INHIMILLISTÄ MATEMATIIKKAA –

Katsaus kolmen viidennen luokan matematiikan oppikirjan geometriaosuuksiin

Miko Aavikko

Pekka Lampinen

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma

Luokanopettajien aikuiskoulutus

Chydenius-Instituutti

Jyväskylän yliopisto

Syksy 2003

Aavikko, M. & Lampinen, P. 2003. Inhimillistä matematiikkaa – Katsaus kolmen viidennen luokan matematiikan oppikirjan geometriaosuuksiin. Jyväskylän yliopisto. Chydenius-Instituutti. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. 97 s. ja 10 liitettä.

TIIVISTELMÄ

Tutkimme kolmen matematiikan oppikirjan geometriaosuuksia. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, minkälaisia aktivoivia ominaisuuksia sisältäviä tehtäviä kirjojen geometriaosuuksissa esiintyy. Samalla kiinnitettiin huomiota siihen, miten oppikirjojen geometriaosuudet vastaavat Perusopetuksen opetuskokeiluissa lukuvuonna 2003 - 2004 noudatettavia opetussuunnitelman perusteita vuosiluokille 3 - 9.

Oppikirjat on tärkeä tutkimuskohde, koska oppikirjojen tarjonta on nykypäivänä runsasta ja oppikirjojen sisällöt vaihtelevat. Oppikirja on tärkeä työväline opettajalle ja se on edelleen hyvin merkittävä tekijä opettamisessa ja näin myös oppilaiden oppimisessa. Kansainvälisissä matemaattisesta osaamisesta kertovissa tutkimuksissa (esim. PISA-tutkimus) Suomi on sijoittunut kansainvälisen mittapuun mukaan hyvin, mutta algebran ja geometrian osuuksissa suomalaiset eivät ole menestyneet.

Tutkimusmenetelmänä käytettiin sisällön analyysia. Tutkimus on laadullinen, mutta siinä on myös määrällisiä menetelmiä. Tutkittaviksi kirjoiksi valitsimme Laskutaito 5:n, Mieti ja laske 5:n ja Hei, nyt lasketaan 5:n oppilaan kirjojen geometriaosuudet. Tutkimusta varten käytimme Uusien opetussuunnitelmaperusteiden 2003 – 2004 geometrian oppisisältöjä luokille 3 - 5. Aktivoivien tehtävien etsimistä varten loimme radikaaliin konstruktivismiin pohjautuvan luokittelurungon. Näiden avulla tutkimme aineiston. Aineiston analyysissa käytimme apuna taulukoita ja pylväsdiagrammeja. Tulokset osoittavat, että kirjoissa olevien geometriatehtävien aktivoivien ominaisuuksien määrä vaihteli kirjojen välillä. Samoin kirjojen geometriaosuuksien vastaavuudet uusiin opetussuunnitelmasisältöihin poikkesivat toisistaan, eivätkä täysin vastanneet uusia opetussuunnitelmaperusteita.

Tulostemme perusteella voimme todeta, että tutkituista kirjoista Mieti ja laske 5:ssä on eniten luokituksemme mukaisia aktivoivia ominaisuuksia sisältäviä tehtäviä. Samoin Mieti ja laske 5 vastasi parhaiten uusien opetussuunnitelmaperusteiden geometriasisältöjä.

Avainsanat: geometria, radikaali konstruktivismi, oppikirja, aktivoiva tehtävä, sisällön analyysi, opetussuunnitelman perusteet

Sisällys

Voit oppia kolmella tavalla,

yrityksen ja erehdyksen kautta. Se on kova tapa.

matkimalla. Se on helppo tapa.

ajattelemalla. Se on jalo tapa.

-Kiinalainen viisaus-

1 Johdanto

Tutkimuksemme lähti liikkeelle kiinnostuksestamme toiminnalliseen geometriaan. Luokanopettajien aikuiskoulutuksessa olemme havainneet toiminnallisuuden ja aktiivisen oppimisen merkityksen ajattelun ja oppimisen avartajana niin opetustyössä kuin omassa opiskelussammekin. Suhteemme matematiikkaan yleensä on ollut myönteinen, etenkin geometriaan. Geometriassa kiehtoo sen kauneus, harmonia ja järjestelmällisyys sekä sen luonteeseen kuuluva tekeminen – suunnittelu, mittaaminen ja rakentaminen.

Koska mielestämme maamme kouluissa matematiikan opettaminen pohjautuu suurelta osin oppikirjojen sisältämään ainekseen, lähdimme tutkimaan oppikirjojen vastaavuutta uusiin opetussuunnitelman perusteisiin. Uudet matematiikan opetussuunnitelman perusteet sisältävät kuvauksen oppilaan hyvän osaamisen tasosta 5. luokan päättyessä ja siksi halusimme tutkia nimenomaan 5. luokan oppikirjojen geometriaosuuksia. Oppikirja halutaan nähdä yleisesti opettamisen apuvälineenä – ei niinkään opetusta ohjaavana tekijänä. Kuitenkin oppilaan kannalta oppikirja on kosketuspinta opittavaan ainekseen ja siten kirjan on oltava hänen oppimistaan edesauttava. Tästä syystä mielenkiintomme kohdistui juuri oppilaan kirjaan.

Uusissa opetussuunnitelman perusteissa geometrian sisältöjä on tarkennettu verrattuna aikaisempaan Peruskoulun opetussuunnitelman perusteisiin 1994. Opetussuunnitelmissa on viime aikoina pyritty myös konkretisoimaan matematiikan sisältöjä sekä syventämään sen ymmärtämistä toiminnan avulla. Ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen on nähty niin ikään tärkeäksi. Toisin sanoen opetussuunnitelmissa on siirrytty perinteisestä oppimiskäsityksestä aktiiviseen, konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen. Varsinaisia tutkimuksia matematiikan oppikirjojen aktivoivista tehtävistä emme löytäneet, mutta pyrimme sisäistämään aktivoivan oppimisen ajatuksia tutustumalla radikaalin konstruktivismin isän, Jean Piaget`n sekä Ernst von Glasersfeldin ajatuksiin.

Tutkimuksessamme kiinnostuksen kohteena on, miten oppikirjojen tehtävät vastaavat opetussuunnitelman perusteiden geometrian sisältöjä? Onko kirjoissa sellaista oppilasta aktivoivaa ainesta, joka kehittäisi matemaattista ajattelua ja geometrista hahmottamista? Millaista aktivoiva aines on?

Menetelmänä tutkimuksessamme käytämme sisällön analyysia. Pääosin tutkimus on laadullinen, mutta siinä on myös määrällisiä ominaisuuksia. Laadullisuus korostuu aktivoivien tehtävien luokitusrunkoa laadittaessa ja arvioitaessa tehtäviä niiden perusteella. Määrälliset ominaisuudet painottuvat laskettaessa prosenttijakaumia suhteessa uuteen opetussuunnitelmaan ja muodostamaamme tehtäväluokitukseen. Näin kykenemme vertailemaan kirjojen geometriaosuuksia toisiinsa.

2 Geometria

Sana ”geometria” on tullut Kreikan sanoista ge, joka tarkoittaa ”maa”, ja metrein, joka tarkoittaa ”mitata”. Nimityksillä oli alussa konkreettinen merkitys. Kreikan teoreettinen geometria syntyi sen jälkeen, kun kreikkalaiset tutustuivat egyptiläiseen geometriaan. (Malaty 1997, 45.) Egyptiläinen geometria oli lähinnä yhdistelmä käytännöllisiä ongelmia, jotka liittyivät maanmittaukseen, pyramidien rakentamiseen jne. Niili tulvi vuosittain ja jotta viljelykelpoisen maan jako Niilin laaksossa olisi ollut oikeudenmukainen, tarvittiin tarkkoja mittauksia. Niilin tulvien aiheuttamista maanmittauksista syntyi nimitys geometria. (Sjöberg 1995, 7.)

Geometria kehittyi itsenäisenä tieteenä antiikin Kreikassa. Tunnetuimpia sen ajan kreikkalaisia matemaatikkoja olivat *Pythagoras* (n. 580 - 500 eKr.) ja *Eukleides* (n.300 eKr.). Pythagoras on kaikille koululaisille tuttu nimeään kantavasta kolmion sivujen pituuksien välisestä yhtälöstä, *Pythagoraan lauseesta.* Eukleideen kehittämä klassinen geometria on ensimmäinen systemaattinen geometrian kokonaisuus, joka rakentuu sille periaatteelle, että jokainen asia, joitakin peruslauseita lukuun ottamatta, todistetaan ennen kuin sitä voidaan pitää varmana tietona. (Wuolijoki & Norlamo 1999, 6.)

Ihmisen löytäessä ympäristöstään säännönmukaisuuksia, hän on saanut tietoa. Oppilaan tuottaessa matemaattista tietoa, on sen luotettavuuden kriteerinä vastaavuus fyysisen todellisuuden kanssa. Tämä on hyvä tuki aritmeettisen tiedon ymmärtämiselle: oppija havainnoi ja järkeilee ja näin konstruoi tietonsa ja vakuuttuu sen oikeutuksesta. Euklidisen geometrian tiedosta suuri osa on vastaavalla tavalla hyväksyttävää ja oikeaksi havaittavaa. (Leino 1998, 42.)

Geometriaa erilaisine muotoineen on läsnä kaikkialla – esineissä, joita päivittäin käsittelemme, rakennuksissa, joissa liikumme, kuvissa, joita katselemme. Geometria on syntynyt jokapäiväisen elämän tarpeista ja on matematiikan vanhimpia aloja. Geometristen tietojen ja taitojen oppimisella on mielestämme suuria mahdollisuuksia oppilaiden henkisen kehityksen kannalta. Mahdollisesti mikään muu oppiaineksen alue ei tarjoa niin käyttökelpoisia keinoja kehittää oppilaiden luovaa henkistä työskentelyä. Matematiikan käsikirjassakin geometria määritellään seuraavasti: ”Geometria on matematiikan päälaji, joka käsittelee avaruuden luonnetta ja muotoa, suuruutta ja muita kuvioiden ominaisuuksia.” (Thompson 1994, 118.)

2.1 Geometria osana matematiikan opettamista

Matematiikan opettaminen on ollut ja on edelleen muutoksen kourissa. Maailma muuttuu nopeasti ja siksi niin matematiikan kuin muidenkin oppiaineiden oppimisympäristöjen tulee olla dynaamisia ja avoimia. Yhteiskunnan teknistymisestä ja tietopainotteisuudesta huolimatta koulussa on edelleen opetettava myös perinteisiä käsitteitä ja laskennallisia taitoja. Oppilaasta ei voi tulla tietokoneohjelmoijaa ilman, että hän oppii matemaattiset peruskäsitteet ja niiden käytön. Parhaimmillaan matematiikan opettaminen on monimuotoista ja tavoitteiden tulisi määrätä kulloinkin käytettävien opetusmenetelmien valinnan. Siksi asiayhteydet ja metodit tulisi olla tarkkaan harkittuja. Näin matematiikka voisi olla hauskaa ja käyttökelpoista.

Pehkonen (1984) on todennut geometrian opettamisen tärkeäksi, koska matematiikalla on olennainen yhteys reaalimaailmaan ja ympärillämme on jatkuvasti geometriaa. Pehkonen korostaa myös geometrian tärkeyttä muiden matematiikan osa-alueiden havainnollistamisessa, geometria ei siis suinkaan ole irrallinen. Geometria on myös esimerkki matemaattisesta systeemistä. Se oli ensimmäinen loogisesti järjestetty matematiikan osa, ja täten sillä on ollut suuri vaikutus matematiikan muiden osa-alueiden kehitykseen (Pehkonen 1984, 29 - 33.)

Geometriaa ei tulisi opettaa koulussa pelkästään geometrian oppisisältöjen oman merkittävyyden vuoksi. Geometrian opiskelu on tärkeää myös siksi että sen kautta opittaisiin jotakin sellaista, jolla olisi siirtovaikutusta muun tyylisen matematiikan oppimiseen. Geometria ei saisi olla vain irrallinen osa matematiikkaa. Matematiikka on kumulatiivinen oppiaine, jossa uutena opittava asia on aiemmin opitun käsitteellisen ja toimenpiteisiin liittyvän tiedon jatkumo. Toisin sanoen uusi asia rakentuu aiemmin opittujen käsitteiden ja matemaattisten toimenpiteiden pohjalle. Näin geometriankin tulisi olla luonnollinen osa suurempaa matematiikan kokonaisuutta.

Ahteen ja Pehkosen (2000) mukaan matemaattinen ajattelu muodostuu matemaattisiksi tunnistettavista toimituksista eli operaatioista sekä tapahtumasarjoista eli prosesseista ja niihin liittyvästä dynamiikasta. Matematiikan lähtökohtana on ollut löytää yrityksen ja erehdyksen kautta käyttötarkoitukseen sopivia sääntöjä. Matematiikan luonne tulee erityisesti esille, kun pyritään kehittämään käytännön tilanteessa eteen tulevan ongelman kautta vastaava matemaattinen malli ja soveltaa mallia uuteen käytännön tilanteeseen. (Ahtee & Pehkonen 2000, 18, 33 - 34.) Korostuu siis matematiikan yhteys reaalimaailmaan.

2.2 Geometrian peruskäsitteitä ja menetelmiä

Wuolijoki ja Norlamo (1999) lukevat klassisiksi geometrian peruskäsitteiksi pisteen, suoran, tason ja kulman. Niiden avulla voimme muodostaa muita geometrisia peruskäsitteitä ja rakentaa tasokuvioita ja avaruuskappaleita.

”*Piste* on yksinkertaisin geometrian peruskäsite. Pistettä ei voida jakaa osiin. Kaikki kuviot muodostuvat pisteistä.
Suora. Kaksi pistettä määrittävät suoran.
Taso. Kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla, määrittävät tason.
Kulma on kahden samasta pisteestä lähtevän puolisuoran väliin jäävä tason alue”
(Wuolijoki & Norlamo 1999, 7 - 8.)

Haapasalon (1998a) mukaan geometriassa pyritään visuaaliseen hahmottamiseen perustuvasta toiminnasta kohti tasokuvioiden ja kappaleiden analysoimista ja järjestämistä täsmällisempien ominaisuuksien mukaan. Kun lukukäsite, mittaamisen taidot sekä laskutaidot laajenevat, geometristen objektien kvantitatiivinenkin tarkastelu on mahdollista. Esim. yksinkertaisten kuvioiden ja kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien sekä ympyrän kehän ja pinta-alan kokeellinen määrittäminen tulevat oppilaalle helpommaksi. (Haapasalo 1998a, 250.)

Kun opitaan mittaamisen perusteita, mittavälineen valinta sekä arviointi- ja tarkkuuskäsitteet on syytä pitää heti ala-asteen alusta lähtien mukana. *Uusissa perusopetuksen opetuskokeiluissa lukuvuonna 2003 - 2004 noudatettavissa opetussuunnitelman perusteissa vuosiluokille 3 - 9 ja perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa vuosiluokille 1 - 2* (2002) tähdentyy mittaamisen periaatteen ymmärtäminen: kuinka monta kertaa mittayksikkö sisältyy mitattavaan. Samalla painotetaan mittavälineiden käyttöä, tärkeimpien mittayksiköiden käyttöä, vertailua ja muuntamista sekä mittaustulosten arviointia. (Perusopetuksen opetuskokeiluissa lukuvuonna 2003 - 2004 noudatettavat opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 3 - 9 ja perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 1 - 2 2002[1], 105.) Esimerkiksi oppilaan oman toimintaympäristön kappaleiden ominaisuuksia tutkimalla ja luokittelemalla hankitaan geometrisia kokemuksia. Piirtämisharjoituksilla on myös tärkeä merkitys. Tällä tavoin rakennetaan vähitellen mm. kolmion, nelikulmion, ympyrän ja pinta-alan käsitteitä.

[1] Tästä lähtien käytämme Perusopetuksen opetuskokeiluissa lukuvuonna 2003 - 2004 noudatettavista opetussuunnitelman perusteista vuosiluokille 3 - 9 ja perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista vuosiluokille 1 - 2 nimitystä *Kokeiluperusteet 2002.*

Wuolijoki ja Norlamo (1999) jakavat geometrisessa tarkastelussa sovellettavat menetelmät seuraavasti:

- Luokittelu
- Piirtäminen
- Todistaminen
- Laskeminen

Luokittelu. Yksi keino jäsentää ympäröivää maailmaa on luokitella samaan luokkaan esineitä, ilmiöitä tai tapahtumia, joilla on samanlaisia ominaisuuksia. Käyttäessämme geometristä luokitusta, kiinnitämme huomiota esineiden muotoon, kokoon, tilaan tai paikkaan.

Piirtäminen. Kun jokin ongelma ratkaistaan geometrisesti piirtämällä, käytetään vain harppia ja viivainta.

Laskeminen. Algebrallinen laskeminen[2] sopii monien geometristen ongelmien ratkaisemiseen. Usein varsinainen geometrinen osuus ratkaisussa on kuvion hahmottaminen, geometristen käsitteiden ja oikeiden laskukaavojen tietäminen sekä lopputuloksen oikeellisuuden arviointi.
(Wuolijoki & Norlamo 1999, 10 - 13.)

Haapasalon (1998a) mukaan *todistaminen* on jo olemassa olevien, tavallaan ilmiselvien tosiasioiden varassa tapahtuvaa keksimistä. Tästä saattaakin seurata ongelma todistamiseen liittyen: miten oppilas motivoituu todistamaan mitään, jos säännöt ja käsitteet, joiden mukaan olisi todistettava, ovat jo itsestään selviä. (Haapasalo 1998a, 141.)

Geometria ja ongelmanratkaisu ovat saaneet viime vuosina tehdä tilaa yrityksille korostaa matematiikan formaalia struktuuria, yleistettävyyttä ja

---

[2] algebralliset operaatiot: Tavallisessa algebrassa operaatiot ovat yhteenlasku, vähennyslasku, kertolasku, jakolasku, juurten ottaminen ja korottaminen joko kokonais- tai reaalilukupotenssiin. Ei-algebrallisia eli transkendenttisia operaatioita ovat mm. logaritmit. (Thompson 1994, 19.)

abstraktiutta. Siksi matematiikan opetuksen laatu useimmissa maissa on laskenut viimeisen neljänkymmenen vuoden aikana. Oppilaan mahdollisuudet ”tehdä matematiikkaa” ovat jääneet entistäkin vähäisemmiksi. (Haapasalo 1998a, 133.) Myös Silfverberg (1999) korostaa nimenomaan geometrian opetuksen määrän vähenemistä koulussa muiden matematiikan sisältöjen kustannuksella. Hänen mukaansa geometrian oppisisällöt opetetaan edelleen liikaa faktanomaisina, valmiina tuloksina, ongelmakeskeinen lähestymistapa matematiikkaan ei ole juurtunut geometriaan. Eikä lisäksi opettajien tietämys geometriasta riitä aina laadukkaan opetuksen antamiseen. (Silfverberg 1999, 22.)

OECD-maissa on tehty PISA- tutkimus koskien äidinkielen, luonnontieteiden sekä matematiikan osaamista. Pisan tutkimuksessa matematiikan tehtävien kokonaisuudet käsittivät ensisijaisesti algebran ja geometrian sisältöjä. Matematiikassa suomalaisnuorten osaaminen oli sisällöllisesti tasaista, mutta heikosti suoriutuvia oppilaita on Suomessakin. Huolestuttavinta tutkimuksessa kuitenkin oli se, että perustelemista vaativissa tehtävissä vastaamatta jättäneiden osuudet olivat suuria, jopa 21 - 55 %. (Välijärvi, Linnakylä, Kupari, Reinikainen, Malin & Puhakka 2001, 5 - 50.) Perusteluja vaativat tehtävät edellyttävät selkeästi matematiikan ”puhumisen taitoja”. Jos perusteluja vaativat tehtävät puuttuvat matematiikan oppikirjoistamme ja oppitunneiltamme lähes kokonaan tai opetustilanteet eivät perustu keskustelulle ja vuorovaikutukselle heti alkuopetuksesta alkaen, ei ole syytä ihmetellä PISA- tutkimuksen tuloksia vastaamatta jättäneiden osalta.

Vuonna 1999 järjestettiin TIMSS- tutkimus, jossa tutkittiin matematiikan ja luonnontieteiden koulusaavutuksia. Tutkimuksessa suomalaiset osasivat hyvin kuvioista pääteltäviä yksinkertaisia mittaustehtäviä ja luvuilla laskemista, mutta eivät menestyneet algebran ja geometrian osuuksissa (Näätänen 2001, 12 - 17). Painottuuko geometrian opetus liikaa mittaamiseen? Riittäkö geometrian opetukseksi se, että opitaan pinta-alojen ja tilavuuksien mittaamisen kaavat? Koulujen tulisi mielestämme tarjota entistä monipuolisempia, haastavampia ja oppilasta palkitsevia oppimismahdollisuuksia. Hyvänä esimerkkinä voisi olla aktiivisen, toiminnallisen geometrian lisääminen käytännön opetukseen.

2.3 Matemaattinen tieto

Matematiikkaa tulisi käsitellä kokonaisuutena. Vaikka onkin tarpeen oppia tietyt käsitteet ja menetelmät, kokonaisuutta ei saa unohtaa. Kokonaisuutta käsiteltäessä käsitteet, menetelmät ja älylliset prosessit liittyvät yhteen. Siksi opiskeluympäristöissä tulisi eheyttää käsitteitä ja ideoita erilaisten aiheiden ja muiden alojen kanssa. Näin oppija saa, keksii tai luo tietoa parhaiten, todella tarkoituksenhakuisen toiminnan kautta.

Matemaattinen tieto muodostuu konseptuaalisesta eli käsitteellisestä ja proseduaalisesta eli toimenpiteisiin liittyvästä tiedosta. Näissä tiedon lajeissa on eroja, joiden vuoksi on syntynyt voimakasta keskustelua ja väittelyä siitä, miten oppilaat oppivat matematiikkaa ja erityisesti, miten heitä pitäisi opettaa. Nämä keskustelut ovat johtaneet siihen, että onkin alettu pohtia, minkä tyyppinen tieto on tärkeintä ja mikä olisi tarkoituksenmukainen määrä käsitteellistä tai toisaalta toimenpiteisiin liittyvää tietoa. (Hiebert & Lefevre 1986, 1.)

Näitä kahta tiedon lajia on monissa tapauksissa vaikeaa erottaa toisistaan. Joku tieto näyttää olevan hieman molempia ja joku taas ei kumpaakaan. Pyrkiessämme käsitteelliseen tietoon huomaamme hallitsevamme yhtäkkiä myös toimenpiteisiin liittyvää tietoa. Hiebertin ja Lefevren (1986, 3) mukaan molemmista mainituista tiedon lajeista on helppoa kuvata ydin, mutta niiden ulkoisia rajoja on vaikea selittää.

Useimmat oppilaat eivät ole saaneet kokea sitä, että matemaattinen tieto on syntynyt ongelmanratkaisuprosessien seurauksena. Vaikka matemaattinen tieto syntyykin heurististen prosessien tuloksena pitkällisten vaiheiden kautta, on kouluissa tietoa opetettu oppilaille lähinnä deduktiivisella ja opettajajohtoisella menetelmällä valmiiksi strukturoituna. (Haapasalo 1998a, 244.) Samoilla linjoilla Haapasalon kanssa ovat myös Malaty (1997) ja Joki (2003). Heidänkin mukaansa geometrian opetus koulussa supistuu siihen, että oppilaalle annetaan mitat ja hänen käsketään laskea piirejä, pinta-aloja tai tilavuuksia. Oppilaan on laskettava, vaikkei hän välttämättä edes ymmärrä, mistä on kysymys. Geometriaa käsitellään edelleenkin hyvin sirpaleisena. (Malaty 1997, 46; Lecorre 2003, 30.)

On olemassa myös matematiikan tietoa, jo alkuopetuksessa, jota oppilaan on mahdotonta tarkistaa pelkästään havaintonsa perusteella. Tällainen tieto opitaan monimutkaisten prosessien kautta sosiaalisessa vuorovaikutuksessa. Tukena ovat oppilaan monenlaiset havainnot, päättelyt ja muut verkottumiset relevanteilta tuntuviin tiedonpalasiin, mutta näiden kautta abstraktit kohteet voivat vain jossain määrin tulla konkreettisemmiksi, eivät suoraan havaittavaksi todellisuudeksi. (Leino 1998, 43.) Sekä ongelmanratkaisu että sosiaalisessa vuorovaikutuksessa tapahtuva yhteistoiminnallinen matemaattinen keskustelu ovat radikaalin konstruktivismin peruspilareja. Radikaalissa konstruktivismissa pyritään aktivoimaan oppilaan ajattelua ja johdattamaan häntä sekä itseohjautuvaan että yhteistoiminnalliseen ongelmanratkaisuun ja matematiikan puhumiseen. (ks. luku 4.2.)

3 Piaget´n kognitiivisen kehitysteorian tarkastelua

Piaget´n tutkimusten mukaan lapsi käy läpi tietyt kehityskaudet määrätyssä järjestyksessä. Älyllisessä käyttäytymisessä voidaan erottaa neljä kehityskautta:

Sensomotorinen kausi 0 - 2 vuotta[3]
Esioperationaalinen kausi 2 - 7 vuotta[4]
Konkreettisten operaatioiden kausi 7 - 12 vuotta
Formaalisten operaatioiden kausi 12 vuotta -
(Piaget 1988, 98 - 109.)

Tutkimuksemme kohteena olevia viidennen luokan oppikirjoja käyttävät n. 11-vuotiaat lapset. He ovat keskimäärin konkreettisten operaatioiden kaudella, siirtymässä kuka milläkin aikavälillä formaalisten operaatioiden kaudelle. Tästä syystä käsittelemme seuraavassa vain näitä kausia.

<u>Konkreettisten operaatioiden kausi 7 - 12 v</u>
Lapsi havaitsee tällä kaudella monia loogisia operaatioita, kun ajattelun kohteet ovat esillä. Hän ymmärtää operaatioiden käänteisyyden, kykenee luokittelemaan ja tekemään sarjoja ominaisuuksien perusteella. Lapsi ei kuitenkaan vielä pysty irtautumaan läsnä olevasta tilanteesta. Lapsi pystyy järjestelmällisesti keskittymään omaan toimintaansa. Samalla lapsen toiminta laajenee kaikilla kehityksen alueilla minäkeskeisyydestä desentralisaatioon, toimintojen hajauttamiseen. (Piaget 1977, 124; Piaget 1988, 106 - 107.)

[3] **Sensomotorinen kausi**: lapsella ei ole vielä kieltä käytössään. Symbolifunktio puuttuu, eikä vauva näin kykene järjen eikä tunteen tasolla esittämään symbolein ihmisiä tai esineitä silloin, kun nämä eivät ole läsnä. Kognitiiviset osarakenteet sekä tunnereaktiot, jotka ovat lähtökohtana hänen älynsä ja tunteidensa kehittymiselle, muodostuvat. (Piaget 1977, 13.)

[4] **Esioperationaalinen kausi**: Symbolifunktio ilmaantuu kielenä, symbolisena leikkinä. Lapsi ei kuitenkaan vielä kykene soveltamaan käytössä olevia tilan, ajan ja syysuhteen skeemoja kaukaiseen tilaan ja aikaan. (Piaget 1988, 105.)

<u>Formaalisten operaatioiden kausi 12 v -</u>

Formaalisten operaatioiden kaudella lapsen kehitykseen mahtuu runsaasti muutoksia. Ajattelu kehittyy noudattamaan logiikan perussääntöjä. Lapsi kykenee tekemään päätelmiä kohteen konkreettisesta läsnäolosta riippumatta. Lapsi kykenee tekemään päätelmiä abstraktien ja todellisuudesta ristiriitaisten käsitteiden varassa. Piaget´n määritelmän mukaan kaikki ihmiset eivät tule välttämättä koskaan saavuttamaan formaalisten operaatioiden tason asettamia ajattelun ehtoja. (Piaget 1977, 126; Piaget 1988, 107.)

11-vuotiaana (5-luokkalainen) lapsi alkaa siirtyä formaalien eli muodollisten operaatioiden vaiheeseen, joka tosin vaikuttaa lähinnä lapselle tuttuihin asioihin. Tällöin 5-luokkalainen kykenee ajattelussaan noudattamaan logiikan perussääntöjä ja tekemään päätelmiä riippumatta kohteiden konkreettisesta läsnäolosta. Abstraktit asiat ja todellisuuden kanssa ristiriidassa olevat ja oletuksiin perustuvat päätelmät alkavat pikkuhiljaa tulla mahdollisiksi. Olennaista kuitenkin on, ettei lapsi pysty ajattelussaan täysin irtautumaan läsnä olevasta tilanteesta. 11-vuotiaiden lasten kanssa tulee huomata, että osa heistä saattaa olla vielä konkreettisten operaatioiden vaiheessa, jolloin oppilas hallitsee loogisia sekä käänteisiä ajattelumuotoja, mutta lähinnä konkreettisten toimintojen avulla. Formaalien operaatioiden vaiheeseen siirtyessään oppilaalla saattaa olla vaarana se, että operoitaessa pelkästään abstraktilla tasolla oppilas ei aina pystykään omaksumaan käsitteitä tai ratkaisemaan ongelmaa. Joidenkin oppilaiden ajatteluun alkaa taas vähitellen kasvaa jo tietoisuus ja ristiriitaisuuksien hyväksyminen. (Kuusinen & Korkiakangas 1999, 107 - 109; Leino 1977, 27.)

Piaget kiinnitti huomiota kehityksen muutokseen siirryttäessä vaiheesta toiseen. Yksilö voi kuitenkin olla samanaikaisesti usealla eri kehitysvaihetasolla riippuen siitä, mitä kehityksen aluetta tarkastellaan. Kehitys etenee vaiheittain, mutta lapsen oma aktiivinen toiminta säätelee yksilöllistä kehityskulkua. Niinpä voisi matematiikan näkökulmasta ajatella useimpien 5-luokkalaisten lasten vielä olevan konkreettisten operaatioiden tasolla, osan formaalisten operaatioiden tasolla, osan ehkä vielä jopa esioperationaalisella tasolla. Tärkeäksi kohoaakin opettajan opetustyylin ohella myös oppikirjojen osuus. Antavatko oppikirjat mahdollisuuden oppilaille toimia juuri heidän omaa kehitystään vastaavalla tasolla?

Piaget oli yksi radikaalin konstruktivismin edustajista. Hänen suhteensa tietoon oli sellainen, ettei ihminen voi nähdä ulkoista maailmaa sellaisena, kuin se on. Ihmisen aikaisemmat kokemukset ja tietorakenteet ohjaavat ihmisen havaintoja. Maailma havaitaan vain sellaisena kuin se havaitsijalle ilmenee. (Leino 1993, 2 - 3.)

Piaget´n esittämät näkökulmat ovat erinomaisia konstruktivistisia perusteita matemaattisen tiedon oppimiselle: oppilas rakentaa tietonsa manipuloimalla ympäristöään. Oppilas voi vakuuttua tiedon totuudellisuudesta ja oikeutuksesta omien kokemustensa kautta. Vaikka tieto olisi vain oppilaan mielessä, on tällainen ymmärtäminen tehokkaampaa kuin esimerkiksi opettajan tai oppilastovereiden vahvistama ”arvaus”. (Leino 1998, 41.)

Piaget´n mukaan ärsyke saa merkityksensä vasta kun oppija hahmottaa sen sisäisten tietorakenteidensa kautta. Sen pohjalta oppija sulauttaa, assimiloi ärsykkeen tietorakenteisiinsa ja tulkitsee sitä. Tulkintansa pohjalta oppija sopeuttaa, akkomodoi toimintaansa ulkoiseen ärsykkeeseen. Piagetin lähestymistapa tietoon on holistinen, kokonaisvaltainen. Hänen mukaansa oppimisen ja älykkyyden rakenne on ratkaisevasti erilainen oppijan kehityksen eri vaiheissa. Oppija kypsyy vähitellen ja oppii ajattelemaan eri yhteyksiä asioiden välillä. Kaikilla alueilla, joilla oppija saa tietoa kokemuksistaan, on tämä toiminta sulauttamistoimintaa: oppija liittää asioita skeemoihinsa, jotka organisoituvat sekä hänen omien toimintojensa että kohteen ominaisuuksien ansiosta. Tätä kokemusperäistä tietoa voi hankkia joko välittömän havainnon kautta tai liittämällä yhteen ajan kuluessa toistuneet kokemukset, toisin sanoen oppia. (Piaget 1988, 136 - 138; Puolimatka 2002, 88 - 91.)

4 Konstruktivismi

Viimeisen vuosikymmenen aikana konstruktivistinen oppimisnäkemys on ollut voimakkaasti vallalla. Vaikka konstruktivismi on saanut viime aikoina osakseen varsin ankaraakin kritiikkiä, mielestämme matematiikan opetuksessa tulisi käyttää luovia ja oppilaan omaa aktiivisuutta korostavia opetusmenetelmiä ja oppimisympäristöjä.

Tätä mieltä ovat myös uusien Kokeiluperusteiden 2002 laatijat:

> ”Oppiminen on seurausta oppilaan aktiivisesta ja tavoitteellisesta toiminnasta, jossa hän aiempien tietorakenteidensa pohjalta käsittelee ja tulkitsee opittavaa ainesta. Vaikka oppimisen yleiset periaatteet ovat kaikilla samat, oppiminen riippuu oppijan aiemmin rakentuneesta tiedosta, motivaatiosta sekä oppimis- ja työskentelytavoista. Yksilöllistä oppimista tukee aktiivisessa, vastavuoroisessa yhteistyössä tapahtuva oppiminen. Oppiminen on kaikissa muodoissa aktiivinen ja päämääräsuuntautunut, itsenäistä tai yhteistä ongelmanratkaisua sisältävä prosessi. Oppiminen on tilannesidonnaista, joten oppimisympäristön monipuolisuuteen on kiinnitettävä erityistä huomiota. Opittaessa avautuu uusia mahdollisuuksia ymmärtää kulttuuria ja kulttuurin sisältämiä merkityksiä sekä osallistua yhteiskunnan toimintaan.” (Kokeiluperusteet 2002, 11.)

Voitaneen sanoa, että konstruktivismissa ihminen nähdään aktiivisena, oman tietonsa rakentajana, jonka yksilöllisyydellä on merkittävä osa oppimisessa. Kokeiluperusteet 2002 pyrkii johdattamaan konstruktivistiseen oppimiseen. Se painottaa aktiivisen, itsenäisen ja yhteistyössä tapahtuvan oppimisen osuutta. Oppimisympäristön tulisi olla monipuolinen, koska oppiminen on vahvasti tilannesidonnaista. Ollaanko matematiikan ja geometrian opetuksessa vieläkään valmiita konstruktivismiin vai tukeudutaanko edelleen perinteiseen, tietoa siirtävään opetukseen?

Puolimatkan (2002) mukaan konstruktivismin määritelmä on laajentunut vähitellen tietoteoriaksi, opetuksen ja kasvatuksen teoriaksi, jopa maailmankatsomukseksi saakka. Yhteistä kaikille konstruktivismin muunnelmille on kuitenkin se, että ihmisen kyky rakentaa itse oma todellisuutensa on etusijalla. Oppimisessa on oleellisinta aktiivinen toiminta, luominen ja rakentaminen. Ero konstruktivismin eri muunnelmissa liittyy siihen, miten tämän rakentamisen suorittaja, kohde ja luonne ymmärretään. (Puolimatka 2002, 32 - 38.)

4.1 Mitä konstruktivismi on?

Leinon (1993) mukaan konstruktivismi perustuu ajatukseen, että ihminen voi oppia vain suhteessa aikaisempaan tietoonsa ja tällä tiedolla on tärkeä merkitys hänen oppimiselleen ja toiminnalleen. Tiedolla on aina monimutkainen joukko merkityksiä, jotka ovat tärkeitä ilmiöitä tutkittaessa. Oppijalla itsellään on ainakin osittainen kontrolli oppimiseensa, vaikka monenlaiset normit rajoittavat tätä autonomiaa. Oppiminen ja opettaminen on ymmärrettävä tavoitteellisina prosesseina, joita ei voi tutkia tavoitteista irrallaan. (Leino 1993, 4.)

Lapselle ei riitä konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan matemaattisten abstraktioiden oppiminen, vaan hänen olisi kyettävä konstruoimaan yhteyksiä uuden ja jo opitun välillä. Konstruktivistinen oppimiskäsitys edellyttää myös koulun tiedonkäsityksen jatkuvaa uudelleen arviointia ja muuttamista. Matematiikan opetuksessa pääpaino siirtyy vastausten tuottamisesta tehtävien käsittelyyn, jolloin matemaattiset prosessit ovat vähintäänkin yhtä tärkeitä kuin matemaattiset tulokset. Silloin oppilaat nähdään toimivina ja kriittisinä tiedon kerääjinä, tulkitsijoina ja muokkaajina. (Voutilainen, Mehtäläinen & Niiniluoto 1990, 19 - 20.)

Konstruktivismi oppimisen teoriana on psykologinen selonteko siitä, miten ihmisen oppiminen tapahtuu. Oppija rakentaa aktiivisesti ja luovasti tiedollisia käsityksiään aikaisempien tietorakenteidensa eli skeemojensa pohjalta. Toisin kuin behaviorismissa, joka käsittää oppimisen ulkoisten ärsykkeiden tuottamana reaktiona, konstruktivismi painottaa tiedon luovuutta sekä yhteisöllisyyttä. (Puolimatka 2002, 33, 41.)

Opetuksessa konstruktivismi ilmenee siten, että opettaja tuntee oppilaansa tiedollisia rakenteita tukiessaan heidän oppimisprosessejaan. Opettaja selvittää oppilaiden käsityksiä ja niiden perusteella ohjaa oppilasta omaehtoiseen tiedonhankintaan. Uuden oppiminen sulautuu aikaisempiin tietorakenteisiin ja on näin pysyvämpää sekä mahdollistaa opitun tiedon laajemman soveltamisen. Opettajakeskeisen työskentelyn tilalle tulevat oppilaiden omatoimisuus, yhteistoiminnallisuus ja osallistuminen. Konstruktivismissa hyvä oppiminen on oppijan aikaisempien tietorakenteiden monipuolista käyttämistä oppijan luontaista uteliaisuutta ja itsenäistä ajattelua tukemalla. (Puolimatka 2002, 44.)

4.2 Radikaali konstruktivismi

Radikaali käsitteenä tarkoittaa jonkin vallalla olevan käsityksen muuttamista, perusteellisuutta, kumouksellisuutta (NS 7 1990, 324). Matematiikassa muuttamisen kohteena on käsitys matemaattisen tiedon siirtämisestä sellaisenaan. Perinteisesti ajatellaan matemaattisen tiedon olevan staattista, muuttumatonta. Kuitenkin matemaattisten käsitteiden järjestelmä on matemaatikkojen luoma, toisin sanoen sopimuksenvarainen (ks. myöhemmin von Glasersfeld) ja siten muutettavissa.

Puolimatka (2002) toteaa, että radikaalin konstruktivismin mukaan jo silloin, kun oppilas on muodostanut jonkin uskomuksen, on hän muodostanut tiedollisesti pätevän käsityksen. Merkitystä ei ole sillä, onko käsitys tosi vai epätosi. Tällöin painottuu yksilön omaehtoinen luovuus tiedollisten rakenteiden tuottamisessa ja kehittämisessä. Jos oppijan tiedolliset valmiudet ovat asianmukaisesti kehittyneet ja hän on oikealla tavalla aktiivinen, on oikeiden menettelytapojen avulla mahdollista tuottaa luotettavaa tietoa. (Puolimatka 2002, 37 - 39, 48 - 54.)

Radikaalin konstruktivismin edustajilla on erityisen vaikeaa hyväksyä minkäänlaisten konkretisoitavien tavoitteiden asettamista opetukselle. Radikaalin konstruktivismin kannattajat eivät kuitenkaan kiellä totuudellisuuden olemassaoloa, vaan ovat sitä mieltä, ettei tiedon totuutta voida varmistaa. Tästä syystä on vain tyydyttävä kokemusten kanssa samoilla linjoilla olevaan tietoon. (Leino 1993, 2 - 3.) Von Glasersfeldin mielestä tiedon luotettavuutta arvioidaan sen mukaan, miten elinvoimaista se on. Toiminta, käsitteet ja käsitteelliset operaatiot ovat elinvoimaisia, jos ne havaitaan toimiviksi käytännössä. (von Glasersfeld 1995, 14.)

Radikaali konstruktivismi on saanut osakseen runsaasti vastustusta. Mm. Puolimatka (2002) mainitsee, että jos vaihe vaiheelta etenevä behavioristinen opetus lopetetaan kokonaan ja oppiminen rakennetaan vain vapaan toiminnan varaan, oppimisvaikeuksia omaavien oppijoiden oppiminen hankaloituu entisestään (Puolimatka 2002, 85). Kuitenkaan ei sovi unohtaa, että radikaalin konstruktivismin mukaan opettaja on silti keskeisessä asemassa opetuksen suunnittelussa ja ohjaamisessa. Hänen ammattitaitoonsa kuuluu se, että kykenee ottamaan huomioon jokaisen oppijan lähtökohdat ja mahdollisuudet oppia. On myös muistettava, että yksilöllinen ja yhteistoiminnallinen oppiminen eivät ole ainoastaan vapaata toimintaa. Opettaja, vaikka onkin välillä sivustaseuraajana, on aktiivinen osallistuja, oikein muotoiltujen kysymysten esittäjä.

Von Glasersfeld (1991) määrittää radikaalin konstruktivismin aktiivisena tiedonkäsityksenä, jossa käsitykset ja käsitteet ovat osa havainnoitsijan omaa rakentuvaa kokemusmaailmaa. Vastakohtana voidaan pitää realistista tiedonkäsitystä, jonka mukaan tieto vastaanotetaan ympäröivästä reaalimaailmasta. Radikaalia konstruktivismia onkin kritisoitu juuri reaalimaailman kieltämisestä. Arvostelijoiden mukaan olisi mahdotonta olla samaa mieltä mistään, jos jokainen yksilö loisi oman subjektiivisen kokemusmaailmansa. Silloin ihmisten välinen kommunikointi ylipäätään olisi täysin mahdotonta. Se, että pystymme kommunikoimaan ja neuvottelemaan asioista, ei todista kokemustemme olevan peräisin kaikille samanlaisesta objektiivisesta todellisuudesta ja välittyvän jokaiselle samalla tavalla. On kuitenkin olemassa alueita, joilla yksilölliset kokemusmaailmat pystyvät rakentamaan toisiaan lähellä olevia ja yhteisiä merkityksiä. Näitä alueita ovat esimerkiksi kieli – sekä puhuttuna että kirjoitettuna – ja erilaiset numerojärjestelmät. (von Glasersfeld 1991, xv – xvi.)

Puolimatkan (2002) mukaan koulun opetussuunnitelman tiedonpohjaksi ymmärretään usein tiedeyhteisö. Tällöin Puolimatka herättääkin kysymyksen: ”Onko koulumaailmassa hyväksyttävää, että kukin oppija rakentaa tiedolliset rakennelmansa vallitsevista tieteellisistä käsityksistä riippumatta?” (Puolimatka 2002, 34.) Vastauksena Puolimatkan kysymykseen radikaali konstruktivismi erottaa oppimisprosessissa opettamisen ja harjoittamisen. Opettaminen johtaa ymmärtämiseen toisin kuin traditionaalina nähtävä harjoittaminen, jonka tarkoituksena on saada oppilas tekemään mahdollisimman kompetentteja, päteviä suorituksia. Lisäksi traditionaalille opettamiselle tunnusomaisia piirteitä ovat käsitteiden ulkoa oppiminen ja opettajan miellyttäminen suotavilla vastauksilla. Radikaalin konstruktivismin mukaisessa opettamisessa sen sijaan pyritään ohjaamaan oppilaita aktiiviseen ajatteluun ja ongelmanratkaisuun positiivisessa sosiaalisessa vuorovaikutuksessa. Tarkoitus on luoda luokkaan ”konsensuksen alue”, jossa asioita pohditaan ja selitetään yhdessä. Päämääränä on myös itseohjautuva käsitteiden ymmärtäminen, joka saa oppijan tuntemaan mielihyvää uuden tiedon saavuttamisesta. (von Glasersfeld 1991, xvi, xix.)

4.3 Konstruktivismi matematiikassa

Perinteinen opetus sopii matematiikkaan varsin huonosti. Radikaalisti tulisi siirtää painopistettä kohti luovempia, tutkivia oppimisympäristöjä, joissa oppilaan aktiivisuus korostuu ja joissa oppilaat voivat toimia sosiaalisemmin ja määrätä itse etenemisensä. Kupari (1999) korostaa, että perinteisten, ahtaiden matematiikkakäsitysten olemassaolo on vakava ongelma. Ne saattavat johtaa opetukseen, joka korostaa liiaksi työskentelyä oppilaille merkityksettömiksi jäävillä symboleilla. (Kupari 1999, 25.) Matematiikassa meidän on tarkoituksenmukaista korostaa tarkkojen määritelmien asemasta konkreeteista tilanteista ja käsitteistä lähteviä yleistyksiä, tarkkojen lauseiden ja todistusten asemasta umpimähkään syntyviä ideoita ja niiden perusteluja: matematiikkaan on itse aktiivisesti osallistuttava. Matematiikan opiskelussa oppilas tulisi nähdä aktiivisena tiedon hankkijana, käsittelijänä ja tallentajana, jolle oppiminen on opetettavien asioiden liittämistä hänen aiempiin tietoihinsa sekä hänen aikaisempien ajatus- ja toimintamalliensa uudelleenrakentamista ja täydentämistä. Von Glasersfeldin (1995) mukaan opettaja ei voi suoraan kertoa oppilaille, mitä tai miten opittavilla käsitteillä rakennetaan. Viisaalla kielenkäytöllä oppilaita voidaan estää menemästä opettajan turhana pitämään suuntaan. (von Glasersfeld 1995, 184.)

Matematiikka on nähty lähinnä taitona laskea sekä käyttää sääntöjä, menetelmiä ja kaavoja. Oppilas tuntee useimmiten itsensä passiiviseksi objektiksi, jolle oppiminen on ymmärtämisen sijasta asian ulkoa muistamista. Tästä on syntynyt monenlaisia negatiivisia uskomuksia matematiikkaa kohtaan. Haapasalo (1998a) korostaa, ettei staattiseen tiedonkäsitykseen perustuvassa behavioristisessa opetuksessa ole kiinnitetty huomiota sen enempää tiedon merkitykseen kuin siihen, miten oppilas hankkii ja omaksuu tietoa. Konstruktivismin pohjana olevassa dynaamisessa tiedonkäsityksessä korostuu sen sijaan oppilaan aktiivinen rooli tiedon konstruoijana ja prosessoijana. Matematiikka lähtee oppilaiden todellisista kokemuksista. Tällöin matemaattiset ajatteluprosessit kehittyvät. Samoin yhteyksien, sääntöjen ja kaavojen etsimisestä ja rakentamisesta tulee todellisista. Keskeistä Haapasalon mukaan on mallintamisen, jäsentelemisen ja luokittelemisen oppiminen: ”Voidaan edetä oppilaan kykyjen mukaisesti kohti sisällöistä riippumatonta abstraktimpaa ja symbolista esitystapaa, joka juuri tekee matematiikasta ajattelun, ongelmanratkaisun ja viime kädessä yksilön maailmankuvan muodostuksen ajattoman välineen.” (Haapasalo 1998a, 243.)

Myös Leino (1998) korostaa elävän, kullekin oppilaalle alati muuttuvan matematiikan tärkeyttä. Matematiikan opetuksen yleinen tavoite on se, että etsitään, esitetään ja ratkaistaan oppilaita kiinnostavia ongelmia. Tällainen konstruktivismi jopa vaatii lähtökohdakseen oppilaiden käsitysten ja kiinnostusten ottamista opetuksen perustaksi. Samoin aikaisemman tietopohjan merkitys korostuu kun pyritään asteittaiseen tietorakenteiden laajenemiseen. (Leino 1998, 47.) Von Glasersfeld painottaa ajatusta, että ongelmat ovat oppijan päässä eivätkä opettajan paperilla. Meillä ei ole suoraa tietoa siitä, mitä oppilaiden päässä liikkuu. Meillä on kuitenkin opettajina mahdollisuus luoda sellaisia tilanteita, joissa voimme testata oppijoiden ajattelumallien elinkelpoisuutta. (von Glasersfeld 1991, xvi.)

Jotta oppilas voisi yleensäkin tulkita tilannetta mentaalimalleillaan, edellyttää konstruktivistinen tiedonmuodostus yleensä kontekstisisältöistä lähestymistapaa. Matemaattiset työkalut ovat usein soveltumattomia tällaiseen tilanteeseen, jolloin tilannetta usein joudutaan melko rajustikin yksinkertaistamaan. Tällöin onkin tärkeää että annetaan luonnollisten ja helppojen taitojen esiintyä ensin. Edetään arvauksesta perusteluun, konkreetista abstraktiin, toiminnasta käsitteisiin ja symboleihin jne. (Haapasalo 1998a**,** 134 - 136.)

4.4 Toiminnallisuus

Nykysuomen sanakirja määrittelee toiminnallisen opetustavan sellaiseksi, joka noudattaa opetuksessa teon eli toiminnan periaatetta. Toiminnallinen voidaan rinnastaa sanoihin aktiivinen, toiminnan avulla tapahtuva (NS 3 1980, 714).

Leino (1987) on todennut oppilaiden aloittavan jo ensimmäisellä luokalla liian usein matematiikan oppikirjan läpikäymisen opettajan ahdistamalla tavalla. Ei oteta huomioon, mitä matemaattista tietoa oppilas on jo omaksunut kouluun tullessaan, ei anneta tilaa aktiivisuudelle. Toiminnallisuuden aikaansaamiseksi ja yksilöllisyyden korostamiseksi opetus tulisi järjestää oppikirjojen sivujen läpikäymisen sijasta teemoina, moduleina tai projekteina. Oppikirja on hyvä renki mutta huono isäntä. (Leino 1987, Lindgrenin 1990, 26 mukaan.)

Jo yli 200 vuotta sitten esim. Pestalozzi, Fröbel ja Francke halusivat liittää opetukseen konkreettista työskentelyä, toiminnallisuutta. Konkreettisessa työskentelyssä oppilas itse tutkii ja käyttää erilaisia konkreettisia apuvälineitä ja täten luo pohjaa syvemmälle oppimiselle. 1920-luvulla John Dewey puhui ”tekemällä oppimisesta” (learning by doing). Ajatuksena oli se, että opettaja hyödyntää lasten toimeliaisuutta. Jean Piagetin mukaan lapsen ajattelu kehittyy tiettyjen vaiheiden kautta: aluksi lapsi tukeutuu selkeästi konkretiaan ja vasta n. 12 vuoden iässä saavuttaa ns. formaalisten operaatioiden kauden. Ahtee & Pehkonen (2000) korostavat kuitenkin sitä, että uusimpien tutkimusten valossa kehitys tapahtuu vieläkin hitaammin. Näin ollen esim. peruskoulun yhdeksännellä luokalla n. puolet oppilaista voi olla ajattelussaan vielä konkreettisen tuen tarpeessa. (Ahtee & Pehkonen 2000, 48.)

4.5 Ongelmanratkaisu

Ongelmanratkaisuun sisältyvät ne tavat, joilla ongelmat syntyvät ja esitetään sekä tavat, joilla ihminen päättelee ja järkeilee. Ongelmatilanteessa tarvitaan aina ajatuksia liikkeelle panevia prosesseja, ns. toimeenpanevia sekä niitä ylläpitäviä prosesseja. Näitä ovat strategiat ja näiden valintaa säätelevät ns. metakognitiot. Voimme käyttää näistä yhteisnimitystä heuristiset prosessit. Ongelma on siis tilanne, joka aikaansaa heuristisia prosesseja, jotka tähtäävät tietynlaisen epätasapaino- tai ristiriitatilanteen tasapainottamiseen, ratkaisun löytämiseen. Tilanne, joka aikaansaa päämäärähakuista ajattelutoimintaa tähdäten ratkaisun löytymiseen. Ellei siis edellä mainittua epätasapainotilaa synny, tilanne on joko helppo (rutiinitehtävä) tai yksilö ei jostain (esim. emotionaalisesta) syystä halua reagoida siihen mitenkään. Tällöin ei synny myöskään ongelmanratkaisuprosesseja, vaikka opettaja olisi kuinka mieltynyt tiettyyn tehtävään tai sen muodosteluun. (Haapasalo 1998b, 82 - 83.)

Vygotsky, Rubinshtein, Leontjev, Ananev, Zaporozhets ja heidän oppilaansa ovat osoittaneet, että missä tahansa todellisessa kognitiivisessa prosessissa mielikuvan rakenne voi vaihdella yksilöllisesti. Vaihtelu riippuu siitä, miten yksilö muotoilee ongelman, vaikka kohde on muuttumaton. Koska yksilöt muokkaavat ongelmaa omiin kokemuksiin, käsitteiden rakenteisiin ja päämääriin perustuen, mielikuva rakentuu valikoivasti ja sen rakenne voi vaihdella suuresti. Näin havainnoijat poimivat ongelmatilanteessa kohteesta sisällöltään erilaista informaatiota. (Yakimanskaya 1991, 40.)

”Käytännön opetustyössä harjoittelu olisi syytä aloittaa yksinkertaisilla ongelmilla, joiden ratkaisemiseen oppilas tarvitsee vain muutamaa, mieluiten yksinkertaista heuristiikkaa. Ongelmanratkaisun tulisi olla matematiikan opetuksen peruselementti ja siinä tulisi korostaa laajaa ja rikasta lähestymistapaa. Oppilaiden tulisi jakaa ideansa ja lähestymistapansa muiden kanssa sekä tottua esittämään ongelmia useilla eri tavoilla, etsien erilaisia ratkaisumalleja. Heidän tulisi myös oppia arvostamaan ratkaisuprosessia yhtä paljon kuin lopputulosta. Vähitellen tulisi auttaa oppilaita laajentamaan matemaattista kieltään sekä kehittämään vaihtelevia ratkaisustrategioita ja lähestymistapoja. Vaikka konkreetit ja empiiriset tilanteet ovat varsinkin aluksi tärkeitä, tulisi saavuttaa tasapaino sellaisten ongelmien välillä, jotka pohjautuvat tositilanteisiin ja ongelmiin, jotka tulevat matematiikan tutkimisesta tai vaativat laajempaa ratkaisukykyä.” (Haapasalo 1998b, 86 - 87.)

4.6 Yhteistoiminnallisuus, matemaattiset keskustelut

Konstruktivismi painottaa opetuksessa oppilaiden omatoimisuutta ja toisaalta yhteistoiminnallisuutta ja osallistumista. Kun opettaja tuntee oppilaan tiedolliset valmiudet ja kykenee tukemaan lapsen luontaista kehitystä, tapahtuu hyvää oppimista. (Puolimatka 2002, 44.)

Yhteistoiminnallisuus ilmenee luokkahuoneessa diskurssin muodossa. Maturanan (1978, 47) mukaan diskurssin syntyminen on tapahtuma, jossa keskustelijat ovat luoneet yhteisen konsensusalueen (consensual domain). Konsensusalue on alkujaan biologinen termi, joka tarkoittaa kahden tai useamman organismin kiinteää vuorovaikutusta. Maturanan määritelmässä kieli konsensusalueena on yhteistä orientoitumiskäyttäytymistä. Keskustelijat eivät ole välttämättä tietoisesti samaa mieltä, pikemminkin he tarkkailijan näkökulmasta käyttäytyvät aivan kuin olisivat päätyneet yhteisymmärrykseen olettamustensa perusteella. (Richards 1991, 18.)

Richardsin mielestä kouluissa pystytään luomaan konsensusalueita, mutta niillä ei kuitenkaan pystytä kommunikoimaan onnistuneesti. Ensin on luotava yhteinen keskustelualue ja sen jälkeen opittava kommunikoimaan alueen puitteissa. Sekä oppijan että opettajan on opittava puhumaan ja kuuntelemaan. Oppijalla on oltava rakentuneena sellaiset matemaattiset taidot, että hän pystyy keskustelemaan matematiikan kielellä luokkayhteisössä. Opettajan rooli on luoda sellainen konteksti, jossa oppijat voivat konstruoida matematiikkaa. Opettajien on oltava halukkaita ja kykeneviä osallistumaan luokkahuoneen matemaattiseen keskusteluun oppilaiden kanssa lähestyen matemaattisia ongelmia matematiikan näkökulmasta. (Richards 1991, 46 - 47.)

Perinteisissä opettajakeskeisissä opetustilanteissa konsensusalue on tarkoin strukturoitu alue, joka takaa opettajalle turvallisuuden tunteen. Opettaja tietää, mitä kysymyksiä tullaan esittämään ja hän osaa varautua niihin etukäteen. Hän etenee järjestelmällisesti tuntisuunnitelman mukaan, usein tukeutuen valmiiseen tekstiin. Hän arvioi edistymistä oppilaiden vastausten ja ennalta määrättyjen koejaksojen perusteella. Avoimemmissa oppimisympäristöissä opettajat ovat vähemmän varmoja, heidän (tiedollinen) auktoriteettinsa on haastettavissa ja he eivät välttämättä tiedä oikeaa vastausta. (Richards 1991, 40.)

5 Opetussuunnitelmasta oppikirjaan

Koska tutkimuksemme kohdistuu matematiikan oppikirjojen sisältöön ja sisällön suhteeseen uuteen opetussuunnitelmaan, lienee aiheellista tarkastella myös peruskoulun opetussuunnitelmaa matematiikan oppisisältöjen osalta.

Kun opettaja miettii omaa opetustaan, on hänen ensiarvoisen tärkeää löytää vastaukset seuraaviin kysymyksiin: Mitä opetetaan? Miksi opetetaan? Miten opetetaan? Ensimmäiseen kysymykseen antaa vastauksen opetussuunnitelman perusteet. Siinä on lueteltu opetuksessa käsiteltävät sisällöt. Vastaus toiseenkin kysymykseen löytyy myös yleensä opetussuunnitelmasta. Näiden kahden kysymyksen puitteissa opettaja voi suunnitella opetustaan. Syvällisempiä vastauksia opettaja löytää näihin kysymyksiin oppikirjoista, jotka voisi ymmärtää kirjantekijöiden tulkinnoiksi opetussuunnitelmista. Kolmanteen kysymykseen ei löydy valmista vastausta, vaan siihen vastaaminen riippuu opettajan ammattitaidosta.

Opetussuunnitelman tavoitteet tulisi muotoilla käytännön opetustyötä varten. Yleisluontoiset tavoitelausumat eivät välttämättä auta matematiikan opetustaan suunnittelevaa luokanopettajaa. Tavoitteet vain muuntuvat sisällöiksi tai eivät näy ollenkaan.

Haapasalo (1998a) kritisoi nykyisiä opetussuunnitelmien perustana olevia yleisiä tavoitelausumia fraasinomaisiksi – tavoitteet jäävät enimmäkseen toteutumatta käytännön opetuksessa. Opetusta ja oppimateriaalien laadintaa ohjaavat pääasiassa valtakunnalliset opetussuunnitelman perusteet sekä oppimäärä, jotka ovat keskenään ristiriitaisia. Tavoitteet tulisi Haapasalon (1998a) mukaan kuvata siten, että ne antavat ohjeita monipuolisista lähestymistavoista ja työmuodoista. Opetussuunnitelmassa olisi tarkemmin kuvattava sitä, miten oppimisympäristö oppimateriaaleineen voitaisiin suunnitella toiminnallisia, kokeilevia, tutkivia ja keksiviä oppimisen muotoja suosien. Samalla myös oppimateriaalien laatiminen ja hyväksyminen tulisi tapahtua näiden tavoitteiden kautta. (Haapasalo 1998a, 244.)

Leinon (1998) mukaan opetussuunnitelmien perinteiset sisältöluettelot sanelevat opetusta aivan liian suuressa määrin ja näin matematiikka ajautuu matemaattisen tiedon ymmärtävään muistamiseen. Oppilaiden omat käsitykset ja kiinnostukset jäävät taka-alalle. Perinteinen matematiikan opetus kaikilla koulutustasoilla edustaa valtaosin esitettyä suuntausta. (Leino 1998, 48 - 49.)

5.1 Peruskoulun matematiikan opetussuunnitelmasta

Nimenomaan oppiaineksen tietorakenteiden jäsentäminen – ymmärtäminen – on välttämätön edellytys opitun soveltamisessa uusiin yhteyksiin sekä myös opitun kytkemisessä oppijan aikaisempiin tietorakenteisiin. Oppiaineksen omakohtainen jäsentäminen sitä verkottaviksi käsitteiksi ja säännöiksi on oppimisen tuloksellisuuden kannalta äärimmäisen oleellinen asia. Jos kuitenkin oppikirjojen mukana tulevissa kokeissa ja testeissä suoriutuminen edellyttää mekaanisten laskutaitojen pitkälle vietyä hallintaa, on selvä, että niihin suomalaisessa koulussa yleisesti panostetaan ja ne myös määrittävät matematiikan osaamisen sisällön – mitä sitten opetussuunnitelmien sisällöksi kirjoitetaankin.

Seuraavassa tarkastelemme ensin vuosien 1985 ja 1994 opetussuunnitelmien perusteita, jonka jälkeen käsittelemme uusia Kokeiluperusteita 2002.

5.1.1 Miksi matematiikkaa opetetaan?

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985 korosti matemaattista tietoa ja laskutaitoa jotka ovat yksilön ja yhteiskunnan kannalta tarkoituksenmukaisia. Matematiikan opetuksen päämääränä oli tukea yksilön persoonallisuuden tasapainoista ja monipuolista kehittymistä pohjana tuleville jatko-opinnoille. Laskutaidon lisäksi matematiikan opetuksen tavoitteita olivat ongelmanratkaisuun liittyvien taitojen harjoittaminen, luovan ajattelun kehittäminen sekä matematiikan soveltaminen jokapäiväiseen elämään. Erityistä huomiota oli kiinnitettävä käsitteenmuodostusprosessin ohjaamiseen järjestelmällisesti kunkin oppilaan edellytysten mukaisesti. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985, 147 - 148.)

Vuoden 1994 opetussuunnitelmasta välittyy näkemys siitä mitä matematiikan osaaminen on: ”Matematiikan opiskelu antaa mahdollisuuksia kehittää keksimiskykyä ja luovaa ajattelua. Lisäksi matematiikka tarjoaa keinon välittää informaatiota täsmällisesti, koska se käyttää abstraktista symbolikieltä.” (s. 74.) Edelleen opetussuunnitelmassa todetaan varovaisen optimistisesti: ”Matematiikan kauneudesta nauttiminen ja älyllisen ponnistelun tuoma mielihyvä voivat tuottaa tyydytystä matematiikan parissa työskenneltäessä.” (s. 74.) Opetussuunnitelmassa korostuu kautta linjan tavoite matemaattisten käsitteiden ja tietorakenteiden ymmärtävästä oppimisesta, jolloin mekaanisen laskennan osuutta voidaan vähentää kaikilla tasoilla. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 74.)

Matematiikka nähdään yhä tarpeellisemmaksi, koska nykyihminen joutuu matematiikan kanssa tekemisiin päivittäin – matematiikka ei ole ”ulkoa tuotua”. Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteissa on siirrytty enemmän laskutaitojen harjoittamisesta ymmärtävään oppimiseen. Siinä painottuu itse toimintaprosessi eivätkä vain lopputulokset.

5.1.2 Mitä opetetaan?

Viidennen vuosiluokan geometrian keskeisinä sisältöinä oli Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa 1985 kulman mittaaminen ja piirtäminen (suuruus asteina). Kolmion, suunnikkaan ja ympyrän sekä niiden osien tunnistamista ja piirtämistä harjoiteltiin. Ympyrä opetettiin piirtämään harppia käyttäen. Tutustuttiin avaruuskappaleisiin kuution ja laatikon muodossa.

Varmennettiin koordinaatiston käyttötaitoa ja opetettiin kuvioiden piirtämistä koordinaatistoon. Opetettiin myös neliön ja suorakulmion pinta-alan laskeminen. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985, 155.)

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteissa ei, vuoden 1985 opetussuunnitelmasta poiketen, jaoteltu oppisisältöjä vuosiluokittain. Päinvastoin perinteisiä oppisisältöjä tuli tarkastella kriittisesti, koska matematiikan tuli olla sisällöllisesti avoin uusille tiedoille ja sovelluksille. Geometriaan liittyviä keskeisiä sisältöjä ala-asteella olivat:

- ympärillä olevan maailman havainnointi ja tulkitseminen
- pituuden, tilavuuden ja kulman arvioiminen ja mittaaminen sekä mittayksiköt ja niiden muunnokset
- mittakaavan käsite ja käyttö piirustusten ja karttojen tulkinnassa
- tavallisten geometristen kuvioiden ja kappaleiden tunnistaminen ja piirtäminen sekä pinta-alan ja tilavuuden laskeminen ja tutustuminen symmetriaan
- esineiden lajittelu, luokittelu ja säännönmukaisuuksien löytäminen ympärillä olevasta maailmasta

(Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 74 - 75.)

Vuosiluokkiin perustuvan jaottelun purkaminen antoi mahdollisuuden koulutasolla suunnitella juuri omille oppilaille sopiva matemaattinen aines. Käytännössä kuitenkin oppikirjat edelleen toimivat usein opetussuunnitelmana.

Haapasalon mukaan (1998a) koulun matematiikka tulee nähdä laajempana kuin vain tiettyjen laskutaitojen oppimisena. Matematiikalla on ennen kaikkea tärkeä merkitys oppilaan henkiseen kasvuprosessiin vaikuttajana – matematiikka laajentaa ja johdonmukaistaa oppilaan ajattelua. Samalla matematiikan opiskelu kasvattaa lasta tavoitteelliseen toimintaan ja sosiaaliseen vuorovaikutukseen. Oppilas oppii ottamaan vastuuta omasta ja ryhmän toiminnasta ja keskustelemaan rakentavasti ja kriittisesti. (Haapasalo 1998a, 248.)

5.1.3 Miten opetetaan?

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden 1985 mukaan entistä tärkeämmäksi olivat käyneet ”laskutoimitusten ja niiden välisten yhteyksien ymmärtäminen sekä peruslaskutoimitusten sujuva osaaminen myös päässälaskuna”. Laskimien yleistymisen myötä mekaaninen laskeminen oli jäämässä taka-alalle. Jotta päästäisiin pysyviin oppimistuloksiin, oli tärkeää ottaa myös oppilaat mukaan opetustapahtumaan. Järjestetään tilanteita, joissa oppilaan täytyy muotoilla ja ratkaista ongelmia, joissa ei ole valmista ratkaisumallia. Opetuksen tuli lähteä lapsen kokemusmaailmasta ja hänelle tutusta tilanteesta. Oli tärkeää, että lapsi ymmärsi opetettavien asioiden rakenteen ja muut yhteydet sekä osasi liittää matemaattiset tiedot ja taidot muuhun kokemusmaailmaansa sekä oppi käyttämään näitä valmiuksiaan luontevasti elämän eri tilanteissa. Matemaattisten käsitteiden omaksumiseen ja taitojen harjoittamiseen oli käytettävä riittävästi aikaa. Erilaisille oppilaille oli tarjottava sopivia oppimistilanteita ja lähestymistapoja. Opetustapahtuman jatkuva arviointi nähtiin tärkeäksi. Siksi opettajan oli annettava välitöntä palautetta oppilaalle hänen edistymisestään. Arviointi toimi samalla oppimista edistävänä ja oppilaalle myönteisenä opetuksen osana. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985, 148, 159 - 160.)

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa 1994 oppilas nähdään aktiivisena tiedon hankkijana, käsittelijänä ja tallentajana. Oppimistilanteet olisi rakennettava keskustelulle, kokeilulle ja ongelmakeskeisyydelle, joiden lähtökohtana tulisi olla mahdollisimman usein oppilaan oma arkielämä. Käsitteiden ymmärtämisen tulisi tapahtua konkreetin toiminnan kautta, askartelua ja leikinomaisuutta korostamalla. Matemaattinen ongelmanratkaisu nähdään prosessina, joka etenee tiedon hankkimisen ja soveltamisen kautta tulosten muotoiluun ja arviointiin. Kaikenikäisten ja -tasoisten oppilaiden tulisi saada rakennella ja tehdä käsillään malleja kyetäkseen luomaan oikeita mielikuvia ja muodostamaan käsitteitä. Yksittäiset sisällöt ja keskeiset käsitteet olisi liitettävä laajempiin opintokokonaisuuksiin käsitteiden ja tietorakenteiden oppimiseksi. Matematiikan opetus on eheytettävä monipuolisesti koulun muuhun työskentelyyn ja koulun ulkopuoliseen maailmaan. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 76 - 77.)

Opetussuunnitelmissa on vuodesta 1985 siirrytty yhä konstruktivistisempaan suuntaan. 1985 korostui jo lapsen kokemusmaailma ja tilanteet, joissa hänen piti ratkaista ongelmia. Vuonna 1994 oppilaan oma arkielämä ja ongelmakeskeisyys korostuivat edelleen ja lisäksi painotettiin keskustelun ja toiminnallisen kokeilun osuutta. Oppilas nähdään enemmän aktiivisena oppijana ja opettajan rooli muuttuu enemmän ohjaajaksi ja avustajaksi.

Opetus tulee Haapasalon (1998a) mukaan rakentaa siten, että oppilaat ymmärtävät matematiikan osaamisen merkityksen ja saavat luottamusta omiin kykyihinsä rakentaa, oppia ja käyttää matematiikkaa. Matematiikan opetuksen tavoitteena on ennen muuta kehittää oppilaan kykyä luokitella, jäsentää ja mallintaa ympäröivässä maailmassa eteen tulevia tilanteita aiemmin oppimillaan käsitteillä. (Haapasalo 1998a, 248.)

Leino (1998) taas korostaa opettajan matematiikkakäsityksen tärkeyttä. Jos opettajan käsitys matematiikasta on perinteinen, jossa matemaattinen tieto on hierarkkinen tietorakennelma, on myös opetuksen tavoitteena tietorakennelman opettelu. Matematiikassa voi korostaa myös inhimillistä puolta, ihmisten aktiviteettia kulloisenkin ongelman ratkaisuksi. Matematiikka voi korostaa ongelmakeskeisyyttä ja prosessia, lähteä oppilaiden kiinnostuksista ja käsityksistä, kysymyksistä. Kysymyksiin vastaaminen voi jäädä tietysti avoimeksi tai rajatuksi. Edellä esitetystä ei kuitenkaan saa tehdä sitä johtopäätöstä, että matematiikan opetuksessa pitää sallia oppilaiden tekevän mitä vain. Opetuksen tulee olla kasvattavaa, ajattelua laajentavaa ja syventävää. (Leino 1998, 47 - 48.)

5.1.4 Perusopetuksen opetuskokeiluissa lukuvuonna 2003 - 2004 noudatettavat opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 3 - 9 ja perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 1 - 2

> ”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja matemaattisten käsitteiden sekä yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen. Opetuksen tulee kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelutapaa, ja sen tulee ohjata oppilasta löytämään asioita ja asiayhteyksiä sekä etsimään ratkaisuja ongelmiin. Matematiikan merkitys on nähtävä laajasti – se vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen sekä edistää oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta.
> Matematiikan opetuksen on edettävä systemaattisesti, ja sen tulee luoda kestävä pohja matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle. Konkreettisuus toimii tärkeänä apuvälineenä yhdistettäessä oppilaan kokemuksia ja ajattelujärjestelmiä matematiikan abstraktiin järjestelmään. Arkipäivän tilanteissa eteen tulevia ongelmia, joita on mahdollista ratkoa matemaattisen ajattelun tai toiminnan avulla, tulee hyödyntää tehokkaasti. Tieto- ja viestintätekniikkaa tulee käyttää oppilaan oppimisprosessin tukemisessa mahdollisuuksien mukaan.”
> (Kokeiluperusteet 2002, 104.)

Kokeiluperusteet 2002 jatkaa aikaisempien opetussuunnitelmien konstruktivismiin pyrkivää linjaa. Edelleen painottuvat arkipäivän ongelmissa eteen tulevat ratkaisut, oppilaiden kokemusmaailma, sosiaalinen vuorovaikutus sekä toiminta. Kokeiluperusteet 2002 on oppilaskeskeisempi. Siinä korostuvat oppilaan kokemukset ja arkipäivä, eivät niinkään yhteiskunnan taholta tulevat vaatimukset, kuten vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa.

Geometrian keskeisiä sisältöjä kokeiluperusteissa vuosiluokille 3 - 5 ovat:

- Suurennokset ja pienennökset, yhdenmuotoisuus ja mittakaava
- peilauksia suoran ja pisteen suhteen, symmetria, yhtenevyys konkreetein välinein
- ympyrä ja sen osat
- yhdensuuntaiset ja kohtisuorat suorat
- kulman mitta ja kulmien luokittelu

- erilaisten monikulmioiden tutkiminen ja luokittelu
- piiri ja pinta-ala
- kappaleiden geometristen ominaisuuksien tutkiminen
- mittaamisen periaatteen vahvistaminen
- mittayksiköiden käyttö, vertailua ja muuntaminen
- mittaustuloksen arviointi ja mittauksen tarkistaminen.

(Kokeiluperusteet 2002, 107.)

Kokeiluperusteissa 2002 on palattu vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteiden kaltaiseen oppisisältöjen tarkempaan määrittelyyn. Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteissa ei oppisisältöjä jaettu tarkemmin vuosiluokittain. Suuntana näyttää olevan geometrian osalta opittavan aineksen laajempi käsittely. Edelleen opetuksen perustana on aiemmin opittu; jo opittua tietoa käytetään uuden tiedon omaksumiseen. Kokeiluperusteet 2002 mahdollistaa käsityksemme mukaan myös opetuksessa käsiteltävien sisältöjen opettamisjärjestyksen muuttamisen, eli opetuksen ei tarvitsisi olla niin oppikirjasidonnaista kuin se nykypäivänä on.

Oppilaskeskeistä konstruktivismia toteutettaessa voi osoittautua, että oppikirjaa on käytettävä joustavasti, valikoiden ja tukimateriaalina. Parempi voisi ollakin kehittää koulukohtainen matematiikan opetussuunnitelma ja opiskelua varten erityisen runsas materiaalinen välineistö. Ongelmana matematiikan opetuksessa on myös oppilaan käsitysten ja uskomusten esille saanti, sillä kieli ja sanat ovat puutteellisia välineitä merkitysten antajina; toiminta on usein välttämätön lisä hyvän ymmärtämispohjan luomiseksi. (Leino 1998, 50.)

Mainitsemisen arvoista on vielä suurennosten, pienennösten, peilausten suoran ja pisteen suhteen sekä yhdensuuntaisten ja kohtisuorien suorien puuttuminen kokonaan aikaisemmista opetussuunnitelmista. Yhdenmuotoisuus, mittakaava, symmetria sekä yhtenevyys opetettiin vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa vasta 8. luokalla. Kokeiluperusteissa 2002 nämä asiat on otettu oppisisältöihin jo luokille 3 - 5.

Kokonaisuudessaan Kokeiluperusteissa 2002 esitetään käsiteltävät sisällöt tarkemmin kuin edellisissä opetussuunnitelmissa. Lieneekö syynä huoli suomalaisnuorten heikosta matematiikan, ja etenkin geometrian, osaamisen tasosta kansainvälisessä vertailussa? (vrt. luku 2.2.)

5.2 Oppikirja – osana oppimateriaalia

Matematiikan oppitunti noudattelee perinteisesti hyvin samanlaista kaavaa. Oppitunti alkaa oppikirjan tehtävien tarkastamisella, jonka jälkeen seuraa opettajan esitys uudesta aihekokonaisuudesta. Tämän jälkeen oppilaat tekevät kirjan tehtäviä ja tehtävien tekeminen jatkuu vielä kotonakin. Oppikirjalla on siis suuri auktoriteetti matematiikan tunneilla.

Oppimateriaalin luonteessa ei ole mainittavia rajoituksia - matematiikan olemusta ja oppimateriaalin laatijan luovuutta sopivasti yhdistellen saadaan oppikirjasta oppilasta kiinnostava. Ensisijainen edellytys tehokkaalle oppimiselle on, että oppiaines on oppimateriaalissa esitetty oppijaa kiinnostavalla tavalla. (Kallonen-Rönkkö 1998, 266.)

Uusien oppikirjojen tehtävät ”haastavat entistä terävämmin kriittiseen arviointiin, vertailuun, lisätiedon hankintaan ja erilaisiin sovelluksiin tavalla, johon konstruktivistinen oppimiskäsitys on luonut paineita”. (Uusikylä & Atjonen 2000, 147.) Uusien oppikirjojen katsotaan siis jo yleisesti toteuttavan konstruktivistista lähestymistapaa. Tähän sanoo kuitenkin oman sanansa Perkkilä (1998), joka lisensiaattityössään tutki kahden alkuopetuksen matematiikan oppikirjasarjaa. Perkkilän mukaan oppikirjat näyttäisivät suosivan perinteistä matematiikan opetusta. Tosin hänen mukaansa on myönteistä, että kirjojen tehtävät ovat alkaneet monipuolistua. Edelleenkin opettajan oppimiskäsitys on se, joka joko mahdollistaa konstruktivismin tai ei. Oppikirjalla yksin ei voida muuttaa oppimiskäsityksiä, mutta oppikirjoilla voidaan vaikuttaa konstruktivismin toteuttamiseen opetuksessa. Täysin konstruktivistista oppikirjaa tuskin koskaan voidaan tehdä, mutta sitä tukevia ohjeita kyllä voidaan kirjoissa antaa. (Perkkilä 1998, 131 - 132.)

5.2.1 Oppimateriaali

Oppimateriaalilla on luonnollisesti hyvin keskeinen asema opetustyössä ja myös matematiikassa. Oppimateriaalin valitsee opettaja. Oppimateriaalin valintaan vaikuttaa valtakunnallinen opetussuunnitelma. Ennakkoon tehdyllä suunnittelulla ja oikealla oppimateriaalin valinnalla opettaja pyrkii löytämään ne keinot, joilla hän saavuttaa opetussuunnitelmassa asetetut tavoitteet. Oppimateriaalilla tarkoitetaan Lahdeksen (1992, 206) mukaan ”oppiainesta sisältävää tietolähdettä, joka voidaan jaotella oppikirjoihin, oheislukemistoihin tai työkirjoihin. Lisäksi oppimateriaali on väline, joka pyrkii tavoitteisiin”.

5.2.2 Oppikirja

Oppikirjan asema opettajan ehkä tärkeimpänä työ- ja apuvälineenä on nykypäivänä(kin) korostunut. Harvassa ovat opettajat, jotka kykenevät suunnittelemaan opetustaan niin, ettei oppikirjoja tarvita lainkaan. Ainakin opettajalla on itsellään tukena oppikirja, jota hän käyttää opetuksessaan. Osittain juuri tämän vuoksi oppikirjoja kehitetään jatkuvasti, ja niille asetetaan tiettyjä vaatimuksia. Oppikirjan tulee olla kiinnostusta herättävä. Sen lisäksi kirjan tulee mahdollistaa käsitteiden, sääntöjen ja menettelytapojen ymmärtäminen. Arvioidessamme matematiikan oppikirjojen geometriaosuutta meitä auttaa hyvän oppikirjan ominaisuuksien tunteminen.

Lahdeksen (1987, 223) mukaan opetuksellisesti katsottuna oppikirjalla on selkeä asema opetustapahtumassa: se on opettajalle ja oppilaalle tarkoitettu apumateriaali, jonka avulla pyritään opetussuunnitelman tavoitteet toteuttamaan käytännössä.

Oppikirjalla on suomalaisessa matematiikan opetuksessa niin vankka asema, että siitä on käytännössä tullut opetussuunnitelmaa vastaava asiakirja. Koska oppikirja ohjaa toimintaa niin paljon, tulee kiinnittää huomio siihen, mitä kirjat sisältävät. Opettajan tulisi pystyä mm. karsimaan sisältöjä ja tekemään painotuksia omassa opetuksessaan. Opettajan tulisi myös ohjata oppilasta kirjan ulkopuolelle tutkimaan ja kokeilemaan matematiikkaa. (Vaahtokari & Vähäpassi 1998, 214, 230.)

Oppikirjan tulee olla luettavuudeltaan sellaista tasoa, että oppilas pystyy sen ymmärtämään. Oppikirja on yksi tuote, johon oppiaines on valikoitu. Tämä aines sisältyy oppikirjaan ja se välittyy oppilaalle ensisijassa näköaistin välityksellä, mutta oppimisen tehostamiseksi useiden aistikanavien käyttö olisi vähintäänkin suotavaa. Geometrian oppimiseen liittyy myös konkreettinen mittasuhteiden ja tilan kokeminen esimerkiksi liikkumalla ja tunnustelemalla. Oppikirjoista olisi käytävä myös ilmi se, että käsitteiden oppimiseen olisi käytettävä riittävästi aikaa. Jos näin ei ole, oppikirjoja orjallisesti noudattamalla käsitteet saattavat jäädä ymmärtämättä.

Lahdeksen (1992) mukaan kirjan tulee sisältää rakenteita, jotka ovat jaettavissa mielekkäiksi opetuskokonaisuuksiksi eli opetusjaksoiksi. Oppimateriaali ei saa myöskään olla liian valmiiksi jäsennelty, jotta oppilaiden omakohtainen työskentely olisi mahdollista. Lisäksi materiaalin tulee vastata oppilaiden kehitystasoa. (Lahdes 1992, 224.)

6 Tutkimuksen toteuttaminen

6.1 Tutkimustehtävä ja tutkimusongelmat

Tutkimuksemme tarkoituksena oli analysoida kolmen matematiikan viidennen luokan oppikirjan geometriaosuuksia. *Perusopetuksen opetuskokeiluissa lukuvuonna 2003 - 2004 noudatettavissa opetussuunnitelman perusteissa vuosiluokille 3 - 9* on oppisisällöt jaettu vuosiluokille 3 - 5 sekä 6 - 9. Kokeiluperusteet 2002 kuvaa myös oppilaan hyvän osaamisen tason 5. luokan päättyessä. Tähän jaotukseen perustuen valitsimme tutkimukseemme nimenomaan viidennen luokan oppikirjat. Kirjat olivat Laskutaito 5, Hei, nyt lasketaan 5 sekä Mieti ja laske 5. Kirjasarjojen valinnassa ei ollut muita perusteita, kuin että ne ovat uusimpia ja saatavilla olevia.

Kokeiluperusteet 2002 on myös hyvä pohja tarkastella geometrian sisältöjä, koska sitä edeltäneeseen Peruskoulun opetussuunnitelman perusteisiin 1994 verrattuna Kokeiluperusteissa 2002 kerrotaan tarkemmin, mitä sisältöjä perusopetuksessa tulisi opettaa. Halusimme niin ikään tutustua ennakkoon matematiikan opetussuunnitelmaluonnokseen, koska aikanaan osallistumme omassa työssämme koulun opetussuunnitelman laadintaan. Viimeisimmissä opetussuunnitelmauudistuksissa käsitys oppimisesta on muuttunut yhä oppilaskeskeisemmäksi. Yksi konstruktivistisen oppimiskäsityksen perustavia ajatuksia on, että oppilas saadaan aktiiviseksi osallistujaksi oppimistapahtumassa. Opettajan tulisi miettiä ja selvittää, miten oppilas ajattelee.

Tutkimuksessamme etsimme vastauksia seuraaviin ongelmiin: Miten oppikirjojen tehtävät vastaavat Kokeiluperusteiden 2002 geometrian oppisisältöjä? Onko kirjoissa oppilasta aktivoivaa ainesta, joka edesauttaisi geometrian oppimista eli ohjaavatko oppikirjat radikaalin konstruktivismin ja oppilaan kehitystason mukaiseen oppimiseen? Tutkimuksen edetessä kiinnostuimme myös siitä, ovatko tutkimamme oppikirjat aktiiviselta sisällöltään erilaisia.

Tutkimuksemme aineiston käsittelyssä käytimme sekä laadullisia että tilastollisia menetelmiä. Oppikirjojen tehtäviä käsiteltiin sekä kvalitatiivisesti luokitellen että laskemalla tuloksista tehtävien prosenttijakautumia suhteessa uusiin opetussuunnitelman Kokeiluperusteiden 2002 sisältöön ja muodostamaamme luokitukseen.

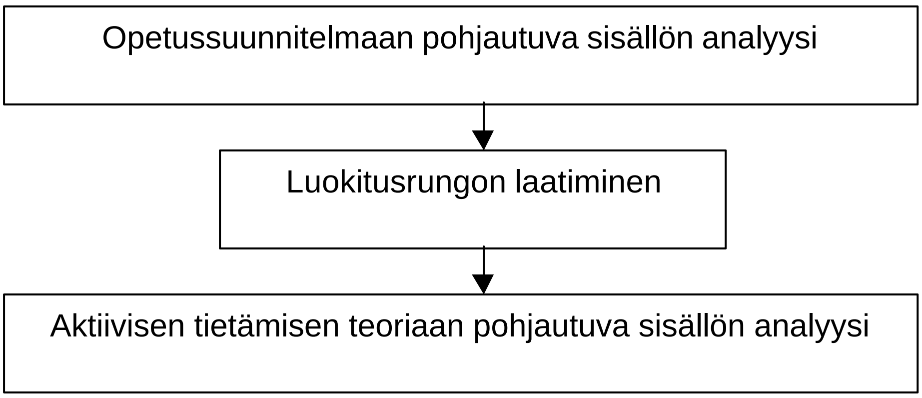
6.2 Tutkimusmenetelmä

Tutkimuksessamme käytämme sisällön analyysia. Pietilän (1973) mukaan sisällön analyysissa kerätään tietoa tutkittavan aineiston sisällöstä. Sisällön analyysi on joukko menettelytapoja, joiden pohjalta kerätään tietoja ja tehdään havaintoja tieteellisyyden kriteereitä noudattaen. Sisällön analyysin kuvailuun voidaan käyttää sekä määrällisiä että laadullisia keinoja. Keinoina sisällön kuvailuun voidaan käyttää tilastollista, mutta myös sanallista kuvailua. Tärkeintä on saada analyysin sisältö tiivistettyä selkeään ja esitettävään muotoon. (Pietilä 1973, 51 - 53, 61.)

Jussilan, Montosen ja Nurmen (1993) mukaan sisällönanalyyttinen tutkimus tavallisimmin käsittelee kielen muodossa olevaa tekstiä, mutta joskus myös kuvallista aineistoa tai muuta viestintämateriaalia. Sisällön analyysi pyrkii tulkitsemaan ja kuvailemaan analysoitavan kohteen ominaispiirteitä ensisijaisesti viestin lähettäjän ja vastaanottajan (tutkimuksessamme kirja – lapsi) välisen yhteyden kannalta. Toisinaan sisällönanalyyttisessa tutkimuksessa on tarkastelun kohteena jokin viestinnän väline, kuten oppikirjat. Sisällön analyysissa on perinteisesti pyritty saamaan selville tekstin määrällisiä ominaisuuksia, kuten virkkeiden pituutta, mutta viime aikoina on noussut esiin myös tekstin laadullinen painotus. Korostetaan erityisesti sitä, miten ja missä yhteydessä jokin asia ilmaistaan ja mihin erilaisilla ratkaisuilla pyritään. (Jussila, Montonen & Nurmi 1993, 172 - 173.) Tutkimuksessamme emme pyri saamaan selville tekstin määrällisiä ominaisuuksia, kuten eri sanojen tai virkkeiden lukumäärää ja esiintymistiheyttä, vaan nimenomaan matematiikan kirjojen geometriaosuuksissa esiintyvien aktiivisten tehtävien määrää ja luonnetta.

6.3 Tutkimuksen eteneminen

Teimme tutkimuksen kahdessa vaiheessa. Kuviossa 1 on esitetty tutkimusprosessin kulku. Aluksi tutustuimme oppikirjoihin ja etsimme niistä Kokeiluperusteissa 2002 mainittuja geometrian sisältöjä. Tämän jälkeen muodostimme radikaaliin konstruktivismiin pohjautuvan luokittelurungon ja luokittelimme sen mukaan tehtävät uudestaan. Analyysimme tärkein vaihe olikin luokitusrungon muodostaminen ja sen mukainen tehtävien luokittelu.



KUVIO 1. Tutkimusprosessin kulku.

6.3.1 Tutkimuksen ensimmäinen vaihe; opetussuunnitelmaan pohjautuva sisällön analyysi

Tutkimuksemme alkuvaiheen tarkoituksena oli kartoittaa kirjojen sisältöjen vastaavuutta Kokeiluperusteisiin 2002. Tutkimuksemme ensimmäinen vaihe oli varsin keskeinen, koska sen avulla saimme yleiskuvan kirjoista sekä hyvin tärkeää tietoa oppikirjojen rakenteesta. Tehtävien luokittelussa käytimme Kokeiluperusteiden 2002 3 - 5-luokkien geometrian keskeisiä sisältöjä (ks. luku 5.1.4). Samalla kartoitus oli hyvä tapa tutustua kirjojen sisältöön ennen tutkimuksen toista vaihetta, aktiivisen tietämisen teoriaan pohjautuvaa sisällön analyysia.

Kävimme jokaisen kolmen matematiikan kirjan geometriaosuudet läpi tehtävä tehtävältä. Yhteen tehtävään saattoi kuulua useampia alakohtia (esim. 1 a, b, c). Nämä alakohdat käsiteltiin kuitenkin yhtenä tehtävänä. Laskimme tehtävien lukumäärät ja käytimme kirjojen omia tehtäväluokitteluja.

Laskutaito 5:ssa tehtävät jaetaan *perus*-, *lisä*- sekä *kotitehtäviin*. Perustehtävät tarkoittavat kirjan perusaukeamien sisältämiä kaikille tarkoitettuja tehtäviä. Kotitehtävät on tarkoitettu tehtäväksi kotona ja lisätehtävät ovat valinnaisia tehtäviä niille oppilaille, jotka pystyvät tekemään matemaattisesti vaativiakin tehtäviä. Kotitehtävät ja lisätehtävät ovat perustehtävistä erillään kirjan loppuosassa. (Laskutaito 5 2002, 3.)

Hei, nyt lasketaan 5:ssa tehtävät jaetaan *orientoivaan osaan*, *uuden oppimisen osaan*, *kotitehtäviin* sekä *valinnaisiin tehtäviin*. Jakson osat ovat peräkkäin. Orientoiva osa alkaa sivun kokoisella kuvalla, jossa myös kerrotaan jakson teema. Orientointiin kuuluu aikaisemmin opittujen asioiden kertaaminen. Uuden oppimisen osassa käytetään aikaisemmin opittua tietoa ja opitaan uutta tietoa. Kun oppilas on tehnyt kaikille tarkoitetut perustehtävät, hän voi siirtyä tekemään muita tehtäviä. Perustehtävät on merkitty aukeaman värillä, joka esimerkiksi geometriajaksossa on punainen. Perustehtävien lisäksi uuden oppimisen osassa on mustilla numeroilla merkittyjä vaativampia tehtäviä ja kirjain-numero-symbolilla merkittyjä kotitehtäviä (A1, A2, B1 ja B2). Kolmantena osana on valinnaisuusosa, josta oppilas voi tehdä itse valitsemiaan tehtäviä, arvioida osaamistaan ja suunnitella siten omaa työtään. (Hei, nyt lasketaan 5 2001, 2.)

Mieti ja laske 5:n tehtäväjako on seuraava: *perustehtävät*, *kotitreenit*, *sanaharkat*, *aivojumppa* sekä *taito-osio*. Viikon mittaisiksi tarkoitetut jaksot sisältävät neljä perusaukeamaa, joissa on kaikille tarkoitettuja perustehtäviä. Näitä seuraa viikon aikana tehtävät kotitehtävät eli kotitreenit. Sanaharkat ovat sanallisia tehtäviä. Aivojumppa tarkoittaa päättelyä ja pohtimista vaativia pulmatehtäviä. Taito-osiosta löytyy tutkimustehtäviä, jotka sisältävät ongelmia. Lisäksi jokaiseen viikkojaksoon kuuluu kaksi *spurttia*, mekaanisia päässälaskuja, joita oppilas voi itse laskea ja tarkistaa. (Mieti ja laske 5 2001, 3.)

Jotta pystyimme vertaamaan kirjojen tehtäväluokitteluja toisiinsa, jaoimme ne uudestaan perus-, koti- ja lisätehtäviin (kuvio 2). Käytimme näin hyväksi Laskutaito 5:n jaottelua. Mieti ja laske 5:ssa sanaharkat, aivojumpat sekä taito-osio täyttivät luonteeltaan ja sijainniltaan kirjassa lisätehtävien kriteerit, joten ne yhdistettiin lisätehtäviksi. Emme ottaneet luokitteluun mukaan spurttitehtäviä, koska ne eivät olleet geometriatehtäviä ja olisivat vääristäneet tulosta liikaa. Orientoivan osan tehtävät Hei, nyt lasketaan 5:ssä ovat kaikille tarkoitettuja, joten ne yhdistettiin perustehtäviin. Valinnaisen osan tehtävät luokiteltiin lisätehtäviksi.

	Perustehtävät	**Kotitehtävät**	**Lisätehtävät**
Laskutaito 5	Perustehtävät	Kotitehtävät	Lisätehtävät
Mieti ja laske 5	Perustehtävät	Kotitreenit	Sanaharkat Aivojumppa Taito-osio
Hei, nyt lasketaan 5	Orientoiva osa Uuden oppimisen osa	Kotitehtävät	Valinnaiset tehtävät

KUVIO 2. Tehtävien uudelleenluokittelu.

Moni tehtävä kuului useisiin sisältöalueisiin. Esim. monikulmiotehtävässä laskettiin myös kulmien suuruutta. Täten tehtävä oli erilaisten monikulmioiden tutkimista ja luokittelua sekä kulman mittaamista ja kulmien luokittelua. Seuraavalla sivulla on esimerkki tehtävästä, joka kuuluu useaan sisältöalueeseen:

Piirrä

a. *tylppäkulmainen kolmio OPQ, jonka suurin kulma on 105°.*
b. *Teräväkulmainen kolmio RST, jonka yksi kulma on 60°.*

(Hei, nyt lasketaan 5 2001, 123.)

Kyseisessä tehtävässä on

- kulman mittaamista ja luokittelua,
- erilaisten monikulmioiden tutkimista ja luokittelua,
- mittaamisen periaatteen vahvistamista sekä mittayksiköiden käyttöä.

Keräsimme aineiston tutkimukseemme ns. ”tukkimiehen kirjanpidolla”. Merkitsimme ruutupaperille ja tutkittaviin kirjoihin mihin geometrian sisältöalueisiin tehtävä kuuluu. Siirsimme tiedot Microsoft Excel taulukkolaskentaohjelmaan, jonka avulla laskimme jakaumat eri tehtävätyypeistä.

6.3.2 Tutkimuksen toinen vaihe; aktivoivan luokitusrungon laatiminen ja siihen perustuva sisällön analyysi

Tutkimuksemme toisessa vaiheessa loimme luokitusrungon tehtävien analysoimista varten. Luokitusrunkomme perustuu radikaalin konstruktivismin mukaisen aktiivisen tietämisen teoriaan. Tehtävistä pyrimme löytämään oppilasta aktivoivat tehtävät. Otimme luokitteluun mukaan myös geometriaan olennaisesti liittyvän hahmottamisen (ks. s. 11). Aktivoinnilla tarkoitamme sitä, että tehtävä sisältää:

- kosketuspintaa oppilaan kokemusmaailmaan,
- dialogia joko oppilaiden kesken tai oppilaan ja opettajan välillä,
- toimintaa,
- ongelmanratkaisua ja
- hahmottamista.

Tulkintamme mukaan tehtävä on aktivoiva, mikäli se sisältää kaikki nämä ominaisuudet. Mikäli tehtävästä puuttuu yksi tai useampia ominaisuuksia, on tehtävä vähemmän aktivoiva. Jos siitä puuttuvat kaikki em. ominaisuudet, tehtävä on luokittelumme mukaan ei-aktivoiva. Lisäksi geometriaosuuksissa esiintyi tehtäviä, jotka eivät sisältäneet geometrisia ominaisuuksia. Ne nimesimme muiksi tehtäviksi.

Tutkimuksen toisessa vaiheessa, luokitusrungon laatimisen jälkeen, kävimme tehtävät yksi kerrallaan läpi. Merkitsimme tehtävistä löytyvät aktivoivuustekijät ensin ruutupaperille ja siirsimme ne sitten Excel taulukkolaskentaohjelmaan.

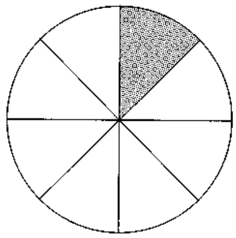
6.3.2.1 Kokemusmaailmaan liittyvät tehtävät

Matematiikan opetuksessa opettajan on tunnettava oppilaan kokemusmaailmaa ja asetettava sellaisia tehtäviä, jotka liittyisivät myös oppilaan jokapäiväisiin kokemuksiin ja kiinnostuksen kohteisiin. Tämä siksi, että oppija voisi aidosti ja aktiivisesti luoda ja ratkaista omia matemaattisia ongelmiaan. Tutkimuksessamme kokemusmaailmaan liittyvät tehtävät ovat sellaisia, jotka liittyvät arkielämään, niissä on vähäinenkin kosketuspinta oppilaan kokemusmaailmaan. Tehtävissä on siis muutakin kuin vain matemaattisia symboleja tai käsitteitä.

Steffen (1991, 190) mukaan matematiikan opetuksessa on otettava huomioon tietyt säännöllisyydet oppijoiden kokemusmaailmassa. Myös von Glasersfeld (1995) korostaa oppilaiden kokemusmaailmaa tehtävissä. Oppijoiden kokemusmaailmaa lähellä olevilla tehtävillä oppijat saadaan ”herätettyä” aiheeseen. Läheskään aina tämä ei ole kuitenkaan mahdollista. (von Glasersfeld 1995, 192.) Ongelmaksi oppikirjojen tehtävissä muodostuu kokemusmaailman puutteen ohella se, että kaikkien oppilaiden kokemusmaailmaa ei pysty koskettamaan samalla tavalla. Esim. kaikki oppilaat eivät tiedä, mitä tarkoittaa tontti tai kaikki oppilaat eivät pidä pizzasta. Nämä olemme kuitenkin luokitelleet kokemusmaailmaan liittyviksi tehtäviksi. Seuraavalla sivulla esimerkit tällaisista tehtävistä:

Suorakulmion muotoisen tontin pidempi sivu on 60 m ja lyhyempi sivu 40 m. Kuinka pitkä on sen ympärillä oleva aita jossa on 2 metrin levyinen portti?
(Laskutaito 5 2001, 77.)

Pizza jaetaan kahdeksaan yhtä suureen osaan. Kuinka suuri on merkittyä osaa vastaava keskuskulma?



(Hei, nyt lasketaan 5 2001, 133.)

6.3.2.2 Vuoropuheluun suuntaavat tehtävät

Konstruktivistisen matematiikan opetuksessa nähdään tärkeäksi kommunikointi oppijoiden ja opettajan välillä (ks. luku 4.6). Oppijoiden on myös keskenään keskusteltava tavasta työskennellä ratkaisuun pääsemiseksi. Hyvään lopputulokseen pääseminen edellyttää matemaattista keskustelua ja muulla tavoin kommunikointia. (Steffe 1991, 190; Cobb, Wood & Yackel 1991, 169.) Samaa toteaa myös Haapasalo (1998c, 87): ”Oppilaiden tulisi jakaa ideansa ja lähestymistapansa muiden kanssa sekä tottua esittämään ongelmia useilla eri tavoilla, etsiä erilaisia ratkaisumalleja niihin sekä muotoilla itse ongelmia todellisista tilanteista.”

Mikäli tehtävänannossa oppilas joutuu miettimään, kirjaamaan ja perustelemaan ratkaisujaan *omin sanoin*, johtaa se tulkintamme mukaan vuoropuheluun joko oppilaiden kesken tai oppilaan ja opettajan välille. Tämä tietenkin edellyttää luokassa avoimuutta keskustelevalle ilmapiirille. Seuraavalla sivulla esimerkit dialogiin suuntaavista tehtävistä:

Miettikää yhdessä ohje suorakulmion pinta-alan laskemiseksi.
(Mieti ja laske 5 2001, 34.)

a) Piirrä vihkoosi vinosti toisensa leikkaavat suorat t ja u.
b) Mittaa leikkaavien suorien t ja u muodostamat neljä kulmaa.
c) Kirjoita, mitä huomaat kulmien asteluvuista.
(Hei, nyt lasketaan 2001, 124.)

Onko mahdollista piirtää:
a) kolmio, jossa on kaksi terävää kulmaa
b) kolmio, jossa on kaksi tylppää kulmaa?
Piirrä tai perustele, miksi.
(Laskutaito 5 2001, 273.)

6.3.2.3 Toimintaa sisältävät tehtävät

Geometrian opettamiseen ja oppimiseen kuuluu olennaisena osana toimiminen. Toiminnallisuus yleensä matematiikassa käsitetään erilaisten toiminnallisten välineiden ja materiaalien kanssa työskentelyksi. Esimerkkinä geolaudat ja Multilink-palikat. Tutkimuksessamme olemme kuitenkin määritelleet toiminnaksi myös kaikki mittaamis- ja piirtämisharjoitukset. Tulkintamme mukaan mittaaminen ja piirtäminen ovat aktiivista toimintaa, jossa oppilas itse tutkii ja käyttää apuvälineitä luoden pohjaa oppimiselleen (ks. luku 4.4).

6.3.2.4 Ongelmatehtävät

Sellaista tehtävää, jonka ratkaisemiseksi oppija joutuu yhdistelemään hänelle tuttuja tietoja ja taitoja uudella tavalla, sanotaan ongelmaksi. Jos hän kykenee heti tunnistamaan tehtävän ratkaisemiseen tarvittavat menetelmät, tehtävä on hänelle rutiinitehtävä. (Pehkonen, Pekama & Seppälä 1991, 11.) Kuitenkin on otettava huomioon, että jostakin toisesta oppijasta ongelmalta tuntuva tehtävä voi samaan aikaan tuntua toisesta rutiinitehtävältä (Haapasalo 1998a, 17).

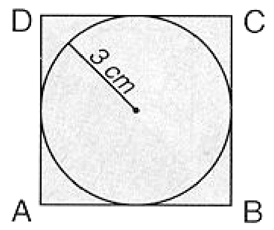
Haapasalo (1998a, 17) kuvailee ongelman seuraavasti:

> *"Jotta tietty tilanne olisi määrätyllä hetkellä tietylle henkilölle ongelma, sen on aiheutettava tässä yksilössä päämäärähakuista (ajattelu)toimintaa, joka tähtää tavoiteltavaan tulokseen ilman välittömästi havaittavia keinoja."*

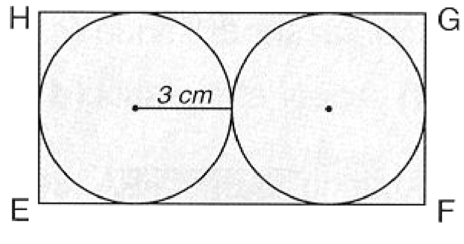
Lisäksi Haapasalon (1998a, 182) mukaan johtopäätösten teko tunnettujen tosiasioiden perusteella on luonnollisesti (ainakin matemaattisissa) ongelmissa käyttökelpoista ja jopa välttämätöntä.

Seuraavassa esimerkki geometrisestä ongelmasta, jossa yhdistellään tuttuja tietoja uudella tavalla. Toisin sanoen, säteen pituuden avulla saadaan halkaisija, joka on yhtä pitkä kuin neliön sivu.

Laske neliön ABCD pinta-ala.



Laske suorakulmion EFGH pinta-ala.



(Laskutaito 5 2001, 233)

Tutkimuksessamme emme ole tehneet eroa erilaisten ongelmatehtävien välillä. Tutkimuksen lähtökohtana on etsiä oppilasta aktivoivia tehtäviä ja siten tutkimusongelmanamme oleva aktivoivien aineksien etsiminen ei vaadi ongelmatehtävien tarkempaa erittelyä.

Esim. ns. yhden oivalluksen ongelmat, eli pulmatehtävät, ovat tulkintamme mukaan ongelmatehtäviä. (ks. Pehkonen & al. 1991, 19 - 20.) Avoimet ongelmat sisältävät mm. ongelmakenttiä ja projektityyppisiä ongelmia. (Pehkonen & al. 1991, 66.) Luokittelemme ne tutkimuksessamme niin ikään ongelmatehtäviin kuuluviksi.

Suunnittelutehtävistä olemme luokitelleet ongelmatehtäviksi vain sellaiset tehtävät, joissa on ollut valmiit palaset tai muodot, joista on pitänyt koota tietynlainen kappale tai kuvio. Kyseessä on silloin pulmatehtävä. Jos suunnittelussa on saanut käyttää rajattomasti geometrisia palasia, kappaleita tai kuvioita, tehtävä ei ole ongelma. Tällöin oppilaalla tulkintamme mukaan on helpompi työ ratkaista tehtävä.

Esimerkki:

Piirrä kaksi neliötä niin, että muodostuu tähti.
(On ongelmatehtävä)

Suunnittele suunnikkaista omat nimikirjaimesi. Voit värittää ne.
(Ei ongelmatehtävä)

6.3.2.5 Hahmottavat tehtävät

Jotta oppilas pystyisi hahmottamaan geometriaa, hänellä tulisi olla mahdollisuus käyttää hahmottavaa materiaalia. Tähän tarkoitukseen sopii kaikenlainen ympäristöstä saatava materiaali, kuten esimerkiksi liiketunnukset eli logot. Geometrisia kuvioita ja käsitteitä tulisi saada hahmotella myös ilman apuvälineitä, vapaalla kädellä. Joillakin oppilailla voi olla motorisia vaikeuksia, jolloin apuvälineiden käyttö saattaa aiheuttaa hankaluutta geometristen sisältöjen ymmärtämisessä. (Joki 2002, 5 - 6, 71, 201.)

Tutkimuksessamme luokittelemme hahmottaviksi tehtäviksi kaikki sellaiset tehtävät, joissa oppijan on pystyttävä hahmottamaan ääriviivat tai ulkonäkö jollekin geometriselle tasokuviolle tai kappaleelle tai niitä esittäville kuville (esim. suorakulmion muotoinen rantapyyhe). Toisin sanoen hahmottamista tarvitaan luokittelumme mukaan kaikissa tehtävissä, joissa on valmiina jonkinlainen kuva tai oppija joutuu piirtämään jonkinlaisen kuvion. Sanalliset tehtävät, joissa ei ole kuvaa, eikä oppija joudu piirtämään kuviota, eivät toisin sanoen ole hahmottamistehtäviä. Toki näissäkin tehtävissä ratkaisu edellyttää oppijan pään sisällä tapahtuvaa hahmottamista. Esim. käsite kolmio tuo oppijalle mieleen tasokuvion, jolla on tiettyjä ominaisuuksia.

6.4 Tutkimuksen luotettavuuden arviointi ja tutkimuksen pätevyys

6.4.1 Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimuksen luotettavuudella tarkoitetaan Varton (1992) mukaan sen vapautta satunnaisista ja epäolennaisista tekijöistä. Itse tutkimus on laadullisessa tutkimuksessa koko ajan arvioinnin alla ja nämä em. satunnaisuudet yleensä karsiutuvat pois tutkimuksen kuluessa, mikäli tutkimus etenee johdonmukaisesti ja tutkijan arviointiperusteet ovat riittävät. (Varto 1992, 103 - 104.) Työmme edistyessä jouduimme jatkuvasti pohtimaan tekemiämme ratkaisuja ja ottamaan kantaa analyysimme ja tekemämme työn luotettavuuteen. Kuten Palonen (1988, 15) mainitsee, kaikki tutkimus on ainoastaan tulkintaa: sillä ei ole mitään kestävää perustaa tai ”absoluuttista mittapuuta”. Tulkinta on aina ehdollinen käsitys ilmiöstä.

Eskolan ja Suorannan (1998) mukaan kvalitatiivisessa tutkimuksessa tutkijan apuna ovat ainoastaan omat ja tutkijakollegan ennakko-oletukset, peukalosäännöt arkielämästä sekä enemmän tai vähemmän vahva teoreettinen oppineisuus. Laadullisen tutkimuksen lähtökohtana on tutkijan avoin subjektiviteetti ja se, että pääasiallisin tutkimuksen luotettavuuden kriteeri on tutkija itse. (Eskola & Suoranta 1998, 209, 211.)

Eskola ja Suoranta (1998) esittävät reliabiliteetin tarkastamiseksi kolmenlaisia toimia: indikaattorin vaihtoa, useampaa havainnointikertaa sekä useamman havainnoitsijan käyttöä. (Eskola & Suoranta 1998, 214.) Tutkimuksemme reliaabeliutta pyrimme varmistamaan sekä tutkimuksen ensimmäisessä vaiheessa että toisessa vaiheessa siten, että molemmat tutkijat kävivät tehtävät itsenäisesti läpi. Ensimmäisessä vaiheessa molemmat tutkijat analysoivat tehtäviä suhteessa Kokeiluperusteiden 2002 geometrian oppisisältöihin. Yhtenevyys tutkijoiden tuloksien välillä oli n. 95 %. Toisessa vaiheessa analysoimme tehtävien luokituksia yhdessä tekemämme luokitusrungon mukaan. Kaikkien tehtävien osalta yksimielisyysprosenttimme oli n. 91 %. Suurimmat sekaannukset aiheutti ongelmatehtävien luokittelu. Lähinnä ongelmia tuottivat ongelmatehtävien löytäminen sanallisten tehtävien laajasta kirjosta. Sanalliset tehtävät vaikuttivat usein sovellustehtäviltä, vaikka ne todellisuudessa olivatkin sanallisia mekaanisia tehtäviä, ”ei-aktivoivia” rutiinitehtäviä. Yleensä ongelma ratkesi kuitenkin sillä, oliko tehtävässä annettu suorat ohjeet ratkaisemiseen (ei ongelma) vai ei. Toisaalta luokittelua helpotti se, että ongelmatehtäviä ei ollut luokiteltu tarkemmin vaan ainoastaan yleisesti ongelmatehtäviin.

Toiseksi vahvistaaksemme tutkimuksemme reliaabeliutta, kävimme yhdessä tehtävät luokituksen mukaan läpi kolmeen kertaan, n. viikon väliajoin. Yhtenevyydet eri luokittelukertojen välillä olivat n. 93 %. Ulkoista havainnoijaa emme työssämme käyttäneet, koska tutkimus kuitenkin on vain pro gradu-tutkimus.

Tutkimuksen toistettavuus tarkoittavaa Mäkelän (1990) mukaan sitä, että luokittelu- ja tulkintasäännöt, joita tutkimuksessa käytetään, esitetään niin selkeästi kuin mahdollista. Periaatteena on, että toinen tutkija voisi tehdä näillä ohjeilla samat tulkinnat aineistosta. (Mäkelä 1990, Eskolan & Suorannan 1998, 217 mukaan.) Tutkimuksessamme juuri edellä mainittu ongelmatehtävien löytäminen saattaa olla tutkimusta toistettaessa hankalin vaihe. Vaikka olemme selkeästi luokitelleet ongelmatehtävän, on erityisesti sanallisten tehtävien luokittelu haastavaa.

Tutkimuksemme luotettavuuden vahvistuvuus on vaikeaa, koska samanlaisia tutkimuksia aktivoivista geometriatehtävistä ei tietääksemme ole tehty. Vahvistuvuus tarkoittaa Eskolan ja Suorannan (1998) mukaan toisten, vastaavaa ilmiötä tarkastelleiden tutkimusten tulkinnoista saatua tukea. (Eskola & Suoranta 1998, 213.) Toisaalta tutkijoiden mukaan tutkimus on tuottanut uutta ja hedelmällistä tietoa sekä näkökulmia matematiikan kirjojen geometriatehtävistä. Tätä voisi kutsua tutkimuksen tuloksellisuudeksi ja hedelmällisyydeksi (Eskola & Suoranta 1998, 223).

Aineiston riittävyyttä ja kattavuutta (Eskola & Suoranta 1998, 216.) mietittäessä on otettava huomioon, että toki geometrisia aineksia on kirjoissa muuallakin, kuin vain geometriaosuuksissa. Perustelunamme vain geometriaosuuksien analysointiin on se, että halusimme nimenomaan tutkia useampien kirjojen sisältöjä. Jos olisimme lähteneet tutkimaan koko kirjan geometriasisältöjä, olisi tutkimuksemme laajentunut huomattavasti.

Näillä edellä lueteltujen perustelujen pohjalta pidämme tutkimuksemme reliabiliteettia vähintään tyydyttävänä.

6.4.2 Tutkimuksen pätevyys

Tutkimus on pätevä, kun se vastaa sille asetettuja päämääriä ja tutkimuskohdetta. Mikäli tutkimus vastaa kokonaan eri kysymyksiin kuin alussa on asetettu ja vastaa huonosti tutkimuskohdetta, tutkimus ei ole pätevä. Toisin sanoen pätevyys kertoo, missä määrin on onnistuttu mittaamaan sitä, mitä pitikin mitata. (Varto 1992, 103; Heikkilä 1999, 28.)

Pätevyydessä voidaan erottaa sekä sisäinen että ulkoinen pätevyys. Sisäisellä validiteetilla (pätevyydellä) osoitetaan tutkijan tieteellinen ote ja tieteenalansa hallinta, vastaavatko mittaukset tutkimuksen teoriaosassa esitettyjä käsitteitä. Ulkoisella pätevyydellä tarkoitetaan puolestaan sitä, tulkitsevatko muut tutkijat tutkimustuloksia samalla tavalla. (Eskola & Suoranta 1998, 214; Heikkilä 1999, 28.)

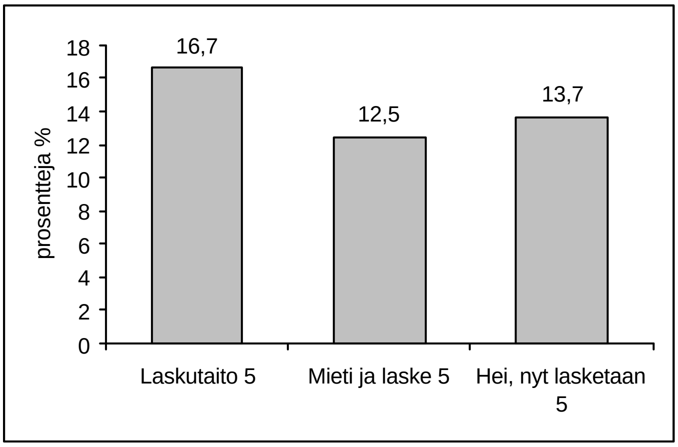
Tässä tutkimuksessa sisällön analyysin sisäinen validiteetti pyritään osoittamaan yhtenäisen käsitteistön avulla. Tutkimuksemme ensimmäisessä osassa etsimme geometriatehtävien vastaavuutta Kokeiluperusteisiin 2002. Näin ollen tutkimuksen ensimmäinen osa on tutkijoiden mielestä täysin johdonmukainen. Tutkimuksen toisessa osassa etsimme aktivoivia tehtäviä tutkittavista kirjoista. Aktivoivien tehtävien luokitusrunko on radikaalin konstruktivismin mukaan rakennettu ja suoraan johdettavissa radikaalin konstruktivismin ajatusmaailmasta. Geometriaan olennaisesti kuuluva hahmottaminen oli perusteltu lisäys luokitusrunkoon. Lisäksi uudet Kokeiluperusteet 2002 antavat tukea tällaisen luokitusrungon laadintaan ja analyysin ensimmäinen osa antaa tukea analyysimme toiselle vaiheelle. Näillä perusteilla voi päätellä tutkimuksen olevan sisäisesti kohtalaisen validi.

Tutkimuksessa teimme oppikirjojen tehtävien luokittelun harkitusti, joten tämän pohjalta voidaan päätellä tutkimuksen ulkoisen validiteetin olevan kohtuullinen.

7 Tutkimustulokset

Tutkimustuloksemme olemme jakaneet kahteen osaan. Aluksi esittelemme kirjojen suhdetta Kokeiluperusteiden 2002 keskeisimpiin geometrian oppisisältöihin vuosiluokilla 3 - 5. Tämän jälkeen keskitymme geometriatehtävien luonteeseen. Löytyykö tehtävistä oppilasta aktivoivia aineksia?

Ennen varsinaiseen tutkimukseen ryhtymistä laskimme kirjojen geometria-alueiden suhteellisen osuuden matematiikan kirjoissa vertaamalla geometriaosuuksien sivumäärää koko kirjan sivumäärään. Laskutaito 5:stä ja Hei, nyt lasketaan 5:stä poiketen Mieti ja laske 5 koostuu kahdesta kirjasta, syksy- ja kevätosasta. Geometriajakso on Mieti ja laske 5:n kevätosassa. Jotta pystyimme vertailemaan kirjojen sivumääriä toisiinsa, laskimme Mieti ja laske 5:n molempien kirjojen sivumäärät yhteen. Laskutaidon geometriaosuuden sivumäärä oli 48 ja sen prosentuaalinen osuus koko kirjan sivumäärästä oli joukon suurin, 16,7 %. Mieti ja laske 5:ssa sivumäärä oli sama, 48, mutta suhteellinen osuus yhteenlasketusta syys- ja kevätosan sivumäärästä pienin, 12,5 %. Hei, nyt lasketaan 5:ssa geometrian sivumäärä oli 36 ja suhde koko sivumäärään 13,7 % (kuvio 3).

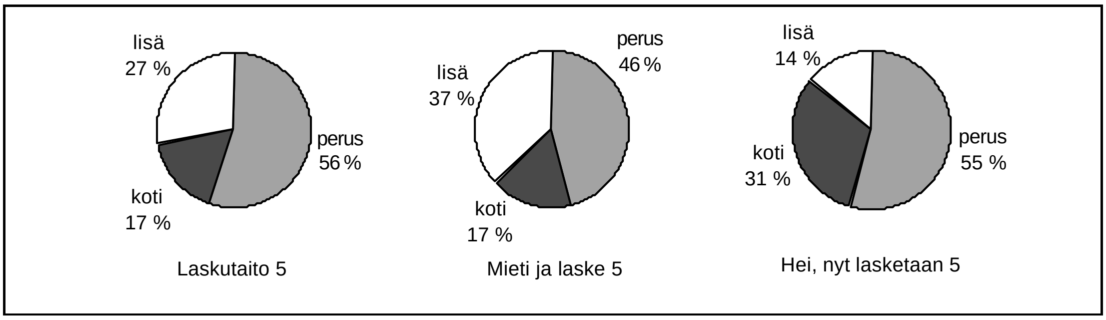


KUVIO 3. Geometria-alueen suhteellinen osuus prosentteina matematiikan kirjoissa.

Kuvio 4 on rakennettu liitteessä 1 olevan taulukon 1 pohjalta. Kuviossa 4 esitetään kaikkien kolmen kirjan perus-, koti- ja lisätehtävien prosentuaaliset osuudet kaikista geometriajakson tehtävistä. Laskutaito 5 luottaa kirjoista eniten määrään. Tehtäviä on geometriaosuudessa yhteensä 197. Kuten kuviosta ilmenee, näistä perustehtäviä 56 % (n=109), kotitehtäviä 17 % (n=34) ja lisätehtäviä 27 % (n=54).

Mieti ja laske 5:n geometriaosuudessa tehtäviä on yhteensä 173. Perustehtäviä on 46 % (n=80), kotitehtäviä 17 % (n=29) ja lisätehtäviä 37 % (n=64).

Hei, nyt lasketaan 5:n geometriaosuudessa tehtäviä on vähiten, yhteensä 149. Perustehtäviä näistä 55 % (n=82), kotitehtäviä 31 % (n=46) ja lisätehtäviä 14 % (n=21).



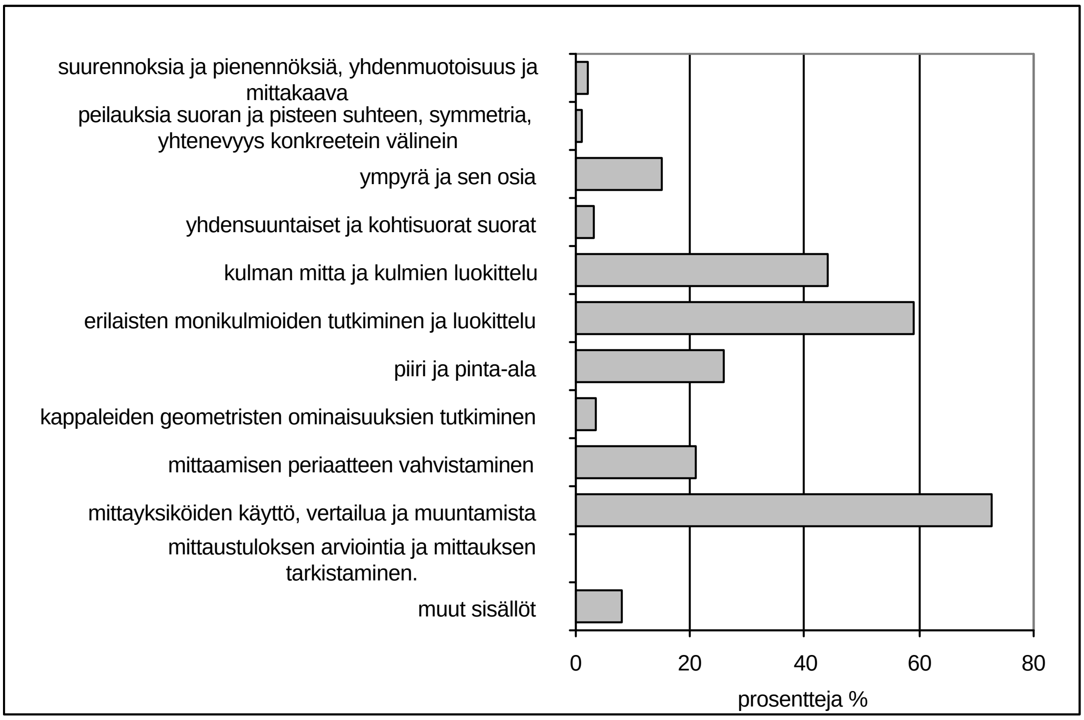
KUVIO 4. Geometriajakson perus-, koti- ja lisätehtävien suhteelliset osuudet prosentteina.

7.1 Tutkittavien matematiikan 5-luokan oppikirjojen geometriaosuuksien vastaavuus Kokeiluperusteisiin 2002

Selkeyden vuoksi tarkastelemme seuraavaksi kirja kerrallaan, miten ne vastaavat Kokeiluperusteiden 2002 geometrian oppisisältöjä. Liitteessä 2 on pylväsdiagrammi (kuvio 15), jossa kuvataan kaikkien kolmen kirjan oppisisältöjen osuuksia kaikissa tehtävissä rinnakkain. Lisäksi liitteissä 3 - 5 esitetään taulukot, joiden pohjalta pylväsdiagrammi on laadittu.

7.1.1 Laskutaito Kokeiluperusteiden 2002 silmin

Seuraavalla sivulla oleva kuvio 5 on laadittu liitteessä 3 olevan taulukon 2 perusteella. Tehtävistä löytyi yli 70 prosentista mittayksiköiden käyttöä, vertailua ja muuntamista. Mittaamiseen liittyviä piiriä ja pinta-alaa käsitellään vajaassa 30 % tehtävistä. Mittaamisen periaatteiden vahvistamista, eli varsinaisia mittaamisharjoituksia, oli kuitenkin vain n. 20 % tehtävistä. Huomionarvoista, kuten kuviosta 5 voi todeta, Laskutaito 5:n mittaamisharjoituksissa oli se, ettei mittaustulosten arviointia ollut yhdessäkään tehtävässä.



KUVIO 5. Kokeiluperusteiden 2002 geometriasisällöt Laskutaito 5:n geometriaosuudessa.

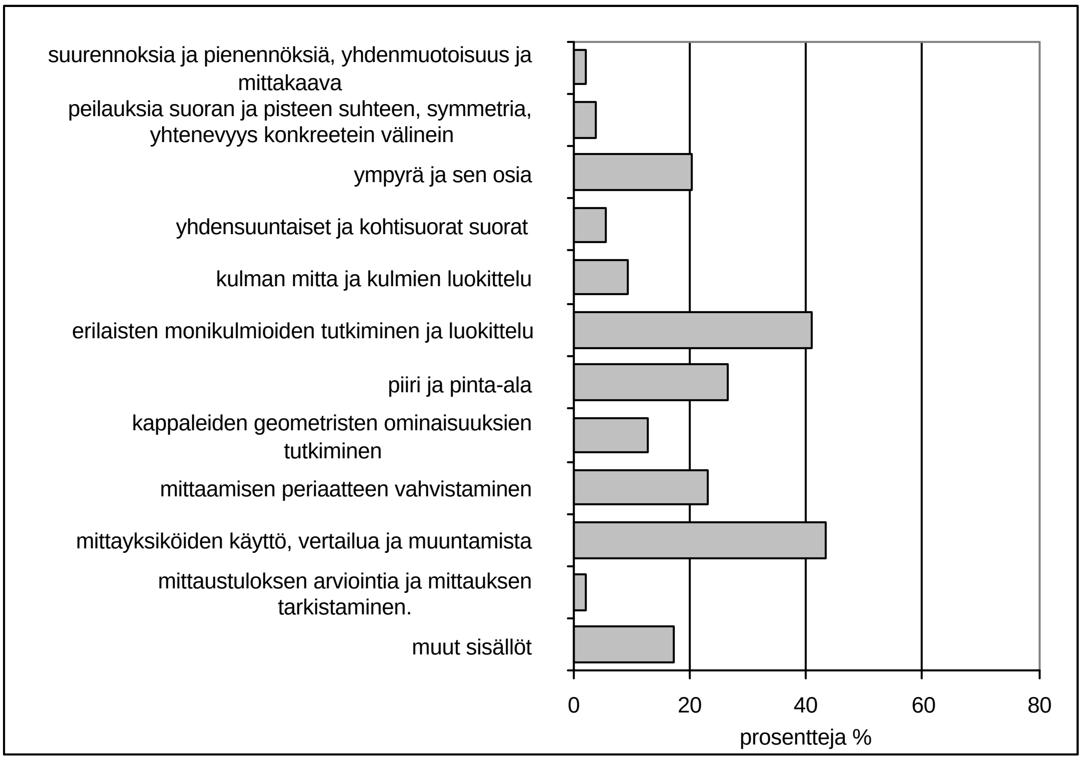
Erilaiset monikulmiot kuuluvat olennaisena geometriaan ja se oli havaittavissa myös Laskutaito 5:ssä. Kuten kuviosta 5 voi havaita, erilaisten monikulmioiden tutkimista ja luokittelua oli kaikista tehtävistä noin 60 prosentissa. Kappaleiden tutkiminen kirjojen kuvista vaatii jo abstraktimpaa ajattelua ja avaruudellista hahmotuskykyä. Kappaleiden geometristen ominaisuuksien tutkiminen jääkin vähälle huomiolle Laskutaidossa. Kappaletta tutkitaan vain lisätehtävissä (ks. liite 3, taulukko 2), eli oletettavaa on että niitä pääsevät tekemään vain nopeimmat ja parhaat laskijat.

Kokeiluperusteiden 2002 mukaan geometrian keskeisenä sisältönä tulisi 3 - 5-luokilla olla myös suurennokset, pienennökset, yhdenmuotoisuus ja mittakaava. Näitä toki kirjan geometria-alueella on, mutta yhteensä vain kahdessa prosentissa tehtävistä. Kotitehtävissä näitä ei ollut lainkaan. Peilausten, symmetrian ja yhtenevyyden tutkimista ei ollut perustehtävissä eikä kotitehtävissäkään lainkaan, tutkiminen jää lisätehtävien varaan. Myös yhdensuuntaisten ja kohtisuorien suorien tutkimisen osuus tehtävistä on huomattavan vähäinen, selvästi alle viisi prosenttia. Kotitehtävissä näistä sisällöistä ei ollut yhtään tehtävää, vaan kotitehtäviksi tarkoitetut tehtävät tuntuivat yleisesti olevan suhteellisen helppoja.

Liitteenä on lisäksi pylväsdiagrammi Laskutaito 5:n geometriaosuuden lisä-, koti- ja perustehtävien oppisisällöistä (liite 6).

7.1.2 Mieti ja laske 5

Kuviossa 6 esitetään Mieti ja laske 5 geometriajakson vastaavuus Kokeiluperusteisiin 2002. Kuvio 6 on laadittu liitteessä 4 olevan taulukon 3 perusteella.



KUVIO 6. Kokeiluperusteiden 2002 geometriasisällöt Mieti ja laske 5:n geometriaosuudessa.

Kirjan geometriaosuus alkaa heti kappaleiden ja kuvioiden tarkastelulla. Kappaleiden ominaisuuksien tutkimista onkin Mieti ja laske 5:ssa kirjoista selvästi eniten, peräti 13 %:ssa kaikista tehtävistä. Monikulmioiden tutkiminen ja mittayksiköiden käyttö painottuvat myös Mieti ja laske 5:ssa hieman muita sisältöjä enemmän. Kaikista tehtävistä näitä sisältöalueita oli n. 40 %:ssa. Mittaustulosten arviointia oli kaikille tarkoitetuissa perustehtävissä, joskin vain viidessä prosentissa tehtävistä. Samoin peilauksia, symmetriaa ja yhtenevyyttä vaativia tehtäviä oli perus- (8 %) sekä kotitehtävissä (3 %) (ks. liite 4). Myös suurennokset, pienennökset, yhdenmuotoisuus ja mittakaava olivat saaneet kirjassa oman osansa, kahdessa prosentissa kaikista tehtävistä.

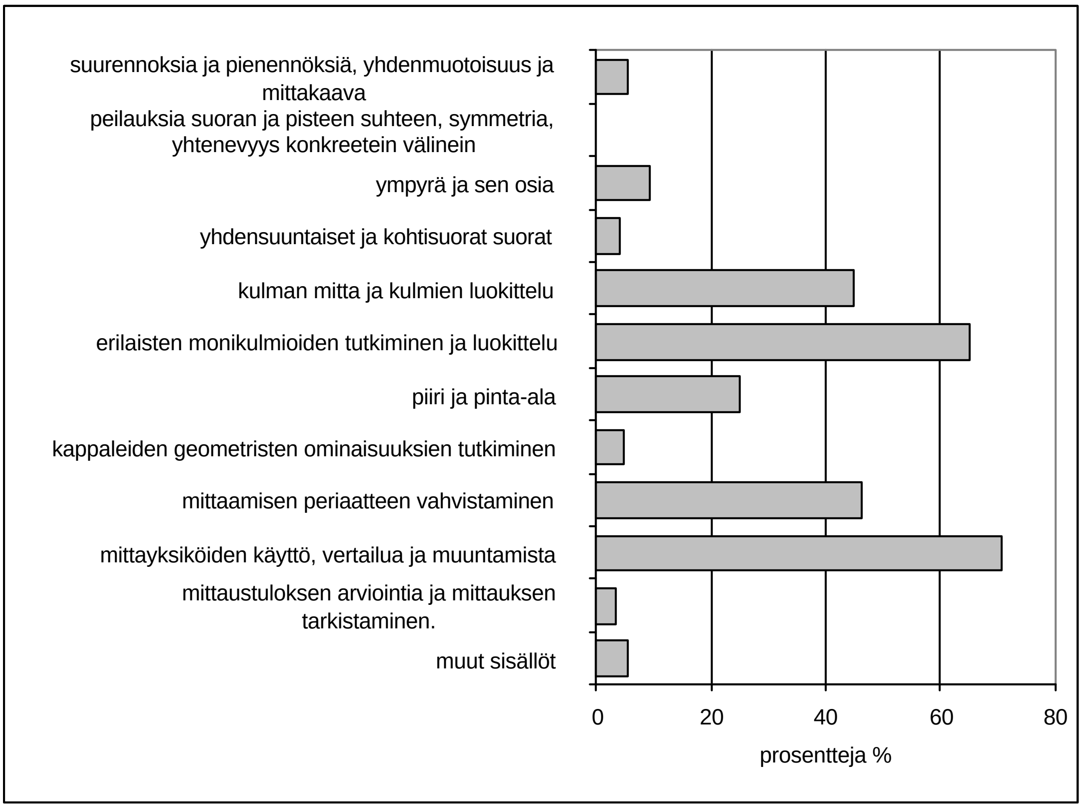
Huomionarvoista Mieti ja laske 5:ssa oli se, että tehtäviä löytyi kaikilta Kokeiluperusteiden 2002 määrittelemiltä oppisisältöalueilta. Erityisen tärkeää on vielä se, että tehtäviä joka sisältöalueelle on nimenomaan kaikille tarkoitetuissa perustehtävissä eikä ainoastaan lisätehtävissä. Oppisisältöalueiden prosentuaaliset osuudet olivat tasaisemmin jakautuneet kuin muissa kirjoissa. Tällä perusteella pidimme kirjaa monipuolisempana kuin muita tutkimuksen kirjoja. Lisäksi Mieti ja laske 5:ssa korostuu muiden tehtävien osuus. Muut tehtävät kategorioimme tehtäviksi, jotka eivät liittyneet geometrian oppisisältöihin. Näiden tehtävien osuus kaikista tehtävistä oli peräti 17 %. Suuri osuus selittyy lisätehtävillä, joista 38 % oli muita tehtäviä. Näistä lisätehtävistä suuri osa oli ongelmatehtäviä, jotka eivät liittyneet geometriaan lainkaan. Tämän lisäksi kirjassa oli myös mekaanisia päässälaskutehtäviä. (ks. s. 44.)

Liitteenä on pylväsdiagrammi Mieti ja laske 5 geometriaosuuden lisä-, koti ja perustehtävien oppisisällöistä (liite 7).

7.1.3 Hei, nyt lasketaan 5

Seuraavalla sivulla olevassa kuviossa 7 esitetään Hei, nyt lasketaan 5 geometriajakson vastaavuus Kokeiluperusteiden 2002 geometriasisältöihin. Kuvio 7 on laadittu liitteessä 5 olevan taulukon 4 perusteella.

Kuten muissakin kirjoissa, korostuu myös Hei, nyt lasketaan 5:ssa erityisesti mittayksiköiden käyttö ja erilaisten monikulmioiden tutkiminen. Mittayksiköiden käyttöä oli 70 %:ssa tehtävistä ja monikulmioiden tutkimista ja luokittelua 65 %:ssa tehtävistä. Mittaamisen periaatteen vahvistamista kirjassa on huomattavasti muita kirjoja enemmän. Jopa 46 %:ssa kaikista tehtävistä oli mittaamista. Myös mittaustulosten arviointia ja mittauksen tarkistamista kirjassa oli eniten, kolmessa prosentissa kaikista tehtävistä.



KUVIO 7. Kokeiluperusteiden 2002 geometriasisällöt Hei, nyt lasketaan 5:n geometriaosuudessa.

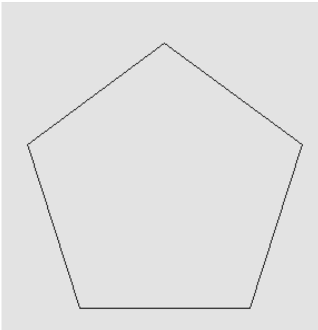
Eniten oli myös suurennoksia, pienennöksiä, yhdenmuotoisuutta ja mittakaavaa sisältäviä tehtäviä, joita oli viisi prosenttia kaikista tehtävistä. Sen sijaan peilauksia, symmetriaa ja yhtenevyyttä kirjan geometriatehtävissä ei käsitelty lainkaan.

Huomionarvoista Hei, nyt lasketaan 5:ssa on, että kaikkia kirjassa esiintyneitä geometrian sisältöalueita (peilauksia, symmetriaa ja yhtenevyyttä ei ollut lainkaan) löytyi nimenomaan myös kirjan kaikille tarkoitetuista perustehtävistä. Useista sisältöalueista oli tehtäviä perustehtävissä jopa kaikkein eniten.

Liitteenä on pylväsdiagrammi Hei, nyt lasketaan 5 geometriaosuuden koti-, lisä- ja perustehtävien oppisisällöistä (liite 8).

7.2 Aktivoivuus 5-luokan matematiikan oppikirjojen geometriaosuuksissa

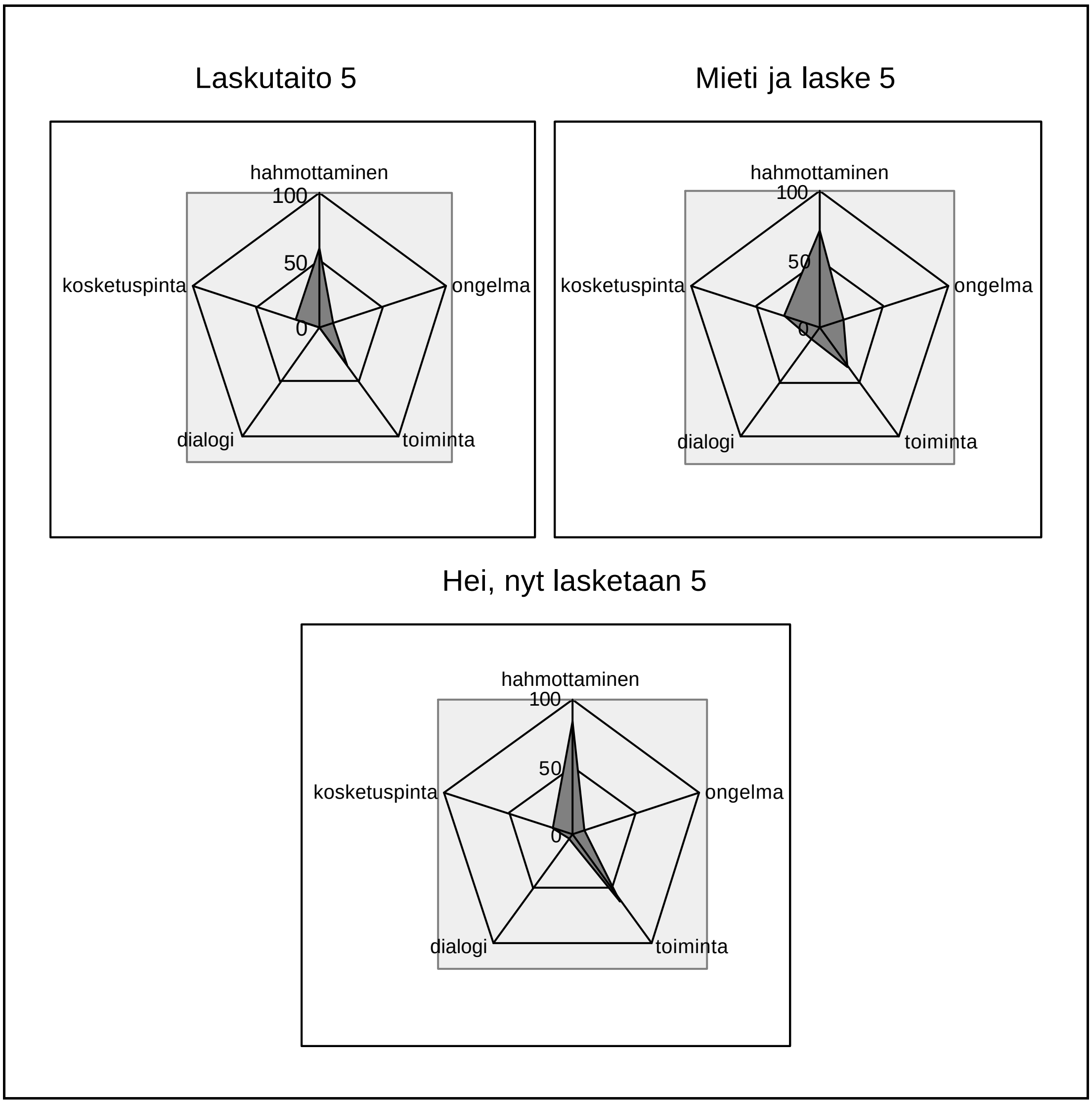
Hahmottelimme aktivoivan tehtävän viiden ominaisuuden perusteella. Tehtävä, joka sisältää kaikki nämä ominaisuudet, on aktivoiva tehtävä. Kuvallisesti ilmaistuna aktivoiva tehtävä voidaan esittää säännöllisenä viisikulmiona, pentagonina (kuvio 8). Siihen sisältyy kaikkia viittä aktivoivaa ominaisuutta: kosketuspintaa, dialogia, toimintaa, ongelmanratkaisua ja hahmottamista (ks. luku 6.3.2).



KUVIO 8. Pentagon

7.2.1 Aktivoivien tekijöiden osuudet kirjoissa

Seuraavan sivun kuviossa 9 on esitetty pintamallit kaikista tutkittavien kirjojen geometriatehtävistä, joissa on aktivoivia ominaisuuksia. Kuvio on laadittu taulukkojen 5 - 7 mukaan (liite 9). Malleissa on havainnollisesti esitetty luokittelumme pohjalta luotu viisikulmio oppikirjojen aktivoivien ominaisuuksien osuuksista. Kuviota voidaan tulkita siten, että mitä enemmän viisikulmiot lähestyvät säännöllisiä viisikulmioita, sitä tasaisemmin kirjojen geometriatehtävissä on eri aktivoivia tekijöitä. Kuvion viisikulmiot poikkeavat selvästi toisistaan, koska eri aktivoivuustekijät painottuvat kirjoissa eri tavoin.



KUVIO 9. Pintamallit kirjojen aktivoivista tehtävistä.

Yhteisenä tekijänä kirjoissa on hahmottamistehtävien runsaus. Hei nyt lasketaan 5:ssa tehtävien, jotka sisälsivät hahmottamista, osuus oli peräti 83 %. Mieti ja laske sisälsi hahmottamista 71 % tehtävistä. Laskutaidon hahmottamistehtävien osuus oli pienin, 60 %.

Toimintaa oli eniten Hei, nyt lasketaan 5:ssa. Toimintaa sisältävien tehtävien osuus oli 61 % kaikista tehtävistä. Kirjan kotitehtävistä 70 % sisälsi toimintaa. Mieti ja laske sekä Laskutaito sisälsivät molemmat saman verran toimintaa, n. 35 %.

Eniten kosketuspintaa oppilaiden arkielämään oli Mieti ja laske 5:n tehtävissä. 28 % tehtävistä sisälsi oppilaan elämää koskettavia aineksia. Laskutaidossa kokemusmaailmaa sisältäviä tehtäviä oli 19 % ja Hei nyt lasketaan 5:ssa 15 %.

Kokeiluperusteet 2002 korostaa arkipäivän tilanteissa eteen tulevia ongelmia, joita tulisi opetuksessa hyödyntää tehokkaasti. (Kokeiluperusteet 2002, 104.) Ongelmia löytyi tehtävistä eniten Mieti ja laske -kirjassa. Niitä oli 19 %:ssa tehtävistä. Ne myös painottuivat tasaisesti perus- (16 %), lisä- (19 %) ja kotitehtäviin (24 %). Laskutaidossa ja Hei, nyt lasketaan 5:ssä ongelmatehtävät löytyivät suurimmaksi osaksi lisätehtävistä (Laskutaidossa 28 % ja Hei, nyt lasketaan 19 %). Kaikkien ongelmatehtävien osuus Hei, nyt lasketaan 5:ssä oli vain 9 % ja Laskutaidossa 12 %.

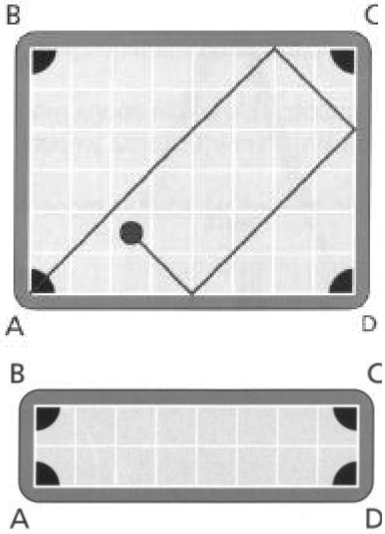
Keskusteluun ohjaavia tehtäviä oli kaikissa kirjoissa vähän. Mieti ja laske 5 ylsi 10 %:iin, kun taas Laskutaidon dialogia sisältävien tehtävien osuus oli vain 0,5 %. Hei, nyt lasketaan 5:n dialogitehtävien prosentuaalinen osuus kaikista tehtävistä oli 5 %.

7.2.2 Aktivoivien tehtävien tarkastelua

Yhtenä tutkimusongelmanamme oli, onko oppikirjoissa sellaista aktivoivaa ainesta, joka edesauttaisi geometrian oppimista. Olennaista on, miten tehtävät saadaan oppilasta aktivoiviksi. Radikaaliin konstruktivismiin pohjautuvaan luokittelurunkoomme tukeutuen tarkastelemme seuraavassa kirjoista löytämiämme eri aktivoivuusasteisia tehtäviä. Etenemme aktivoivasta ei-aktivoivaan tehtävään.

7.2.2.1 Viiden ominaisuuden aktivoiva tehtävä

Kaikkia luokituksemme mukaisia, aktivoivia ominaisuuksia sisältäviä tehtäviä oli tutkimissamme kolmessa kirjassa yhteensä vain yksi kappale:



Biljardipallo lyödään A-pisteestä 45 asteen kulmassa, ja se kimpoaa aina takaisin pöydän reunasta samassa kulmassa, kuten kuva 1 näyttää.
Mihin reikään pallo lopulta joutuu?
Mihin reikään pallo joutuisi kuvassa 2, jos se lähtisi pisteestä A?
Kuvan 1 pöytä on 6 ruutua leveä ja kuvan 2 pöytä 2 ruutua. Miten kuvan 1 pallon reitti muuttuu, jos pöytä on

a) 5 tai
b) 4 ruutua leveä? Piirrä ja selosta.

(Mieti ja laske 5 2001, 53.)

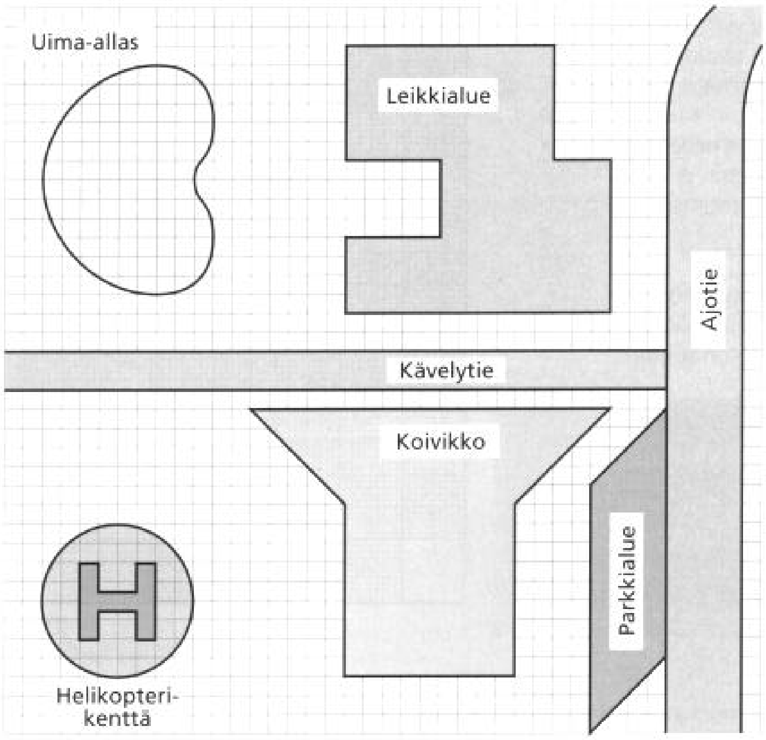
Tehtävä koskettaa oppilaan *kokemusmaailmaa*, jos oppilas tuntee biljardipelin tai on kiinnostunut pelistä. Tässäkin esimerkissä tulee esille se, etteivät kaikki oppilaat välttämättä tiedä, mitä biljardi on (ks. luku 6.3.2.1). *Vuoropuheluun* ja *toimintaan* ohjaa tehtävän lopussa mainittu ohje: ”Piirrä ja selosta”. Näin oppilasta ohjataan kirjaamaan ja perustelemaan omia mielipiteitään sekä piirtämään oma ratkaisunsa, syntyy mahdollisesti dialogia oppilaiden ja opettajan välille. Tehtävässä ei anneta valmista ratkaisumallia, vaan oppilas joutuu päättelemään biljardipallon kulun eri levyisillä pöydillä. Oppilas yhdistelee aikaisemmin opittuja asioita (suoria ja kulmia) uudella tavalla. Näillä perusteilla tehtävä on myös *ongelmatehtävä*. Lisäksi tehtävässä oppilaan on *hahmotettava* kuvasta biljardipöydän muoto ja pallon reitti. Nämä hänen on hahmotettava myös itse piirtäessään.

7.2.2.2 Neljän ominaisuuden aktivoiva tehtävä

Kolmesta tutkimastamme kirjasta löytyi yhteensä yhdeksän neljää aktivoivaa ominaisuutta sisältävää tehtävää. Näistä kaksi oli Laskutaito 5:ssa, yksi Hei, nyt lasketaan 5:ssa ja kuusi Mieti ja laske 5:ssa. Näistä tehtävistä kolmesta puuttui dialogia, kolmeen tehtävään ei sisältynyt ongelmaa ja kolmesta puuttui kosketuspintaa oppilaan kokemusmaailmaan. Tehtävät olivat rakenteeltaan ja vaatimustasoltaan hyvin erilaisia. Tästä voimme päätellä, että aktivoivan tehtävän voi rakentaa sekä matemaattisesti heikommille että lahjakkaammille oppilaille. Seuraavassa esimerkit kahdesta hyvin erilaisesta neljän ominaisuuden aktivoivasta tehtävästä:

> *Etsikää ympäristöstä kymmenen ympyrää tai lähes ympyrää. Ympyrämuotoa käytetään apuna monessa asiassa, esimerkiksi leikeissä. Keksikää viisi tilannetta, joissa ympyrä on apuna.*
> (Mieti ja laske 5 2001, 53.)

Tämä tehtävä luo katsauksen oppilaan *kokemusmaailmaan* aktivoimalla oppilaan toimimaan lähiympäristössään. Ympyröitä etsittäessä ja tilanteita keksittäessä syntyy *vuoropuhelua* oppilaiden kesken ja mahdollisesti myös opettajan kanssa. Ympyröiden etsintä ja ihmettely on *toimintaa* parhaimmillaan ja edellyttää myös *hahmottamista*. Varsinaista ongelmanratkaisua tehtävässä ei ole.

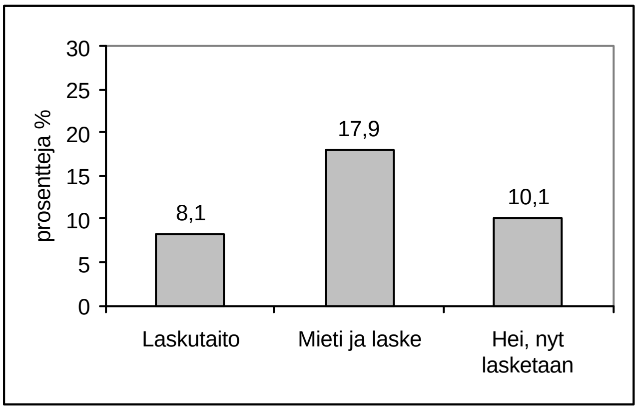


Kuvan Linnametsän ulkoilupuiston pohjapiirroksen yksi ruutu vastaa yhtä neliömetriä (1 m²). Alueelle istutetaan 30 m²:n suuruinen pensaikko. Suunnittele sen sijainti ja merkitse pohjapiirrokseen.
(Mieti ja laske 5 2001, 35.)

Tämä tehtävä lähestyy oppilaan *kokemusmaailmaa* ulkoilupuiston kautta – ulkoilupuistoon pitää sijoittaa pensaikko. Oppilas ratkaisee *ongelman*, mihin tietyn suuruisen pensaikon voi järkevästi sijoittaa. *Toimimaan* oppilas joutuu piirtäessään pensaikkoa. Erimuotoiset alueet ja vapaat tilat pensaikolle ulkoilupuistossa vaativat oppilaalta *hahmottamiskykyä*. Varsinaista dialogia ei tehtävässä välttämättä synny.

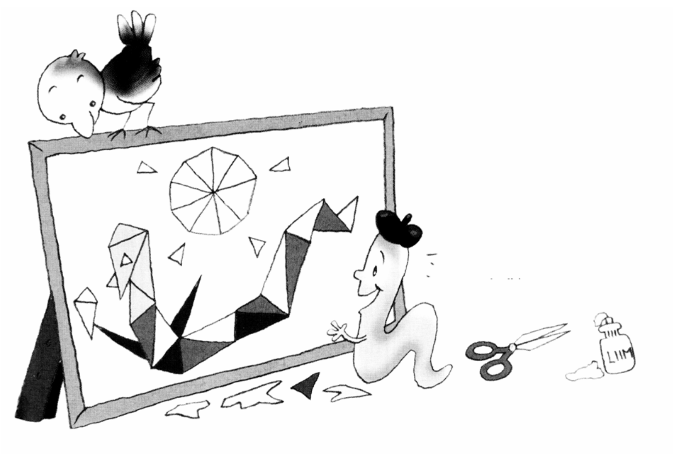
7.2.2.3 Kolmen ominaisuuden aktivoiva tehtävä

Seuraavalla sivulla on kuvio 10, joka on laadittu taulukoiden 8 - 10 mukaan (liite 10). Kuten kuviosta voi nähdä, kolmea aktivoivaa ominaisuutta sisältäviä tehtäviä oli Laskutaito 5:ssa 8,1 %, Mieti ja laske 5:ssa 17,9 % ja Hei nyt lasketaan 5:ssa 10,1 % kirjojen kaikista tehtävistä.



KUVIO 10. Kolmen aktivoivan ominaisuuden esiintyminen tehtävissä.

Kolmen ominaisuuden tehtävistä puuttui kaksi luokittelemaamme aktivoivuustekijää. Tehtävät olivat hyvin erityyppisiä, johtuen juuri niiden erilaisista aktivoivuussisällöistä. Emme tarkemmin eritelleet, mitä nimenomaisia kolmen aktivoivan tekijän yhdistelmiä mikäkin kirja sisältää. Niissäkin näyttäisi olevan kuitenkin kirjakohtaisia eroja. (Tästä saisi mielenkiintoisen aiheen jatkotutkimukselle) Seuraavassa kolme esimerkkiä kolmen ominaisuuden aktivoivasta tehtävästä:



Suunnittele kolmioista esim.

- *koru tai korusarja*
- *rakennus tai laite*
- *palapeli*
- *moderni taulu tai veistos*
- *jokin eläin*

Voit värittää suunnitelmasi.
(Laskutaito 5 2001, 75.)

Tämä tehtävä aktivoi oppilaan suunnittelemaan ja *toimimaan.* Tehtävä hakee kosketuspintaa oppilaan *kokemusmaailmaan* antamalla mahdollisuuden suunnitella kolmioista oppilaalle jokin tuttu asia. Oppilas *hahmottaa* tehtävässä olevasta esimerkkikuvasta mitä pitää tehdä. Vuoropuhelua ei välttämättä synny, emmekä luokittele tehtävää myöskään ongelmanratkaisuksi, koska oppilaalla on mahdollisuus käyttää rajattomasti kolmioita suunnitelmaansa (ks. luku 6.3.2.4).

> *Piirrä ja nimeä kaksi suoraa, jotka leikkaavat toisensa kohtisuorasti.*
> *Arvioi tai mittaa syntyneet kulmat. Mitä huomaat?*
> (Hei, nyt lasketaan 5 2001, 125.)

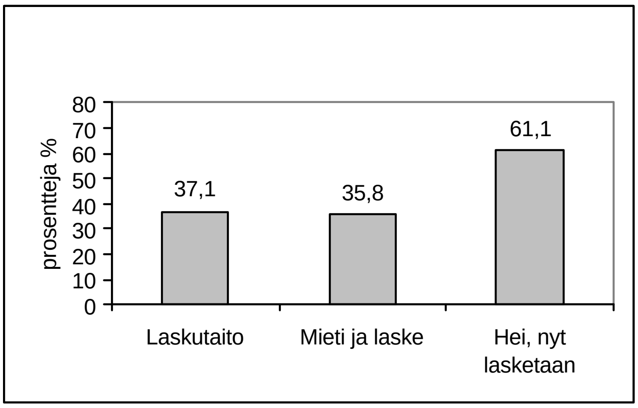
Edellä esitetyn tehtävän ratkaiseminen edellyttää piirtämistä ja mittausta, siis *toimintaa.* Piirtäessään oppilas joutuu *hahmottamaan* piirtämiensä suorien välille syntyvät kulmat. Lisäksi oppilasta ohjataan *dialogiin* tehtävän lopussa asetetulla kysymyksellä, ”Mitä huomaat?”. Kosketuspintaa oppilaan maailmaan ei tehtävässä ole, eikä varsinaista ongelmanratkaisua.

> *Liisalla ja Robinilla on 30 m lippusiimaa. Heidän tehtävänään on rajoittaa sillä mahdollisimman pieni, suorakulmion muotoinen alue. Millainen alue Liisan ja Robinin tulisi valita, ja mikä olisi sen pinta-ala? Kirjoita selostus, miksi ratkaisusi on hyvä.*
> (Mieti ja laske 5 2001, 41.)

Tehtävässä haetaan *kosketuspintaa* lippusiimalla, jolla pitää rajoittaa pieni alue. Tehtävässä tulee ratkaista avoin *ongelma,* millainen olisi mahdollisimman pieni lippusiimalla rajattava alue. Lisäksi tehtävässä pitää kirjoittaa selostus omasta mallista, näin tehtävä ohjaa *vuoropuheluun.* Hahmottamista tehtävässä ei välttämättä synny, koska aluetta ei käsketä piirtämään. Samaten toiminnallisuutta ei tehtävässä ole, koska siinä ei käsketä piirtämään, mittaamaan eikä muutenkaan määrittelemällämme tavalla toimimaan (ks. luku 6.3.2.3).

7.2.2.4 Kahden ominaisuuden aktivoiva tehtävä

Näitä tehtäviä oli lukumäärällisesti huomattavasti paljon muita enemmän, 226 kappaletta. Kuvio 11 on laadittu taulukoiden 8 - 10 pohjalta (liite 10). Laskutaito 5:n tehtävistä 37,1 %, Mieti ja laske 5:n tehtävistä 35,8 % ja Hei, nyt lasketaan 5:n tehtävistä 61,1 % oli kahta aktivoivaa ominaisuutta sisältäviä tehtäviä.



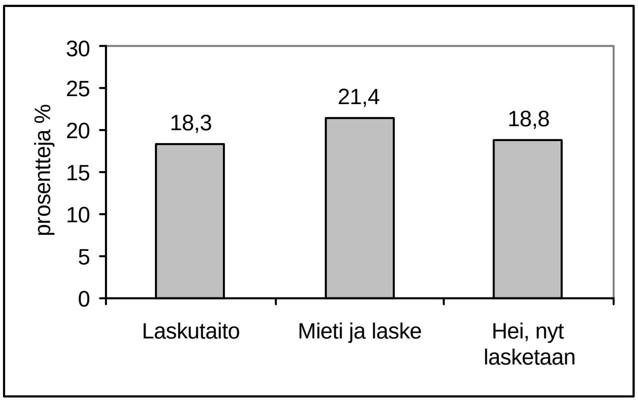
KUVIO 11. Kahden aktivoivan ominaisuuden esiintyminen tehtävissä.

Tehtävät oli muotoiltu eri tavoin, mutta tavallisimmin tehtävä sisälsi kuvasta hahmottamista vaativia ominaisuuksia sekä piirtämistä tai mittaamista, toimintaa. Seuraavassa on kaksi esimerkkiä toimintaa ja hahmottamista vaativista tehtävistä. Muut aktivoivan tehtävän ominaisuudet puuttuvat:

> *Piirrä kaksi erilaista suorakulmiota joiden molempien piiri on 15 cm. Mittaa ja laske suorakulmioiden pinta-alat.*
> (Hei, nyt lasketaan 5 2001, 141.)
>
> *Piirrä kaksi suoraa, jotka:*
> *a) leikkaavat toisensa vinosti*
> *b) leikkaavat toisensa kohtisuorasti*
> *c) ovat yhdensuuntaiset*
> (Laskutaito 5 2001, 73.)

7.2.2.5 Yhden ominaisuuden aktivoiva tehtävä

Tällainen tehtävä sisälsi vain yhtä luokittelemaamme aktivoivaa ominaisuutta. Kuten kuviosta 12 voidaan havaita, näitä tehtäviä oli Laskutaito 5:sta 18,3 %, Mieti ja laske 5:sta 21,4 % ja Hei, nyt lasketaan 5:sta 18,8 %. Kuvio 12 on laadittu taulukoiden 8 - 10 mukaan (liite 10).



KUVIO 12. Yhden aktivoivan ominaisuuden esiintyminen tehtävissä.

Tehtävät olivat joko kuvaan liittyviä hahmottamistehtäviä tai sanallisia rutiinitehtäviä (ks. Pehkonen & al. luku 6.3.2.4), jotka sisälsivät yhden aktivoivan ominaisuuden. Ensimmäisen esimerkkitehtävämme aktivoiva ominaisuus liittyy oppilaan kokemusmaailmaan.

> *Kerkkosten pihamaalla on suorakulmion muotoinen mansikkamaa, jonka pituus on 4 m ja leveys 6 m. Kuinka suuri on mansikkamaan pinta-ala?*
> (Mieti ja laske 5 2001, 51.)

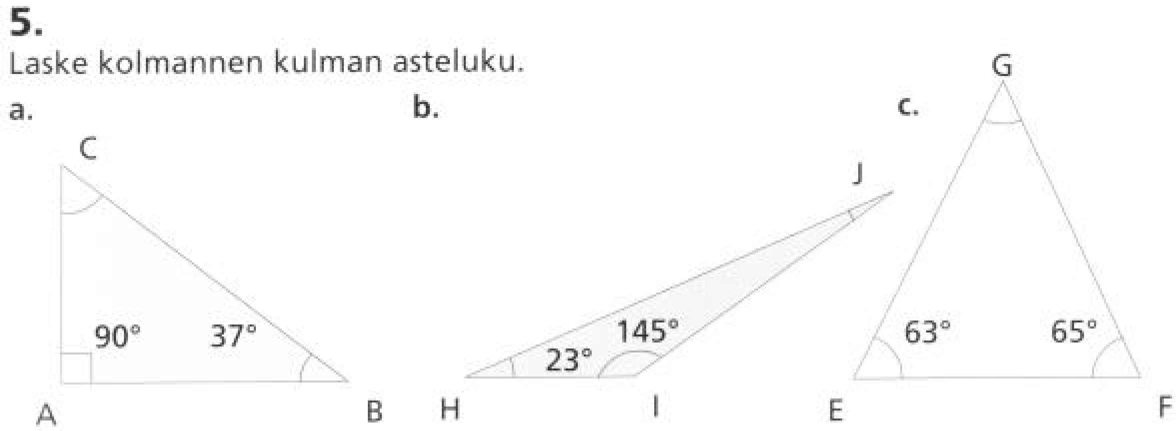
Toisessa esimerkkitehtävässä oppilasta johdatetaan vuoropuheluun.

> *Mitä samanlaista ja mitä erilaista on suorakulmiossa ja suunnikkaassa? Kirjoita.*
> (Mieti ja laske 5 2001, 27.)

Kolmannessa esimerkkitehtävässä oppilas yhdistelee tuttuja asioita uudella tavalla, ratkaisee päättelyn avulla ongelmaa.

Kuinka monta tylppää kulmaa nelikulmiossa voi olla?
(Laskutaito 5 2001, 79.)

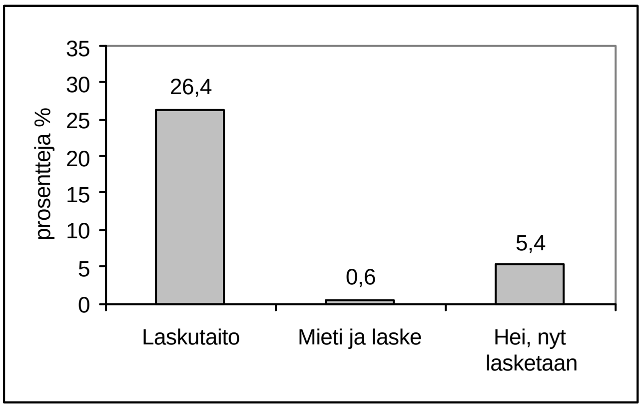
Neljännessä esimerkkitehtävässä oppilas hahmottaa kuvion, nelikulmion kulmien suuruutta.



(Hei, nyt lasketaan 5 2001, 146.)

7.2.2.6 Ei-aktivoiva tehtävä

Tehtäviä, jotka olivat geometriaan liittyviä, mutta eivät sisältäneet mitään luokituksemme mukaisia aktivoivia ominaisuuksia, kutsumme ei-aktivoiviksi tehtäviksi. Seuraavan sivun kuviossa 13 esitetään ei-aktivoivien tehtävien esiintyminen tutkituissa kirjoissa. Kuvio on laadittu taulukoiden 8 - 10 pohjalta (liite 10). Laskutaito 5:ssa ei-aktivoivia tehtäviä oli 26,4 %, Mieti ja laske 5:ssa 0,6 % ja Hei, nyt lasketaan 5:ssa 5,4 % kaikista geometriaosuuden tehtävistä.



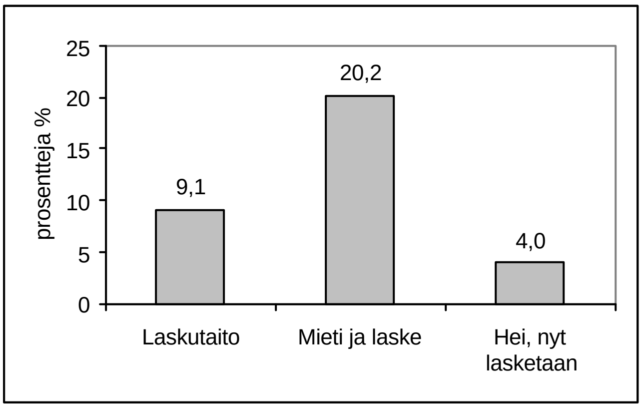
KUVIO 13. Ei-aktivoivien tehtävien esiintyminen kirjoissa.

Se, että tehtävä ei sisällä luokittelumme mukaisia aktivoivia ominaisuuksia, ei välttämättä tarkoita, ettei tehtävä olisi haastava tai mielenkiintoinen. Näistä tehtävistä suurin osa on sanallisia tehtäviä, joissa ei ole hahmottamista auttavaa kuvaa. Näin oppilas joutuu tekemään hahmottamista ja matemaattisia ratkaisuja suoraan päässään. Seuraavassa kaksi esimerkkiä:

> *Mikä on neliön piiri, jos sivut ovat 16 cm?*
> *Mikä on tasasivuisen kolmion piiri, jos sivun pituus on 7 m?*
> (Hei, nyt lasketaan 5 2001, 135.)
>
> *Nelikulmiossa on kaksi suoraa kulmaa. Kolmas kulma on 75°. Kuinka suuri on neljäs kulma?*
> (Laskutaito 5 2001, 79.)

7.2.2.7 Muu tehtävä

Muut tehtävät ovat tutkimuksessamme sellaisia tehtäviä, joissa ei ole geometrisia ominaisuuksia. Seuraavalla sivulla oleva kuvio 14 on tehty taulukoiden 8 - 10 perusteella (liite 10). Kuten kuviosta 14 havaitaan, muita tehtäviä esiintyi Laskutaito 5:ssa 9,1 %, Mieti ja laske 5:ssa 20,2 % ja Hei, nyt lasketaan 5:ssa 4,0 % kaikista tehtävistä.



KUVIO 14. Muiden tehtävien esiintyminen kirjojen tehtävissä.

Muut tehtävät toimivat ikään kuin ”välipaloina” geometristen tehtävien välissä. Tehtävät olivat joko algebrallisia operaatioita vaativia tehtäviä (ks. s. 12) tai sanallisia tehtäviä, jotka eivät sisältäneet geometrisia ominaisuuksia. Seuraavassa esimerkit muusta tehtävästä:

8 · 17,09 =	*41 · 6,3 =*
34 · 7,2 =	*7 · 4,704 =*
8,52 : 3 =	*720,55 : 5 =*

(Hei, nyt lasketaan 5 2001, 137.)

Kassassa on yhden ja kahden euron kolikoita. Yhden euron kolikoita on kolminkertainen määrä kahden euron kolikoihin verrattuna. Rahaa on yhteensä 65 €. Kuinka monta yhden euron kolikkoa kassassa on?

(Mieti ja laske 5 2001, 40.)

8 Pohdinta

Uudet opetussuunnitelmaperusteet on jo kaikkien luettavissa Opetushallituksen nettisivuilla. Matematiikan ja samalla geometrian oppisisällöt on muokattu uuteen uskoon, on palattu vuoden 1985 opetussuunnitelman tapaan oppisisältöjen tarkempaan luokitukseen. Samalla Kokeiluperusteissa 2002 on nostettu esiin matematiikan laajempi merkitys. Matematiikka vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen, edistää oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta (Kokeiluperusteet 2002, 104). Tässä tutkimuksessa ensimmäisen vaiheen oppisisältötarkastelua varten tutustuimme Kokeiluperusteisiin 2002 ja koimme sen tulevan opettajan työmme kannalta varsin antoisaksi. Tutkimuksessamme emme arvioineet Kokeiluperusteiden 2002 sisältöalueiden valintaa ja painotuksia.

Tutkimamme kolmen kirjan geometriaosuudet eivät sivumäärällisesti valtavasti poikkea toisistaan, mutta sisältö on kaikissa kirjoissa erilainen. Arvio hyvän osaamisen tasosta matematiikassa esitetään Kokeiluperusteissa 2002 5. luokan sekä 9. luokan päättyessä. Tähän perustuen viidennen luokan kirjoissa tulisi olla kaikkia niitä sisältöalueita, joita luokille 3 - 5 geometrian suhteen asetetaan. Yleisesti kirjoista huokui varsin perinteinen ote geometriaan. Geometriaosissa korostui etenkin monikulmioiden tutkiminen ja mittayksiköiden käyttö. Kirjat painottavat selvästi tehtävänsä tasogeometriaan, kappaleiden ominaisuuksien tutkiminen jää vähälle kaikissa kirjoissa. Mihin jää avaruudellinen hahmottaminen?

Mittaaminen ei painottunut kirjoissa niin paljon kuin olisimme Malatyn ja Joen kritiikin perusteella odottaneet (ks. s. 15). Malaty ja Joki kummeksuvat geometriaopetuksen supistumista piirien, pinta-alojen ja tilavuuksien mittaamiseen. Ainoastaan Hei, nyt lasketaan 5:ssä oli suhteellisen paljon mittaamista, lähes joka toisessa tehtävässä. Voi siis sanoa, ettei geometrian opettaminen painotu näissä kirjoissa täysin mittaamiseen. Mittaustulosten arvioinnin vähäisyys kirjoissa ja jopa kokonaan puuttuminen Laskutaito 5:stä on huolestuttavaa. Geometriaan vahvasti liittyvä mittaamisen opettelu olisi varmasti mielekkäämpää, jos siihen liitettäisiin mukaan mittojen, kuten pituuden tai pinta-alan arviointia. Oppilaat tyytyvät liian usein ensimmäiseen ratkaisuun eivätkä arvioi tulosta. Matematiikassa yleensäkin tulisi ohjata oppilaita enemmän tulosten arviointiin.

Samaten keskustelua herätti peilausten, symmetrian, ja yhtenevyyden vähäisyys kirjoissa. Hei, nyt lasketaan 5:ssä niitä ei ollut lainkaan, Mieti ja laske 5:ssa jonkin verran myös perustehtävissä, jotka oletamme kuuluvan kaikille laskijoille. Laskutaito 5:ssä peilauksia, symmetriaa ja yhtenevyyttä harjoiteltiin vain lisätehtävissä. Pohdimmekin, jos jokin sisältö mainitaan opetussuunnitelmassa, riittääkö sen esiintyminen vain lisätehtävissä? Opettajalla on vastuu siitä, että kaikki oppilaat pääsevät osalliseksi mm. symmetrian oppimisesta. Kuitenkin käytännössä matematiikan oppikirjat ovat jopa opetussuunnitelman asemassa (ks. luku 5.2.2) ja ohjaavat oppituntien kulkua.

Mieti ja laske 5:n geometriaosuudesta löytyi eniten vastaavuutta Kokeiluperusteiden 2002 oppisisältöluokitukseen. Kirjan geometriaosuudessa oli tehtäviä kaikilta Kokeiluperusteiden 2002 luokittelemilta oppisisältöalueilta. Lisäksi oppisisällöt olivat tasaisemmin jakautuneet kuin muissa kirjoissa. Tässäkin kirjassa korostuivat samat asiat kuin muissa tutkimissamme kirjoissa, mittayksiköiden käyttö sekä erilaisten monikulmioiden tutkiminen. Kaikkien kirjojen sisällöissä oli lisäämisen tarvetta suhteessa Kokeiluperusteisiin 2002, ainakin geometriaosuuden perusteella.

Hyvä tutustuminen oppikirjojen sisältöön ja Kokeiluperusteisiin 2002 oli tarpeen siirtyessämme tutkimuksen toiseen vaiheeseen, aktivoivien tehtävien luokittelurungon laatimiseen ja tehtävien analysointiin. Luokittelurungon aktiiviselle tehtävälle teimme radikaalin konstruktivismin mukaan. Lisäsimme hahmottamisen aktiiviseksi ominaisuudeksi, koska se on olennainen osa geometrisen tiedon oppimista. Kuvan piirtäminen tai käyttö ratkaisun apuna geometrisissa ongelmissa on paikallaan niillä oppilailla, jotka eivät pysty loogis-matemaattisiin päättelyihin ilman konkreettista tukea. Piaget`n mukaan

11-vuotias (5. luokkalainen) lapsi on konkreettisten operaatioiden vaiheessa, siirtymässä formaalisten operaatioiden vaiheeseen ja vaatii näin yleensä avuksi oppimiseensa konkreettisen tuen, hahmottavan kuvan.

Matematiikan oppimisen tulisi lähteä oppilaiden todellisista kokemuksista, jolloin oppilaiden ajatteluprosessit kehittyvät parhaiten (ks. luku 4.3). Kuitenkin kosketuspintaa oppilaiden kokemusmaailmaan sisältävien tehtävien osuus oli suhteellisen pieni. Laskutaito 5:ssä ja Hei, nyt lasketaan 5:ssä jäätiin alle 20 %:n ja Mieti ja laske 5:ssä noin joka neljäs tehtävä sisälsi kosketuspintaa oppilaan elämään. Mikäli tehtävä ei sisällä oppilaan kokemusmaailmaa lähellä olevia elementtejä, jää tehtävä helposti irralliseksi eikä sen geometrinen sanoma välity oppilaalle. Tehtävien tulisi olla oppijaa lähellä, mutta kirjantekijöiden on ehkä mahdotonta tarjota sellaista valikoimaa tehtäviä, jotka voisivat kiinnostaa kaikkia oppijoita sellaisenaan. Kosketuspinta oppilaan arkitodellisuuteen voidaan saavuttaa monella tavalla. Esimerkiksi oman mielikuvitushahmon tai mainoslogon suunnittelussa oppilas voi tutkia ja käyttää oppimiaan käsitteitä ja siten syventää oppimaansa. Opettajan tulisi tuntea oppilaansa ja suunnata heille mahdollisuuksien mukaan juuri heitä kiinnostavia tehtäviä.

Radikaalin konstruktivismin mukaan oppilaita ohjataan aktiiviseen ajatteluun ja ongelmanratkaisuun nimenomaan positiivisessa vuorovaikutuksessa. Juuri dialogia sisältävät tehtävät ovat se, jolla tähän ”matematiikan puhumiseen” päästään. Keskusteluun ohjaavia tehtäviä oppikirjat sisälsivät hyvin vähän. Mieti ja laske sisälsi eniten dialogitehtäviä, 10 %. Vaahtokarin ja Vähäpassin (1998) mukaan matematiikan opetuksen piilotavoitteena on yhden kokonaisen aukeaman tekeminen yhden oppitunnin aikana matemaattisen sisällön omaksumisen sijaan (Vaahtokari & Vähäpassi 1998, 217). Mikäli oppikirjoissa olisi enemmän dialogiin ohjaavia tehtäviä, tähän piilotavoitteeseen olisi vaikeampi päästä.

Hahmottamista ja toimintaa oli kumpaakin kirjoissa paljon. Toiminnan suuri osuus selittyy sillä, että luokittelimme myös kaiken piirtämisen ja mittaamisen (jotka liittyvät olennaisena geometrian opettamiseen) toiminnaksi. Hei, nyt lasketaan 5 sisälsi sekä toimintaa että hahmottamista kaikkein eniten. Joskin kaikissa kirjoissa korostui kyseisten ominaisuuksien suuri prosentuaalinen osuus suhteessa muihin aktivoiviin tekijöihin. Vielä yläasteellakin suuri osa oppilaista on konkreettisen ajattelun vaiheessa. Piaget`n mukaan kaikki ihmiset eivät välttämättä koskaan tule saavuttamaan formaalisten operaatioiden vaihetta (ks. s. 17). Siksi tehtävien tulisi sisältää oppilaan ajattelun mukaisia, konkreettisia, toimintaa lisääviä ja hahmottamista helpottavia elementtejä.

Tehtäviä luokitellessamme totesimme, ettei aktiivisuus välttämättä ole pelkästään toiminnallisuutta. Aktiivisuus voi olla myös oppijan päässä. Miten sitten saadaan kirjojen ongelmat oppijan päähän? Haapasalo kritisoi sitä, että jos kaikki säännöt ja käsitteet ovat oppilaalle kirjasta jo itsestään selviä, ei geometrinen todistaminen jaksa innostaa oppilaita (ks. luku 2.2). Geometrian oppisisällöt opetetaan kirjoissa edelleen liikaa valmiina tuloksina, kuten Silfverbergkin kritisoi. Kun oppilaalle annetaan valmis malli, hänen itsenäistä ajatteluaan ei tueta (ks. s. 13). Ongelmatehtävien ratkaiseminen on aktiivista, päässä tapahtuvaa toimintaa. Mieti ja laske 5 sisälsi eniten ongelmatehtäviä, n. joka viidennessä tehtävässä oli oppilaille ongelma ratkottavaksi. Ongelmanratkaisun tulisi olla matematiikan peruslähtökohta ja ongelmatehtäviä tulisi lähestyä avoimesti ja ennakkoluuloitta. Ongelmatehtäviä ratkaistaessa myös opettajan olisi uskallettava heittäytyä ”tyhjän päälle”, ilman valmista vastausmallia kaikkiin ongelmiin. Konstruktivismi ei anna mahdollisuutta, että opettaja voisi kuvitella tietävänsä kaiken. Liekö tämä yhtenä syynä oppikirjoissa esiintyvien ongelmatehtävien vähäisyyteen?

Tutkijoina ja tulevina opettajina meitä huolestuttaa ei-aktivoivien tehtävien määrän suuruus. Niilläkin on oma arvonsa, kun vahvistetaan taitoja, mutta luokkahuoneessa saattaa käydä helposti niin, että ns. hiljaisen työn osuus korostuu ja silloin tehdään näennäisen vaikeita mekaanisia tehtäviä. Nykykäsityksen mukaan matematiikan hallitseminen edellyttää taitoja keskustella ja perustella omia ratkaisujaan (ks. kpl 4.2) eikä vain ulkoa opittujen kaavojen ja lauseiden toistamista. Joen esittämä kuvan hahmottelu, piirtäminen vapaalla kädellä tulisi sallia ja jopa ohjata oppilaita vapaaseen kuvan hahmotteluun (ks. s. 50).

Mieti ja laske 5:n aktivoivista ominaisuuksista koottu pintamalli lähestyy eniten säännöllistä viisikulmiota (ks. s. 63). Tehtävissä painottuvat tasaisemmin kuin muissa kirjoissa kaikki aktivoivuustekijät. Hei, nyt lasketaan 5:ssä ja Laskutaito 5:ssä korostuvat vain hahmottaminen ja toiminta. Mieti ja laske 5 pyrkii monipuolisemmin ohjaamaan oppilasta omatoimiseen ajatteluun.

Tarkastellessamme tehtävien aktivoivien ominaisuuksien määrää kiinnittyi huomiomme kahteen asiaan: kolmea tai useampaa aktivoivaa ominaisuutta sisältävien tehtävien vähäisyyteen sekä kahta aktivoivaa ominaisuutta sisältävien tehtävien runsauteen. Vaikka tutkijoilla ei varsinaisia ennakkokäsityksiä aktivoivien tehtävien määristä ollutkaan, oli pienoinen yllätys, että luokituksemme mukaisia viiden ominaisuuden aktivoivia tehtäviä oli kirjoissa yhteensä vain yksi kappale. Kun kolmea ja neljää aktivoivaa ominaisuutta sisältävien tehtävien lukumäärätkin jäivät vähäisiksi, voitaneen sanoa kirjojen painottavan tehtävänsä perinteiseen lähestymistapaan.

Geometriaan olennaisesti kuuluvat kuvasta hahmottaminen ja toiminta, kuten mittaaminen ja piirtäminen, olivat suurimmassa osassa tehtävistä kahtena aktivoivana tekijänä – kokemusmaailma, vuoropuhelu ja ongelmanratkaisu jäävät vähemmälle. Hahmottaminen ja toiminta eivät välttämättä riitä aktivoimaan oppilasta, ja siksi tarvitaan muita aktivoivia tekijöitä. Sekä oppikirjojen geometriatehtävien että oppilaalta edellytettävien aktiviteettien olisi oltava monipuolisia, jotta ne auttaisivat oppilasta yhtäältä hahmottamaan geometrista tietoa ja toisaalta reflektoimaan, tulkitsemaan ja perustelemaan omia geometrisia käsityksiään. Tehtävien monipuolistamisessa taas kerran katseet kääntyvät opettajaan. Opettajalla on mahdollisuus muotoilla kirjojen tehtävät juuri omalle oppilasryhmälleen sopiviksi, heitä kiinnostaviksi ja aktivoiviksi. Pienet muutokset saattavat tuntua kosmeettisilta, mutta jos oppilaat sillä tavalla saadaan innostumaan geometriasta tai yleisesti matematiikasta, tarkoitus pyhittää keinot. Esimerkkinä voisi mainita jo luvussa 6.3.2.1 käsitelty pizzan keskuskulma. Sama tehtävä oli käsitelty Laskutaito 5:ssa pelkkänä ympyrän keskuskulmana. Samaten pieni lisäys tehtävän perään: ”Perustele” tai ”keskustele parisi kanssa” virittää oppilaan pohtimaan ja puhumaan matematiikkaa.

Opetussuunnitelmien sisällöt ovat varmasti ikuisuuskysymys. Aina pohdinnan alla on mitä opetussuunnitelman tulisi sisältää ja kuinka paljon. Geometrian opettamisen kannalta on opetussuunnitelmien yksityiskohtaisten sisällöllisten ohjeiden laatimisen lisäksi panostettava myös koulutukseen. Esim. konstruktivistisen opettamisen kannalta tärkeiden toiminnallisten työtapojen käyttäminen edellyttää opettajalta sitä, että hän on itse kokenut ja kokeillut niiden toimivuuden ja käyttökelpoisuuden. Voidaan myös keskustella siitä, pitäisikö opetussuunnitelmien sisältöjen näkyä sellaisenaan oppikirjojen tehtävissä. Mikä osa sisällöistä jää toteutettavaksi ”kirjan ulkopuolelta”?

Vaikka oppikirjan aines korostuukin geometrian opetuksessa, erittäin tärkeää on kuitenkin opettajan oma suhtautuminen geometriaan ja opettajan oma geometrianäkemys. Konstruktivismi antaa opettajalle hyvän mahdollisuuden tarkistaa omia ajatuksiaan, käsityksiään ja opetusta. Geometriaa opetetaan sen mukaisesti, millaiseksi se nähdään. Opettajan rooli korostuu siinä, millaisia tehtäviä ja työskentelytapoja hän valitsee. Jos tavoitteena on kirjan tehtävien tekeminen numerojärjestyksessä kannesta kanteen, hän ei toteuta konstruktivismin mukaista opettamista, vaan hän harjoittaa oppilaitaan omasta tai jopa kirjan tekijöiden mielestä päteviin suorituksiin (ks. s. 23).

Tämä tutkimus lähti mielenkiinnosta toiminnallista geometriaa kohtaan. Mielenkiintomme prosessin aikana ei vähentynyt, mutta aihe muuttui jo heti alkuvaiheessa. Aiheen muuttuminen aktivoivien tehtävien etsimiseksi poiki mielenkiintoisia jatkotutkimuksen aiheita. Kiintoisaa olisi tutkia matematiikan kirjojen geometriaosuuksien kuvitusta ja sen yhteyttä geometrian aktiiviseen hahmottamiseen ja geometristen käsitteiden oppimiseen. Lisäksi havaitsimme luokittelumme puutteeksi sen, ettei siitä selviä eri aktivoivuustekijöiden keskinäinen suhde ja millaiset aktivoivuustekijät vahvistavat oppimista. Nämä voisivat myös olla hyviä jatkotutkimuksen aiheita.

Jo muinaiset egyptiläiset pyramideja rakentaessaan ja Niilin jättömaata mitatessaan tiesivät, mistä on kysymys – geometria on raskasta, jokapäiväistä työtä. Geometria oli ensimmäinen loogisesti järjestetty matematiikan osa ja näin sillä on ollut suuri vaikutus matematiikan muiden osa-alueiden kehitykseen. Se on edelleen olennainen osa kaikkea matematiikkaa. Geometrian opettaminen kouluissa pohjautuu paljolti oppikirjaan. Oppikirjalla on niin vankka asema maamme kouluissa, että lienee epärealististа olettaa sen aseman horjuvan lähitulevaisuudessa. Geometriatehtäviä, kuten muitakin matematiikan tehtäviä, uudistettaessa tulisi muistaa, että tärkeintä on oppilaiden aktiivinen oppiminen, johdatus matematiikan tekemiseen, puhumiseen – inhimilliseen matematiikkaan.

Lähteet

Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: Oy Edita Ab.

Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. 1991. A Constructivist Approach to Second Grade Mathematics. Teoksessa E. von Glasersfeld (toim.) Radical Constructivism in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 157 - 176.

Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Jyväskylä: Gummerus.

Glasersfeld, E. von 1991. (toim.) Radical Constructivism in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Glasersfeld, E. von 1995. Radical Constructivism. A Way of Knowing and Learning. London: The Falmer Press.

Haapasalo, L. 1998a. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. 3. painos. Jyväskylä: Medusa-Software.

Haapasalo, L. 1998b. Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 52 - 79.

Haapasalo, L. 1998c. Ongelmanratkaisun oppimisesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 80 - 98.

Heikkilä, T. 1999. Tilastollinen tutkimus. 2. uudistettu painos. Helsinki: Edita.

Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.) Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Pub.

Joki, J. 2002. Ulkoluvusta hahmottavaan geometriaan. Aineksia geometrian opetukseen erityisesti peruskoulussa. Joensuun yliopisto. Matematiikan laitos. Väitöskirja.

Jussila, J., Montonen, K. & Nurmi, K. E. 1993. Systemaattinen analyysi kasvatustieteiden tutkimusmenetelmänä. Teoksessa T. Gröhn & J. Jussila (toim.) Laadullisia lähestymistapoja koulutuksen tutkimuksessa. Helsinki: Yliopistopaino, 157 - 208.

Kallonen-Rönkkö, M. 1998. Matematiikan oppiminen ala-asteen uusiutuvassa oppimisympäristössä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 251 - 268.

Kupari, P. 1999. Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikanopettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7. Jyväskylä.

Kuusinen, J. & Korkiakangas, M. 1999. Ihmisen kehitys elämänkaaren näkökulmasta. Teoksessa J. Kuusinen (toim.) Kasvatuspsykologia. 4 – 6. painos. Helsinki: WSOY, 93 - 138.

Lahdes, E. 1987. Peruskoulun didaktiikka. Helsinki: Otava.

Lahdes, E. 1992. Peruskoulun didaktiikka. Helsinki: Otava.

Lecorre, P. 2003. Aksioomien Ritari Peloton taistelee hahmottavan geometrian puolesta. Opettaja 14, 30 - 31.

Leino, J. 1977. Matematiikan didaktiikka 1. Rauma: Kirjayhtymä.

Leino, J. 1993. Konstruktivismin suuntauksia. Teoksessa L. Haapasalo & P. Kupari (toim.) Konstruktivismi matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman kehittämisessä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 6, 1 - 7.

Leino, J. 1998. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 39 - 51.

Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. Matikkatupakokeilu peruskoulun toisella luokalla. Tampereen yliopisto. Väitöskirja. Vammala: Vammalan kirjapaino Oy.

Malaty, G. 1997. Geometrinen ajattelu. 2. - 3. painos. Tampere: Weilin & Göös.

NS 3 = Nykysuomen sanakirja 3. 1980. Helsinki: WSOY.

NS 7 = Nykysuomen sanakirja 7. 1990. Helsinki: WSOY.

Näätänen, M. 2001. Mitä TIMSS-tutkimus kertookaan suomalaisten koululaisten matematiikan taidoista ja matematiikan opetuksesta? Solmu 1, 12 - 17. http://solmu.math.helsinki.fi/2001/1/timss/index.html 29.5. 2003 klo 18.45

Palonen, K. 1988. Tekstistä politiikkaan. Hämeenlinna: Karisto.

Pehkonen, E. 1984. Ajatuksia geometrian opettamisesta peruskoulussa. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 48:1, 29 - 33.

Pehkonen, E., Pekama, E. & Seppälä, R. 1991. Matemaattinen ongelmanratkaisu: Tehtäviä peruskoulun ja lukion matematiikan opetukseen. Helsinki: MFKA-Kustannus Oy.

Perkkilä, P. 1998. Kahden alkuopetuksen oppikirja-sarjan didaktinen analyysi. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Lisensiaatin tutkimus.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985. Kouluhallitus. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994. Opetushallitus. Helsinki: Painatuskeskus.

Perusopetuksen opetuskokeiluissa lukuvuonna 2003 - 2004 noudatettavat opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 3 - 9 ja perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 1 - 2. 2002. Saatavana www-muodossa:
http://www.edu.fi/julkaisut/maaraykset/ops/perusopetus1_2kok3_9.pdf

5.3. 2003 klo. 22.45.

Piaget, J. 1977. Lapsen psykologia. Suomennos. M. Rutanen. Jyväskylä: Gummerus.

Piaget, J. 1988. Lapsi maailmansa rakentajana. Suomennos. S. Palmgren. Helsinki: WSOY.

Pietilä, V. 1973. Sisällön erittely. Helsinki: Gaudeamus.

Puolimatka, T. 2002. Opetuksen teoria. Konstruktivismista realismiin. Helsinki: Tammi.

Richards, J. 1991. Mathematical Discussions. Teoksessa E. von Glasersfeld (toim.) Radical Constructivism in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 13 - 51.

Silfverberg, H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Tampereen yliopisto. Väitöskirja.

Sjöberg, B. 1995. Från Euklides till Hilbert. Historien om matematikens utveckling under tvåtusen år. Turku: Åbo Akademi.

Steffe, L. P. 1991. The Constructivist Teaching Experiment: Illustrations and Implications. Teoksessa E. von Glasersfeld (toim.) Radical Constructivism in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 177 - 194.

Thompson, J. (toim.) 1994. Matematiikan käsikirja. 2. painos. Helsinki: Tammi.

Uusikylä, K. & Atjonen, P. 2000. Didaktiikan perusteet. Helsinki: WSOY.

Vaahtokari, A. & Vähäpassi, A. 1998. Kirjat esiin ja laskekaa! Teoksessa J. Lavonen & M. Erätuuli (toim.) Tuulta purjeisiin. Matemaattisten aineiden opetus 2000-luvulle. Jyväskylä: Atena Kustannus, 213 - 230.

Varto, J. 1992. Laadullisen tutkimuksen metodologia. Tampere: Tammer-Paino Oy.

Voutilainen, T., Mehtäläinen, J. & Niiniluoto, I. 1990. Tiedonkäsitys. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Välijärvi, J., Linnakylä, P., Kupari, P., Reinikainen, P., Malin, A. & Puhakka, E. 2001. Suomen tulevaisuuden osaajat. 15-vuotiaiden nuorten lukutaito sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen kansainvälisessä vertailussa. PISA 2000 -tutkimuksen ensituloksia. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Wuolijoki, H. & Norlamo, P. 1999. Tutkivaa matematiikkaa 3. Geometria. Helsinki: WSOY.

Yakimanskaya, I. S. 1991. The development of spatial thinking in schoolchildren. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Tutkimuksessa käytetyt oppilaankirjat:

Helin, E., Lohi, K-E., Satamo, K., Sohlman, L., Verkkonen, H. & Virta, V. 2001. Hei, nyt lasketaan! 5. Helsinki: Otava.

Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2002. Laskutaito 5. Helsinki: WSOY.

Vähäpassi, A. & Vaahtokari, A. 2001. Mieti ja laske 5. Syksy. Helsinki: Tammi.

Vähäpassi, A. & Vaahtokari, A. 2001. Mieti ja laske 5. Kevät. Helsinki: Tammi.

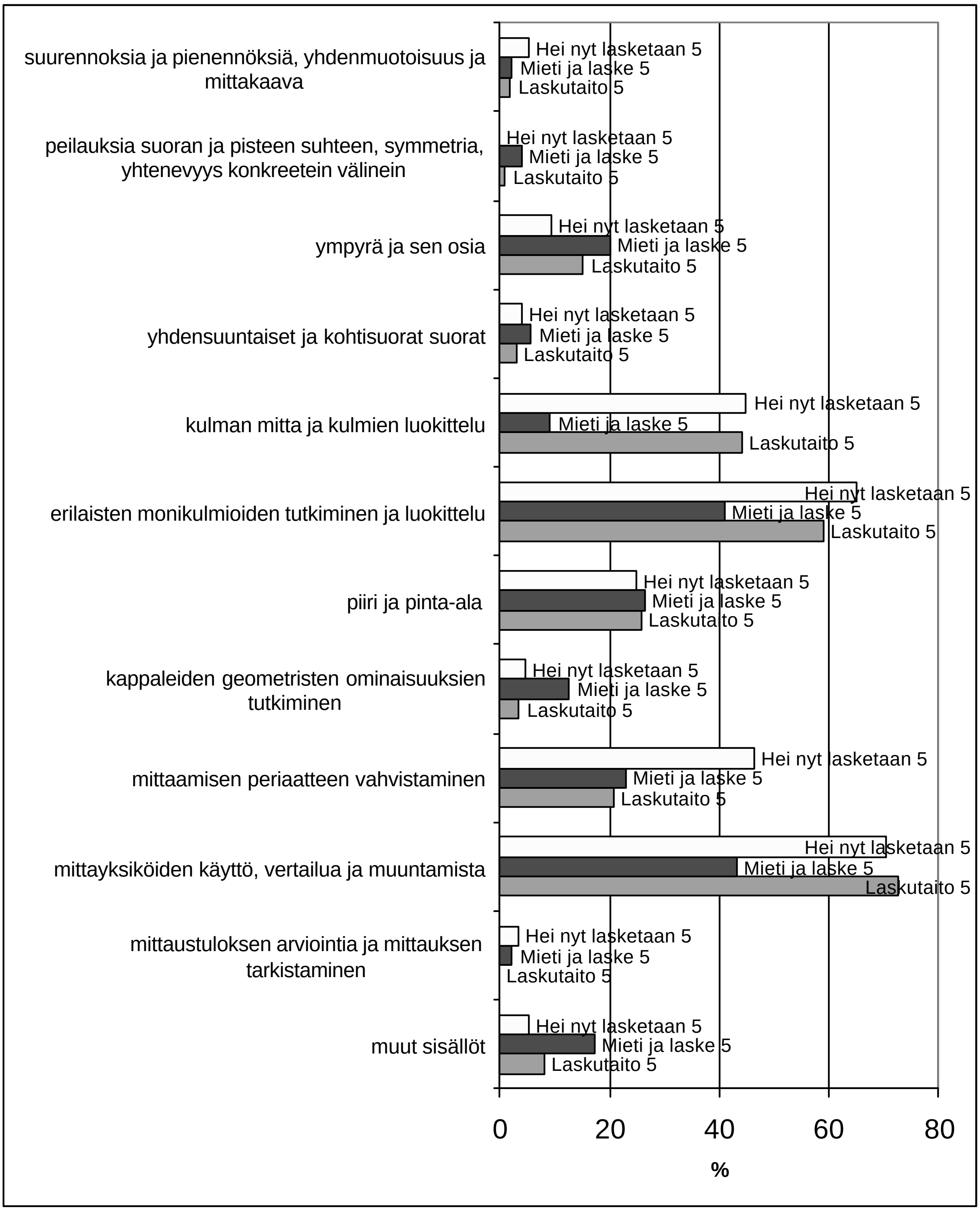
Liitteet

Liite 1.

TAULUKKO 1. Viidennen luokan matematiikan kirjojen perus-, koti- ja lisätehtävien osuudet kaikista geometriajakson tehtävistä.

Oppikirjat	Perus-tehtävät		Koti-tehtävät		Lisä-tehtävät		Kaikki tehtävät	
	n	%	n	%	n	%	N	%
Laskutaito 5	109	55 %	34	17 %	54	27 %	197	100 %
Mieti ja laske 5	80	46 %	29	17 %	64	37 %	173	100 %
Hei, nyt lasketaan! 5	82	55 %	46	31 %	21	14 %	149	100 %

Liite 2.



KUVIO 15. Geometriasisältöjen osuus kaikissa kirjojen tehtävissä.

Liite 3.

TAULUKKO 2. Perustehtävien (n=109), kotitehtävien (n=34) ja lisätehtävien (n=54) sekä niiden yhteiset (n=197) prosenttijakaumat Laskutaito 5 -kirjan geometriajaksossa Kokeiluperusteiden 2002 geometriasisältöjen mukaan luokiteltuna.

Laskutaito 5 Geometrian sisällöt	Perus-tehtävät %	Koti-tehtävät %	Lisä-tehtävät %	Kaikki tehtävät %
1. Suurennoksia ja pienennöksiä, yhdenmuotoisuus ja mittakaava	2,8 %	0,0 %	1,9 %	2,0 %
2. Peilauksia suoran ja pisteen suhteen, symmetria, yhtenevyys konkreetein välinein	0,0 %	0,0 %	3,7 %	1,0 %
3. Ympyrä ja sen osia	14,7 %	17,6 %	14,8 %	15,2 %
4. Yhdensuuntaiset ja kohtisuorat suorat	4,6 %	0,0 %	1,9 %	3,0 %
5. Kulman mitta ja kulmien luokittelu	43,1 %	47,1 %	25,9 %	39,1 %
6. Erilaisten monikulmioiden tutkiminen ja luokittelu	66,1 %	58,8 %	44,4 %	58,9 %
7. Piiri ja pinta-ala	31,2 %	32,4 %	11,1 %	25,9 %
8. Kappaleiden geometristen ominaisuuksien tutkiminen	0,0 %	0,0 %	13,0 %	3,6 %
9. Mittaamisen periaatteen vahvistaminen	23,9 %	17,6 %	16,7 %	20,8 %
10. Mittayksiköiden käyttö, vertailua ja muuntamista	81,7 %	85,3 %	46,3 %	72,6 %
11. Mittaustuloksen arviointia ja mittauksen tarkistaminen	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
12. Muut sisällöt	2,8 %	0,0 %	24,1 %	8,1 %

Liite 4.

TAULUKKO 3. Perustehtävien (n=80), kotitehtävien (n=29) ja lisätehtävien (n=64) sekä niiden yhteiset (n=173) prosenttijakaumat Mieti ja laske 5 -kirjan geometriajaksossa Kokeiluperusteiden 2002 geometriasisältöjen mukaan luokiteltuna.

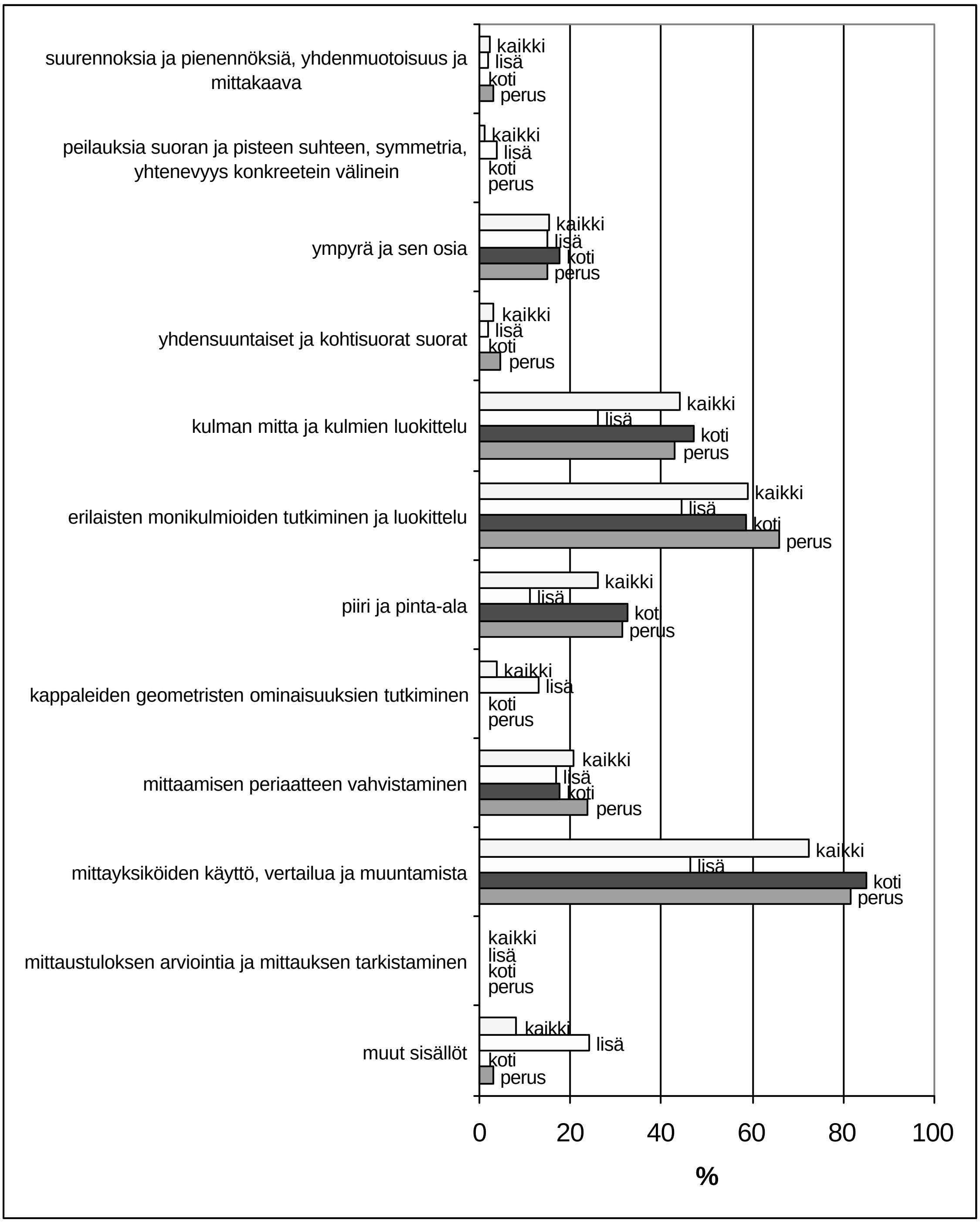
Mieti ja laske 5 Geometrian sisällöt	Perus-tehtävät %	Koti-tehtävät %	Lisä-tehtävät %	Kaikki tehtävät %
1. Suurennoksia ja pienennöksiä, yhdenmuotoisuus ja mittakaava	2,5 %	3,4 %	1,6 %	2,3 %
2. Peilauksia suoran ja pisteen suhteen, symmetria, yhtenevyys konkreetein välinein	7,5 %	3,4 %	0,0 %	4,0 %
3. Ympyrä ja sen osia	23,8 %	20,7 %	15,6 %	20,2 %
4. Yhdensuuntaiset ja kohtisuorat suorat	8,8 %	0,0 %	4,7 %	5,8 %
5. Kulman mitta ja kulmien luokittelu	12,5 %	0,0 %	9,4 %	9,2 %
6. Erilaisten monikulmioiden tutkiminen ja luokittelu	51,3 %	48,3 %	25,0 %	41,0 %
7. Piiri ja pinta-ala	35,0 %	37,9 %	10,9 %	26,6 %
8. Kappaleiden geometristen ominaisuuksien tutkiminen	10,0 %	24,1 %	10,9 %	12,7 %
9. Mittaamisen periaatteen vahvistaminen	36,3 %	20,7 %	7,8 %	23,1 %
10. Mittayksiköiden käyttö, vertailua ja muuntamista	60,0 %	41,4 %	23,4 %	43,4 %
11. Mittaustuloksen arviointia ja mittauksen tarkistaminen	5,0 %	0,0 %	0,0 %	2,3 %
12. Muut sisällöt	7,5 %	0,0 %	37,5 %	17,3 %

Liite 5.

TAULUKKO 4. Perustehtävien (n=82), kotitehtävien (n=46) ja lisätehtävien (n=21) sekä niiden yhteiset (n=149) prosenttijakaumat Hei, nyt lasketaan 5 -kirjan geometriajaksossa Kokeiluperusteiden 2002 geometriasisältöjen mukaan luokiteltuna.

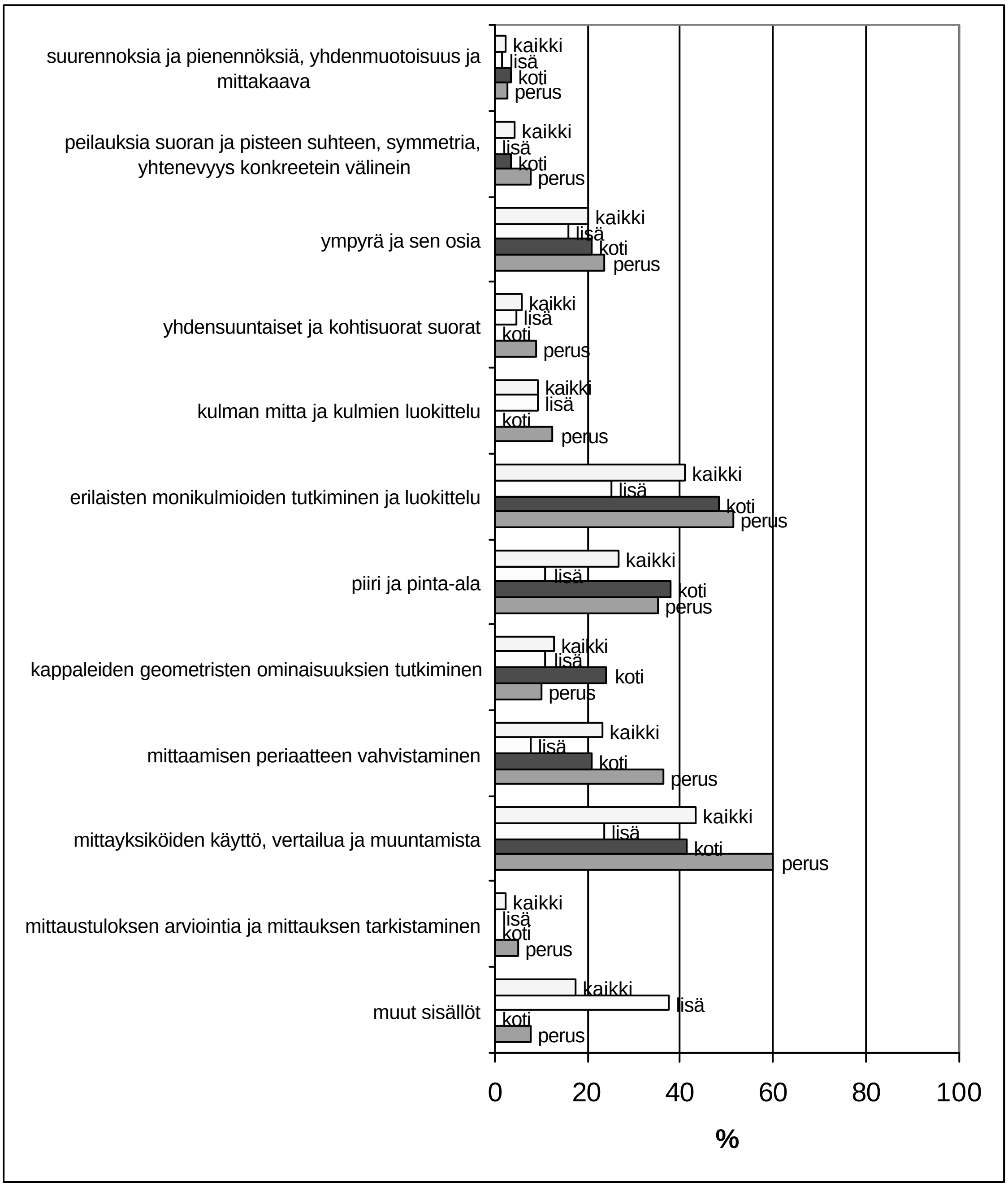
Hei, nyt lasketaan! 5 Geometrian sisällöt	Perus-tehtävät %	Koti-tehtävät %	Lisä-tehtävät %	Kaikki tehtävät %
1. Suurennoksia ja pienennöksiä, yhdenmuotoisuus ja mittakaava	7,3 %	2,2 %	4,8 %	5,4 %
2. Peilauksia suoran ja pisteen suhteen, symmetria, yhtenevyys konkreetein välinein	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
3. Ympyrä ja sen osia	12,2 %	4,3 %	9,5 %	9,4 %
4. Yhdensuuntaiset ja kohtisuorat suorat	4,9 %	4,3 %	0,0 %	4,0 %
5. Kulman mitta ja kulmien luokittelu	46,3 %	43,5 %	42,9 %	45,0 %
6. Erilaisten monikulmioiden tutkiminen ja luokittelu	65,9 %	63,0 %	66,7 %	65,1 %
7. Piiri ja pinta-ala	23,2 %	21,7 %	38,1 %	24,8 %
8. Kappaleiden geometristen ominaisuuksien tutkiminen	6,1 %	4,3 %	0,0 %	4,7 %
9. Mittaamisen periaatteen vahvistaminen	47,6 %	50,0 %	33,3 %	46,3 %
10. Mittayksiköiden käyttö, vertailua ja muuntamista	69,5 %	67,4 %	81,0 %	70,5 %
11. Mittaustuloksen arviointia ja mittauksen tarkistaminen	4,9 %	2,2 %	0,0 %	3,4 %
12. Muut sisällöt	0,0 %	13,0 %	9,5 %	5,4 %

Liite 6.



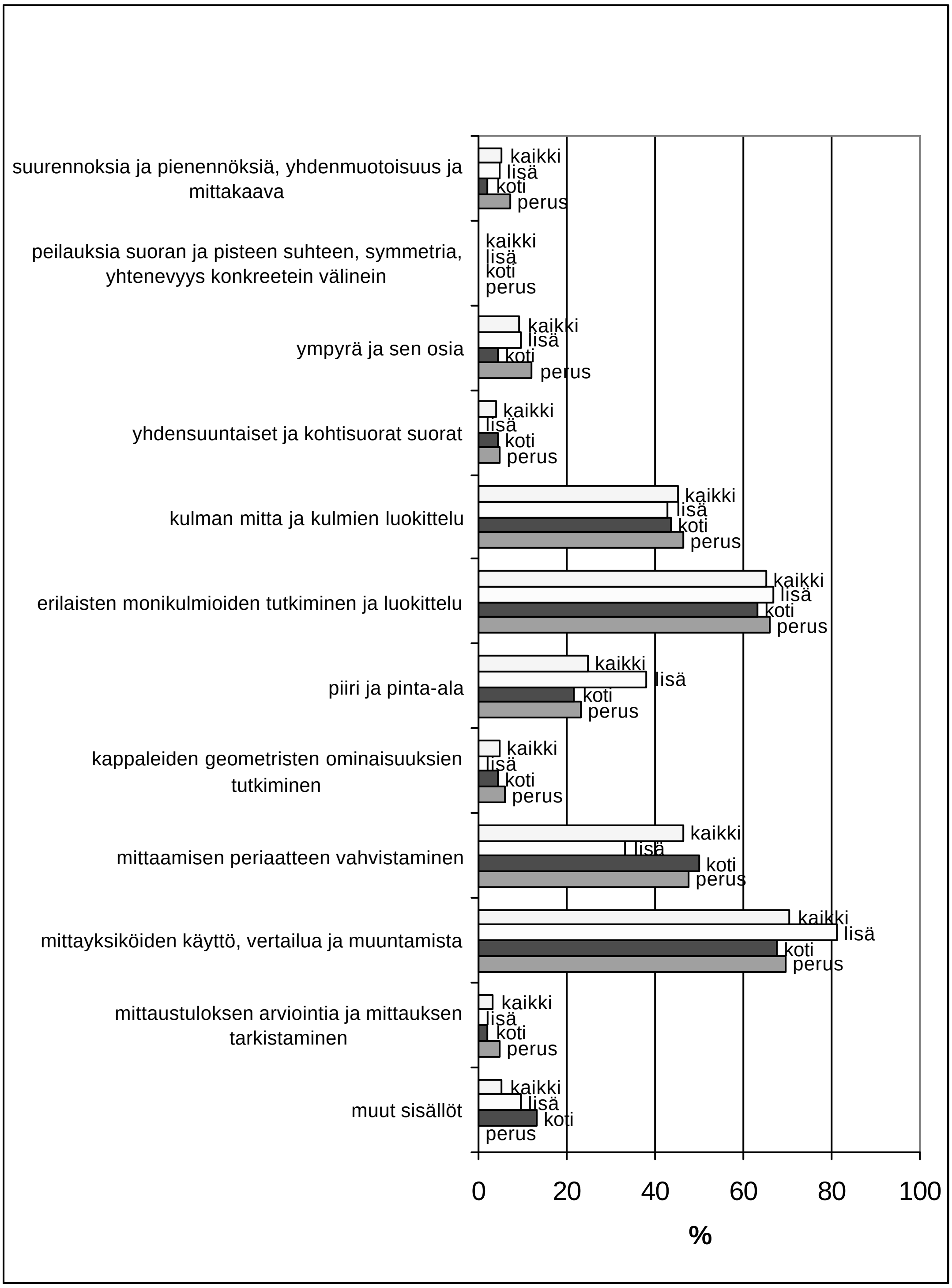
KUVIO 16. Laskutaito 5:n geometriasisällöt kaikissa tehtävissä sekä perus-, koti- ja lisätehtävissä Kokeiluperusteiden 2002 mukaan luokiteltuna.

Liite 7.



KUVIO 17. Mieti ja laske 5:n geometriasisällöt kaikissa tehtävissä sekä perus-, koti- ja lisätehtävissä Kokeiluperusteiden 2002 mukaan luokiteltuna.

Liite 8.



KUVIO 18. Hei, nyt lasketaan 5:n geometriasisällöt kaikissa tehtävissä sekä perus-, koti- ja lisätehtävissä Kokeiluperusteiden 2002 mukaan luokiteltuna.

Liite 9.

TAULUKKO 5. Perustehtävien (n=109), kotitehtävien (n=34) ja lisätehtävien (n=54) sekä niiden yhteiset (n=197) prosenttijakaumat Laskutaito 5 -kirjan geometriajaksossa aktivoivien ominaisuuksien mukaan luokiteltuna.

Laskutaito 5 Aktivoivat ominaisuudet	Perus- tehtävät %	Koti- tehtävät %	Lisä- tehtävät %	Kaikki tehtävät %
1. Ongelmatehtävät	5,5 %	5,9 %	27,8 %	11,7 %
2. Kokemusmaailmaan liittyvät tehtävät	22,0 %	2,9 %	22,2 %	18,8 %
3. Vuoropuheluun suuntaavat tehtävät	0,0 %	2,9 %	0,0 %	0,5 %
4. Toimintaa sisältävät tehtävät	35,8 %	41,2 %	29,6 %	35,0 %
5. Hahmottavat tehtävät	57,8 %	55,9 %	66,7 %	59,9 %
6. Ei-aktivoivat tehtävät	29,4 %	44,1 %	5,6 %	25,4 %
7. Muut tehtävät	2,8 %	0,0 %	27,8 %	9,1 %

TAULUKKO 6. Perustehtävien (n=80), kotitehtävien (n=29) ja lisätehtävien (n=64) sekä niiden yhteiset (n=173) prosenttijakaumat Mieti ja laske 5 -kirjan geometriajaksossa aktivoivien ominaisuuksien mukaan luokiteltuna.

Mieti ja laske 5 Aktivoivat ominaisuudet	Perus- tehtävät %	Koti- tehtävät %	Lisä- tehtävät %	Kaikki tehtävät %
1. Ongelmatehtävät	16,3 %	24,1 %	18,8 %	18,5 %
2. Kokemusmaailmaan liittyvät tehtävät	27,5 %	27,6 %	29,7 %	28,3 %
3. Vuoropuheluun suuntaavat tehtävät	15,0 %	0,0 %	7,8 %	9,8 %
4. Toimintaa sisältävät tehtävät	48,8 %	37,9 %	17,2 %	35,3 %
5. Hahmottavat tehtävät	83,8 %	86,2 %	48,4 %	71,1 %
6. Ei-aktivoivat tehtävät	0,0 %	3,4 %	0,0 %	0,6 %
7. Muut tehtävät	11,3 %	0,0 %	40,6 %	20,2 %

TAULUKKO 7. Perustehtävien (n=82), kotitehtävien (n=46) ja lisätehtävien (n=21) sekä niiden yhteiset (n=149) prosenttijakaumat Hei, nyt lasketaan 5 -kirjan geometriajaksossa aktivoivien ominaisuuksien mukaan luokiteltuna.

Hei, nyt lasketaan! 5 Aktivoivat ominaisuudet	Perus- tehtävät %	Koti- tehtävät %	Lisä- tehtävät %	Kaikki tehtävät %
1. Ongelmatehtävät	8,5 %	6,5 %	19,0 %	9,4 %
2. Kokemusmaailmaan liittyvät tehtävät	22,0 %	4,3 %	14,3 %	15,4 %
3. Vuoropuheluun suuntaavat tehtävät	4,9 %	4,3 %	4,8 %	4,7 %
4. Toimintaa sisältävät tehtävät	62,2 %	69,6 %	38,1 %	61,1 %
5. Hahmottavat tehtävät	87,8 %	78,3 %	71,4 %	82,6 %
6. Ei-aktivoivat tehtävät	3,7 %	8,7 %	4,8 %	5,4 %
7. Muut tehtävät	0,0 %	10,9 %	4,8 %	4,0 %

Liite 10.

TAULUKKO 8. Perustehtävien (n=109), kotitehtävien (n=34) ja lisätehtävien (n=54) sekä niiden yhteiset (n=197) prosenttijakaumat Laskutaito 5 -kirjan geometriajaksossa aktivoivuuden mukaan luokiteltuna.

Laskutaito 5 Aktivoivuus	Perus- tehtävät %	Koti- tehtävät %	Lisä- tehtävät %	Kaikki tehtävät %
1. Viiden ominaisuuden tehtävä	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
2. Neljän ominaisuuden tehtävä	0,9 %	2,9 %	0,0 %	1,0 %
3. Kolmen ominaisuuden tehtävä	4,6 %	0,0 %	20,4 %	8,1 %
4. Kahden ominaisuuden tehtävä	33,9 %	44,1 %	38,9 %	37,1 %
5. Yhden ominaisuuden tehtävä	26,6 %	8,8 %	7,4 %	18,3 %
6. Ei-aktivoivat tehtävät	31,2 %	44,1 %	5,6 %	26,4 %
7. Muut tehtävät	2,8 %	0,0 %	27,8 %	9,1 %

TAULUKKO 9. Perustehtävien (n=80), kotitehtävien (n=29) ja lisätehtävien (n=64) sekä niiden yhteiset (n=173) prosenttijakaumat Mieti ja laske 5 -kirjan geometriajaksossa aktivoivuuden mukaan luokiteltuna.

Mieti ja laske 5 Aktivoivuus	Perus- tehtävät %	Koti- tehtävät %	Lisä- tehtävät %	Kaikki tehtävät %
1. Viiden ominaisuuden tehtävä	0,0 %	0,0 %	1,6 %	0,6 %
2. Neljän ominaisuuden tehtävä	6,3 %	0,0 %	1,6 %	3,5 %
3. Kolmen ominaisuuden tehtävä	20,0 %	13,8 %	17,2 %	17,9 %
4. Kahden ominaisuuden tehtävä	45,0 %	51,7 %	17,2 %	35,8 %
5. Yhden ominaisuuden tehtävä	17,5 %	31,0 %	21,9 %	21,4 %
6. Ei-aktivoivat tehtävät	0,0 %	3,4 %	0,0 %	0,6 %
7. Muut tehtävät	11,3 %	0,0 %	40,6 %	20,2 %

TAULUKKO 10. Perustehtävien (n=82), kotitehtävien (n=46) ja lisätehtävien (n=21) sekä niiden yhteiset (n=149) prosenttijakaumat Hei, nyt lasketaan 5 -kirjan geometriajaksossa aktivoivuuden mukaan luokiteltuna.

Hei, nyt lasketaan! 5 Aktivoivuus	Perus- tehtävät %	Koti- tehtävät %	Lisä- tehtävät %	Kaikki tehtävät %
1. Viiden ominaisuuden tehtävä	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
2. Neljän ominaisuuden tehtävä	0,0 %	2,2 %	0,0 %	0,7 %
3. Kolmen ominaisuuden tehtävä	12,2 %	6,5 %	9,5 %	10,1 %
4. Kahden ominaisuuden tehtävä	65,9 %	63,0 %	38,1 %	61,1%
5. Yhden ominaisuuden tehtävä	18,3 %	8,7 %	42,9 %	18,8 %
6. Ei-aktivoivat tehtävät	3,7 %	8,7 %	4,8 %	5,4 %
7. Muut tehtävät	0,0 %	10,9 %	4,8 %	4,0 %