäärän (Gelman & Gallistel, 1978)
4;0	Osaa käyttää sormia apuna lukumäärien lisäämisessä joukkoon (Fuson & Kwon, 1992)
5;0	Osaa yhteenlaskutehtävässä lisätä pieniä lukumääriä, mutta ei osaa kertoa yhteenlaskun tulosta (Starkey & Gelman, 1982)
5;6	Ymmärtää yhteenlaskun tuloksen olevan sama riippumatta järjestyksestä, jossa joukot lasketaan yhteen ($5 + 2$ vs. $2 + 5$), ja osaa aloittaa laskemisen lukumäärältään isommasta joukosta (Carpenter & Moser, 1982) Osaa luetella virheittä lukuja 40 asti (Fuson, 1988)
6;0	Hallitsee lukumäärän säilyvyyden (Piaget, 1952)
6;6	Ymmärtää, että yhteen- ja vähennyslaskun välillä on komplementaarinen, toisiaan täydentävä yhteys (Bryant et al, 1999) Osaa luetella virheittä lukuja 80 asti (Fuson, 1988)
7;0	Kykenee muistinvaraisesti tuottamaan aritmeettisiä faktoja

^a Ikä on ilmoitettu vuosina ja kuukausina, esim. 3;6 viittaa ikään 3 vuotta ja 6 kuukautta

Aritmeettisten taitojen kehityksessä ei ole kyse yhdestä yksittäisestä prosessista vaan useasta rinnakkaisesta prosessista, joihin puolestaan sisältyy erilaisten osataitojen

kehittymistä. Aritmeettiset perustaidot koostuvat monista tekijöistä, joihin kuuluvat esimerkiksi perustietämys lukumääristä ja niiden suhteista, matemaattisten käsitteiden ymmärtäminen, kyky noudattaa matemaattisten operaatioiden suoritusperiaatteita ja aritmetiikkaa koskevien faktatietojen muistaminen (esim. yhteenlaskua $5+5$ ei tarvitse laskea, vaan vastaus voidaan hakea nopeasti muistista). Taidot yhdessä muodostavat toisiinsa kietoutuvan kokonaisuuden, jossa on myös hierarkkisuutta siten, että tietyt varhemmin omaksuttavat taidot luovat pohjan laadullisesti edistyneemmälle taitojen käytölle. (Dowker 1998, 276-278; Kinnunen ym. 1994, 61.) Esimerkiksi lukujen luettelemisen oppiminen ja lukujonotaitojen kehittyminen ovat laskutaidon kehittymisen keskeisiä edellytyksiä.

Lukusanat. Lukusanojen oppimisessa avainasemassa on kielellisten taitojen kehitys yhdessä primaarien eli ihmisille luontaisten matemaattisten taitojen kanssa. Lukusanojen luettelu on usein ensin vanhempien tai toisten lasten toiminnan matkimista, ja sen keskeisenä edellytyksenä onkin se, että lapsi kykenee kuuntelemaan ja erittelemään puhetta. Lapsi luettelee lukuja ensin hyvin lorumaisesti enemmänkin muistiin kuin numeerisiin ominaisuuksiin liittyvänä toimintana. Lukusanojen luetteleminen loruna antaa lapselle kuitenkin tietoa siitä, että lukusanat noudattavat tiettyä järjestystä. Vähän yli kaksivuotiaana lapset näyttävät ymmärtävän, että lukusanat eroavat jollakin tavalla muista kuvailevista sanoista ja että ne viittaavat lukumäärään. Kuitenkin vasta myöhemmin lapset oppivat yhdistämään lukusanat oikeisiin lukumääriin ja näin ollen ymmärtävät laskemisen matemaattisen merkityksen. (Aunio ym. 2004, 202; Vainionpää ym. 2003, 295; Räsänen 1999, 341; Sophian 1998, 28.)

Lukujonotaidot. Aritmeettisten perustaitojen kehittämisessä erittäin keskeistä on lukujonotaitojen kehittyminen. Sujuvan peruslaskutaidon oppimisen edellytyksenä ovat ymmärrys siitä, että lukujonoa voidaan katkoa ja siihen voidaan liittää uusia palasia, kyky aloittaa lukujen luettelu mistä tahansa lukujonon kohdasta sekä kyky liikkua lukujonossa eteen- ja taaksepäin eripituisia askelia käyttäen. (Aunio ym. 2004, 203; Räsänen 1999, 347.) Kokemusten kautta lapset oppivat, että lukuja voidaan käyttää lukumäärien vertailuun. Aluksi joukkojen vertaileminen on kuitenkin vaikeaa luettelun laskemalla saatujen lukusanojen perusteella, ja lapsi tukeutuukin helposti välittömään havaintoon, jonka pohjalta hän arvioi, kummassa ryhmässä näyttäisi olevan

enemmän yksiköitä (Hartikainen ym. 2001, 87). Jotta vertailu onnistuisi ilman tukeutumista konkreettisiin esineisiin, on lasten tiedettävä miten luvut liittyvät toisiinsa lukujonossa ja että kahdesta lukujonon luvusta jälkimmäinen edustaa suurempaa lukumäärää. Jos lapsen tehtävänä on esimerkiksi vertailla kahta joukkoa, joista toisessa on seitsemän esinettä ja toisessa viisi, osaa hän päätellä, että seitsemän on suurempi koska se tulee lukujonossa viitosen jälkeen. (Thompson 1997, 130.)

Luettelemalla laskeminen. Luettelemalla laskeminen on yksi keskeisimmistä osataidoista matemaattisten taitojen kehityksessä. Noin kolmen ja puolen vuoden iässä lasten matemaattisessa kehityksessä on todettu tapahtuvan merkittävä käsitteellinen muutos ja kehityksellinen askel. Silloin lapsi alkaa käyttää luettelemalla laskemista apunaan osoittaessaan joukon yksiköiden lukumäärää. Tämän edellytyksenä on, että lapsi osaa asettaa lukusanat laskettavien esineiden kanssa yksi yhteen - vastaavuuteen, osaa luetella lukusanat oikeassa järjestyksessä ja ymmärtää, että laskettaessa viimeisenä tuotettu lukusana pitää sisällään kaikki laskettavat yksiköt eli on koko joukon lukumäärä. (Hartikainen ym. 2001, 84-85; Aunio ym. 2004, 203.)

Luettelemalla laskemisen oppimisen ja kardinaalisuuden ymmärtämisen välillä on todettu olevan tärkeä yhteys. Tutkijoiden keskuudessa on kuitenkin painotuseroja sen suhteen, millaisena kardinaalisuuden ja luettelemalla laskemisen välinen suhde nähdään. (ks. tarkemmin Bermejo, Morales ja deOsuna 2004, 382-383.) Bermejo ym. (2004) ehdottivat tutkimustulostensa perusteella, että varhaisilla kyvyillä määrittää pieniä lukumääriä laskematta (subitisaatio) on keskeinen merkitys kardinaalisuuden ymmärtämisessä. Heidän mukaansa lapset oppivat ymmärtämään kardinaalisuuden tämän varhaisen taidon kautta ja vasta myöhemmin kykenevät ratkaisemaan joukon lukumäärän (kardinaalisuuden) luettelemalla laskemisen avulla tai arvioimalla. (Bermejo ym. 2004, 395.)

Luettelemalla laskemisen hyödyntäminen lukumäärän määrittämiseksi on monimutkainen taito, joka vaatii harjoittelua kehittyäkseen. Butterworth (2005) huomauttaa, että vaikka luettelemalla laskeminen voi aikuisista vaikuttaa helpolta, vie sen oppiminen lapsilta kuitenkin yhteensä noin neljä vuotta alkaen noin kahden vuoden iästä jatkuen aina noin kuuteen ikävuoteen saakka. Kuusivuotiaat lapset yleensä ymmärtä-

vät miten luettelemalla laskeminen tapahtuu ja periaatteessa osaavat hyödyntää sitä lähes aikuisille tyypillisellä tavalla. (Butterworth 2005, 7.)

Yhteen- ja vähennyslaskutaito. Lapset oppivat yhdistämään luettelemalla laskemisen yhteen- ja vähennyslaskuun käytännön kokemusten kautta. Alhaisella lukualueella (1-3) ja konkreettisten esineiden avulla jo kolmevuotiaat lapset osaavat ratkaista yhteen- ja vähennyslaskuja. Vaikeuksia syntyy kuitenkin, jos lukualuetta laajennetaan tai jos siirrytään konkreettisista esineistä kuviteltuihin esineisiin tai sanallisiin tehtäviin. Noin neljän-viiden vuoden iässä lapset alkavat käyttää luettelemalla laskemista tehtävien ratkaisemisessa. Tämä kehitys mahdollistaa sekä suurempia lukumääriä koskevien että sanallisesti esitettyjen ongelmien ratkaisemisen. Viiden-kuuden vuoden iässä lapset osaavat tyypillisesti ratkaista yksinkertaisia yhteenlaskuja, jotka on esitetty sanallisessa muodossa. (Vainionpää ym. 2003, 296.) Luetteluun perustuva tapa suorittaa laskutoimituksia on suhteellisen hidas sekä herkkä virheille, minkä vuoksi lukujonotaitojen kehittyminen on tärkeää. Anghileri (2000) esittää, että kun lapset yhdistävät ajatuksen ”yksi enemmän” lukujonossa seuraavana tulevaan lukuun, tai ajatuksen ”yksi vähemmän” lukujonossa aiempaan olevaan lukuun, rakentuu vähitellen ymmärrys siitä, miten lukujonoa voi hyödyntää yhteen- ja vähennyslaskussa. Yhden lisäämisen tai vähentämisen jälkeen seuraa luonnollisesti kahden lisääminen tai vähentäminen eli toisin sanoen liikkuminen kaksi eteenpäin tai taaksepäin lukujonossa. (Anghileri 2000, 47-49.) Lukujonotaidot kehittyvät siis vähitellen niin, että ne tukevat saumattomasti yhteen- ja vähennyslaskutaitoja.

Anghileri (2000) on tarkastellut Carpenterin ja Moserin (1983) kuvaamaa mallia siitä, miten luettelemalla laskemisen käyttäminen yhteenlasku- ja vähennyslaskustrategiana kehittyy. Yhteenlaskun kohdalla kehityksestä on erotettu kolme tasoa, joista ensimmäisellä lapsi tekee ensin yhteenlaskettavat konkreettisesti näkyviksi esimerkiksi hyödyntäen sormiaan. Esimerkiksi yhteenlaskun $3+5$ kohdalla lapsi laskee ensin ”yksi, kaksi, kolme” ja sitten ”yksi, kaksi, kolme, neljä, viisi”. Tämän jälkeen lapsi laskee luetellen vielä kaikki sormet aloittaen ykkösestä. Toisella tasolla lapsella on ymmärrys siitä, että ensimmäistä yhteenlaskettavaa ei ole välttämätöntä tehdä luetellen näkyväksi. Lapsi aloittaa siis laskemisen suoraan kolmosesta eteenpäin käyttäen sormia apunaan ”neljä, viisi, kuusi, seitsemän, kahdeksan”. Kolmannella

tasolla lapsi huomaa, että on tehokkaampaa ja vähemmän virheeltä aloittaa laskeminen suuremmasta yhteenlaskettavasta. Kolmas taso edellyttää sitä, että lapsi ymmärtää yhteenlaskun tuloksen olevan sama vaikka yhteenlaskettavat lasketaan eri järjestyksessä. Mallissa esitetyt tasot eivät ole käytännössä tarkkarajaisia, sillä lapsi saattaa käyttää eri strategioita tehtäväkohtaisesti. Vähennyslaskun kohdalla kehitys etenee Carpenterin ja Moserin (1983) mallin mukaan samaan tapaan erilaisten vaiheiden kautta kuin yhteenlaskussakin. Aluksi lapsi tarvitsee konkreettista tukea ja useita vaiheita päätyäkseen oikeaan tulokseen, mutta vähitellen kokemusten myötä lapsen taidot kehittyvät ja hän osaa lopulta hyödyntää muistista palautettavia aritmeettisia faktoja laskiessaan. (Anghileri 2000, 50-54.)

4 MATEMATIIKAN OPPIMISEEN VAIKUTTAVIA TEKIJÖITÄ

4.1 Yksilölliset erot lasten matemaattisissa valmiuksissa ja kokemuksissa

Ennen kouluikää kehittyneillä matemaattisilla taidoilla on keskeinen merkitys kun lapsi aloittaa koulunkäynnin. Aunola ym. (2004) ovat seurantatutkimuksessaan osoittaneet lasten matemaattisten taitojen kehityksen etenevän kumulatiivisesti siten, että lasten väliset yksilölliset erot matemaattisissa tehtävissä suoriutumisessa kasvoivat suuremmiksi lasten edetessä esiopetuksesta toiselle luokalle. Matemaattisten taitojen kehittyminen oli nopeampaa lapsilla, joilla jo esiopetukseen tullessaan oli parempi matemaattisen osaamisen taso, kuin niillä lapsilla, joiden lähtötaso oli heikompi. Tärkeä havainto oli myös se, että lasten väliset erot matemaattisessa suoriutumisessa alkoivat kasvaa jo esiopetus vuoden aikana ennen kouluopetuksen alkamista. (Aunola ym. 2004.) Mazzocco ja Thompson (2005, 152-153) ovat puolestaan osoittaneet seurantatutkimuksen kautta, että jo ennen kouluikää on mahdollista tunnistaa lapsista ne, jotka todennäköisesti kokevat oppimisvaikeuksia koulumatematiikassa. Näin ollen varhainen tunnistaminen ja tukitoimien aloittaminen jo esiopetuksen aikana nousevat tärkeään asemaan.

Lapsista, joilla on vaikeuksia matematiikan oppimisessa, voidaan erottaa kaksi ryhmää. Osalla lapsista kyseessä on yleisempi hitaus tai viive kehityksessä ja oppimisessa, ja nämä lapset saavuttavatkin ajan kuluessa kognitiivisen kehityksen myötä sekä harjoituksen ja erityisopetuksen avulla samat perustaidot kuin muut ikäisensä. Näiden lasten vaikeuksia matematiikassa kuvastaa hitaus sekä omaa ikätasoaan nuoremille tyypillisten strategioiden käyttäminen. Tällaisten lasten kohdalla on tärkeää tarjota lapsille tarpeeksi aikaa ja harjoitusta. Toisen ryhmän muodostavat lapset, joiden kohdalla voidaan puhua laskemiskyvyn häiriöstä (dyskalkulia). Näillä lapsilla ilmenee kehittymätöntä strategioiden käyttöä, jossa ei tapahdu harjoittelusta huolimatta merkittävää kehitystä, sekä runsaasti virheitä matemaattisissa suorituksissa, erityisesti kehittyneempiä strategioita käytettäessä. (Ahonen & Räsänen 1995, 233-234.) Matematiikan oppimisen vaikeuksien diagnosoinnissa tulisikin huomioida ri-

mä kaksi erilaista ryhmää, jotta taitojen kehityksen tukemiseksi voitaisiin suunnitella tarkoituksenmukaisia tukitoimia (Mazzocco & Thompson 2005, 153).

Viime aikoina on tutkittu innokkaasti sitä, missä määrin lapsilla on eroja sen suhteen, kiinnostavatko he spontaanisti huomiota lukumääriin, toisin sanoen tarkastelevat lukumääriä sisältäviä tehtäviä matemaattisesti. Hannulan (2005) tutkimustulokset osoittavat, että 3-7-vuotiailla lapsilla on merkittäviä yksilöllisiä eroja spontaanin huomion kiinnittämisessä lukumääriin, ja että sillä on vaikutusta matemaattisten taitojen kehitykseen. Osa lapsista tarkastelee spontaanisti esineiden, tapahtumien ja asioiden lukumääriä, ja saa näin kokemuksia lukumääristä ja niiden käyttämisestä. Osa lapsista ei kiinnitä huomiota lukumääriin ilman ohjausta, eikä heille näin ollen kerry kokemuksia ympäristössä esiintyvistä lukumääristä. Siten erot lukumääriin liittyvissä taidoissa lasten välillä alkavat kasvaa jo varhaislapsuudessa. (Hannula 2005, 39-41.) Tämä puolestaan aiheuttaa sen, että koulutulokkaiden matemaattisissa taidoissa ja ajattelussa voi olla suuriakin eroja. Lapsen oman kiinnostuksen lisäksi erojen syntyymiseen vaikuttaa voimakkaasti myös se, millaisia matemaattisia käsitteitä ja toimintoja lapsi on kohdannut ja käsitellyt omassa toimintaympäristössään (Kinnunen & Vauras 1998, 271).

Yhteen- ja vähennyslaskussa ilmenevien ongelmien taustalla on usein lukukäsitteen ja lukujonotaitojen hallinnan puutteita. Lapsi, jolle yhteen- ja vähennyslasku on vaikeaa, saattaa löytää kardinaaliluvun eli joukon lukumäärän ainoastaan lukujen luettelamisen kautta. Peruslaskutaito edellyttää kuitenkin joustavaa lukujonon käyttöä, jossa lapsi osaa katkoa lukujonoa, liittyy siihen uusia palasia ja aloittaa laskemisen mistä tahansa lukujonon kohdasta eteen- tai taaksepäin. (Räsänen 1999, 347.) Mitä kehittyneempi kuva lapselle on muodostunut luvuista ja lukujonosta, sitä vähemmän hänen tarvitsee tukeutua lukuja ja lukumääriä kuvaaviin ulkoisiin symboleihin kuten sormiin, palikoihin tai kirjoitettuihin lukuihin (Aunio ym. 2004, 205). Anghileri (2000) toteaaakin, että lapsia tulisi jo varhaisessa vaiheessa rohkaista näkemään erilaisia tapoja käyttää lukuja ja yhteyksiä, joita lukujen käytön takana on. Esimerkiksi luku 6 pitäisi yhdistyä muuhunkin kuin vain kuuden yksikön lukumäärään. Lasten tulisi nähdä, että se on luku, joka tulee lukujonossa luvun 5 jälkeen ja ennen lukua 7 ja että kuusi on sama kuin 'kaksi ja kaksi' tai 'neljä ja kaksi'. Kun lasten

kokemukset yksittäisistä luvuista kehittyvät, he tulevat paremmin tietoisiksi niiden välisistä suhteista. (Anghileri 2000,3.) Taito hajottaa ja koota lukuja on erityisen tärkeä. Usein tämän taidon heikkoon hallintaan havahdutaan vasta, kun tätä taitoa pitäisi pystyä hyödyntämään kymmenjärjestelmän soveltamisessa esimerkiksi kymmenylityksessä tai kymmenalituksessa eli vähennyslaskussa. Huomio saattaa tällaisessa tilanteessa kiinnittyä pelkästään kymmenylitykseen, vaikka ongelmien syyt ulottuvatkin usein perustavammin lapsen lukukäsitteen ja lukujonon hallintaan. (Räsänen 1999, 348.)

Koulumatematiikassa esitetään uutta sanastoa, uusia operaatioita sekä usein vähän suoria yhteyksiä lapsen olemassa olevaan tietämykseen, mikä saattaa aiheuttaa ongelmia joillekin lapsille. Arkipäivän käytössä matematiikka on yleensä sitoutunut konkreettisiin esineisiin, kohteisiin tai tilanteisiin, mutta koulussa opiskelu saattaa tapahtua usein irrallaan lasten kokemusmaailmasta. Jos koulussa rakennettavalla uudella tietämyksellä on hyvin vähän liittymäkohtia lasten jo olemassa olevaan tietämykseen, uuden oppiminen ja ymmärryksen saavuttaminen on vaikeaa. (Aubrey 1997, 27.) Ginsburg ja Seo (1999) huomauttavat, että lasten ennen kouluikää muodostamat matemaattiset käsitykset ovat tärkeitä, sillä arkisella tasolla ne vastaavat monesti koulumatematiikan sisältöjä. Lasten arkinen ja käytännön kautta oivallettu matemaattinen tietämys tarjoaakin hyvän lähtökohdan opetukselle (Ginsburg & Seo 1999, 113).

Varhaisten matemaattisten taitojen arviointi. Varhaisten matemaattisten taitojen arviointimenetelmiä, joiden avulla on mahdollista arvioida lasten taitotasoa ja tunnistaa mahdollisia ongelmia, on viime aikoina kehitelty Suomessakin. Lähiaikoina julkaistaan MAVALKA eli MATematiikan VALmiuksien KARtoitus, jonka Lampinen, Ikäheimo ja Dräger ovat kehittäneet ensisijaisesti esiopetusikäisten lasten matemaattisten taitojen kartoittamiseen. Aiemmin Ikäheimolta on ilmestynyt MAKEKO E/1 eli Matematiikan keskeisten käsitteiden diagnoosi esiopetuksen alussa ja lopussa sekä 1.luokan alussa (Ikäheimo 2002). Hiljattain Suomessa on julkaistu myös Lukukäsitteesti (Van Luit, Van de Rijt & Aunio 2005), jonka tavoitteena on tunnistaa lapset (4 vuotta 7 kuukautta – 7 vuotta 6 kuukautta), joilla on hitautta tai ongelmia lukukäsitteen kehityksessä. Räsänen (2005) on puolestaan kehittänyt 7-9-vuotiaille tarkoitettun

normitetun testin (Banuca) lukukäsitteen ja laskutaitojen oppimisvaikeuksien seulontaan. Jo pidempään on ollut käytössä Liikasen (1995) koulutulokkaan lähtötasoa arvioiva testistö, johon sisältyy koulutulokkaan matemaattisten käsitteiden hallintaa arvioiva Lukukäsite-testi.

4.2 Varhaiset matemaattiset käsitteet

Matematiikan oppiminen edellyttää myös käsitteiden ymmärtämistä. Käsitteiden oppimisessa ja ymmärtämisessä keskeiseen rooliin nousee luonnollisesti kieli, sillä sen avulla määritellään matemaattisia käsitteitä ja ilmaistaan matematiikkaan liittyvää ajattelua. Vaidyan (2004) mukaan matematiikka voidaan nähdä omana kielenään. Monet matematiikassa tarvittavista käsitteistä ovat sellaisia, joita ei juurikaan käytetä arkisissa tilanteissa. Matemaattinen sanasto saattaa myös aiheuttaa sekaannuksia, sillä monesti yhtä ilmiötä kuvaamaan on olemassa useita sanoja (esimerkiksi yhteenlasku; lisätä, plussata, yhdistää, ynnätä). Koska matematiikan käsitteellinen puoli on niin vahvasti sidoksissa kieleen, vaikeudet matematiikassa saattavat olla useasti kieleen liittyviä, minkä vuoksi huomion kiinnittäminen ”matematiikan kielen” oppimiseen on tärkeää. (Vaidya 2004, 719.)

Luku on eräs keskeinen matematiikan käsite, sillä sen ymmärtäminen on perustana useiden matematiikan käsitteiden oppimiselle. Konkreettiset mallit ja mahdollisuudet toimia itse lukujen parissa auttavat lasta rakentamaan luvun käsitettä. Vähitellen ymmärrys käsitteestä vahvistuu, eikä lapsi enää tarvitse konkretiaa tuekseen, vaan alkaa käsitellä lukuja mielessään. Konkretian ja pienten lukujen kautta rakennetun luvun käsitteen pohjalta rakentuvat myös käsitykset suurista luvuista ja lukujen merkitsemiseen käytettävästä paikkajärjestelmästä sekä myöhemmässä vaiheessa laskutoimitusten tulosten arviointi ja joustavat tavat ratkoa lukuja sisältäviä ongelmia. (Ikäheimo & Risku 2004, 234.)

Vertailuun sekä avaruudelliseen ja ajalliseen hahmottamiseen liittyvät käsitteet kuten enemmän, vähemmän, pienempi, keskimäinen, ennen, takana ja myöhemmin ovat

keskeisiä varhaisessa matematiikan oppimisessa. Tällaisten käsitteiden oppiminen on haastavaa siinä suhteessa, ettei niille ole olemassa konkreettisia tarkasteltavissa olevia kohteita, vaan ne edellyttävät useamman kohteen yhtäaikaista mielessä pitämistä. (Vainionpää ym. 2003, 296.) Matemaattisten käsitteiden abstraktisuuden vuoksi niitä onkin vaikea ymmärtää sellaisenaan. Käsitteiden oppimista voidaan tukea tarjoamalla lapsille monipuolisia kokemuksia käsitteen eri ilmenemismuodoista. Esiopetusikäisten kohdalla käsitteiden opettelun tulisi kytkeytyä välittömästi havaittaviin, konkreettisiin esineisiin, tilanteisiin tai tapahtumiin, jolloin lapsi saa käsityksen siitä, miten käsitettä voi käytännössä hyödyntää. Konkreettisuus yhdistää lapsen omia kokemuksia ja ajattelua matematiikan abstraktiin järjestelmään. (Ikäheimo & Risku 2004, 222; Hartikainen ym. 2001, 77-79.) Boulton-Lewis (1998) on kuvannut, että matematiikan opettamisessa matemaattisen ilmiön konkreetti esimerkki on tietolähde ja suullisesti tai kirjoitettujen symbolien avulla ilmaistu käsite on oppimisen kohde. Näin lapsen olisi tärkeää kyetä hyödyntämään konkreettista esimerkkiä rakentamaan mielikuvaa käsitteestä. (Boulton-Lewis 1998, 219.) Uusien käsitteiden oppimisessa ja ymmärtämisessä myös aikaisemmillä tiedoilla ja käsityksillä on tärkeä merkitys. Uuden käsitteen ymmärtäminen edellyttää sitä, että se tulkitaan aikaisemmin rakentuneiden tietojen ja käsitysten avulla. (Yrjönsuuri 2004, 112-113.)

Käsitteiden muodostuksen ja niiden hallinnan tukeminen on tärkeää, jotta lapsen ymmärrys käsitteistä vahvistuu, ja hän etenee matemaattisten taitojen oppimisessa. (Hartikainen ym. 2001, 78). Ratkaistakseen yksinkertaisiakin matemaattisia ongelmia lasten täytyy ymmärtää lukujen suhteisiin liittyviä käsitteitä, kuten enemmän tai vähemmän, ja kyetä hyödyntämään käsitteitä aritmeettisissa operaatioissa (Aubrey 1997, 21). Toisin sanoen lapset tarvitsevat sekä matemaattisiin käsitteisiin että toimintoihin liittyvää tietämystä kyetäkseen ratkaisemaan matemaattisia ongelmia. Muun muassa Rittle-Johnson ja Siegler (1998) ovat pohtineet käsitteellisen ymmärryksen ja menetelmällisen tietämyksen kehityksen suhdetta. Heidän mukaansa nämä kaksi kehittyvät rinnakkain: joissakin tapauksissa käsitteellinen ymmärrys edeltää menetelmien osaamista, joissakin tapauksissa tilanne on päinvastoin. He tuovat esiin myös mielenkiintoisen kysymyksen koskien esiopetusikäisten ja koululaisten välillä olevaa eroa näiden kahden tietämyksen suhteessa. Esiopetusiässä menetelmällistä osaamista ohjaava käsitteellinen ymmärrys on usein hyvin kehittynyt tämän ikävai-

heen tehtävien ratkaisemiseksi. Koululaisilla sen sijaan on todettu olevan suhteessa heikompi käsitteellinen ymmärrys, mikä saattaa johtaa virheellisiin ja epäloogisiin ratkaisuyrityksiin. Ratkaisu tähän lienee siinä, että pienet lapset ovat saaneet laajasti kokemuksia niin menetelmistä kuin käsitteistäkin, joita he ovat oppimassa, kun taas koululaiset saavat vähemmän konkreettisia kokemuksia opiskelemistaan menetelmistä ja käsitteistä. (Rittle-Johnson & Siegler 1998, 75, 109.) Tämä voi johtaa esimerkiksi siihen, että mekaaninen laskeminen onnistuu hyvin, mutta käsitteellinen ymmärtäminen ja kyky soveltaa opittuja taitoja uudenvälisessä tilanteessa tai perustella ratkaisuja ovat puutteellisia.

5 TUTKIMUSONGELMAT

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää esiopetusikäisten lasten lukumäärään liittyvien matematiikan taitojen kehitystä esiopetusvuoden aikana.

Tarkempina tutkimusongelmina olivat seuraavat:

- 1) Miten lukumäärän hallintaan liittyvät taidot kehittyvät esiopetusvuoden aikana?
- 2) Missä määrin lasten lukumäärätaidot konkreettisen toiminnan tukemissa tehtävissä ovat yhteydessä lukumäärärien määrittämiseen tietokonetehtävässä?
- 3) Onko lukumäärän hallintaan liittyvien taitojen ja käsitteiden ymmärtämisen välillä yhteyttä?

6 MENETELMÄ

6.1 Tutkittavat

Tutkimusaineisto on osa Alkuportaatt -tutkimuksen (*Lapset, vanhemmat ja opettajat koulutien alkupolulla*) pilottivaihetta. Alkuportaatt -tutkimus sisältyy osahankkeena Jyväskylän yliopistossa vuoden 2006 alussa aloittaneeseen Suomen Akatemian Oppimisen ja motivaation huippututkimusyksikköön. Huippututkimusyksikköä johtavat psykologian professorit Jari-Erik Nurmi ja Heikki Lyytinen ja siinä on mukana tutkijoita useilta paikkakunnilta (Jyväskylä, Turku, Joensuu) sekä eri laitoksilta (mm. opettajankoulutuslaitos, varhaiskasvatuksen laitos, erityispedagogiikan laitos ja psykologian laitos). Alkuportaatt -tutkimuksessa selvitetään pitkätaimiseurannan keinoin lapsen oppimista ja motivaatiota esi- ja alkuopetusvuosien aikana erityisesti siltä kannalta, missä määrin vanhempien ja opettajien uskomukset, käytännöt ja keskinäinen yhteistyö ja luottamus ovat yhteydessä lasten kehitykseen ja tukevat kehitystä silloin, kun lapsella on oppimisen riskejä. Tutkimuksessa tarkastellaan muun muassa lasten taitojen ja motivaation kehitystä, opettajien odotuksia ja uskomuksia lasten oppimisesta, heidän opetuskäytänteitään ja -tavoitteitaan sekä yhteistyötä vanhempien ja toisten opettajien kanssa sekä lisäksi vanhempien odotuksia ja uskomuksia lasten oppimisesta, vanhempien kasvatuskäytänteitä ja odotuksia ja kokemuksia yhteistyöstä päiväkodin ja koulun välillä. Alkuportaatt -tutkimuksen esiopetusvuotta koskeva pilottiaineisto kerättiin lukuvuonna 2005-2006, ja laajempi aineistokeruu käynnistyy syksyllä 2006 jatkuen vuoteen 2011.

Tämän tutkimuksen aineisto kerättiin osana Alkuportaatt -tutkimuksen esiopetusvuoden pilottitutkimusta. Menetelmien toimivuutta kokeiltiin Keski-Suomen alueella sijaitsevassa kunnassa, josta saatiin hallinnollinen lupa tutkimuksen toteutukseen sekä koulu- että sivistystoimen alaisissa esiopetusryhmissä. Tutkimusaineisto edustaa hyvin pilottiin valitun kunnan esiopetuksen ryhmiä, sillä tutkimukseen lähti kyseisen kunnan 19 opetusryhmästä 13 ryhmää. Tutkimukseen osallistui yhteensä 139 lasta, jotka osallistuivat esiopetukseen joko päivähoidon tai koulun esiopetusryhmässä ja

olivat iältään keskimäärin 6-vuotiaita. Osa esiopetusta saavista lapsista oli sijoitettu päiväkotiin, jossa oli myös nuorempia lapsia. Yksi päiväkodeista oli yksityinen vuoroa tarjoava päiväkotikoti.

Aineiston keruussa oli kaksi vaihetta. Lasten taitoja arvioitiin esikouluvuoden alussa pääosin lokakuun 2005 aikana (alkumittaus). Esikouluvuoden lopussa pääosin huhtikuussa 2006 lasten taitoja arvioitiin uudelleen (loppumittaus). Lasten taitoja arvioitiin opettajien toteuttamien ryhmätestein, sekä yksilötestein, jotka toteuttivat pro gradu- ja kandidaatintutkielmavaiheen luokanopettaja- ja psykologian opiskelijat. Tämän tutkielman aineistona käytetään pääosin yksilötestien antamaa tietoa sekä yhtä ryhmätesteistä.

6.2 Tutkimusmenetelmät

Tutkimuksen tiedonhankinnassa käytettiin testejä. Testi on systemaattinen menettelytapa käyttäytymisen havainnointiin ja kuvailuun numeeristen skaalojen tai luokitusten avulla (Cronbach 1990, 32). Testejä on olemassa hyvin monenlaisia, ja niitä voidaan käyttää erilaisiin tarkoituksiin. Ensisijainen syy, miksi erilaisia testejä käytetään kouluissa ja muissa kasvatukseen ja opetukseen liittyvissä tilanteissa, on sen arviointi, missä määrin oppilaat ovat saavuttaneet tiettyjä tietoja ja taitoja sekä ymmärrystä ja kykyä soveltaa oppimista asioita (Aiken 1994, 334). Toinen keskeinen tärkeä kasvatuksen ja opetuksen alaan liittyvä testien käyttötarkoitus on kehitykseen ja oppimiseen liittyvien vaikeuksien diagnosoiminen. Testien avulla on mahdollista tunnistaa lapset, jotka tarvitsevat erityistä tukea kehityksessä ja oppimisessa.

Hautamäen ja Kuuselan (2004) mukaan testi voidaan määrittellä tehtävien sarjaksi, jonka avulla pyritään mahdollisuuksien mukaan toteamaan, ettei henkilöllä ole esimerkiksi oppimisvaikeuksia. Testin eräs tärkeä ominaisuus onkin tarkkuus eli sen on mitattava tarkasti haluttua ominaisuutta tai taitoa. Kasvatuksen ja psykologisen arvioinnin kentällä käytetään usein myös seulontamenetelmiä. Hautamäki ja Kuusela (2004) määrittelevät seulan välineeksi, jonka tarkoituksena on varmistaa, että kaikki

ne henkilöt, joilla on jokin ongelma arvioitavassa asiassa, tunnistetaan. Seulan avulla siis seulotaan yksilölliseen, tarkempaan tutkimukseen, joka toteutetaan esimerkiksi testien avulla. (Hautamäki & Kuusela 2004, 260.)

Testit ja seulat voivat olla kriteeriperustaisia tai normiperustaisia. Kriteeriperustaisessa arvioinnissa on etukäteen olemassa perusteet siitä, miten hyvin joku henkilö täyttää annetut tunnusmerkit. Kriteeriperustaisilla testeillä voidaan tutkia esimerkiksi lukukäsitettä, säilyvyyden käsitteen hallintaa tai jotain muuta tiettyä suoritusta, joka on tarkkaan määritelty etukäteen. Normiperustaiset testit taas ovat välineitä tutkittavan joukon jaotteluun ja osittamiseen. Kaikissa ominaisuuksissa, joissa esiintyy vaihtelua, voidaan havainnot ryhmittää ja esimerkiksi erottaa tutkittujen joukosta paras ja heikoin kymmenes (10%). Tutkittua joukkoa tai yksittäistä lasta voidaan myös verrata esimerkiksi kunnalliseen tai valtakunnalliseen ikä- tai luokkanormiin. (Hautamäki & Kuusela 2004, 257.) Yksittäisen henkilön tietojen ja taitojen arvioinnin lisäksi arviointiprosessin kautta voidaan saada tietoa myös tietyistä ryhmistä kuten esiopetusikäisistä (Aiken 1994, 334).

Tämän tutkielman aineisto koostuu kolmen erilaisen testin antamista tuloksista. Käytetyistä testeistä kaksi oli yksilötestejä ja yksi ryhmätesti. Tässä tutkielmassa käytetyt testit olivat kokeilukäytössä.

6.2.1 Lukumäärätaitojen arviointi

Lasten lukumäärää koskevia taitoja mitattiin MAVALKAn (MAtematiikan VALmiuksien KArtoitus) yhden osa-alueen kokeiluversiolla. MAVALKAn ovat kehittäneet Lampinen, Ikäheimo ja Dräger, ja se sisältää kaikkiaan kolme osa-aluetta, jotka ovat 1. Lukumäärä, lukusana ja numeromerkki, 2. Lukumäärän säilyminen ja 3. Lukujonotaidot. MAVALKA julkaistaan vuoden 2007 alussa.

Tässä tutkimuksessa kokeilukäytössä ollut osa-alue nimettiin Lukumäärätaidotehtäväksi, ja se sisälsi lokakuun tutkimusvaiheessa kaikkiaan 13 osiota (6 tehtäväkokonaisuutta) ja huhtikuun tutkimusvaiheessa kaikkiaan 19 osiota (7 tehtäväkokonaisuutta). Tehtävät esitettiin lapselle suullisesti, joten tehtävät edellyttivät myös

kuullun ymmärtämistä. Lapsi vastasi tehtäviin suullisesti, mutta osassa tehtävistä otettiin huomioon myös toiminnallinen vastaus (esim. ota yhtä monta helmeä kuin kortissa on karkkeja). Testimateriaaleina olivat seuraavanlaiset värilliset kuvakortit: karkkikortti (5 karkkia), pähkinäkortti (4 pähkinää) ja perhoskortti (7 perhosta). Lisäksi materiaaleina oli 20 nappia (alkuperäisessä ohjeessa helmiä), joiden avulla lapset toimivat tehtävässä. Lokakuussa käytetyt osiot ja niiden edustamien taitojen analyysi esitetään taulukossa 2 Huhtikuun tutkimuksessa käytettiin pidempää versiota, johon lisättiin osioita. Osioiden lisäämisellä pyrittiin varmistamaan, että testi olisi erotteleva myös niiden lasten kohdalla, joiden taidot ovat jo pitkällä.

Lukumäärätaidot-tehtävän kuudetta tehtäväkokonaisuutta, jossa käytettiin perhoskorttia, jatkettiin seuraavilla kahdella osiolla:

- 6.e. Ota nappeja kolme enemmän kuin seitsemän ja
- 6.f. Kuinka monta nappia otit (= 10).

Seitsemännessä tehtäväkokonaisuudessa arvioitiin lasten kykyä pitää mielessään ohje, joka sisälsi kaksi perättäistä operaatiota. Seitsemännessä tehtäväkokonaisuudessa käytettiin uudelleen karkkikorttia seuraavissa neljässä osiossa:

- 7.a. Kuinkas monta karkkia tässä olikaan?
- 7.b. Kuuntele oikein tarkkaan. Tee nyt niin, että ota nappeja yksi vähemmän kuin 5 ja ota sitten vielä 3 nappia.
- 7.c. Kuinka monta nappia otit yhteensä? (= 7)
- 7.d. Kuinka monta nappia on enemmän kuin karkkeja? (= 2)

Tutkija kirjasi lapsen vastaukset suoraan pisteityslomakkeelle. Osioista suurin osa (syksyllä 4.a. - 6.d. ja keväällä 4.a. - 7.d.) pisteitettiin kaksiluokkaisesti: 1 = oikea vastaus, 0 = ei vastausta/virheellinen vastaus. Osiot 1 ja 2 pisteitettiin seuraaviin kolmeen luokkaan: 2 = antaa laskematta oikean vastauksen, 1 = antaa oikean vastauksen yksitellen laskemisen jälkeen, 0 = ei vastausta/virheellinen vastaus. Osio 3 pisteitettiin seuraaviin neljään luokkaan: 3 = antaa laskematta oikean vastauksen, 2 = antaa oikean vastauksen yksitellen laskemisen jälkeen, 1 = antaa vastauksen sen jälkeen kun on ensin näyttänyt 10 sormeja, 0 = ei vastausta/virheellinen vastaus.

Lukumäärätaidot-tehtävästä oli käytettävissä osiokohtaiset lapsen pistemäärät sekä summapistemäärät. Syksyllä summapistemäärän maksimi oli 17 (osioista 1 ja 2 kustakin maksimissaan 2 pistettä, osiosta kolme maksimissaan 3 pistettä ja lopuista

10:nestä osiosta jokaisesta maksimissaan 1 piste). Keväällä summapistemäärän maksimi oli 23 (osioista 1 ja 2 kustakin maksimissaan 2 pistettä, osiosta kolme maksimissaan 3 pistettä ja loppuista 16:ista osiosta kustakin maksimissaan 1 piste).

Taulukko 2. Lukumäärätaidot-tehtävän syksyn osiot ja osioiden analyysi niiden edellyttämien osataitojen mukaan

	Varhaiset suhde- käsitteet	Luku- sanat	Yksi yhteen - vastaa- vuus	Luku- määrän laske- minen ^a	Luku- määrien vertailu
1. Kuinka monta sormea sinulla on yhdessä kädessä?		X		X	
2. Näytä 7 sormea.		X		X	
3. Näytä 5 sormea kahdella kädellä. ^b		X		X	
4a. Ota yhtä monta nappia ^c kuin kortissa on karkkeja. (= 5)	X		X		X
4b. Kuinka monta nappia ^c otit? (= 5)		X		X	
5a. Kerro kuinka monta pähkinää näet kortissa? (= 4)		X	X	X	
5b. Ota nappeja ^c yksi enemmän kuin 4.	X	X		X	
5c. Kuinka monta nappia ^c otit? (= 5)		X	X	X	
5d. Kuinka monta nappia ^c on enemmän kuin pähkinöitä? (= 1)	X	X		X	X
6a. Kerro kuinka monta perhosta näet kortissa?		X	X	X	
6b. Ota nappeja ^c yksi vähemmän kuin 7.	X	X		X	
6c. Kuinka monta nappia ^c otit? (= 6)		X	X	X	
6d. Kuinka monta perhosta on enemmän kuin nappeja ^c ? (= 1)	X	X		X	X

^a sisältää lukujonon hallinnan, ^b edellyttää kykyä hajottaa lukuja, ^c alkuperäisessä testissä nappien tilalla helmet

6.2.2 Lukumäärän määrittämistä ja subitisaatiota arvioiva tietokonetehtävä

Lasten kykyä määrittää joukon lukumäärä visuaalisten ärsykkeiden perusteella arviointiin tietokonepohjaisella kokeellisella tehtävällä, joka on kehitetty arvioimaan subitisaatiota. Tehtävä on rakennettu siten, että kullakin lukumäärän tasolla esitetään useampia osioita, ja lasten reaktioaikojen muutoksen perusteella voidaan pyrkiä määrittämään kynnsarvo, jonka jälkeen lapsi on siirtynyt visuaalisesta lukumäärän määrittämisestä yksiköiden laskemiseen. Tietokonetehtävän osioissa lapsi sai tietokoneen ruudulla nähtäväkseen mustien pallojen ryhmän. Ruudulla näkyi kerrallaan yhdestä kahdeksaan kappaletta suuria mustia palloja. Palloja ei esitetty tutuissa muodostelmissa (esim. arpakuutio). Lapselle annettiin seuraava ohje: ”Tässä tehtävässä ruudulle ilmestyy mustia palloja. Laske hiljaa mielessä kuinka monta palloja on. Vasta kun tiedät kuinka monta palloja on, sano niiden määrä ääneen. Laske pallot mahdollisimman nopeasti ja sano heti, kun tiedät, montako niitä on. Harjoitellaan ensin...”. Tietokonetehtävä sisälsi kaiken kaikkiaan 32 osiota, joista neljä oli harjoitusosioita. Harjoitusosioissa lukumäärät yhdestä neljään esitettiin kerran lapselle. Tarvittaessa harjoitusosiot voitiin toistaa. Varsinaisia testiosioita oli siis yhteensä 28, jotka esitettiin lapselle satunnaisessa järjestyksessä. Osiot, joissa lukumäärä oli välillä 1-4, esitettiin kukin 4 kertaa ja osiot, joissa lukumäärä oli välillä 5 – 8 esitettiin kukin 3 kertaa. Tietokonetehtävä suoritettiin E-prime 1.1. -ohjelmistolla, jonka mittatarkkuus on ± 1 ms.

Lapsi antoi vastauksen suullisesti ja tutkija koodasi välittömästi hiiren oikealla tai vasemmalla näppäimellä lapsen vastauksen joko oikeaksi tai vääräksi. Tutkijan koodaama lapsen vastauksen oikeellisuus sekä lapsen reaktioaika (aika millisekunteina ärsykkeen ilmestymisestä ruudulle siihen kun testaaaja hiirtä painamalla koodasi lapsen vastauksen) tallentuivat tietokoneen tiedostoon. Tietokonetehtävästä on siten käytettävissä jokaisesta osiosta vastauksen oikeellisuus sekä reaktioaika. Tässä tutkimuksessa käytettiin seuraavia mittoja: oikeiden vastausten kokonaissumma (maksimi 28) sekä reaktioaikojen mediaanit tasoilta 1-8. Tietokonetehtävän kehittälyssä on ollut keskeisesti mukana Pekka Räsänen, ja hän vastasi osioiden lukumäärää koskevasta asetelmasta, ohjeista ja ohjelman toimivuuden varmistamisesta.

6.2.3 Käsitteiden ymmärtäminen

Matemaattisten käsitteiden ymmärtämisen arviointiin käytettiin Boehmin peruskäsitteistä (Boehm 1986; Heimo 1993), joka on tarkoitettu esiopetukseen ja ensimmäiselle luokalle seulatyyppiseksi ryhmä- tai yksilötestiksi. Testin suomalainen versio sisältää kaikkiaan 47 osiota ja kolme harjoitusosiota. Käsitteet on jaettu neljään ryhmään: määrää, aikaa ja avaruudellisia suhteita ilmaisevat sekä muut käsitteet. Tässä tutkimuksessa käytettiin lyhennettyä 10 osion versiota, johon valittiin osioita, joissa suomalaisessa Heimon keräämässä aineistossa oli esiintynyt erottelevuutta (korkeintaan 70-97 % oikein). Kustakin käsiteryhmästä otettiin mukaan kaksi ja määrää ilmaisevia käsitteitä neljä. Testin toteuttivat esiopettajat sekä syksyllä että keväällä omissa ryhmissään saatuaan perehdytyksen testin käyttöön.

Tehtävän suorittamisohje oli seuraava: ”Nyt tehdään yhdessä tehtäviä, joissa minä aina ensin sanon ohjeen. Sitten kun olet kuunnellut koko ohjeen loppuun, saat merkitä kynällä vastauksen. Vastaus merkitään piirtämällä tällainen rasti.” Testivihko sisälsi 11 sivua, ja sen kansilehdellä oli kolme harjoitusosiota. Harjoituksissa opeteltiin ohjeen kuuntelua ja rastin piirtämistä, esim. ”Katso näitä kuvioita. Merkitse rasti ympyrän päälle”. Seuraavilla sivuilla oli kullakin yhden osion kuvamateriaali. Lapsi rastitti oikean vaihtoehdon kolmen vaihtoehdon joukosta (6 osiota) tai kuvasta pyydetyn yksityiskohdan (esim. ”kolmas lapsi”) tai yksityiskohdat (esim. ”muut paitsi kukat”). Kussakin osiossa toistettiin kaksi kertaa ohje, joka sisälsi kohteena olevan käsitteen. Tehtävän pistemäärä on oikein rastitettujen vastausten summa.

Analyseissa käytettiin vain määrällisiä eli matemaattisia käsitteitä koskevien neljän osion oikein rastitettujen vastausten summaa (minimi 0, maksimi 4). Matemaattisten käsitteiden osaamista arvioivat seuraavat neljä osiota (suluissa on ilmaistu osion järjestysnumero 10 osion lyhennytyssä versiossa):

- Katso kuvia, joissa on kulhoja ja lusikoita. Merkitse kuva, jossa jokaisessa kulhossa on lusikka. (1. osio)
- Katso kuvia, joissa on tähtiä. Merkitse kuvat, joissa on yhtä monta tähteä. (5. osio)
- Katso helminauhoja. Merkitse helminauha, jossa joka toinen helmi on musta. (7. osio)
- Katso opettajaa ja lapsia. Merkitse kolmas lapsi opettajasta lukien. (10. osio)

6.3 Aineiston analyysi

Tulokset analysoitiin SPSS -ohjelmalla. Lukumäärätaidot-tehtävän analysoinnissa otettiin huomioon syksyn osalta kaikki osiot ja kevään osalta samat osiot kuin syksyllä, jotta voitiin tutkia kehitystä syksystä kevääseen. Lukumäärätaidot-tehtävän jakaumatietoja tarkasteltiin osiotasolla. Lukumäärätaidot-tehtävässä suoriutumisen pysyvyyttä syksystä kevääseen, sekä suoriutumisen yhteyttä käsitteiden ymmärtämiseen (Boehmin peruskäsitetesti) ja tietokone tehtävän mittoihin tutkittiin korrelaatioanalyysillä käyttäen Spearmanin järjestyskorrelaatiokerrointa. Korrelatiivisen tarkastelun kautta voidaan päätellä, onko kahden muuttujan välillä riippuvuutta, ja mikäli riippuvuutta on, millainen on sen suunta ja voimakkuus. (Erätuuli, Leino & Yli-Luoma 1994, 85-86.) Mitä lähempänä arvoa 1 korrelaatiokerroin on, sitä voimakkaampi yhteys muuttujien välillä on (Valli 2001, 60-61).

Lukumäärätaidot-tehtävän osiokohtaisia yhteyksiä käsitteiden ymmärtämiseen tarkasteltiin käyttäen ristiintaulukointeja, jonka katsotaan sopivan hyvin osajoukkojen vertailuun (Alkula, Pöntinen & Ylöstalo 1994, 189). Ristiintaulukointien yhteydessä toteutettu khin-neliötestaus (χ^2) antaa tietoa siitä, onko muuttujien välillä tilastollista riippuvuutta. Khin-neliötestin p-arvo kertoo, ovatko ristiintaulukoinneissa havaitut erot tarpeeksi suuria, jotta muuttujien välinen riippuvuus voitaisiin yleistää perusjoukkoon. (Valli 2001, 72-75).

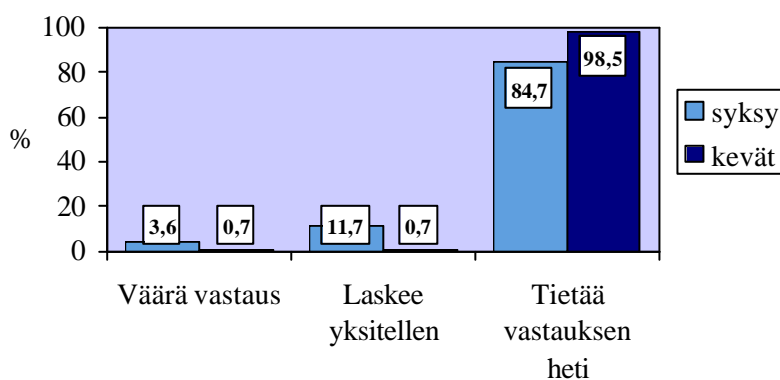
Tutkimusjoukosta erotettiin kaksi alaryhmää syksyn Lukumäärätaidot-tehtävässä suoriutumisen perusteella käyttäen kriteerinä 1.5 keskihajontaa keskiarvosta heikompaan ja parempaan suuntaan. Näiden alaryhmien eroja matemaattisten käsitteiden ymmärtämisessä, tietokone testin oikeiden vastausten määrässä sekä kevään Lukumäärätaidot-tehtävässä suoriutumisessa analysoitiin käyttäen t-testiä. T-testin tarkoituksena on tarkistaa, ettei saatu tulos ole satunnaisvaihtelun aiheuttamaa, vaan tuloksen voidaan olettaa esiintyvän myös perusjoukossa. T-testein voidaan siis varmentaa saadun tuloksen oikeellisuus. (Valli 2001, 80.)

7 TULOKSET

7.1 Lukumäärätaitojen arviointi

Lukumäärätaidot-tehtävän osalta oli syksyn arvioinneista käytettävissä 137 lapsen tulokset ja kevään arvioinneista 136 lapsen tulokset. Lukumäärätaidot-tehtävän summapistemäärän keskiarvo oli syksyllä 11.65 (maksimi 17 pistettä) ja keskihajonta 2.54. Kevään testauksissa vastaavista osioista muodostetun summapistemäärän (ts. summa, jossa huomioitiin vain ne 13 osiota, jotka olivat identtisiä syksyn ja kevään tutkimuksissa) keskiarvo oli 13.65 ja keskihajonta 2.09. Tarkasteltaessa Lukumäärätaidot-tehtävässä suoriutumisen pysyvyyttä ajankohdasta toiseen korrelaation avulla (käyttäen Spearmanin järjestyskorrelaatiokerrointa), havaittiin syksyn ja kevään suoriutumisen välillä tilastollisesti erittäin merkitsevä positiivinen yhteys ($r = .54$, $p < 001$). Lapset, jotka suoriutuivat tehtävistä hyvin syksyllä, suoriutuivat keskimäärin hyvin myös keväällä.

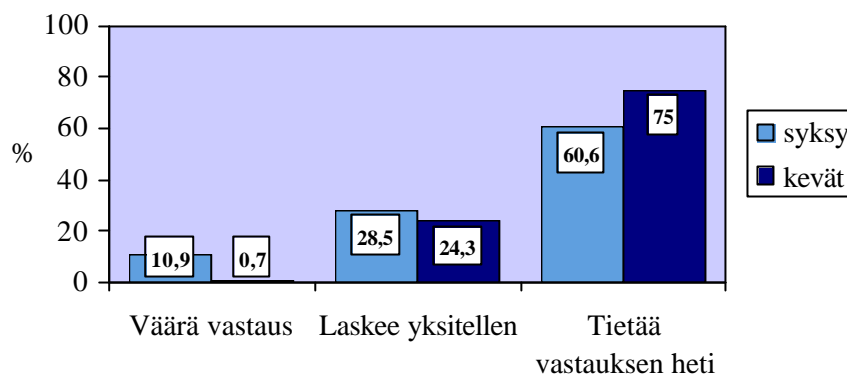
Seuraavassa (kuviot 1-6) tarkastellaan Lukumäärätaidot-tehtävässä suoriutumista osiokohtaisesti.



Kuvio 1. Osion 1 vastausten jakautuminen syksyllä ja keväällä.

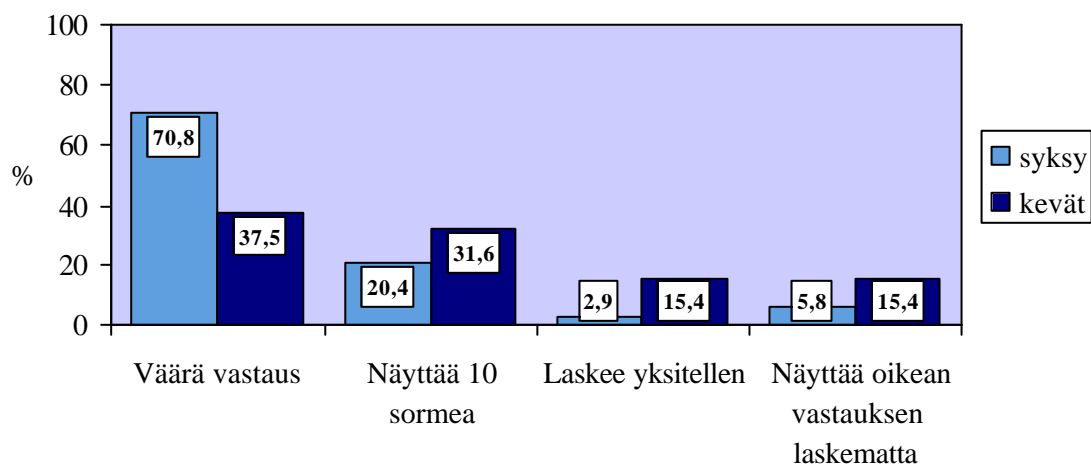
Syksyn ja kevään arvioinneissa oikean vastauksen osioon 1 (Kuinka monta sormeä sinulla on yhdessä kädessä?) antoi lähes jokainen lapsi. Syksyllä 16 lasta päätyi oikeaan vastaukseen laskemalla sormet yksitellen, mutta keväällä enää yksi lapsi hyödyn-

si sormien yksitellen laskemista oikean vastauksen antamiseen. Virheellisen vastauksen syksyllä antoi 5 lasta, mutta keväällä enää yksi lapsi.



Kuvio 2. Osion 2 vastausten jakautuminen syksyllä ja keväällä

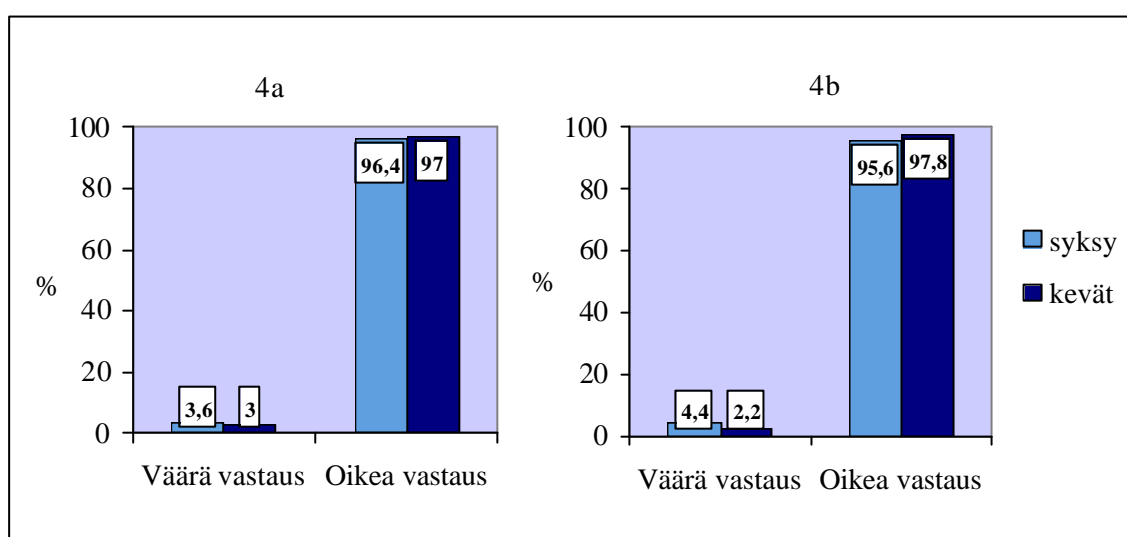
Osioon 2 (Näytä 7 sormeä.) antoi oikean vastauksen syksyllä lähes 90 % lapsista, joista noin kaksi kolmasosaa osasi näyttää vastauksen heti ja sormien yksitellen laskemista hyödynsi noin kolmannes. Syksyllä virheellisen vastauksen antoi 15 lasta. Keväällä yhtä lukuun ottamatta kaikki lapset antoivat oikean vastauksen. Suurin osa lapsista osasi näyttää vastauksen heti, sillä keväällä sormien yksitellen laskemista hyödynsi enää noin neljännes lapsista.



Kuvio 3. Osion 3 vastausten jakautuminen syksyllä ja keväällä.

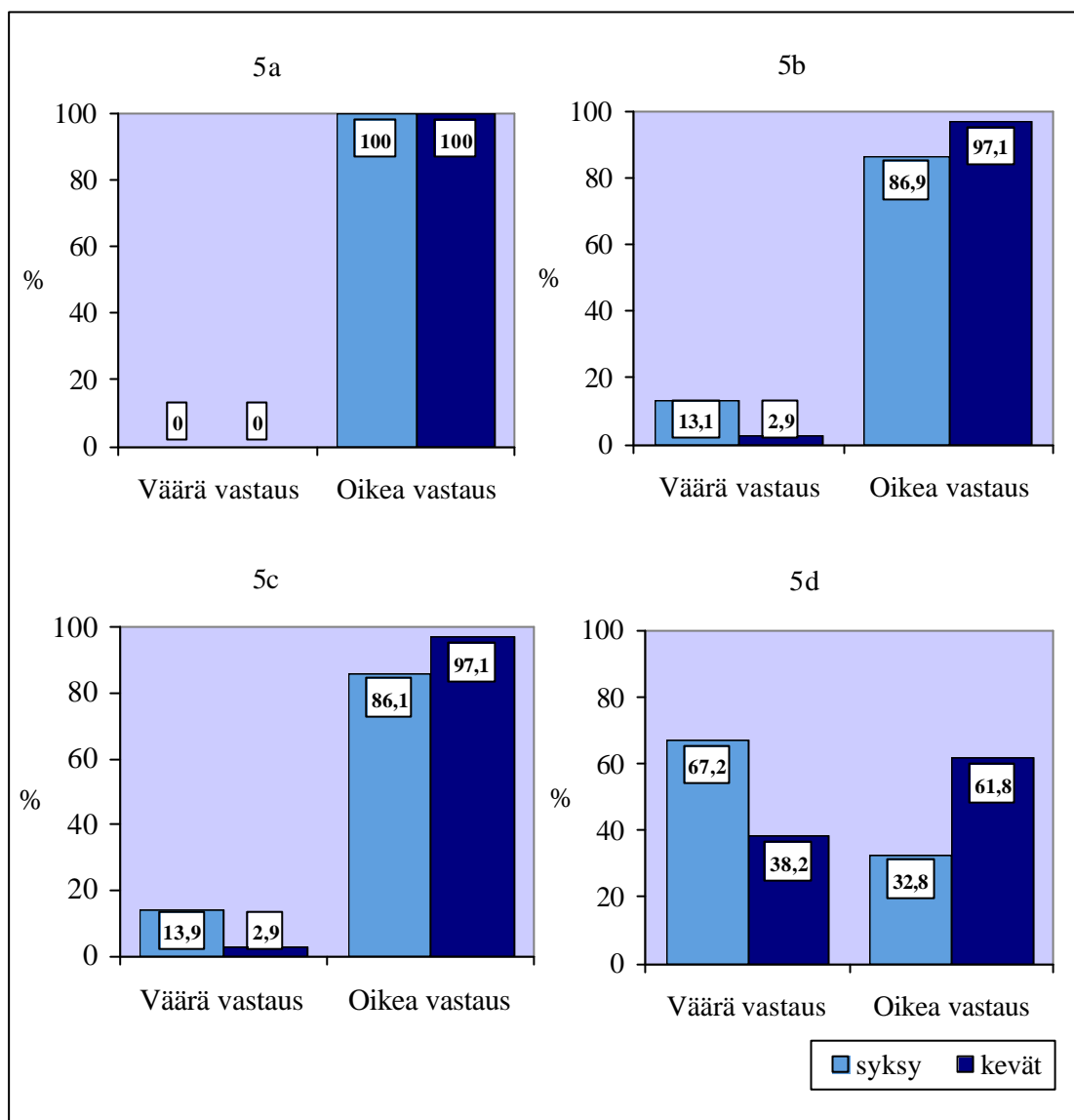
Osio 3 (Näytä yhteensä 5 sormeä – kahdella kädellä.) osoittautui tässä ikävaiheessa hyvin haastavaksi. Syksyllä virheellisen vastauksen antoi suurin osa lapsista (yhteen-

sä 91.2 %). Virheellisen vastauksen antaneista lapsista 28 vastasi näyttäen 10 sormea. Oikean vastauksen syksyllä antoi yhteensä 12 lasta (8.7 %), joista 8 osasi näyttää oikean vastauksen välittömästi ja 4 hyödyntäen yksitellen laskemista. Keväällä virheellisen vastauksen antoi noin kaksi kolmasosaa (yhteensä 69.1%) lapsista. Tällöin virheellisen vastauksen antaneista lapsista 43 vastasi näyttäen 10 sormea. Vastauksen antaminen 10 sormella kasvoi siis yli 10 % syksystä kevääseen. Oikean vastauksen antoi keväällä noin kolmannes (30.8 %) lapsista, joista puolet osasi näyttää oikean vastauksen heti ja puolet yksitellen laskemista hyödyntäen.



Kuvio 4. Osioiden 4a ja 4b vastausten jakautuminen syksyllä ja keväällä

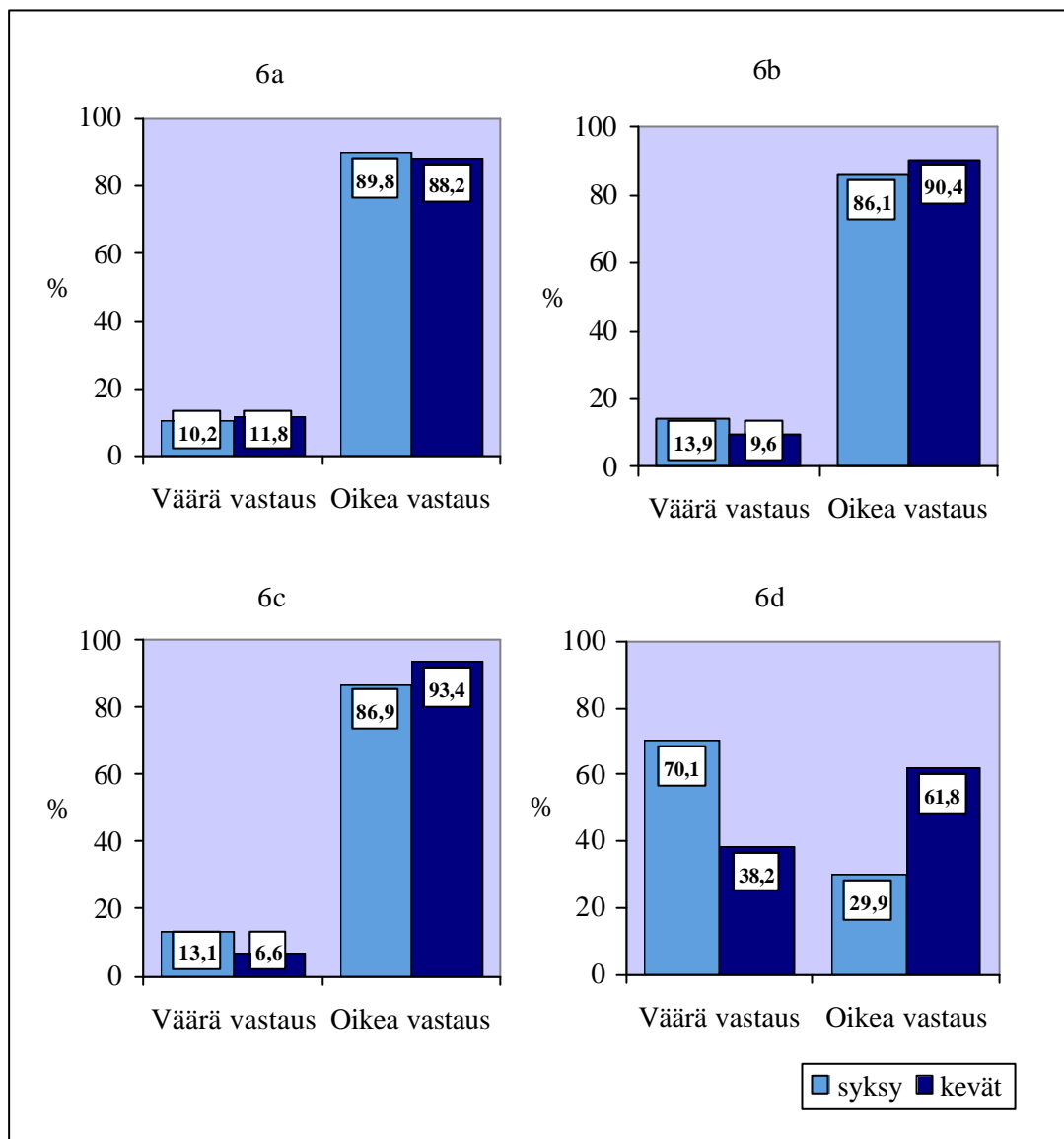
Osioon 4a (Ota yhtä monta nappia kuin kortissa on karkkeja. - 5 kappaletta) ja osioon 4b (Kuinka monta nappia otit?) lapsista lähes kaikki osasivat antaa oikean vastauksen niin syksyllä kuin keväällä. Osioon 4a syksyllä viisi ja keväällä neljä lasta antoi virheellisen vastauksen ja osioon 4b syksyllä virheellisen vastauksen antoi kuusi ja keväällä kolme lasta.



Kuvio 5. Osioiden 5a, 5b, 5c ja 5d vastausten jakautuminen

Osio 5a (Kerro, kuinka monta pähkinää näet kortissa. – 4 kappaletta) osoittautui hyvin helpoksi sillä, sekä syksyllä että keväällä jokainen lapsi antoi tehtävään oikean vastauksen. Osiossa 5b (Ota nappeja yksi enemmän kuin 4.) oli erottelevuutta syksyllä, jolloin 18 lasta antoi virheellisen vastauksen, mutta keväällä virheellisen vastauksen antoi enää vain 4 lasta. Osiot 5b ja 5c (Kuinka monta nappia otit?) olivat jakaumaltaan lähes identtisiä (yhden lapsen eroa lukuun ottamatta) eli jos lapsi osasi vastauksen osioon 5b, hän todennäköisesti osasi vastauksen myös osioon 5c sekä syksyllä että keväällä. Osio 5d (Kuinka monta nappia on enemmän kuin pähkinöitä?) oli huomattavasti muita tehtäviä vaativampi, sillä syksyllä noin kaksi kolmasosaa lapsis-

ta antoi virheellisen vastauksen. Kevääseen mennessä oli kuitenkin tapahtunut huomattava muutos, sillä virheellisen vastauksen antoi enää reilu kolmannes lapsista.



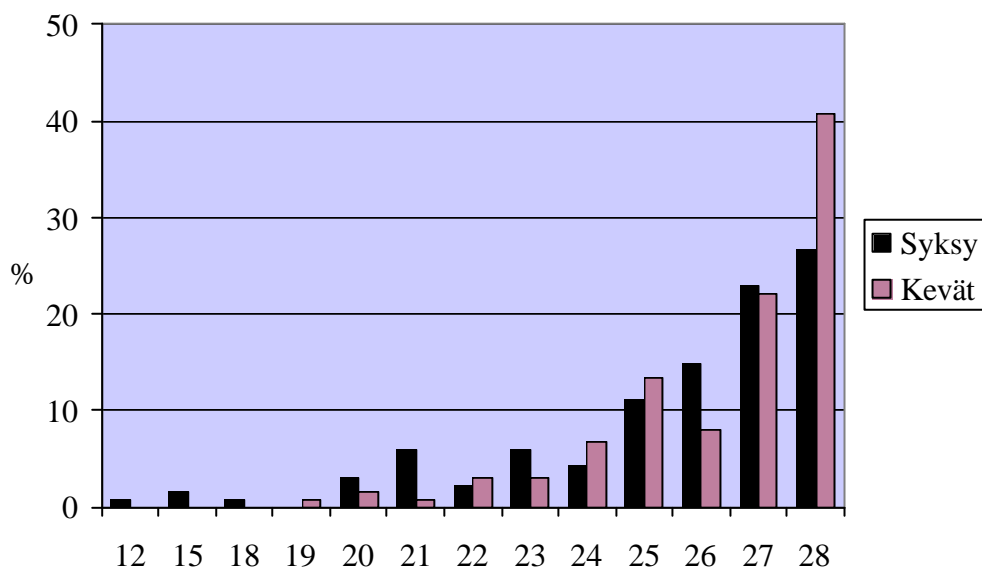
Kuvio 6. Osioiden 6a, 6b, 6c ja 6d vastausten jakautuminen

Osio 6a (Kerro, kuinka monta perhosta näet kortissa. – 7 kappaletta) oli ainoa koko Lukumäärätaidot-tehtävän osioista, jossa virheellisten vastausten määrä kasvoi syksystä kevääseen. Syksyllä väärän vastauksen antoi 14 ja keväällä 16 lasta. Osioiden 6b (Ota nappeja yksi vähemmän kuin seitsemän.) ja 6c (Kuinka monta nappia otit?) vastausten jakautumat olivat hyvin lähellä toisiaan. Osioon 6b virheellisen vastauksen syksyllä antoi 19 ja keväällä 13 lasta ja osioon 6c virheellisen vastauksen syksyl-

lä antoi 18 ja keväällä 9 lasta. Osio 6d (Kuinka monta perhosta on enemmän kuin nappeja?) osoittautui muita osioita vaativammaksi, sillä syksyllä yli kaksi kolmasosaa lapsista antoi virheellisen vastauksen. Kevääseen mennessä oikean vastauksen antoi kuitenkin jo reilusti yli puolet lapsista.

7.2 Lukumäärätaitojen ja lukumäärien määrittämisen hallintaa ja subitisaation hyväksikäyttöä arvioineen tietokonetehtävän yhteys

Lukumäärien määrittämisen hallintaa ja subitisaatiota arvioivan tietokonetehtävän osalta syksyn ja kevään arvioinneissa käytettävissä oli 135 lapsen tulokset. Tietokonetehtävän kohdalla tarkasteltiin sekä vastausten oikeellisuutta että reaktioaikoja. Kuviosta 7 näkyy oikeiden vastausten summan prosentuaalinen jakautuminen syksyllä ja keväällä.



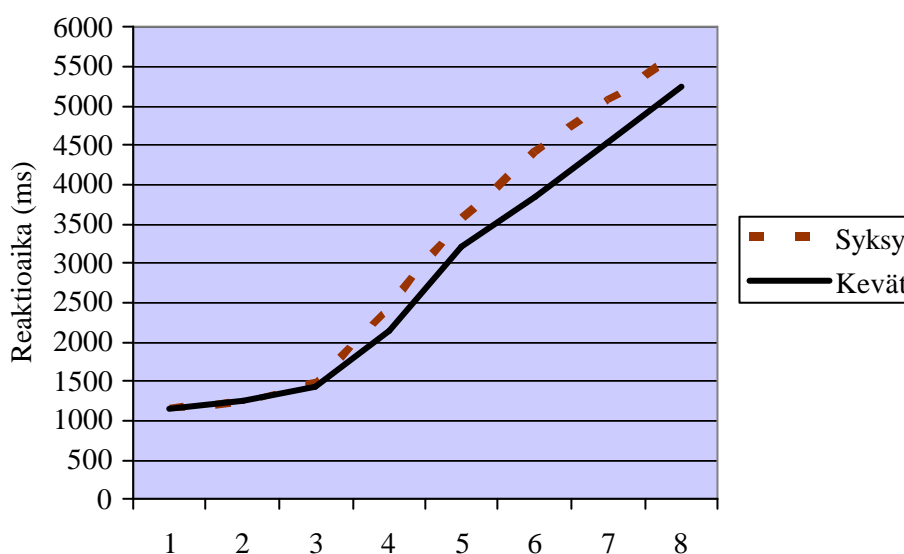
Kuvio 7. Tietokonetehtävässä annettujen oikeiden vastausten summan jakautuminen syksyllä ja keväällä.

Tietokonetehtävässä lukumäärää koskevien oikeiden vastausten summan maksimipistemäärä oli 28, jonka syksyllä saavutti 36 lasta ja keväällä 55 lasta. Syksyllä alin

oikeiden vastausten summa oli 12 ja keväällä 19. Syksyllä oikeiden vastausten keskiarvo oli 25.5 ja keskihajonta 2.9 ja keväällä keskiarvo oli 26.4 ja keskihajonta 2.0. Tehtävässä suoriutuminen siis parani kokonaisuudessaan syksystä kevääseen.

Esiopetusvuoden alun lukumäärän hallinnan yhteyttä tietokonetehtävän lukumäärää koskevien oikeiden vastausten summaan tarkasteltiin korrelaatioanalyysillä (käyttäen Spearmanin järjestyskorrelaatiokerrointa). Lukumäärätaidot-tehtävässä suoriutumisen ja tietokonetehtävässä suoriutumisen välillä havaittiin tilastollisesti erittäin merkitsevä positiivinen yhteys syksyllä ($r = .35$, $p < .001$) ja keväällä merkitsevä yhteys ($r = .22$, $p = .01$).

Kuviosta 8 näkyy tietokonetehtävässä kullakin tasolla vastauksen antamiseen kulunut keskimääräinen aika millisekunteina. Tuloksista tarkasteltiin mediaania, sillä se antaa tässä tapauksessa paremman kuvan kuin keskiarvo, joka on herkempi ääriarvoille.



Kuvio 8. Tietokonetehtävän keskimääräinen (mediaani) reaktioaika kullakin tasolla (1-8) syksyllä ja keväällä.

Tasojen 1 - 3 reaktioajat olivat hyvin lähellä toisiaan eikä reaktioajoissa juuri näyttänyt olevan eroja syksyn ja kevään välillä. Tasosta 4 lähtien reaktioajat näyttävät kasvavan voimakkaasti osioiden sisältämän lukumäärän suurentuessa ja tämä kasvava

trendi on varsin samanlainen sekä syksyllä että keväällä. Tasoilla 4 - 8 vastausten antamiseen kuluneiden reaktioaikoja suhteen oli myös nähtävissä suuntaus siihen, että keskimääräiset reaktioajat olivat lyhempiä keväällä kuin syksyllä.

7.3 Lukumäärätaitojen ja matemaattisten käsitteiden hallinnan yhteys

Syksyn osalta Boehmin peruskäsitteiden tulokset saatiin 138 lapselta ja keväällä 136 lapselta. Matemaattisten käsitteiden hallintaa arvioitiin neljän osion kautta, joista kunkin maksimipistemäärä oli 1. Taulukossa 3 on esitetty oikeiden vastausten keskiarvot ja keskihajonnat syksyn ja kevään osalta.

Taulukko 3. Matemaattisten käsitteiden oikeiden vastausten keskiarvot ja keskihajonnat syksyllä ja keväällä

Käsitteet	Ka	Sd
1. ”jokaisessa”		
Syksy	0.72	0.45
Kevät	0.94	0.24
2. ”yhtä monta”		
Syksy	0.92	0.27
Kevät	0.96	0.19
3. ”joka toinen”		
Syksy	0.67	0.47
Kevät	0.86	0.35
4. ”kolmas”		
Syksy	0.65	0.48
Kevät	0.74	0.44

Käsite ”yhtä monta” näytti olevan hallinnassa lähes kaikilla lapsilla niin syksyllä kuin keväälläkin. Syksyllä 11 ja keväällä enää 5 lapsella oli puutteita tämän käsitteen hallinnassa. Käsite ”kolmas” näytti olevan haastavin, sillä syksyllä 48 ja keväälläkin vielä 36 lasta antoi virheellisen vastauksen tämän käsitteen hallintaa arvioivaan tehtävään.

Lukumäärän hallinnan yhteyttä matemaattisten käsitteiden hallintaan tarkasteltiin korrelaatioanalyysillä (käyttäen Spearmanin järjestyskorrelaatiokerrointa), jossa kor-

reloitiin esiopetusvuoden alun Lukumäärätaidot-tehtävän summapistemäärä (13 osion summa) ja Boehmin peruskäsitteiden matemaattisten käsitteiden osioihin (4 osion summa). Lukumäärätaidot-tehtävässä suoriutumisen ja matemaattisten käsitteiden hallinnan välillä havaittiin tilastollisesti erittäin merkitsevä positiivinen yhteys sekä syksyllä ($r = .40$, $p < .001$) että keväällä ($r = .31$, $p < .001$).

Tehtävien keskinäisen yhteyden tarkastelua jatkettiin osiokohtaisesti käyttäen ristiintaulukointia. Ristiintaulukointia varten Boehmin peruskäsitteiden matemaattisten käsitteiden osioiden summapistemäärä luokiteltiin 2-luokkaiseksi: 1 = 0 - 2 pistettä, 2 = 3 - 4 pistettä. Lukumäärän hallinnan ja matemaattisten käsitteiden hallinnan yhteyttä testattiin erikseen kussakin Lukumäärätaidot-tehtävän 13 osiossa käyttäen χ^2 -testausta. Tilastollisesti merkitseviä (tai melkein merkitseviä) yhteyksiä ilmeni syksyn arvioinneissa seuraavissa Lukumäärätaidot-tehtävän osioissa: osiossa 1 ($\chi^2 = 18.35$, $p < .001$), osiossa 2 ($\chi^2 = 19.69$, $p < .001$), osiossa 5b ($\chi^2 = 7.47$, $p < .01$), osiossa 5c ($\chi^2 = 9.38$, $p < .01$), osiossa 6b ($\chi^2 = 6.33$, $p < 0.5$) ja osiossa 6c ($\chi^2 = 10.84$, $p = .001$). Kevään arvioinneissa löytyi tilastollisesti merkitseviä tai melkein merkitseviä yhteyksiä seuraavissa Lukumäärätaidot-tehtävän osioissa: osiossa 1 ($\chi^2 = 12.66$, $p < .01$), osiossa 4a ($\chi^2 = 10.80$, $p = .001$), osiossa 4b ($\chi^2 = 15.71$, $p < .001$), osiossa 5b ($\chi^2 = 51.53$, $p < .001$), osiossa 5c ($\chi^2 = 51.53$, $p < .001$), osiossa 6b ($\chi^2 = 5.15$, $p < .05$), osiossa 6c ($\chi^2 = 9.45$, $p < .01$) ja osiossa 6d ($\chi^2 = 4.52$, $p < .05$). Toisin sanoen useiden Lukumäärätaidot-tehtävän osioiden ja käsitteiden ymmärtämisen välillä havaittiin selvä yhteys.

7.4 Alaryhmätarkastelu

Tutkimusjoukosta erotettiin kaksi alaryhmää syksyn Lukumäärätaidot-tehtävässä suoriutumisen perusteella käyttäen kriteerinä 1.5 keskihajontaa keskiarvosta heikompaan ja parempaan suuntaan. Heikot lukumäärätaidot omaavien alaryhmässä ($n = 10$) summapistemäärä oli välillä 1 - 7 ja hyvät lukumäärätaidot omaavien alaryhmässä ($n = 13$) summapistemäärä oli välillä 15-17 (maksimipistemäärä oli 17). Näiden alaryhmien mahdollisia eroja matemaattisten käsitteiden ymmärtämisessä, tietokonete-

tävän oikeiden vastausten määrässä sekä kevään Lukumäärätaidot-tehtävässä suoriutumisessa analysoitiin t-testein, joiden tulokset ilmenevät taulukosta 4.

Taulukko 4. Esiopetusvuoden alussa lukumäärätaidoiltaan heikkojen ja hyvien alaryhmään kuuluvien lasten vertailu muissa matematiikan tehtävissä ja kevään lukumäärätehtävissä

	Heikot lukumäärätaidot (n = 10) ^a		Hyvät lukumäärätaidot (n = 13) ^a		t
	Ka	Sd	Ka	Sd	
Matemaattiset käsitteet (BOEHM)					
Syksy	1.60	0.97	3.38	1.19	-3.85 **
Kevät	2.90	0.74	3.77	0.44	-3.53 **
Tietokonetehtävä: oikeiden vastausten summa					
Syksy	22.70	4.74	26.54	1.94	-2.41 *
Kevät	24.60	3.13	26.80	1.64	-1.99 †
Kevään lukumäärätehtävät					
Osio 1	1.70	0.68	2.00	0.00	-1.41
Osio 2	1.70	0.48	1.77	0.44	-0.36
Osio 3	0.40	0.70	1.62	1.33	-2.83*
Osio 4a	0.80	0.42	1.00	0.00	-1.50
Osio 4b	0.80	0.42	1.00	0.00	-1.50
Osio 5a	1.00	0.00	1.00	0.00	ns
Osio 5b	0.70	0.48	1.00	0.00	-1.96 [†]
Osio 5c	0.70	0.48	1.00	0.00	-1.96 [†]
Osio 5d	0.30	0.48	0.92	0.28	-3.64**
Osio 6a	1.00	0.00	1.00	0.00	ns
Osio 6b	0.70	0.48	1.00	0.00	-1.96 [†]
Osio 6c	0.70	0.48	1.00	0.00	-1.96 [†]
Osio 6d	0.40	0.52	0.92	0.28	-2.90 *
Summa	10.90	2.73	15.23	1.74	-4.64***

Huom. * p < .05, ** p < .01, *** p < .001, † suuntaa-antava ero; ^a luokitteluperusteena syksyn lukumäärätehtävän summapistemäärä

Tarkastelussa ilmeni, että heikot lukumäärätaidot ja hyvät lukumäärätaidot omaavien lasten välillä löytyi eroja matemaattisten käsitteiden hallinnassa, tietokonetehtävän lukumäärien laskemisessa ja Lukumäärätaidot-tehtävän useissa osioissa. Tilastollisesti suuntaa-antavia eroja havaittiin kevään tietokonetehtävän lukumäärien laskemisessa sekä Lukumäärätaidot-tehtävän osioissa 5b, 5c, 6b ja 6c. Tilastollisesti melkein merkitseviä eroja havaittiin syksyn tietokonetehtävän lukumäärien laskemisessa ja Lukumäärätaidot-tehtävän osioissa 3 ja 6d. Tilastollisesti merkitseviä eroja löytyi

matemaattisten käsitteiden hallinnasta sekä syksyllä että keväällä ja Lukumäärätaitot-tehtävän osiosta 5d. Lukumäärätaitot-tehtävän kokonaispistemäärän kohdalla heikot lukumäärätaidot ja hyvät lukumäärätaidot omaavien lasten välillä havaittiin erittäin merkitsevä tilastollinen ero.

8 POHDINTA

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää esiopetusikäisten lukumäärän hallintaan liittyvien taitojen kehitystä esiopetusvuoden aikana. Tutkimus toteutettiin seurantaan, johon osallistui 139 lasta kaikkiaan 13 esiopetusryhmästä. Lukumäärän hallintaan liittyvien tehtävien tarkastelu osoitti, että taso, jolla lapset suoriutuivat lukumäärän hallintaan liittyvistä tehtävistä esiopetusvuoden alussa, oli vahvasti yhteydessä suoriutumiseen vastaavissa tehtävissä esiopetusvuoden lopussa. Tulokset osoittivat myös, että lukumäärätaidot konkreettisen toiminnan tukemissa tehtävissä olivat yhteydessä lukumäärien määrittämiseen tietokonetehtävässä. Myös lukumäärätaitojen ja matemaattisten käsitteiden ymmärtämisen havaittiin olevan positiivisesti yhteydessä toisiinsa.

8.1 Tulosten tarkastelua

Lukumäärän hallintaan liittyvien tehtävien tulokset osoittivat, että esiopetusikäiset osasivat määrittää lukumäärän pääsääntöisesti hyvin lukualueella 1-7, kun arviointitehtävät sisälsivät toimintaa ja apuna oli konkreettista materiaalia. Jo esikouluvuoden alussa suurin osa lapsista suoriutui ongelmitta lukumäärien laskemisesta, ja esiopetusvuoden lopussa enää vain hyvin pienellä osalla lapsista oli ongelmia lukumäärien laskemisessa. Tämä tulos on yhtäpitävä aiempien havaintojen kanssa, joiden mukaan esiopetusikäiset osaavat soveltaa lukujen luettelutaitoa lukumäärien määrittämiseen (Kinnunen ym. 1994, 66; ks. Geary 2000, 12). Osiossa, jossa lasten piti laskea kuvakortista 7 yksikköä sisältävän joukon lukumäärä, virheellisen vastauksen antaneiden lasten lukumäärä kuitenkin kasvoi kahdella syksystä kevääseen. Tämän osion tulos heijastanee sitä, että suurempien lukujen suhteen tämän ikäiset lapset tekevät vielä helposti huolimattomuusvirheitä eikä laskutoimenpiteen suorittaminen ole vielä automaattista. Luku neljä sen sijaan oli jo esiopetusikäisten hallinnassa, sillä jokainen lapsi antoi oikean vastauksen sekä syksyllä että keväällä osioon, jossa piti laskea kuvakortista 4 yksikköä sisältävän joukon lukumäärä. Tämän tehtävän ratkaisemista

saattoi helpottaa se, että kuvakortissa laskettavat yksiköt olivat arpakuutiosta tutussa muodostelmassa, jolloin osa lapsista saattoi tunnistaa luvun helposti laskematta sitä. Subitisaation hyödyntämisellä saattaakin olla oma merkityksensä edellä mainittujen kahden tehtävän erilaisissa tuloksissa. Osa lapsista todennäköisesti hyödynsi lukumäärän visuaalista laskematta tapahtuvaa määrittämistä lukumäärän neljä kohdalla, mutta lukumäärä seitsemän vaati jo luettelemalla laskemista, jolloin virheiden tekemisen mahdollisuus kasvaa.

Sanalliset lukumäärien vertailutehtävät olivat vaikeusasteeltaan eritasoisia. Lähes kaikki lapset suoriutuivat virheettä sekä syksyllä että keväällä tehtävästä, jossa arvioitiin ymmärrystä yhtäsuuruudesta. Myös varsinaisessa käsitteiden ymmärtämisestä arvioineissa testissä lähes kaikki lapset hallitsivat käsitteen ”yhtä monta” sekä syksyllä että keväällä. Siten käsite ”yhtä monta” näyttäisikin olevan hallinnassa pääsääntöisesti jo esiopetusvuoden alussa. Suoriutuminen vertailutehtävissä, jotka sisälsivät käsitteet enemmän ja vähemmän, parani selvästi vuoden aikana. Syksyllä vain noin kolmannes, mutta keväällä jo kaksi kolmasosaa lapsista antoi oikean vastauksen lukumäärien vertailua vaatineissa tehtävissä. Näitä tuloksia tukevat Kinnusen ym. (1994) aiemmat tutkimustulokset, joiden mukaan esiopetusikäisillä on pääsääntöisesti hallinnassa taito käyttää lukuja yhtäsuuruuden toteamisessa sekä suurella osalla myös taito käyttää lukuja yhteen- ja vähennyslaskua sisältävissä tehtävissä. (Kinnunen ym. 1994, 67.)

Lukujen hajottaminen on varsin haastava tehtävä esiopetusikäisille. Sekä syksyllä että keväällä suurin osa lapsista antoi virheellisen vastauksen tehtävään, jossa heitä pyydettiin näyttämään yhteensä 5 sormeaa kahdella kädellä. Tehtäväsuoriutumisessa tapahtui kuitenkin huomattavasti edistystä syksystä keväeseen. Tehtävän erottelevuus perustunee osin siihen, että matemaattisen lukumäärään liittyvän osaamisen lisäksi tehtävä edellyttää vahvaa kielellistä ymmärtämistä. On myös todennäköistä, että ennen kouluikää lapset eivät saa arkielämässä juurikaan tämältyyppisiä kokemuksia lukujen hajottamisesta.

Lukumäärän hallintaan liittyvien tehtävien (Lukumäärätaidot-tehtävä) ja tietokone-tehtävällä arvioidun lukumäärän määrittämisen välillä todettiin syksyllä olevan tilas-

tollisesti erittäin merkitsevä ja keväällä merkitsevä positiivinen yhteys. Tietokonetehtävissä osioita oli paljon ja lisäksi tehtävänannossa lapsia pyydettiin laskemaan lukumäärät mahdollisimman nopeasti, mikä lisää virheiden tekemisen mahdollisuutta. Lukumäärän laskemisen tarkkuus kuitenkin parani kaiken kaikkiaan syksystä kevääseen. Tietokonetehtävissä noin 40 % lapsista antoi keväällä oikean vastauksen jokaiseen osioon. Näiden lasten kohdalla lukumäärien laskeminen lukualueella 1-8 on siten hyvin hallinnassa myös ilman konkreettisten esineiden tuomaa tukea. Reaktioaikojen jakauman perusteella näyttäisi siltä, että esiopetusikäisillä laskematta tapahtuvan lukumäärän määrittämisen eli subitisaation kynnyсарvo asettuu keskimäärin arvon kolme kohdalle. Tasosta 4 lähtien reaktioajat alkoivat kasvaa voimakkaammin. Tämä tulos näyttäisi olevan pitävä aiempien tutkimusten perusteella (mm. Starkey & Cooper 1995), joissa subitisaation hyödyntämisen käyttöalueen on todettu vaihtelevan lasten välillä paljonkin, mutta asettuvan yhden ja viiden väliin.

Lukumäärän hallinnan ja matemaattisten käsitteiden ymmärtämisen välillä havaittiin positiivinen yhteys. Tämä tulos vahvistaisi näkemystä siitä, että hyvä käsitteiden hallinta tukee lukumäärän hallintaan liittyviä taitoja. Lukumäärätaidot-tehtävissä suoriutumisen ja käsitteiden ymmärtämisen välisessä yhteydessä oli kuitenkin heikenevä suunta syksystä kevääseen. Tämä viittaisi siihen, että erottelevuus on parempi esiopetusvuoden syksyllä, jolloin lukumäärätehtävissä oli enemmän osioita, joissa oli vielä erottelevuutta.

8.2 Tutkimuksen arviointia ja jatkotutkimuksen haasteita

Tässä tutkimuksessa esiopetusikäisten lukumäärään liittyviä taitoja tutkittiin usean tehtävän kautta, jolloin saatiin monipuolista tietoa lasten taidoista. Sen lisäksi, että tutkimuksessa kartoitettiin esiopetusikäisten lukumäärän hallintaan liittyviä taitoja, saatiin tietoa myös eri taitojen välisistä yhteyksistä. Syksystä kevääseen toteutetun seurannan kautta saatiin tärkeää tietoa taitojen kehityksestä esiopetusvuoden aikana. Lisäksi seuranta antoi mahdollisuuden tutkia kokeilukäytössä olleiden testien toimivuutta siinä suhteessa, voidaanko niiden perusteella tunnistaa jo esiopetusvuoden

alussa lapset, joiden matemaattiset taidot ovat heikot. Tutkittavia oli yhteensä 139 eli aineisto oli suhteellisen suuri, mikä antaa hyvän kuvan esiopetusikäisten taidoista sekä mahdollistaa tulosten yleistettävyyden. Toki on huomioitava, että tutkimusjoukko muodostui vain yhden kunnan 13 esiopetusryhmästä, eikä ollut niin suuri, että voitaisiin puhua kattavasta tiedosta.

Tässä tutkimuksessa käytetyt tutkimusmenetelmät olivat kokeilukäytössä olleita testejä. Arviointimenetelmien toimivuuden testaaminen on tärkeää, jotta nähdään toimivatko ne odotetun mukaisesti. Tutkimustulosten perusteella Lukumäärätaidot-tehtävä näyttäisi erottelevan joukosta lapset, joilla on hyvät tai heikot lukumäärätaidot. Muutamissa osioissa ei ilmennyt erottelevuutta syksyllä eikä keväällä tässä aineistossa, mutta niiden sisällyttäminen tehtäväsarjassa lienee perusteltavissa sitä kautta, että ne motivoivat lapsia tehtäviin. Kaiken kaikkiaan tutkimuksen alaryhmäanalyysi viittasi siihen, että käytettyjen arviointimenetelmien avulla on mahdollista tunnistaa esiopetusvuoden alussa ne lapset, joilla lukumäärän hallintaan liittyvät taidot ovat heikot. Tarkempaa tietoa ja analyysia tarvitaan kuitenkin siitä, missä vaikeuksien ydin kunkin lapsen kohdalla on. Tarkoituksenmukaisien ja toimivien tukitoimien suunnittelemiseksi on tärkeää perehtyä ensinnäkin siihen, onko kyseessä yleisempi hitaus tai viive kehityksessä ja oppimisessa vai onko kyseessä nimenomaisesti matematiikan oppimiseen liittyvä vaikeus. Lisäksi on tärkeää arvioida sekä lapsen käsitteellistä että menetelmällistä tietämystä matematiikan alueella.

Tutkimuksen reliabiliteetilla tarkoitetaan tutkimuksen luotettavuutta eli kykyä antaa ei-sattumanvaraisia tuloksia, mikä käytännössä tarkoittaa mittaustulosten toistettavuutta. Tutkimuksen validiteetti puolestaan tarkoittaa tutkimusmenetelmän kykyä mitata juuri sitä, mitä on tarkoitus mitata. (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2001, 213.) Lukumäärän määrittämistä ja subitisaatiota arvioivassa tietokone tehtävässä luotettavuuteen ja lapsen todellisten taitojen hallinnan tavoittamiseen (validiteetti) pyrittiin siten, että täsmälleen samaa taitoa mittaavia osioita oli useita. Tehtävä sisälsi vähintään kolme toistoa kullakin lukumäärätasolla ja lisäksi reaktioaikojen suhteen virheelliset ääriarvot poistettiin. Jossain määrin mittaus virhettä saattoi aiheutua eri testiajien erilaisista reaktioajoista, koska lapsen vastauksen reaktioaika tallentui testiajan syöttäessä lapsen vastauksen oikeellisuuden tietokoneelle. Lukumäärätaidot-

tehtävissä osioita, jotka arvioivat täsmälleen samaa taitoa, ei ollut kuin yksi kutakin lukumäärätasoa kohti. Tämä on kuitenkin ymmärrettävää sitä taustaa vasten, että toisin kuin subitisaation arviointi, joka on kokeellista lähestymistapaa edustava tehtävä, lukumäärätaitojen tehtäväsarjan tarkoitus on toimia useita taitoja arvioivana yleisenä seulana. Seulatyypisissä testissä tavoitteena on lähinnä erottelevan summamuuttujan tuottaminen, jonka perusteella voidaan tunnistaa lapset, joiden valmiudet ovat heikot. Käsitteiden ymmärtämisen tehtävä sisälsi vain neljä matemaattisia käsitteitä arvioivaa osiota. Tällaisenakin hyvin lyhyenä tehtävänä yhteyksiä lukumäärätaitoihin löytyi, mutta erottelevuuden parantamiseksi olisi jatkossa hyvä lisätä erityisesti vaikeiden osioiden määrää.

Tässä tutkimuksessa suurin osa tehtävistä esitettiin lapsille suullisesti, joten tuloksiin vaikutti myös kuullun ymmärtäminen. Esimerkiksi Aunolan ym. (2004) tutkimustulokset ovat osoittaneet, että hyvä kuullun ymmärtämisen taso vaikuttaa myönteisesti matemaattisen suoriutumisen tasoon. Näyttäisi, että hyvä kuullun ymmärtäminen tukee tehokkaasti jo saavutettuja matemaattisia tietoja ja taitoja. (Aunola ym. 2004.) Tässä tutkimuksessa tietokonetehtävä mittasi puhtaasti lukumäärien määrittämisen taitoja ilman kielellisten tekijöiden tai kuullun ymmärtämisen vaikutusta. Jatkossa olisikin haastavaa kehitellä uusia arviointimenetelmiä, joissa kielellisillä tekijöillä tai kuullun ymmärtämisellä ei olisi niin suurta vaikutusta tuloksiin.

Tarkastelun ulkopuolelle jäivät tässä tutkimuksessa muun muassa lukujonotaidot. Lukujonotaitojen on todettu ennakoivan matemaattista suoriutumista hyvin (mm. Aunola ym. 2004; Kinnunen ym. 1994), ja siksi niitä onkin tutkittu suhteellisen paljon. Tässä tutkimuksessa haluttiin kuitenkin perehtyä enemmänkin lukumäärien hallintaan liittyviin taitoihin, joihin kuitenkin osana kuuluu myös lukujen luettelutaito. Tässä tutkimuksessa ei myöskään tutkittu yksittäisten lasten subitisaatiokynnystä tai pyritty erottelemaan alaryhmiä. Jatkossa subitisaation ja lukumäärätaitojen yhteyden tarkastelu olisikin hyvin kiinnostavaa.

Tutkimuksessa käytetyissä tehtävissä arvioitiin lapsen vastauksen oikeellisuutta, mutta suorittamiseen käytetyt strategiat eivät olleet systemaattisen arvioinnin kohteena. Etenkin tietokonetehtävässä, jossa käytettävissä ei ollut konkreettista tukea,

testaajat havaitsivat lasten käyttävän erilaisia strategioita. Jotkut lapset laskivat pallot osoittaen ilmassa kutakin palloa luettelon edessä, jotkut taas hyödynsivät pään liikettä pysyäkseen selvillä siitä, mitkä pallot on jo laskettu. Erään tutkimukseen osallistuneen lapsen kohdalla käden käyttäminen apuna, eleet ja nopea reaktioaika ilmaisivat, että lapsi selvästi hyödynsi suurempien palloryhmien kohdalla pienten lukumäärien tunnistamista ja yhteenlaskua. Esimerkiksi kun ruudulle ilmestyi seitsemän palloa, lapsi hahmotti siitä luvut kolme ja neljä, jonka jälkeen laski ne yhteen. Myös lukumäärätaitoja arvioineessa tehtävässä havaittiin erilaisia ratkaisustrategioita. Esimerkiksi peräkkäisissä osioissa, joissa ensin tuli määrittää joukon lukumäärä kuvakortista ja sitten ottaa yksi yksikkö enemmän tai vähemmän nappeja, ja tämän jälkeen määrittää lukumäärä uudelleen, lapset käyttivät erilaisia ratkaisutapoja. Lisäämisen ja vähentämisen jälkeen osa lapsista laski luetellen joukon yksiköt ykkösestä alkaen saaden näin oikean vastauksen. Osa lapsista hyödynsi yhteen- ja vähennyslaskua, jolloin lisäämisen tai vähentämisen jälkeen yksiköitä ei tarvinnut erikseen laskea. Strategioiden tarkempi tunnistaminen antaisi tärkeää tietoa lapsen matemaattisen osaamisen tasosta ja matemaattisesta ajattelusta. Tämän vuoksi olisikin tärkeää tutkia myös lasten käyttämiä ratkaisustrategioita vastaavanlaisissa tehtävissä. Näin voitaisiin selvittää myös ongelmakohtia, jotka liittyvät tämän kaltaisten tehtävien ratkaisemiseen.

Maassamme on tällä hetkellä käytössä ja kehitteillä muutamia esi- ja alkuopetusikäisten matematiikan valmiuksien arviointiin tarkoitettuja testejä, mutta tärkeää on kehittää myös keinoja tukea lapsia, joilla ilmenee riski matematiikan oppimisen vaikeuksiin. Opettajat voivat saada tukea ja vinkkejä matematiikan opetukseen muun muassa Espoon ja Helsingin opetustoimen hankkeena aloitetun Matikkamateriaalitoiminnan sekä Hannele Ikäheimon perustaman Opperin kautta, joka tarjoaa Internet-sivujen lisäksi kirjallisuutta, testejä ja koulutusta. Opettajien täydennyskoulutukselle ja opettajien käyttöön suunniteltujen materiaalien kehittelylle on kuitenkin edelleen tarvetta.

Koska matematiikan oppiminen on luonteeltaan hierarkkista, vahvan perustan luominen korostuu. Tutkimuksissa (mm. Aunola ym. 2004) on todettu, että matemaattisten taitojen kehitys etenee esi- ja alkuopetusikäisillä kumulatiivisesti eli toisin sanoen jo

hyvät lähtötaidot omaavien lasten taidot kehittyvät nopeammin kuin lasten, joiden lähtötaidot ovat heikommat. Koulun alkaessa onkin tärkeää selvittää, millaisia taitoja ja tietoja lapsille on jo kertynyt ja lähteä rakentamaan uusia taitoja niiden pohjalta. Erityisen tärkeää olisi tunnistaa esiopetusikäisistä tai viimeistään koulutulokkaiden joukosta ne lapset, jotka tarvitsevat tukea matemaattisten taitojen kehityksessä. Tähän tarpeeseen kehiteltyjen arviointimenetelmien kokeilu ja luotettavuuden tutkiminen ansaitseekin selvästi jatkotutkimusta.

LÄHTEET

- Ahonen, T., Lamminmäki, T., Närhi, V. & Räsänen, P. 1995. Koulun aloittaminen ja varhaiset oppimisvaikeudet. Teoksessa P. Lyytinen, M. Korhonen & H. Lyytinen (toim.) Näkökulmia kehityspsykologiaan. Kehitys kontekstissaan. Porvoo: WSOY, 168-187.
- Ahonen, T. & Räsänen, P. 1995. Matemaattiset oppimisvaikeudet. Teoksessa H. Lyytinen, T. Ahonen, T. Korhonen, M. Korkman & T. Riita (toim.) Oppimisvaikeudet. Neuropsykologinen näkökulma. Helsinki: WSOY, 209-246.
- Aiken, L.R. 1994. Psychological testing and assessment. Boston: Allyn and Bacon.
- Alkula, T., Pöntinen, S. & Ylöstalo, P. 1994. Sosiaalitutkimuksen kvantitatiiviset menetelmät. Helsinki: WSOY.
- Anghileri, J. 2000. Teaching number sense. Lontoo: Continuum.
- Aubrey, C. 1997. Children's early learning of number in school and out. Teoksessa I. Thompson (toim.) Teaching and learning early number. Buckingham Philadelphia: Open University Press, 20-29.
- Aunio, P. 2006. Number sense in young children – (inter)national group differences and an intervention programme for children with low and average performance. Helsinki: Helsingin yliopisto.
- Aunio, P., Hannula, M. & Räsänen, P. 2004. Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 198-221.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.K. & Nurmi, J.E. 2004. Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology* 96, 699-713.
- Baroody, A. 1987. Children's mathematical thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers. New York: Teachers College Press.
- Benoit, L., Lehalle, H., & Jouen, F. 2004. Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development* 19, 291-307.

- Bermejo, V., Morales, S. & deOsuna, J.G. 2004. Supporting children's development of cardinality understanding. *Learning and Instruction* 14, 381-398.
- Boehm, A. E. 1986. *Boehm Test of Basic Concepts*. Sidcup, UK: The Psychological corporation.
- Boulton-Lewis, G. M. 1998. Children's strategy use and interpretations of mathematical representations. *Journal of Mathematical Behavior* 17, 219-237.
- Butterworth, B. 2005. The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 46, 3-18.
- Cronbach, L. J. 1990. *Essentials of psychological testing*. Viides painos. New York: Harper.
- Dehaene, S. 2001. Précis of the number sense. *Mind & Language* 16, 16-36.
- Dowker, A. 1998. Individual differences in normal arithmetical development. Teoksessä C. Donlan (toim.) *The development of mathematical skills*. Studies in developmental psychology. Hove, UK: Psychology Press, 275-302.
- Erätuuli, M., Leino, J. & Yli-Luoma, P. 1994. *Kvantitatiiviset analyysimenetelmät ihmistieteissä*. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet. 2002. Helsinki: Opetushallitus.
- Geary, D. C. 1995. Reflections of evolution and culture in children's cognition. Implications for mathematical development and instruction. *American Psychologist* 50, 24-37.
- Geary, D. C. 2000. From infancy to adulthood: the development of numerical abilities. *European Child & Adolescent Psychiatry* 9 (Suppl. 2), 11-16.
- Gelman, R. & Gallistel, C. R. 1978. *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.
- Ginsburg, H. P. & Seo, K-H. 1999. Mathematics in children's thinking. *Mathematical Thinking and Learning* 1, 113-129.
- Hannula, M. M. 2005. Spontaneous focusing on numerosity in development of early mathematical skills. *Turun yliopiston julkaisuja*. Sarja B. Osa 282. Turku: Turun yliopisto.
- Hannula, M. M., Räsänen, P. & Lehtinen, E (painossa). Development of counting skills: Role of spontaneous focusing on numerosity and subitizing-based enumeration. *Mathematical Thinking and Learning*.

- Hartikainen, S., Vuorio, J.M., Mattinen, A., Leppävuori, S-L. & Pahkin, L. 2001. Matematiikka. Teoksessa B. Högström & O. Saloranta (toim.) Esiope- tus tavoitteellisen oppimispolun alkuna. Helsinki: Opetushallitus, 76-95.
- Hautamäki, J. & Kuusela, J. 2004. Diagnostisen päättelämisen pulmista ja keinoista – matemaattiset oppimisvaikeudet. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettami- seen ja oppimiseen. Toinen uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 255-273.
- Heimo, H. 1993. Boehmin peruskäsitteesti. Helsinki: Psykologien kustannus.
- Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2001. Tutki ja kirjoita. 6.-7. painos. Helsinki: Tammi.
- Ikäheimo, H. 2002. Matematiikan keskeisten käsitteiden diagnoosi esiopetuksen alussa ja lopussa sekä 1. luokan alussa. (MAKEKO E/1). Helsinki: Opperi.
- Ikäheimo, H. & Risku A-M. 2004. Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 222-240.
- Irons, C. J. 2002. Number representations that assist children to succeed in mathe- matics. Saatavilla www -muodossa:
<URL:http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2/content_stora ge_01/0000000b/80/0d/df/3c.pdf> (Luettu 16.9.2006)
- Kinnunen, R. & Vauras, M. 1998. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala- asteella. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksentutki- muslaitos, 269-282.
- Kinnunen, R., Lehtinen, E. & Vauras, M. 1994. Matemaattisen taidon arviointi. Te- oksessa M. Vauras, E. Poskiparta ja P. Niemi (toim.) Kognitiivisten tai- tojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla. Oppimistutkimuksen keskus, julkaisuja 3. Turku: Oppimistutkimuksen keskus, 55-76.

- Lampinen, A., Ikäheimo, H. & Dräger, M. 2007. MAVALKA. Matematiikan valmiuksien kartoitus. Helsinki: Opperi.
- Liikanen, P. 1995. Lähtötilanteen kartoitus peruskoulun 1.luokalla. Kehityopsykologiset valmiudet koulumenestyksen ennustajana. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Mattinen, A. 2006. Huomio lukumääriin. Tutkimus 3-vuotiaiden lasten matemaattisten taitojen tukemisesta päiväkodissa. Sarja C. Osa 247. Turku: Turun yliopisto.
- Mazzocco, M. M. M. & Thompson, R.E. 2005. Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research & Practice*, 20, 142–155.
- Mix, K. S. 2002. The construction of number concepts. *Cognitive Development* 17, 1345-1363.
- Piazza, M., Mechelli, A., Butterworth, B. & Price, C. J. 2002. Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes? *NeuroImage* 15, 435-446.
- Resnick, L.B. 1989. Developing mathematical knowledge. *American Psychologist* 44, 162-169.
- Rittle-Johnson, B. & Siegler, R.S. 1998. The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. Teoksessa C. Donlan (toim.) *The development of mathematical skills. Studies in developmental psychology*. Hove, UK: Psychology Press, 75-110.
- Räsänen, P. 1999. Matematiikan oppimisvaikeudet. Teoksessa T. Ahonen & T. Aro (toim.) *Oppimisvaikeudet. Kuntoutus ja opetus yksilöllisen kehityksen tukena*. Jyväskylä: Atena, 332-359.
- Räsänen, P. 2005. BANUCA (Basic numerical and calculation abilities). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Sophian, C. 1998. A developmental perspective on children's counting. Teoksessa C. Donlan (toim.) *The development of mathematical skills. Studies in developmental psychology*. Hove, UK: Psychology Press, 27-46.
- Spelke, E.S. 2000. Core knowledge. *American Psychologist* 55, 1233-1243.
- Starkey, P. & Cooper, R.G. 1995. The development of subitizing in young children. *British Journal of Developmental Psychology* 13, 399-420.

- Thompson, I. 1997. Developing young children's counting skills. Teoksessa I. Thompson (toim.) Teaching and learning early number. Buckingham: Open University Press, 123-132.
- Trick, L. M. & Pylyshyn, Z. W. 1994. Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. Psychological Review 101, 80-102.
- Vaidya, S.R. 2004. Understanding dyscalculia for teaching. Education 124, 713-716.
- Vainionpää, T., Mononen, R. & Räsänen, P. 2003. Matemaattiset valmiudet. Teoksessa T. Siiskonen, T. Aro, T. Ahonen & R. Ketonen (toim.) Joko se puhuu? Kielenkehityksen vaikeudet varhaislapsuudessa. Opetus 2000. Jyväskylä: PS-Kustannus, 292-301.
- Valli, R. 2001. Johdatus tilastolliseen tutkimukseen. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Van Luit, J. E. H., Van de Rijt, B. A. M. & Aunio, P. 2005. Lukukäsitteistä. Helsinki: Psykologien kustannus.
- Vilenius-Tuohimaa, P. 2005. Vanhempien koulutustaso, lapsen kielellinen ilmaisu ja tehtävääorientoatio matemaattisten taitojen selittäjinä koulutien alussa. Helsinki: Helsingin yliopisto.
- Wender, K.F. & Rothkegel, R. 2000. Subitizing and its subprocesses. Psychological Research 64, 81-92.
- Wynn, K. 1998. Numerical competence in infants. Teoksessa C. Donlan (toim.) The development of mathematical skills. Studies in developmental psychology. Hove, UK: Psychology Press, 3-25.
- Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 111-122.