Solmukohtia selvittämässä:
tutkimus matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin
etenemisestä kuudesluokkalaisilla oppilailla

Juhani Lehtimäki

Kasvatustieteen pro gradu –tutkielma
Kevät 2005
Opettajankoulutuslaitos
Jyväskylän yliopisto
Tuula Asunta

Lehtimäki, J. 2005. Solmukohtia selvittämässä: tutkimus matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin etenemisestä kuudesluokkalaisilla oppilailla. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma. 99 sivua.

TIIVISTELMÄ

Tutkimuksessa kartoitetaan matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin etenemistä kuudesluokkalaisilla oppilailla. Kolmen ongelmatehtävän perusteella selvitetään, millaisiin asioihin opettajan tulisi kiinnittää huomiota kyetäkseen auttamaan oppilasta ongelmanratkaisutaidon oppimisessa. Ongelmanratkaisuprosessin etenemisen tarkka kuvaaminen muodostaa tutkimuksen perustan.

Tutkimuksen kohdejoukko koostuu Etelä- Pohjanmaalla sijaitsevan kaupungin 84:stä kuudesluokkalaisesta oppilaasta. Heistä 72 ratkaisi kolme matemaattista ongelmaa kirjallisesti ja 12 haastattelutilanteessa, jossa oppilaan ratkaisun pohjalta pyrittiin yhdessä löytämään lopullinen ratkaisu ongelmaan.

Aineiston käsittely etenee kahdessa vaiheessa. Aluksi kirjallisten ratkaisujen perusteella selvitetään ongelmien keskeisimmät solmukohdat, eli ratkaisun vaihe, josta oppilas ei ole osannut jatkaa eteenpäin. Tämän jälkeen haastattelujen perusteella tarkastellaan, miten haastattelija on vaikuttanut solmukohtien selvittämiseen. Oppilaan ajattelun eteneminen oppimistilanteessa pyritään kuvaamaan mahdollisimman tarkasti. Ongelmatehtävien luonteen ja ratkaisuun liittyvien asioiden ymmärtämiseksi syvällisemmin, myös 14 luokanopettajaopiskelijaa ratkaisivat ongelmat kirjallisesti.

Ratkaisuprosessien kuvailut osoittavat oppilaiden ajattelun olevan varsin yksilöllistä. Erilaiset näkökulmat käytännön ongelmiin vaikuttavat merkittävästi ratkaisuun. Tutkimuksen keskeisin merkitys on osoittaa, miten oppilaiden ajattelu etenee kolmea tiettyä ongelmaa ratkaistaessa. Sen perusteella opettajien on mahdollista saada virikkeitä opetukseensa ja oppia ymmärtämään oppilaiden ajattelua ratkaisun aikana.

Avainsanat: ongelmanratkaisuprosessi, ongelma, matematiikan opettaminen

SISÄLLYSLUETTELO:

1. JOHDANTO

Tulevana opettajana minulle on haaste luoda oppilaille sellaisia virikkeitä, että heidän kognitiiviset taitonsa pääsisivät todella kehittymään. Mahdollistaakseni virkkeellisen opetuksen minun olisi tiedettävä, miten oppilaat ajattelevat ja miten heidän ajatteluunsa voisi vaikuttaa. Olen matematiikan opinnoissani havainnut ongelmatehtävien olevan hyvä keino opetella ymmärtämään ajatteluprosessin kulkua. Matemaattisten ongelmien ja todellisiin elämäntilanteisiin liittyvien pähkinöiden hyödyntäminen jokapäiväisessä koulutyössä vaikuttaa toimivalta keinolta ohjata lapsia pohtivaan ja kyseenalaistavaan oppimiseen. Opetusharjoittelujen aikana olen huomannut muutamien kokeneiden opettajien käyttävän ongelmatehtäviä hyväksi johdonmukaisen ajattelun opettelussa.

Tekemieni matematiikan aineopintojen yhteydessä olen pohtinut millaista koulumatematiikan tulisi olla. Ongelmalähtöisyys vaikuttaa mielenkiintoiselta mahdollisuudelta koko matematiikan opetuksen lähtökohdaksi. Tosielämän tilanteisiin ja luonnolliseen tarpeeseen ratkaista pohjautuva opetus voisi olla toimiva näkökulma opetusjaksojen suunnittelussa ja opetuksen toteuttamisessa.

Pro gradu –tutkielma on hyvä mahdollisuus syventyä tarkemmin ongelmanratkaisuun ja oppilaiden ajattelun kulkuun ratkaisun edetessä.. Tarkastelen tutkimuksessa koulumaailmalle tyypillisissä tilanteissa, miten opettaja voisi ohjata lapsia ongelmanratkaisutilanteissa mahdollisimman tehokkaasti. Tutkimusmetodien ja aineiston analysointiin liittyvillä valinnoilla pyrin mahdollisimman tarkkaan oppilaiden ajattelun kulun kuvaamiseen ongelmanratkaisuprosessin aikana. Sen perusteella saan yksityiskohtaista tietoa ongelmanratkaisuprosessin etenemisestä ja opettajan keinoista vaikuttaa siihen.

Koetan yhdistää työssäni oppilaiden ratkaisuprosessien etenemisestä tekemäni tulkinnat, niihin vaikuttavien tekijöiden pohdinnan ja jatkuvan aiemmin tehtyihin tutkimuksiin peilaamisen yhdeksi kokonaisuudeksi. Siksi tutkielman esitysjärjestys poikkeaa perinteisestä tutkimuksen rungosta. Aluksi esittelen kuitenkin keskeisimmät työssäni tarvittavat käsitteet ja määritelmät.

2. ONGELMANRATKAISU

Tässä kappaleessa esitellään tutkimuksessa esiintyvät keskeisimmät käsitteet ja ongelmanratkaisua käsittelevät teoriat.

2.1 Mikä on ongelma?

Määritettäessä, mitä tarkoittaa matemaattinen ongelma, on tarpeen aluksi erottaa puhekielessä usein esiintyvä sana ”ongelma” ja matemaattinen käsite toisistaan. Puhekielessä ongelma- sanaa käytetään usein tilanteissa, joihin liittyy jotain kielteistä. Tällaisia tilanteita ovat esimerkiksi alkoholiongelma tai ongelma parisuhteessa. Yleisesti voidaan sanoa, että tilanteesta muodostuu henkilölle ongelma siinä vaiheessa, kun näköpiirissä ei ole keinoja tilanteen selvittämiseksi. (Haapasalo 1997, 16).

Matemaattiselle ongelmalle on olemassa useita erilaisia määrittelyjä. Dörnerin mukaan yksilö kohtaa ongelman halutessaan siirtyä toivottuun lopputilaan tilasta, joka ei ole toivottu, mutta kuitenkaan hänellä ei sillä hetkellä ole sopivia keinoja käytettävissään. Yhdysvaltalaisten tutkijoiden Schoenfeldin ja Kantowskin tulkinnoissa ongelma on uudenlainen tilanne, jossa ei tunneta ratkaisumenetelmää, mutta ratkaisuun tarvittava tieto on käytettävissä (Pehkonen & Zimmerman 1990, 39). Nämä määritelmät erottaa toisistaan lähinnä yksilön ratkaisumotivaation mukanaolo Dörnerin määritelmässä. Hyvin samanlainen on myös Vaulamon ja Pehkosen ongelmakäsitteen määrittely. He katsovat ongelman tilanteeksi, jossa yksilö joutuu järjestämään tai rakentamaan aiemmin opittua tietoa uudella tavalla suorittaessaan annettua tehtävää. Yksinkertaisesti voisi sanoa, että matemaattinen tehtävä on ongelma vain jos oppilas saavuttaa tehtävää ratkaistessaan pisteen, josta hän ei enää osaa jatkaa eteenpäin. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 13-14).

Työni kannalta Polyan näkemys ongelman luonteesta vaikuttaa mielenkiintoiselta. Hänen mukaansa ongelmanratkaisussa täytyy löytää toiminnot, joiden avulla saavutetaan tavoiteltu, mutta ei välittömästä havaittavaa päämäärä (Polya 1981, 117). Ongelmanratkaisussa on siis Polyan mukaan kyse reitin löytämisestä tilanteessa, missä mikään tie ei ole valmisteltu (Vaulamo & Pehkonen 1999, 21). Koska pyrin työssäni kartoittamaan oppilaiden ajattelun etenemistä, eli löytämään heidän päätelmiensä reitin, on syytä korosta Polyan näkökulmaa ongelmanratkaisusta.

Ongelman määrittelyssä etenkin pedagogisessa mielessä on tarpeen erottaa matemaattinen ongelma ja harjoitustehtävä toisistaan. Harjoitustehtävä tarkoittaa tehtävää, jonka ratkaisemiseksi oppilaalla on valmiiksi tiedossaan ratkaisukeino. Tällöin oppilaan tarvitsee tehtävä suorittaakseen ainoastaan pyrkiä soveltamaan tietämäänsä standardimenetelmää (Pehkonen & Zimmerman 1990, 38). Tärkeää on myös havaita, että ongelmanratkaisuprosessi voi sisältää ja usein sisältääkin edellä määriteltyjä harjoitustehtävän aineksia, osia joiden ratkaiseminen on oppilaalle tuttua (Haapasalo 1985, 32).

Kuitenkin voi olla hankalaa erottaa ongelmatehtävä ja harjoitustehtävä toisistaan. Tätä vaikeuttaa vielä entisestäänkin ongelmakäsitteen suhteellisuus. Se mikä on jollekulle tietyllä hetkellä ongelma, saattaa jollekulle toiselle olla pelkkä rutiinitehtävä (Haapasalo 1997, 17). Haapasalon (1985) määritelmä kertoo yksiselitteisesti mitä tehtävältä vaaditaan ollakseen ongelmatehtävä: ”Jotta tietty tilanne olisi määrätyllä hetkellä tietylle henkilölle ongelma, sen on aiheutettava tässä yksilössä juuri sillä hetkellä tietoista, päämäärähakuista (ajattelu)toimintaa, joka tähtää tavoiteltavaan tulokseen ilman välittömästi havaittavia keinoja.”(Haapasalo 1985, 32). Ongelmanratkaisu nähdään tapahtumana, jossa ongelmalla ajatellaan olevan annettuna lähtötilanne ja päämäärä, jota kohden voidaan edetä (Vaulamo & Pehkonen 1999, 18). Lähtötilanteesta päämäärään pääseminen edellyttää sopivista operaatioista koostuvan polun löytämistä ongelman eri tilojen kautta (Haapasalo 1997, 21).

Oppilaiden ratkaisuja analysoidessa on tärkeä havainnoida saavuttaako oppilas ratkaisun edetessä pisteen, josta hän ei heti osaa jatkaa eteenpäin. Jos näin jollekin oppilaalle tapahtuu voidaan tämän sanallisen tehtävän yhteydessä puhua Haapasalon (1985) määritelmän mukaisesti tämän tietyn oppilaan kohdalla ongelmatehtävästä, vaikka tehtävä ei tyypiltään olisikaan selkeästi avoin ongelmatehtävä. Toki luonteeltaan avoin ongelmakin voi esimerkiksi tutkimustani varten teettämäni testin tekovaiheessa olla jollekin oppilaalle rutiinitehtävä, jos hän on jo aiemmin ratkaissut kyseisen ongelman.

Tutkimusongelmani kannalta on hyödyllistä huomioida vielä ongelmanratkaisun määrittely tiedollisen rakenteen näkökulmasta. Tämä tarkoittaa tuttujen tilanteiden huomioimista aidoissa tilanteissa, sekä toimimista tunnistettuihin piirteisiin sopivalla tavalla (Vaulamo & Pehkonen 1999, 18). Hyvin samankaltainen on määrittely, jossa ongelmanratkaisua pidetään prosessina, jossa aiemmin hankittua tietoa käytetään uudessa ja tuntemattomassa tilanteessa (Vaulamo & Pehkonen, 1999, 18).

2.2 Ongelman luokittelu

Tutkimuksen aikana puhun useaan otteeseen ongelman luonteesta. Etenkin oppilaiden vastausten analysoinnissa se on tärkeä asia. Ongelmat voidaan jakaa avoimiin ja suljettuihin ongelmiin. Avoin ongelma tarkoittaa tehtävää, jonka lähtö- tai lopputilanne on annettu avoimena. Jos sekä lähtö- että lopputilanne ovat tehtävänannossa tarkoin määriteltyjä on ongelma suljettu. Hyvin määritellyistä ja huonosti määritellyistä ongelmista puhuttaessa tarkoitetaan tätä samaa jakoa. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 14). Useimmin koulukirjoissa esiintyy suljettuja ongelmia. Tällöin voitaisiin oikeastaan puhua tehtävistä (Pehkonen & Zimmerman 1990, 42). Tällaisten sanallisten tehtävien ja aitojen ongelmatehtävien erottaminen toisistaan on hankalaa. Aitoja avoimia ongelmatehtäviä ovat esimerkiksi projektit (Pehkonen 1997, 9).

Avoimet ongelmat on huomioitava myös ongelmakeskeisen opetuksen kannalta. Ongelmakeskeinen lähestymistapa on hyvä keino kehittää oppilaan ajattelua ja luovuutta, jotka kuuluvat oppimisen formaaleihin tavoitteisiin (Pehkonen 1994, 61).

2.3 Ongelmanratkaisuprosessin eteneminen

Haapasalon jaottelun mukaisesti ongelmanratkaisuprosessiin vaikuttavat erilaiset osatekijät. Hän erottelee toisistaan resurssit, strategiat, kontrollin sekä emootiot ja uskomukset. Näistä resursseilla tarkoitetaan kaikkea tietotaitoa, joka ratkaisijalla on käytettävissään ongelmatilanteessa: käsitteitä, lauseita, proseduureja sekä sisällöstä riippumattomia valmiita strategioita. Haapasalon (1997) mukaan resursseja ja strategioita on hankala erottaa toisistaan. Yleisesti strategioilla tässä yhteydessä ymmärretään henkisiä operaatioita, joilla kognitiivisia prosesseja ohjaillaan ja kontrolloidaan. (Haapasalo 1997, 20- 25).

Kontrolli voi olla oman itsen tai yhteisön taholta tapahtuvaa. Ongelmanratkaisuprosessin etenemisen kannalta on tärkeää havaita metakognitioiden keskeinen rooli ratkaisustrategioiden kontrolloinnissa, niiden käynnistyksessä ja hylkäämisessä. Ne toimivat toimeenpanijoina prosessin kuluessa. Metakognitiot ovat yhteisnimitys kontrollistrategioille, joilla tietoisesti säädellään ja ohjaillaan tiedonkäsittelyprosesseja ja ongelmatilanteessa ratkaisustrategioita. (Haapasalo 1997, 27)

Emootio voivat vaikuttaa yksilön toimintaan ongelmanratkaisutilanteessa suurestikin. Huonot kokemukset ja erilaiset affektiot voivat alentaa älyllistä suoristusta merkittävästikin. Toisaalta esimerkiksi Helm on osoittanut menestymisen elämysten myönteisen vaikutuksen ongelmanratkaisuprosessiin. Emootiot saattavatkin säädellä ongelmanratkaisua tehokkaammin ja nopeammin, kuin mihin tietoisella kontrollilla pystytään. (Haapasalo 1997, 28).

Tutkimuksessani ratkaisupapereista on ainoastaan luettavissa metakognitioiden vaikutus. Itse metakognitioiden tunnistaminen on hankalaa, sillä kohteena on tunnistusprosessi itse.

Varsin erilaisista ongelmanratkaisustrategioita koskevista tutkimustuloksista huolimatta, on löydettävissä tiettyjä säännönmukaisuuksia ongelmanratkaisuprosessin etenemisestä. Nämä ovat antaneet lähtökohdan ongelmanratkaisumallien esittämiselle (Vaulamo & Pehkonen 1999, 20). Kuuluisin ja käytetyin ongelmanratkaisumalli on Polyan malli (1973). Polya on pyrkinyt luomaan mallinsa niin, että se olisi sovellettavissa lähes kaikkiin ongelmiin. Haapasalon (2004) mukaan Polyan malli tulisi käsittää lähinnä yleisiksi käyttäytymisohjeiksi ongelmantilanteessa, eikä niinkään prosessin etenemisen kuvailuna (Haapasalo 2004, 86).

Polyan ongelmanratkaisuprosessin kuvailu on nelivaiheinen. Etsiessään ratkaisua ongelmaan ratkaisija muuttaa näkökulmaansa jatkuvasti. Käsitys ongelmasta on erilainen ratkaisun alkuvaiheessa, kuin ratkaisun edetessä ja ratkaisun löydyttyä (Polya 1973, 5).

Mallin ensimmäisessä vaiheessa ratkaisijan täytyy pyrkiä ymmärtämään ongelma. Täytyisi nähdä selvästi mitä väitetään. Opettajan tulee auttaa oppilasta ymmärtämään ongelma. Kuitenkin oppilaan oma motivaatio on tärkeä. Oppilaan tulisi janota ratkaisua (Polya 1973, 6). Polyan mukaan ei kuitenkaan ole välttämättä oppilaan vika jos häneltä puuttuu ratkaisunhalua. Opettajan on toiminnallaan pyrittävä auttamaan motivaation synnyttämisessä. Ongelman pitää olla hyvin valittu, oikean tasoinen, kiinnostava ja lisäksi opettajan tulisi esitellä aihe hyvin. (Polya 1973, 6-9).

Toiseksi ratkaisijan täytyy tehdä suunnitelma, miten ratkaisussaan etenee. Suunnitelman teko on ongelmanratkaisun hankalin vaihe. Se on päätehtävä ongelmatehtävän ratkaisussa. Idea siitä, miten tehtävä tulisi ratkaista voi tulla välähdyksen kaltaisesti tai useiden epäonnistuneiden yritysten tuloksena. Joskus se voi vaatia onneakin. Auttaakseen oppilasta ratkaisun suunnittelussa opettajan pitäisi miettiä omia ongelmanratkaisukokemuksiaan. Näin hän voisi nähdä, missä vaiheessa ratkaisua oppilas etenee. Matemaattisissa ongelmanratkaisutehtävistä saadut aiemmat tiedot, kokemukset ja ratkaisut ovat avainasemassa ratkaisun keksimisessä. Polya kehottaakin kyselemään itseltä, voisiko aiemmin tehtyä ratkaisua hyödyntää uuden ongelmatehtävän ratkaisussa. (Polya 1973, 6-11).

Kolmannessa vaiheessa noudatetaan tehtyä suunnitelmaa, toteutetaan suunnitelma. Suunnitelman ollessa hyvä ja toimiva on tämä vaihe helppo. Lopuksi neljännessä vaiheessa, sen jälkeen kun ratkaisu on saatu, palataan vielä ratkaisujen tekemiseen, tarkistetaan ratkaisu ja pohditaan koko ongelma vielä uudelleen. Tarkistus, takaisin omiin valintoihin ja ratkaisuihin katsominen on Polyan mukaan erinomainen tilaisuus oppia ongelmanratkaisua. Lisäksi huolellinen tarkistus paljastaa usein virheellisesti tehdyn päättelyn tai ratkaisun puutteellisuuden. (Polya 1973, 6-18).

Polyan nelivaiheinen ongelmanratkaisun kuvailu on useiden ongelmanratkaisumallien pohjana. Sitä on kuitenkin kritisoitu liian yleiseksi. Mason (1982) on typistänyt Polyan mallin kolmeen vaiheeseen, eli aloitukseen, yritykseen ja tarkasteluun. Malli korostaa ymmärtämisen tärkeyttä. Masonin mallissa Polyan mallin toinen ja kolmas vaihe on yhdistetty. Tässä kohtaa on ongelmanratkaisun ydin, sen luova komponentti, jota ilmeisesti ei voida systematisoida. Masonin mallissa ongelmanratkaisu tapahtuu kierteenä, jossa ahaa- ja jumissa -havainnot vuorottelevat. Erilaisia ratkaisuyrityksiä tekemällä päästään lopulliseen ratkaisuun. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 19-20).

2.4 Ongelmanratkaisutaidon kehittäminen

Tutkiessani ongelmanratkaisua, siinä tarvittavaa matemaattista luovuutta ja opettajan roolia ratkaisun onnistumisessa kouluympäristössä minun on syytä tarkastella lyhyesti, miten ongelmanratkaisutaitoa voisi kehittää. Haapasalon (1997) mukaan ongelmanratkaisutaitoa ei sinällään voi opettaa, vaan opettamisella tarkoitetaan kaikkia sellaisia toimenpiteitä, joilla tuetaan oppilaan ongelmanratkaisutaidon kehittymistä. Opettajan tulee ongelmanratkaisutaitoja kehitettäessä ohjata oppilasta tekemään oikeita valintoja ja tarkkailemaan tietoisesti omaa ajatteluaan. Sen sijaan tiettyjä operaatioiden ketjuja tai yksittäisiä heuristiikkoja opettamalla ongelmanratkaisutaitoja opitaan huonosti. (Haapasalo 1997, 124).

Heuristiikoilla tarkoitetaan Schoenfeldin (1980) mukaan toimia tai strategioita, jotka auttavat ratkaisijaa ymmärtämään ja ratkaisemaan ongelmaa. Heuristiikoista voi olla hänen mukaansa merkittävää hyötyä, mutta niiden käyttäminen ei ole aina helppoa. Heuristiikkoja pitäisi opettaa oppilaille yhtä päättäväisesti kuin muitakin tekniikoita mikäli halutaan, että oppilaat käyttäisivät niitä. (Schoenfeld 1980, 9-17).

Dörner (1987) määrittelee heuristiset strategiat struktuureiksi, jotka organisoivat ja kontrolloivat keksimisprosessia (Pehkonen & Zimmerman 1990, 45). Heuristisia strategioita voivat olla esimerkiksi piirroksen tekeminen, erikoistapauksen käsittely ja yleistyksen sovittaminen tähän erikoistapaukseen. Näitä strategioita käytetään etenkin hyvässä ongelmanratkaisussa jatkuvasti, tiedostamattakin. Pehkosen ja Zimmermanin mukaan heurististen strategioiden opettamisen merkitys on tiedostamattoman toiminnan tuomisessa tietoisuuteen, sillä tämä yleensä parantaa suoritusmahdollisuuksia. Heuristiikkojen harjoittelun, esimerkiksi kuvion piirtämisen ja osatavoitteiden harjoittamisen on havaittu auttavan oppilaita käyttämään heuristiikkoja tehokkaasti ja näin suoriutumaan paremmin ongelmanratkaisutehtävien ratkaisemisesta. (Pehkonen & Zimmerman 1990, 45).

Ongelmanratkaisun kehittämisessä on tarpeen harjoittaa rinnakkain niin systemaattiseen, kuin luovaankin ratkaisemiseen ohjaavia menetelmiä. Systemaattisen tehtävä-analyysin opettelun voi aloittaa aivan yksinkertaisilla ongelmilla. Tärkeintä on luoda oppilaalle mielikuva selkeästä ja systemaattisesta ratkaisemisesta. Oppilas pitäisi saada löytämään sellaiset ratkaisuun tarvittavat keinot, jotka hän jo hallitsee. Uusia ratkaisumenetelmiä opitaan monipuolisten toimintamahdollisuuksien kautta. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 24-25).

Vaulamo ja Pehkonen (1999) mukaan ongelmanratkaisun opetuksessa tulisi korostaa laajaa ja rikasta lähestymistapaa. Oppilaiden tulisi jakaa ideansa ja lähestymistapansa muiden kanssa ja etsiä erilaisia ratkaisumalleja, sekä muotoilla itse ongelmia todellisista tilanteista. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 25).

Ongelmanratkaisua opetettaessa on hyvä kiinnittää huomiota lisäksi ratkaisuun liittyviin vaikeuksiin. Näin niiden vaikutuksen voisi opetuksellisilla järjestelyillä ja suunnitelmallisuudella minimoida. Barbara Moses (1982) on luokitellut oppilaiden ongelmanratkaisun onnistumisen tiellä olevat vaikeudet kolmeen tasoon. Toisaalta näistä kolmesta tasosta ilmenee myös ongelmanratkaisussa tarvittavat taidot.

Ensimmäinen taso on ongelmaan tutustuminen. Oppilaan on kyettävä motivoitumaan tehtävän ratkaisuun. Motivaation aikaansaanti on varmasti eräs keskeisimpiä opettajan tehtäviä tämänkaltaisessa pitkäjännitteisessä työskentelyssä. Toisella vaikeustasolla ovat perustaidot. Niihin kuuluu matemaattiset perustaidot ja lukemisen taidot. Ongelmatehtävät ovat sanallisessa muodossa, joten puutteet luetun ymmärryksessä voivat aiheuttaa esteen ongelmanratkaisulle. Kolmannella tasolla ovat oppilaan yleiset kognitiiviset taidot. Näitä ovat visualisointi, joustava ajattelu ja analogioiden muodostaminen. (Moses 1982, 11).

Kokonaan erilainen lähestymistapa ratkaisutaidon kehittämiseen on matemaattisten ajattelutaitojen opettaminen. Yrjönsuuri (2004) on rakentanut matematiikan tehtävän ratkaisemisen mallin, joka soveltuu reaalimaailman ongelmien matematisointiin ja matemaattisen ajattelun opiskeluun. Malli on viisivaiheinen ja sen jokaisessa vaiheessa voidaan käyttää monenlaista matemaattista ajattelua Tällöin opetuksen ongelmaksi tulee sellaisen ajattelun ongelman erottaminen, jota erityisesti halutaan opettaa. (Yrjönsuuri 2004, 118).

Ensimmäinen vaihe on matemaattisen tehtävän tavoite. Se merkitsee alku- ja lopputilan sisällöllisen muutoksen tiedostamista, Tähän kuuluvat ongelman havaitseminen ja hahmottaminen, sekä kuvallinen hahmottaminen, eli mielikuva tuloksesta. Toisessa vaiheessa siirrytään verbaalista kielestä symboliseen kielen, eli muunnetaan reaalimaailman tapahtuma ja kieli matematiikan kielelle. Tässä vaiheessa reflektoiva ajattelu sekä käsitteiden ja rakenteiden koettelu ovat tärkeitä asioita. Tämä vaihe voi tuottaa heikoille oppilaille suuria vaikeuksia. (Yrjönsuuri 2004, 119).

Kolmannessa vaiheessa ratkaisija pohtii matemaattisten käsitteiden, lauseiden ja operaattoreiden ominaisuuksia. Pohdinta mahdollistaa ongelman alkutilan muuttamisen lopputilaksi. Seuraavaksi käytetään matemaattista operaattoria tai menetelmää, eli suoritetaan toimet rutiininomaisesti. Lopuksi viidennessä vaiheessa arvioidaan ongelman rajoja, eli pyritään ottamaan huomioon kaikki mahdollisuudet ja verrataan kriittisesti saatuja rinnakkaistuloksia tavoiteltuun lopputilaan. (Yrjönsuuri 2004, 119-120).

2.5 Solmukohta

Solmukohta on tämän tutkimuksen yksi keskeisimmistä sanoista. Solmukohdalla tarkoitetaan tässä tutkimuksessa sellaista kohtaa ratkaisussa, josta oppilas ei ole osannut jatkaa eteenpäin. Käytän tästä vaiheesta nimitystä solmukohta siksi, että se kuvaa erinomaisesti oppilaiden ratkaisujen jumittumista, solmuun menoa. Solmukohdat voidaan ylittää haastattelutilanteissa, jolloin vertauskuvallisesti solmu aukeaa ja oppilas osaa jatkaa ratkaisuaan.

Esimerkiksi Ikäheimo on käyttänyt solmukohta –sanaa eri merkityksessä, kuvaamaan keskeisiä matematiikan osa-alueita kirjassaan Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan (Ikäheimo 1995, 63-142).

3. TUTKIMUKSEN TARKOITUS JA TUTKIMUSONGELMAT

Tässä tutkimuksessa tutkitaan kuudesluokkalaisten oppilaiden ongelmanratkaisuprosessin etenemistä kolmen matemaattisen ongelmatehtävän avulla. Tutkimuksessa käytetyt ongelmat: välimatka-, ikä- ja siltaongelma esitellään tarkemmin luvussa 4.3. Tutkimustehtävänä on selvittää millaisiin asioihin opettajan tulisi kiinnittää huomiota kyetäkseen auttamaan oppilasta ongelmanratkaisutaidon oppimisessa. Tästä syystä on tarpeen pyrkiä aluksi kuvaamaan ratkaisuprosessin eteneminen mahdollisimman tarkasti. Prosessin etenemisen kuvailun pohjalta haetaan tietoa seuraavista ongelmista:

Miten ongelmanratkaisuprosessi etenee? Mikä erottaa onnistuneen ratkaisun epäonnistuneesta? Millaisiin solmukohtiin tehtävissä oppilaat jumiutuvat, ja miten he toimivat näissä tilanteissa? Millaisia tietoja niillä oppilailla on enemmän, jotka ovat selvittäneet solmukohdat? Onko heidän ajattelussaan jotain yhteistä? Millaiset tiedot tai ajattelutavat/suunnat avittavat ratkaisemista? Millaiset tekijät (kysymykset, painotukset, asenteet, tavat..) ohjaavat hyvää ongelmanratkaisua?

Näiden kysymysten ymmärtäminen antaa keinoja tutkimustehtävän selvittämisessä: Miten opettajana voin auttaa oppilaan ongelmanratkaisua?

4. TUTKIMUKSEN SUORITTAMINEN

4.1 Tutkimuksen kohdejoukko

Tutkimuksen kohdejoukon muodostavat Pohjanmaalla sijaitsevan keskikokoisen kaupungin keskustan koulun kuudensien luokkien oppilaat ja heidän lisäkseen yhden kyläkoulun kaikki neljä kuudesluokkalaista. Otin heidät mukaan tutkimukseen, kun halusin saada lisäselvitystä ja lisämateriaalia. Keskustan koululta tutkimukseen osallistuivat kaikki vanhemmiltaan luvan saaneet kuudensien luokkien oppilaat. Jokaiselta keskustan koulun neljältä luokalta arvottiin kaksi tyttöä ja kaksi poikaa, jotka tekivät testin tutkijan läsnä ollessa. Loput ryhmien oppilaista tekivät testin kirjallisesti. Pelkästään kirjallisesti testin teki 72 oppilasta. Tarkempaan seurantaan osallistui yhteensä 12 oppilasta, joista neljä oli kyläkoulun oppilaita.

Kuudensien luokkien oppilaiden lisäksi tutkimukseen osallistui myös 14 Jyväskylän yliopiston toisen vuosikurssin luokanopettajaopiskelijaa. Heidän testissä tekemiään ratkaisuja hyödynsin usealla eri tavalla tutkimuksessani. Erityisesti käytin niitä selvittämään kuudesluokkalaisten ratkaisuista tekemiäni päätelmiä. Luokanopettajaopiskelijat kirjoittivat ratkaisupapereihinsa paljon ajatuksiaan. Näistä kirjoituksista oli helppo tulkita, miten he ymmärsivät ratkaisun etenemisen, mikä oli hankalaa ja mitkä asiat he kokivat oleellisiksi. Oppilaiden ratkaisujen analysointi edellyttää minulta ongelman tarkkaa tuntemista. Tässä aikuisten ratkaisut toimivat oivallisesti. Esimerkiksi siltaongelman (liite 1) erilaisten ratkaisustrategioiden luokitteluun luokanopettajaopiskelijoiden ratkaisut toivat kokonaan uudenlaisen tulkinnan.

4.2 Analysointimenetelmät ja analyysin vaiheet

Tutkimuksen analysointitavat voidaan karkeasti jakaa kahdella tavalla. Voidaan puhua selittämiseen ja ymmärtämiseen pyrkivistä lähestymistavoista. Tämän jaottelun rinnalla käytetään jaottelua tilastolliseen ja kvalitatiiviseen analyysiin. (Hirsjärvi 1986, 55). Tässä tutkimuksessa minulla on ilmiön selittämisen sijaan ennen kaikkea tarkoitus etsiä ymmärrystä ongelmanratkaisuprosessin etenemisestä ja siihen vaikuttavista asioista. Tarkastelen oppilaiden toimintaa ongelmanratkaisutilanteessa, kerään tietoa heidän tekemistään valinnoista ja etsin uudenlaista tietoa oppilaiden ajattelusta ratkaisuprosessin edetessä.

Aineistoa kerätään perinteisesti usein hypoteesien testaamiseksi. Tällöin tutkijalla on jokin tutkimuskysymys, johon haetaan vastausta aineistosta. Aineiston tarkoituksena voidaan katsoa olevan myös hypoteesien keksiminen, ei pelkästään niiden todentaminen. Aineistot siis vauhdittavat tutkijan ajattelua, eivät latista tai jarruta sitä. Aineistojen avulla tutkija voi löytää uusia näkökulmia, ei pelkästään todentaa ennestään epäilemäänsä. (Eskola 2001, 136). Nämä Eskolan (2001) havainnot aineiston keruutarkoituksesta ovat mielenkiintoisia ja kuvaavat hyvin sitä, miten tämän tutkimuksen aineistoa on hyödynnetty. Kerätty aineisto on toiminut monella tavoin tutkijan ajattelun vauhdittajana. Olen käyttänyt aineistoa oikeastaan kahdessa vaiheessa. Ensimmäisessä vaiheessa pääjoukon eli kaikkien kirjallisten ratkaisujen perusteella olen muokannut hypoteesin, jota sitten jatkoaineiston perusteella testataan. Kuitenkin on huomattava, että kirjallinen aineisto ja haastattelumuotoiset seurannat tehtiin samanaikaisesti, toisistaan riippumattomina. Olisi ollut mahdollista toteuttaa tutkimus eri tavoinkin. Tarkempi seuranta voitaisiin tehdä vasta sen jälkeen, kun tutkimusaineiston ensimmäinen osa olisi analysoitu ja mahdollisesti olisi löydetty hypoteesi, jota toisen osan perusteella määrätietoisesti testataan.

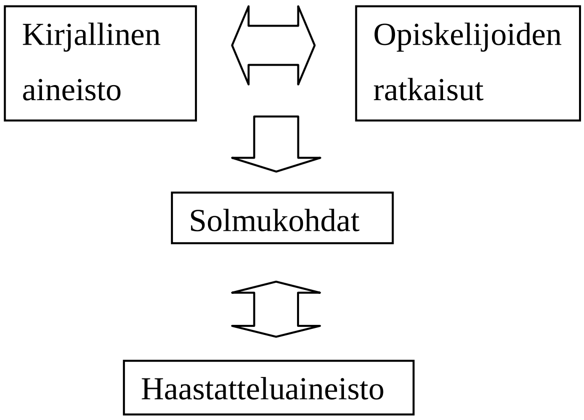
Laadullisessa tutkimuksessa tutkimusongelma ei ole välttämättä täsmällisesti ilmaistavissa tutkimuksen alussa, vaan se täsmentyy koko tutkimuksen ajan. Tarkastelu voi näkemyksen kehittyessä kohdentua uusiin mielenkiinnon kohteisiin. Keskeistä onkin löytää tutkimuksen kuluessa ne johtavat ideat, joihin nojaten tutkimuksellisia ratkaisuja tehdään. (Kiviniemi 2001, 69-71). Toisaalta Alasuutari (1994) korostaa, että myös laadullinen tutkimusprosessi on olennaisilta osiltaan hypoteesien testaamista. Hypoteeseja ei vain muotoilla ennakkoon, vaan vähitellen tutkimuksen ja analyysin edetessä, sitä mukaa tutkija löytää mielekkäitä kysymyksiä tai hypoteeseja (Alasuutari 1994, 240).

Kiviniemen (2001) ja Alasuutarin (1994) luonnehdintojen pohjalta voi perustella valitsemaani tutkimusasetelmaa. Tehdessäni haastattelut samanaikaisesti kirjallisten testien kanssa kykenin hyödyntämään niistäkin saatua tietoa hypoteesien ja tutkimusongelmien muokkaamisessa. Lisäksi etsittäessä tietoa, jonka avulla koetetaan oppia ymmärtämään lasten ajattelua ongelmanratkaisutilanteessa, on tärkeää erottaa tutkijan liian hätiköidyt tulkinnat ja todellinen toiminta toisistaan. Siksi päädyin tekemään koko aineiston keruun, kummatkin vaiheet, samanaikaisesti. Vielä on huomioitava, että myös tutkimuksen luotettavuuden kannalta olisi huono vaihtoehto teettää sama testi saman oppilasryhmän oppilaille eriaikaisesti.

Käyttämäni analyysimenetelmät ovat pääosin laadullisia. Laadullinen tutkimus on luonteeltaan prosessiluonteista. Tutkimuksen eri elementit kehittyvät joustavasti koko tutkimuksen ajan (Kiviniemi 2001, 68). Laadulliselle tutkimukselle on yleisesti pyrkimyksenä tavoittaa tutkittavien näkökulma (Kiviniemi 2001, 68). Nämä luonnehdinnat laadullisen tutkimuksen luonteesta kuvaavat analyysiprosessia erinomaisesti. Lisäksi ne osoittavat, miten laadullinen tutkimus eroaa perinteisestä määrällisestä tutkimuksesta.

Tarkastellessa tutkijan suhdetta teoriaan tässä tutkimuksessa voidaan havaita sen olevan sekä aineistolähtöistä, että teoriasidonnaista. Teoriasidonnaisuus tarkoittaa sitä, että analyysissä on teoreettisia kytkentöjä, mutta se ei suoraan nouse teoriasta tai pohjaudu teoriaan (Eskola 2001, 137). Toisaalta suuri osa teoriasta ja väittämistä konstruoidaan suoraan aineistosta. Tällöin tutkimus on aineistolähtöistä (Eskola 2001, 136). Tutkimuksen suhde teoriaan on huomioitava siksi, että tutkimuksen aineistolähtöisyys luo perustan monille prosessin aikana tehdyille valinnoille. Pyrin aktiivisesti etsimään oppilaiden ratkaisuista heidän omia ajatuksiaan ja tätä kautta teen johtopäätöksiä. Valmiiden ongelmanratkaisuprosessi mallien hyödyntäminen luo perustan analyysille.

Olen tarkastellut testissä käyttämiäni ongelmia keskenään hieman eri tavoin. Siksi on syytä kirjoittaa tarkemmin käyttämistäni analyysimenetelmistä ja analyysin kulusta erikseen kaikkien ongelmien osalta. Aineiston analyysin eteneminen pääpiirteittäin on luettavissa kuvasta 1. Kuvassa 1 on esitelty käyttämiäni tutkimusaineiston eri osia. Kuudesluokkalaisten kirjalliset ratkaisujen ja luokanopettajaopiskelijoiden ratkaisujen perusteella olen muodostanut itselleni kokonaiskuvan ratkaisuprosessin etenemisestä. Kokonaiskuvan pohjalta olen todennut keskeisimmät ratkaisuprosessissa ilmenevät solmukohdat. Tämän jälkeen haastatteluaineiston perusteella tutkin, miten havaitut solmukohdat on mahdollista ylittää.



Kuva 1. Analysoinnin vaiheet tutkimuksessa.

4.2.1 Haastattelutilanne

Haastattelin yhteensä 12 oppilasta. Heidät valittiin arpomalla niin, että jokaisesta neljästä oppilasryhmästä arvottiin tyttö ja poika. Heidän lisäkseen haastattelin neljää kyläkoulun oppilasta, kahta tyttöä ja kahta poikaa. Tarkoituksena minulla oli saada haastatteluista lisätietoa ongelmanratkaisuprosessin etenemisestä ja sen perusteella pohtia selityksiä kirjallisista ratkaisuista nouseviin kysymyksiin.

Haastattelutilanteen aikana oppilaat ratkaisivat kolme ongelmaa. Samaan aikaan luokan muut oppilaat tekivät samaa testiä opettajan valvonnassa luokassa. Jokainen oppilas ratkaisi tehtävät erillisille vastauspapereille. Toteutin haastattelun niin, että yksi oppilas kerrallaan oli kanssani pikkukopissa, jossa kävimme yleensä yhden tehtävän kerrallaan läpi. Tämän jälkeen oppilaat vaihtoivat paikkoja niin, että kopin ulkopuolella ollut oppilas tuli haastatteluun ja toinen meni ulkopuolelle yksin miettimään seuraavaa tehtävää. Ennen haastattelun aloittamista kaikilla oppilailla oli kuitenkin vähintään kymmenen minuuttia aikaa miettiä tehtäviä. Näin minulla oli selvillä, kuinka paljon oppilas on itse osannut tehtävästä ratkaista, mutta kuitenkin oli mahdollista myös ratkaista tehtäviä yhdessä.

Pyysin oppilaita aina aluksi omin sanoin kertomaan tullessaan nauhoituskoppiin, mitä he ovat saaneet ongelmasta selville. Jos oppilas oli päässyt mieleiseensä ratkaisuun hän sai selittää miten ongelma on ratkennut. Jokainen haastattelutilanne oli erilainen. Pyrin luomaan niistä oppimistilanteen, jossa oppilaalla olisi mahdollisuus itse ymmärtää, miten ongelmat saadaan ratkaistuksi. Opetustilanteessa opettajan tulisi olla keskustelun ylläpitäjä ja virittäjä (Seppälä 1994, 13). Halusin ongelmien ratkaisemisen tapahtuvan ja etenevän aidosti haastattelutilanteessa saadakseni selville, miten oppilaan ajatukset oikeasti missäkin tilanteessa etenevät. Puhtaasti jälkikäteen tapahtuva perinteisempi haastattelu ei tähän tarkoitukseen toimi yhtä hyvin. Bergerin mukaan tutkimuksen kohteita tulisi laadullisessa tutkimuksessa tarkastella niiden luonnollisessa ympäristössä (Berger 1998, 31). Olen pyrkinyt tähän luomalla haastattelutilanteesta keskustelunomaisen luontevan oppimistilanteen.

Tekemäni kysymykset ja kommentit ohjaavat oppilaan ajattelua ja ratkaisun etenemistä. Siksi käyttämälläni työtavalla ei ole mahdollista kuvata ratkaisuprosessin etenemistä tilanteessa, jossa oppilas ratkaisee ongelmaa yksin. Tästä syystä on oleellista huomioida, että oppilailla oli aikaa miettiä ratkaisua ennen väliintuloani ja siihen mennessä oppilaan tekemä ratkaisu on hänen omansa. Kaikkeen sen jälkeiseen vaikuttavat esittämäni kommentit ja kysymykset. Kuitenkin koulussakin tilanne on hyvin samankaltainen. Opettaja ohjaa oppimista ongelmanratkaisutilanteissa kaikella toiminnallaan. Tässä tutkimuksessa pyritäänkin saamaan selvitystä ennen kaikkea ongelman ratkaisun etenemisestä kuvailemassani koulutilanteessa, ei niinkään laboratorio-olosuhteiden kaltaisessa tilanteessa, jossa oppilas on ajatuksineen yksin.

Simon on kuvannut matematiikan oppimisen prosessia, joka auttaa opettajaa suunnittelemaan opetuksensa sisältöä, muotoa ja oppimistehtäviä. Oppilaiden ajattelu ja ymmärtäminen tulee ottaa vakavasti. Oppilaan ajattelun seuraaminen on jatkuva prosessi ja se edellyttää jatkuvaa tiedon keruuta sekä oletusten tekemistä ja varmentamista. Opettajan tietämys lisääntyy samanaikaisesti oppilaiden tiedon kasvun kanssa. (Kupari 1999, 39). Oppimistilanteessa tekemäni oletukset saattavat olla jälkikäteen ajatellen vääriä. Niiden perusteella saatan johdatella oppilaan ratkaisua suuntaan, joka ei edistä lopullisen ratkaisun löytymistä. Siksi oppimistilanteen aikana täytyy jatkuvasti pyrkiä Simonin kuvailun mukaisesti varmentamaan ja hylkäämään tulkintoja oppilaan ajattelusta.

Saadakseni tietoa tutkimustehtävieni selvittämiseksi kysyin useita erilaisia tilanteesta riippuvia kysymyksiä. Oppilaan antamat selitykset näihin kysymyksiin antoivat minulle tietoa hänen ajattelunsa vaiheesta, mutta samalla niiden oli tarkoitus ohjata oppilaan ajattelua. Voi ajatella, että pikkukysymykset toimivat vinkkinä suuntamaan oppilaan ajattelua kokonaisratkaisun saamiseksi. Esimerkiksi Vaulamo & Pehkonen (1999) tutkiessaan ongelmanratkaisutaitoja käyttivät kysymystä: ”Onko muita vaihtoehtoja?”, vinkkinä ratkaisemista helpottamaan samankaltaisessa ongelmassa kuin tehtävässä 1 (Liite 1).

Toisaalta kysymykseni voivat myös haitata ongelman ratkaisemista. Kysyessäni jotain, kun oppilaalla on vielä oma ajatusprosessi kesken ohjaan hänen ajatuksiaan pois esimerkiksi mahdollisesta kokonaisstrategian keksimisestä.

4.2.2 Esitystapa

Tutkimusanalyysissä on pyritty kuvaamaan oppilaan ajatuskulun jälki ratkaisun kannalta oleellisilta osilta. Tarkastelussa on pyritty mahdollisimman tarkasti pohtimaan oppilaan toimia ratkaisutilanteessa, syitä hänen toiminnalleen kohtaamissaan solmukohdissa ja tutkijan kommenttien vaikutusta oppilaan tekemisiin. Näin koetetaan syventää kirjallisen aineiston analysoinnin perusteella syntynyttä kuvaa ongelmanratkaisun etenemisestä ja etsiä vastauksia tutkimusongelmiin.

Jo aineiston analysointi tutkimuksessa käytetyin menetelmin, on sinällään tulkittavissa tuloksiksi. Osioissa 5.2.1 & 6.2.1 esitetään tutkijan tulkinta oppilaan ajattelun polusta, niissä kuvataan ratkaisuprosessia, johon oppilas ja tutkija ovat vaikuttaneet. Tulkinta luo kuvan tietyn ratkaisutilanteen etenemisestä. Samalla on luontevaa vetää johtopäätöksiä tehdyistä löydöksistä ja analyysistä nousevista kysymyksistä. Tästä syystä pohdinta ja tulosten esittely sekoittuvat käsittelyn aikana.

Kaikki kaksitoista oppimistilannetta esitetään kokonaisuudessaan liitteessä (Liite 2). Kaikkien tilanteiden etenemisestä esitetään tutkijan tekemä tulkinta. Työn lukemisen helpottamiseksi tilanteet käsitellään ongelma kerrallaan. Lisäksi muutamia mielenkiintoisimpia tilanteita on käsitelty tarkemmin.

4.3 Tutkimuskysymykset ja niiden rakenne

Tutkimuksessa käytetty mittari koostuu kolmesta matemaattisesta ongelmasta. Ongelmat on valittu niin, että ne mahdollisimman hyvin soveltuisivat ratkaisuprosessin etenemisen tarkasteluun. Kuudesluokkalaisille on tehty ongelmanratkaisutaitoja mittaava tutkimus (Rantala 2002), jossa selvitettiin miten hyvin kuudesluokkalaiset osaavat ratkaista ongelmatehtäviä. Siksi hyödynsinkin tätä tutkimusta tehtävien valinnassa, sillä tutkimusongelmieni selvittämisen kannalta on tärkeää, että testi olisi vaikeustasoltaan kuudesluokkalaisille sopiva. Ongelmien on oltava riittävän haastavia niin, että oppilasjoukon ratkaisut hajautuisivat riittävästi. Toisaalta niiden ei saisi kuitenkin olla liian hankalia. Keskityn tutkimuksessani ongelmien solmukohtiin, jotka on ylitettävä ratkaisun saamiseksi. Siksi olisi tarpeen, että ongelmaa ratkaistessa oppilaalta vaaditaan jatkuvaa pohdintaa, ei vain yhtä heti alussa tulevaa oivallusta. Lisäksi on oletettavaa, että ratkaisupolut ovat mahdollisimman monipuolisia ongelmissa, jotka edellyttävät luovaa ajattelua. Tällaisia ovat avoimet ongelmatehtävät.

Hyödynsin Rantalan (2002) tutkimusta ongelmien valinnassa käyttäen sitä oikeastaan mittarin toimivuuden testaamisen asemesta. Valitsin ongelmat, joiden pistehajonta oli Rantalan (2002) tutkimuksessa suuri ja muutkin edellä esittelemäni kriteerit täyttyvät. Lopulta päädyin valitsemaan testiin kolme ongelmaa (liite 1).

Ensimmäinen ongelma on tyypillinen avoin ongelma. Se on Rantalan tutkimuksessa tehtävä A2. Myös Vaulamo ja Pehkonen ovat käyttäneet tehtävää tutkimuksissaan (1999) Muutin ongelmaa hieman ettei se olisi liian tuttu luokanopettajaopiskelijoille, jotka ovat saattaneet siihen opinnoissaan törmätä. Tutkimuksessa tätä ongelmaa kutsutaan välimatkaongelmaksi.

Toinen ongelma luonteeltaan suljettu ongelma. Rantalan tutkimuksessa se on tehtävä B3 (Rantala 2002). Siihen on löydettävissä ainoastaan yksi oikea ratkaisu, kuten kahteen edelliseenkin. Ratkaisu on mahdollista löytää rajatummalla määrällä keinoja, kuin ensimmäisessä ja kolmannessa ongelmassa, joissa erilaisia mahdollisia ajattelureittejä on useita. Toista ongelmaa kutsutaan ikäongelmaksi.

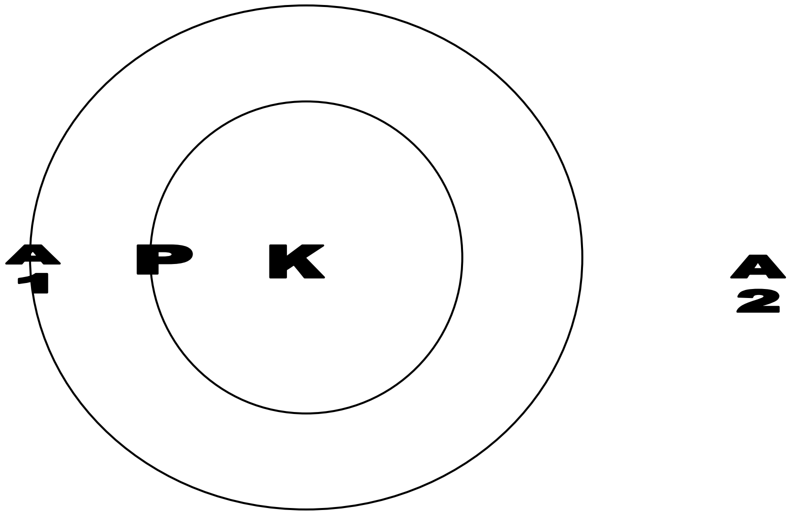
Testin kolmas ongelma on ensimmäisen kaltaisesti alkuasetelmaltaan avoin. Tosin tarkasti tulkittuna kumpaankin on olemassa oikeastaan vain yksi oikea ratkaisu. Rantalan testissä se on tehtävä B2 (Rantala 2002). Tämä ongelma on varsin pitkä ja sen ratkaiseminen oikein edellyttää oppilaalta määrätietoista, sinnikästä ja oman ratkaisun suhteen kriittistä pohdintaa. Ongelmaa kutsutaan siltaongelmaksi.

Tutkimukseni perustuu oppilaiden ratkaisujen laadulliseen analyysiin, ratkaisujen tulkintaan ja kuvailuun. Tästä syystä on tarpeen kuvailla mahdollisimman tarkasti, mitä oppilaan on tiedettävä kyetäkseen ratkaisemaan ongelmat. Esittelen siksi tulkintani asioista, jotka oppilaiden on ymmärrettävä löytääkseen oikean ratkaisun, jokaisen ongelman kohdalta.

On olemassa muutamia keskeisiä asioita, joiden on todettu haittaavan ongelman ratkaisua. Mosesin (1982) mukaan ratkaisumotivaatio ja lukemisen- ja luetun ymmärtämisen taidot ovat keskeisiä ratkaisuun vaikuttavia tekijöitä. Motivaation puuttuminen tai luetun ymmärtämisen vaikeudet haittaavat ratkaisua suuresti. Sanallisiin tehtäviin liittyviin vaikeuksiin ovat yhteydessä muun muassa ongelman matemaattis-looginen rakenne, opitut pinnalliset strategiat, tekstin ymmärtäminen ja oppilaiden uskomukset (Kinnunen & Vauras 1998, 276).

Kaikissa tutkimukseni ongelmatehtävissä oppilaiden on ymmärrettävä, ettei ongelmiin ole löydettävissä välttämättä ainoastaan yhtä selkeää oikeaa vastausta. Ensimmäisessä ongelmassa kysytään kuinka pitkä matka on Pasin ja Annin talojen välillä. Usein oppilaat ovat koulussa tottuneet siihen, että on olemassa ainoastaan yksi oikea vastaus. Siksi ongelma saattaa vaikuttaa epämääräiseltä, välttämättä kaikille ei ole heti selvää mitä kysytään. Pasin ja Annin talojen välille on lopulta löydettävissä ääretön määrä ratkaisuja, eli oikea ratkaisu on suljettu väli kahdesta kymmeneen kilometriin ([2,10]). Lyhimmillään matka voi olla siis kaksi kilometriä. ja pisimmillään kymmenen kilometriä. Myös kaikki matkat tältä väliltä ovat mahdollisia. Useimmat kuudesluokkalaiset joutuvatkin uudenlaisen tehtävän eteen. Heidän on luotettava omiin epäilyksiinsä ja tekemiinsä päätelmiin, vaikka tuntuisikin helpoimmalta todeta vain yksi selkeä vastaus. Äärentönhän on useimmille kuudesluokkalaisille vielä tuntematon käsite, eikä heille sellaisenaan olemassa oleva vaihtoehto.

Erilaiset mahdollisuudet Pasin ja Annin kotien paikoiksi näkyvät kuvasta 2. Pasi voi asua neljän kilometrin ja Anni kuuden kilometrin päässä koulusta. Erilaiset vaihtoehdot muodostavat siis ympyräkuviot, joissa koulu (K) on ympyrän keskipiste ja etäisyys koulusta on ympyrän säde. Lyhin mahdollinen välimatka (2km) on jana [A1, P] ja pisin välimatka (10km) on pisteiden [P, A2] väli. Pasin talon paikka merkitään P-kirjaimella. Siihen nähden mahdollisimman läheinen Annin talon paikka on merkitty A1–tunnuksella ja kaukainen tunnuksella A2. Kaikki muut vaihtoehdot talojen välimatkaksi ovat siis tältä väliltä. Kuvan piirtäminen johtaa tässä ongelmassa varsin suoraan oikeaan ratkaisuun. Etenkin se auttaa ratkaisijaa huomaamaan useiden vastausvaihtoehtojen olemassaolon.



Kuva 2. Ensimmäisen ongelman ratkaisu: Vaihtoehdot Pasin ja Annin talojen paikoiksi. (K= koulu, A= Annin talo, P= Pasin talo)

Ikäongelmassa (liite 1) ratkaisijan on kyettävä käsittelemään lasten ikää, jota ei ole konkreettisesti kerrottu, vaan on ainoastaan annettu vihjeitä, joiden perusteella ne pitäisi ratkaista. Ikäongelman ratkaiseminen edellyttää erityisen hyvää ymmärtävää lukutaitoa ja rohkeaa koulumatematiikalle epätyypillistä kokeilemista. Tehtävässä annetut oletukset toteutuvat ainoastaan Pekan ollessa kymmenen ja Saijan viisi vuotta vanha.

Oikea ratkaisu on mahdollista löytää kokeilemalla erilaisten vaihtoehtojen toimivuutta, tai suoraan laskemalla. Oikea ratkaisu saadaan esimerkiksi yhtälöstä

$(2x) – 4 = (x– 4)*6$

$\Leftrightarrow 2x – 4 = 6x – 24$

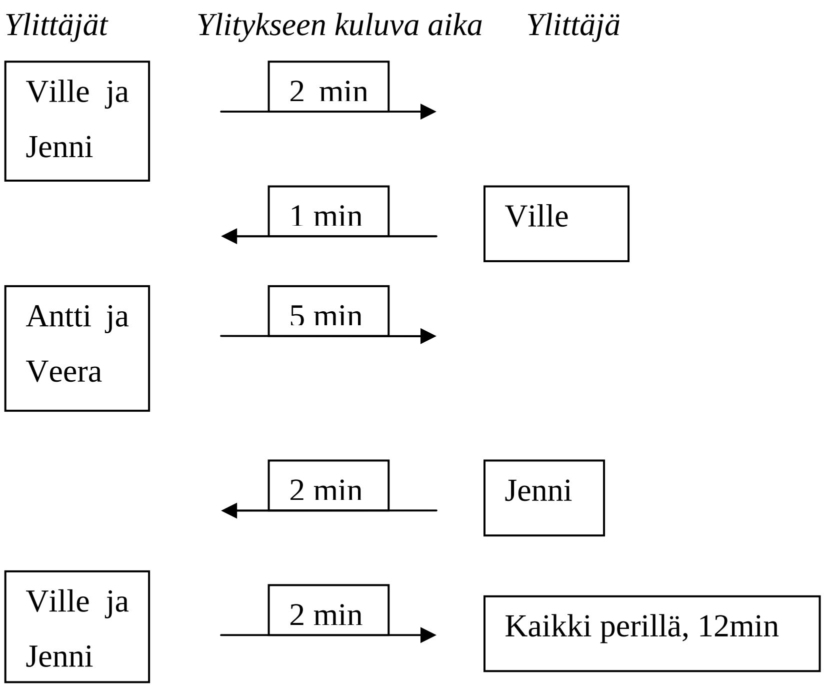
$\Leftrightarrow 4x=20$

$\Leftrightarrow x=5$,

missä Saijan ikää merkitään x- kirjaimella. On selvää, ettei useimmilla kuudesluokkalaisista ole valmiuksia tällaisen yhtälön muodostamiseen. Tällaisessa tilanteessa tehtävän ratkaiseminen onkin tyypillistä luovaa ongelmanratkaisua. Oppilaan on tarkasteltava erilaisia vaihtoehtoja ja muodostettava sen perusteella jokin ratkaisustrategia. Strategian ei välttämättä tarvitse heti aluksi olla oikea, sillä puutteellista suunnitelmaa voi korjata ja kehittää. Oikea ratkaisutapa saattaa löytyä näiden kokeilujen perusteella.

Kolmas ongelma, eli siltaongelma on haastava niin ratkaisijalle, kuin tutkijallekin. Ratkaisuprosessi on monivaiheinen ja edellyttää ratkaisijalta hyvää ymmärtävän lukemisen taitoa ja etenkin toisesta tehtävästä poiketen selkeää ratkaisustrategiaa. Silta on mahdollista ylittää nopeimmillaan kahdessatoista minuutissa. Mielenkiintoista on se, että kahdentoista minuutin ratkaisuun voi päätyä niin oikeiden, kuin väärienkin päätelmien perusteella. Kolmetoista minuuttia vaikuttaa esimerkiksi luokanopettajien ratkaisujen perusteella todennäköisimmältä ratkaisuvaihtoehdolta.

Siltaongelman ratkaisijan tulee aluksi keksiä keino, miten palauttaa lamppu takaisin lähtöpuolelle. Ongelman avoin asettelu mahdollistaa erilaisten palautustapojen pohdinnan. Erilaisten apuvälineiden käyttöä ei ole kielletty, joten järkevästi perusteltuna niitä voidaan käyttää lampun palauttamiseksi. Aukoton perustelu apuvälineiden käytössä ei ole kuitenkaan helppoa ja siksi haastattelutilanteissa oppilaiden jumiuduttua pohtimaan esimerkiksi köyden hyödyntämistä ylityksessä, pyrin ohjaamaan heidän ajatteluaan ratkaisuun, joka on täsmällisesti toteutettavissa tehtävässä esiintyvien oletusten avulla. Koska silta on 150 metriä pitkä ei kukaan henkilöistä voi palauttaa lamppua heittämällä. Siksi lampun kuljettaminen takaisin on ainoa täsmällisesti ratkaistavissa oleva vaihtoehto. Ville valitaan luontevasti usein palauttajaksi, koska hän ylittää sillan nopeimmin. Tämä vaihtoehto johtaa kolmentoista minuutin vastaukseen. Kahdentoista minuutin ratkaisussa Ville ei aina palauta lamppua. Ratkaisijan tulee ymmärtää, että hitaimpien, Antin ja Veeran, olisi ylitettävä silta yhdessä. Siltaongelman omalaatuisuus johtaa analysoinnissa mielenkiintoisiin haasteisiin. Oikea ratkaisu on luettavissa kuvasta 3.



Kuva 3. Kolmannen ongelman oikea ratkaisu.

4.4 Tutkimuksen luotettavuus

Käsittelen tässä luvussa lyhyesti tutkimuksen luotettavuutta. Otan siihen liittyviin tilanteisiin kantaa myös tutkimuksen analysointivaiheessa tilanteissa, joissa tähän on luontevaa puuttua.

Validiteetillä tarkoitetaan luotettavuutta siinä mielessä, tutkitaanko sitä mitä on tarkoitus tutkia. Validiteetti voidaan jakaa ulkoiseen ja sisäiseen validiteettiin. Ulkoisella validiteetillä tarkoitetaan sitä, onko tutkimus yleistettävissä, ja jos on, niin mihin ryhmiin. Sisäinen validiteetti tarkoittaa tutkimuksen omaa luotettavuutta. Siihen kuuluu muun muassa käsitteiden hyvyys, teorian sopivuus, mittarin muodostaminen ja mittauksen virhelähteet. (Metsämuuronen 2003, 35).

Tutkimuksen testikysymykset on valittu huolella. Niiden valinnan perustana toimii Rantalan pro gradu –tutkielma, josta selviää miten hyvin kuudesluokkalaiset ovat osanneet testiin valitut ongelmat ratkaista. Hyödyllisimpiä tutkimukseni kannalta ovat ongelmat, joissa oppilaiden saavuttama pistehajonta on suuri ja vaikeustaso on riittävän kova. Testikysymykset soveltuvat ongelmanratkaisuprosessin tutkimiseen hyvin. Kuitenkin kysymysten vähäinen määrä alentaa luotettavuutta. Voisi olla mahdollista, että osa tutkimuksen kohdejoukon oppilaista on aiemmin ratkaissut ongelman, mikä saattaa vääristää tuloksia. Luokkien opettajat sanoivat, etteivät ole käyttäneet testin ongelmia luokassa kysyessäni tätä testin tekemisen jälkeen.

Tutkimuksen luotettavuuden kannalta on tärkeää huomioida tutkimuksen tarkoitus. Tutkimuksessa selvitettiin ongelmanratkaisuprosessin etenemistä ja opettajan vaikutusta ratkaisuihin. Tutkimusasetelmassa aluksi etsittiin kirjallisten ratkaisujen perusteella solmukohtia. Niiden etsimisessä ja ongelmien luonteen selvittämisessä apuna käytettiin luokanopettaja opiskelijoiden ratkaisuja. Näin saatiin parempi kokonaiskuva erilaisista ajattelutavoista. Oppilaiden kanssa käydyt haastattelut tehtiin samaan aikaan kirjallisten ratkaisujen teon kanssa, etteivät tutut oppilaat kertoisi ajatuksiaan ongelmista toisilleen. Tämä johti kuitenkin siihen, että solmukohdat eivät olleet tiedossa haastattelun aikana. Tämän voidaan katsoa vaikuttavan luotettavuuteen monessakin suhteessa. Mikäli solmukohdat olisivat olleet tiedossa, niitä olisi voitu määrätietoisemmin testata. Toisaalta keskustelutilanteet etenivät oppilaskeskeisemmin, kun toimintaa ei ohjannut ulkoinen pyrkimys ennalta muokattujen asioiden testaamiseen. Käytetty työtapa korostaa keskustelutilanteen koulumaisuutta, aitoa oppimistilannetta, jota halusinkin tutkia.

Reliabiliteetti viittaa tutkimuksen toistettavuuteen, eli saataisiinko samanlaisia tuloksia mitattaessa ilmiötä monta kertaa samalla mittarilla (Metsämuuronen 2003, 43). Kirjalliset ratkaisut luokiteltiin oppilaiden tehtävän ymmärryksen tason mukaisesti. Tämä menettely korostuu siltaongelman analysoinnissa. Ensimmäisessä ongelmassa solmukohtia etsittiin ongelman luonteen vuoksi lähinnä oppilaiden ratkaisujen tason mukaan. Siltaongelman analysointiin ja mittarin käyttöön sisältyy enemmän tutkijan omaa tulkintaa. Tällöin reliabiliteetti laskee. Apuna käytetyt opiskelijoiden ratkaisut luovat paremman kokonaiskuvan erilaisista ratkaisustrategioista, mikä parantaa reliabiliteettiä. Yleisesti voidaan kuitenkin sanoa, että tutkimus on varsin spesifi ja mittarin käyttöön sisältyy paljon tulkintaa. Useaan kertaan ja erilaisin perustein tehty luokittelu osoittaa mittarin ongelmat hyvissä ajoin, siksi reliabiliteetin voi arvioida kohtuulliseksi.

5. VÄLIMATKAONGELMA

Välimatkaongelman analysointi on kaksivaiheinen. Aluksi selvitän tutkimuksen pääjoukon tekemän kirjallisen testin perusteella, miten pitkälle oppilas on ongelman kyennyt ratkaisemaan tai siis millaiseen solmukohtaan hän on juuttunut. Samalla huomioin, miten oppilas on ratkaisuunsa päätynyt. Tämän jälkeen tarkastelen tekemieni haastattelujen perusteella, miten oppilaat ovat kyenneet ratkaisemaan ongelman vuorovaikutuksessa kanssani. Selvitän millaisten vinkkien avulla oppilaat ovat kyenneet etenemään aiemmin ilmenneiden hankalien kohtien yli. Tässä on avainasemassa oppilaan ja tutkijan välisen dialogin ja oppilaan ajatusten perusteella muokkaantuneen ratkaisureitin jäljentäminen. Sen perusteella pohdin, miten oppilaan ongelmanratkaisuprosessia voi edistää.

5.1 Kuudesluokkalaisten kirjalliset ratkaisut

Työtapa ratkaisujen analysoinnissa on laadullinen. Analysoinnin aluksi kävin vastaukset läpi useaan kertaan ja kirjasin ylös millaiseen ratkaisuun oppilaat ovat päätyneet, sekä miten he ovat ongelman ratkaisseet. Tämän jälkeen kokosin yhteen samankaltaisia ratkaisuja. Ryhmiin jakamisen perustana pidin aluksi ongelman ymmärtämistä. Sopiva menetelmä ymmärtämisen tason arviointiin on Charlesin, Lesterin ja O´Dafferin (1990) kehittämä ongelmien analyyttinen pisteytys. He pisteyttävät ongelmanratkaisuprosessin vaiheittain. He ovat jakaneet ongelman ratkaisun kolmeen osaan. Ratkaisun vaiheita ovat tehtävän ymmärtäminen, ratkaisun suunnittelu ja vastauksen saaminen. Jokainen ratkaisun vaihe arvioidaan nollan, yhden tai kahden pisteen arvoiseksi. Oppilas on ymmärtänyt tehtävän kahden pisteen arvoisesti, jos tehtävä on ymmärretty täysin oikein. Arvioksi tulee yksi piste, kun osa tehtävästä on ymmärretty väärin. Täysin väärin ymmärretty tehtävä antaa nolla pistettä. Ratkaisun suunnittelu on kahden pisteen arvoista, mikäli ratkaisu oikein suoritettuna johtaisi oikeaan tulokseen. Osittain oikea, oikeaan tulkittuun tehtävän osaan pohjautuva ratkaisu antaa yhden pisteen. Nolla pistettä ratkaisun suunnittelusta saa, mikäli ratkaisu on tehtävään täysin soveltumaton. Kolmannessa vaiheessa arvioidaan vastauksen saamista skaalalla nollasta kahteen. (Charles, Lester & O´Daffer 1990, 30).

Myös TIMSS –tutkimuksissa vuosina 1995 ja 1999 on käytetty avoimien ongelmatehtävien pisteytyksessä diagnostista koodausta. Koodaus perustuu oppilaiden autenttisille vastauksille. Arviointiskaala on Charlesin ym. luokituksen tavoin nollasta kahteen pistettä. Ratkaisuista eroteltiin vastauksen lisäksi ratkaisutapa. (Kupari, Reinikainen, Nevanpää & Törnroos 2001, 31-32).

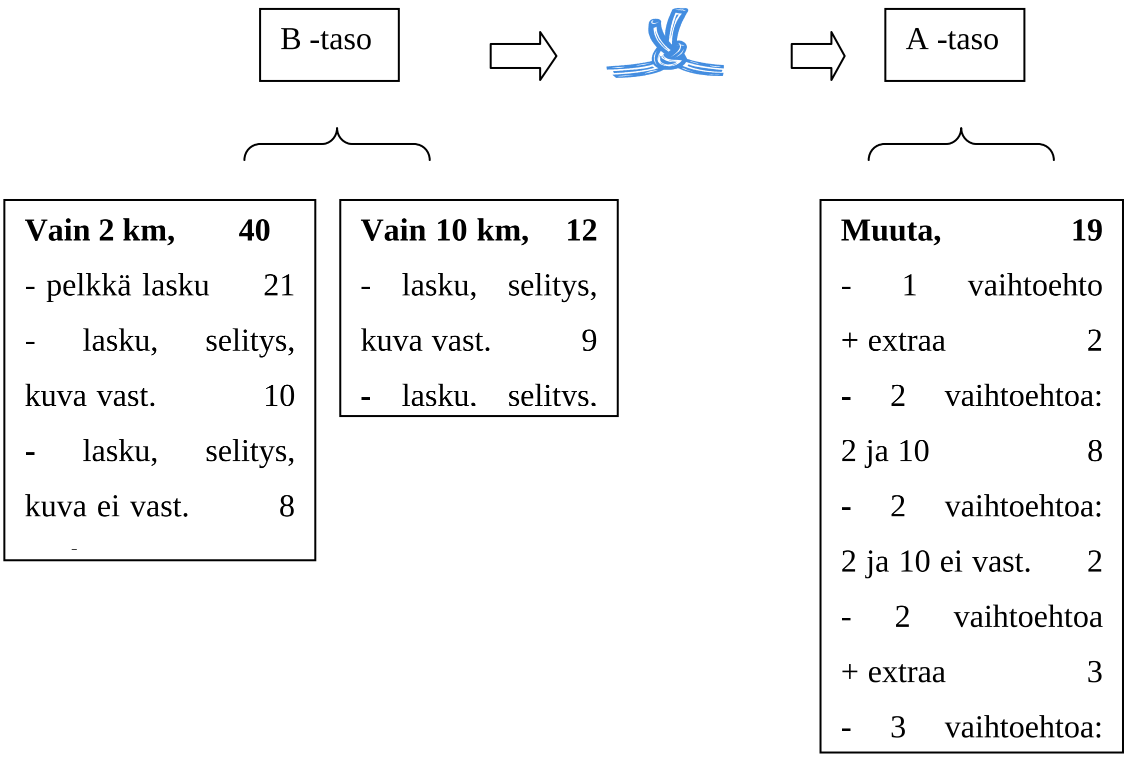
Charlesin ym. (1990) ja TIMSS –tutkimuksissa käytetty ongelmanratkaisun vaiheittaisuuteen perustuva pisteytys on kattava. Kuitenkin vaikuttaa ilmeiseltä, että tehtävän perimmäisidean ymmärtäminen korostuu avoimien ongelmatehtävien ratkaisussa. Hyvä ja selkiintynyt tehtävän ymmärtäminen ohjaa ratkaisua koko prosessin ajan. Tästä syystä aloitan ratkaisun etenemisen kartoittamisen ymmärtämisen tason arvioinnilla. Charlesin ym. analyyttinen pisteytys kokonaisuudessaan kuvaa ratkaisijan heikkouksia ja vahvuuksia ja ratkaisun tasoa (Charles, Lester ja O´Daffer 1990, 33). Tämä ei kuitenkaan minun tutkimuksessani ole tarkoituksena ja siksi pisteytyksen hyödyntäminen kokonaisuudessaan ei ole järkevää, vaan keskityn ainoastaan tehtävän ymmärtämisen arviointiin.

Olen hyödyntänyt Charlesin ym. (1990) analyyttistä pisteytystä tehtävän ymmärtämisen osalta lähinnä perustana ratkaisujen luokittelussa. Päädyin lopulta luokittelemaan ratkaisut pelkän ymmärtämisen tason sijaan vastauksen ja siihen edetyn reitin perusteella. Kognitiivisten toimintojen havaitseminen ja niiden luokittelu ei ole ongelmatonta. Siksi onkin tarpeen käyttää luokittelussa kaikki käsillä oleva tieto. Tehtävän ymmärtämisen taso ilmenee oppilaiden ratkaisuista, kaikista heidän tekemistään merkinnöistä. Kuudesluokkalaiset eivät kirjoittaneet ajatteluaan paperiin niin vuolaasti, kuin toivoin. Tämän takia ongelman ratkaisuprosessi on havaittavissa lähinnä oppilaiden kirjoittamasta vastauksesta. Kuitenkin monissa papereissa oppilaat olivat piirtäneet kuvia ja kuvailleet ajatteluaan sanoinkin. Kaikki nämä merkinnät on tarpeen huomioida analysoinnissa.

Päädyin lopulta luokittelemaan ratkaisut kolmeen pääryhmään. Luokat kuvaavat lähinnä ratkaisua, jonka oppilaat ovat saaneet. Tehtävän ymmärtäminen on kuitenkin luottavissa näistäkin ryhmistä. Vain 2 km ja vain 10 km–ryhmissä oppilaan ongelman ymmärrys on heikompaa, kuin muuta –ryhmän ratkaisuissa. Olen lisäksi kirjannut, miten oppilas on päätynyt ratkaisuunsa, onko hän piirtänyt kuvia, kirjoittanut ajatuksiaan ja onko näissä mahdollisesti ristiriitaisuuksia. Nämä ovat kolmen pääluokan alapuolisia, ratkaisutapaa ja ajattelureittiä kuvailevia ryhmiä. Esimerkiksi piirretyn kuvan ja vastauksen välisestä ristiriidasta voi joissain tilanteissa päätellä oppilaan ajattelusta jotain sellaista mikä ei suoraan ilmene vastauspaperista. Siksi näiden alaluokkien huomioiminen on tärkeää. Olen koonnut ensimmäisen tehtävän ratkaisujen luokittelun oheiseen taulukkoon (Kuva 4). Siitä ilmenee myös samankaltaisten ratkaisujen määrä. Vain 2 km –ryhmän alapuolisia selittäviä ratkaisuluokkia on neljä ja vain 10 km –ryhmän alapuolisia luokkia kaksi. Luokissa on kuvailtu, miten oppilaat ovat päätyneet ratkaisuihinsa. Pelkkä lasku -luokassa ratkaisupapereihin oli kirjoitettu ainoastaan laskutoimitus 6 – 4 = 2. Seuraavissa kahdessa luokassa paperissa oli laskutoimitus, kirjoitettu selitys ja kuva. Luokassa ”lasku, selitys, kuva vast.” näiden välillä ei ollut mitään ristiriitaa, vaan toteutettu ratkaisu oli suunnitelman kaltainen. ”Lasku, selitys, kuva ei vast.” –luokka tarkoittaa, että kuva tai selitys ei vastaa laskutoimitusta.

Aiemmin esittelemieni luokkien lisäksi myös muuta –ryhmässä on kategoria, jossa vastauksessa on löydetty ainoastaan yksi vaihtoehto äärettömästä määrästä mahdollisia ratkaisuja. Siinä kuitenkin oppilaat ovat osoittaneet lisäpohdinnallaan, ettei yksi vaihtoehto ole riittävä. Seuraavissa kahdessa muuta –ryhmän luokassa oppilas on löytänyt mahdollisiksi ratkaisuiksi kaksi ja kymmenen kilometriä. Näistä jälkimmäisessä luokassa oppilaan piirtämä kuva tai hänen selityksensä eivät vastaa laskutoimituksia, eli niissä on jotain ristiriitaista. ”Kaksi vaihtoehtoa + extraa” –ryhmän ratkaisuissa on jälleen lisäpohdintaa, joka osoittaa ymmärryksen tason olevan suurempi kuin ratkaisuissa, joissa on löydetty ainoastaan kahden ja kymmenen kilometrin vastaukset. ”3 vaihtoehtoa: 2, 10 ja 90 ast.” –vastaus on erotettu omaksi ryhmäkseen, ja se tarkoittaa tilannetta, jolloin oppilas on osannut sijoittaa talot kolmeen eri asemaan. Saman kadun varrelle, jolloin välimatka on kaksi kilometriä. Koulun vastakkaisille puolille, jolloin välimatka on kymmenen kilometriä ja 90 asteen kulmaan. Tarkoitan 90 asteen vaihtoehdolla tilannetta, jolloin Pasin ja Annin koulureittien jäljet leikkaavat toisensa suorassa kulmassa. Tämä vaihtoehto osoittautuu myöhemmässä analyysissä tärkeäksi väliportaaksi vastausten 2 ja 10, sekä [2,10] välillä.

Olen koonnut kuvaan 4 luokittelun, josta näkyy ymmärryksen tason lisäksi ongelman keskeisimmät solmukohdat. Erityisesti olen korostanut siirtymistä yhden mahdollisen ratkaisun olemassaolosta useamman mahdollisen ratkaisun olemassaoloon. On tärkeää huomioida vielä erikseen, että kuvasta on luettavissa kuinka pitkälle kuudesluokkalaiset ovat osanneet edetä ratkaisuissaan ilman ulkopuolista apua ratkaisutilanteessa. Siksi esimerkiksi jokaisen muuta –ryhmän alaluokan välillä on solmukohta. Oppilas, joka on löytänyt kolme mahdollista ratkaisua, on lähempänä oikeaa ratkaisua kuin kaksi vaihtoehtoa löytänyt oppilas. Kaksi vaihtoehtoa löytäneen oppilaan ajattelutapa saattaa olla merkittävästi erilainen kuin kolme vaihtoehtoa löytäneen. Ennen kaikkea jatkossa tapahtuvan analysoinnin kannalta on tärkeää huomioida alaluokat erikseen.



Kuva 4. Kuudesluokkalaisten kirjalliset ratkaisut ensimmäiseen ongelmaan. Ratkaisujen luokittelu ja solmukohdat.

Jatkossa tapahtuvan analysoinnin helpottamiseksi nimeän muuta –ryhmän ratkaisut A –tasoisiksi. Tämä tarkoittaa sitä, että ongelman ymmärrys on oppilailla ollut A –tasoista. Edelleen olen nimennyt vain 2, sekä vain 10 –ryhmien ymmärryksen B –tasoiseksi. On huomattava, että A –tasoinen tehtävän ymmärtäminen ei tarkkaan ottaen ole samantasoista eri ratkaisuja vertaillessa. Yhdeksästätoista A –tasoisesta vastauksesta osassa ongelma on ymmärretty täysin oikein ja muutamassa on osattu ainoastaan sanoa vaihtoehtoja olevan enemmän kuin yksi. Tästä jaosta tulee kuitenkin selkeästi esiin tärkeimmäksi osoittautunut ongelman solmukohta, a –tasoisissa ratkaisuissa on kyetty havaitsemaan useamman kuin yhden mahdollisen ratkaisun olemassaolo.

5.1.1 Solmukohdat

Ratkaisuista yhteensä 52:ssa (52/72) oli päädytty ratkaisuun, jossa on vain yksi vaihtoehto Pasin ja Annin talojen välimatkaksi. Talojen välimatkaksi oli ilmoittanut kaksi kilometriä 40 oppilasta (40/72) ja kymmenen kilometriä 11 (11/72) oppilasta. Kahteen kilometriin päätyneistä noin puolet (21/40) oli merkinnyt ratkaisupaperiin ainoastaan laskutoimituksen 6-4=2. Laskua vastanneen kuvan oli ensimmäisen ryhmän ratkaisuista piirtänyt 10 (10/40) oppilasta ja jollain tavalla ristiriitaisen kuvan 8 (8/40) oppilasta. Toisen ryhmän, eli vain 10 –ryhmän vastauksista kaikki olivat piirtäneet laskun lisäksi kuvan, joista 9:ssa (9/12) kuva vastasi laskua ja 3:ssa (3/12) niissä oli jokin ristiriitaisuus.

Kolmannen, eli muuta –ryhmän ratkaisuja on yhteensä 19 (19/72). Kolmetoista (13/72) oppilasta on löytänyt kaksi mahdollista ratkaisua. Heistä kolme on lisäksi pohtinut ongelmaa pidemmälle. Täysin oikean ratkaisun on kyennyt antamaan vain yksi oppilas.

Ratkaisuista on havaittavissa muutama selkeä solmukohta, eli kohta jossa oppilas on lopettanut ratkaisemisen. 21 oppilasta on ainoastaan vähentänyt näkemänsä luvut toisistaan, eikä oikeastaan ole tutkijalle osoittanut aloittaneensakaan todellista pohdintaa. Syitä siihen, että oppilas toimii näin voi olla useita. Hän on saattanut tottua koulussa tekemään sanallisista tehtävistä selkeästi havaittavissa olevilla luvuilla joitain tuttuja laskutoimituksia, tässä vähennyslaskun. Kun toisaalta tuloskin saattaa vaikuttaa tyydyttävältä jää ratkaiseminen siihen. Toisaalta ongelma saattaa olla liian haastava ja vähennyslasku on aidosti ainoa toimenpide, jonka oppilas ongelman ratkaisemiseksi osaa tehdä.

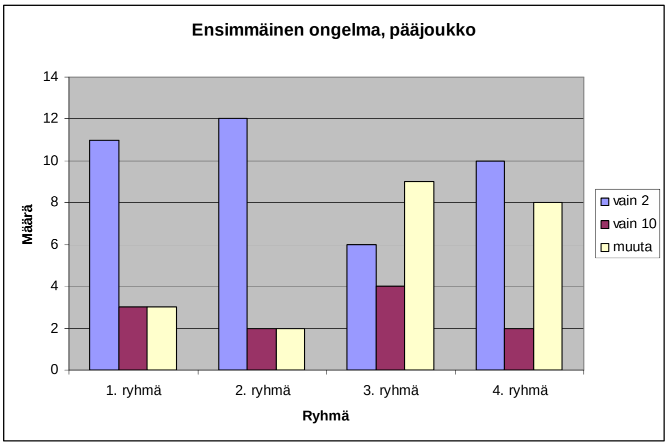
Useista ratkaisuista käy ilmi, etteivät oppialat ole tottuneet siihen, että ratkaisuja saattaa olla useampikin kuin yksi. Ainoastaan 19 oppilasta 72:stä on päässyt etenemään siihen voisiko vaihtoehtoja olla enemmänkin. Tässä näkyy selkeästi ensimmäisen ongelman suurin solmukohta, useimpien oppilaiden ratkaiseminen loppuu tähän. Tässä vaiheessa, kirjallisten ratkaisujen perusteella ei voi ottaa kantaa siihen kuinka monella oppilaalla on ylipäänsä edellytyksiä syvempään pohdintaan, voidaan ainoastaan todeta 51:n oppilaan löytäneen pelkästään yhden ratkaisun.

Oppilaista 13 on päätynyt toteamaan, että vaihtoehtoja talojen välimatkaksi on kaksi. Kaikki kaksi vaihtoehtoa antanutta kertoivat ratkaisumahdollisuuksien olevan kaksi ja kymmenen. Ne ovat täydellisen ratkaisun, eli välin [2,10] päätepisteet. Vielä oleellinen asia oikean ratkaisun löytymisen tiellä on ymmärtää, että kahden ja kymmenenkin lisäksi vaihtoehtoja voi olla lisää.

Taulukosta 1 on siis nähtävissä millaisiin ratkaisuihin oppilaat ovat päätyneet. Etenkin kolmannen, eli muuta –ryhmän alaluokat ovat mielenkiintoisia tutkimuksen jatkon kannalta, sillä tarkemman seurannan tai siis haastattelujen perusteella on nähtävissä, millaiset vinkit ovat johtaneet parempaan ymmärtämiseen.

5.1.2 Ryhmien vertailu

Ratkaisuja analysoidessa on huomioitava varsin suuret erot testiin osallistuneiden oppilasryhmien välillä. Neljä ryhmää jakautuvat oikeastaan kahteen osaan niin, että ensimmäinen ja toinen ryhmä ovat keskenään saman kaltaisia, samoin kuin kolmas ja neljäs. Ongelman ymmärtäminen on selkeästi paremman tasoista kolmannessa ja neljännessä ryhmässä verrattuna ensimmäiseen ja toiseen ryhmään. Tämä käy ilmi verratessa ryhmien vastauksia keskenään. Toisessa ryhmässä on ainoastaan kaksi a -tason mukaista ratkaisua ja 14 ratkaisua, joissa on löydetty vain yksi vaihtoehto. Toisaalta kolmannen ryhmän oppilaista yhdeksän on löytänyt a –tason vastauksen ja kymmenen oppilaan ratkaisussa on ainoastaan yksi vaihtoehto.



Kuva 5. Kuudesluokkalaisten ratkaisut ensimmäiseen ongelmaan ryhmittäin.

Pääjoukon ratkaisuista kootut tulokset näyttäisivät hyvin erilaisilta, mikäli tutkimuksen kohdejoukkona olisi ainoastaan kolmannen ja neljännen oppilasryhmän oppilaiden ratkaisut, tai toisaalta ensimmäisen ja toisen ryhmän oppilaat. Kolmannen ja neljännen ryhmän ratkaisuista 44% (17/39) on a –tasoisia. Heistä siis lähes puolet on ymmärtänyt, että ongelmalla voi olla useita ratkaisuja. Vertailtaessa tätä ensimmäisen ja toisen oppilasryhmän tekemiin ratkaisuihin ero on huomattava. Niistä ainoastaan 15% (5/33) on a –tasoisia. Lisäksi on huomattava, että kaikissa a –tasoisissa ensimmäisen ja toisen oppilasryhmän ratkaisuissa on havaittu ainoastaan vaihtoehdot kaksi ja kymmenen kilometriä. A –tasoisista ratkaisuista kaikki, joissa on todettu olevan enemmän kuin kaksi vaihtoehtoa tulevat kolmannesta ja neljännestä oppilasryhmästä.

Erot ongelman ymmärtämissä ryhmien välillä ovat selkeitä. Siksi onkin lyhyesti syytä pohtia, mistä tämä johtuu. Kaikki oppilasryhmät saivat samat ohjeet (Liite ?) ja yhtä paljon aikaa. Lisäksi testi tehtiin saman päivän aikana jokaiselle ryhmälle, joten näiden ulkoisten tekijöiden vaikutus tuloksiin on pieni. Suurin erottava tekijä ryhmien välillä on opetus. Kaikilla ryhmillä on samankaltainen opetussuunnitelma ja käytössään sama matematiikan oppikirjasarja, mutta kuitenkin opettajan tekemät painotukset ja valinnat opetuksessaan ohjaavat työskentelyä tästä huolimatta. Vaikuttaa siltä, että kolmannen ja neljännen ryhmän oppilaat ovat tottuneempia ongelmanratkaisijoita. Ongelmanratkaisukokemus vaikuttaa merkitsevästi ratkaisemisen oppimiseen (Sorvari 1999, 149). Lisäksi ratkaisupapereiden kirjoituksissa oli merkittävä ero ryhmien välillä. Ensimmäisen oppilasryhmän ratkaisuista yli puolessa (9/17) oli päädytty tulokseen pelkän laskun perusteella. Luokassa omaksutun työtavan vaikutus tuloksiin tämän kaltaisessa ratkaisujen analysoinnissa on suuri.

5.2 Kuudesluokkalaisten haastattelut

Ensimmäisen ongelman analysoinnissa halusin ennen kaikkea etsiä selvitystä seuraaviin kysymyksiin: Millaisiin solmukohtiin tehtävissä oppilaat jumiutuvat? Miten he toimivat näissä tilanteissa? Millaisia tietoja niillä oppilailla on enemmän, jotka ovat selvittäneet solmukohdat? Onko heidän ajattelussaan jotain yhteistä? Millaiset tiedot tai ajattelutavat/suunnat avittavat ratkaisemista? Millaiset tekijät (kysymykset, painotukset, asenteet, tavat) ohjaavat hyvää ongelmanratkaisua? Miten opettajana voin avittaa ongelmanratkaisua?

Olen nimennyt ratkaisutilanteessa esittämäni vinkit ja kysymykset lyhennyksillä. Tämän on tarkoitus helpottaa ratkaisutilanteen jäljentämistä, sekä lyhentää ja selkiyttää kuvailuja. Tärkeimmät ratkaisutilanteessa käyttämäni vinkit ja kysymykset:

K1= Kuinka pitkä matka Pasilla on Annin luo?
K2= Onko muita vaihtoehtoja?
K3= Voiko Anni asua muualla?
K4= Voiko (Anni tai Pasi) asua tässä? (kuvasta tietty kohta)
K5= Matkan pituus: Voiko olla lyhempi kuin 2km tai pidempi kuin 10km?

5.2.1 Tulkinta ratkaisujen etenemisestä

Seuraavassa olen kirjoittanut tulkintani ratkaisemisen etenemisestä. Muutamassa olen jatkanut pohdintaa enemmänkin. Olen pyrkinyt valitsemaan tarkemman selityksen kohteiksi mielenkiintoisimmat ja antoisimmat ratkaisutilanteet. Keskustelut ovat kokonaisuudessaan liitteenä (liite 2).

Olen nimennyt oppilaat uudelleen niin, ettei heitä voi yhdistää alkuperäisiin henkilöihin. Mielenkiintoisimmista ajattelun kuvauksista olen jatkanut pohdintaa kuvailun ohessa. Yksi seurantatilanne on tekstissä mukana helpottaakseen lukijaa analysointitavan ymmärtämisessä. Lukemisen helpottamiseksi palautan mieleen ensimmäisen ongelman asetelman.

Pasi ja Anni käyvät samaa koulua. Annin koulumatka on 6 kilometriä ja Pasin 4 kilometriä. Kuinka kaukana toisistaan he asuvat?

T: *Nyt sitte toiset, oot merkinnyt matkat, mitäs sitte?*
Lupu: *Pitäskähän ne miinustaa, eiku ei siitä tiä kuinka kaukana …jooo kymmenen*
T: *10km päässä, joo kirjota siihen että kymmenen. Siinä on paljon tilaa, koko iso lappu.*
Lupu: *Saako tähän sitte kirjottaa se vastaus?*
T: *Joo, ja voit sanoakin samalla niin mä kuulen.*
Lupu: *Tuota niin ne asuu samas koulus niin täältä on 4km emsin sinne koululle ja kuusi kilometriä sinne Annille, niin se matka on sitte kymmenen km sinne Pasille.*
T: *Joo se pitää paikkansa … .. joo siinä oli vastaus (kirjoitti)*
Lupu: *Ja sitte kakkonen.*
T: *Tuota katotaan viä sitä ykköstä, mitäs jos tuo Pasi, kun se lähtee tuonne Annin luo, menee vaikka käymäs siä pelaamas jotain, futista tai jotain, minkä takia se kävelee ton koulun kautta?*
Lupu: *Se tuota, niin joo, jos niinku asuu sieltä Pasin tyköä niinku vaikka toisaalla se ei välttämättä..*
T: *Jos sä oisit tämä Pasi tässä niin lähtisitkö Annille koulun kautta, siis jos sä haluat Annille mennä.*
Lupu: *Niin ei välttämättä, elikkä se vois mennä, jos se menee koulun kautta sitte se on ainakin kymmenen.*
T: *Se pitää paikkansa.*
Lupu: *Mutta jos niinku, sehän voi olla tietenkin niinkin että se asuu vain kaksi kilometriä tästä näin ja sen matkan sitte tuos.*
T: *Niin voi hyvä eli se voi olla myös kaks kilometriä se matka.*
Lupu: *Niin, jos se asuu täällä(näyttää oikein).*
T: *Hyvä, joo jos ei oo pakko kulkea koulun kautta, niin osaakko sanoa että kuinka pitkä se matka voi olla?*
Lupu: *Jos se menöö tästä? Ei mee koulun kautta jostakin muualta*

T: *Niin no tietenkin jos se lähtee tänne kävelemään ihan ympäri.. kaks kilometriä se voi olla jos ne asuu samalla suunnalla.*

Lupu: *Eli täällä?*

T: *Joo.*

Lupu: *Sitte, senki sitte jos menee koulun kautta niin on kymmenen, mutta jos se..*

T: *Jos se menis tästä suoraan, kuinka pitkä se sitte ois?*

Lupu: *Suoraan?*

T: *Niin jos se menis täältä, pasi menis ihan suoraan annin luo täältä(kulma90-180)*

Lupu: *Tästä? (näyttää)*

T: *Niin oisko se pitempi vai vähemmän ku 10?*

Lupu: *Se vois ehkä olla vähän vähemmän ku se tavallaan menöö linnuntietä.*

T: *Pitää paikkansa.*

Lupu: *Koska se menöö aiva suoraan niin linnuntietä on lyhyempi.*

T: *Hyvä, no entä sitte?*

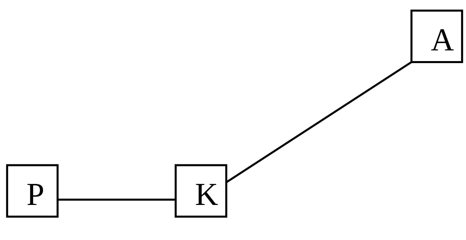
Lupu: *Nii ja vaikiakulukuusempi..*

T: *Nii voi no voiko se matka olla pitempi ku 10 km.*

Lupu: *Jos se menöö tätä reittiä – niin no – no voi se oikeen harhaalee tai sitte vetää oikeen jostaki..*

T: *No jos sovitaan että se menee kaikista suorinta reittiä, vaikka kaikkien peltojen yli ja kaikkien.. voiko se olla yli 10km?*

Lupu: *Hmm, noperiaattees voi, tai no ei, jos se menee tota vaikiampaa että pitää kääntyyllä niin sehän on sitte kymmenen, jos se menee suorinta niin ei se voi oikeen mennä sen 10 yli.*



Kuva 6. Lupun ensimmäinen piirros ongelman asetelmasta.

Lupun vastaus on aluksi kymmenen kilometriä. Hän laskee aluksi lasten koulumatkat yhteen ja piirtää tilanteesta kuvan niin, että Pasi ja Anni eivät asu saman koulun kautta kulkevan suoran tien varrella. Selittäessään hän vielä sanoo Pasin kulkevan koulun kautta Annin luo. Yritän saada hänet sitten pohtimaan ongelmaa lisää ja kysyn miksi

Pasi kulkee Annin luo koulun kautta. Miettiessään tätä Lupu havaitsee myös kahden kilometrin olevan mahdollinen. Pohdinnan edetessä Lupu toistaa itselleen ikään kuin hyväksyttynä vaihtoehtona, että koulun kautta kulkiessa matka ainakin on kymmenen kilometriä. Kysyessäni kuinka pitkä matka Pasilla olisi Annin luo suoraan lyhintä mahdollista reittiä kulkiessa, Lupu toteaa matkan olevan lyhyempi koska kuljetaan ”linnuntietä”. Tämä on selvästi hänen mielessään oleva valmis tieto, tosiasia johon on helppo uskoa. Vaikuttaa siltä, että ”linnuntie” -tieto auttaa häntä pääsemään eteenpäin koulun kautta kulkemisesta.

Lupun konkreettinen tapa ajatella käy ilmi kysyessäni (K5) voiko matka olla pidempi kuin 10kilometriä. Hän sanoo, että voi jos eksyy tai kääntyilee ja korostaa kuvan suoran reitin olevan vaikeakulkuisempi kuin koulun kautta kuljettu reitti. Hän kuitenkin sanoo lopulta matkan olevan lyhyempi kuin kymmenen kilometriä. Tämän päätelmän tekemiseen hän käyttää aiemmin tosiasioiksi osoittautuneita oletuksia. Hän päättelee linnuntietä kuljettaessa matkan olevan lyhyempi, koska reitti jossa pitää kääntyillä on kymmenen kilometriä pitkä.

Lupun ajattelu on erilaista kuin useilla muilla haastatelluilla. Useissa tilanteissa hän vaikuttaa ajattelevan varsin konkreettisesti. Tämä osoittaa, että oppilas voi aivan hyvin ajatella koko ajan oikein, mutta opettaja tulkitsee ettei hän tajua tehtävää oikein. Esimerkiksi jos ajatellaan ensimmäisen ongelman asettelua kirjaimellisesti oikeassa tilanteessa, voidaan kohdata monia pieniä ongelmia. Ongelman tilanne on käytännössä hyvinkin erilainen riippuen siitä ajatellaanko sitä, esimerkiksi maaseutu- vai kaupunkiympäristössä. Kaupungissa ei voida aina kulkea suoraan kun edessä on suuria taloja ja muita esteitä. Maaseudulla taas voitaisiin, mutta todennäköisesti ei ole yhtä paljon teitä kuin kaupungissa ja joudutaan kulkemaan vaikeakulkuisessa maastossa. Siksi voidaankin ajatella, että Lupunkin tapa piirtää Pasin ja Annin talot suhteessa kouluun (välimatkan ollessa 10kilometriä) ei olekaan niin väärä kuin se puhtaasti matemaattisesti ajatellen olisi.

Opettajat kannustavat oppilaita ajattelemaan ongelmia reaalimaailmassa. Kuitenkin jos näin tekee, pitäisi olla valmis itsekin todella ajattelemaan ongelmaa kirjaimellisesti ja konkreettisesti. Minäkin kysyin Lupulta kulkisiko hän Pasin asemassa Annin luo koulun kautta. Oletin ettei hän niin missään tapauksessa tekisi. Jälkikäteen ajatellen se voisi kuitenkin olla mahdollista ja paljon todennäköisempääkin kuin haastattelutilanteessa ajattelin. Kaupungissa, jossa Lupu asuu, ei välttämättä oikeasti ole niin paljon teitä, että hänen olisi mahdollista lähteä Annin luo mehulle lyhyempää reittiä.

Oppilaiden omaan elämysmaailmaan siirtyminen on keskeinen piirre konstruktivistisille matematiikan opetukselle. Sen mukaan ihminen konstruoi tiedot aikaisemman tietorakenteensa pohjalta. (Leino 1993, 15-16). Lupun kokemusmaailma ei ollut haastattelutilanteessa samankaltainen kuin minun. Leinon (1993) konstruktivistisen matematiikan opetuksen luonnehdinnan ja Lupun ratkaisun pohjalta täytyy huomioida matemaattisen tiedon luonne tästä näkökulmasta.

Piaget`n mukaan tieto on yksilön konstruktio, oppilas rakentaa tietonsa sulauttamalla uuden jo omaksuttuihin tietoihin. Toisaalta mukautetaan jo omittu tieto tai käyttäytyminen niin, että uusi tieto tai tilanne voidaan hallita. (Piaget 1988, 15). Radikaalissa konstruktivistisessa oppimisnäkemyksessä tiedon syntyminen ja sen merkitys oppilaan itsensä kannalta korostuu. Keskeisintä tämän näkemyksen mukaan ovat henkisten toimintojen aktiiviset prosessit, joissa oppilas konstruoi itselleen kuvaa todellisuudesta muuntaen sitä koko ajan vuorovaikutuksessa ympäristön kanssa.(Haapasalo 1993, 18). Oppiminen tapahtuu oppijan omana aktiivisena konstruktiona (Malinen & Pehkonen 2004, 12).

Todellisuudessa ongelman ratkaisemiseen vaikuttaa erittäin paljon, miten sitä tarkastellaan. Haastattelujen aikana ensimmäistä ongelmaa havainnollistettiin ja sitä tarkasteltiin muutamista eri lähtökohdista. Ongelmaa pohdittiin kuvaa piirtämällä ja sitä katselemalla, tarkasti reaalimaailmaan sijoitettuna, välimatkojen lukuarvoja miettien ja näiden yhdistelmänä. Tarkastelutapa oli aina oppilaan oma, kun se tilanteessa oli mahdollista.

Tämä minun ja Lupun muodostama oppimistilanne osoittaa heurististen strategioiden merkityksen ongelmanratkaisun opettamisessa. Vaikka esimerkiksi piirtäminen ei auttaisikaan oppilasta ongelman ymmärtämisessä luo se opettajalle mahdollisuuksia oppilaan ajattelun ymmärtämiseen ja näin oppilaan avustamiseen. Toisaalta useissa tapauksissa piirtäminen auttoi oppilaankin toimintaa.

Muutamien haastattelutilanteiden kulku oli keskenään hyvin samantyyppinen. Esimerkiksi Tupu ja Hupu osoittavat ymmärtävänsä tehtävän hyvin ja löytävät lopulta oikean vastauksen. Kumpikin heistä havaitsi vaivatta kaksi vaihtoehtoa Annin ja Pasin talojen välimatkaksi. Tämä tukee aiemmin tekemiäni päätelmiä, eli useamman kuin yhden vastausvaihtoehdon olemassaolon mahdollisuuden ymmärtäminen on lopullisen ratkaisun kannalta oleellisin solmukohta. Tekstissä seuraavana on tulkintani Tupun ja Hupun haastattelutilanteiden etenemisestä.

Aluksi Tupu piirtää kuvaan pyynnöstäni Pasin kodin paikan. Ensimmäinen vaihtoehto Annin kodin paikaksi on ”samalla kadulla”, jolloin talojen välimatka on kaksi kilometriä. Tupu ilmoittaa 10 kilometriäkin olevan mahdollinen välimatka kysyttyäni mietityttääkö tehtävässä vielä jokin. Kolmannen vaihtoehdon Annin talolle Tupu kertoo kysyttyäni (k3) voiko Anni asua vielä muualla. Kysymyksiini voiko välimatka olla pienempi kuin kaksi tai suurempi kuin kymmenen kilometriä Tupu vastaa oikein. Tämän jälkeen Tupu vastaa kysymyksen (k3) toiston jälkeen muitakin mahdollisuuksia olevan, jonka jälkeen hän vastaa myös pääkysymykseen oikein, 2-10 kilometriä.

Hupu vastasi aluksi 2ja 10km. Hän osasi piirtää kyseiset vaihtoehdot kuvaan oikein. Jatkoimme tämän jälkeen kuvan tarkastelua. Vinkin (K4) tilanteen Hupu osasi selittää oikein. Kysyttyäni onko olemassa muita vaihtoehtoja (K2) hän selitti, että vaihtoehtoja Annin talolle on 4km säteellä koulun ympärillä. Sitten hän osasikin vastata välimatkan olevan 2-10 kilometriä.

Haastattelutilanteessa olleista Tiinu oli ainoa, joka oli löytänyt kaikki mahdolliset ratkaisut jo haastatteluun tullessaan. Tiinu vaikutti aluksi hyvin epävarmalta ratkaisustaan, mutta ilmoitti sitten täydellisen vastauksen: ”Jos Pasi ja Anni asuvat samalla suunnalla, he asuvat 2km päässä toisistaan. Mutta jos he asuvat eri suunnalla niin, he asuvat kauempana toisistaan eli 10km? Matka voi olla jotain sitä väliltäkin riippuen millä suunnalla ne asuu.”.

Leenun, Liinun, Iineksen ja Tiinun kanssa käymistäni keskusteluista voidaan havaita oppilaan oman ratkaisusuunnitelman tärkeys. Tiinu oli niin epävarma omasta vastauksestaan, ettei luottanut ollenkaan tekemiinsä oikeisiin päätelmiin. Leenu ei ymmärtänyt ongelmaa yhtä hyvin kuin Tiinu, ja hänen epävarmuutensa ja tilanteen outous muuttivat tilanteen aidosta oppimistilanteesta perinteiseksi auktoriteetin kyselyksi.

Leenu oli laskenut ensin vastaukseksi 6-4=2km. Ensimmäisen vinkin (K2) jälkeen hän ilmoitti vastaukseksi myös 10km. Vinkin (K2) toistamisen jälkeen hän antoi vaihtoehdon (90astetta), kolmannen toiston jälkeen hän antoi vielä neljänneksi vaihtoehdoksi vastakkaisen äskeiselle (270 astetta). Neljännen kerran kysyttyäni (K2) Leenu vastasi ettei ole muita mahdollisuuksia. Kysyin tämän jälkeen konkreettisemman kysymyksen (K4), eli voisiko Anni asua osoittamassani kohdassa (väli-ilmansuunnat). Näihin kysymyksiin Leenu osasi vastata. Hän osoitti puutteen tehtävän ymmärryksessä vastaamalla, että matka voi olla pidempi, kuin 10km mikäli he asuvat vastakkaisissa suunnissa (180 astetta). En kuitenkaan jatkanut keskustelua, kun ratkaisemisesta oli muodostunut pelkkää kysymys -vastauspeliä.

Samankaltainen kysymys-vastausasetelma vallitsi Iineksen kanssa käymässäni keskustelussa. Iinekselläkään ei ollut selkeästi havaittavaa ratkaisua ohjaavaa suunnitelmaa. Ensimmäiseksi vastaukseksi Iines ilmoittaa 2km. Kuitenkin hän pohti alun perin myös muita vaihtoehtoja, kun kysyi asuvatko Pasi ja Anni samalla tiellä. Vihjeen (K2) jälkeen hän sanoi myös 10km olevan mahdollinen. Vihjeen toistaminen tuotti vaihtoehtoja lisää, kuitenkin yleensä yhden vaihtoehdon kerrallaan. Tämä kertoo siitä, miten oppilas koki tilanteen. Minä olin kysyjä ja hän vastaaja. Tilanne ei ollut ihan aito ja aktiivinen ongelmanratkaisutilanne. Vaikka oppilas osasi sanoa useita erilaisia vaihtoehtoja Annin talon paikaksi, hän vastasi väärin perimmäiseen kysymykseen, miten kaukana toisistaan Anni ja Pasi asuvat (K1). Hänen ratkaisuaan ei ohjannut suunnitelma, jossa pitää selvittää Annin ja Pasin kotien etäisyys toisistaan. Kysyttyäni toiseen kertaa voiko matkaa rajata mitenkään, hän sanoi matkan olevan 2-10km.

Liinu ilmoittaa matkaksi aluksi 10km, mutta hän painottaa matkan olevan silloin koulun kautta kuljettu. Hän sanoo, että Anni voi asua muuallakin kysymyksen (K3) jälkeen. Hän vastaa, että matka Annilta Pasin luo olisi 10km jos kuljettaisiin koulun kautta tilanteissa, jolloin Pasi ja Anni eivät asu saman suoran tien varressa. Kuitenkin hän sanoo, että suoraankin voisi kulkea. Tämän jälkeen kartoitan kuvasta erilaisia vaihtoehtoja Annin talon paikaksi yksi kerrallaan (K4), näiden Liinu toteaa olevan mahdollisia. Liinu vastaa oikein kysyessäni kuinka lyhyt välimatka voi olla. Kuitenkin kysyessäni mitä hän nyt vastaisi hän sanoo, että kaksi kilometriä. Tämän jälkeen totean ääneen, mitä olemme saaneet selville ongelmasta. Liinu keskeyttää minut todeten, että matka voi olla mikä vaan. Johdattelevaan kysymykseen (K5) voiko matka olla lyhempi kuin kaksi tai pidempi kuin 10kilometriä, hän vastaa oikein. Hän perustelee, ettei matka voi olla yli kymmentä kilometriä, koska silloin kannattaisi kulkea koulun kautta.

Saimme Liinun kanssa selvitetyksi kaikki ongelman ratkaisuun vaadittavat elementit. Kuitenkin hän oli yksin saanut vastaukseksi ainoastaan 10kilometrin vaihtoehdon. Miksi sitten hän ei kyennyt ratkaisemaan tehtävää ilman apukysymyksiäni? Vaikuttaa siltä, että Liinu ei rohjennut edetä eteenpäin ensimmäisestä kohdanneestaan ongelmasta. Hän totesi, että matka on kymmenen kilometriä kuljettaessa koulun kautta. Selvästi hänelle oli siis tullut mieleen, ettei koulun kautta välttämättä kannattaisikaan kulkea. Kohdatessaan ongelman Liinu oli painanut sen mielestään ja keskittynyt saamaan yhden selkeän vastauksen? On huomioitava, että hän ymmärsi selkeästi oikein erilaiset vaihtoehdot, kun hän kohtasi ne yksi kerrallaan. Koko tehtävän ymmärtämiseksi pitäisi hallita nämä kaikki tiedot yhdessä ja koostaa niistä ymmärrettävä kokonaisuus. Liinullakin oli olemassa edellytykset ratkaista ongelma, mutta yksin hän ei siihen kyennyt. Jokin tuki ratkaisussa auttaisi varmasti häntäkin. Selkeä ratkaisua ohjaava johtava kysymys tai suunnitelma, johon voi nojautua ongelmaa ratkaistessa, auttaisi Liinuakin uskaltamaan ajatella tuttua ja varmaa pidemmälle. Tämä on ongelmanratkaisun edellytys.

Leenun, Liinun, Iineksen ja Tiinun ratkaisujen perusteella opettajan tulee huomioida muutama onnistuneen ratkaisun tiellä oleva, järjestelyillä ja luottamuksella hoidettava asia. Ne ovat rohkeuden ja sujuvan ratkaisun edellytyksiä:

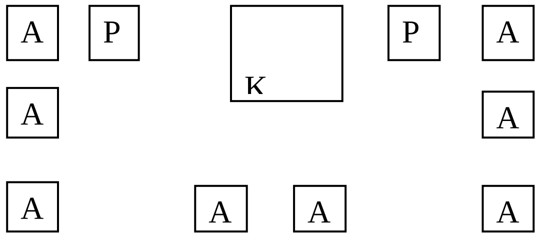
”Ratkaistessa pitää uskaltaa olla luova. Pitää kestää epävarmuus. Pitää mennä merta edemmäs kalaan. Merta edemmäs on mahdollista mennä vain jos tietää että jaksaa palata takaisin ja muistaa mistä lähti liikkeelle.”

Heluna vastaa aluksi 10km. Kuitenkin hänelle on selvää, että matka voi olla myös 2km. Tämä selviää, kun hän osaa heti vastata oikein kysymykseeni muista vaihtoehdoista. Miksi sitten hän ei osannut heti vastata kumpaakin vaihtoehtoa? Todennäköisesti hänellä on mielessään niin voimakkaana malli siitä, että matematiikan tehtäviin on olemassa vain yksi oikea vastaus, että tämä sulkee tien aktiiviselta ajattelun jatkamiselta. Kun kysyin onko muita vaihtoehtoja (K2), kuin asuminen samassa tai eri suunnassa, hän ei osaa sanoa. Kun konkretisoin kysymyksen kuvan avulla (K4) ja sanon, että jos Pasi asuu tässä, niin voiko Anni asua muualla, kuin esille tulleissa kohdissa, hän osaa sanoa lisää vaihtoehtoja. Vinkin toisto antaa jälleen lisää vaihtoehtoja. Heluna käsittää oikein myös matkan Pasin ja Annin kotien välillä, sillä hän sanoo matkan olevan 10km koulun kautta kuljettuna ja lyhempi suoraan mennessä. Vinkin (K4) toistelu vieläkin antaa sitten jo paljon erilaisia vaihtoehtoja Annin kotitalolle. Tämän jälkeen hän osaa itse antaa oikean ratkaisun, Pasin ja Annin kotien välimatka on 2-10km.

Helunan haastattelu osoittaa haastattelemisen olevan oikeastaan koko ajan ongelmanratkaisun harjoittelemista. Helunakin ymmärtää, että on olemassa ainakin kaksi vastausvaihtoehtoa, mutta ilmoittaa vastaukseksi vain toisen niistä. Kun oppilaalla ei ole aiempaa mallia tehtävän tekemisestä, hänen ajatteluprosessinsa voi tökätä jo ihan alkuunsa vaikka todellisuudessa mieli on käynyt jo paljon pidemmällä. Haapasalo on todennut, että ongelmanratkaisutilanne kuivuu heti alkuunsa, heuristiset prosessit jäävät kokonaan syntymättä, jos oppilas ei tunnista ongelmatilannetta tai halua selvittää siinä esiintyvää vaikeutta (Haapasalo 2004, 87). Helunakaan ei jälkikäteen ajatellen tunnistanut ongelmatilannetta täsmällisesti oikein

Tällaisissa tilanteissa opettajan on toimittava mallina ongelmantilanteissa toimimisesta (Haapasalo 2004, 87). Kysellessäni annan samalla oppilaalle rohkaisua ja vahvistusta miettiä pidemmälle, kuin mihin hän on tottunut ja näin ajattelu vapautuu uudelleen. Tässä voi olla osasyy siihen, että oppilaat osaavat vastata oikein vihjeisiin ja kysymyksiin, mutta eivät itse kykene kokoamaan epäilyksiään ja ajatuksiaan kokonaisuudeksi niin, että he aidosti ja aktiivisesti miettisivät ratkaisua todelliseen ongelmaan. Toisaalta selvän tukirangan puuttuminen johtaa siihen, että vaikka oppilas olisi saanut ainekset kysymysten ja vastausten muodossa ratkaista koko ongelma, ei hän siihen kykene.

Seuraavissa kahdessa, eli Hansun ja Touhon kanssa käymissäni keskusteluissa on paljon muista oppimistilanteista poikkeavia piirteitä. Kumpikin osoitti useassa kohdassa luovaa ajattelua ja mielenkiintoisia päätelmiä, mutta lopullinen tehtävän ratkaiseminen oikein ei onnistunut.



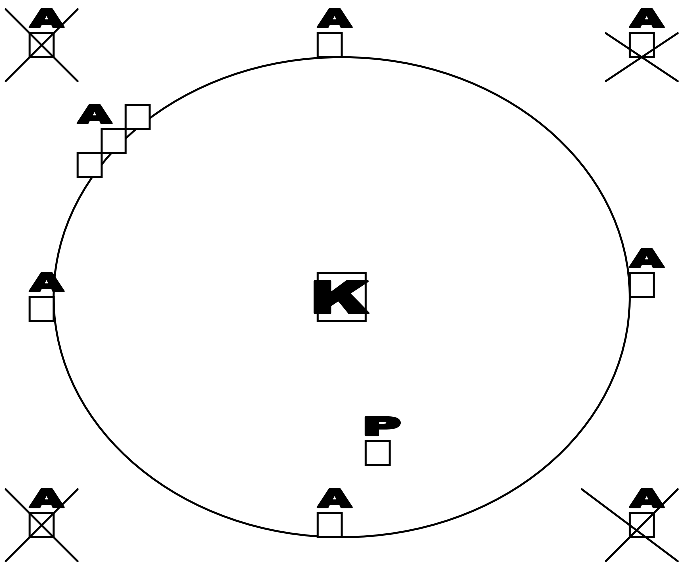
Kuva 7. Hansun piirros ensimmäisen ongelman tilanteesta.

Hansu ilmoittaa aluksi vastaukseksi 2km ja sanoo saaneensa ratkaisun erotuksella. Pyysin häntä piirtämään tämän paperille niin, että koulu oli asetettu valmiiksi. Hansu piirsi talot koulun eri puolille vastakkaisiin suuntiin. Välimatkaksi hän ilmoitti 10km. Kuitenkaan hän ei osannut piirtää ensin laskettua ratkaisua, missä välimatka olisi 2km. Pyytäessäni häntä uudelleen piirtämään tämän vaihtoehdon hän sanoi, että silloin kummallakin on yksi kilometri matkaa kouluun. Tämän jälkeen korostin, että koulumatkat on ilmoitettu jo tehtävässä. Hän kysyi voiko matkoja supistaa.

Oppilaalla ei selvästikään ollut kunnollista käsitystä ongelmasta. Hän ei ymmärtänyt oikein tehtävän oletuksia, eikä sitäkään, mitä hänen pitäisi tehdä. Hän pyrki muun muassa saamaan Pasin ja Annin koulumatkojen väliksi kuutta kilometriä. En tiedä mitään taustoja oppilaan matemaattisista ja kielellisistä taidoista. Pelkän ratkaisemisen tarkkaileminen ei anna selvitystä näistä ja analysointikin on tässä tapauksessa hankalaa.

Vaikuttaa kuitenkin siltä, että piirtäminen ei tämän oppilaan kohdalla auttanut hänen ongelmanratkaisuaan, vaan pikemminkin haittasi tätä. Hansu pyrki piirtämään kuvat tarkasti niin, että välimatkat ovat oikeita. Yksi ruutu vastasi yhtä kilometriä. Tämä johti siihen, että piirrettyään suuren koulun (noin 3 x 4 ruutua), 1 x 1 kokoisten talojen välimatka koulusta vääristyi. Kuvassahan näyttää siltä, että esimerkiksi Annin talon kuuden kilometrin etäisyys koulusta ei muodosta 6 säteistä ja koulukeskistä ympyrää, vaan Annin talon ja koulun etäisyys olisi 6 km koulun seinien suuntaisilla suorilla. Toisaalta Hansu ei myöskään laskenut etäisyyttä koulun keskipisteestä vaan konkreettisesti seinästä seinään. Lisähankaluuksia toi vielä ruutujen lävistäjien suunnassa tapahtuvat laskelmat. Mittakaavasta johtuva ongelma ja piirroksen virheellisyys, johtivat siihen että kuva ei edistänyt hänen ajatteluaan vaan johti ratkaisun väärille poluille. Hänen ajatuksensa kiinnittyivät ratkaisemisen kannalta epäoleellisiin asioihin, mikä omalta osaltaan haittasi hänelle jo ennestään hankalaa ratkaisemista.

Hansu osasi antaa kuvan perusteella oikealta vaikuttavia vaihtoehtoja Annin talon paikaksi. Vinkkien avulla hän siis kykeni laajentamaan ratkaisuaan aivan oikein. Hänellä ei ollut mitään vaikeuksia kertoa erilaisia vaihtoehtoja Annin talon paikaksi. Lopullista ratkaisua miettiessä hänen ajattelunsa konkreettisuus kävi uudelleen selväksi. Kysyin millaisia vaihtoehtoja olemme saaneet talojen välimatkaksi. Huomasimme ainakin 2, 4, 6, 8 ja 10km:n käyvän. Niiden perusteella hän vastasikin Pasin ja Annin talojen välimatkaksi käyvän parilliset luvut. Kun vielä selvensin, että saimme ratkaistua aiemmin, että matka ei voi olla lyhempi kuin 2, mutta ei myöskään pidempi kuin 10km hän vastasi oikein, että mahdollisia välimatkoja ovat 2-10km.”



Kuva 8. Touhon piirros ensimmäisen ongelman tilanteesta.

Touho vastaa aluksi 2 km. Kuvaan hän piirtää hieman virheellisesti tilanteen niin, että talot eivät olisi aivan saman kadun varressa. Vinkkien (K2) ja (K4) kysymisen ja toistelun jälkeen hän osasi aina antaa uusia vaihtoehtoja Annin talon paikaksi. Lopulta, kun olimme saaneet vaihtoehtoja eripuolilta koulua Annin talon paikaksi, hän sanoi ettei uusia vaihtoehtoja enää ole.

Tämän jälkeen totesin, että näistä kahdesta kohtaa kouluun on 6 km matka. Kysyin onko niiden välissä olevasta kohdasta kuuden km matka, tähän Touho vastasi myöntävästi. Toistettuani, että entäs niiden välisestä kohdasta, hän sanoi aluksi että ei. Näytin vielä sormella lähekkäin olevia taloja ja totesin kummastakin olevan kuuden kilometrin matka. Tämän jälkeen hän totesi niiden välisestäkin talosta olevan kouluun kuusi kilometriä. Samoin kävi, kun pienensin väliä koko ajan. Totesin ohimennen, että saamme todella paljon vaihtoehtoja. Tämän jälkeen Touho havaitsi, että eri vaihtoehdoista Annin talon paikaksi muodostuu kuvaan ympyrä.

Vaikka Touho kykeni vinkkien avulla selvittämään erilaiset vaihtoehdot Annin talon paikaksi, hänelle ei samalla selvinnyt talojen välisen matkan pituus. Kysyttyäni kuinka pitkä matka Pasin luota on Annille, kun Anni asuu jossain kohtaa piirtämäämme ympyrää ja Pasi oppilaan piirtämässä kohdassa hän vastasi jälleen matkan olevan 2 km. Vaikka olimme kehitelleet ongelman ratkaisua ja Touho oli vinkkien avulla keksinyt erilaisia vaihtoehtoja Annin talon paikaksi, hän ei kuitenkaan ymmärtänyt, mitä tämä merkitsee tehtävän lopullisen ratkaisun (K1) kannalta. Hän unohti kaikki ongelman osaratkaisut, jotka hän osasi aiemmin ratkaista. Hän ei ollut ymmärtänyt, miten tietoja voi hyödyntää. Galperin korostaa yksilön ulkoisen toiminnan ja sitä vastaavien henkisten prosessien välistä yhteyttä. Oppiminen ja tietoisuus rakentuvat, kun yksilön ulkoiset toiminnot sisäistyvät (Ruokamo 2000, 49-50). Selvästikään Touho ei ollut sisäistänyt ratkaisemiaan osaongelmia, vaan osasi ainoastaan vastata konkreettiseen kysymykseen.

Mietimme Touhon kanssa ratkaisua kuvan kautta. Tarkastelimme koko ajan ratkaisun edetessä kehittyvää kuvaa. Erilaisten vaihtoehtojen etsiminen ohjasi toimintaamme lopulta siihen, että mietimme oikeastaan vaihtoehtoja kysymykseen: ”Mistä kohdista kouluun on kuuden kilometrin matka?”. Vaikuttaa siltä, että Touholla ei ollut selvänä mielessään omaa strategiaa ongelman ratkaisemiseksi, joka olisi kehittynyt ja mahdollistanut sitten oikean ratkaisun keksimisen keskustelumme pohjalta. Tässä tapauksessa esittämäni kysymykset eivät ohjanneet Touhoa lopullisen ratkaisun etsimiseen, vaan ne olivat pikemminkin yksittäisiä auktoriteetin esittämiä kysymyksiä, joihin hän halusi vastata oikein. Samalla tavoin kuin Iineksen ja Leenun kansa käymissäni keskusteluissa kävi. Annin kodin paikan eri vaihtoehtojen etsiminen, on lopullisen ratkaisun kannalta tärkeä osaongelma, mutta tässä tapauksessa tämä näkökulma ei auttanut Touhoa tehtävän kokonaisratkaisun keksimiseen.

Hänelläkään ei siis kokonaisuus pysynyt hallussa. Tästä tulee uudelleen mieleen muutamia kysymyksiä. Olisiko tärkeintä ohjata ennen kaikkea kokonaisuuden hahmottamiseen, eikä niinkään ratkaisun osien tajuamiseen? Miten tämä olisi mahdollista esimerkiksi tässä tapauksessa? On kuitenkin huomioitava kokemuksen ja määrätietoisen opiskelun merkitys ratkaisujen kehittymisessä ja tiedon sisäistämisessä. Yrjönsuuren mukaan tosiasiatieto, eli tietäminen voi opiskelun kautta muuttua kokemukselliseksi toimijan tiedoksi ja kun se on opittu, niin oppilas osaa käyttää sitä monenlaisissa tilanteissa (Yrjönsuuri 1990, 7).

Jälkikäteen voi huomata, että ehkä haastattelunkin olisi voinut tehdä paremmin, sillä kun kyselen kuinka pitkä matka Pasilla on Annin luo oppilas selvästi miettii aina yhtä tilannetta kerrallaan. Niihin ratkaisut ovatkin oikeanlaisia. Kuitenkin kokonaisuuden kokoamiseen johdattavat vinkit, tai kokonaan toisenlainen lähestymistapa olisi toiminut tässä tapauksessa hyvin. Tämä olisi ollut mielenkiintoista pohdittaessa ongelmanratkaisutaitojen opettamista. Kokonaisuuden merkitys siinä on suuri, kuitenkin vinkkini ja kysymykseni suuntaavat yksityiskohtiin ja testaavat enemmän yksityiskohtaisia oppilaan taitoja.
Minnin ja Mikin haastattelutilanteet ovat keskenään hyvin samankaltaisia. Ne olivat kaksi ensimmäistä keskustelua ja toimintani niissä ei ollut riittävän hyvää. Siksi niiden tarkempaan käsittelyyn ei ole syytä. Haastattelut ovat kuitenkin liitteenä (Liite 2).

5.2.2 Solmukohtien ylittäminen

Viidennessä kappaleessa olen pohtinut välimatkaongelman (liite1) perusteella ongelmanratkaisuprosessin kulkua. Haastatteluaineiston perusteella on mahdollista tarkastella lähemmin, millaiset vinkit ovat auttaneet oppilaita solmukohtien yli. Toisaalta voidaan huomioida millaisissa tilanteissa vihjeistä on ollut haittaa. Kuvassa 4 on esitelty keskeisimmät solmukohdat. Luvun (5.2.1) perusteella havaitaan yksityiskohtaisesti, miten kaksitoista oppilasta ovat kyenneet jatkamaan ratkaisua solmukohtien yli. Tässä kappaleessa käsittelen kuitenkin vielä muutamia tilanteita erikseen.

Merkittävin solmukohta kirjallisten ratkaisujen perusteella oli useamman kuin yhden mahdollisen ratkaisun olemassaolon ymmärtäminen. Kaikki ratkaisijat antoivat lopulta ratkaisun, jossa vaihtoehtoja oli enemmän kuin yksi, eli merkittävimmän solmukohdan ylittäminen onnistui vinkkieni avulla kaikilta. Itsenäisesti tämän kynnyksen oli ylittänyt kolme oppilasta, eli Tiinu, Hupu ja Tupu. Tiinu esitti täydellisen vastauksen itsenäisen pohdinnan jälkeen ja Tupu ja Hupukin pääsivät ratkaisuun yksinkertaisten vinkkien avulla.

Loput oppilaista antoivat ensimmäiseksi ratkaisuksi ainoastaan yhden vaihtoehdon, kaksi tai kymmenen kilometriä. Kaikki oppilaat löysivät lisää vaihtoehtoja välittömästi kysyttyäni onko muita vaihtoehtoja. Luontevan oppimistilanteen muodostamiseen pyrkiminen johti kuitenkin siihen, etten aloittanut kaikkien oppilaiden kanssa tästä. Voidaan ajatella, että tämä vinkki toimi oppilaille rohkaisuna ajattelulle. Haapasalon (1993) mukaisesti itse ongelma muodostui todella vasta tässä vaiheessa opettajan toiminnan avulla. Ainakin ongelma näyttäytyi oppilaille vinkin jälkeen eri tavalla. Aluksi kaikilla ei ollut mitään mallia tehtävistä, joissa vastausvaihtoehtoja on useita. Vinkki muokkasi oppilaalle ongelmaksi pohtia, millaisia erilaisia vaihtoehtoja on olemassa.

Ongelman muuttuminen onkin konkreettinen osoitus keskustelutilanteen aikana tapahtuneesta laadullisesta oppimisesta. Yrjönsuuren mukaan matematiikan laadullisella oppimisella tarkoitetaan yksilön tietyn alueen tiedollisen rakenteen muuttumista ja sen tuloksena skeemat ja sisäiset mallit muuttuvat ja rakentuvat uudelleen (Yrjönsuuri 1990,). Oppilaiden käsitys matematiikasta muuttuu, kun vastausvaihtoehtoja voikin olla useita.

Sanallisten vihjeiden lisäksi hyödynsimme oppilaiden kanssa erilaisia ratkaisutekniikoita. Schoenfeldin mukaan tärkeimpiä ongelmanratkaisutekniikoita ovat muun muassa kuvion piirtäminen, kokeilu ja tuloksen tarkistaminen (Ruokamo 2000, 51-52). Kaikkien näiden tärkeys tulee esille oppilaiden ratkaisujen perusteella. Kuvan piirtäminen auttoi esimerkiksi Hupua ymmärtämään erilaisten vaihtoehtojen Annin kodin paikaksi sijoittuvan ympyrän muotoon koulun ympärille. Toisaalta Hansun ratkaisua piirtäminen häiritsi. Hänen konkreettinen ajattelunsa johti siihen, että kuvasta tuli virheellinen ja ongelman ymmärtäminen sen perusteella oli mahdotonta.

Kokeilua käytimme esimerkiksi Touhon kanssa sopivien vaihtoehtojen pohtimisessa yksi kerrallaan. Tuloksen tarkistamisen vaihe korostuu esimerkiksi Polyan (1973), Masonin (1982) ja Yrjösuuren (2004) ongelmanratkaisuprosessin kuvailuissa. Oppilaiden ratkaisujenkin perusteella se vaikuttaa tärkeältä. Useissa tapauksissa esittämäni kysymys käynnisti prosessin uudelleen ja jo kertaalleen ajatellusta löytyi uusia asioita, jotka edistivät ratkaisua.

Toisen ihmisen ajattelun jäljentämisen hankaluutta on pohtinut esimerkiksi Yrjönsuuri. Hän korostaa, että yksilön ajattelun taso ei ole pysyvä, vaan se vaihtelee monien ulkoisten ja sisäisten tekijöiden mukaan. Hänen mukaansa oppija voi pitää oppimaansa pinnallisena tai syvällisenä tietona tai saavuttamaansa tiedon rakennetta satunnaisena tai jäsentyneenä. (Yrjönsuuri 2004, 111). Johdatteluni keskustelutilanteessa on ulkoinen ajatteluun tasoon vaikuttava asia. Muutamissa tapauksissa oppilaan hyvä ja suunnitelmallinen ajatus katosi johdatteluni takia. Esimerkiksi Touho kadotti kokonaan mielestään, mitä tehtävässä lopulta kysytään.

Kaiken kaikkiaan kuvassa 4 esiteltyjen solmukohtien ylittämisessä auttoi vinkit, kysymykset, lisäpohtimiseen kannustaminen ja piirtäminen. Näistä etenkin piirtäminen ja lisäpohtimiseen kannustaminen ovat keinoja, joita opettaja kykenee helposti käyttämään isoakin ryhmää ohjatessaan. Ongelmanratkaisukokemus ja –varmuus tuovat ratkaisijalle itselleen mahdollisuuden hyödyntää vinkkejä ja kysymyksiä itsenäisenkin ratkaisun aikana.

5.3 Luokanopettajaopiskelijoiden ratkaisut

Olen hyödyntänyt luokanopettajaopiskelijoiden ratkaisuja jo muodostaessani kokonaiskäsitystä ongelman luonteesta ja pyrkiessäni mahdollisimman monipuolisesti eri näkökulmien huomioimiseen (Kuva 4). Luokanopettajien vastaukset ovat toimineet ikään kuin peilinä tai tukirankana, joiden perusteella olen pyrkinyt ymmärtämään itselleni vieraita ajattelutapoja. Esittelen kuitenkin vielä lyhyesti miten opiskelijat ovat ensimmäisen ongelman ratkaisseet.

En pyri osoittamaan opiskelijoiden ratkaisutaitojen tasoa, siihen otos on liian pieni. Toisaalta täytyy muistaa, että opettajankoulutukseen hakeutuvien joukko on valikoitunut ja koulukokemukseltaan varsin homogeeninen, verratessa sitä kuudesluokkalaisista koostuvaan joukkoon. Siksikään ei voida vetää pidemmälle meneviä johtopäätöksiä aikuisten ja lasten ratkaisujen eroista. Opiskelijoiden ratkaisut antavat kuitenkin viitteitä siitä, miten enemmän matematiikkaa opiskelleiden ratkaisut eroavat lasten ratkaisuista.

Ratkaisupapereita oli siis kaiken kaikkiaan neljätoista. Kahdeksan (8/14) ratkaisua on täydellisesti oikein. Niissä kaikissa perustellaan huolella erilaiset vaihtoehdot. Yhdessä (1/8) näistä ratkaisija on aloittanut pohtimisen toteamalla, että tehtävässä ei ole annettu riittävästi tietoa, jotta voisi päätyä yhteen ratkaisuun. Tämän jälkeen kuitenkin ratkaisija on perustellut miksi näin on. Malli mielessä siitä, että oikeita vastauksia voi olla ainoastaan yksi ohjaa ajattelua merkittävästi. Se sulkee oven luovalta ajattelulta. Tämä on varsin suoraan verrattavissa oppilaidenkin ratkaisuihin. Niissä yhden vastauksen malli muodosti vain usein niin suuren esteen oppilaan ajattelulle, että ratkaisu ei enää edennyt.

Kokeneiden ongelmaratkaisijoiden kyky ratkaista monimutkaisia ongelmia johtuu osittain siitä, että he ovat kehittäneet strategioita semanttisten verkkojen muodostamiseksi. Tällainen on esimerkiksi käsitekartta. (Haapasalo 2004, 74). Matematiikassa hyvät opiskelijat kykenevät käsittelemään epävarmaa tilannetta kokemattomia oppilaita paremmin. Kokeneina ratkaisijoina he osaavat hyödyntää tietojaan ongelman ratkaisemiseksi. Käsitekarttaan perustuva ajattelu auttaa ensimmäisen ongelman ratkaisussa. Ratkaisija kykenee näin hierarkkisoimaan löytämänsä osaratkaisut ja kokoamaan niistä lopullisen ratkaisun.

Yrjönsuuren mukaan matematiikka on ihmisen ajattelun tulos; formaalinen rakennelma, jossa pienetkin osaset ovat tietyillä paikoillaan. Matemaattinen tieto on jäsentynyttä ja hierarkkisoitunutta. Matematiikan rakenteelle on ominaista, että abstrakteja ominaisuuksia on hierarkkisesti yhä korkeammalla abstraktiotasolla. (Yrjönsuuri

2004, 112). Jäsentyneen tiedon käsittely on helppoa ja johdonmukaista. Opiskelijoidenkin ratkaisuista on havaittavissa ratkaisut, joissa ongelman ymmärtämisen taso on puutteellinen. Se johtaa siihen, että ratkaisija ei kykene taitojensa edellyttämään eheään loppuratkaisuun.

Yksi opiskelija on päätynyt vastaukseen 6 – 4 = 2 ja toinen vastaukseen kaksi ja kymmenen kilometriä. Tästä tulee mieleen muutamia kysymyksiä, jotka ovat tuoneet erilaisia näkökulmia analysointiin. Onko ratkaisija todella törmännyt solmukohtaan? Eikö hän ole osannut jatkaa eteenpäin vai onko hänen antamansa vastaus hänen mielestään oikea? Jakamani tehtäväpaperin ohjeissa (liite 1) pyydän ratkaisijaa kirjoittamaan mikä tuntui vaikealta ja johti siihen ettei ratkaiseminen onnistunut, mikäli ratkaisija ei ole päässyt mielestään oikeaan ratkaisuun. Näiden opiskelijoiden ratkaisupaperissa luki ainoastaan kuvan ja laskutoimituksen lisäksi lyhyt perustelu vastaukselle. Siitä voi päätellä, että on ainakin mahdollista, että ratkaisu on opiskelijan mielestä oikea. Ainakin kuudesluokkalaisilla voi helposti uskoa käyvän näin. Polyakin (1973) korostaa looking back –vaihetta ongelman ratkaisussa. Tarkistaminen ja uudelleen ongelman asetelmaan palaaminen käynnistää helposti uudelleen jo sammuneen ratkaisumotivaation. Muuten käy helposti niin, että ensimmäisen suunnitelman mukainen ratkaisu jää lopulliseksi.

Mikäli ajatellaan, ettei opiskelija ole mielestään törmännyt solmukohtaan vaan on löytänyt oikean vastauksen, voisi pohtia miksei hän ole löytänyt aiemman luokitteluni mukaista a –tasoista ratkaisua. Syitä siihen voi olla useita, kuten riittämätön taito, huono motivaatio, huolimattomuus, muut mielessä pyörivät asiat tai vaikkapa tahallisuus. Tässä tutkimuksessa tyydyn ainoastaan toteamaan, että näitä syitä olisi mielenkiintoista selvittää jatkossa.

Kolmen ratkaisun (3/14) perusteella voi todeta vanhan sanonnan: ”Tieto lisää tuskaa.”, paikkansapitävyyden. Näissä ratkaisija on pyrkinyt selvittämään talojen etäisyyttä Pythagoraan kaavan mukaisesti nimeämällä tuntemattomia matkoja kirjaimin x ja y. Näistä ratkaisuista huomaa ratkaisijan tukehtuneen tiedon määrään. He ovat unohtaneet mitä tietävät yrittäessään ratkaista yhtälöpareja. Tuntemattomien matkojen olemassaolo palauttaa mieleen yläasteen ja lukion laskut, joissa muodostamalla suorakulmainen kolmio ratkaistiin tuntemattomia pituuksia. Tietynlainen tehtävän asettelu johtaa helposti muistin mukaisiin toimiin, mutta johtaa samalla ajatukset harhaan oleellisesta. Esimerkiksi lukion matematiikan ongelmanratkaisukurssille oppikirjaksi tarkoitetun Matemaattinen ongelmanratkaisu- kirjassa tärkeimmiksi omaksuttaviksi taidoiksi nimetään taito muodostaa, käsitellä ja käyttää hyväksi kirjainlausekkeita (Aalto, Kangasaho & Mäkinen 2001, 3). On helppo uskoa, että ainakin tällainen tietoinen pyrkiminen ongelmanratkaisun avulla perehdyttää oppilaita lausekkeiden muodostukseen voi johtaa siihen, että niitä pyritään käyttämään tilanteissa mihin ne eivät sovi. Tietenkin on todettava, että tämä on yksittäinen esimerkki ja että Pythagoraan kaava antaa mahdollisuuden ratkaista tässäkin ongelmassa Pasin ja Annin talojen etäisyyden ennalta määrätyissä suotuisissa paikoissa.

Yrjönsuuren matemaattisen ajattelun kuvailu helpottaa Pythagoraan kaavan käyttäjien ratkaisujen tulkintaa. Hänen mukaansa toiminnallinen tieto ohjaa ulkoista käyttäytymistä ja muunnoksia, jotka tapahtuvat muistissa silloin, kun tiedon tuottaminen tapahtuu. Esimerkiksi algoritmien ja kaavojen käyttäminen tehtävän ratkaisussa ovat tällaista toiminnallista tietoa. Matemaattisesta toiminnasta voidaan käyttää nimityksiä algoritminen ja reflektoiva ajattelu. (Yrjönsuuri 2004, 116-117). Selkeästi useimmilla opiskelijoilla ajattelu oli luonteeltaan algoritmistä, eli edellä esitellyn toiminnallisen tiedon ohjaamaa. Heidän oppimansa tavat toimia tietynlaisessa tilanteessa ohjasivat toimintaa, estäen pohtivan, reflektoivan ajattelun.

Yksi (1/14) ratkaisija ei ole osannut antaa minkäänlaisia konkreettisia vaihtoehtoja välimatkan pituudelle. Hän toteaa ainoastaan, että matka kyetään varmasti määrittämään, mutta hän ei tiedä miten. Opiskelija on piirtänyt neljä ympyrää koulun ympärille mahdollisiksi talojen paikoiksi, mutta hän ei kykene rajaamaan välimatkaa mitenkään. Hän toteaa ainoastaan vaihtoehtoja olevan useita. Yhdysvalloissa esimerkiksi Frank (1988) on havainnut tutkiessaan uskomuksia matematiikasta, että oppilaat saattavat uskoa ongelmassa tai heidän toiminnassaan olevan jotain vialla ellei se ratkea muutamassa minuutissa. Hoskosen (1996) kahdeksasluokkalaisille tekemän tutkimuksen perusteella kuitenkin ainoastaan harvat jättävät ongelman ratkaisun ellei se ratkea muutamassa minuutissa. (Hoskonen 1996, 48).

Tämä toteutui muutamassa opiskelijoiden ratkaisuissa. Yksi ratkaisija tulkitsi tehtävässä olevan jotain vikaa kun ei keksinyt ratkaisua ja muutama epäili omia päätelmiään.

6. SILTAONGELMA

Siltaongelman analysointi on muiden ongelmien analysoinnin tapaan kaksivaiheinen. Kirjallisten ratkaisujen perusteella selvitän aluksi, millaisiin ratkaisuihin oppilaat ovat päätyneet ja miten he ovat ongelman yrittäneet ratkaista. Haastattelujen perusteella jatkan analysointia ja pohdin selityksiä, miksi oppilaat ovat juuttuneet tiettyihin solmukohtiin, miten osa oppilaita on osannut jatkaa näiden kohtien yli ja millä tavalla oppilaat ovat tarkasti kuvattuna käsittäneet ongelmatilanteen.

Kolmostehtävä, eli siltaongelma on varsin pitkä ja sen ratkaiseminen onnistuneesti edellyttää useita päätelmiä. Sitä ratkaistessa oppilas voi siksi juuttua useaan eri solmukohtaan. Kohdatessaan tällaisia ongelmatilanteita oppilaat toimivat eri tavoin. Ongelmanratkaisutaidon edellyttämä luovuus tulee hyvin esiin tällaisissa kohdissa. Siksi tämän ongelman analysoinnissa keskitytään tarkemmin oppilaiden antamiin erilaisiin ratkaisuehdotuksiin, heidän luoviin yrityksiinsä ratkaista ongelma. Näiden erilaisten ratkaisujen huomioiminen on oleellista tutkimustehtävän selvittämisen kannalta.

6.1 Kuudesluokkalaisten kirjalliset ratkaisut

Kirjallisten ratkaisujen analysointimenetelmä oli samankaltainen kuin ensimmäisen ongelman kohdalla. Aluksi kävin ratkaisut läpi useaan kertaan. Tämän perusteella tutkijalle muodostui kokonaiskuva oppilaiden ratkaisujen tasosta. Kaikista ratkaisuista kirjattiin oppilaiden antama ratkaisu ja ratkaisuista ilmenneet päätelmät. Tämän jälkeen aloin ryhmitellä samankaltaisia ratkaisuja pienempiin osajoukkoihin. Tämän luokittelun avulla minun oli mahdollista muodostaa ensivaikutelmaa tarkempi kokonaiskuva ongelman solmukohdista. Tämän perusteella luokittelin ratkaisut tasoltaan Charlesin ym. (1990) luokittelun kaltaisesti, edellä esitetyin perustein kolmeen ryhmään: a-, b- ja c –tasoisiin ratkaisuihin (5.1).

Kuten ensimmäisen ongelman analysoinnissa (5.1) selvitin, jaottelusta ilmenee ennen kaikkea ongelman ymmärtämisen taso. Solmukohdat ja ongelman ymmärtämisen taso liittyvät toisiinsa kiinteästi tässä muodostetussa luokittelussa. Edetessään keskeisimmiksi osoittautuneiden ongelman solmukohtien ohi, oppilas osoittaa ymmärtävänsä tehtävää koko ajan paremmin.

Erottelin oppilaiden ratkaisuista lopulta kolme pääryhmää. a, b ja c –tasoiset ratkaisut. Jokainen pääryhmä jakautuu pienempiin osaryhmiin, jotka mahdollisimman tarkasti ja oleellisilta osin kuvaavat ratkaisua. Erilaiset ratkaisut ilmenevät taulukosta 2. ”Ei mitään käsitystä” –ryhmässä oppilas ei ole osoittanut ymmärtäneensä tehtävää lainkaan. ”Vast. 12”- ryhmän vastaukset tarkoittavat tilannetta, jolloin oppilas on selkeästi väärin perustein vastannut 12 minuuttia. ”Vast. 12/”3”” –vastaukset on eroteltu omaksi ryhmäkseen, koska niissä oppilaat eivät ole laskeneet tehtävän asettelussa ilmenneitä kulkuaikoja yhteen, kuten suurin osa 12 minuuttia vastanneista. He ovat kirjoittaneet, että jokaiselta henkilöltä kuluu ylitykseen aikaa kolme minuuttia.

”Jonkun on kuljetettava lamppua” –ryhmään kuuluvat vastaukset, joissa on keksitty keino sillan ylittämiseksi, eli jonkun olisi kuljetettava lamppua, mutta ei ole osattu laittaa kuljettajaksi tehtävään sopivinta henkilöä. ”Jako nopeuden mukaan” –vastauksissa on lähdetty ratkaisemaan ongelmaa lähtökohdasta, jossa hitaiden ja nopeiden kannattaisi kulkea yhdessä. Tämän ryhmän vastauksissa ei ole keksitty keinoa lampun palauttamiseksi.

Seuraavissa kahdessa ratkaisujoukossa oppilaat ovat asettaneet Villen lampun kuljettajaksi. Tämän suunnitelman mukaisesti vastauksen tulisi olla kolmetoista minuuttia. ”Ville kulj. vast. ei 13” –ryhmä tarkoittaa siis vastauksia, joiden toteutus ei ole sujunut tehdyn suunnitelman mukaisesti. ”Nopeus ja kulj. väärä vast.” –vastauksessa oppilas on keksinyt suunnitelman, jossa lamppua kuljettaa takaisin aina sopivin eli nopein mahdollinen henkilö ja toisaalta hitaat ylittävät sillan yhdessä. Lopullinen vastaus ei ole suunnitelman mukaisesti 12 minuuttia.

A –taso **18**

- Ville kulj. vast. ei 13 7
- Ville kulj. vast. 13 9
- nopeus ja kulj. väärä vast.1

B –taso **10**

- jonkun kuljetettava lamppua 8

C –taso **44**

- ei mitään käsitystä 25
- vastannut 12 17

Kuva 9. Kuudesluokkalaisten kirjalliset ratkaisut kolmanteen ongelmaan.

Edellä esitellyn luokittelun (kuva 9) tarkoituksena on mallintaa oppilaiden ratkaisut niin, että kyettäisiin tarkemmin käsittelemään isoa ratkaisujen joukkoa. Tehdystä luokittelusta ilmenee tarkkaan ottaen millaisiin ratkaisuihin oppilaat ovat päätyneet. Oppilaiden paperiin kirjoittama ratkaisu on heidän päättelynsä lopullinen tuotos. He eivät ole osanneet jatkaa päättelyä antamaansa ratkaisua pidemmälle. Siksi voidaan sanoa, että kuvassa 9 esiteltyjen vastausten perusteella voidaan löytää suurimmat kolmannen ongelman ratkaisun solmukohdat.

Kuten edellä kerroin luokittelun perusteena on annetun ratkaisun lisäksi tulkintani siitä, miten hyvin oppilas on ymmärtänyt ongelman. Siksi pitääkin tämän ongelman kohdalla korostaa, että vaikka 12 minuuttia on nopein mahdollinen aika ylittää silta tehtävässä mainittujen oletusten toteutuessa, oppilaan ratkaisua ei välttämättä voi pitää oikeana, vaikka hän antaisikin vastaukseksi 12 minuuttia. Suurimmassa osassa ratkaisuista, joissa oppilas oli antanut ratkaisuksi 12 minuuttia, hän oli laskenut tehtävässä esiintyneet luvut yhteen. Tällainen ratkaisu ei ole oletusten nojalla mahdollinen, sillä tehtävän asettelussa sanotaan (liite 1), että aina siltaa ylitettäessä välttämättä tarvitaan taskulamppua. Näissä ratkaisuissa ei ollut aloitettukaan tehtävän todellista ratkaisemista. Siksi tällaiset ratkaisut luokitellaan c –tasoisiksi, niissä ei ole tehty mitään ratkaisua edistäviä päätelmiä.

Oikeastaan voidaan siis sanoa, että ongelman ymmärtämisen ja ratkaisuprosessin tärkeyden korostamisen merkitys, näkyy ensimmäistä ongelmaa selkeämmin kolmannen ongelman analysoinnissa. Oppilaan ratkaisu voi vaikuttaa oikealta, vaikka se olisi oikeastaan paljon vähemmän oikea kuin aluksi hullulta vaikuttava vastaus. Tämän esimerkin avulla voisi myös perustella, miksi ratkaisupolun tunteminen ylipäänsä on tärkeää.

6.1.1 Solmukohdat

Yhteensä 72:sta kirjallisesta ratkaisusta 61% (44/72) on c -tasoisia. Kaikista ratkaisuista 35 prosentissa (25/72) ratkaisijalla ei ollut mitään järkevältä vaikuttavaa käsitystä ratkaisun etenemisestä. 26 prosentissa vastauksista (19/72) on annettu vastaukseksi 12 minuuttia selvästi vääriksi luokiteltavin perustein. Olen erottanut kahdentoista minuutin ratkaisuista omaksi alaluokakseen kaksi ratkaisua, joissa oli ratkaisun perusteena mainittu kaikilla henkilöillä kuluvan ylittämiseen aikaa kolme minuuttia. Tämän ongelman ratkaisuille oli tyypillistä, että niissä esiintyi mitä erilaisimpia ideoita. Tämän perusteella on tarpeen erottaa mekaanisesti pelkkien lukujen avulla tuotettu ja edes jotain ajatuksia sisältävä ratkaisu toisistaan.

Ensimmäinen selkeä kynnys siltaongelman ratkaisemisessa voidaan havaita tässä. Toki olisi mielenkiintoista saada pilkottua tätä ryhmää pienempiin luokkiin, mutta aineiston perusteella se ei ollut mahdollista. Koska selvästi yli puolet ratkaisijoista ei ole kyennyt todella tarttumaan ongelman ratkaisemiseen, ei heidän ajatuksistaan ole havaittavissa oikeastaan mitään jälkiä. Toisaalta käytetyssä luokittelussa käy selkeästi ilmi ero c –tasoisen ja b –tasoisen ratkaisun välillä. B –tasoisissa ratkaisuissa oppilas on ymmärtänyt lopullisen ratkaisun kannalta jotain oleellista. Hän on selkeästi kyennyt jatkamaan ensimmäisen solmukohdan yli eteenpäin.

Ratkaistakseen siltaongelman oikein oppilaan on otettava huomioon muutamia seikkoja. Ensiksikin hänen on kyettävä ratkaisemaan miten olisi mahdollista, että lamppu on koko ajan mukana ylityksessä. Toisaalta oikean vastauksen löytäminen edellyttää ideaa siitä, keiden olisi kuljettava yhtä aikaa sillan yli ajan minimoimiseksi. Olen erottanut ratkaisujen joukosta b –tasoisiksi ne ratkaisut, joista käy ilmi toisen ratkaisuun vaikuttavan asian pohdinta.

B –tasoisia ratkaisuja on 14 prosenttia (10/72) kaikista ratkaisuista. Kahdeksassa näistä (8/72) on huomattu, että jonkun on kuljetettava lamppua. Kahdessa on pohdittu, että kahden hitaan ja toisaalta kahden nopean kannattaisi kulkea yhdessä. Siirryttäessä näistä b –tasoisista ratkaisuista a –tasoisiin ero ei ole yhtä merkittävä, kuin ero c - ja b –tasoisten ratkaisujen välillä.

Mikäli oppilas on ymmärtänyt, että nopeimman henkilön kannattaisi kuljettaa lamppu takaisin puolelta toiselle, on ratkaisu a –tasoinen. Kuudessatoista ratkaisussa on sanottu, että Villen kannattaisi kuljettaa lamppua. Näistä yhdeksän (9/16) oli saanut lopulta vastaukseksi kolmetoista minuuttia. Loput seitsemän oppilasta (7/16) oli sanonut, että Villen kannattaisi kuljettaa lamppua, mutta vastaus ei ollut suunnitelman mukainen. Tämän lisäksi kahdessa ratkaisussa (2/72) oppilas on osannut yhdistää sekä lampun kuljettamisen, että sen millainen kulkujärjestyksen olisi syytä olla. Näistä toinen ratkaisu ei sisällä puutteita ja toisessa on todettu kummatkin oikeanlaisen ratkaisun elementit, mutta lopullinen vastaus on väärä.

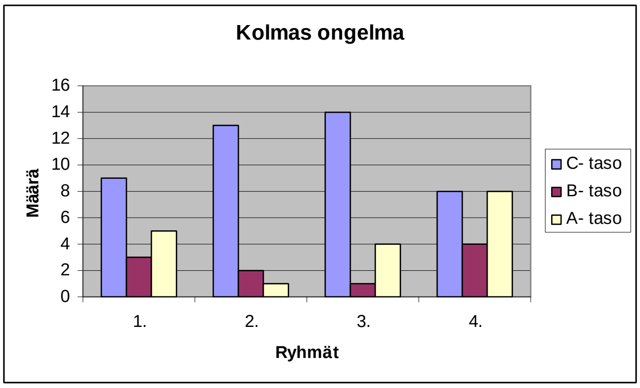
Suurimmiksi solmukohdiksi tulee siis muodostetun luokittelun perusteella kynnykset c- ja b-tasoisten, sekä b- ja a –tasoisten ratkaisujen välillä. Haastattelujen pohjalta selvitetään tarkemmin, miten nämä kohdat voitaisiin ylittää. Kuitenkin on syytä korostaa, että vaikka 18 vastausta (18/72) onkin nimetty a –tasoisiksi, eivät ne todellisuudessa ole samantasoisia. Vaikka analysointi onkin tehty ongelman ymmärtämisen ja lopullisen vastauksen perusteella, on havainnollisuuden vuoksi päädytty luokitteluun, jonka perusteella tällainen tulkinta on mahdollinen. Erot eri luokkien välillä korostavat solmukohtia, eli kohtia joihin oppilaista merkittävä osa on jumittunut.

Esittelemääni luokitteluun solmukohdista (kuva ?) sisältyy varsin oleellinen ristiriita. Olen tulkinnut a –tasoiseksi ratkaisutavan, jossa Ville kuljettaa lamppua koko ajan, vaikka se ei johdakaan parhaaseen mahdolliseen lopputulokseen. Päädyin tähän luokitteluun lopullisesti sen jälkeen, kun olin tutustunut luokanopettajaopiskelijoiden ratkaisuihin, joista suurimmassa osassa ratkaisija oli päätynyt kolmentoista minuutin ratkaisuun. Esittelen niiden tulokset tarkemmin luvussa (6.2.2). Luokittelussa (kuva ?) olen erottanut toisistaan erilaiset ajattelutavat, eli erilaisen ratkaisusuunnitelman sisältävät ratkaisut. Jos ajatellaan esimerkiksi tilannetta, jolloin oppilas on keksinyt, että jonkun on kuljetettava lamppua. Kehittyneempi versio siitä on, että nopein kuljettaa lamppua. Tämän huomioiminen johtaa ristiriitaan koko ongelman oikeaa ratkaisua ajatellessa. Kuitenkaan, kuten olen perustellut luvussa 5.1, ei olisi mielekästä arvioida ratkaisuja ratkaisusuunnitelman perusteella. Tämä tarkoittaisi sitä, että ainoastaan suunnitelmaa, joka johtaa kahdentoista minuutin ratkaisun pidettäisiin hyvänä.

6.1.2 Ryhmien vertailu

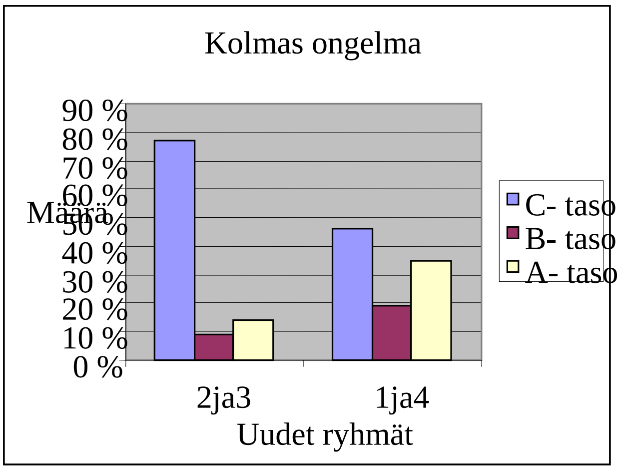
Testiin osallistuneiden oppilasryhmien välillä oli siltaongelmankin kohdalla niin suuria eroja, että niitä ei voida sivuuttaa. Alun perin tutkimuksessa ei ollut tarkoitus paneutua ryhmien vertailuun, mutta analysointivaiheessa tehtyjen havaintojen perusteella on syytä paneutua eroihin myös siltaongelman ratkaisuissa ryhmien välillä.

Kuvaan 10 on koottu kolmostehtävän ratkaisujen osaaminen ryhmittäin. Pylväsdiagrammista havaitaan suuret erot oppilasryhmien välillä ongelman ymmärtämisessä. Toisen ryhmän oppilaista ainoastaan yhden ratkaisu on muodostamani luokittelun perusteella a -tasoinen. Yhteensä kuudestatoista toisen oppilasryhmän tekemästä ratkaisusta kolmessatoista (13/16) ratkaisu on c –tasoinen. Verratessa toisen oppilasryhmän ja neljännen oppilasryhmän tekemiä ratkaisuja ero on merkittävä. Neljännen ryhmän ratkaisut ovat jakautuneet varsin tasaisesti. C – ja a –tasoisia ratkaisuja on kumpaakin kahdeksan (8/20) ja b –tasoisia neljä (4/20). Kaikkien neljän ryhmän ratkaisujen taso on havaittavissa oheisesta diagrammista (kuva 10).



Kuva 10. Kuudesluokkalaisten kirjalliset ratkaisut kolmanteen ongelmaan.

Ryhmien välisen suuren eron merkitys analysoinnille tulee hyvin esille, kun jaetaan aineisto kahteen osaan. Yhdistettäessä ensimmäinen ja neljäs oppilasryhmä keskenään omaksi aineistokseen, samoin kuin toinen ja neljäs omakseen, havaitaan miten suuri merkitys ryhmällä on ollut aineiston analysoinnista saatuihin tuloksiin. Ensimmäisessä ja neljännessä ryhmässä ratkaisuja on yhteensä 37. Jos jaoteltaisiin näin saatu aineisto aiemmin muokatun luokittelun perusteella saataisiin koko aineistosta varsin paljon poikkeavat tulokset. Käytettäessä aineistona pelkästään toista ja kolmatta oppilasryhmää (ratkaisuja yhteensä 35) tulokset olisivat selvästi koko aineistosta saatuja tuloksia heikompitasoisia. Kuvassa 11 on esitetty näin saatu uusi jakauma eri tasoisten ratkaisujen välillä.



Kuva 11. Kolmostehtävän ratkaisut. 1. ja 4. ryhmä sekä 2. ja 3. ryhmä yhdessä.

Tämän perusteella on selvää, että aineiston koko vaikuttaa merkittävästi analysoinnin aikana muodostuneeseen käsitykseen ongelman solmukohdista. Aineiston kohdejoukon ollessa riittävän kattava voidaan analysoinnin perusteella tehtyyn päättelyyn luottaa paremmin. Tässä tapauksessa vaikuttaa siltä, että opettajan ja käytettyjen opetusmetodien, sekä opetuksellisten valintojen merkitys on suuri. Näkökulma ongelman tarkasteluun poikkeaisi tämän hetkisestä paljon, mikäli olisi valittu tutkimuksen kohdejoukoksi sattumalta ryhmät, joiden ratkaisuista 77 prosentissa ei ole osattu oikeastaan aloittaakaan ratkaisua kunnolla. Toisaalta ensimmäisen ja neljännen oppilasryhmän ratkaisuista a –tasoisia on alle puolet ja jakauma eri tasoisten ratkaisujen välillä on varsin tasainen.

6.2 Kuudesluokkalaisten haastattelut

Siltaongelman analysointi etenee samantapaisesti kuin ensimmäisenkin ongelman analysointi. Tässä keskitytään tarkemmin oppilaan luovan toiminnan tarkastelemiseen kohtaamassaan solmukohdassa.

6.2.1 Tulkinta ratkaisujen etenemisestä

Muistin virkistykseksi esitän aluksi kolmannen ongelman: Antti, Veera, Jenni ja Ville ovat samassa päässä äärimmäisen vaikeakulkuista 150 metriä pitkää riippusiltaa. On erittäin sumuista ja pilkkopimeää, mutta silti heidän kaikkien tulee päästä turvallisesti sillan ylitse. He tietävät, että silta kestää korkeintaan kaksi henkilöä kerrallaan ja että matkalla tarvitaan ehdottomasti koko ajan taskulamppua. Antti kulkee sillan yli 5:ssä, Veera 4:ssä, Jenni 2:ssa ja Ville 1 minuutissa. Miten heidän tulisi menetellä, kun käytettävissä on vain yksi taskulamppu, jonka patterit ovat loppumaisillaan? Mikä on mielestäsi pienin mahdollinen aika, joka tarvitaan kaikkien neljän saamiseksi sillan yli?

Esittelen tulkintani oppilaan ajattelun polusta samaan tapaan kuin ensimmäisenkin ongelman tulkinnan. Iineksen kanssa käymäni keskustelu on osana tekstiä. Muut löytyvät liitteestä (liite 2).

T: *Mikä tehtävä sulla on siinä menossa, kolmonen vai?*

Iines: *Jos Antti ja Veera menis yhtä aikaa ja sitte ne näyttääs Jennille ja Villelle sitä valoa, mutta .. .. se on aika pitkä silta.*

T: *Niin se on sen verran pitkä silta, että niin kuin tuossa tehtävässä sanotaankin niin matkalla tarvitaan koko ajan ehdottomasti taskulamppua, se pitää olla se lamppu mukana koko ajan ihan pakosta, eli oot kirjoittanut, että jos Antti ja Veera menis yhtä aikaa .. niin mitä sitten? Kauanko niillä kestäisi ylittää se silta?*

Iines: *Viisi minuuttia.*

T: *Joo eli Antti ja Veera menis yhtä aikaa ja sitte?*

Iines: *Jennillä ja Villellä menis sitte kaks minuuttia.*

T: *Joo, Jennillä ja Villellä menis 2min ..*

Iines: *Mutta miten ne sais sen lampun.. ..*

T: *Niin, .. ,., .. miten ne sais lampun jos ei toiselta puolelta pysty näyttämään?*

Iines: *No sitte niin että Antti ja Ville menis ja ..Ville toissen takaasi sen lampun sitte se ei itte.. (mumisee)*

T: *Jos se veis takaasi sen lampun, niin mitä sen jälkeen sitte?*

Iines: *Niitten pitääs päästä sitte sainne toiselle puolelle ilman valoa.*

T: *Miksi?(piirretään), jos Antti ja Ville menis tonne niin kuin laitit ja Ville tois sen lampun takaisin, meillä jäi sitten Antti tonne, miten tämän jälkeen jatkettaisiin?*

Iines: *Sitte vaikka Jenni ja Veera menis ja sitte toinen tulis takaasi ja menis Villen kans.*

T: *Joo, sillä lailla se sillan ylitys onnistuisi.*

Iines: *Se kestää kauan.*

T: *Niin se kestää.. täytyis löytää mahdollisimman nopea tapa.. ..*

Iines: *Se kestääs kolmetoista minuuttia.*

T: *Joo kuinka se kävis silloin. Ketkä kulkis kenenkin kanssa?*

Iines: *Eka menis Antti ja Ville ja Ville tois lampun takasin. Veera ja Jenni menis ja Jenni tulis takaasi ja menis sitte Villen kanssa.*

T: *No oisko vielä mahdollista nopemmin?*

Iines: *Mm .. mm .. mm*

T: *Mitä yrität miettiä?*

Iines: *No ..*

T: *Mikä tuossa on hidasta?*

Iines: *Ku se pitää tuoda takaasi.*

T: *Jooo, jos se pitää joka tapauksessa tuoda eli se on iha oikea tapa, mutta silti siinä on vähä nopeampi vaihtoehto vielä, niin miten se ois mahdollista?*

Iines: *Jos Ville ja Jenni menis ensin*

T: *Joo, miksi?*

Iines: *Niillä kestää niin hetken.*

T: *Joo, Ville ja Jenni menis eka, niillä menee kauanko?*

Iines: *2min*

T: *Entä sen jälkeen?*

Iines: *Ville veis lampun Antille ja Veeralle*

T: *Joo, siinä menis*

Iines: *5min sitte vaikka toi .. .. .. Nii Jenni vois tuoda sen takaisin ja tuoda Villen sitte.*

T: *Kauanko siinä kuluis aikaa yhteensä?*

Iines: *8min mumisee ..*

T: *(lasketaan, käydään läpi paperilla saadaan 12min ihan oikein laskee). Se on kaikista nopein tapa..*

Iines ratkaisee ongelman lopulta täydellisesti oikein. Aluksi hän ehdottaa, että jonkun olisi näytettävä valoa sillan toiselta puolelta. Iines keksii kuitenkin itse, että Ville voisi tuoda lampun takaisin ja saa ratkaisuksi 13 minuuttia. Tämän jälkeen pelkkä toteamus siitä, että ylitys voitaisiin suorittaa nopeamminkin riittää kannustamaan Iinestä ratkaisemisen jatkamiseen. Hän keksii tämän jälkeen välittömästi, että hitaiden ja nopeiden kannattaisi kulkea yhdessä. Hän laittaa Villen ja Jennin ylittämään siltaa ensin yhdessä ja sen jälkeen Villen tuotua lamppu takaisin Antti ja Veera ylittävät sillan yhdessä. Iinekselle ei tuota vaikeuksia todeta, että Jenni voi hakea Villen lopuksi toiselta puolelta. Eli hänen mielessään lampun ei tarvitse olla koko ajan saman henkilön kädessä.

Iineksen ratkaisu on monessakin mielessä mielenkiintoinen. Hän sanoo aluksi, että valoa näytettäisiin toiselta puolelta lopuille sillan ylittäjille. Hän ei ollut aluksi tajunnut oikein tehtävän oletuksia tai ei ainakaan osannut käyttää niitä oikein. Voi olla, että Iines olisi jättänyt kirjallisen ratkaisunsa tähän ja olisin luokitellut hänen ratkaisunsa olevan c-tasoinen. Hän kykenee kuitenkin sujuvasti ylittämään tämän solmukohdan ja jatkamaan ratkaisua pidemmälle. Samoin hän kykenee jatkamaan saatuaan ratkaisuksi 13 minuuttia. Ensimmäisen solmukohdan ylittämiseen riittää tutkijan toteamus oletusten pitävyydestä, pelkkä niiden toistaminen. Lopullinen ratkaisukin löytyy, kun kannustan häntä ratkaisemisen jatkamiseen.

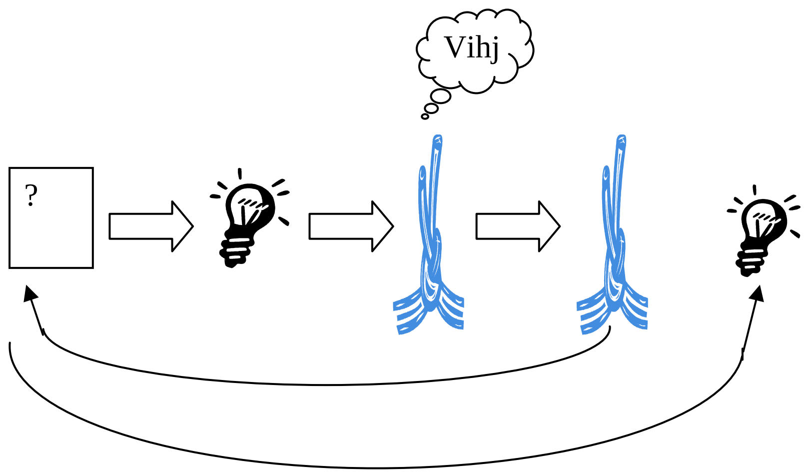
Tämä ratkaisu on hyvä esimerkki Polyan (1973) ongelmanratkaisuprosessin kuvailun toimivuudesta. Ennen kaikkea se osoittaa viimeisen-, tarkistamisen- tai takaisinkatsomisenvaiheen tärkeyden. Usein ratkaisijalle käy niin, että hän on tyytyväinen päästyään suunnitelmansa mukaiseen ratkaisuun, eikä hän ole enää motivoitunut jatkamaan pohdintaa tämän jälkeen. Tässä tapauksessa riitti auktoriteetin kannustus käynnistämään prosessin uudelleen. Iinekselle oli ehkä tiedostamattaan tai tiedostettuna herännyt epäilys aiemman ratkaisun aikana erilaisesta suunnasta kohdentaa ajatuksiaan. Kuitenkin ongelmanratkaisuprosessi on luonteeltaan niin intensiivinen, että ei ole mahdollista antaa tehdyn suunnitelman toteutusvaiheessa ajatusten poukkoilla liiaksi sivuille. Vasta toteutuksen päätyttyä on mahdollista kehittää ratkaisua uuteen suuntaan.

Iineksen ratkaisusta voidaan havaita hänen mielessään olleen merkittävänä johtoajatuksena vaatimus siitä, että ylitys tapahtuu mahdollisimman nopeasti. Tämä ilmenee hänen sanoistaan ratkaisun edetessä. Useaan kertaan hän mumisee ylityksen olevan hidasta. Verratessa useita ratkaisuja, joissa oppilas ei ole päässyt etenemään aivan loppuun saakka ja Iineksen ratkaisua voidaan havaita, että Iineksellä on tällainen oma ajatus. Useat oppilaat antautuvat kysymysteni johdateltaviksi ja ne tukahduttavat oppilaan omien ajatusten esille tulon.

Tällaisen analyysimenetelmän käyttämiseen liittyvistä hankaluuksista on havaittavissa muutamia Iineksen ratkaisun perusteella. Tutkijan on havaittava oppilaan puheen tauoista, ilmeistä ja eleistä mitä hänen mielessään liikkuu. Jälkikäteen on selvästi havaittavissa muutamia tilanteita, joissa tutkijan erilainen toiminta olisi johtanut erilaiseen tulokseen.

Lupun ja Iineksen ratkaisuista on löydettävissä yhteisiä piirteitä. Lupullakin oli koko ajan selkeästi huoli siitä, että silta ylitettäisiin mahdollisimman nopeasti. Ensiksi hän ehdottaa, että Ville voisi nopeampana auttaa Anttia kulkemaan nopeammin. Kerrottuani tehtävän oletusten olevan ehdottomia, hän ehdotti heti, että nopeamman on tuotava lamppu takaisin. Huoli ajan kulumisesta näkyy myös siinä, että lampun kantaja ei tule ihan perille asti. Hän sanoo, että: ”..sitteku se rupeis näkymään sieltä toiselta puolelta se.. maa tai niinku se, niin ne vois niin se nopeampi antaas mennä sen Antin sille toiselle puolelle..ja lähtis se nopeampi sinne hakee niitä seuraavia”. Hän saa vastaukseksi kolmetoista minuuttia. Kuitenkin hän ei tyydy tähän ratkaisuun vaan jatkaa heti, että Antin ja Veeran kannattaisi kulkea yhdessä. Tällöin Ville ja Jenni voisivat myös ylittää sillan yhtä aikaa ja näin säästyisi aikaa. Oppilasta vaivaa uudessa strategiassa lampun takaisin kuljettaminen, sillä hitaiden ei kannata viedä sitä takaisin. Kysyttyäni: ” Mitä jos Antti ja Veera eivät lähtisikään ensin?”, hän kykenee ratkaisemaan ongelman kokonaan uudenkin strategian mukaisesti.

Olen jäljentänyt Lupun ajattelun etenemisen kuvaan 12. Tulkinta ajattelun kulusta ratkaisun edetessä on pelkistetty, mutta se korostaa hyvin oman strategian merkitystä Lupun ratkaisun aikana. Jo ratkaisun aluksi hänellä on mielessään kysymyksen kaltainen painotus siitä, mitä hänen tulee selvittää, eli mahdollisimman nopea tapa sillan ylitykseen. Tämä kysymys vaikuttaa hänen ratkaisuunsa useassa kohdassa, kun hän jatkuvasti peilaa päätelmiään tähän pohjakysymykseen. Pohjakysymys kannustaa häntä jatkamaan ratkaisua kolmentoista minuutin vastauksen löydyttyäkin. Kuvassa lamppu kuvaa ratkaisijan omaa ideaa ja pilvi ulkopuolta tulevia kommentteja. Solmu tarkoittaa solmukohtaa.



Kuva 12. Kuvailu Lupun ratkaisun polusta siltaongelmassa.

Lupu on selkeästi ymmärtänyt, mitä tehtävässä pitäisi ratkaista. Hänellä on palava halu ratkaista ongelma. Polyakin (1973) painottaa motivaatiota ja ratkaisun janoamista edellytyksenä onnistuneelle ongelman ratkaisulle (Polya 1973, 6). Koko ratkaisun ajan oppilaan pohtimista ohjaa tehtävän pääkysymys, eli miten ylitys onnistuu mahdollisimman lyhyessä ajassa. Tämän toteuttamiseksi hän miettii ”hullujakin” ideoita. Kaikesta tästähän ongelmanratkaisussa on lopulta kysymys. Se on luovaa toimintaa (Peltonen & Zimmerman 1990, 40), jossa lopulta on kyse polun löytämisestä ennalta oudossa tilanteessa. Huomioitavaa tämän oppilaan ratkaisussa on määrätietoinen toiminta ja sinnikäs yritys. Ehkä ne ovat seikkoja, jotka erottavat onnistuneen ratkaisun melko hyvästä ratkaisusta.

Toisaalta tätä ratkaisua ohjaa mahdollisimman nopean ratkaisun etsiminen. Monet oppilaista, jotka ovat ymmärtäneet ongelman ”peruselementit” ja saaneet vastaukseksi kolmetoista minuuttia, eivät kuitenkaan ole pohtineet muita mahdollisuuksia ajan minimoimiseksi. Toisaalta kuitenkaan ei voi suoraan sanoa, että he olisivat tyytyneet tähän ratkaisuun. Ongelma saattaa olla heidän muokkaamansa suunnitelman mukaisesti ratkaistu. He ovat saattaneet pohtia erilaisia vaihtoehtoja sillan ylittämiseksi, mutta eivät ole keksineet mihin aikaa oikeastaan kuluu sillan ylityksessä. Se, että kahden hitaimmin ja nopeimmin kulkevan kannattaisi kulkea yhtä aikaa pitää keksiä, että aidosti osaisi epäillä omaa ratkaisuaan.

Hupun, Tupun ja Mikin ratkaisut ovat hyvin samankaltaisia. He vastasivat 13 minuuttia. He ymmärsivät tehtävän oletukset ja osasivat niiden pohjalta muokata järkevän ratkaisun. Tupun ja Mikin kanssa emme ehtineet ja Hupu ei lyhyessä ajassa osannut jatkaa ratkaisua tästä eteenpäin.

Minni ratkaisi tehtävän niin, että kaksi henkilöä kulkee yhtä aikaa ja Ville nopeimpana kuljettaa lamppua. Hän ratkaisi väärin ajan, joka kuluu kahdelta henkilöltä sillan ylittämiseen. Hän laski ajat vain yhteen. Tämän hän ymmärsi oikein painotettuani, että Jenni ja Ville joutuvat kulkemaan koko ajan yhdessä.”

Heluna ratkaisee ongelman aluksi niin, että henkilöt ylittävät sillan pareittain ja joku heistä lähtee hakemaan aina seuraavaa. Tässä vaiheessa hän ei ole ottanut huomioon ylittäjiltä kuluvan ajan merkitystä. Heluna ei ymmärrä aluksi oikein, mitä oletukset eri henkilöillä ylitykseen kuluvasta ajasta merkitsevät. Hän kertoo, että Villellä ja Antilla kuluu yhdessä ylitykseen aikaa minuutti. Hetken tästä keskusteltuamme hän sanoo aikaa kuluvan kuusi minuuttia. Vasta siirrettyäni tilanteen hänelle tutumpaan yhteyteen, eli muutettuani tilanteen konkreettisemmaksi Heluna ymmärtää, että Villen olisi kuljettava hitaammin ja aikaa heiltä kuluu yhdessä viisi minuuttia. Tämän jälkeen Heluna ymmärtää itse, että Villen kannattaisi kuljettaa lamppua ja hän saa vastaukseksi kolmetoista minuuttia. Tästä eteenpäin emme kykene muutaman minuutin aikana etenemään.

Hansu ehdottaa aluksi, että kahden henkilön ylitettyä silta, he näyttävät valoa toisille kahdelle. Pareiksi hän valitsee pojat ja tytöt, eli hän ei tee valintaa ylitysnopeuden perusteella. Hansu miettii aktiivisesti myös muita ylitystapoja. Koska Hansun ratkaisu miettimisestä huolimatta jumiutuu tähän, konkretisoin tilanteen haastatteluympäristöön ja otan Hansun ja itseni ensimmäisiksi ylittäjiksi. Nytkin Hansu keksii erilaisia ideoita lampun toimittamiseksi toiselle puolelle. Hän ehdottaa heittämistä ja köydellä vetämistä. Pääsemme etenemään ratkaisussa vasta ehdotettuani, että minä toisin lampun takaisin. Tämän jälkeen Hansu keksii perusidean, eli jonkun on aina tuotava lamppu takaisin. Hän valitsee lampun kuljettajaksi Villen. Kuitenkin hän sanoo aluksi, että Villen ja Antin ylittämiseen käyttämä aika olisi kuusi minuuttia. Pelkkä kysymys: ”Miksi?”, riittää siihen, että hän toteaa aikaa kuluvan viisi minuuttia. Lopulta Hansu saa ratkaisuksi kolmetoista minuuttia.”

Tiinulla on aluksi vaikeuksia ymmärtää kauanko Villellä ja Antilla kuluu aikaa sillan ylitykseen yhdessä. Hän ehdottaa, että Antti kulkisi nopeammin. Hän ei ole ymmärtänyt kunnolla, mitä tehtävässä annetut oletukset merkitsevät. Sen jälkeen kun oli selvitetty kauanko kuluu kahdelta henkilöltä sillan ylittämiseen, oppilas ratkaisi ongelman vaivatta saaden vastaukseksi kolmetoista minuuttia. Kahdentoista minuutin vastaustauksen selvittämiseen ei kuitenkaan ollut aikaa.

Leenulla on Tiinun tavoin vaikeuksia oletusten ymmärtämisessä. Hän ehdottaa vastaukseksi aluksi 12 minuuttia. Kun vaadin selvitystä, miten tämä toteutuisi hän huomaa kysyä pitäisikö kaikilla olla taskulamppu siltaa ylittäessä. Tämän jälkeen hän jatkaa, että kaksi ylittäisi sillan ja yksi toisi lampun takaisin. Kun oppilas selittää, miten sillan ylitys tapahtuisi nyt, hän ei kiinnitä huomiota kenen kannattaisi tuoda lamppu takaisin. Mahdollisimman lyhyeksi ajaksi hän ilmoittaa 15minuuttia. Kun hän alkaa selittää tätä vastausta hän sanoo, että sillan pitäisi ylittää aina hitaasti ja nopeasti kulkevat henkilöt, näin aikaa kuluisi vähemmän. Ajan kulkua laskiessa hän laskee yhteen Villen ja Antin ajat.

Liinu ei kyennyt muodostamaan suunnitelmaa tehtävän ratkaisemiseksi. Hän ei pitkästäkään miettimisajasta ja vinkeistä huolimatta keksinyt ratkaisua. Hänen ratkaisuyrityksistään päätellen vaikutti siltä, että tämänkaltainen tehtävä on hänelle täysin uusi, eikä hänellä ollut mitään kuvaa miten ratkaisua voisi edes lähteä miettimään. Oikeastaan hän ei kunnolla päässyt edes ratkaisemisen alkuun. Kertoessani, miten tehtävä olisi mahdollista ratkaista hän ymmärsi kuitenkin, että henkilöistä nopeimman eli Villen olisi syytä kuljettaa lamppua.

Oppilas jumittui miettimään, miten lamppu saataisiin sillan toiselta puolelta takaisin. Tämä onkin ratkaisun perusedellytys. Hänen ehdotuksensa lampun takaisin saamisesta olivat varsin mielenkiintoisia ja luovia. Ongelmatehtävien miettimisen vähyys näkyy selkeästi siinä, ettei hän kyennyt tehtävässä annetuista oletuksistakaan päättelemään, mitä siinä oikeastaan edes halutaan selvitettävän.

Touho esittelee aluksi keksimänsä ratkaisun, jossa hitaimmat eli Antti ja Veera ylittävät sillan ensin ja Veera lähtee hakemaan Jenniä. Eli Touho on ymmärtänyt peruskeinon sillan ylittämiseksi itse, mutta ei ole huomioinut kenen kannattaisi kuljettaa lamppua. Touholla on vaikeuksia ymmärtää kauanko hitaalla ja nopealla kuluu aikaa kulkiessa yhdessä. Korostettuani kahteen kertaan, että henkilöt kulkevat yhdessä Touho ymmärtää tämän oikein. Lampun kuljettajaksi Touho valitsee kysyessäni Villen.

6.2.2 Solmukohtien ylittäminen

Tulkinnoissa ratkaisujen etenemisestä on esitetty tapauskohtaisesti, miten oppilaat ovat kyenneet ohittamaan kohtaamaansa vaikeudet. Kuitenkin on syytä vielä koota yhteen muutamia keskeisiä oppimistilanteista ilmeneviä yhteisiä tai muuten mielenkiintoisia piirteitä.

Kirjallisten ratkaisujen analysoinnissa havaittiin, että 61 prosenttia oppilaista oli jumittunut ratkaisussaan vaiheeseen, josta ei voi päätellä heidän ymmärtävän tehtävää juuri lainkaan. Ylittämisen perusidean löytäminen oli keskeisin hankaluus ongelman ratkaisussa. Tarkemman seurannan analysoinnin perusteella havaitaan, että kaikki oppilaat kykenivät ylittämään tämän solmukohdan eritasoisten vinkkien avulla Hansua lukuun ottamatta. Hänen kohdallaan vasta tilanteen konkretisointi ja selkiyttäminen, sekä varsin suora ehdotus samankaltaisen tilanteen ratkaisusta käynnisti ratkaisuprosessin todella. On huomioitava, että Hansukin löysi lopulta kolmentoista minuutin ratkaisun.

Siirtyminen tekemäni luokittelun perusteella b –tasoisesta ratkaisusta a –tasoiseen sujui oppilailta helposti. Useat keksivät tämän ilman vinkkiä käytyään ratkaisua uudelleen läpi. Kaikki oppilaat tajusivat, että Villen kannattaisi kuljettaa lamppua hitaampien sijasta. Kolmentoista minuutin ratkaisun etsimisen voidaan tulkita haittaavan lopullisen ratkaisun löytymistä, se suuntaa ajattelun väärin ajatellen kahdentoista minuutin ratkaisua.

Siltaongelmassa lopullisen ratkaisun löytäminen edellyttää ratkaisijalta selkeää suunnitelmaa, tai perusideaa ratkaisun etenemisestä. Iines ja Lupu olivat ainoita, jotka keksivät kahdentoista minuutin ratkaisun. Kummallakin heistä oli selkeä huoli siitä, että ratkaisun on oltava mahdollisimman nopea. Siksi siltaongelmassa ulkoiset vinkit eivät toimi yhtä selkeästi kuin välimatkaongelmassa. Vinkeillä on kyllä mahdollista toteuttaa oppilaiden suunnitelman mukainen ratkaisu, mutta ulkoisen vinkin perusteella kukaan ei sisäistänyt erilaista strategiaa.

Solmukohtien ylittämisessä on korostettava strategian merkitystä. Oikea ratkaisu edellyttää täydellistä strategiaa. Sen voi löytää kokeilun, Iineksen ja Lupun kaltaisen kysymyksen korostamisen tai määrätietoisen pohtimisen jälkeen. Opiskelijoiden ratkaisut osoittavat, että kolmentoista minuutin vastaus on niin ilmeinen, että siihen päätyminen sammuttaa kokeiluprosessin helposti.

Keskustelujen perusteella matemaattisen ajattelun opettamisessa voitaisiin korostaa kyseenalaistamista samalla tavalla, kun koulussa opetetaan esimerkiksi suhtautumaan kriittisesti internetissä olevaan tietoon. Tällä tavalla ratkaisija saattaisi helpommin pohtia selvältä vaikuttavan vaihtoehdon lisäksi muitakin mahdollisia ratkaisuvaihtoehtoja. Avoimien ongelmien muodostamisessa voidaan käyttää ”What-If-Not” –

strategiaa. Japanilaisen Hye Sook Seon mukaan tämä mitä jos ei –kysymys on hyvä keino laajentaa näkökulmaa ratkaistessa avointa ongelmaa ja se toimii hyvin rajatumpien ongelmien asettamisessa (Hye Sook Seo1997, 85-86). Strategia toimii luontevimmin projekteissa. Tutkimustehtävän parissa työskennellessä oppilaita rohkaistaan ajattelemaan vaihtoehtoisia strategioita, kun taas probleemanratkaisussa oppilaiden on löydettävä ratkaisu määrättyyn ongelmaan (Pehkonen & Zimmermann 1988, 63). Tällaisissa projektiin liittyvissä tutkimustehtävissä kehittyvä selvältä vaikuttavan kyseenalaistaminen ja aktiivinen vaihtoehtoisten strategioiden etsiminen on tärkeää siltaongelman kaltaisissa tilanteissa.

Varsin monelle ratkaisijalle tuotti hankaluuksia ymmärtää, kauanko henkilöillä kuluu aikaa ylitykseen yhdessä. Usein kehotus lisämietintään auttoi, mutta muutamien kohdalla vasta konkreettisesta esimerkistä oli apua. Kirjallisissa ratkaisuissakin 50 prosentissa ratkaisuista (9/18), joissa ymmärrys oli a –tasoista, aika oli laskettu väärin. Selvästikin oppilaille on hankalaa keksiä itse, kuinka tällaisissa tilanteissa on meneteltävä. Kysymystä, kuinka kauan Antilla ja Veeralla kuluu aikaa ylitykseen yhdessä, jos Antti pääsee nopeimmillaan yli viidessä ja Veera neljässä minuutissa, voisi pitää omana ongelmanaan.

6.3 Luokanopettajaksi opiskelevien ratkaisut

Opiskelijoiden ratkaisut auttoivat minua tulkitsemaan kahden keskenään erilaisen strategian suhdetta. Kolmessatoista ratkaisussa (13/14) vastaus oli kolmetoista minuuttia, kun ainoastaan yksi opiskelija (1/14) oli löytänyt ratkaisuksi kaksitoista minuuttia. Kolmentoista minuutin ratkaisuista kaikissa oli varsin johdonmukaisesti edetty tehdyn suunnitelman mukaan ja vielä kirjoittaen painotettu, että Villen kannattaa nopeimpana kuljettaa lamppua.

Kaksitoista minuuttia vastannut opiskelija oli korostanut ratkaisuaan ympyröimällä vaiheen, jolloin Antti ja Veera kulkevat yhdessä sillan yli. Se, että hitaat ylittävät sillan yhdessä onkin keskeisin asia, joka erottaa strategiat toisistaan. Villen kuljettajana toimiminen on niin ilmeinen ratkaisu, että yksi opiskelijoista ehdottaa tehtävän tekemistä mielenkiintoisemmaksi lisäoletuksin, vaikka hän ei olekaan löytänyt nopeinta mahdollista keinoa.

Kolmessa (3/13) kolmentoista minuutin ratkaisussa oli jatkettu nopeamman ratkaisun etsintää vastauksen löydyttyä, mutta todettu kokeilujen jälkeen sen olevan nopein mahdollinen tapa.

6.4 Luovat ratkaisut

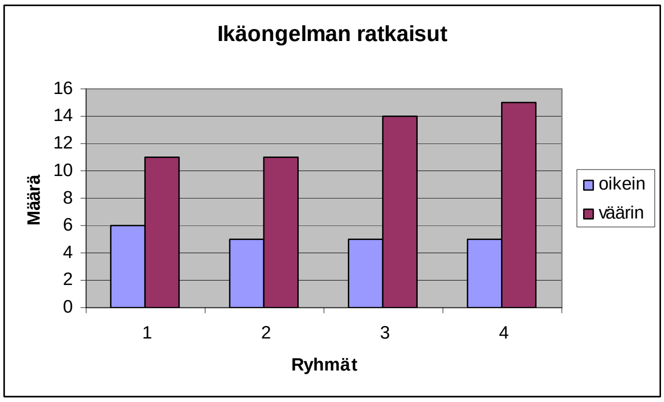
Törmätessään solmukohtaan ratkaisija toimii useilla mahdollisilla tavoilla. Yksi tapa on pyrkiä aktiivisesti jatkamaan ratkaisua. Tällöin oppilas pyrkii keksimään erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja. Siltaongelmassa erilaisia tapoja ylityksen toteuttamiseen tuli useita. Niitä olivat köyden hyväksikäyttö, lampun heittäminen, puoleen väliin kulkeminen ja valon näyttäminen, perässä tulo sekä puoleen väliin meno ja heittäminen. Näistä mitään ei voi pitää vääränä ratkaisuna. Avoimissa tehtävissä tällainen vaihtoehtojen etsiminen on ainoastaan hyvä asia. Olisi hyvä, että useammassakin ratkaisussa olisi alettu pohtia vaihtoehtoisia, luovia strategioita sillan ylittämiseksi. Vaulamo ja Pehkonen ovat ongelmanratkaisu tutkimuksessaan todenneet, että oppilailla ei ole valmiutta luovaan ajatteluun, tai siis eri vaihtoehtojen tuottamiseen ja pohtimiseen (Vaulamo & Pehkonen 1999, 72-73). He korostavat, että luovuus on keskeinen komponentti ongelmanratkaisussa ja koska ongelmanratkaisua voidaan pitää matematiikan ytimenä, niin luovuuden harjoitteluun on kiinnitettävä huomiota myös matematiikan tunneilla (Vaulamo & Pehkonen 1999, 73).

Luovuus liittyy hyvin läheisesti ongelmanratkaisuun. Bergström (1985) määrittelee luovuuden olevan käyttäytymistä, jossa yksilö tuottaa uutta ja ennalta ennustamatonta (Bergström 1985, 159). Pehkonen ja Zimmerman havaitsevatkin luovuuden määrittelyn ja ongelmanratkaisun määritelmien välillä olevan selkeän yhteyden, kummassakin yksilö laatii itselleen uudenlaisen kokonaisuuden (Pehkonen & Zimmerman 1990, 41). Guilfordin mukaan luovuutta ilmentää neljä tekijää: ideavuolaus, ideajoustavuus, originaalisuus ja viimeistely (Heikkilä 1982, 41).

Luovuuden ja ongelmanratkaisun yhteys tulee selvästi esille etenkin tilanteissa, jolloin oppilaalla ei ole minkäänlaista mielikuvaa tai ajatusta, miten lähteä jatkamaan ratkaisua. Sillan ylittäminen olisi mahdollista tehtävän oletusten asettamissa rajoissa kaikissa muissa oppilaiden ratkaisuissa paitsi tilanteessa, jolloin henkilöt kulkevat toistensa perässä. Oletukset eivät kiellä heittämistä, 150 metrin matka vain on liian pitkä sen toteuttamiseksi. Puoleen väliin kulku ja siitä heittäminen olisi mahdollista, mutta niin ei toki saavuteta vastaavaa hyötyä kun kerrallaan sillalla saa olla vain kaksi henkilöä. Samalla tavalla käy valon näyttämiselle puolesta välistä. Nämä vaihtoehdot ovat kuitenkin ratkaisuprosessin aikana samanarvoisia kuin muutkin mahdolliset ratkaisut. Ne täytyy vain tarkastella erikseen ja todeta hyviksi tai huonoiksi. Luova ongelmanratkaisu alkaa Sahlbergin ym. mukaan ongelman tai parannusmahdollisuuden tiedostamisella (Sahlberg, Meisalo, Lavonen & Kolari 1994, 53). Siksi voidaan sanoa, että luovia toimimattomiakin ideoita keksivät oppilaat ovat edenneet ratkaisussaan pidemmälle, kuin toimettomaksi jäävä oppilas.

7. IKÄONGELMA

En esitä ikäongelman käsittelyä yhtä laajasti kuin edellisiä, välimatka- ja siltaongelmaa. Ikäongelma osoittautui solmukohdiltaan erityyppiseksi kuin muut ongelmat. Erilaisia ratkaisustrategioita ei ole yhtä paljon kuin muissa ongelmissa. Haluan selkeästi rajata tutkimusta solmukohtien käsittelyyn. Tutkimuksen lyhentämiseksi esittelen tässä ainoastaan keskeisimmät tulokset ja keskeisimmät ikäongelmasta tekemäni tulkinnat.



Kuva 13. Kuudesluokkalaisten ratkaisut toiseen ongelmaan.

Kuvassa 13 esitellään kirjallisten ratkaisujen tulokset. Muista ongelmista poiketen taulukossa on nähtävillä ainoastaan onko ratkaisu oikea vai väärä. Yhteensä 72:sta ratkaisusta 21:ssä oppilas oli löytänyt oikein ratkaisun, eli Pekka on kymmenen ja Saija viisi vuotta vanha. Haastattelujen perusteella kaikki oppilaat kokeilivat erilaisia mahdollisia ikiä Saijalle ja Pekalle ja niiden perusteella tekemiensä havaintojen pohjalta he muokkasivat ratkaisusuunnitelmansa. Useille oppilaille vaikutti aluksi mahdottomalta, että toinen henkilö ikääntyy nopeampaa. Kuitenkin he ylittivät tämän kynnyksen useimmiten pelkästään aloittaen erilaisten vaihtoehtojen kokeilun. Siksi ei olekaan mielestäni tarpeen liittää ikäongelman tarkastelua työhön yhtä laajasti kuin välimatka- ja siltaongelmaa.

Haastattelutilanteissa ohjasin oppilaita kokeilemaan erilaisia mahdollisuuksia ja sen jälkeen pohtimaan toteutuvatko tehtävän oletukset. Toimintani johti siihen, että ratkaisemisesta tuli onnenkauppaa. Keskeiseltä tässä tilanteessa vaikutti ainoastaan se, mistä kokeilut lähtivät liikkeelle. Tämän tulkinnan tueksi kehotan ainoastaan lukemaan Hupun kanssa käymästäni keskustelun (liite 3). Tein seuraavanlaisen tulkinnan keskustelusta.

Hupu miettii aluksi, miten vanhoja Pekka ja Saija ovat tällä hetkellä. Pekan iäksi hän valitsee ensin oman ikänsä. Voisi ajatella, että ratkaisun miettiminen tässä järjestyksessä on helpompaa, kuin päinvastaisessa, eli neljä vuotta sitten ikien pohtiminen, sillä kokeillessa ikävaihtoehtoja tällä hetkellä ne osuvat helpommin oikeaan, ainakin jos oppilas aloittaa omasta iästään. Toisaalta vaikuttaa myös helpommalta vähentää tämän hetkisestä iästä neljä vuotta ja miettiä sen jälkeen oletuksen ”kuusi kertaa vanhempi” toimivuutta, kuin huolehtia ensin, että Pekan ikä on kuusinkertainen Saijan ikään verrattuna ja alkaa tämän jälkeen miettiä ikiä neljän vuoden kuluttua. Kuitenkin helppo vaihtoehto tässä ”onnenkaupassa” olisi myös edetä Saijan iän kautta. Eli merkata ensin Saijan iäksi esimerkiksi yksi vuosi. Tämän jälkeenhän oletukset toimivat vaivatta.

Luokanopettajaksi opiskelevista puolet (7/14) osasi ratkaista ongelman. He kaikki käyttivät yhtälönratkaisua jossain muodossa, mutta myös pelkkää kokeilua. Väärän vastauksen antaneista viisi ei löytänyt mielestään oikeaa ratkaisua ja kaksi sanoi kokeilujen jälkeen, ettei oikeaa ratkaisua ole olemassa. Opiskelijoiden ratkaisut tukivat päätöstäni jättää ikäongelma tarkemman analyysin ulkopuolelle, sillä aikuisetkin tarvitsivat puhdasta kokeilua ongelman ratkaisuun. Mielenkiintoista tietoa ajattelun etenemisestä ei tällöin ole löydettävissä käyttämälläni menetelmällä.

8. TUTKIMUKSEN JÄLKEEN

Olen pohtinut jo tutkimustulosten käsittelyvaiheessa oppilaiden ajattelusta tekemiäni johtopäätöksiä (luvut 6 ja 7). Olen pyrkinyt jatkuvasti pohtivaan tulosten käsittelemiseen niin, että koko ajan etsin selityksiä ja tarkkailen kriittisesti omia ajatuksiani. Siksi tässä osiossa pohdin ainoastaan, miten tutkimustuloksia voidaan hyödyntää ja mitkä asiat kaipaisivat jatkotutkimusta. Toisaalta mietin, miten toteuttaisin tutkimuksen jälkeenpäin ja millaisiin asioihin voisi näin paremmin etsiä vastauksia.

Tässä tutkimuksessa tutkin kuudesluokkalaisten oppilaiden ongelmanratkaisuprosessin etenemistä kolmen matemaattisen ongelmatehtävän avulla. Tutkimustehtävänä oli selvittää millaisiin asioihin opettajan tulisi kiinnittää huomiota kyetäkseen auttamaan oppilasta ongelmanratkaisutaidon oppimisessa. Tutkimustulokset auttavat opettajaa ymmärtämään matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin etenemistä. Tutkimuksen avulla opettaja voi huomioida, millaisiin asioihin hänen tulisi kiinnittää huomiota opettaessaan. Tutkimuksen suurin anti on siis ennen kaikkea toimeenpanevana tekijänä, ajattelun aktivoijana toimiminen.

Oppilaiden ajattelun etenemisen kuvaukset, eli tulkintani ratkaisujen etenemisestä ovat tutkimuksen konkreettisin tulos. Niiden avulla nähdään, miten oppilaiden ajattelun polku kulkee kolmea tiettyä ongelmaa ratkaistessa. Näiden kuvauksien lukeminen kertoo opettajille yksityiskohtaisesti, miten erilaisia ratkaisustrategioita lapsilla voi ongelmia ratkaistessaan olla ja millaisiin kohtiin heidän ratkaisunsa tyypillisesti törmää. Näiden ratkaisun solmukohtien tuntemisen avulla opettajan on mahdollista paremmin ohjata oppilaita henkilökohtaisesti. Samalla tutkimus tarjoaa opettajille uudenlaisen mahdollisuuden matemaattisten tehtävien rakenteen ja oppilaiden erilaisten näkökulmien tuntemiseen.

Tutkimustulosten laajempi yleistys ei ole tulosten luonteen takia mahdollista. Niitä pitää tarkastella yksityiskohtaisena opetustilanteeseen liittyvänä tietona, jota sinällään voidaan laajastikin hyödyntää koulumaailmassa. Tutkimuksen jälkeen mietityttää, miten tuloksista olisi voitu tehdä laajemmin yleistettäviä. Kiistattomat ja yleiset tiedot ajattelun etenemisestä ongelmanratkaisuprosessin aikana edellyttäisivät monipuolisia tutkimuksia, joissa paneudutaan tarkemmin ratkaisijan mielessä tapahtuviin prosesseihin. Ajatuksien paperille kirjoittaminen ja lyhyet haastattelut eivät ole riittäviä keinoja. Tarvittaisiin pidempi aikaista seurantaa ja paljon suurempaa otosta, kohdejoukon tulisi olla suurempi ja ongelmatehtäviä pitäisi olla enemmän. Ajattelun tutkiminen on toki haastavaa jo sinälläänkin, koska ihmisen mielessä tapahtuvat asiat eivät ole selkeästi nähtävillä ja monet asiat vaikuttavat niihin. Siksi onkin syytä tunnustaa, että ainakaan tässä vaiheessa minulla ei ole riittäviä tietoja siihen syventymiseen.

Ongelmanratkaisuun liittyen on olemassa paljon mielenkiintoista tutkittavaa. Tämän tutkimuksen jälkeen ajattelun taitojen tutkiminen vaikuttaa mielenkiintoiselta. Havaitsin oppilaiden ratkaisuista erilaisia tapoja ymmärtää yksinkertaiselta vaikuttava tilanne. Näistä esimerkkinä voisi mainita keskustelun Lupun kanssa välimatkaongelmaa ratkaistessa. Lupun ajattelun perusteella havaitsin, miten oppilaan mielikuva ongelmatilanteesta voi vaikuttaa ratkaisuun. Koko välimatkan käsite muuttuu siirryttäessä kaupunkiympäristöstä maaseudulle, kun ajatellaan tilannetta Lupun kaltaisesti.

Tutkimusaineistosta olisi ollut saatavissa erilaisia tuloksia, jos järjestelyjä olisi muutettu hieman. Tässä tutkimuksessa ongelmien solmukohdat etsittiin vasta, kun haastattelut oli jo tehty. Tällä järjestelyllä oppimistilanteesta muodostui aidompi ja oppilaslähtöisempi, kuin jos kirjallisten ratkaisujen perusteella olisi jo aiemmin ollut konkreettiset testattavat kohteet. Määrätietoisella jo olemassa olevien solmukohtien testaamisella saadaan tarkempaa tietoa opettajan mahdollisista keinoista auttaa oppilasta, kuin nyt käytetyllä järjestelyllä. Tutkimuksen laadullisuuteen kuuluu kuitenkin se, että tutkimus selkiytyy lopulliseen muotoonsa vasta sen tekemisen aikana. Välttämättä en olisi kyennyt löytämään solmukohtia, kun minulla ei olisi ollut käytettävissä haastatteluja, joiden perusteella muodostin käsitykseni erilaisista ratkaisustrategioista ja mahdollisista näkökulmista. Kuitenkin jälkeenpäin tuntuisi mielenkiintoiselta testata tarkemmin erilaisten keinojen vaikutusta oppilaan ratkaisuun. Pitkäkestoisella opetuskokeilulla voisi testata, miten piirtäminen, yleisten ratkaisustrategioiden ja toimien opettelu ja oppilaan ohjaaminen oman toiminnan tarkasteluun vaikuttaa heidän ratkaisutaitoihinsa.

Olen tuloksia analysoidessa havainnut, että erittäin merkittävä tekijä ratkaisun onnistumisen taustalla on se, että oppilaalla on selkeä kokonaiskuva, eli hyvä käsitys ratkaistavasta ongelmasta. En kuitenkaan pyrkinyt oppimistilanteessa ohjaamaan oppilaita kokonaisuuden havaitsemisen perusteella, vaan testasin heidän osaamistaan erilaisissa ongelman osissa. Monet oppilaat eivät kyenneet yhdistämään tietojaan kokonaisuudeksi, eli he eivät osanneet ratkaista ongelmaa, vaikka osasivat selkeästi kaikki ratkaisun elementit. Siksi olisikin mielenkiintoista tutkia, miten ratkaiseminen onnistuu, jos oppilaita ohjaisi määrätietoisesti ongelman kokonaisuuden hallitsemisen kautta.

Luokanopettajaksi opiskelijat tekivät saman testin kuin kuudesluokkalaisetkin oppilaat. Opiskelijoita oli tutkimuksessa mukana varsin vähän. Heidän ratkaisunsa toimivat tukena erilaisten ratkaisustrategioiden ja ajattelutapojen huomioimisessa. Olisi mielenkiintoista tutkia laajemmin opiskelijoiden osaamista ongelmanratkaisutehtävissä. Heidän ratkaisujensa perusteella vaikuttaa siltä, että koulussa opitut tiedot haittaavat monissa tilanteissa luontaista ongelmanratkaisua. Vaikutti siltä, että lisätiedot joista voisi olla apua ratkaisussa, ohjasivat heidän ratkaisuaan liiaksi ja jumittivat luovan ratkaisun etsimisen. Näiden havaintojen perusteella olisikin mielenkiintoista testata tarkemmin opettajien ja aikuisten ongelmanratkaisutaitoja ja verrata niitä lasten taitoihin. Näin saataisiin uudenlainen näkökulma ongelmanratkaisutaitojen opettamiseen. Jo tämänkin tutkimuksen perusteella on selvää, että opettajan toiminta vaikuttaa merkittävästi oppilaan toimintaan ratkaisutilanteessa. Opettajien taitojen tunteminen auttaa varmasti ymmärtämään, miten ongelmanratkaisua tulisi opettaa.

LÄHTEET:

Aalto, A., Kangasaho, J. & Mäkinen, J. 2001. Lyhyt matikka. Matemaattinen ongelmanratkaisu. Porvoo: WSOY.

Alasuutari, P. 1994. Laadullinen tutkimus. Tampere: Vastapaino.

Berger, P. 1998. Exploring Mathematical Beliefs- the naturalistic Approach. Teoksessa M. Ahtee & E. Pehkonen. (toim.). Research Methods in Mathematics and science Education. Helsinki: Hakapaino, 25-41.

Bergström, M. 1985. Luovuus ja aivotoiminta. Teoksessa: R. Haavikko & Ruth, J-E. (toim.). Luovuuden ulottuvuudet, 159-172.

Charles, R., Lester, F. & O´Daffer, P. 1987. How to evaluate progress in problem solving. Reston (VA): Council.

Eskola, J. 2001. Laadullisen tutkimuksen juhannustaiat. Laadullisen tutkimuksen analyysi vaihe vaiheelta. Teoksessa: Aaltola, J. & Valli, R. (toim.). Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. Jyväskylä: PS-kustannus, 133-157.

Haapasalo, L. 1993. Konstruktivistisia malleja tietorakenteiden muodostamiseksi ja oppimistulosten analysoimiseksi. Teoksessa: L. Haapasalo & Kupari, P. (toim.) Konstruktivismi matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman kehittämisessä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 6, 18-37.

Haapasalo, L. 1993. Matematiikan opetussuunnitelmien lähtökohtia ja kehittämisnäkymiä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 2.

Haapasalo, L. 1985. Ongelmakeskeisen matematiikan opetuksen metodiikka. Jyväskylän yliopisto: Opettajankoulutuslaitos. Opetusmonisteita 10.

Haapasalo, L. 2004. Ongelmanratkaisukulttuuri konstruktivismin peruselementtinä. Teoksessa: P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & Malinen, P.(toim.). Matematiikka- näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki instituutti. Jyväskylä, 84-99.

Haapasalo, L. 1997. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Vaajakoski: Medusa-Software.

Heikkilä, J. 1982. Luovuustutkimuksen lähtökohtia. Turun yliopisto Kasvatustieteiden tiedekunta. Selosteita B: 3.

Hirsjärvi, S. 1986. Tutkimus ja sen raportointi. Jyväskylä: Gummerrus.

Hoskonen, K. 1996. Mathematical beliefs of eight-graders: What is mathematics?. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Current State of Research on Mathematical Beliefs 3. Helsinki: Hakapaino, 48-53.

Häggblom, L. 1993. Tänk och räkna – ett uttveklingsprojekt med utgånspunkt i en konstruktivistik inlärningssyn. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.). Matematiikan opetus ja konstruktivismi –teoriaa ja käytäntöä. Helsinki: Yliopistopaino, 89-102.

Hye Sook Seo 1997. On the Use of What- If-Not Strategy for posing problem. Teoksessa E. Pehkonen. (toim.). Use of open-ended problems in mathematics classroom. Helsinki: Hakapaino, 85-87.

Ikäheimo, H. 1995. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. Helsinki: Monila Oy.

Kinnunen, R. & Vauras, M. 1998. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen, P. Malinen (toim.).

Matematiikka –näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Yliopistopaino, 269-282.

Kiviniemi, K. 2001. Laadullinen tutkimus prosessina. Teoksessa: Aaltola, J. & Valli, R. (toim.). Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. Jyväskylä: PS-kustannus, 68-84.

Kupari, P. 1993. Matematiikan opetussuunnitelmien uudistamisen ongelmia ja mahdollisuuksia. Teoksessa L. Haapasalo & P. Kupari (toim.) Konstruktivismi matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman kehittämissä. Jyväskylä: Yliopiston monistuskeskus, 48-52

Kupari, P., Reinikainen, P., Nevanpää, T. & Törnroos, J. 2001. Miten matematiikkaa ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Kolmas kansainvälinen matematiikka ja luonnontiedetutkimus TIMMS 1999 Suomessa. Jyväskylä: Yliopistopaino.

Kupari, P. 1999. Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylä: Yliopistopaino.

Leino, J. 1993. Konstruktivismi ja matematiikan opetus. Teoksessa: J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.). Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoriaa ja käytäntöä. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 116, 11-20.

Malinen, P & Pehkonen, E. 2004. Matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkimuksesta Suomessa. Teoksessa: P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & Malinen, P.(toim.). Matematiikka- näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki instituutti. Jyväskylä, 11-19.

Metsämuuronen, J. 2003. Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä. Jyväskylä: Gummerrus.

Pehkonen, E. 1994. Avoimet ongelmatehtävät vastauksena oppimisnäkemyksen esittämiin haasteisiin. Teoksessa: R. Seppälä. (toim.). Matematiikka –taitoa ajatella. Yläaste ja lukio. Opetushallitus, 60-64.

Pehkonen, E. & Zimmermann, B. 1988. Avoin probleemanratkaisu matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Kupari. (toim.) Koulumatematiikka 1990-luvulle: lähtökohtia ja mahdollisuuksia. Jyväskylä: yliopiston monistuskeskus, 61-68.

Pehkonen, E. 1997. Introduction to the concept “open-ended problem”. Teoksessa E. Pehkonen (toim.). Use of open-ended problems in mathematics classroom. Helsinki: Hakapaino, 7-11.

Pehkonen, E. & Zimmerman, B. 1990. Probleemakentät matematiikan opetuksessa ja niiden yhteys opetuksen ja oppilaiden motivaation kehittämiseen. Osa 1. Teoreettinen tausta ja tutkimusasetelma. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 86.

Piaget, J. 1988. Lapsi maailmansa rakentajana. (suom.) Palmgren, S. Juva: WSOY.

Polya, G. 1981. Mathematical discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Combined edition ?????

Polya, G. 1973. How to solve it. Princeton: University Press.

Rantala, A. 2002. Peruskoulun 6.luokkalaisten ongelmanratkaisutaidot ja ongelmanratkaisuprosessissa ilmenevät ratkaisua haittaavat tekijät. Kasvatustieteen pro gradu –tutkielma. Jyväskylän yliopisto.

Ruokamo, H. 2000. Matemaattinen lahjakkuus ja matemaattisten sanallisten ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen teknologiaperustaisessa oppimisympäristössä. Helsinki: Hakapaino. Tutkimuksia 212.

Sahlberg, P., Meisalo, V., Lavonen, J. & Kolari, M. 1994. Luova ongelmanratkaisu koulussa. Opetushallitus. Painatuskeskus.

Schoenfeld, A.H. 1980. Heuristics in the classroom. In: NTCM Yearbook 1980, 9-22. Reston (VA): Council.

Seppälä, R. 1994. Matematiikan opetuksen kehittämisestä. Teoksessa: R. Seppälä. (toim.). Matematiikka –taitoa ajatella. Yläaste ja lukio. Opetushallitus, 60-64.

Sorvari, J. 1999. Matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisuun vaikuttavista tekijöistä. Teoksessa K. Laine & J. Tähtinen (toim.). Oppimisen ohjaaminen esi- ja alkuopetuksessa. Turku: Painosalama Oy, 145 – 172.

Vaulamo, J. & Pehkonen, E. 1999. Avoimista ongelmatehtävistä peruskoulun yläasteen matematiikassa. Helsinki: Yliopistopaino. Tutkimuksia 205.

Yrjönsuuri, R. 1990. Lukiolaisten matemaattisen ajattelun oppiminen. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia, 88.

Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa: P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & Malinen, P.(toim.). Matematiikka- näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki instituutti. Jyväskylä, 111-122.

LIITTEET

Liite 1. Tehtäväpaperi

Ohjeet :

Merkitse paperiin oletko mies vai nainen!

Lue tehtävä huolellisesti –ei kiirettä.

Kirjoita jokaisen tehtävän ratkaisu eri paperille.

Kirjoita paperiin tekemiäsi päätelmiä ja oivalluksia. Ratkaisun edetessä päätelmäsi voivat muuttua. Älä silti pyyhi mitään pois, jatka vain ratkaisemista, eli yritä eri tavalla.

Piirrä kuva, se auttaa usein.

Huomaa! Laskutoimitukset näkyviin, pelkkä vastaus ei riitä.

Vaikka et pääsisikään mielestäsi oikeaan ratkaisuun:

Älä pyyhi mitään pois.

Kirjoita vastauksesi loppuun miten luulet, että tehtävä voitaisiin ratkaista.

Tehtävät:

1. Pasi ja Anni käyvät samaa koulua. Annin koulumatka on 6 kilometriä ja Pasin 4 kilometriä. Kuinka kaukana toisistaan he asuvat?

2. Pekka on tällä hetkellä kaksi kertaa niin vanha kuin Saija. Neljä vuotta sitten hän oli kuusi kertaa vanhempi kuin Saija. Kuinka vanhoja Pekka ja Saija ovat tällä hetkellä?

3. Antti, Veera, Jenni ja Ville ovat samassa päässä äärimmäisen vaikeakulkuista 150 metriä pitkää riippusiltaa. On erittäin sumuista ja pilkkopimeää, mutta silti heidän kaikkien tulee päästä turvallisesti sillan ylitse. He tietävät, että silta kestää korkeintaan kaksi henkilöä kerrallaan ja että matkalla tarvitaan ehdottomasti koko ajan taskulamppua. Antti kulkee sillan yli 5:ssä, Veera 4:ssä, Jenni 2:ssa ja Ville 1 minuutissa. Miten heidän tulisi menetellä, kun käytettävissä on vain yksi taskulamppu, jonka patterit ovat loppumaisillaan? Mikä on mielestäsi pienin mahdollinen aika, joka tarvitaan kaikkien neljän saamiseksi sillan yli?

Liite 2.

4.1 Tupu, poika
T: Mieti sitä ekaa, mitä enemmän kirjoitat ja mietit ääneen niin sitä parempi mulle, eli miten lähtisit sitä ensimmäistä ratkaisemaan?
Tupu: mmm
T: Tuntuuko se hankalalta, koetapa piirtää kuvaa jos ensin koulun laitat siihen, missä Pasi ensinnäki asuisi.. joo, paljon-ko Pasilla koulumatka?
Tupu: Neljä
T: Joo ny sitte Annin matkaa se 6km niin missä se asuis? Joo, kuinka kaukana toisistaan ne nyt asuis
Tupu: 2km
T: Oisko se sitte sun vastaus, vai mietityttääkö vielä joku
Tupu: Jos se asuis tuola
T: Jos se asuis sielä niin kuinka pitä sitte ois?
Tupu: 10 km
T:Voit laittaa niitä vähä siihen ylös.. oisko se sitte siinä, tuntuisko jo vastaukselta?
Tupu: No
T: Oisko viä jotain, voisko Anni asua vielä muualla?
Tupu: Tuos
T: Joo kuinka kaukana ne nytte asuis? Tupu: 8km
T: Arvioit, joo vois olla miten tiedät suurinpiirtein? Tupu: Noku tuosta tuloo kus ja..
T: Voiko Pasi asua lähempänä Annia ku 2km, mitä luulet?
Tupu: Ei
T: Miksei?
Tupu: No jos se asuus ..
T: Oisko nytte 6km kouluun? eli ihan totta 2km lyhin. Voiko pitemmällä ku 10?
Tupu: Ei
T:Entä onko vielä muita vaihtoehtoja, missä Anni asuis?
Tupu: On T: Eli mitä nyt sitte vastaisit, kuinka kaukana toisistaan asuvat?
Tupu: 2-10
T: Joo ihan totta, sitte kakkostehtävää..

4.2 Leenu, tyttö
T: Mitä oot saanu siihen ykköseen?
Leenu: No mä oon vähä yrittäny piirtää sitä koulua
T: No mitä luulet kuinka pitkä matka?
Leenu: Kaksi km..
T: Eli 2km?
Leenu: Nii
T: No kuinka merkataan että tuossa asuu Pasi, niin missä asuu Anni jos niillä on se 2km(näyttää), kuinka pitkä Annin koulumatka on
Leenu: Kaks
T: Tuolla sanottiin että 6km
Leenu: No tuos
T: Ihan totta, silloin on kaks km väli ja matkat kunnossa, mutta voiko ne asua muualla?
Leenu: No niin jos Pasi asuis vaikka tää
T: Paljonko se matka ois?
Leenu: 10
T: Eli se vois olla 2 tai 10, voiko viä jotain muuta olla
Leenu: No Anni vois asua täällä (90 astetta)
T: Jossain täällä vai voiko
Leenu: Nii se ei voi asua täällä no se ois jossain tossa vois olla
T: Kuinka sä kattoisit sen matkan? Niin tämä välihän oli kuusi km ja tämä väli oli 4km
Leenu: No kuus km
T: Se vois suurinpiirtein kuus km. Voisko Anni asua vielä muualla?
Leenu: Tota tua
T: Entä viä jossain muualla
Leenu: ei

T: Ei vois ?
Leenu: Ei
T: Mitä jos Anni asuis tossa?
Leenu: Se ois.. mumisee.. pasille
T: Nii ja koululle kuus, eli se vois asua siellä, voisko täällä, entä täällä
Leenu: Joo joo
T: No paljonko tästä olis koi jos se asuus
Leenu: Kuus
T: Tästä kohtaa oli jo kuus eli se olis kyllä pitempi
Leenu: Nii joo, 8km
T: Eli voiko ne A ja P asua lähempänä ku 2km?
Leenu: Ei
T: Voiko ne asua kauempana ku 10km?
Leenu: No .. eiku joo voi jos se asuu vaikka täällä niin sitte se ois (vastakkaisessa, 180 astetta)
T: Paljonko Annilla on tästä kouluun?
Leenu: Kuus
T: Jos sillon tästä kuus kouluun ja Pasille on 4 niin paljonko ois yhteensä?
Leenu: 10km – no joo …vastauksen kerron ..

3.1 Hupu, poika
T: Saitsä ykkösen jo tehtyä?
Hupu: Joo
T: No katotaan se, mitäs sä oot sanu siitä
Hupu: Ku sillo sama koulu ja samas suunnas asuu nii se on 6-2 on 4 km se ero, mutta jo vastakkakaises suunnas nii s eon tuo 6+4 eli 10 km
T: Tuntuuko se ihan selvältää
Hupu: No joo
T: Koetapa piirtää viä kuva siihen, joo se on hyvä koulu, jos vaikka tossa nyt asuu Pasi niin, missä sitte asuis suurinpiir-tein Anni, jos niillä on toi kaksi km, ei tartte niitä ruutujakaa kattoa siitä vaan arvioit, muista ett Annilla piti olla.. joo(näytti oikein) entäs sitte tuo toinen vaihtoehto jos Pasi asuis samas suunnas?
Hupu: Tos
T: Hyvä, no joo, mitäs jos tuo Pasi asuu tossa mutta Anni asuuukin tuos neljn km pääs koulusta? (90-180 astetta)
Hupu: Jos se olis jossain tuos?
T: Nii, voisko se asua tuos?
Hupu: Vois
T: Joo jos on kerran 4km.
Hupu: Se on jotain 5km??
T: Miten Pasi menis kaverille jos asuis tuos
Hupu: Jaa jos…
T: Niin kuinka pitkä niillä nytte ois. kuinka pitkä se olis se reitti?
Hupu: No se menis tosta suoraa niin se olis jotain 5km
T: Varmaan, olisko mahdollista?
Hupu: Olis
T: Eli näitten kahen lisäksi olis ainaki tommonen mahdollisuus, oisko viä muita?
Hupu: No niitä on tuos 4km säteellä
T: Eli tommonen ympyrä tulis siihen
Hupu: Just
T: Eli paljonko se olis sitte se ero, jos sun pitäs nyt vastata kysymykseen, niin mitä sä vastaisit? Hupu: 2 viiva 10km
T: Ihan totta, tee sitte sitä kakkosta se on ihan ok se ykkönen

3.2 Liinu, tyttö
T:Mitä oot saanu tehtyä?
Liinu: Ykkösen vasta
T: Joo, mitä sait selitäksä
Liinu: No mä vain lskin sen että kuinka paljon se on yhteensä se matka siis niinku Annin luota koululle se on kuus km ja sitte siihen lisätään se Pasin matka koululle, niinku jos se Annin menee sitte sen kautta, koululta sinne Pasin luo

T: Ja matka olis 10 km, tossa on koulu näytäppä vaikka sormella että missä Pasi asuis
Liinu: No vaikka täällä
T: Pasi asuis tossa, missä Anni asuis nytte suurinpiirtein että se matka olis 10 km
Liinu: Mmm täällä
T: Nojoo, jossain tossa, mutta se olis niinku näköjään tuolla vastakkaisella puolella
Liinu: Mm
T: Jos Pekka Pekka asuis tossa, missä se nyt asuu tossa meidän kuvassa, niin Anni asua jossain muualla?
Liinu: Voi kai, voi
T: u mehän tiedetään vain että Annin koulumatka on neljä km
Liinu: Eiku kuus
T: Oliko se niin päin, joo no me tiedetään vain että Annin koulumatka on kuusi km, mitä jos se Anni asuu tossa ja toi on kuusi km toi väli, voisko Anni asua tossa?
Liinu: Voi
T: Voi, no kuinka nytte ois tuolta Pasilta Annin luo?
Liinu: 10 km jos se menee niinku koulun kautta mutta..
T: Jos se menee koulun kautta niin ois 10 joo, mutta mitä?
Liinu: Niin no se voi tietenkin mennä tosta suoraankin
T: nii i tietenkää en mäkää tiedä, ei sitä voi iha tarkalleen tietää, mutta oisko se enemmän vai vähemmän kuse 10km jo-ka tulee tän koulun kautta?
Liinu: Ai siis jos.. ..
T: Jos tämä anni menis täältä suoraa Pasin luo
Liinu: Ai niin että paljonko se sitte ois
T: Nii oisko se vähemmän vai enemmän ku tää 10km joka tulee tämän kautta
Liinu: Vähemmän
T: Vähemmän, mihinä muualla tuo Anni voi asua ku tuola ja täälä
Liinu: Tää
T: Joo ainaki siä
Liinu: Täälä
T: Entä tossa
Liinu: Joo
T: Mihinä muualla? Voiko tässä? Entäs täälä sitte (nyökkäilee koko ajan), kuinka pitkä sitte ois Pasin luo?
Liinu: Jotain kaks tai kolme km
T: Nii iha totta, kuinka lyhyt sillä Annilla voi olla Pasin luo
Liinu: Kaks km
T: Voiko olla lyhempi ku kaks
Liinu: Ei
T: Ei voikkaa, eli nyt sitte tän jälkeen niin mitä sä saisit vastaukseksi?
Liinu: Kaks
T: 2km, täällähän sä sanoit, että 10 km, se voi olla 10 kilometriäkin, katottiin tässä että se voi olla tuo noin viis kilomet-riäkin..
Liinu: Nii se voi olla mikä vaan
T: Mikä vaan, mutta sitte sanoit ettei se voi olla kakkosta vähempää, voiko 10 enempää?
Liinu: Ei
T: Miksei?
Liinu: No sitte jos se on enemmän ku 10 nii se kannattaisi mennä koulun kautta
T: Just nii ihan totta, katotaas sitte sitä kakkosta.. .. ..

2.1 Lupu, poika
T: Nyt sitte toisetk oot merkinnyt matkat, mitäs sitte?
Lupu: Pitäskähän ne miinustaa, eiku ei siitä tiä kuinka kaukana …jooo kymmenen
T: 10km päässä, joo kirjota siihen että kymmenen, siinä on paljon tilaa koko iso lappu
Lupu: Saako tähän sitte kirjottaa se vastaus
T: Joo, ja voit sanoakin samalla niin mä kuulen
Lupu: Tuota niin ne asuu samas koulus niin täältä on 4km emsin sinne koululle ja kuusi kilometriä sinne annille, niin se matka on sitte kymmenen km sinne pasille
T: Joo se pitää paikkansa … .. joo siinä oli vastaus (kirjoitti)
Lupu: Ja sitte kakkonen

T: Tuota katotaan viä sitä ykköstä, mitäs jos tuo pasi, kun se lähtee tuonne annin luo, menee vaikka käymäs siä pelaa-mas jotain, futista tai jotain, minkä takia se kävelee ton koulun kautta?
Lupu: Se tuota, niin joo, jos niinku asuu sieltä pasin tyköä niinku vaikka toisaalla se ei välttämättä
T: Jos sä oisit tämä pasi tässä niin lähtisitkö annille koulun kautta, jos sä haluat annille mennä Lupu: Niin ei välttämät-tä, elikkä se vois mennä, jos se menee koulun kautta sitte se on ainakin kymmenen
T: Se pitää paikkansa
Lupu: Mutta jos niinku, sehän voi olla tietenkin niinkin että se asuu vain kaksi km tästä näin ja sen matkan sitte tuos
T: Niin voi hyvä eli se voi olla myös kaks km se matka
Lupu: Niin, jos se asuu täällä(näyttää oikein)
T: Hyvä, joo jos ei oo pakko kulkea koulun kautta, niin osaakko sanoa että kuinka pitkä se matka voi olla?
Lupu: Jos se menöö tästä? Ei mee koulun kautta jostakin muualta
T: Niin no tietenkin jos se lähtee tänne kävelemään ihan ympäri.. kaks km se voi olla jos ne asuu samalla suunnalla
Lupu: Eli täällä
T: Joo
Lupu: Sitte, senki sitte jos menee koulun kautta niin on kymmenen, mutta jos se..
T: Jos se menis tästä suoraan, kuinka pitkä se sitte ois
Lupu: Suoraan?
T: Niin jos se menis täältä, pasi menis ihan suoraan annin luo täältä(kulma90-180)
Lupu: Tästä?
T: Niin oisko se pitempi vai vähemmän ku 10
Lupu: Se vois ehkä olla vähän vähemmän ku se tavallaan menöö linnuntietä
T: Pitää paikkansa
Lupu: Koska se menöö aiva suoraan niin linnuntietä on lyhyempi
T: Hyvä, no entä sitte
Lupu: Nii ja vaikiakulukuusempi
T: Nii voi no voiko se matka olla pitempi ku 10 km
Lupu: Jos se menöö tätä reittiä – niin no – no voi se oikeen harhaalee tai sitte vetää oikeen jostaki
T: No jos sovitaan että se menee kaikista suorinta reittiä, vaikka kaikkien peltojen yli ja kaikkien.. voiko se olla yli 10km?
Lupu: Hmm, noperiaattees voi, tai no ei, jos se menee tota vaikiampaa että pitää kääntyyllä niin sehän on sitte kymme-nen, jos se menee suorinta niin ei se voi oikeen mennä sen 10 yli
T: Selvä hyvä se oli tuota ihan oikea vastaus se oli siinä, voit miettiä sitte sitä kakkosta
Lupu: Joo
T: Tee se tohon seuraavalle niin mun on helpompi sitte tarkistaa

2.2 Tiinu, tyttö
T: Katotaas vaikka se ykköstehtävä eka.
Tiinu: Mä en oo saanu oikeen muutaku sen vaan..
T: Mitäs sä oot saanu?
Tiinu: Hhh..
T: Sä voit vaikka selittää mulle mitä sä oot saanu.
Tiinu: No kuule niin niin eka jos ne asuu niinku eri suunnalla niin se välimatka on sitte aina pitempi.
T: Joo, jos sä vaikka luet ton mitä sä oot vastannut siihen.
Liinu: Jos Pasi ja Anni asuvat samalla suunnalla, he asuvat 2km päässä toisistaan .Mutta jos he asuvat eri suunnalla niin He asuvat kauempana toisistaan eli 10km? Matka voi olla jotain sitä väliltäkin riippuen millä suunnalla ne asuu.
T: Tota, tiekkö mitä? Se oli ihan täydellinen vastaus.
Tiinu: No niin no hyvä sitte..

1.1 Minni, tyttö nää vastaa kakkosryhmää
T: Saitko ykkösen tehtyä? Minni: Sain.
T: Keskeytän kakkosen, katsotaan ykköstä, eli mitä sait siitä?
Minni: Sain kaksi.
T: Voit tehdä sitä kakkosta.
Minni: Joo.. ..
T: Voitas viä kattoa tuota ykköstehtävää. Mitä sä sait siitä .. kaksi, mutta mistä sä tiedät että se on kaksi?

Minni: No vähennän ton kuus tosta neljästä, eiku neljä kuudesta.
T: Jooo, mutta mitäs jos tuo Pasi asuu vaikka tuo filippulankyän suunnas ja Anni asuu tuolla kirkon suunnassa, sillon-han tuolla Annilla voi olla tuo kuus kilometriä ja Pasilla neljä, mutta paljonko niiden välinen matka on? Piirretään kuva tähän, tässä on koulu, jos esim. tossa asuu anni, missä se ville nyt asuu, voit näyttää vaikka sormella (vastakkaisessa iha oikein), joo oisko tämä mahdollista, ton tehtävän kannalta? Jos sovitaan että tuo annin matka kuus km ja tuo p:n neljä Minni: Joo, kyllä se on mahdollista
T: Sittenhän niillä olis varmaan 10km? (kulma sitte 180-90,)
Minni: Matka olis kymmenen
T: 10, jos ne kulkee tuolta koulun kautta, mutta mitä jos se käveleeki tästä suoraan? Jos sun kaveri asuu Fillppulas ja sä asut tuo kirkon suunnas niin et sä varmaan aina mee sinne tuolta koulun kautta, eikö?
Minni: Joo
T: eli se on mahdollista muta ihan totta se 10 minkä sanoit, eli jos anni asuu tää ja ville päin vastaises paikas, niin sillon anni kulkee koulun kautta ja kaksi jos asuvat samalla reitillä, jos asuu muualla niin se on joku eri matka, voiko se olla pitempi ku 10?
Minni: Ei.
T: Ei voi, eli se vois olla tone 10 km asti mikä tahansa matka. voit sitten sitä kakkosta vielä miettiä

1.2 Mikki, poika
T: Katotaan yhdessä mitä oot tehny. Tota niin eli ykköstehtävä, oot saanu vastaukseksi kaksi km?
Mikki: 6-4 eli annin koulumatka miinus pasin.
T: Oliko se sun mielestä ihan helppo?
Mikki: No oli se.
T: Onko toi ihan varmasti ainut mahdollisuus? Voit miettiä että jo toi koulu on vaikka tää sanssin koulu tuos on pasi sil-lä neljä km (piirretään) Oot sanonut että kaksi km on vastaus, missä anni asuisi tässä kuvassa, että niil olisi kaksi km?
Mikki: Ýhteensä?
T: Kaksi km toi välimatka, suurinpiirtein (näyttää oikein), mutta mitäs jos Annilla ois se 6km matkaa mutta se asuiskin jossain täällä, eli anni asuis jos tuos on sanssin koulu niin jossain täällä, olisko se mahdollista?
Mikki: Joo
T: Mutta jos pasi asuis vieläkin tossa niin pitääkö paikkansa että se olis vieläkin kaksi km? Mitä luulet, voit sanoa ihan mitä arvaat.
Mikki: Ei.
T: Ei kyllä se ..mitä luulet paljonko nillä nyt olis?
Mikki: 10.
T: 10 mitä reittiä?
Mikki: Koulun kautta.
T: Eli koulun kautta olis kymmennenvoisko seki olla vastaus?
Mikki: Vois.
T: Joo jos ois tämmönen tilanne niin se ois, mutta jos Anni asuis tuolla, ei varmaan koulun kautta kierrä, mistä menis?
Mikki: Suoraan.
T: Mitä se matka sillon olis?
Mikki: 5km.
T: Suurinpiirtein sen verran se olis, eli nyt ollaan saatu kaksi km voiko olla vähemmän kuin kaksi?
Mikki: Ei voi.
T: Mitäs se matka voi olla korkeintaan?
Mikki: 10.
T: Missä sillon Pasi asuis suurin piirtein koulun kautta ei oo pakko kiertää
Mikki: Täällä (näyttää oikein)
T: Eli ihan vastakkaisessa, mitäs josei ole ihan vastakkasessa suunnasssa, olisko matka lyhempi vai pitempi?
Mikki: Lyhempi
T: Eli se matka ei voi mitenkään olla pitempi, (sitte katottiin oikea vastaus..).

5.1 Iines, tyttö, pikkukoulu
T: Ensimmäinen oppilas on tässä. Mitä kysyit ykkösestä?
Iines: Onko ne niinku samalla tiellä?

T: Niin, se on oikeastaan sun pääteltävissä, lähde tekemään tuohon. Mitä jos ne olis samalla tiellä?
Iines: …(miettii) Niin pelkkä vastaus ei riitä?
T: Ei .. Miten aloittaisit?
Iines … .. (miettii) Niin tähän voi piirtääkin.
T: Joo, piirrä, vaikka ensin tuohon se koulu, jos siinä olisi koulu, missä Pasi ja Anni asuisivat?
Iines: mumisee, jossain täs ja täs .. ..
T: Joo-o.
Iines: (mumisee ja miettii) .. ..
T: Mieti vain rauhassa .. .. .. no miltäs vaikuttaa? Sä oot kirjoittanu vastauksenkin, luetko sen.
Iines: He asuvat 2:n km etäisyydellä toisistaan.
T: Joo ja oot piirtänyt kuvan .. tuntuuko sun mielestäsi hyvältä vastaukselta? Onko jotain muita vaihtoehtoja, kuin tämmönen kuva tai tämmöinen tilanne?
Iines: Sitte se että ne asuu eri tiellä.
T: Joo, miten ne sitte ois?
Iines: Oisko vaikka tuos ja tuos? (näyttää oikein)
T: Joo, piirrätkö sen Annin talon? Entäs nyt. Kuinka kaukana asuvat nyt?
Iines: 10km.
T: Joo, mikäs nyt ois vastaus sitte?
Iines: Mm. niitten koulumatka on .. (miettii) 10km.
T: Sano vaan mitä mietit tai epäilet.
Iines: Tuos ei kyllä sitä kysytä, että kuinka paljo ..niin joo..
T: Olisiko vielä jotain muita vaihtoehtoja kuin noi mitkä laitit?
Iines: Jos Anni asuis jossakin täällä(90astetta).
T: Joo, koitappa laittaa siihen. Entäs nyt, kuinka kaukana he asuvat toisistaan nyt?
Iines:6km
T: Miten laskit.. .. joo ne kulkis suoraan, Onko vielä muita vaihtoehtoja?
Iines: Jos se asuus tuos.
T: Laitapa siihen, laitapa se Annin talo, joka paikkaan missä Anni voisi asua
Iines: (piirtää ja mumisee, väli-ilmansuunnatkin tulevat ja talojen ”viereiset tontit”).
T: Oisko viä muita vaihtoehtoja?
Iines: Tuo Pasi asuis muualla.
T: Onko tuossa kaikki talonpaikat missä Annin talo voi olla?
Iines: On kai.
T: No mitä vastaisit nyt tuohon kysymykseen, kuinka kaukana toisistaan he asuvat?
Iines: Kahden km päässä.
T: Missä tapauksessa se olisi 2km?(näyttää oikein), joo mutta sitten sanoit, että Anni voi asua myös monessa muussa-kin paikkaa ja sanoit, että välimatka voi olla myös 10km? Missä Anni silloin asui? Joo, entä sitten kun Anni asuisi tuos-sa mihin oot piirtänytkin. Sanoit, että tuosta olisi kuusi km, paljonko tuossa olisi?
Iines: Jos menis tästä näin niin se olisi .. 6 tai 5km.
T: Eli minkälaisia vaihtoehtoja on tuolle Pasin ja Annin välimatkalle?
Iines: Kaiken moisia..
T: Kaiken moisia, onko mitään rajoitteita? Iines: 10.
T: 10, eli ei voi olla pitempi kuin 10 vai? (nyökkää) Entä muita? Voiko välimatka olla lyhempi kuin 2km?
Iines: Yksi.
T: Koska se olisi 1km?
Iines: Ei se voikaan olla .. ..
T: Ei ei varmasti. Eli jos ne asuu tällä samalla kadulla niin se on 2km se matka voiko se tulla sitä lyhemmäksi?
Iines: Ei.
T: Ei voikaan, ihan totta. Eli minkälaisia rajoitteita ollaan saatu sille matkalle, tehdään se tuohon paperin alaosaan.
Iines: 2-10km.
T: Joo, ihan totta ei tartte tehdä sittenkään enempää, saatiin oikea vastaus.

5.2 Heluna, tyttö
T: Kerropa, mitä oot saanu siihen ykköseeen?
Heluna: Jos se Pasi asuu 4km koulusta toiseen suuntaan ja Anni toiseen suuntaan 6km niin sitten siitä tulisi 10km.

T: Joo, no onko muita vaihtoehtoja?
Heluna: Jos ne asuu samassa suunnassa niin ne asuu 2km päässä toisistaan.
T: Joo, piirräpä tuohon keskelle koulu ja laita Anni ja Pasi asumaan sinne samaan suuntaan, su ei tartte nyt edes välittää niistä ruuduista niillä ei ole nyt niin väliä. Siinä oli kumpi?
Heluna: Vaikka se Pasi, eiku Anni.
T: Joo laita viä vaikka A ja P. Nyt meillä olisi sitten vaihtoehtona että ne asuisi joko samassa suunnassa tai eri suunnas-sa. Onko muita vaihtoehtoja?
Heluna: En mä keksi.
T: Et keksi. Jos laitetaan, että Pasi asuisi koko ajan tuossa niin voiko Anni asua sielä muualla kuin tuossa , tuolla ja tuolla.(esille tulleet vaihtoehdot)
Heluna: Voi se asua vaikka täällä (90astetta).
T: No niin. Piirräpä siihen. Onko muita vaihtoehtoja vielä?
Heluna: Vaikka tuolla.
T: Joo, jos Anni asuisi siinä niin kuinka pitkä matka sillä olisi sinne Pasin luo sitte?
Heluna: No jos se menee koulun kautta niin 10km, mutta jos menee tästä(suoraan) niin sitte olis lyhee.
T: Joo ihan totta. Olisiko vielä muita vaihtoehtoja missä Anni voisi asua?
Heluna: Vaikka täällä.
T: Näytäpä kynällä kaikki vaihoehdot, missä Anni voisi asua? joo joo joo (näyttää) Entä onko vielä muita?
Heluna: Näis väliis kaikis.
T: Joo, ihan totta. Mä vahvistan tähän tällaisen ympyrän, mitä näytit. Mitä nyt vastaisit tuohon kysymykseen?
Heluna: 2-10km päässä
T: Hienoa oikea vastaus ..

6.1 Hansu, poika
Hansu: Tähän voi siis laittaa eri laskelmia?
T: Joo kaikkea laitat mitä sulle tulee mieleen, saat vaikka tota sanoa mulle ääneen, että mitä teet ja miksi .. .. .. eli kir-joitit jo vastauksenkin siihen, mitä sait vastaukseksi?
Hansu: 2km
T: Joo, tuntuuko selvältä? Miksi se olisi 2km?
Hansu: Erotuksella
T: Joo tehään silleen, että piirrä tuohon koulu semmonen, vaikka lootikko siihen niin, se on koulu. Laitappa sitte, että missä ne Pasi ja Anni asuisi.
Hansu: Joo mä piirrin, että tossa on Annin ja täällä on Pasin eli yksi ruutu on aina km(vastakkainen suunta)
T: Joo, laitappa tuohon A ja P, kuinka kaukana ne nyt asuis toisistaan sitte. Koita kattoa sitä kuvaa.
Hansu: Tuos ois keskipiste (laskee ruutuja).
T: Tämä matkahan sanottin tuossa tehtävässäkin eli se on kuusi km, paljonko se ois? Hansu: 6+4.
T: Eli paljo tulis? Hansu: 10.
T: Sait nyt eri luvut ku äsken. No olisko tuo sun mielestä mahdollista, että se olisi 10km?
Hansu: Ois.
T: Joo, mitä jos se ois tuo 2km niin ku aluksi sanoit , niin kuinka se olis, missä A ja P asuisi? Voit tehdä tuohon samaan kuvaankin. Jos koulu on tuos ja Pasi asuis tuos mihin se on piirretty niin missä Anni asuisi? Annillahan on 6km kou-luun. Hansu: Jos ne asuis 2km:n päässä toisistaan niin sillon kummallakin olisi1km matkaa kouluun.
T: Mutta tuossa on sanottu ne matkat, että kuinka paljo niillä on. .. ..
Hansu: Voiko nuotan numeroita supistaa, että kutosen laittas neloseksi ja nelosen kakkoseksi? T: Miksi sä tekisit niin?
Hansu: .. .. ..
T: Laskit aluksi, että ne asuisi 2km:n päässä toisistaan. Piirräpä tähän, että missä ne asuisi nyt tässä kuvassa, kuitenkin P:llä 4 ja A:lla 6km matkaa sinne kouluun. Missä Pasi asuisi eka? (piirsi) Entä sitten se toinen kaveri? Laita siihen P vielä (piirsi) Kuinka pitkä Annilta olisi Pasille suurin piirtein?
Hansu: 7km
T: Ehkä joo. Oisko se mahdollista?
Hansu: Pitääs olla tuon lähempänä, (P).
T: Miksi?
Hansu: Sitte tulis se 6km ja sitte tulis se matka pysyys kumminkin niinku pitääs
T: Kyllähän Pasilla on nyt se 4km.
Hansu: Niin mutta jos laittaas alemmas sen niin pysyys 4km , mutta sitte tulis se 6km ..

T: Niin sitten tulis kyllä kuusikm, mutta.. Hansu: Se pitää laittaa kympiksi se..
T: Täshän sulla on kymmenen se, tässä sä sanoit seittemän, täässähän oli Annilla noin kuusi km kouluun ja Pasilla 4km wli se on ihna mahdollista sekin.. Mutta jos se Pasi asuu tässä, missä sä oot nyt piirtäny unohdetaan tuo Annin talo tuol-ta (peitän sen paperilla), missä se Anni nyt asuisi, ETTÄ he asuisivat toisistaan 2km:n päässä, niinku sä aluksi näytit?
Hansu: Tässä.
T: Mutta muista, että Annilla täytyy olla kuusi km kouluunkin .. .. no se ois aika lähellä (piirtää melkein samalle suoralle yhden ruudun alemmaksi)(HUom piirtänyt ison koulun ja kun laskee ruutujen mukaan niin matka on kyllä oi-kea. Iso suorakulmio hämää häntä selvästi..) Jos Pasi asuu nyt koko ajan tässä, niin näytäppä kynällä yai sormella tai jollain. Onko sun mielestä muita mahdollisuuksia, missä se Anni voisi asua? Kuin noi mihin nyt on piirretty. Tämä on ainakin että asuu täällä vastakkaisessa suunnassa se tehtiin tuossa jo ennemmin eri kuvaan, siellä joo missä muualla? Piirrä siihen. (piirtää suoralle jo olevien vaihtoehtojen viereen)Missä Muualla? Menee vähä liian kauas(laskee ruutuja kulmittainkin)
Hansu: Oisko sitte tuos?
T: Ehkä joo, onko muita mahdollisuuksia? Montako talon paikkaa jo on.
Hansu: Tuolla
T: Joo, entä vielä? Näytä sormella, joka paikka missä se voisi asua. Joo tommosilla kohdilla. Entä tossa voisko se asua tossa?
Hansu: Ei.
T: Miksi ei?
Hansu: Se tulis tuohon se.. tästä tulee sitte pitempi.
T: Joo no entä tuossa(väli-ilmansuunnat ylhäällä)?
Hansu: Voi.
T: Joo eli ylöskin tulee samanlainen kuva ku alas vahvistan noita niin muistan, (saatiin vähä pyöreät kulmista mutta si-vuilta suoralla(huom koulun koko ja laskemisen konkreetttisuus)). Sulla on tälläset kuvat täällä.. Kuinka pitkä jos se Pasi asuu edelleen täällä niin kuinka pitkä sillä Annilla olisi Pasin luo tuolta?
Hansu: 8km
T: No Mitäs vastaisit nyt tuohon kysymykseen, eli kuinka kaukana toisistaan he asuvat?
Hansu: 10km.
T: 10km päässä, äsken sanoit, että 8km, onko se 8 mahdollinen?
Hansu: On
T: No jo P asuu tossa ja Anni tuossa niin kuinka pitkä matka silloin on?
Hansu: Tossa asuu Pasi.
T: Niin siiä missä se nyt koko ajan on ollu.
Hansu: .. .. ..- 6
T: Joo eli seki olis mahdollista. Sanoit, että asuisi 2km:n päässä tollasessa tapauksessa(näytän). Voiko ne asua lähem-pänä, kuin 2km?
Hansu: Ei.
T: Ei voi. Voiko ne asua kauempana toisistaan ku 10km?
Hansu: Voi.
T: No kuinka se silloin olis?
Hansu: No.. ..
T: Sillon ku Anni asuu täällä ihan vastakkaisessa, niin se välimatka olisi 10km.
Hansu: Mm T: Mutta tota, joo otetaan tästä tällainen mitta (Paperin pala joka mitataan kuudeksi km:ksi). Tämä on nyt kuusi km. Tuossa oli Annilla 6km, mutta tuonne niin sieltä on Annilla yli 6km
Hansu: O.
T: eli voiko se Anni asua siellä?
Hansu: Ei.
T: No missä kohtaa se Anni asuisi tän mitan perusteella?
Hansu: Tuossa(näyttää oikein)
T: Niin no voisko Anni mitan perusteella asua tuos?
Hansu: Mm joo
T: Entä tuolla
Hansu: Vois
T: Eli noi mitkä piirsit niin siinä ruudut vähän valehteli. Jos nyt ihan täältä vastakkaisesta suunnasta se olisi 10, niin voiko asua kauempana kuin 10km.
Hansu: Ei.

T: Joo, ei voiskaan. Mitä sanoisit nyt sitten vastaukseksi? Minkälaisia vaihtoehtoja on? Kuinka kaukana toisistaan ne asuu?
Hansu: 8, 6, 10, 2 parilliset luvut.
T: Niin joo mutta vielä on muitakin mahdollisuuksia, saatiin ainakin sellaset rajat että se ei voi olla lähempänä ku 2km mutta ei myöskää kauempana kuin 10. Eli vastaukseksi tulisi sitten mitä?
Hansu: 2-10km
T: Joo

6.2 Touho, poika
T: Kerroppa, mitä sait ykkösestä?
Touho: No mä niinku ajattelin, että 6-4 se olis niinku 2 niin se välimatka olisi sitten 2km. En mä sitte muuta saanu.
T: OK, mä piirrän tähän paperille. Näytäppä missä P ja A asuisi sitte tässä tilanteessa?
Touho: Tuos vaikka se P ja tuos vaikka sitte se Anni, ja sitte tuo väli on sitte 2km(ei ihan ok)
T: Joo. Onko sun mielestä muita vaihtoehtoja?
Touho: Ei mun mielestä oo
T: Aha, tota kun tuo Anni lähtee tuolta kouluun, sillä oli kuusi km niin se olis tuota suoraa viivaa eikös?
Touho: Mm
T: Pasilla oli tuosta?
Touho: 4km
T: No jos sillä Annilla on kuusi km kouluun niin, mitä tuo tehtävä sanoo, missä Annin pitäisi asua? Tuon tehtävän mu-kaan.
Touho: 6km päässä
T: Joo no piirräpä joo tossa. Voiko asua muualla?
Touho: Voi.
T: No näytä missä
Touho: Vaikka tuos.
T: Laitapa siihen. Entä muualla?
Touho: Ei jos tuosta on kuusi km
T: Niin jos siitä on kuusi. Mutta onko mistään muualta kuutta km :ä kouluun?
Touho: Tuolta ,tuolta
T: Voiko jostain muualta?
Touho: Tuolta sitte kanssa
T: Entä tältä toiselta puolelta kylää laita siihenkin (piirtää) onko välimatka oikea tai siis sama ku täällä? (mitataan mi-talla tulee oikeaan kohtaan) (nyt paljon taloja ympyrän kaarella) Ollaan saatu tälläset paikat. Onko vielä muita mahdol-lisuuksia?

Touho: Tuossa T: Pistä siihen, entä muita?
Touho: Sitten vastapuolella eli tuolla.
T: Onko vielä muita? (oikein näyttää) Laitappa kaikki mahdollisuudet siihen kuvaan tai näytät vaikka.
Touho: Ei täs oikein muita oo.
T: Toi kävi ja tuo kävi (näytän toisiaan lähellä olevia)
Touho: Joo ja tuo.
T: No entäs tuo (niiden välistä)
Touho: No voi siihenkin laittaa kyllä.
T: Entäs niitten välissä?
Touho: Ei, en mä usko.
T: Tästä ei olisi kuutta vai? Jos tuosta on ja tuosta on?
Touho: No kyllä siitäkin sitten täytyy olla.
T: Nii, no entäs niitten välissä
Touho: Kyllä siinäkin.
T: Entäs ton ja ton välissä?
Touho: On
T: Laitappa siihenkin, jos tossa on ja tossa niin onko niitten välissä?
Touho: On
T: Joo, me saadaan tosi paljon vaihtoehtoja
Touho: Niin siihen tulee semmoinen rinki.
T: Rinki tulee ihan totta. Mä piirrän. Pasin koulunpaikka oli tossa ja Anni voi asua vaikka missä tällä ympyrällä. Kuin-ka pitkä sillä Pasilla sitten on sinne Annin luo?

Touho: 2km.
T: Jos se Pasi asuu tossa niin mist'ä se olisi 2km (näyttä oikein), mutta jos Anni asuu tossa, ku se kerran voi asua siinä-kin niin, kuinka paljon se välimatka siitä olisi?
Touho: Ainakin tuplasti tämä väli.
T: Joo ainaki ehkä kolmekin kertaa. No entäs jo tässä on Pasi ja tässä koulu niin entäs tuola ihan vastakkaisella puolel-la? Elikkä tuossa?
Touho: Ainakin viisi kertaa sitte tuo.
T: No niin olisi, mutta sä osaat sen laskeakin. Kuinka pitkä Pasilta on koululle?
Touho: 4.
T: Laitetaan se tohon, ootko käyttäny tollaisia merkintöjä.
Touho: Oon joskus.
T: Ja sitte koulkoululta Annille?
Touho: 6.
T: No paljonko olisi nyt sitten Pasilta Aniille?
Touho: 10.
T: Niin ois, tossa .. .. Mitä tulisi vastaukseksi, eli kuinka kaukana toisistaan he asuvat(kuvassa ympyrä, missä Anni asuu, jonka halkaisija on kyllä 12!).
Touho: 12, jos ne kaikki yhteen laittaa.
T: Pitääkö ne laittaa yhteen. Kysytään, että kuinka kaukana Anni asuu Pasin luota.
Touho: Ei, eli se on 10km.
T: Joo, millaisessa tilanteessa?
Touho: Jos se asuus vastapäätä.
T: Joo sitte saatiin 2km, minkälaisessa tilanteessa?
Touho: Jos ne asuu vieretysten, lähekkäin.
T: Sitte me saatiin paljon muitakin vaihtoehtoja? Paljonko olisi tuolta?
Touho: 2,.. no joku 4
T: Eli mitä vaihtoehtoja meillä nyt sitte on, kuinka kaukana toisistaan he asuvat?
Touho: .. ..
T: Mitä me ollaan saatu laskettua?
Touho: No näitten välit näitten..
T: Niin jos asuu vastakkaisessa suunnassa niin se on?
Touho: 10km
T: Joo ja sitten me saatiin 2:kin km.
Touho: Joo jos ne asuu vastatusten.
T: Niin saman kadun varrella. Oliko muita vaihtoehtoja?
Touho: Ei oo, muutaku tämä, nii joo tämä ..
T: Suurin piirtein 4, Annihan voi asua myös tuos ja tuola ja tuola.. Voiko matka olla pitempi kuin 10km?
Touho: Ei.
T: Voiko se olla lyhempi kuin 2km?
Touho: Ei.
T: No mitä laittasit nyt vastaukseksi? Kuinka kaukana toisistaan he asuvat?
Touho: 10km tai 12km
T: Mä voin laittaa saatiin tällaset vaihtoehdot ei alle 2, ei yli 10, mutta entäs siltä väliltä?
Touho: Väliltä se voi kyllä olla
T: Jos laitetaan noin että 2-10 niin puuttuuko sun mielestä jotain vaihtoehtoja?
Touho: Ei
T: Entä onko siinä jotain liikaa?
Touho: Ei.
T: OK

Kolmas ongelma

4.1 Tupu
T: Se on ihan oikein, tehää sitten se kolmonen, ootko kerinny sitä miettiä miltä tuntuu?
Tupu: No ..
T: Mikä ois hankalaa? Oisko mitää ideaa miten lähtisit tekeen
Tupu: No piirtäisin.
T: Joo eli kummalla puolella ne A V V ja J n , OK ja mites lähetään liikkeelle? 2kaveria vaan saa mennä kerralla sillalla korkeintaan ja koko ajana ku joku kulkee on oltava lamppu mukana

Tupu: Joku ottaa aina taskulampun ja kaks menee.
T: Ketka ne olis?
Tupu: Vaikka Ville ja Jenni.
T: Eli jos ne lähtee toiselle puolelle kauanko kuluu aikaa?
Tupu: 2min.
T: joo, mitäs sitten?
Tupu: Sitten Ville tuloo taskulapun kans.
T: Jaha entä sitte?
Tupu: Ville ottaa Veeran ja sitte taas Ville tulee ja hakee Antin.
T: Kauanko menis aikaa, lasketaan vaikka paperilla niin pysyy kärryyllä, eka ketkä eka?
Tupu: Jenni ja Ville.
T: J ja V menee 2 sen jälkeen?
Tupu: Ville ja Veera.
T: Mistä ne sai sen lampun?
T: Joo eli Ville toi takasi sitten Veeran ja Ville, paljonko tulis yhteensä?(tekee lapulle) joo ihan totta jos mä kerron että pääsee vähä nopeammin vielä mitä luulet miten mahdollista? Äskenhän sulla Ville toi koko ajan sitä lamppua takasi ja Ville käveli yksitelln yli muiden kanssa ja toi aina lampun takasi
Tupu: Nii.
T: Oisko joku toinen tapaa nopeampi? Miten saisit selville? .. .. .. kestää .. .. ei tuu mieleen
Tupu: Ei.
T: Kerron vastauksen

4.2 Leenu
T: Mitä lähtisit kolmosessa tekemään
Leenu: No ensin ajattelen sen riippusillan joka on 150m .. .. no öö oliko se se 12
T: Eli miten saisit sen?
Leenu: Jos kaikki laskis yhteen.
T: No miten ne sitten menis? Miten lähtis menemään?
Leenu: No öö .. .. ai miten pääsis toiselle puolelle
T: Niin
Leenu: No jos ne menis kaks, jos siinä on mistä ne ottaa kiinni .. pitääskö nillä kaikilla olla taskulamppu
T: Joo siltaa ei voi kulkea ilman taskulamppua
Leenu: No, jos ne menee vaikka ensin kaks menee sillä taskulampulla, sitte yks tuo sen takaasi.
T: Joo.
Leenu: Sitte niitä on sillon tää kolme, menne taas kaks tänne ja yks takaasi niin täällä on sillon kaksi.
T: Joo mutta olisko niillä sillon lamppua?
Leenu: Olis ku se yks tuo sen takaasi.
T: Koitappa miettiä viä aiva alusta eli ketkä kulkis..
Leenu: No vaikka Jenni ja Ville tulis eka, sitte tämä Jenni tois sen taskulampun tänne
T: Joo.
Leenu: Ja sit se jää tänne sillon täällä on Antti Veera ja Jenni.
T: Joo.
Leenu: Ja sitte vaikka Veera ja Jenni meneee ja Veera tulis takasi ja sitte Antti ja Veera menee niin ne olis kaikki.
T: Joo nyt sun pitää vielä miettiä vastaus tohon että mikä olis mahdollisimman lyhyt aika?
Leenu: No .. no öö no 15min.
T: Miten saisit 15?
Leenu: No se aina tulee tänne ne kaks .. niin niin vaikka toi mikä menee 5min ssa ja sitte se mikä menee nopeiten ulis tänne niin siinä menis vähemmän aikaa ja sitte tulis taas hidas ja nopea
T: Elikkä, ketkä menis sitte seuraavaksi?
Leenu: Jenni ja .. tai Ville ja Veera.
T: Kauanko niillä kestää?
Leenu: 5min (tuos äskeises meni kuus) supisee.
T: Veeralla menee neljä ja Villellä min ne kukaan ei voi kulkea yksin täällä, molempien on pakko kulkea yhdessä, niin tota kun ne kulkee yhdessä niin kuinka nopeesti ne pääsee yhdessä toiselle puolelle?
Leenu: No 4min tai 5min, 4 jos menee sen Veeran kans.
T: Ja 5 koska?
Leenu: No .. no 4 min..

T: Niin ne menis sen Veeran tahdis, koitappa tehdä alusta asti niin että saadaan laskettua aikaa, ketkä eka?
Leenu: Ville ja Antti, siinä menis 5min. T: merkkaa ylös Leenu: 5min, Antti jää ja Vile tulee takasi siinä menee mi-nuutti, nyt ois 6min.
T: Jooo.
Leenu: Ja sitte tämä Veera ja Ville tulis tänne menis 4min ois 10min, sitte Ville tulis takasi sinois minuutti eloi 11min sitte on enää Jenni, ne tulee sen kans menee 2min eli 13 min..
T: Mietippä sitte 2 tehtävää

3.1 Hupu
T: Eli 4-5 min menis siihen riippusillan ylittämiseen(merkannut paperiin).
Hupu: niin se on 150 ja sitte ku sen pitää mennä viis kertaa pitää mennä yli ku kaikki ei voi mennä samaan aikaan niin niiden pitää mennä kaksi kerraalla ja yhden pitää mennä takaasi ja taas kaks ker-ralla ja taas takaasi pitää yhden palata ja sitte siitä tuloo niinku se viis kertaa 4-5 min noin niin loppu-aika on 16-20
T: Joo, tossa on noin Antti kulkee sillan yli 5min … Ville 1min, niin siinä on sanottu se aika kauanko nillä kestää eli A 5 .. V1.
Hupu: Jaa joo eli niinku sitten se olis niinku, ensin lähtis V ja J ku ne on nopeimmat.
T: Justihin.
Hupu: Ja niillä kestäis noin kaks min, Jenni jää ja Ville lähtee minuutis takaasi ja ottaa Veeran mu-kaansa nillä mene 4 Veera jää ja sitte Ville lähtee takaasi ja sitte niillä kestää 5 min noin tuolla Antilla ja Villellä, ja sitte ne pitää laskea yh-teen 3 7 8 13
T: 13 minuutissa, tuntuko hankalalta nytte, ku tiät että tuos on nuo ajat.
Hupu: Ei yhtää.
T: Mutta mitä jos mä sanoisin että sen pääsee vieläkin nopeammin kuin 13min?
Hupu: Ei mahdollista.
T: Se on itseasiassa tee ton viivan alle.
Hupu: Jos ensin lähtis Veera ja Antti menis 5min Veera takaasi 4 min ottaas Villen joukkohon ne menis 4min .. ei käy nuon jos Ville menee ensin tuon, Ville ja Antti menee ensi kestää 5min ja Ville tulee takaasi kestää 1min menee Veeran kans tuloo takaasi sitte Jennin kans, sitte menee 13 min.
T: Mikä täs niinku kestää, mikä on ongelmana Antilla kestää 5 ja Veeralla neljä se aika paha juttu, laitoit tuossa että ne menis yhtä aikaa, mutta heti huomattiin että kumpikaan niistä ei voi lähteä vie-mään lamppua takasi, kuka sen veis.
Hupu: Ville.
T: Kuinka se ois mahdollista.
Hupu: No jos A ja Ville menis V takasi Jenni ja Veera menis J takasi.
T: Se oli -aika lähellä olis voin kertoo A jaVeera menis yhtä aikaa, mutta sitä ennen Ville ja Jenni oli menny..kerron vastauksen osotti että tajus ku sano jotta Jenni ..

3.2 Liinu
T: Mikä siinä tuntuu hankalalta?
Liinu: On yks taskulamppu ja kuitenki kaikki vissiin tarvittee ja kaksi saa mennä kerralla, niin miten-kä ne toiset sitte saa ku sen kans sais mennä aina vaa kaks niin mitenkä ne sitte sen saa
T: Miten vois saada?
Liinu: En tiedä, heittämällä.
T: 150m on aika pitkä matka heittää.
Liinu: Niin on.
T: Jos ei voi heittää?
Liinu: No sitte ne vois valottaa toisille.
T: Jos se lamppu pitää olla koko ajan mukana.
Liinu: Mmm ..
T: Jos kaks tyyppiä menee lampun kans toiselle puolelle ja lamppu pitää saada takaasi sille toiselle puolelle eikä sitä voi heittää eikä valaasta tietä, niin..
Liinu: No, en tiä.
T: Se täytyy viedä sinne, jos kaksi tyyppiä menee lampun kans toiselle puolelle ja sitte yks niistä läh-tee viemään sitä takaasi ja sitte taas menee tuonne ja yks tuo takaasi, niin silloonhan ne pääsöö tuonne kaikki, kenenkä sen lampun kan-nattaas viesä takaasi?
Liinu: Villen, koska sillä kestää vaan vähiten.
T: Toi mikä nyt saatiin on aika hyvä, mutta kerron vastauksen … .. .. ..

2.1 Lupu
Lupu: Onkahan oikeen varattu pattereita.. ne kestää korkeintaan .. ei ei niinkää varmaan viistoista, ne kestää tosi vähä sitte.. .. .. mmmm .. 5 8 12 menis jos ne kaikki menis yksin, Antilla kestää kauiten sen pitäs mennä taskulampun kans, niin 150 metriä, mm.
T: Kummalla puolella neon nytte sitä siltaa?
Lupu: Täällä, ne menis sinne sitte se taskulamppu jäis sinne, .. sitte ku kaks sai mennä kerrallaan.
T: Joo kaks vain saa mennä kerrallaan
Lupu: Nämä Antti ja Ville menis ensin, se Antti vois sitte ku se on niin nopea niin autaa sitä Villeä että se menis nope-ampaa niin ne pääsis kolemmat varmahan kahdes minuutis.
T: Jos täs on niin että antilla kestää viis minuuttia joka tapaukses se ei pääse mitenkää sitä nopeampaa, eli antilla kestää viis minuuttia.
Lupu: Ja kaikilla noi aikarajat?
T: Nii, mutta kaks saa mennä kerrallansa
Lupu: Pitäskö sitten mennä niin että ensin menis se Antti se on hitain koska sillä menee viis minuuttia niin se ainaki pääsisi yli, se menee hitaiten niin se tarvii sitä taskulamppua.
T: Kaikki tarvii.
Lupu: Nii, elikkä sitte ensi Antti menis sen yhtä aikaa menis viä sitte se Veera ku se menis aika samanlaista tahtia, niin ne voi käyttä sitä samaa lamppua, mutta kuinka sen lampun saa sitte tuonne toiselle puolelle?
T: Niin miten sen saa?
Lupu: Se siinä on se pulma, eikö? että kuinka sen saa, niin ku ei sitä voi vierittää koska .. ..
T: Tehääs niin että voit mennä hetkeks viä miettiin sitä motan sut takasin viä tähän.. TÄSSÄ VÄLISSÄ VAIHDELTIIN
T: Saitko kolmoseen jotain muuta?
Lupu: Eiku muutaku se oli .. vasta sitte ku se olis näkyny se sillan se, nyt jos niin kävis niin että se hitain ja nopein elikkä A jaV menis yli ja sitteku se rupeis näkymään sieltä toiselta puolelta se.. maa tai niinku se, niin ne vois niin se nopeampi antaas mennä sen Antin sille toiselle puolelle ja lähtis se nopeampi sinne hakeen niitä seuraavia se menis aina minuutis.
T: Niin tulis takaasi
Lupu: Nii
T: Kenenkä se ottaas sieltä sitte mukaan?
Lupu: .. .. Veeran, mutta..
T: Ne kävelis toiselle puolelle, sitte sinne..
Lupu: Sinne jää vielä se Jenni, sitte ne menis vielä sitte se ei Ville ei enää hakisi ketää.
T: Koitetaanpa tehä noin se, eli ketkä lähtis eka?
Lupu: Elikkä jos ensin lähtee Antti ja Viille.
T: Joo.
Lupu:Ne menis yli, sitte ku maa tulis näkyviin
T: Oikeastaan tässä pitää mennä molempien sinne loppuun saakka, on niin plajon reikiä sillassa, ei tartte kumittaa.
Lupu: Sitte .. .. mumisee..
T: Joo, kauanko niillä meni aikaa?
Lupu: 5minuuuttia
T: Joo, laitappa tohon että o menny aikaa viis minuuttia.
Lupu: Sitte Antti menöö eiku se Ville menöö sinne takaasi siinä menöö minuuutti.
T: Mm.
Lupu: Ja se ottaa mukahan sieltä Veeran, ja niillä menöö sitte neljä minuuttia, koska Veerall.. sitte taas menöö minuutti, täshän menöö ku se menöö sinne takaasi koko ajan ramppaa
T: No jos sillen on pakko mennä.
Lupu: Sitte se hakis viä sitte sen Jennin, ja niillä menis sitte viä kaks minuuuttia, näin.
T: Paljonko tekee yhteensä?
Lupu: Kolmetoista
T: Merkkaa se vielä sinne, sait kolmetoista.
Lupu: Jos ne meä nis niinku sillai että ensin menis Antti ja Veera niillä menis viis minuuuttia, sitte Jenni ja Ville niillä menis kaks minuuttia, mutta ku se taskulamppu pitää..
T: Kuka sen taskulampun tois sitte takaasi?
Lupu: Niin se on täs se Ville aina ku se on nopein..
T: Tehään tohon vielä, sanoit että Antti ja Veera menis yhtä aikaa.
Lupu: Mm, sitte jo.. sitte niitten hitaitten pitääs tuora se lamppu.
T: Tarttisko? Lupu: No jos ne menis menis ne Veera ja Antti.

T: Mitä jos ne ei meekää eka sinne?
Lupu: Nii elikkä jos menee eka tuo Jennni ja Ville.
T: Nii ne menöö toiselle puolelle.
Lupu: Ne menöö kahdes minuutis.
T: Mitäs lampun kans sitte?
Lupu: Ville, niillä menöö kaks Ville tulee hakemaan siinä menee yks minuutti ottaa mukaan Antin.
T: Sanoit äsken että Antti ja Veera menis yhtä matkaa..
Lupu: Nii joo se Ville jäis sinne
T: Mm.
Lupu: Viä odottamaan yksin.
T: Jos Antti ja Veera menöö yli
Lupu: Ville tulee hakeen ei tuu hakemaan ketää vaan jää, jää ja antaa lampun Veeralle, sitte ne menöö yli
T: Kauanko kestää?
Lupu: Siihen menöö viis minuuttia.
T: Miten se Ville saadaan pois?
Lupu: Sitte se kahden jolla meni kaks minuuttia vaan, elikkä Jenni tuloo viä Ville hakemaan ja ne menöö sitte yli, elik-kä siinä menöö viä neljä minuuttia.
T: Joo kauanko menis nyt aikaa?
Lupu: Elikkä jos se nyt ois tää, menöö kolme 8 12.
T: Mitä huomaat?
Lupu: Se on nopeampi
T: Hyvä, toi oli tosi hyvä ratkaisu, toi viimenen minkä kerroit pikkuavustuksella niin se oli taas se paras vastaus ja min-kä heti keksit oli toiseksi nopein.
Lupu: Joo.
T:Kiitos paljo…

2.2 Tiinu
T: Katotaan tätä kolmosta, miten sä oot sitä?
Tiinu: Emmä sitäkää oikeim, ku että jos ne menöö siitä jotenkin kaks kerrallansa, mutta öö mulla oli niinku viis mi-nuuttia niin sekö menöö sitte aina erestakaasi.
T: Sä oot piirtäny tuohon jotaki kuvaa.. miten sä ny koitetetaan tehdä sitä yhdes, mites sä lähtisit sitä tekemään?
Tiinu: No mä ajattelin että jos se eeeee Antti jolla kesti viisi minuuttia menis sen Villen kans jolla meni yks minuutti niinku toiselle puolelle
T: Kauankos sitte on menny aikaa?
Tiinu: No yks jaa sitte toi yks minuutti vai (miettii) tietysti se riippuu kuinka kauan kestää mennä se 150m.
T: Tuossahan on noi ajatkin, jos Antti ja Ville menöö eka niin kauanko kestää että ne on siä toisella puolella?
Tiinu: No minuutti, no.
T: Antti pääsee sen sillan yli 5des minuutissa ja Ville minuutissa.
Tiinu: Nii..
T: Eli se Antti ei pääse nopeampaa millää ku se 5minuuttia.
Tiinu: Aijaa no tuota, mutta meneeks se niinku nopeampaa vain sen yli?
T: Se Antti ei pääse mitenkää nopeampaa ku 5dessä minuutissa.
Tiinu: No meneeks se Ville sitte nopeempaa ku Antti.
T: Niin Villehän pääsee minuutissaki sinne yli, mutta siinä pitää koko ajan olla se taskulamppu ja sä oot sanonu että koko ajan kaks kulkee kerralla..
Tiinu: Mm
T: niinku ne kulkee sinne toiselle puolelle yhdessä.
Tiinu: Yyy niin no, nonono menee Ville niin no..
T: Sen Villen täytyy vaan kulkee sitte hitaammin, mikä on niinku nopein aika että Ville ja antti pääsee sinne toiselle puolelle?
Tiinu: 5minuuttia.
T: Miks 5minuttia?
Tiinu: Antti ei pääse nopeempaa.
T: Hyvä laitetaan se tohon, Ville ja Antti on menny nyt toiselle puolelle ja aikaa on kulunut viis mi-nuuttia
Tiinu: Pistänkö mäny sen tähän.

T: No ei tarvi jos sä muistat, mitäs sitte?
Tiinu: Pitääkö sen Villen mennä takaasi sen lampun kans? Vai?
T: No jos Ville menis nii kuinka nopeesti se pääsisi?
Tiinu: Minuutissa.
T: Joo. Tiinu: Ja sitte se ottaa jonku mukaan.
T: Kenen se ottaas?
Tiinu: Se ottaa.. ottaako se sitte ton Veeranniillä menee neljä minuuttia
T: Mmm..
Tiinu: Ja sitte se menöö 4minuuttia mennä sinne toiselle puolelle.
T: Joo ketäs siä sitte on siä toisella puolella?
Tiinu: No se Antti ja Veera ja Ville.
T: Mites sitte se yksi viä saadaan?
Tiinu:No eikö se Ville mee takaasi ja ottaa sen tota niin Jennin ja..
T: Ja niin ne pääsi kaikki, sitte sun pitääs viä laskia että kauanko siinä menis aikaa?
Tiinu: No..
T: Siinä sä varmaan tarvit paperia, eli teet vaan sen saman jutun uudestaan, tee se viivan alle, vedin sen merkiksi, jos tulee virhe niin älä välitä, sä voit tehdä sen laskun saat sitte mulle viä selittää sen ..
Tiinu: se nyt on jotenkin näin, eikö se oo kolmtoista.
T: Sä sait vastaukseksi että kulkemises sillan yli kestää kolmetoista minuuttia.
Tiinu: Eiku..
T: Kyllä toi lasku on oikein tossa, eli miten se tapahtu.
Tiinu No semenöö ensi se Ville Antin kans ja sitten se menöö takaasi ja siitä tuloo yks minuutti, ja se ottaa sen Veeran ja siitä tuloo neljä minuuuttia ja se tuloo takaasi tuloo minuutti ja sitte ottaa vielä Jennin niin siitä tulee se kaks minuu-uttia.
T: Ja siit tulee se kolmetoista minuuttia, tehääs silleen että sulla oli se kakkostehtävä viä kesken ja tuntia on vielä jäljel-lä, vaihdetaan viä kerran

1.1 Minni
T: Miltä se vaikuttaa?
Minni: Pahalta.
T: Joo eli tota, jos tuota niin, siinäh on näitä ehtoja, eli kaks tyyppiä vaan saa mennä kerralla, kuitenkin pitää koko ajan olla lamppu, miten sen lampun sais sieltä takaisin?
Minni: No yhen pitäs kaiketi mennä takaisin ja hakee se toinen sieltä.
T: Joo, entäs sen jälkeen?
Minni: No ne menee sinne sillan toiselle puolelle ja sitte jompikumpi niistä lähtee hakee taas yhtä.
T:Ihan totta, no sä voit koittaa lähtee tolleen tekeen sitä, voit lähtee, piirtään, sitä eli kuka menis eka kuka toi lampun takas, voit vaikka koittaa eri vaihtoehtoja.. .. Kenen laittaisit eka menemään? Minni: Villen ja Jennin.
T: Joo Villellä on lyhin kulkuaika ja Jennillä toiseksi lyhin, v. J. toisella puolella paljonko kulunut aikaa?Minni: Kolme.
T: Joo, sitten täytyy saada lamppu takasi kukas sitä lähtee viemään?
Minni: Ville.
T: Miksi Ville?
Minni: No Ville kulkee lyhyemmän.
T: Just, Ville tuo lampun takasi. Kauanko mennyt aikaa?
Minni: Neljä minuuttia.
T: Joo voit laittaa senki ylös niin muistat paremmin.No entäs sitten?
Minni: No sitten se lähtis ton Veeran kans sillan toiselle puolelle.
T: Joo, ja kun ne lähtee niin paljonko sitten on aikaa kulunut?
Minni: 10.
T: Laita seki siihen. Mä laitan tohon viivan että sä oot nyt saanut valmiiksi, niin voidaan kattoa. Siinähän kun katotaan tehtävää, niin kaksi sai mennä kerralla, niillä piti olla lamppu, mutta toi kauanko menee kun esim. ville ja jenni menee sillan yli, sä laitit tossa että kolme minuuttia, mutta kun ne lähtee kävelemään niin nehän..tolla Jennillä menee kaksi minuuttia ja Villellä yksi minuutti, mutta nehän kävelee kuitenkin yhdessä koko ajan?
Minni: No sitten pitää jennin ja tonvillen mennä koko ajan samaa matkaa.
T: Mutta, sen on ihan totta että villen pitää mennä samaan aikaan, mutta huomaatko että nehän kävelee yhtä aikaa, eli kun ne kävelee sinne toiselle puolelle, samalla kun jenni kävelee niin kävelee myöskin ville.

Minni; No sitten
voi mennä kakskin minuuttia.
T: Ihan totta eli ne kerkiää sinne kaharestaan kahdessa minuutissa, eli Ville pitää vaan kävellä yhtä hijaa ku jennin, eli niillä ei suinkaan mee niin kaua ku menee yhteensä vaan niin kauan kun sillä hitaammalla.

1.2 Mikki
T: Katotaan sitten vielä kolmosta.
Mikki: Elikkä jos a, V, J ja V taskulamppua tarvitaan koko aijan ja kaks vaan voi kulkea sillan yli.. niin Ville kuljettaa koko ajan sitä taskulamppua ja muut menee sitten siinä järjestyksessä..eli tää ois sitte 5+4+2 eli yksitoista.
T: Joo, mutta miten ne tulis sitte takaisin? Sanoit että ville kuljettaa koko ajan taskulamppua.
Mikki: Nii joo sitte jokaaseen viä yksi lisää nii, se olis sitte 14.
T: Voit koittaa viä kirjoittaa miten tehtävä menee, eli kuten sanoit niin ville lähtee eka, kenen kanssa se menee?
Mikki: Jennin.
T: Kauanko kulunut?
Mikki: Kaks minuuttia.
T: Pitää paikkansa, laita se taas siihen, sitte ville tulee takaisin kauanko kulunut aikaa?
Mikki: Kolme.
T: Joo entäs sen jälkeen?
Mikki: Ville lähtee Veeran kanssa, ..
T: Kuinka kauan menee yhteensä?
Mikki: 13minuuttia.
T: Hyvä kiitos vain …

Liite 3.

T: Joko sait tehtyä kakkosen vai?
Hupu: Joo.
T: Mitä sä sait siitä vastaukseksi?
Hupu: No että tällä hetkellä se on kaksi kertaa niin vanha ku Saija se Pekka nii se voi olla kymmenen vuotta ja Saija viisi vuotta ja neljä vuotta sitte se oli kuus kertaa vanhempi ku saija nii se oli niinku, se Pekka oli neljä vuotta site kuus vuotias ja Saija oli yks vuotias. Tai sitte voi laittaa ihan vaikka kaks-kymmenä, kymmenen, kakstoista ja kuus.
T: Toimisko se silloin?
Hupu: Toimis.
T: Onko toi nyt kuus kertaa..?
Hupu: On
T: Eli tällä hetkellä P olis 20 ja S 10, Pekka oli neljä vuotta sitte.
Hupu: Kakstoista jos tuon mukaan.
T:Jos Pekka on tällä hetkellä 20 vuotta, niiin kuinka monta vuotta se oli 4 vuotta sitte? Hupu: No kuustoista, sitte..
T: Ja Saija oli neljä vuotta sitte jos se on tällä hetkellä 10.
Hupu: Neljä vuotta sitte se oli kuus.
T; Joo olisko sillon Pekka sitte kuus kertaa vanhempi.
Hupu: Ei
T: Ei, se minkä sait ekana niin se ois oikein, hyvä, miten sä sait ton vastauksen, mistä keksit niin hir-veen nopeesti ton 10 ja 5.
Hupu: Mä aluks laitoin että se oli kakstoista ja kuus, 12 jaettuna 2 se olis kuus tuo Saija, ja Pekka olis kakstoista ja sitte tämä piti olla kuus kertaa vanhempi niin se ei käyny.
T: Niin..
Hupu: Sitte kokeilin tuota 10 ja se..
T: Se on kanssa täsmälleen oikein, tee sitte sitä kolmosta