

1072/99

ALKUOPETUKSEN MATEMATIIKAN TOIMINTAMATERIAALIEN ANALYYSI
KEPHARTIN TEORIAN AVULLA

Sanna Riikka Seppä

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma

Luokanopettajien aikuiskoulutus

Chydenius-Instituutti

Jyväskylän yliopisto

Syksy 1999

TIIVISTELMÄ

Seppä, S. R. 1999. Alkuopetuksen matematiikan toimintamateriaalien analyysi Kephartin teorian avulla. Jyväskylän yliopisto. Chydenius-Instituutti. Luokanopettajien aikuiskoulutus. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma, 116 s.

Tutkimuksessa tarkasteltiin teoreettisesti alkuopetuksen matematiikkaan soveltuvien toimintamateriaalien ominaisuuksia. Lähtökohtana oli arvioida toimintamateriaaleja Newell C. Kephartin esittämien kehitysvaiheiden näkökulmasta, jotta opetusta voitaisiin kehittää monipuolisemmaksi erilaiset oppijat huomioon ottaen.

Tutkimusote oli laadullinen sekä hermeneuttinen ja siinä sovellettiin systemaattisen analyysin tutkimusvaiheita. Tutkimuksen alussa on katsaus matematiikan opetuksen kehittämiseen, alkuopetuksen ominaispiirteisiin ja alkuopetusikäisen lapsen matemaattisen ajattelun kehittymiseen. Tutkimuksessa analysoitiin sekä tulkinnan kohteena ollutta Kephartin teoriaa että toimintamateriaaleista koostuvaa tutkimusaineistoa. Synteesi muodostuu teorian ja aineiston vuoropuhelusta.

Kehitysvaihetheoria tarjosi hyvän mallin toimintamateriaalien arviointiin. Tutkimus toi esille, miten eritasoisia toimintamateriaalit voivat olla ja miten useat materiaalit konkreettisuudestaan huolimatta edellyttävät myös käsitteiden hallintaa. Analyysi tukee käsitystä toimintamateriaalien tärkeydestä lapsen matemaattisen ajattelun kehittymiselle. Toimintamateriaaleja voidaan soveltaa eritasoisille ja erilaisille oppijoille ja niillä voidaan ehkäistä ja korjata oppimisvaikeuksia. Toimintamateriaalit mahdollistavat oppimisen eri aistien ja tiedonhankintaväylien kautta. Työskentelyyn liittyvä leikinomaisuus tukee myönteistä oppimista edistävää ilmapiiriä. Toimintamateriaalit ovat oppimateriaaleja joiden käyttöön, kehittämiseen ja parempaan saatavuuteen tulisi kiinnittää enemmän huomiota.

Avainsanat: Toimintamateriaali, Kephartin teoria, alkuopetus, matematiikka

SISÄLLYS

1	JOHDANNOKSI - ”EI OTETA KIRJAA”	5
1.1	Tutkimustehtävä ja ennakkotiedot	6
1.2	Taustaa ja lähtökohtia Kephartin teorialle	8
2	TUTKIMUSMENETELMÄÄ VALJASTAMASSA	10
2.1	Hermeneuttinen metodi	10
2.2	Systemaattinen analyysi	12
2.3	Tilaa luovuudelle.....	15
3	MATEMATIIKAN OPETUKSEN KEHITTÄMINEN	18
3.1	Katsaus historiaan	19
3.2	Kehityssuunnat 1980- ja 90-luvuilla	20
4	KONSTRUKTIVISMI JA MATEMATIIKKA	25
4.1	Konstruktivismi.....	25
4.2	Konstruktivismin suuntaukset.....	26
5	ALKUOPETUS JA MATEMATIIKKA	29
5.1	Alkuopetuksen lähtökohdat.....	29
5.2	Matematiikan sisältöalueet.....	30
5.3	Lapsen kehitysvaiheen huomioon ottaminen	33
5.4	Koulutulokas ja matematiikka.....	36
5.5	Oppimisvaikeudet matematiikassa.....	41
6	TUTKIMUSTEHTÄVÄN TARKENTUMINEN	47
7	KEPHARTIN TEORIA	49
7.1	Kehitysvaiheet.....	49
7.2	Kehitysvaiheisiin liittyvät valmiudet	55
7.3	Tietojen ja taitojen integroituminen kokonaisuuksiksi	58
8	TOIMINTAMATERIAALI	62
8.1	Mitä toimintamateriaalit ovat?	62
8.2	Toimintamateriaalien merkitys oppimiselle.....	64
8.3	Toimintamateriaalien jaottelu	66

9	TOIMINTAMATERIAALIEN ANALYYSI.....	69
9.1	Lukukäsite	70
9.2	Lukujonotaidot	72
9.3	Kymmenjärjestelmä	77
9.4	Yhteen- ja vähennyslaskut	83
9.5	Kertolasku	88
9.6	Geometria.....	93
9.7	Synteesi	98
10	TARKASTELU.....	101
10.1	Tutkimuksen anti.....	101
10.2	Pedagogisia näkökulmia.....	103
10.3	Tutkimuksen kokonaisarviointi.....	105
	LÄHTEET	108
	LIITTEET.....	113

1 JOHDANNOKSI - ”EI OTETA KIRJAA”

Tämä tutkimus lähti alun perin liikkeelle kiinnostuksestani taide- ja taitoaineiden luovuuden ulottuvuuksiin. Heräsi kysymys, olisiko syytä kehittää enemmän tietoaineiden opetusta niin, että taide- ja taitoaineiden ei tarvitsisi korostuneesti olla vastapainona tietoaineille. Niin sanotussa tietoyhteiskunnassamme on hyvä kysyä millaista sen tieto on. Tiedon ja järjen käyttöön liittyvät affektiiviset tekijät saattavat jäädä vähäiselle huomiolle ja tehokkuus voi määrätä tahdin. Tiedollisia aineita on varaa kehittää suuntaan, jossa ihmisen luovuus, toiminnallisuus ja ongelmanratkaisukyky otetaan paremmin huomioon.

Alkuopetus ja -kasvatus kiinnostaa minua aiempien varhaiskasvatuksen opintojeni sekä esi- ja alkuopetuksen työkokemukseni perusteella. Alkuopetuksessa lapsi muodostaa kuvan itsestään oppijana ja tämä subjektiivinen käsitys vaikuttaa huomattavasti hänen oppimiseensa myös tulevaisuudessa. Alkuopetuksen tulisi tarjota hyviä oppimiskokemuksia, jotta lapsi luottaisi itseensä oppijana. Suhtautuminen matematiikkaan on yleensä tunteenomaista, siitä joko pidetään tai ei pidetä. Käsitys itsestä matemaattikkona perustuu vahvasti koulukokemuksiin. Oma suhteeni matematiikkaan on vaihdellut neutraalista kohti molempia ääripäitä, lähinnä osaamisen tunteen mukaisesti. ”Lempiaineeksi” en ole matematiikkaa kuitenkaan nimittänyt. Yksi motiivi tähän työhön onkin oman ammattitaidon kehittäminen vähemmän vahvalla alueella. Opettaessani matematiikkaa huomasin noudattavani liian helposti oppikirjan opetussuunnitelmaa.

Matematiikan tarkasteleminen oppimateriaalin ja nimenomaan toimintamateriaalin kannalta syventää didaktista ja pedagogista näkemystä alkuopetuksen matematiikasta. Toimintamateriaaleihin perehtymisestä on apua käytännön työssä, sillä toimintamateriaaleja ei aina ole kovin runsaasti tarjolla ja niiden tavoitteellinen käyttö vaatii opettajalta perehtymistä, suunnittelua ja myös itse valmistamista. Alkuopetuksen didaktiikkaan perehtyminen yhdestä näkökulmasta syventänee muutenkin käsityksiä lapsen oppimisesta.

Toimintamateriaalien käyttö vastaa opetussuunnitelman perusteiden asettamaan haasteeseen matematiikan konkretisoimisesta ja ymmärtämisen syventämisestä. Toimintamateriaalien käyttö mahdollistaa leikinomaisuuden ja käsillä tekemisen

oppimisen tukena, niin että käsitteillä on kokemuksellinen pohja. Uusimpien peruskoulun matematiikan oppimistulosten arviointien perusteella opetuksessa tulisi panostaa erityisesti soveltamiseen. Tämä edellyttää käsitteiden todellista ymmärtämistä ei vain mekaanista toistoa.

Aiheenvalinta vahvistui entisestään luokanopettajien aikuiskoulutuksen opintoharjoittelussa syksyllä -98. Tuolloin eräällä koulutulokkaalla oli pian ilmennyt vaikeuksia matematiikassa. Yksinkertaisimmat yhteen- ja vähennyslaskut eivät tahtoneet sormilla laskienkaan sujua, ja lapsi alkoi turhautua kun kirjassa mentiin jo kymmenlityksissä. Kokosimme luokasta pienen ryhmän jolle harjoittelun ajan pidimme matematiikan tunteja nimenomaan toimintamateriaalia käyttäen. Edistymistä näkyi kyseisen lapsen kohdalla yllättävänkin nopeasti; muutaman viikon laskuharjoitukset multilink-kuutioiden avulla auttoivat tätä ekaluokkalaista eteenpäin. Kasvot loistivat onnistumisen riemua, kun hän tarkisti kotiläksyjä muiden mukana, eikä virheitä ollut paljoa. ”Jess!” tuumasi oppilas – ja opettaja.

”Ei oteta kirjaa”

lupasin auttaa

Etsitään uusi väylä

myötätuulta lukujen maailmaan

Kirja odottaa

ei lapsi

1.1 Tutkimustehtävä ja ennakkotiedot

Tämän tutkimuksen alustavana tehtävänä on alkuopetuksen matematiikan toimintamateriaalin erittelemisen systemaattisen analyysin avulla. Kephartin kehitysvaiheteorian tehtävä on auttaa toimintamateriaalien jäsentämisessä ja samalla syventää materiaalin käyttöarvoa ja merkitystä oppimiselle. Tarkastelu voi auttaa opettajaa arvioimaan ja valitsemaan toimintamateriaaleja lapsen tason mukaisesti.

Toimintamateriaalien tärkeä merkitys matemaattisen ajattelun kehityksessä on yleisesti tunnustettu ja useat eri oppimisteoriat sekä tutkimustulokset vahvistavat tämän.

Konkreettisuuden merkittävyyttä oppimiselle tukevat erityisesti Galberinin teoria ulkoisen materiaalin ja sitä vastaavien henkisten prosessien yhteydestä, Brunerin kolme oppimisen tasoa (toiminnallinen, ikoninen ja symbolinen), Kolbin malli, jossa konkreettisen kokemuksen ja abstraktien käsitteiden muodostuminen mielletään kulkevan kehässä sekä Piaget'n ja Kephartin teoriat lapsen kehitysvaiheista.

Kephart (1971) itse huomauttaa, että kasvatuksen kentällä pyritään herkästi etsimään yhtä totuutta, kaiken kattavaa teoriaa, joka sitten soveltuisi kaikkeen ja kaikkiin. Tällainen rajoittunut näkemys on kuitenkin mahdoton, koska oppimiseen vaikuttavat tekijät ovat niin monimuotoiset. Toisistaan paljonkin poikkeavat teoriat voivat olla ”oikeassa”, sillä oppimisellekin on olemassa useita väyliä yhtä aikaa. (Kephart 1971, v-vi.)

- Vaikka teoria ei aivan veisikään sateenkaaren päähän, niin eri teorioiden avulla voidaan kuitenkin laajentaa näkökulmia oppimisesta. Yhden teorian kautta tarkasteleminen ei tarkoita muiden väheksymistä, mutta tarjoaa kuitenkin näkökulman, joka voi osaltaan valaista polkua.

Kiinnostukseni Kephartin kehitysvaiheteorianaan juontuu alkuopetuksen sivuaineopinnoista Jyväskylässä 1996-97. Tuolloin kehityspsykologian osuus rakentui pitkälti Kephartin teorialle. Teimme ko. kehitysvaiheisiin perustuvalla tehtävistöllä kartoituksen 6-8 vuotiailla lapsilla. Kartoituksen perusteella valittiin lapsiryhmiä, joille olisi hyötyä tiettyjen kehitysvaiheiden taitojen vahvistamisesta. Kullekin ryhmälle pidimme kymmenen tuntia ns. koulukerhoa pyrkien vahvistamaan eri kehitysvaiheiden taitoja ryhmän mukaisesti. Jokaisen kerhotunnin sisältö jäseneltiin Kephartin kehitysvaihetasojen mukaan. Toteutettu projekti oli lähinnä suuntaa antava ja kaipasi kehittämistä tehtävistöstä lähtien. Kephartin teoriaa pidin kuitenkin käyttökelpoisena, koska sen konkreettisuus auttoi lasten tason havainnoimisessa ja arvioimisessa, ja samalla myös toiminnan tason arvioimisessa. Tehtävänämmä oli arvioida lasten kehitystasoa ja sen mukaan valita oikeita työtapoja ja materiaalia tukemaan kehitystä.

Kephartin teoria kiinnostaa minua myös sen vuoksi, että siinä otetaan huomioon kehitykseen vaikuttavat sensomotoriset tekijät. Älyllisen kehityksen tarkastelussa tämä näkökulma on mielenkiintoinen. Kognitiivisten taitojen ja motoriikan kehittyminen pienellä lapsella tukevat erottamattomasti toisiaan. Alkuopetusikäisellä toiminnallisuus,

havainnot ja motorisuus ovat kehittymiselle tärkeitä joten toivon, että Kephartin teoria voi valaista myös matematiikan oppimisen näkökulmaa. Kephartin teoria ei ole ollut erityisen laajasti esillä, vaikka Alkuopetuksen opas vuodelta 1987 esittelee sen lapsen kehitystason arvioinnin pohjaksi. Uuden koulukohtaisen opetussuunnitelmatyön myötä kouluilla ja opettajilla on ollut mahdollisuus valita itse mahdolliset teoriataustansa. Jyväskylässä alkuopetuksen opinnoissa Kephartin teoria on saanut merkittävän sijan Pirkko Liikasen myötä. Hän on tuonut teorian Suomeen Yhdysvalloista. Toivon että tässä työssä Kephartin teoriaa heräteltäisiin hieman uudessa valossa. Alkuopetuksen matematiikan oppimateriaaliin liittyviä opinnäytetöitä on jonkin verran tehty Jyväskylän yliopistossa, esimerkiksi opetuskokeiluihin ja opettajien käsityksiin ja käytäntöihin liittyen. Tämän tutkimuksen näkökulma poikkeaa näistä teoreettisen lähtökohtansa vuoksi.

1.2 Taustaa ja lähtökohtia Kephartin teorialle

Kephart kuuluu Yhdysvaltalaisiin tutkijoihin, jotka ovat perehtyneet hitaisiin oppijoihin. Itard ja Seguin olivat alan uranuurtajia 1800-luvulla ja Kephart ja edelleen Ball jatkoivat samaa työtä. Kephart väitteli tohtoriksi Iowan yliopistossa 1936 ja toimi sen jälkeen sekä tutkijana että terapeuttina, julkaisujen kirjoittajana ja mm. hitaasti oppiville lapsille tarkoitetun koulun ylläpitäjänä ja johtajana. Kephartin työtä arvostettiin kollegoidensa silmin, nähtiin että teoria ja käytäntö, Kephartin periaatteet, diagnosointi ja toimenpiteet kulkivat luontevasti käsi kädessä. Kenties aika ei kuitenkaan ollut otollisin huomattavan kannatuksen saamiseksi, tilausta oli 60- ja 70-lukujen taitteessa enemmän behavioristisille suuntauksille. Kephartin teoria sai myös aikoinaan tukea Venäjällä, koska teorian nähtiin täydentävän Venäjällä tehtyä tutkimustyötä. (Broudy 1968, v-vi; Ball 1971, ix-x.)

Kephart on kehitellyt teoriansa erityisesti hitaita oppijoita ajatellen, mutta se tarjoaa samalla näkemyksen yleisistä kehityksen ja oppimisen vaiheista, jotka soveltuvat kaikkien lasten kehitykseen (Kephart 1968, 40). Teoria perustuu kognitiiviseen lähestymistapaan, jossa havaitseminen ja kognitiiviset taidot kehittyvät motoriselta pohjalta. Tässä Kephart on peruslähtökohdiltaan samoilla linjoilla Piaget'n kanssa. Motorinen kehitys vaihtelee yksilöstä toiseen, mutta ilman riittävää motorista kehitystä älyllinen kehitys jää puutteelliseksi. Kephart on ensisijaisesti kiinnostunut tiedon

prosessoinnin strategioista. Mitä varhaisemmassa vaiheessa ihminen on, sitä tärkeämpää on motorinen toiminta. Myöhemmin ihminen hankkii tiedon pääasiassa visuaalisesti ja auditiivisesti, mutta käsitteetkin ovat lopulta ankkuroituneet motorisiin kokemuksiin. Esimerkiksi varhaisimpien vaiheiden harjoittamisessa Kephart käyttää malleja muodon ymmärtämisen apuna, lapsi oppii tunnistamaan muotoja kuljettamalla sormeja mallin reunoilla ja seuraten samalla silmillään. Visuaalinen ja kinesteettinen tiedonhankinta kehittyy pelkäksi visuaaliseksi erottamiseksi ja myöhemmin myös abstrakteiksi käsitteiksi. Oppimisen voisi sanoa etenevän sisäpuolelta ulkopuolelle eli kehollisuuden tajuamisesta abstrakteihin käsitteisiin. (Ball 1971, 125-126.)

Ballin (1971) perustelu motivaatiolle työskentelystä hitaiden oppijoiden parissa lienee ollut sekä hänen kollegoillensa että alan oppi-isillekin sopiva ajatus. Yhtä kantava muistutus se on kasvatuksen ja opetuksen kentällä lähes kolmekymmentä vuotta myöhemmin:

”For those who ask,
How can you work with children such as these?
the truth is simply this
– we fly on the same wings.”

2 TUTKIMUSMENETELMÄÄ VALJASTAMASSA

Teoreettisesti suuntautuneessa laadullisessa tutkimuksessa tutkimusmetodi ei ole niin selvä, kuin se voisi olla empiirisessä lähestymistavassa, esimerkiksi toiminta- tai tapaustutkimuksessa. Tutkimuksen luotettavuuden kannalta on kuitenkin tärkeää selvittää mihin työn eri ratkaisut perustuvat. Tässä tutkimuksessa lähestytään aineistoa teoreettisesti sen omista lähtökohdista käsin ja aineiston sisäisen vuoropuhelun avulla pyritään syventämään sen ymmärtämistä. Tällöin tulkinta ja ymmärtäminen nousevat keskeisiksi käsitteiksi ja voidaan puhua hermeneuttisesta lähestymistavasta.

2.1 Hermeneuttinen metodi

Hermeneutiikan pedagogiset ja metodiset piirteet löytyvät Wilhelm Diltheyn filosofiasta. Hermeneuttiselle metodille ei ole mitään yksityiskohtaista ohjeistoa, vaan se on ennemminkin näkökulma ja orientoitumistapa todellisuuteen. Dilthey on kutsunut hermeneutiikkaa myös "tekstitulkinnan tieteksi", jossa tavoitteena on tekstin (tai muun aineiston) ymmärtäminen. Ymmärtäminen tavoittelee todellisuutta, sitä mitä on, ei sitä miten pitäisi olla. (Siljander 1988, 102, 110.)

Oesch (1994) on selvittänyt Diltheyn käsityksiä ymmärtämisestä, ne edustavat keskeisesti modernia hermeneutiikkaa. Dilthey kehitteli ymmärtämisen metodia, jossa on keskeistä ihmisen sisäinen kokemus, joka antaa ilmiölle merkityksen. Tämä oli vastakohtaista luonnontieteille, joissa tarkasteltiin objektiivisia tosiasioita. Subjektiivisuuden ja objektiivisuuden, yksityisen ja yleisen, suhde onkin olennainen kysymys hermeneutiikassa. Miten ihminen voi objektiivisesti tuntee ja tarkkailla toisen yksilöllistä tietoisuutta, esimerkiksi todella ymmärtää toisen muodostamia ajatusrakennelmia. Diltheyn mukaan ihmisellä on kuitenkin pyrkimys tähän yksilöllisen tietoisuuden objektiiviseen ymmärtämiseen. Ymmärtäminen edellyttää myös itseymmärrystä, jolloin itsensäkin voi löytää aina uudelleen toisen käsityksistä. Itseymmärrys ja ymmärtämisen objektiiviset kohteet, joita voidaan nimittää elämänilmaisuuksiksi, ovat kiinteässä vuorovaikutuskehässä. Itseymmärryksen ei voi kehittyä tyhjiössä. (Oesch 1994, 34-38.)

Dilthey jakaa ymmärtämisen kahdelle tasolle. Alempi on välittömän ymmärtämisen taso ja korkeampi on hermeneuttinen, ymmärtämisen metodinen taso eli "kirjoitettujen

ilmaisujen ymmärtämisen metodologia”. Hermeneutiikka on systemaattista ymmärtämistä, mutta Dilthey arvostaa myös välitöntä ymmärtämistä, koska sille pohjautuu ulkopuolisen todellisuuden kohtaaminen. Tiedon mahdollisuus tulkinnassa perustuu siihen, että olisi olemassa yhteinen ns. objektiivisen hengen maailma, jossa ilmaisut välittyvät ihmiseltä toiselle. Objektiivinen henki on kulttuuriksi manifestoituneita muotoja (esimerkiksi moraali, oikeus, uskonto, tiede, taide) joista jokainen yksilö on osallinen. Se mikä on yksilöille yhteistä on objektiivoinut yhteisten merkitysten maailmaan. Eri elämänilmaisujen kohtaaminen tapahtuu yksilöllisen kokemuksen kautta, mutta se voi silti tapahtua usean yksilön kokemana juuri objektiivisen hengen alueella. Diltheyn mukaan yksilö voi saavuttaa uudelleen jonkun toisen kokeman ja ilmaiseman kokemuksen. Tulkitsija voi myös löytää toisen ilmauksesta, kuten tekstistä, enemmän kuin mistä tekijä itse on ollut tietoinen ja näin tulkitsija luo uusia merkityksiä. Diltheyn mielestä subjektiivisuus ja objektiivisuus, yksityinen ja yleinen kietoutuvat erottamattomasti toisiinsa ja kaikkea ymmärtämistä hallitsee tällöin hermeneuttinen kehä. (Oesch 1994, 39-43; Siljander 1988, 103-105.)

Hermeneuttinen spiraali I. kehä on hermeneuttisen metodin tärkeä luonnehdinta, jonka Diltheykin tuo esiin. Kehä kuvaa tutkimuksen kulkua, jossa ei ole selvää alkua tai loppua ja jossa ymmärtäminen perustuu aina aiemmin ymmärrettyyn. Lähtökohtana ja edellytyksenä tutkimukselle on ennakkokäsitys, joka tietoa hankittaessa muuttuu ja tämä muuttunut käsitys vaikuttaa jälleen uuden tiedon ymmärtämiseen. Hermeneuttisessa kehässä kiepsahtelee myös osan ja kokonaisuuden välinen suhde, jonka avulla ilmiötä voidaan ymmärtää. Kokonaisuus hahmottuu osiensa kautta, mutta myös osat selkiytyvät paremmin suhteessa kokonaisuuteen. Metodille on tyypillistä kehän sulkeutumattomuus ja määritelmien väliaikaisuus. Tutkimusta ei voida etukäteen ennakoida tarkalleen, koska käsityksiä ja ongelmanasettelua korjataan ja kehitetään jatkuvasti. Näin ollen tutkimuksen keskeisiä käsitteitäkään ei voi etukäteen varmasti tietää. (Siljander 1988, 115-119.) Hermeneuttisen kehän ajatukset voi rinnastaa myös konstruktivistiseen oppimisenäkemykseen, jossa oppiminen pohjaa aina aiemmin opittuun.

- Tutkimuksen tekijä on kuin kuljettaja tällä opintomatalla, liekö se sitten kuumailmapallomatka tai maailmanpyörä, mutta avanee matkaajalle kuitenkin uusia näköaloja.

Tekstien tulkinta on ollut perinteisin hermeneutiikan tutkimuskohde, vaikka lähestymistapa voidaankin ymmärtää "koko kasvatustoiminnan" hermeneutiikkana. Tekstien tulkinnan avulla on haluttu määritellä ratkaisua johonkin pedagogiseen ongelmaan, eikä niinkään keskittyä tekstiin sinänsä. Tekstistä on voitu etsiä näkökulmia, jotka voisivat auttaa johonkin ajankohtaiseen tilanteeseen. Tyypillistä on, että tekstiä analysoidaan sen omista lähtökohdista käsin ja tulkitsijan subjektiivisuus on olennaista tulkintaprosessissa. Tulkittamista ei voida nähdä merkitysten vastaanottamisena, vaan niiden luomisena. (Siljander 1988, 119-123.) Tulkintasäännöistä varsinkin valmisteleva tulkinta on haaste myös tälle työlle. Valmisteleva tulkinta sisältää tekstin autenttisuuden määrittelemisen, sekä tietoisuuden kysymyksenasettelusta ja ennakkokäsityksistä.

Väkevä (1999) pohtii hermeneutiikan objektiivisuuden mahdollisuuksia, miten voisi taata tulkinnan pätevyyden. Tähän hän löytää kolmentyyppisiä vastauksia hermeneutiikan perinteen sisältä: 1) Tulkittavan kohteen merkitystä voidaan sinällään pitää objektiivisena, jolloin tulkinnan tehtävänä on mahdollisimman hyvin tuoda esiin nämä merkitykset. 2) Tulkitsija ja tulkittava kohde voivat olla vuorovaikutuksessa, jolloin tulkitsijalla on olennainen osuus tulkinnassa. 3) Yksi vaihtoehto on myös palauttaa merkitys siihen kulttuuriseen kontekstiin, jossa tulkinta tapahtuu.

Näistä ensimmäinen ja toinen kohta ovat lähinnä tämän tutkimuksen lähtökohtia, aineiston esille tuominen sellaisenaan, sekä sen tulkinnallinen rekonstruointi. Väkevän (1999) mukaan Diltheykin vastaa objektiivisuuden haasteeseen sillä, että yksityisen ja yleisen on oltava dialektisessa suhteessa, jolloin dialogin synteestistä muodostuu yleiseen kohdistuva ymmärrys. Yksilölliset elämänilmaukset dokumentoituvat yleisten kulttuuristen koodien kautta, joten tulkinnan kohde on jo itsessään yleinen ja objektiivinen. Tulkinnan kohde tässä tutkimuksessa on Kephartin teoria ja dialogia voitaisiin sanoa käytävän tutkijan, Kephartin teorian ja oppimateriaalin kesken. - Tavoitteena on, että tälläkin kertaa dialogi olisi enemmän kuin osiensa summa.

2.2 Systemaattinen analyysi

Systemaattinen analyysi tarkoittaa menetelmäperhettä, jota voidaan soveltaa hyvinkin erityyppisissä suuntauksissa. Hermeneuttisissa ja fenomenologisissa tutkimuksissa sitä

sovelletaan lähinnä semiotiikan käsitteistä tai aineiston omista lähtökohdista lähtevään tutkimukseen.

Systemaattisella analyysillä on kaksi perustehtävää, analyyttinen ja synteettinen. Analyyttinen tehtävä merkitsee jo olemassa olevien käsitysten ja ajatusrakennelmien erittelyä. Analyysi etenee vaiheittain aineiston kartoituksesta kiinnostuksen kohteiden erittelyyn ja kokonaisuuden ja kohteen välisen suhteen selvittämiseen. Synteettinen tehtävä tarkoittaa uuden ajatusrakennelman kokoavaa luomista. Uuden luomiselle ei ole mitään yleistä metodista sääntöä, mutta se edellyttää aiemmin ajatellun teorian tuntemista. Synteesissä etsitään yleisiä periaatteita ja liitetään ne laajempiin yhteyksiin ja otetaan uusia lähestymistapoja käyttöön. (Jussila, Montonen, Nurmi 1989,157-159.)

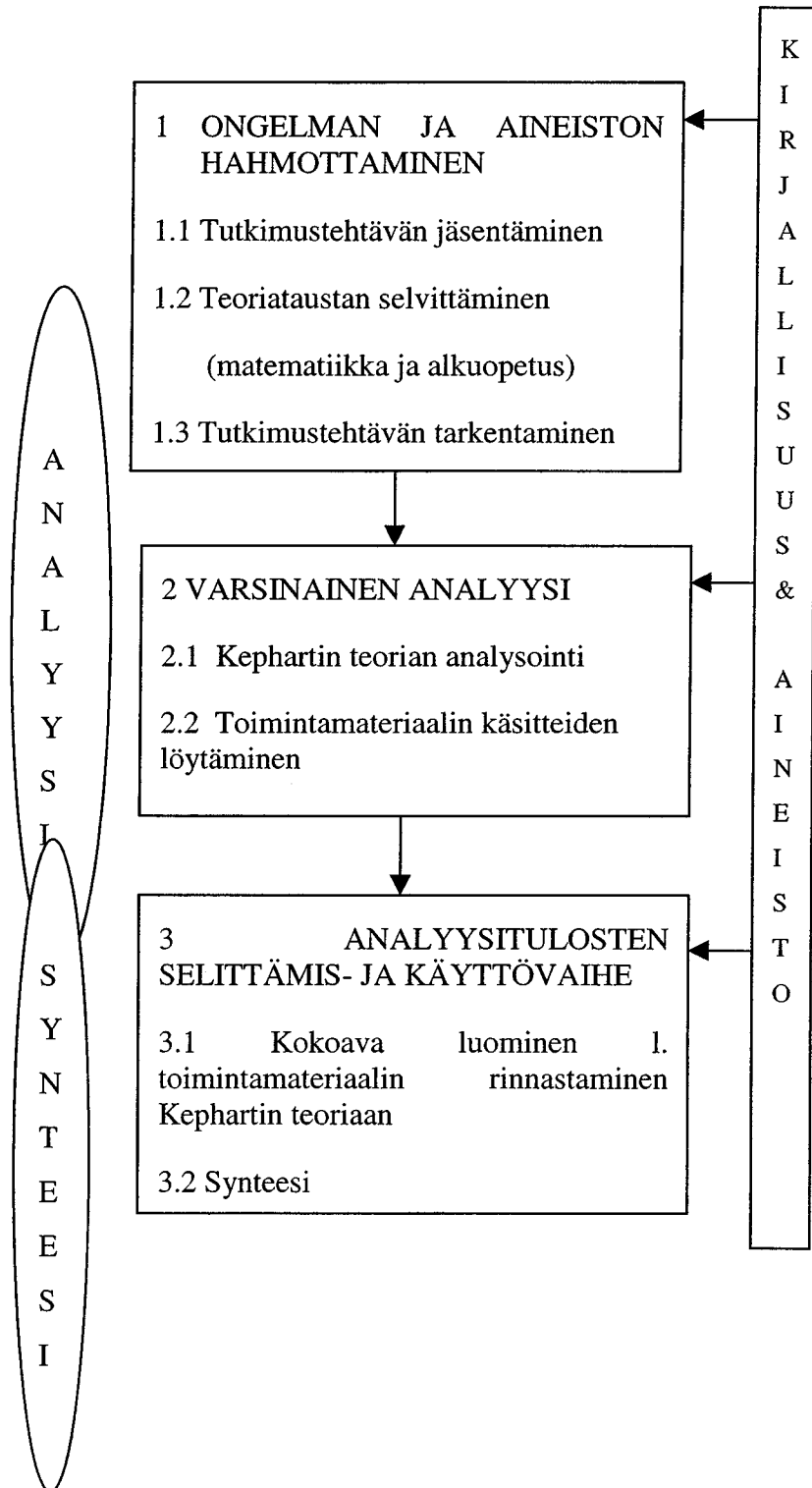
Systemaattinen analyysi on kvalitatiivista sisällönanalyysiä, jossa tutkimuksen kohteena on yleensä kirjallinen aineisto: teoreettinen ajatusrakennelma, oppikirja, ohjelmajulistus tms. Sisällön analyysissä tarkastelun kohteena voi olla myös kuvallista aineistoa tai muuta viestintämateriaalia tai viestinnän välineitä (esimerkiksi oppikirjatutkimus). Analyysissä pyritään aineiston käsitteelliseen erittelyyn, tulkintaan ja arviointiin. On myös mahdollista luoda uusia rakennelmia syntetisoimalla osatekijöistä ja käsitteistä laajempia kokonaisuuksia. (Jussila, Montonen, Nurmi 1989, 170-176). Tässä työssä on piirteitä sekä sisällönanalyysistä että teoreettisesti pidemmälle menevästä systemaattisesta analyysistä. Tutkimuksen aineisto koostuu oppimateriaalista, jota pyritään evaluoimaan teoreettisen ajatusrakennelman avulla.

Systemaattisen analyysin vaiheet jakautuvat kolmeen osaan:

1. Ongelman ja aineiston hahmottaminen: ongelmien jäsentäminen, tekstien valinta ja tulkinta, ongelmanasettelun täsmentäminen
2. Varsinainen analyysi: käsitteiden etsiminen, väitteiden jäsentäminen ja argumentaation erittely
3. Analyysitulosten selvittämis- ja käyttövaihe: ajatusrakennelmien ristiriitojen osoittaminen ja keskeisen osan rinnastaminen (emt., 176-179.)

Nämä vaiheet voidaan ymmärtää samalla myös pyörähtelyinä hermeneuttisella kehällä, osien ja kokonaisuuden, ennakkokäsitysten ja uusien käsitysten tulkinnallisena vuoropuheluna.

Havainnollistan systemaattisen analyysin soveltamista ja sen eri vaiheiden tehtäviä tässä tutkimuksessa seuraavan mallin avulla (kuvio 1).



KUVIO 1. Systemaattisen analyysin malli tässä tutkimuksessa

Systemaattisen analyysin tavoitteena on lisätä ja tehostaa ko. aineiston käyttöä. Menetelmän luotettavuuden arviointiin eivät empiiristen tutkimusten perinteiset arviointiperusteet aivan suoraan sovellu. Luotettavuuden kannalta on systemaattisessa analyysissä tärkeää tuoda esiin seuraavia asioita:

- Tutkijan kokemustausta ja ennakkokäsitykset
- Teorian perusteellinen esittely ja lähdeviitteet osoittamassa mihin johtopäätökset perustuvat
- Teoreettisten näkökulmien ja tekstien valintaa koskevat ratkaisut
- Metodiset ratkaisut ja tulkintaperiaatteet
- Johtopäätösten perusteleminen

(Jussila, Montonen, Nurmi 1989, 201-204.)

Oppimateriaalin tutkiminen

Suomalaisia oppimateriaalitutkimuksia löytyy lähinnä yliopistojen julkaisusarjoista ja kouluhallinnon julkaisuista, mutta teoriapohjaista oppimateriaalitutkimusta ei (1970- ja 80-luvuilla) ole paljoa tehty. 1970-luvulla on keskitytty kirjallisen oppimateriaalin selvittämiseen, esimerkiksi miten oppikirjat toimivat tiedon välittäjinä ja miten ne soveltuivat opetussuunnitelmiin. 80-luvulla tutkimuksen painopistettä haluttiin siirtää enemmän siihen, miten oppimateriaali toimii käytännön opetuksessa ja miten se vaikuttaa oppimistuloksiin. Oppikirjat olivat edelleen keskeisiä tutkimuskohteita, mutta muitakin välineitä mm. tietotekniikka otettiin huomioon. Karin mukaan oppimateriaalitutkimuksen haasteena ja vaikeutenakin on ottaa huomioon oppikirjan funktio opettajan ja/tai oppilaan näkökulmasta. (Kari 1987, 7-14.)

2.3 Tilaa luovuudelle

Laadullisen tutkimuksen joustavuus ja prosessinomaisuus tulee esille tutkimuksen eri vaiheissa. Teoreettinen tarkastelu kehittyy ja täsmentyy tutkimuksen aikana, samoin ongelmanasettelu. Yksityiskohtaiset aineistonkeruuta koskevat ratkaisut tarkentuvat ongelmien mukana ja myös analyysia tapahtuu jossain määrin jo tutkimusprosessin kuluessa. Tutkimuksen etenemistä voi etukäteen hahmotella väljästi, mutta tutkimuksen tulee kuitenkin antaa elää ja hakea muotoaan aiheeseen syventymisen myötä.

Tulkinnan ja subjektiivisuuden leimatessa tutkimusta, on mielenkiintoista pohtia luovuuden ja taiteellisuuden aspekteja tutkimisessa. Ehrnrooth (1990, 30-34) on tarkastellut intuition ja analyysin suhdetta tieteellisessä tutkimustyössä. Hänen mukaansa hyvä tutkimus lähtee liikkeelle hyvästä kysymyksestä, joka on intuition mieleen tuoma. Tämän jälkeen tarvitaan analyttistä ammattitaitoa aineiston keruuseen, sen tarkasteluun ja tulkintaan. Intuitio säilyy kuitenkin punaisena lankana työn edetessä, estäen näkemyksen hukkumiselta ja pelkältä uloskirjoitukselta. Tutkija voi olla luova tieteilijä tai oivaltava tieteilijä. Tieteellisesti kvalitatiivista analyysimetodia on oudoksuttakin, koska on vaikea kuvailla, kuinka johtopäätökset aineistosta syntyvät. Johtopäätöksissä onkin tärkeä osuus keksimisellä, mielikuvituksella ja improvisaatiolla. Tämän ei kuitenkaan tarvitse olla este pyrittäessä tieteelliseen tietoon, jossa oleellista on tiedon perusteltavuus. Perusteltavuuden ohjeeksi Ehrnrooth antaa intuition ulkoistamisen, eli omien vaikutelmien, ennakkokäsitysten, heurististen oivallusten kirjoittamisen lukijan nähtäväksi. Omat vaikutelmat voisi tuoda esille (eli ulkoistaa intuitio) ainakin muutaman kerran, tutkimuksen alussa ja aineiston ensimmäisen jäsentelyn jälkeen (vrt. systemaattisen analyysin 1. vaiheen tutkimustehtävien esittely).

Kiviniemi (1993) on esitellyt Elliot W. Eisnerin ajatuksia taiteellisesti suuntautuneesta laadullisen tutkimuksen ja evaluoinnin menetelmästä. Taiteellisen arvioinnin, jolla on läheiset yhteydet taidekriittisiin, on tarkoitus rikastuttaa perinteistä tieteellistä tutkimusta. Tutkija voidaan tästä taiteellisesta näkökulmasta nähdä oppimiseen liittyvien tapahtumien ja tekijöiden kriitikkona. Kriitikki on tällöin paljastamisen, ilmaisun ja sanomisen taidetta. Tarkoitus ei ole vain kuvata ilmiötä, vaan tarjota sille uusi, oma tulkinta. Kasvatukselliselle kriitikolle on tyypillistä sujuva kielenkäyttö, mutta tärkeää on myös kasvatukseen liittyvien teorioiden tuntemus ja opettajakokemus. Eisner on esittänyt kriitikille kolme osa-aluetta: kuvailu, tulkinta ja arviointi (voisi rinnastaa myös systemaattisen analyysin vaiheisiin). Kuvailu on ilmiön tosiasioihin perustuva taiteellinen ja tiedollinen kuvaus. Tulkinnassa mennään pidemmälle ja tehdään johtopäätöksiä teorian ja käytännön suhteesta. Teorian tehtävä on avartaa uusia näkökulmia ja mahdollisuuksia ilmiön tutkimiseen. Arvioinnissa kriitikko arvioi ilmiötä sen omista käsitteistä käsin. (Kiviniemi 1993, 5-7.)

Laadulliseen tutkimustapaan liittyy hyvin luontevasti myös taiteellisia piirteitä. Olkoon tutkija sitten tieteilijä, oivaltaja, keksijä tai kriitikko, niin luovuudelle ja intuitioille täytyy olla tilaa loogisen päättelykyvyn tueksi. Tiede ja taide voivat kulkea rinnakkain ja vaikea olisikin osoittaa tarkka raja näiden välille. – Kehässä kulkevat myös tieto, joka herättää kysymyksiä, kysymykset jotka tuovat oivalluksia (ja oivallukset elämyksiä) ja jälleen uusia ajatusrakenteita.

3 MATEMATIIKAN OPETUKSEN KEHITTÄMINEN

Näkökulmia

Niiniluoto (1994) on pohtinut mitkä tekijät vaikuttavat siihen millaista tietoa koulussa painotetaan ja miten. Kasvatusinstituutioiden taustalla on aina käsitykset oppimisesta, opettamisesta, tiedosta, ihmisestä ja yhteiskunnasta. Kulloisestakin tiedonkäsityksestä kertoo opetuksen sisällön yleiset piirteet. Koulun tehtävänä on ollut välittää tietoja ja tietopohjaisia taitoja jo antiikin ajoista lähtien. Tekniikan kehittymisen tuomat tiedon välittämisen, varastoinnin ja käsittelyn uudet muodot ovat tällä vuosikymmenellä tuoneet esille käsitteen ”tietoyhteiskunta” tai ”informaatioyhteiskunta”. Koulun tehtäväksi on nähty vastata uusiin tiedonkäsittelyn haasteisiin huolehtimalla oppilaitten tietotekniikan käyttötaidoista. Tietotekniikan käyttövalmiudet eivät ole kuitenkaan riittävä vastaus tiedollisten taitojen kehittämisen haasteeseen koulussa. Yhä enenevän tietotulvan keskellä pitäisi korostaa ajattelun taitoon liittyviä valmiuksia. Ihmiset tarvitsevat aikaisempaa enemmän tietoon liittyviä taitoja: tiedon etsimistä, oikeiden kysymysten esittämistä, kriittistä arviointia, asioiden yhdistelykykyä ja kykyä käyttää tietoa rationaalisen harkinnan ja päätöksenteon pohjana. (Niiniluoto 1994, 67-69.)

Ajattelun taitojen kehittäminen edellyttää luovuuden, kekseliäisyyden, ja ongelmanratkaisutaitojen esille nostamista. Opetussuunnitelmissa on tiedollisten aineiden ohella eroteltu erikseen taiteelliset ja taidolliset aineet. Jos luovuus ja ongelmanratkaisutaito liitetään vain jälkimmäisiin, käsitetään järki ja tunne, tiede ja taide, tieto ja mielikuvitus toistensa vastakohdiksi. Taustalla vaikuttaa käsitys vasemman ja oikean aivolohkon mekaanisesta erosta. Todellisuudessa aivot toimivat kuitenkin kokonaisuutena ja luovuudelle on koko aivojen kapasiteetti välttämätön. Sen sijaan, että lisättäisiin taito- ja taideaineiden määrää, Niiniluoto kehottaa ottamaan tiedollisissa aineissa enemmän ihmisen luovuutta huomioon ja käyttöön. (Niiniluoto 1990, 146-147.)

Matematiikka on tietoja ja taitoja, joita tarvitaan joka päivä. Liebeckin (1985) mukaan matematiikan käyttöarvo oikeuttaa kyllä sen opettamiseen, mutta ei vielä vastaa siihen, miksi ihmiset myös nauttivat matematiikasta. Matematiikan kiehtovuus piilee siinä, että se vastaa ihmisen älyllisiin sekä esteettisiin tarpeisiin, kuten taidekin. Samoin kuin taiteenkin suhteen, eri ihmiset pitävät enemmän tietyistä matematiikan alueista kuin

toisista. (Liebeck 1985, 13-14.) Matematiikan kauneus liitetään yleensä hyvin korkeatasoiseen matematiikkaan. Yhtä hyvin jo matematiikan alkutaipaleella koetut oivaltamisen elämykset ja havainnot eri tekijöiden suhteista voivat olla esteettisiä kokemuksia. Matematiikan opetuksessa tulisi ottaa huomioon ihmisen luontainen kiinnostus ja uteliaisuus älylliseen operointiin.

3.1 Katsaus historiaan

Matematiikka on yksi ihmiskunnan vanhimmista tieteistä. Matematiikan tieto on vanhaa, mutta sen opettamiseen on haettu suuntaa laidasta laitaan. Matematiikan kehittämistarpeet on saneltu yleensä yhteiskunnallisten muutospainoiden mukaisesti. (Haapasalo 1993, 1.)

Euroopassa ja Yhdysvalloissa oli vuosisadan alkupuolella vallalla uudistusliike, jossa haluttiin painottaa oppilaskeskeisyyttä, lapsen omaa aktiivisuutta. Reformiliikkeeseen vaikutti Saksasta levinnyt hahmopsykologia, jossa ymmärrettiin ihminen kokonaisvaltaiseksi. Ulkoa oppimisen merkitystä vähennettiin ja annettiin aiempaa enemmän tilaa keksivälle oppimiselle. Tärkeämpänä kuin oikeiden vastausten oppimista pidettiin kykyä ajatella laadullisesti. Opetussuunnitelmat olivat lähinnä organisatorisia ja hallinnollisia, mutta opetuksen sisältöihin vaikuttivat käytännön elämän tarpeet, kuten kaupankäynti. Koulutustasoa jouduttiin nostamaan sen mukaan, kun yhteiskunnan muuttuessa tarvittiin yhä enemmän erityisosaamista eri ammateissa. (Lindgren 1990, 38-39; Haapasalo 1997, 144.)

Vuosisadan puolivälin jälkeen käynnistyi USA:ssa laaja-alainen matematiikan uudistushanke nimeltä New Math. Taustalla oli huoli teknologisesta jälkeenjäämisestä, kun Neuvostoliitto oli lähettänyt Sputnikin avaruuteen v. 1957. Uudesta sukupolvesta haluttiin kehittää taitavampi ja kilpailukykyisempi. Tämä edellytti panostusta nimenomaan matematiikkaan ja luonnontieteisiin, joita olisi opetettava entistä syvällisemmin. (Haapasalo 1997, 144-145.)

Tavoitteena oli yhdistää käytännön laskeminen puhtaaseen matematiikkaan laajentaen yleistavoitteita ja tiedollisia tavoitteita. Ala-asteella käsiteltiin esimerkiksi joukko-oppia ja lukuteoriaa, jotka olivat aiemmin olleet korkeakoulutason opetuksessa. Jo alkuopetuksessa lapsen tuli päätellä, että kolme on suurempi kuin kaksi, pohtimalla

bijektiivistä vastaavuutta joukkojen alkioiden välillä. Uusi matematiikka -suuntaus sai sijaa myös suomalaisessa opetussuunnitelmassa vuonna 1970. Spiraaliperiaate eli asiasisältöjen kertaaminen ja opettaminen lähes uusina moneen kertaan, oli suuntaukselle tyypillistä ja se näkyi selvästi tämän kauden oppikirjoissa. (Haapasalo 1997, 145; Lindgren 1990, 35-41.)

Matematiikan uudistusliike epäonnistui, koska pian havaittiin, että edes peruslaskutoimituksia ei enää hallittu. Uusi matematiikka oli vaikeaa paitsi oppilaille, opettajille niin myös vanhemmille. Vanhemmat, opettajat ja julkinen painostus vaativat opetuksen muuttamista, jotta peruslaskutoimitukset pääsisivät arvoonsa. Seurauksena syntyi liike 'takaisin perusteisiin' eli Back to Basics. Käsitteitä yksinkertaistettiin ja pyrittiin varmistamaan vain perustaitojen osaaminen. Edellisestä ylevästä ideasta kehittää ajattelua radikaalisti matematiikan avulla siirryttiin mekaaniseen käsitykseen oppimisesta. Rutiininomaisen opetuksen lopputulos ei ollut edeltäjäänsä parempi. (Haapasalo 1997, 146-149.) Suomessa voimassa olevan opetussuunnitelman pohjalta tiivistettiin vuonna 1976 ns. ydinopetussuunnitelma selkiyttämään matematiikan perustavoitteita ja perusoppiainesta. Ydinopetussuunnitelma korosti matematiikan laskutaidollista ja menetelmällistä puolta. (Kupari 1993b, 81.)

Kaksi radikaalia suuntausta antoivat sysäyksen matematiikan opetuksen analyttisempaan tutkimiseen. 1980-luvulla länsimaissa alettiin arvioida laajasti matematiikan opetuksen tilaa. Tästä seurasi lukuisat opetussuunnitelmauudistukset, jotka edelleen ovat käynnissä. (Haapasalo 1993, 1-2.)

3.2 Kehityssuunnat 1980- ja 90-luvuilla

Lähestyessämme vuosituhannen vaihdetta tulee mieleen kysymys, miksi kritiikin kohteena oleva mekaaninen opiskelu, ei ole paljoakaan muuttunut 1900-luvun alkupuoliskolta. Jälleen pyritään pois tilanteesta, jossa oppilas on passiivinen tiedon vastaanottaja.

Haapasalon mukaan uudistuspyrkimysten ongelmana on ollut se että, motiivi uudistamiseen on tullut ulkoisista tekijöistä, eikä itse matematiikan tiedon rakenteista tai sen syntyprosessista. Ulkoisia tekijöitä ovat olleet muun muassa yhteiskunnallinen ja poliittinen paine ja muiden maiden uudistusten kritiikitön matkiminen. Uudistuksiin on

lähdetty ilman laajempia kokeiluja ja ottamatta huomioon vallitsevaa opetuskäytäntöä. On oletettu uudistusten käyvän nopeasti, vaikka ne ovat hitaita prosesseja. Vasta viime aikoina ovat kasvatukselliset ja oppimispsykologiset näkemykset tulleet esille uudistuspyrkimysten innoittajina. (Haapasalo 1997, 149-152.)

Matematiikan uutta opetussuunnitelmaa kehiteltiin 1980-luvulla ja se vahvistettiin vuonna 1985. Siinä painopistettä haluttiin siirtää 'drillaavasta' taitoharjoittelusta kohti ongelmanratkaisua ja matematiikan soveltamista ja käyttämistä. Opettajille uusia painotuksia pyrittiin välittämään täydennyskoulutuksen ja opetusmateriaalin avulla. (Kupari 1993a, 81; Kupari 1993b, 81.) Opetussuunnitelmatyö kehittyi suuntaan, jossa huomiota kiinnitetään siihen miten opitaan, kun aiemmin pääpaino oli ollut itse päämäärässä, mitä opitaan. Tasapainoinen opetussuunnitelma ottaa huomioon molemmat näkökulmat.

Suomessa asetettiin vuonna 1988 matemaattis-luonnontieteellinen perussivistyksen komitea pohtimaan opetuksen tilaa ja asemaa, sekä esittämään kehittämissuhteita. Opetuksessa huomattiin mm. seuraavia puutteita:

- Työtavat ovat enimmäkseen opettajakeskeisiä
- Opetus on painottunut liikaa mekaaniseen laskutaidon harjoittamiseen.
- Opetus tapahtuu liikaa keskitason oppilaiden ehdoilla
- Soveltamista, ongelmanratkaisua ja käytännön matematiikkaa on liian vähän
- Opetus on kovin oppikirjasidonnasta

Kehittämissuhteet:

- Opetettavalla matematiikalla on oltava merkitystä oppilaille
- Opetusmenetelmiä on monipuolistettava
- Painopiste on siirrettävä rutiinitaidoista ajattelun kehittämiseen
- Opetusta on konkretisoitava
- Laskimia on hyödynnettävä alimmilta luokka-asteilta lähtien

(Peruskoulun matematiikan opetuksen kehityssuunnasta 1990-luvulla 1991, 11)

Peruskoulua ja matematiikan opetuksen tilannetta tutkittiin myös vertaamalla vuosilta 1979 ja 1990 saatuja tutkimustuloksia (luokka-asteet 4, 6 ja 9). Opettajat käyttivät nyt matematiikan opetuksen suunnitteluun vähemmän aikaa kuin vuonna 1979. Tämä

saattoi olla seurausta oppikirjojen kehittymisestä, niistä tuli valmiita ”paketteja” oppitunti/aukeama -periaatteella sisältäen laajat tehtäväkokoelmat ja valmiit kokeet. Valmiin materiaalin varauksettomassa käytössä on kuitenkin vaara, että opettaja luovuttaa oman opetusnäkemyksensä ja opetuksen vapautensa oppikirjalle. Vaikka vuoteen -90 mennessä painopistettä oli jo pyritty siirtämään ajattelun taidoille ja soveltamis- ja ongelmanratkaisutaidoille, niin matematiikan opetus painottui edelleen vahvasti opettajan opetukseen ja tehtävien laskemiseen kirjasta. Askarteleminen, pelaaminen, havaintojen tekeminen luokan ulkopuolella ja tietojen kerääminen muista tietolähteistä osoittautuivat harvinaisiksi työtavoiksi. (Kupari 1993b, 100-101.)

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden matematiikan osuudessa on nähtävissä matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean kehittämis ehdotukset. Opetuksen lähtökohdaksi nähdään oppilas aktiivisena tiedonhankkijana, käsittelijänä ja tallentajana. Oppiminen perustuu aiempien käsitysten täydentämiseen ja uudelleenrakentamiseen. Oppimistilanteiden tulisi olla opetussuunnitelman perusteiden mukaan ongelmakeskeisiä, niin keskustelua kuin kokeiluakin sallivia. Askartelua ja leikinomaisuutta tulisi korostaa pitkään, jotta konkreetin toiminnan avulla päästäisiin käsitteiden ymmärtämiseen. Numeeriset merkit ja peruslaskutoimitukset otetaan käyttöön vähitellen, ongelmanratkaisun avuksi. Ongelmanratkaisun tulisi olla opetuksen ensisijainen periaate. Opetussuunnitelmassa kehoitetaan käyttämään opetuksessa rakentelua ja käsillä tekemistä kaiken ikäisillä oppilaille. Abstraktiin symboliesitykseen ei kannata mennä liian nopeasti, jotta käsitteiden oikea muodostuminen mahdollistuu. Sisältöjä olisi hyvä suunnitella laajoina kokonaisuuksina, ja olisi pyrittävä pois kiireestä ja uudelleen opetuksesta. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 79-80.)

Vuosituhanneksen lopussa on uusien koululakien mukaisesti kehitelty kansallisia oppimistulosten arviointijärjestelmiä, sillä vertailevan arviointitiedon tarve on koettu suureksi. Keväällä 1998 tehty peruskoulun päättövaiheen matematiikan oppimistulosten arviointi aloitti tämän uuden kansallisen arviointijärjestelmän. Kaksivaiheiseen otantaan osallistui 110 yläastetta, tulokset esitellään opetushallituksen julkaisussa (Korhonen 1999). Perustaitojen hallinta osoittautui keskimäärin hyväksi opetussuunnitelman perusteisiin verrattaessa. Kuitenkin lähes neljäsosalla oppilaista oli selviä puutteita perustaidoissakin, erityisesti soveltamisessa. Tämän arvellaan johtuvan edelleenkin harjoittelun painottumisesta mekaaniseen harjoitteluun ymmärtämisen ja soveltamisen

sijasta. Soveltamistaitoja mittaavan tuottamiskokeen tuloksia ei voida pitää hyvänä keksimäärinkään, koska tulos jäi alle puoleen maksimipistemäärästä. (Korhonen 1999, 66-68.) Arviointitulosten perusteella uusien opetussuunnitelman perusteiden painotukset eivät vielä olleet nähtävissä neljän vuoden kuluttua ops:n perusteiden voimaantulosta. Koulussa muutokset vaativat aikaa ja uudistumishaluisia opettajia. Perinteet mekaaniselle matematiikan harjoittelulle ovat vahvat ja niiden muuttaminen vaatii rohkeutta.

Koulutuksellinen tasa-arvo toteutuu tulosten mukaan hyvin, sillä sukupuolen, alueiden ja kielen suhteen oppimistuloksissa ei ollut merkittäviä eroja. Arviointi ei myöskään antanut viitteitä siitä, että koulut olisivat eriarvoistuneet, vaikka taloudellinen tilanne ja koulujen lisääntynyt vapaus olisi saattanut tähän johtaa. Tyttöjen ja poikien välillä oli sen sijaan huolestuttaviakin eroja asenteiden suhteen. Vaikka tyttöjen arvosanat olivat hieman parempia kuin poikien, niin tyttöjen itseluottamus matematiikan oppijana oli paljon heikompi kuin poikien. Silti matematiikan tarpeellisuuden kokemisessa ja matematiikasta ahdistumisen suhteen merkittäviä eroja sukupuolten välillä ei ollut. (Korhonen 1999, 68-69.)

Tyttöjen matematiikkaan suuntautumista pohditaan aika ajoin yleisissäkin keskusteluissa, kysytään kuinka tyttöjä saataisiin hakeutumaan enemmän matemaattisille aloille. Korhonen (1999, 69) päätelee, että opiskeluvallinnat tehdään enemmän koulumenestyksen mukaan kuin asenteiden pohjalta. Toisaalta, kun arvosanoissa ei ole eroja ainakaan tyttöjen haitaksi, ei koulumenestyskään vaikuttaisi olevan keskeinen tekijä. Yhtenä syynä on pidetty sukupuolille ominaisia erilaisia suuntautumisen ja kiinnostuksen kohteita. Asenteisiin on kuitenkin hyvä kiinnittää huomiota, jotta ei tuettaisi mitään piilo-opetussuunnitelmia, jossa tyttöjä kannustettaisiin matematiikassa vähemmän kuin poikia. Peruskäsitys itsestä matematiikan oppijana muodostuu kuitenkin varhain.

Dimensiossa on esitetty mielenkiintoinen kommentti matematiikan opetuksen historiasta (Portin 1995, 52-53). Siinä kirjoittaja kritisoi Pehkosen (Pehkonen 1995, 44-46) kirjoitusta ”uudesta” toiminnallisesta matematiikasta, koska hänen mielestään toiminnallisella matematiikalla on jo pidemmät perinteet. Kirjoittaja viittaa vanhaan matematiikan oppikirjaan, jonka vuonna 1912 Sortavalassa kirjoitetun esipuheen päätavoitteet vastaavat yhtä hyvin 90-luvun tavoitteita:

Opetuksen tulee lähteä tutulta havaintopohjalta; säännöllinen puupala, jonka opettaja luokan eteen asettaa, on liian vieras lähtökohta, eikä voi herättää sitä mielenkiintoa, joka on välttämätön opetuksen menestymiselle. Opetuksen on lähdettävä tutusta esineestä, jonka jokainen lapsi on nähnyt ja jossa kulloinkin esillä oleva mittausopillinen seikka esiintyy.

Opetuksen tulee olla käytännöllistä; kun opetus näin lähtee tutulta pohjalta, on se jo omiaan osoittamaan, että mittausopin opetus on läheisessä yhteydessä jokapäiväisen elämän kanssa. Toivon että, kukin opettaja löytää sopivia aiheita keskustelulle, joka johtaisi lapsia kulkemaan "silmät auki", kiinnittämään huomiotaan niihin erilaisiin muotoihin, jotka alituisesti esiintyvät ympärillämme.

Opetuksen tulee johtaa oppilasta toimimaan; lapset ovat, kun heitä sopivasti siihen johdetaan, varsin innostuneita kaikenlaiseen mittailuun... samalla kun tämä teon periaate toteutetaan, muodostuu itse mittausopin opetus tämän kautta paljon mielenkiintoisemmaksi kuin muuten. (Merikoski 1927, 82-83.)

Kirja on myös hyvä esimerkki vuosisadan alkupuolen uudistusliikkeestä, jossa painotettiin laadullista ajattelua ja lapsen aktiivisuutta. Vaikka eri suuntaukset ovat vaihdelleet ja vaikuttaneet opetukseen 1900-luvulla, niin luultavasti aina on löytynyt myös opettajia, joiden oppimisenäkemyks on kuitenkin ollut lähellä tuota "teon periaatetta" ja konstruktivistisen ja kokemuksellisen oppimisen näkemyksiä. Kriittisen ja oman oppimisen näkemyksen omaavalla opettajalla ei ole tarvetta mennä mukaan kaikkiin ulkoisista tekijöistä lähteviin uudistuksiin. Opettajan on kuitenkin aina oltava valmis tarkistamaan ovatko hänen näkemyksensä perusteltuja. Kansallisen arviointijärjestelmän kehittäminen opetustyötä palveleviksi voi antaa tarpeellista tukea opetuksen kehittämiseen.

4 KONSTRUKTIVISMI JA MATEMATIIKKA

4.1 Konstruktivismi

Viime vuosina kasvatustieteen opiskelijat ovat usein kuulleet puhuttavan konstruktivistisesta oppimisnäkemyksestä. Vaikka konstruktivismiin viitataan usein eri yhteyksissä, niin sen sisältö voi jäädä kuitenkin aika pintapuoliseksi, ilman tarkempaa perehtymistä. Leino (1993) muistuttaa, että konstruktivismi on paljon enemmän kuin suuntaus, jossa oppilas rakentaa tietonsa aikaisemmille konstruktoilleen. Konstruktivismiin mahtuu erilaisia suuntauksia, joissa keskeistä on tiedon rakentuminen ja sen olemus. Konstruktivismi on pikemminkin lähestymistapa, metateoria tai paradigma kuin yksittäinen teoria. Yhteisenä piirteenä konstruktivismille on kuitenkin tietyt oletukset ihmisestä, joita Leino (1993, 4) esittelee Magooniin pohjautuen:

Ihminen voi oppia vain suhteessa aikaisempaan tietoonsa. Jo omaksutuilla tiedoilla on tärkeä merkitys hänen oppimiselleen ja toiminnalleen. Tiedolla on aina monimutkainen joukko viitteitä ja merkityksiä, jotka ovat tärkeitä ilmiöitä tutkittaessa. Oppijalla itsellään on ainakin osittainen kontrolli oppimiseensa, vaikka monenlaiset normit rajoittavat tätä autonomiaa. Oletuksesta seuraa, että oppiminen ja opettaminen on ymmärrettävä tavoitteellisina prosesseina, joita ei voi tutkia tavoitteista irrallisina. Ihmiselle on kehittynyt kyky muodostaa nopeasti käsityksiä monimutkaisesta sosiaalisesta ympäristöstä ja toimia sosiaalisten normien puitteissa. (Leino 1993, 1,4.)

Kyetäkseen käsittelemään oppimisen ilmiöitä, tutkijoiden on täytynyt rakentaa käsitteitä ja niitä yhdistäviä teorioita tiettyjen normien puitteissa. Tieteenteoreettisesti konstruktivismi on matematiikassa vanhempaa kuin kognitiivinen psykologia tai Piaget'n teoriat. Matematiikan perusteista käytävän pohdinnan juuret ulottuvat tieteen olemukseen ja tehtäviin. Jo keskustelu matemaattisten olioiden olemassaolosta toi konstruktivismin matematiikan historiaan. Konstruktivismi voidaan ymmärtää laajana tieteenteorianana, jossa olennaista on kysymys, miten tieteen käsitteet muodostetaan ja mitkä rajoitteet tai säännöt on asetettava tieteelliselle toiminnalle. (Leino 1993, 5.)

4.2 Konstruktivismin suuntaukset

Heikko konstruktivismi

Haapasalo (1997) määrittelee heikon konstruktivismin lähelle kognitiivista oppimiskäsitystä, jonka mukaan yksilö tekee havaintoja aktiivisesti ja valikoivasti, käsittelee havaintopohjaista tietoa suhteuttaen sen aiemmin oppimaansa ja säätelee omaa toimintaansa. Tällöin ulkopuolinen maailma nähdään objektiivisesti havaittavissa olevana ja tiedon objektiivisuus hyväksytään. Termi heikko viittaa siihen, että yksilön omille konstruktiolle ei jää paljoa tilaa. Heikkoa konstruktivismia voi kuitenkin pitää selvänä edistysaskeleena verrattuna opetukseen, jossa pyritään vain esittämään ja siirtämään oppilaille tietoa. (Haapasalo 1997, 98-99.)

Leino (1993, 1-2) on Haapasalon kanssa samoilla linjoilla, mutta lisää vielä, että heikossa konstruktivismissa tiedon totuudellisuus voidaan perustella sen yhdenmukaisuudesta todellisuuden kanssa, käyttäen perustana aistihavaintoa. Kaasila (1997, 31-32) taas tuo esille, että heikkoon konstruktivismiin lukeutuviissa määritelmissä on tyypillistä kaiken tiedon - myös matemaattisen - olevan konstruoitua, mutta niissä jää usein avoimeksi kysymys varmasta tiedosta.

Kaasila (1997) esittelee tutkimuksessaan heikon konstruktivismin käyttöä matematiikan opetuksessa viitaten mm. Noddingsin korostuksiin: 1) rohkaistaan oppilaiden omia ajatuksia ja suunnitelmia, 2) luodaan konfliktitilanteita oppilaille, 3) hyödynnetään reflektiivistä abstraktiota eli tietojen abstrahoimista toiminnoista käsin, 4) korostetaan toimintamateriaalien käyttöä, 5) annetaan vuorovaikutukselle ja ryhmätyöskentelylle sijaa, 7) opettaja toimii ekspertin roolissa ja 8) monipuolistetaan arviointia. Keskeistä opetuksessa on, että korostetaan oppijan aikaisempia kokemuksia, tietorakennelmia ja niiden merkitystä uuden tiedon konstruoinnissa. (Kaasila 1997, 32-34.)

Vahva konstruktivismi

Vahva eli radikaali konstruktivismi on herättänyt paljon keskustelua ja kiistelyä matematiikan tutkijoiden ja opettajien parissa. Leino (1993, 2-3) ja Haapasalo (1997, 97-98) nimeävät Piaget'n vahvan konstruktivismin edustajaksi. Kaasila (1993, 37) sen sijaan on toista mieltä, koska piaget'lainen koulukunta ei tuo esille tiedon relativistisuutta.

Kaasila (1997, 35) viittaa vahvan konstruktivismin edustajan von Glasersfeldin lähtökohtiin: 1) Tietoa ei vastaanoteta aistien välityksellä passiivisesti. Yksilö konstruoi tiedon aktiivisesti. 2) Kognition toiminta on adaptiivista, se suuntautuu kohti toimivalta tuntuvaa tietoa ns. elinvoimaisuutta. 3) Kognitio tarjoaa järjestystä yksilön kokemusmaailmaan. Leino (1993, 3) huomauttaa, etteivät vahvan konstruktivismin edustajat kiellä todellisuuden olemassaoloa, mutta katsovat, että tiedon totuutta ei voi varmistaa, vaan on tyydyttävä kokemusten rajoissa toimivalta tuntuvaan tietoon.

Vahvassa konstruktivismissa otetaan huomioon myös kielen merkitys; jokainen ymmärtää sanat subjektiivisesti, jolloin kokemusmaailmakin on subjektiivinen. Ensisijaisena tutkimuskohteena on oppilaiden selitykset, koska tietoja on tarkasteltava yksilön oman viitekehyksen kautta, näin myös matematiikan tiedot ovat aina yksilöiden konstruoimia. Kaasila (1997) jakaa Confreyn vahvan konstruktivismin mukaisen päätavoitteen matematiikan opetukselle kolmeen osaan: 1) Opettajan pitää yrittää rakentaa malli ”tapauskertomus” kunkin oppilaan matematiikan ymmärtämisestä. 2) Opetus on hyvin vuorovaikutuksellista. Seuraamalla oppilaan työskentelyä, opettaja muodostaa suunnan, jota oppilaan tulisi edetä konstruoimalla matemaattisia sisältöjä, jotka vievät kohti ns. tieteellistä matemaattista tietoa. 3) Oppilaan pitää itse saada päättää konstruktion sopivuudesta ja riittävydestä. (Kaasila 1997, 36-38.)

Em. periaatteissa on keskeistä ongelman ymmärtäminen ja sen ratkaisuun johtaneen tavan reflektointi. Osalle ongelmakeskeiset opetusmenetelmät ovatkin sopivia, mutta osa oppilaista oppii paremmin seuraamalla toisten oppilaiden keksimiä ratkaisustrategioita, kyselemällä, keskustelemalla ja harjoittelemalla. Vahvassa konstruktivismissa voi nousta kysymyksiä, missä määrin opettaja saa ohjata oppilasta tai miten pitkälle oppilas voisi päättää konstruktiostaan. Kaasila (1997) kysyykin, kuinka subjektiivisia esimerkiksi geometrian (mm. kolmio, nelikulmio) käsitykset voivat olla. Vahvaa konstruktivismia kritisoidaan relativismin takia (yleispätevää, varmaa tietoa ei ole), ja sen on katsottu painottavan liian yksipuolisesti yksilöllisyyttä, eristyneisyyttä ja yksilön kokemusten merkitystä sosiaalisen vuorovaikutuksen jäädessä toissijaiseksi. (Kaasila 1997, 37-39.)

Sosiaalinen konstruktivismi

Sosiaalinen konstruktivismi on pyrkinyt tasapainoon individualismin ja kollektivismien välillä. Myös sosiaalisen konstruktivismin alle mahtuu useita variaatioita. Nimensä mukaisesti sosiaalinen konstruktivismi korostaa sosiaalista vuorovaikusta. Tämäkin suuntaus kieltää varman tiedon olemassaolon, mutta pitää kuitenkin objektiivista, vuosisatojen aikana kehittynyttä matemaattista tietoa arvokkaana. Sosiaalisen konstruktivismin mukaisessa opetuksessa pyritään oppilaan subjektiivisen tiedon ja objektiivisen tiedon yhdistämiseen. Opetuksen lähtökohtana voivat olla oppilaan arkipäivän kokemukset, kielen merkitystä unohtamatta. Keskeistä ovat ongelmanratkaisutilanteet pienryhmissä. Niissä oppilas voi perehtyä toisten konstruktioihin ja vertailla omia matemaattisia ajatuksiaan reflektiivisesti toisten tuottamien ajatusten kanssa. Oppilaiden on hyvä keskustella eri ratkaisutavoista, argumentoida ja puolustaa niitä. (Kaasila1997, 40-46, 49-52.)

Konstruktivismin eri suuntaukset painottavat eri asioita, mutta oppimisen peruslähtökohta on kuitenkin sama. Oppilaan oman aktiivisuuden virittäminen ja tukeminen esimerkiksi ongelmanratkaisun, vuorovaikutuksen tai toimintamateriaalien avulla on tärkeää matemaattisen ajattelun kehittymiselle. Uusi tieto, riippumatta tiedon olemuksesta, voi rakentua vain kunkin aiemmin omaksutun tiedon pohjalle.

5 ALKUOPETUS JA MATEMATIIKKA

5.1 Alkuopetuksen lähtökohdat

Alkuopetus tarkoittaa peruskoulun ensimmäisen ja toisen luokan opetusta, alkukasvatus edellisten lisäksi myös 6-vuotiaiden esiopetusta. Esi- ja alkuopetuksen tavoitteissa on pyritty kiinteään jatkumoon (vrt. Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 1996 ja Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994).

Alkuopetuksen tavoitteet ja keskeiset sisällöt on johdettu peruskoulun yleisistä tavoitteista. Alkuopetuksessa lapsi muodostaa käsityksensä koulunkäynnistä ja itsestään oppijana. Alkuopetuksen tavoitteiksi on asetettu seuraavat asiat:

- myönteisen minäkuvan omaavan, tasapainoisen yksilön kehittyminen
- mahdollisuus kasvaa oma-aloitteiseksi, itsenäiseksi ja vastuuntuntoiseksi
- oppia ottamaan toiset ihmiset huomioon ja hyväksymään erialaisuudet
- ymmärtää sovittujen sääntöjen merkitys ja oppia toimimaan ryhmässä
- oppia arvostamaan omaa ja toisen työtä
- oppia suunnittelemaan työskentelyään, asettamaan itselle tavoitteita, etsimään ratkaisuja ja vähitellen oppia perustelevaan ja arvioimaan omia valintoja
- omaksua perustietoja, -taitoja ja -valmiuksia oppimisen eri alueilta ikänsä ja edellytystensä mukaisesti
- oppimisen ilon ja innostuksen säilyttäminen ja rohkeus kohdata uusia haasteita

(Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 42.)

Alkuopetuksen tavoitteet ovat haastavia. Kaksi viimeistä kohtaa ovat mielestäni erityisen tärkeitä matematiikankin näkökulmasta: oppiminen iän ja edellytysten mukaisesti ja oppimisen ilon ja innostuksen säilyttäminen. Nykyisten oppimiskäsitysten mukaan lapsia ei voi tarkastella vain kronologisen iän mukaan, koska kehitykselliset erot varsinkin koulutulokkailla ovat suuret. Opetussuunnitelman perusteet velvoittavatkin opettajan selvittämään lasten edellytykset ja suunnittelemaan opetuksen lasten mukaan. Tällöin mm. oppimateriaalia on tarkasteltava kriittisesti sen suhteen, miten se vastaa lapsen tarpeisiin. On myös hyvä huomata, että tavoitteissa on todenmukaisesti mainittu oppimisen ilon ja innostuksen *säilyttäminen*, ei esimerkiksi löytäminen. Koulutulokas on yleensä innokas oppimaan uutta, mutta usein käy niin, että

into pikkuhiljaa laantuu kouluvuosien myötä. Koulunkäynti vaatii lapseltakin vaivannäköä, eikä sen aina tarvitse olla ”kivaa”, mutta menetelmiin ja sisältöihin on kuitenkin kiinnitettävä huomiota, niin että ne vastaisivat paremmin lapsen kokemusmaailmaa ja oppiminen ja opiskelu olisi mielekästä.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (1994, 43) alkuopetuksen lähtökohtina pidetään lapsen yksilöllisyyttä, aktiivista oppimista ja ryhmän jäseneksi kasvamista. Opiskelulle tulee olla luonteenomaista elämänläheisyys, elämyksellisyys, toiminnallisuus sekä tärkeä leikinomaisuus. Oppimisympäristön keskeiseksi tekijäksi nostetaan myönteinen ilmapiiri. Oppimisympäristöön liittyvät myös monipuoliset toimintamahdollisuudet ja oppimateriaalit. Havainto- ja toimintamateriaalien tehtävänä on konkretisoida käsitteiden muodostumista ja ymmärtämistä.

5.2 Matematiikan sisältöalueet

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet (1994) ei erottele tarkemmin eri luokka-asteiden sisältöalueita. Nykyisenä suuntauksena on antaa väljät raamit koulukohtaista opetussuunnitelmatyötä varten. Oppaassa kehoitetaan sisällölliseen avoimuuteen sekä perinteisten oppisisältöjen kriittiseen tarkasteluun. Matematiikan opetuksen sisältöjen keskeisiksi lähtökohdiksi ala-asteella otetaan seuraavat asiat.

Oppilas:

- tottuu havainnoimaan ja tulkitsemaan maailmaa matematiikan keinoin ja tunnistaa ja osaa toimia ongelmatilanteissa
- ymmärtää luonnollisen luvun sekä murto- ja desimaaliluvun käsitteet ja oppii peruslaskutaidot päässä, paperilla ja laskimilla
- oppii arvioimaan ja mittaamaan pituutta, massaa, pinta-alaa, tilavuutta, kulmaa ja aikaa sekä oppii tavallisimmat mittayksiköt ja niiden muunnokset
- ymmärtää mittakaavan käsitteen
- oppii tunnistamaan ja piirtämään tavallisimpia geometrisia kappaleita ja kuvioita, kuvaamaan näiden perusominaisuuksia ja laskemaan näiden pinta-aloja ja tilavuuksia sekä tutustuu symmetriaan

- perehtyy asioiden ja esineiden lajitteluun ja luokitteluun, säännönmukaisuuksien löytämiseen sekä tottuu laatimaan, lukemaan ja tulkitsemaan yksinkertaisia taulukoita ja diagrammeja.

Ikäheimon (1995) mukaan opettajat kaipaavat usein tietoa, miten karsia oppikirjojen sisältöä opetussuunnitelman mukaisesti. Monet opettajat haluavat pois liiasta oppikirjasidonnaisuudesta mm. oppilaiden erilaisuuden takia, pienten tuntimäärien takia, konkretisoimisen vaatiman runsaan ajan takia ja oppimisvaikeuksien takia. Keskeiseen oppiaineeseen keskittyminen parantaisi oppilaiden oppimistuloksia. Ikäheimo kehottaakin siirtämään nykyisestä runsaasta harjoitteluajasta enemmän aikaa käsitteen oppimiselle, jolloin harjoittelustakin tulisi todella soveltamista, eikä vain mekaanista laskemista. Karsittavan aineksen määrä riippuu oppilaan oppimisedellytyksistä ja oppimistuloksista, joita voi tarkastella keskeistä oppiainesta mittaavien kokeiden avulla. Karsittavan aineiston tilalle valitaan sitten oppilaan ja sisällön mukaan esimerkiksi puutteellisesti opittujen käsitteiden opiskelua konkreettisesti, peruslaskutoimitusten harjoittelua automaation tasolle sekä projektitöitä ja ongelmanratkaisua. (Ikäheimo 1995, 53, 56.)

Esi- ja alkuopetuksen kattaviksi taidoiksi ja sisällöiksi Ikäheimo, Aalto ja Puumalainen (1997) ovat kokeneet seuraavat kolmetoista kohtaa. Esiopetus ehdotetaan aloitettavaksi kohdista 1-4 ja kohtia 11-13 tulee opiskella rinnakkain kaikkien muiden kohtien kanssa.

1. Luokittelu eli ryhmien muodostaminen eri ominaisuuksien perusteella
2. Vertailu ja yksi-yhteen vastaavuus
3. Enemmän-vähemmän-yhtä monta, suurempi-pienempi-yhtä suuri kuin, edessä-takana, vasemmalla-oikealla, ylhäällä-alhaalla, painavampi-kevyempi-yhtä painava, aikaisemmin-myöhemmin-nyt, jne.
4. Järjestykseen asettaminen ja sarjoittaminen
5. Massa, pituus, tilavuus, lukumäärä, jne.
6. Päätteleminen
7. Lukukäsite
8. Lukujonot
9. Järjestysluvut
10. Lukujen hajottaminen ja koonta
11. Laskutoimitukset

12. 10-järjestelmä

13. Mittaaminen: aika, massa, pituus ja tilavuus

14. Geometria: 2- ja 3-ulotteinen hahmottaminen, kappaleita ja tasokuvioita

15. Tilastot

(Ikäheimo, Aalto, Puumalainen, 1997, 10.)

Tiivistetympin Ikäheimo (1998, 246) jakaa alkuopetuksen neljään sisältöalueeseen:

- Lukujonot, lukukäsite ja 10-järjestelmä
- Yhteen- ja vähennyslaskut päässä ja allekkainlaskuina
- Kerto- ja jakolaskun käsite
- Mittaaminen, geometria ja tilastot

Magne (1996, 12-14) pohtii eri aikoina vallinneita näkemyksiä miten ja milloin matematiikan osa-alueita tulisi opetella. 1920-luvulta 50-luvulle oli Ruotsissa tapana tutustuttaa oppilaat kaikkiin neljään peruslaskutoimitukseen jo ensimmäisenä kouluvuotena, jolloin lapset saivat matematiikasta kokonaiskäsitteen. Tämän jälkeen laskutoimitukset piti opettaa oppikirjan mukaisesti aina ”oikeassa” järjestyksessä uusi matematiikka -suuntauksen tyyliin. Ensimmäisenä syksynä yhteenlasku tämän jälkeen vähennyslasku jne. Uusimpien käsitysten mukaan tällainen oikea järjestys on hylätty ja halutaan ottaa enemmän lapsen omat kiinnostukset ja konstruktiot huomioon. Magne korostaakin motivaatiota yhtenä tärkeimpänä oppimisen edellytyksenä. Hän muistelee erästä kolmatta luokkaansa, joka oli jo edellisellä vuonna harjoitellut kertolaskua ja kyllästynyt siihen. Joku oppilaista kuitenkin ehdotti, että aloitetaan yhdeksän kertotaulusta. Koko luokka innostui tästä niin, että muutaman päivän motivoituneen työskentelyn jälkeen kaikki osasivat yhdeksän kertotaulun. Kertotaulujen opiskelu jäi oppilaiden mieleen niin, että sitä muisteltiin luokkakokouksessa vielä 47 vuotta myöhemmin! - Into olisi helposti tukahdutettu tyrmäämällä ehdotus sillä, että kertotaulu pitää opetella järjestyksessä.

5.3 Lapsen kehitysvaiheen huomioon ottaminen

Kehityspsykologia tarjoaa näkemyksiä lapsen kehitysvaiheista. Esimerkiksi Kallonen-Rönkkö (1989; 1984; 1986) on soveltanut Piaget'n teoriaa koulutulokasvaiheeseen, mm. matematiikan oppimisvalmiuksien harjaannuttamisen kannalta. Tulokset vahvistivat Piaget'n teoriasta johdettujen mittarien käyttökelpoisuutta oppimisedellytysten diagnosoinnissa. Kallonen-Rönkkö esittää silti hyvän kysymyksen, miten teorian avulla olisi mahdollista kehittää toimenpiteitä, joilla esimerkiksi diagnosoidun oppimisvaikeusennusteen toteutumista voitaisiin ehkäistä. (Kallonen-Rönkkö 1989, 51.)

Kephartin kehitysvaiheteoriat on mielestäni käyttökelpoinen matematiikan oppimisessa, koska motoriikka ja havaitseminen ovat keskeisiä matemaattisen ajattelun kannalta pienellä lapsella. Kallonen-Rönkkö (1989, 45) viittaa Johnsonin ja Myklebustin tutkimukseen matematiikan oppimisvaikeuksista. Se osoittaa, että matemaattinen ajattelu on kiinteästi sidoksissa lapsen muuhun kehitykseen. Lapsilla, joilla oli ollut selviä vaikeuksia matematiikan oppimisessa, oli ollut vaikeuksia myös motoristen taitojen oppimisessa. Kephartin teoriassa tutkitaan seitsemää kehitysvaihetta käyttäen apuna lapsen motoristen, havaintomotoristen ja havaintokyvyn tarkastelua. Alkuopetuksen oppaassa (Peruskoulun opetuksen opas: Alkuopetus 1987) koulutulokkaan kehityspsykologisia edellytyksiä tarkasteltiin Kephartin teoriasta käsin. Teorian avulla voi havainnoida ja tarkastella lapsen kehitystä, jotta saataisiin selville millaiset valmiudet ja edellytykset hänellä ovat. Tämän tiedon avulla opettajan tavoitteena on suunnitella ja toteuttaa oppimistilanteet niin, että ne kohtaavat lapsen tason. Seuraavassa esimerkkinä pieniä otteita havainnoistani (1) ja johtopäätöksistäni (2) alkuopetuksen sivuaineopintojen Kephartin teoriaan pohjaavasta koulukerhon päiväkirjastani:

Esimerkki 1. *”Hernepussin ja pallon heittäminen sekä kiinniottaminen on hieman epävarmaa, varsinkin jos heitto ei ole tarkka. Kun vaihdettiin isompi pallo, niin alkoi sujua paremmin. Hän (esikoululainen) heitteli mieluummin hernepussia maahan, kuin että olisi yrittänyt ottaa sen kiinni. Sanoi että ei oikein osaa vierittää palloa (haaraistunnassa) ja pallo lähtikin aluksi aina pomppimaan, mutta harjoittelun myötä vierittäminenkin alkoi sujua... Leikkasi suurimman osan paperisuikaleista tarkasti, ymmärsi pujotteluidean ja osasi itse korjata tarvittaessa. Työskenteli sujuvasti ja keskittyneesti.”*

Esimerkki 2. ”... Hän tulee hyvin toimeen muiden lasten kanssa ja hänellä on hyvä keskittymiskyky ja pitkäjänteisyyttä vaativa työskentely onnistuu. Loogista ajattelua ja hienomotorisia taitoja vaativa työskentely sujuu vaihtelevasti, tehtävän luonteesta riippuen. Hienomotorisia taitoja voisi vielä selvittää tarkemmin. Karkeamotoristen taitojen vahvistaminen ja liikuntavälineiden käsittelyharjoitukset varmistaisivat alempien vaiheiden hallitsemista ja tukisivat kehitystä eteenpäin.”

Oppimisen edesauttaminen ja tiedon välittäminen edellyttävät lapsen tason tuntemista ja oikeantasoisien oppimisympäristöjen tarjoamista. Lapsen valmiuksien havainnoiminen voi antaa paljon vinkkejä lapsen tavasta hankkia tietoa. Kephartin teoria auttaa samalla myös toiminnan tason eli opetusmenetelmien ja oppimateriaalin arvioimisessa. Oppilaantuntemus ja sen hyödyntäminen käytännössä ovat kaksi asiaa, joihin on kiinnitettävä huomiota. Teorian avulla saatua tietoa tulee myös hyödyntää käytännössä. Koulussa on kiinnitettävä huomiota eritasoisiin oppilaisiin aina heikoista oppijoista keskitasoisiiin ja lahjakkaisiin. Alkuopetuksen aikana lasten kehityserot ovat suuret ja eriyttämistä tarvitaan paljon.

Lähtötason kartoittaminen

Koulutulokkaiden lähtötason ja kouluvalmiuksien kartoittamiseksi on kehitelty erilaisia tehtävistöjä, jotta saataisiin tietoa lapsen kehitystasosta ja mahdollista tukea tarvitsevista alueista. Arviointi antaa tietoa sekä opettajalle, oppilaalle että vanhemmille. Arvioinnin avulla opettaja voi eriyttää opetusta niin, että se kohtaa erilaiset oppijat.

Kanaojan (1999) tutkimustulosten mukaan 90-luvun oppilasaines on luku-, kirjoitus- ja laskutaitojen suhteen heterogeenisempaa kuin parikymmentä vuotta aikaisemmin. Lasten alkuvalmiustasot äidinkielessä ja matematiikassa ovat kohonneet 70-lukuun verrattuna. Tämän päivän eriyttämisvaatimukset edellyttävät sekä jokaisen oppilaan kehityksen että kokonaisvaltaista luokan kehityksen arviointia. Opettajan on pystyttävä arvioimaan samanaikaisesti yksilöiden ja ryhmän kehittymistä. (Kanaoja 1999, 359, 365.)

Yleisesti käytössä ollut KPT eli kontrolloitu piirrostarkkailu antaa tietoa oppilaan kokonaisvaltaisesta käyttäytymisestä ja kehityksen osa-alueista. Liikanen (1995a, 77) on tutkinut kontrolloitua piirrostarkkailua kouluvalmiuden ja koulumenestyksen ennustajana ja saanut tästä myönteisiä tuloksia. KPT perustuu kielellisten ohjeiden

mukaisiin piirtämistehtäviin, joissa arvioidaan useita osa-alueita: piirtämistä, visuaalis-motorisia valmiuksia, auditiivista erottelua, kielellisiä valmiuksia, käsitteenmuodostusta (lukukäsité) ja muototajua (Liikanen 1995a, 29). Liikanen on esitellyt KPT:n ja muita tehtävistöjä luokanopettajien käyttöön sovellettavaksi tutkimusjulkaisuissaan. Liikasen (1995b, 87) mukaan tehtävät voivat toimia lähinnä karkeana seulana ja suunnan antajina mahdollisia tukitoimia varten. Varsinkin jos lapsiryhmä on suuri, tällaisista tehtävistä on opettajalle apua muun arvioinnin ja havainnoinnin tueksi.

Matematiikan keskeisten taitojen kartoittamiseksi on kehitetty esimerkiksi MAKEKO-kokeet kaikkia peruskoulun luokka-asteita varten (Ikäheimo, Putkonen, Voutilainen 1988). MAKEKO-kokeet on tarkoitettu tehtäviksi lähinnä lukuvuoden lopussa tai seuraavan alussa. Esiopetuksen ja ensimmäisen luokan tehtäviä on myös LUMO-projektia varten suunnitellusta varhaista matemaattista ajattelua mittaavasta testistä (Salonen ym. 1994). Siinä tehtävät liittyvät matemaattis-loogisiin päättelytaitoihin, lukujonotaitoihin ja aritmeettisiin taitoihin.

Lapsen motoristen perustaitojen osa-alueiden arviointiin saa hyviä ohjeita MTI-harjoituksista (Sandberg 1990). Eri osa-alueisiin liittyvien harjoitusten avulla voi tarkkailla lähinnä 6-12-vuotiaiden motoriikkaa sekä harjoittaa motorisia- ja havaintotaitoja. Harjoituksia voi hyvin tarkastella Kephartin kehitysvaiheteoriankin kannalta.

Kananoja (1999) muistuttaa, että perinteiset arviointimenetelmät ovat keskittyneet kapea-alaisesti vain kehityshäiriöiden kartoittamiseen, eikä esimerkiksi lahjakkaiden kehittymiseen ole kiinnitetty huomiota. Lähtötason selvittäminen on tärkeää lasten eritasoisuuden vuoksi, mutta se ei yksinään riitä. Ensiluokkalaisen alkudiagnoosin tulisi kertoa mahdollisten puutteiden lisäksi myös lapsen jo saavuttamista taidoista lukemisessa, kirjoittamisessa ja laskemisessa. Arvioinnin jatkuvuus on tärkeää alkukartoituksen jälkeen. Kananoja on kehittänyt Portaikko-arviointia, jossa on yhdistetty kehitysarvioinnin ja peruskartoituksen ominaisuuksia. Portaikko-arvioinnin tavoitteena on osoittaa oppimisprosessin päälinjat samanaikaisesti luokka- ja yksilötasolla, korostaen kuitenkin kunkin henkilökohtaista kehitystä. Kananoja pitää luokan ohjaamista sekä yksilöiden että ryhmän näkökulmasta suurena didaktisena haasteena. Opettajat tarvitsevat käytännön tasolle vietyjä uusia ratkaisumalleja arvioinnin avuksi, mikäli todella halutaan pois opettajajohtoisesta opetuksesta.

Tutkimuksensa valossa Kananoja toteaa, että arvioinnin osalta opetustyön hidaskehittyminen ei ole johtunut opettajien muutosvastaisuudesta. Kehityksen esteenä on ollut pikemminkin se, että vaihtoehtoisia arviointimenetelmiä ei ole ollut tarjolla vanhojen käytäntöjen tilalle. (Kananoja 1999, 359- 366.)

5.4 Koulutulokas ja matematiikka

Koulutulokkaan aikaisempiin kokemuksiin matematiikasta vaikuttavat hänen aiemmat toimintaympäristönsä. Suomessa koulutulokkaiden toimintaympäristöt ovat erilaisia, koska päivähoidolla, kerhotoiminnalla ja esiopetuksella on erilaisia toteutusmuotoja. Esiopetuksen järjestämisen tavoitteena on, että kaikille kuusivuotiaille voidaan tarjota mahdollisuus maksuttomaan esiopetukseen. Myös varhaiskasvatuksen/esiopetuksen ja alkuopetuksen välinen kuilu on aika ajoin herättänyt keskustelua, jossa yksi keskeiseksi nostettu tekijä on ollut yhteistyön vähäisyys. Yhteistyön avulla voidaan taata mielekästä jatkumoa lapsen oppimiselle, mm. suunnittelemalla ja tukemalla oppimisympäristöjen samankaltaisuutta (esimerkiksi työtavat, sisällöt). Myös tiedonkulkua varhaiskasvatuksen ja koulun välillä on syytä kehittää. Lapsista saatetaan edelleen antaa nihkeästi tietoja ”leimaamista” peläten, vaikka aiheelliset tiedot auttaisivat opettajaa lapsen ymmärtämisessä ja oppimisen ohjaamisessa. Tätä tukee konstruktivistinen näkemys opettajan roolista, jossa on tärkeää selvittää lasten ennakkotietoja ja -käsityksiä sekä aiempia kokemuksia.

Joensuussa on panostettu 90-luvulla matematiikan esi- ja alkuopetuksen kehittämiseen myönteisin tuloksin. Malaty on halunnut ravistella perinteisiä käsityksiä siitä milloin systemaattinen opettaminen voi alkaa, hänen mukaansa lapset voisivat oppia matematiikkaa paljon nykyistä enemmän jo ennen koulun alkua (Malaty 1997, 63-67). Joensuussa 1992 alkaneessa esiopetuskokeilussa lapset aloittivat matematiikan opiskelun päiväkodissa ja heidän taitojaan ja asennoitumistaan matematiikkaan seurattiin ensimmäisen ja toisen kouluvuoden ajan. Kirjalliset kokeet osoittivat näiden lasten menestyneen alkuopetuksen aikana matematiikassa ikätovereitaan paremmin, joten esiopetuksessa aloitetulla matematiikan oppimisella oli merkitystä matemaattiseen menestykseen alkuopetuksessa. Alkuopetuksessa otettiin huomioon ja käytettiin hyväksi lasten esiopetuskokemuksia. Monet hallitsivat kouluun tullessaan jo monia perusasioita, jolloin aikaa jäi monipuoliseen työskentelyyn eri osa-alueilla, esimerkiksi geometriassa

ja ongelmanratkaisussa. Yksilöllinen etenemismahdollisuus oman kiinnostuksen mukaan otettiin alusta lähtien tavoitteeksi kokeilussa. Arvokasta tietoa tutkimus antaa erityisesti asenteiden seuraamisen kannalta. Esiopetukseen osallistuneet lapset asennoituivat matematiikkaan myönteisesti ja matematiikan positiivinen minäkäsitys vain parani alkuopetusvaiheen loppua kohti. Tutkimus vahvisti käsitystä siitä, että matematiikan minäkäsitys on selvässä yhteydessä matemaattisten taitojen hallintaan ja asenteisiin matematiikkaa kohtaan alkuopetuksessa. (Mutanen 1998, 1, 139-141.)

Turun yliopiston Oppimistutkimuksen keskuksessa on tutkittu LUMO (lukeminen, ymmärtäminen, motivaatio) -projektin yhteydessä varhaista matemaattista ajattelua. Tutkimuksessa tarkasteltiin kolmea osa-aluetta: matemaattisloogista ajattelua, lukujonotaitoja ja aritmeettisiä taitoja. Nämä osa-alueet kehittyvät vuorovaikutuksessa niin, että tietyn matemaattisen tason saavuttaminen edellyttää tiettyjen osataitojen hallintaa toisilla alueilla. (Kinnunen, Lehtinen & Vauras 1994, 56, 75) Seuraavassa esittelen tarkemmin eri osa-alueita LUMO-projektin mukaisesti.

Matemaattisloogista ajattelua lapsi on harjoittanut jo varhaislapsuudesta. Kouluikään mennessä lapsella on suuri joukko valmiuksia, joita hän käyttää käytännön tilanteiden vaatimissa määrällisissä ja loogisissa päättelyissä. Kehitykselliset erot juontuvat fyysisiltä, sosiaalisilta ja kulttuurisilta ominaisuuksiltaan erilaisista toimintaympäristöistä. Lukumääriä koskevat peruslaskutoimitukset edellyttävät, että lapsi on konstruoinut lukuisuuden käsitteen ja lukuisuuksien vertailujen operaatiot. Selvät kehitysviivästymät matemaattisloogisessa ajattelussa ovat harvinaisia.

Lukujonotaitojen kehittyminen alkaa lukusanojen luettelemisesta loruna ja vähitellen lukusanoja liitetään myös laskemiselta näyttävään toimintaan. Lukusanojen käyttö esineiden määrän kuvaamisena on jo monimutkaisempi tapahtuma. Esimerkiksi jonoon järjestettyjen esineiden laskeminen mekaanisesti lukusanojen avulla on huomattavasti helpompaa kuin epämääräisessä järjestyksessä olevien esineiden laskeminen. Epäjärjestyksessä olevien esineiden laskeminen edellyttää strategista taitoa, joka voi kehittyä oman keksimisen sekä sosiaalisen mallin kautta. Matemaattisen sisällön lukujono saa, kun luvun määrää ja järjestystä kuvaavat tekijät integroituvat.

Lukujonotaitojen hallitseminen on edellytys aritmetiikan perusteiden oppimisessa. Lukujonotaitojen taso ja autonomisoitumisen aste vaikuttavat aritmeettisten suoritusten

nopeuteen. Aritmeettista kehitystä suuntaavat myös ne strategiat, joita lapsi oppii käyttämään. Strategiat pohjaavat sekä muistissa olevalle faktatiedolle että lukuja koskeville kognitiivisille operaatioille. Nopeat muistista haettavat faktatiedot luvuista, niiden suhteesta, toimintatavoista ja tavallisten laskuoperaatioiden tuloksista ovat tärkeitä myöhemmille suorituksille, niiden avulla voi tarkistaa tuloksiaan. Vaativimpiin laskusuorituksiin mentäessä tarvitaan uudenlaisia toimintastrategioita, koska kaikkea ei voi muistaa. Eritasoiset oppilaat eroavat toisistaan nimenomaan strategioiden käytön ja hallinnan suhteessa. (Kinnunen ym. 1994, 56-61.)

Matemaattisloogiset taidot ovat edellytys lukukäsitteen sisällön ymmärtämiselle ja lukujonotaitojen kehitykselle. Samoin lukujonon ymmärtäminen on edellytys aritmeettisten operaatioiden ja strategioiden mahdollistumiselle. Tavallisesti koululuokan oppilaiden erot esiintyvät lukusanojen tuntemisessa sekä luvun järjestys- ja lukuisuustekijöiden integroitumisessa. Opetuksen kannalta on otettava huomioon, että lapsen täytyy hallita aiemmat tasot ennen kuin siirrytään eteenpäin. (Kinnunen ym. 1994, 61.) Kephartin teorian näkemys aiempien tasojen hallitsemisesta on vastaavanlainen.

LUMO-projektin tutkimuksessa tarkasteltiin matemaattisten valmiuksien kehittymistä koulun aloittamisen vaiheissa (koulutulokas/esikoululainen-1.luokkalainen keväällä). Koulutulokkaat hallitsivat keskimäärin matemaattisloogiset osataidot ja vakiinnuttivat parhailtaan keskivaikeita lukujonotaitoja. Lukujen luetteleminen eteen- ja taaksepäin sujui, mutta yli kymmenen lukualueella tämä vaati vielä harjoittelua ja työmuistin kehittämistä. Vaativampien lukujonotaitojen hallinta edellytti varsinkin lukumäärän säilymisen ymmärtämisen kehittyneisyyttä. Lukujonotaitojen hallinta oli keskeisin myöhempää aritmetiikan hallintaa ennustava tekijä. Mitä paremmat lukujonotaidot lapsi omasi sitä paremmin häneltä sujui myös aritmetiikka. Ensimmäisen kouluvuoden aikana lukujonotaidot kehittyivätkin paljon. Yhteen- ja vähennyslaskuista sekä aukkotehtävistä suoriuduttiin hyvin, mutta yli 20 ylittävällä lukualueella oli suurella osalla lapsista vielä vaikeuksia. Matemaattislooginen ajattelu ei erotellut heikkoja ja keskitasoisia, mutta keskitasoiset ja hyvät kylläkin. Keskeisenä tutkimuksessa korostui lukujonotaitojen hallinta aritmeettisten taitojen kehittymiselle. (Kinnunen ym. 1994, 75-76.)

Koulutulokkaat ymmärtävät lukuisuuden käsitteen ja hallitsevat lukuisuuksien vertailujen toimituksia, kuten enemmän, vähemmän, yhtä monta, yksi-yhteen

vastaavuus, lukumäärän säilyvyys. Suuri osa koulutulokkaista ymmärtää lukujonon merkitsevän määrällistä kasvua ja osaa liikkua ajatuksellisesti lukujonossa eteen- tai taaksepäin. Suurimmalla osalla on kehitymässä peruslaskutaitojen perustana oleva taito käyttää lukuja yhtäsuuruuden toteamisessa sekä yhteen- ja vähennyslaskuissa pienellä lukualueella. Eroja koulutulokkaiden matemaattisissa taidoissa on kuitenkin paljon. Kinnunen & Vauras (1998) ovat tutkimusryhmässään todenneet, että on merkitystä millaisin matemaattisin perusvalmiuksin lapsi aloittaa koulun ja että erilaiset toimintaympäristöt vaikuttavat näihin valmiuksiin. Varsinkin lukujonotaitojen (eteen- ja taaksepäin ajatuksellisesti liikkuminen) ja kymmenjärjestelmän periaatteiden jonkinasteinen hallinta on edellytys, jotta lapsi saavuttaisi ensimmäisellä luokalla vähintään keskitasoisien taitojen hallinnan. Taitava edistyminen vaatii jo automatisoitunutta lukujonon käsittelyä ja hyvin hallittua matemaattis-loogista ajattelua. (Kinnunen & Vauras 1998, 271-272.)

Koulumatematiikka tuo lapselle ihan uudenlaisia matemaattisia toimintatapoja. Aluksi keskitytään aritmeettisiin perusoperaatioihin eli yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuihin. Kokonaislukujen aluetta laajennetaan koko ajan ja luvun käsitteeseen tulee myös negatiivisia lukuja, murtolukuja ja desimaalilukuja. Opetuksessa on tähdätty osataitojen harjoitteluun, joihin myöhemmin tulevat taidot pohjautuvat. Perinteistä opetusta on moitittu liiasta teknisestä rutiinikeskisyydestä, jolloin ymmärtäminen on jäänyt puutteelliseksi. Koulussa ei ole opittu ratkaisuvaihtoehtojen joustavaa pohdintaa tai matemaattisen tiedon soveltamista elämässä. (Kinnunen & Vauras 1998, 272-273.)

Matematiikka lasten kokemana

Lasten käsitykset matematiikasta ovat huomionarvoisia tekijöitä myös opetuksen kannalta. Perlmutter, Bloom, Rose ja Rogers (1997) ovat tutkineet Yhdysvalloissa lasten käsityksiä matematiikan merkityksestä ja arvosta, koska se vaikuttaa matematiikan oppimiseen. Lasten motivaatioon vaikuttaa oman osaamisen kokemuksen lisäksi se, miten mielenkiintoisena ja arvokkaana matematiikka koetaan. Kouluun tullessaan lapset osaavat jo matemaattisia perustaitoja ja heillä on paljon havaintoja ja kokemuksia. Nykyään tähän pyritäänkin kiinnittämään huomiota, jotta matematiikka liittyisi lasten omiin kokemuksiin - ”todelliseen elämään”. Tutkimuksen mukaan (79 lasta, päiväkotikäisistä kolmasluokkalaisiin) nämä lapset kokivat matematiikan ja kykynsä matematiikassa myönteisenä, mutta käsitykset matematiikan merkityksestä

koulun ulkopuolella olivat vähäisiä. Matematiikassa selviytymistä pidettiin kyllä tärkeänä, vaikka ei oikein tiedetty miksi. Tutkimus tuo esille sen, että matematiikan merkityksen ymmärtämistä jokapäiväisessä elämässä on syytä tietoisesti tuoda esille. Opettaja voi integroida matematiikkaa muihin aineisiin ja esimerkiksi kertoa, mihin hän itse tarvitsee matematiikkaa päivittäin. (Perlmutter ym. 1997, 58-70.)

Mutanen (1998) toteaa myös, että alkuopetusikäisten suhtautuminen matematiikkaan on varsin myönteistä. Matematiikasta pidetään omasta suoriutumistasosta riippumatta. Suomessa oppilaat ovat ylempilläkin luokilla nähneet matematiikan tärkeänä aineena, mutta matematiikasta pidetään ylempillä luokilla kuitenkin vähemmän ja sen vaikeana kokeminen kasvaa. Kielteisten asenteiden syinä on pidetty mm. matematiikan sisällön muuttumista abstraktimmaksi ja vieraammaksi. Konkreettisen materiaalin tukea on suositeltu käytettäväksi ylempilläkin luokilla, koska ala-asteella lasten ajattelun taso on pitkälle konkreettista. (Mutanen 1998, 43.)

Ekeblad (1996) on tutkinut ruotsalaisten koululaisten käsityksiä matematiikasta ensimmäisenä kouluvuotena. Matematiikan oppimisesta lapsilla oli kahta erilaista näkemystä. Toiset olivat sitä mieltä, että matematiikkaa vain ymmärretään, se tulee niin kuin ilmaisena lahjana. ”Hur tänker du fram till rätta svaret då? – Nä, jag vet bara det.” Oppimista ei tällöin koeta prosessina. Lapsi tietää kyllä osaavansa jotain, mitä ei aiemmin osannut, mutta oppiminen on tapahtunut ”yhtäkkiä”. Toinen ryhmä sen sijaan näki matematiikan oppimisen vaativan työtä ja vaivannäköä. Matematiikan oppiminen on lasten mielestä aikaa vievää, se vaatii harjoittelua, toistoa ja siinä tulee aina lisää uutta opeteltavaa. Jos matematiikka ei ole liian helppoa, eikä liian vaikeaa, se pysyy haasteellisena. ”Hur lärde du dej att sju plus tre är tio då? – Jag tror att jag gjorde det så många gånger i min mattbok”. (Ekeblad 1996, 10, 220-230.)

Lasten tapa käsittää lukuja ja numeroita jakautui Ekebladin (1996) mukaan kolmeen ryhmään. Ensimmäinen liittyy lukujen organisointiin (rakenne, perättäisyys), miten luvut järjestäytyvät ja mikä on niiden suhde toisiinsa. Toinen ryhmä liittyy lukujen esittämismalleihin, luvut tunnetaan niiden esitysmallien perusteella. Lukuja voitiin pitää tarkasti määriteltynä ”yksilöinä” tai epämääräisempinä tiettyihin joukkoihin kuuluvina. Kolmas ryhmä liittyy siihen, miten luvut koskettavat meitä omien käsitysmalliemme mukaisesti, millainen merkitys niille annetaan. Luvut voidaan nähdä joko itsenäisinä tai annettuina. Lapset kokivat luvut selvästi oppimisen kohteena, joka liittyy koulun

kontekstiin sekä heidän tapaamansa tutkijan kiinnostuksen kohteeseen. Ekebladin mukaan osa oppimisvaikeuksista voi liittyä näihin useisiin eri tapoihin kokea luvut. (Ekeblad 1996, 265, 324-325.)

5.5 Oppimisvaikeudet matematiikassa

Matematiikan oppimisvaikeuksia on tutkittu vähemmän kuin esimerkiksi äidinkielessä. Kattavia tietoja matematiikan oppimisvaikeuksista ei ole, mutta on arvioitu, että 10-15 %:lla oppilaista on vaikeuksia koulumatematiikan opiskelussa ja 5 %:lla selvästi nimenomaan matemaattisiin suorituksiin rajautuvia oppimisvaikeuksia. (Ahonen & Räsänen 1995, 209.)

Matematiikka on hierarkkinen aine, jossa tieto rakentuu aina aiemman päälle. Oppimisvaikeuksiin ja niiden ennalta ehkäisemiseen on syytä kiinnittää huomiota mahdollisimman varhain, jotta vaikeudet eivät kasautuisi liian suuriksi. Ekebladin (1996, 4) mukaan syitä onnistumiseen ja epäonnistumiseen matematiikassa voi aina hakea kolmesta tekijästä ja niiden suhteesta: objektista (matematiikan luonne), subjektista (lapsi edellytyksineen) ja toiminnasta (opetuksen menetit).

Myös Koponen (1992,160-161) jakaa oppimisvaikeuksien syyt samantapaisesti kolmeen osaan:

- Matematiikan rakenteeseen liittyvät: etäinen terminologia, abstraktisuus tekee asiat vaikeiksi, hierarkkisuus, motivoiminen riittäviin ponnistuksiin vaikeaa, mahdollinen kielteinen asenne
- Oppilaiden persoonallisuuden kehitykseen liittyvät: ympäristötekijät, heikko lahjakkuus, emotionaaliset häiriöt
- Opetusjärjestelyistä johtuvat. Opetusjärjestelyissä olisi kiinnitettävä huomiota seuraaviin kohtiin: Opetuksen tavoitteellinen suunnittelu, vaikeuksien diagnosointi, huolellinen uuden asian opettaminen, jatkuva formatiivinen arviointi, tehokas eriyttäminen ja tukiopetus.

Käsitys omasta osaamisesta tunnetasolla on ensisijainen kannustin tai este matematiikan oppimiselle. Ikäheimo (1995) esittelee Magnen tutkimuksia matematiikan oppimisvaikeuksista ja hänen käsitystään laskuvirheistä syntyvästä matematiikkapelosta. Magne jaottelee oppimisvaikeuksien syyt edellisiä suppeammin

oppijan näkökulmasta: 1) erilaiset oppimista haittaavat tekijät (heikko lahjakkuus, kyvyttömyyttä assosioinnissa, heikko abstraktiokyky, huono muisti), 2) vähentynyt ponnistelukyky tai aloitekyky (psykykinen voimattomuus, päättämättömyys), 3) tunne-elämän häiriöt (laskemispelko, matematiikkapelko), 4) rauhattomuus, hyperaktiivisuus, levottomuus ja keskittymiskyvyn aleneminen. Oppimisvaikeuksien voittamiseksi tarvitaan Magnen mukaan monipuolista pedagogista, lääketieteellistä ja sosiaalista apua. Matematiikan erityisopetuksessa pätevät samat säännöt kuin matematiikan opiskelussa muutenkin. Tavoitteena on:

- Luoda myönteinen ilmapiiri ja hyvä motivaatio
- Edistää luovuuden mahdollisuuksia
- Huolehtia aineensisäisestä ja opetusmenetelmien, opetusvälineiden ja eriyttämiseen liittyvästä tasapainosta
- Yksilöllistää opetus
- Asettaa heikosti suoriutuvien tavoitteeksi keskitason lähestyminen/saavuttaminen

(Ikäheimo 1995, 22- 25.)

Lehtinen (1990) moittii koululaitostamme siitä, että se ei kiinnitä matemaattisiin oppimisvaikeuksiin samanlaista huomiota kuin luku- ja kirjoitusvaikeuksiin. Matematiikan vaikeuksien on oletettu juontuvan vain matemaattisten kykyjen puutteesta, mutta oppimisvaikeuksien synnyn tarkastelu osoittaa muuta. Alkuvaiheen koulumatematiikan ongelmana on ollut sen liittymättömyys lapsen luonnolliseen, aiempaan matematiikkaan. Koulumatematiikka voi osoittautua liian kaukaiseksi, irralliseksi tehtävien ja vastausten muistamiseksi. Toinen ongelmatekijä koulumatematiikassa on ollut keskittyminen ulkoisen laskusuorituksen harjaannuttamiseen, jolloin varsinainen matemaattinen ajattelu saattaa jäädä vähemmälle. Kolmanneksi oppimisvaikeuksien näkökulmaksi Lehtinenkin nostaa emotionaaliset ja motivaationaaliset tekijät. Matematiikka aineena on altis synnyttämään ahdistusta ja epäonnistumisen uhkaa, jotka taas aiheuttavat lisää esteitä oppimiselle. (Lehtinen 1990, 5-6; ks. Ikäheimo 1995; 26-28.)

Matematiikan kasaantuvat vaikeudet ovat oppilailta yleensä samansuuntaisia, Kinnunen ja Vauras toteavat (1998). Yhteen- ja vähennyslaskut hallitaan pienemmillä lukualueilla ja allekkain laskien. Laskeminen on kuitenkin hidasta ja apuvälineisiin turvautuvaa,

myös kertotaulu on vaikea oppia muistamaan. Usein tällaiset oppilaat eivät osaa käyttää lukujen osittamista ja koontaa apunaan (kuten $7+5=7+3+2=10+2=12$), vaan he laskevat lukusana kerrallaan. Yksi olennainen tekijä näiden vaikeuksien syntymisessä on puutteellinen käsitys lukujonon luvuista lukumäärinä, joilla on tietyt osat ja keskinäiset suhteet. Oppilas voi kyetä tuottamaan lukujonon askel kerrallaan, mutta siirtyminen useampien askelien välein voi olla vaikeaa. Vaikeaa voi olla myös kertoa, montako askelta on tietystä luvusta kauempana olevaan lukuun. Kertotaulu edellyttää myös näitä lukujonotaitoja. Oppilaiden ongelmien vakavuus tulee esiin usein vasta ylemmillä luokilla, koska helpoimmillakin taidoilla pärjää aika pitkälle. Tämän vuoksi olisi tärkeää puuttua lukujen käsittelyn ongelmiin mahdollisimman varhain. (Kinnunen & Vauras 1998, 274-276.)

Ikäheimo, Aalto ja Puumalainen (1997) ovat samoilla linjoilla edellisten kanssa. He käyttävät nimitystä solmukohta sellaisista taidoista tai oppisisällöistä joiden hallinnan puute aiheuttaa oppimisvaikeuksia. Alkuopetuksessa nämä tärkeät solmukohdat ovat lukujonotaidot, lukualueen 0-20 yhteen- ja vähennyslaskut automaation tasolla, 10-järjestelmä ja kertolaskun käsite. Solmukohtia suositellaan harjoiteltavan leikkien ja pelien avulla jo esiopetuksesta lähtien, jolloin itse asia konstruoidaan pikkuhiljaa ajattelun malliksi. Myöhemmin näihin malleihin liitetään sitten niiden matemaattiset käsitteet ja merkit. Leikin merkitys oppimiselle ja myönteisille asenteille on esi- ja alkuopetuksessa oleellisinta, kynän ja paperin liiallista käyttöä liian aikaisin olisi syytä välttää. (Ikäheimo, Aalto, Puumalainen 1997, 6-11.)

Ikäheimon (1998, 241) mielestä matematiikan symbolitasolle ei saa mennä liian varhain, koska se aiheuttaa herkästi puutteita keskeisten käsitteiden ymmärtämisessä ja hallinnassa. Numeroiden ja kuvioden piirtämistä tärkeämpää olisi matemaattisten valmiuksien ja käsitteiden omaksuminen.

Malatyn (1997, 80) näkemykset symbolien mukaan ottamisesta eroavat hieman Ikäheimon käsityksistä. Malaty muistuttaa, että oleellisinta on kuitenkin eteneminen lapsen ehtojen ja kykyjen mukaan. Hän ei halua nimetä mitään ikärajaa, jolloin esimerkiksi numeroita olisi hyvä opetella kirjoittamaan. Joensuun kokeilussa 6-vuotiaat lapset oppivat kirjoittamaan numerot yhtä hyvin kuin lapset ensimmäisellä luokalla, mutta numeroiden kirjoittaminen ei kuitenkaan ole mikään ehdoton edellytys oppimiselle esimerkiksi numerokortit ovat myös hyvin käyttökelpoisia.

Kephart (1968) suosittelee karkeamotoriikan käyttöä numeroiden ja kirjainten kirjoittamisen opettelussa, ennen kynä ja paperi -yhdistelmää. Esimerkiksi liitutaalulle kirjoitettaessa tarvitaan paljon kokonaisvaltaisemmin lihaksia ja liikettä kuin paperille tehdessä. Samalla suunnat (ylös, alas, vinosti ylös, eteenpäin) ovat todenmukaisia; ylöspäin on oikeasti ylös eikä itsestä pois päin kuten paperilla. (Kephart 1968, 111-113.)

Esi- ja alkuopettajan hyvä sääntö on se, että aikuisella on velvollisuus ohjata lasta ikään katsomatta silloin, kun lapsi on kiinnostunut oppimaan jotain uutta esimerkiksi lukemista, kirjoittamista tai matemaattisia taitoja. Lapsen kiinnostuksen ja tason mukaan eteneminen ehkäisee osaltaan oppimisvaikeuksia ja tukee ja ylläpitää myönteistä asennetta opiskeluun.

Laskustrategiat

Oppimisvaikeuksia voi tarkastella lapsen käyttämien strategioiden tasosta käsin. Laskeminen perustuu aluksi hitaaseen luettelemiseen, mutta se kehittyy ennen pitkää kohti tehokkaampia ja nopeampia ratkaisutapoja, kuten mieleenpalauttamisen menetelmää. Jos lapsella on muita vaikeuksia esimerkiksi tarkkaavaisuudessa tai spatiaalisuudessa, niin luettelemispohjaisessa strategiassa syntyy helposti virheitä. Jos virheitä tulee paljon, lapsen on vaikeaa siirtyä kehittyneempiin menetelmiin. Eritasoiset strategiat eivät sulje pois toisiaan, vaan ne tukevat toisiaan ratkaisua haettaessa. Lapsen on annettava käyttää niitä strategioita, joita hän kulloinkin tarvitsee. Visuaalisesta tuesta, kuten sormilla laskemisesta, lapsi luopuu sitten, kun hän ei enää tarvitse tällaista tukea. Useimmiten lapset, persoonastaan riippuen, haluavat varmistua vastauksen oikeellisuudesta. Jos ratkaisusta ollaan epävarmoja, turvaututaan hitaampiin varmistusmenetelmiin, mutta muuten käytetään mieleenpalauttamisstrategiaa. Varhaisempia menetelmiä käytettäessä laskeminen on hidasta, mutta virheiden määrä on kuitenkin vähäisempi kuin lapsilla, joilla on huomattu vaikeuksia nopeampien strategioiden oppimisessa. (Ahonen & Räsänen 1995, 230-232.)

Vainikainen (1998) tuo esille Vauraan käsityksen siitä, että matemaattisesti heikoille oppilaille on tyypillistä summittainen ratkaisustrategioiden käyttö. He yrittävät hallita oppimistilanteita menemällä suoraan luvuilla työskentelyyn, ilman ongelman huolellista tarkastelua. Ongelman analysoiminen ja ymmärtäminen on kuitenkin lähtökohta onnistuneelle työskentelylle. Luetun ymmärtämisen vaikeudet tulevat tältä osin myös

matematiikassa eteen. Metakognitiivisten taitojen kehittäminen on tärkeää, jotta sekä lapset että vanhemmatkin ymmärtäisivät, että oppimistakin täytyy oppia. Matematiikkaa ei tarvitse pitää minään salaperäisenä taitona, vaan taitona jota voi oppia, muistuttaa Vauras. (Vainikainen 1998, 37.)

Ahonen ja Räsänen (1995) pohjaavat Gearyn tutkimukseen, jonka mukaan lapset, joilla on matemaattisia vaikeuksia voidaan jakaa kahteen ryhmään. Toisen ryhmän lapsilla on havaittavissa yleinen hitaus kehittymisessä ja oppimisessa, mutta kehittymisen, riittävän harjoituksen ja tukiopetuksen avulla he voivat saavuttaa ikäistensä tason. Tälle ryhmälle on tyypillistä hitaus matemaattisissa suorituksissa ja he käyttävät vielä alkeellisia strategioita. Toisella ryhmällä sen sijaan on selviä vaikeuksia kehittyä matematiikassa harjoittelusta huolimatta. Strategioiden käyttö on kehittymätöntä ja virheitä tulee runsaasti. Lasten strategioiden tutkiminen on osoittautunut tarkoituksenmukaiseksi tavaksi tarkastella lasten oppimisvaikeuksia. (Ahonen & Räsänen 1995, 233.)

Opettajan ohjauksella on oma merkityksensä lasten strategioiden valintaan. On hyvä ottaa huomioon erilaiset oppimistavat ja myös mahdolliset erot sukupuolten välillä. Carr, Jessup ja Fuller (1999) ovat huomanneet strategioiden käytössä eroja myös tyttöjen ja poikien välillä. Ensimmäisellä luokalla olevat pojat käyttävät enemmän mieleenpalauttamisen menetelmiä, kun tytöt taas käyttävät enemmän avoimia strategioita, kuten sormilla laskemista. Tutkittaessa vanhempien ja opettajien vaikutusta strategioiden valintaan havaittiin, että strategioiden käytön ohjauksesta oli enemmän hyötyä ja vaikutusta pojille kuin tytöille. Opettajat ja vanhemmat ohjasivat poikia käyttämään avoimia menetelmiä ja kouluvuoden puolivälin jälkeen myös mieleenpalauttamismenetelmiä ja ohjaus tuotti tulosta. Sen sijaan tyttöjen strategiaihin ohjauksella ei ollut samanlaista vaikutusta. Tutkijat kehottavatkin kiinnittämään huomiota tyttöjen ajattelutapaan ja lasten ja aikuisten vuorovaikutukseen, jotta ohjaus kohtaisi lapset tasapuolisesti. (Carr ym. 1999, 42-43.)

Peruslaskutoimitusten hallitseminen on tarpeellista niin jokapäiväisessä elämässä kuin vaativampien matemaattisten taitojen kehittämisessä. Isaacs ja Carroll (1999) eivät osaa sanoa, mikä olisi paras tapa tehokkaiden laskustrategioiden opettamiseen, mutta he esittävät joitakin lähestymistapoja peruslaskuihin. Keskeisiin peruslaskutaitoihin kuuluvat lukujonon luetteleminen, lisääminen ja vähentäminen nollalla, yhdellä ja kahdella (siirtyminen lukujonossa eteen- ja taaksepäin), lukuparien hallitseminen (3+3,

6+6), ja lukujen joiden summa on kymmenen hallitseminen (4+6, 5+5). Drillaava harjoittelu ja aikarajoitetut testit toivotaan jätettävän vähemmälle, kuitenkin niitä kokonaan unohtamatta. Tärkeä keino monipuolistaa lapsen ajattelua tutkijoiden mukaan on kehottaa lapsia jakamaan omat laskustrategiansa, jolloin lapset oppivat toisiltaan. Myös opettaja voi esittää erilaisia strategioita, kunhan niistä ei tehdä ”ainoita oikeita” laskutapoja. Laskemista voidaan harjoitella luettelemalla lukujonoa eteen- ja taaksepäin, laskemalla kakkosia, viitosia ja kympejä yhteen, ja laskemalla annetusta luvusta tietty määrä eteen- tai taaksepäin ”aloita kahdeksasta ja laske kolme lukua taaksepäin”. Erilaiset kymmenjärjestelmää kuvaavat materiaalit, joissa viiden ja kymmenen sarjat erottuvat selvästi opettavat hyvin osan ja kokonaisuuden suhdetta, kuten luvut joiden summa on kymmenen. Esimerkkejä muutamista peruslaskustrategioista: $(8+7=8+2+5=10+5=15)$, $(8+6=7+7=14)$, $(8+6=2+6+6=2+12=14)$, $(9+7=9+1+6=10+6=16)$. (Isaacs & Carroll 1999, 9-12.)

Alkuopetuksen matematiikassa on tärkeää kiinnittää huomiota siihen, millaisen kuvan lapsi muodostaa itsestään matematiikan taitajana. Myönteisen asenteen tukeminen, oppilasarviointi, matematiikan keskeiseen oppiaineeseen keskittyminen (lahjakkaita unohtamatta) ja oppimisvaikeuksien ehkäiseminen ja korjaaminen nousevat opetuksen tärkeimmiksi tekijöiksi.

6 TUTKIMUSTEHTÄVÄN TARKENTUMINEN

Kephartin kehitysvaiheteorian avulla on tarkoitus analysoida alkuopetuksen matematiikkaan soveltuvaa toimintamateriaalia. Tavoitteena on selvittää ja esitellä minkä kehitysvaiheiden tasoista tiedonkäsittelyä materiaalien harjoitukset vastaavat ja samalla miten ja millaiset harjoitukset voivat tukea lapsen ajattelun kehittymistä eteenpäin. – Kun tunnetaan lapsen valmiudet ja oppimateriaalin käyttökelpoisuus voidaan lapselle tarjota oikeantasoisia harjoituksia. Tällöin lapsi voi käsitellä tietoa omien valmiuksiensa mukaisesti.

Toimintamateriaalin valinnan kriteereinä ovat materiaalien monipuolisuus, soveltuvuus eri kehitysvaiheissa olevien lasten oppimisen tueksi, materiaalin kohtuullisen helppo saatavuus tai itse valmistamisen mahdollisuus sekä alkuopetuksen matematiikan sisältöalueet. Toimintamateriaaliin tulee kuulua jotakin konkreettista materiaalia, jota lapset voivat itse käyttää.

Aluksi esitän lukukäsitteen harjoittelemiseen muutaman esimerkin, koska lukukäsitteen hallitseminen on lähtökohta matemaattiselle kehittymiselle. Sisältöalueista keskityn niihin peruslaskutoimituksiin, joiden hallitseminen on osoittautunut keskeiseksi myöhemmälle aritmeettisten taitojen kehitykselle ja joissa myös eniten ilmenee kehitystä estäviä, kasaantuvia oppimisvaikeuksia (ks. Ikäheimo, Aalto, Puumalainen 1997, 6-11). Nämä sisältöalueet ovat lukujonotaidot, yhteen- ja vähennyslaskut, kymmenjärjestelmä ja kertolasku. Solmukohtien lisäksi tarkastelen geometriaan liittyvää materiaalia, koska geometriassa toimintamateriaalien käyttö on keskeistä, jopa opetuksen lähtökohta. Tarkasteltavat osa-alueet ovat seuraavat:

- Lukukäsite
- Yhteen- ja vähennyslaskut
- 10-järjestelmä
- Kertolasku
- Geometria

Tutkimuksen pääasiallinen tehtävä ei ole kartoittaa saatavilla olevaa materiaalia, vaan valita laadukkaita, oppimista palvelevia materiaaleja Kephartin teoriasta nousevien kriteerien avulla näihin viiteen osa-alueeseen. Kuhunkin osa-alueeseen on tavoitteena

löytää materiaaleja, jotka kattaisivat mahdollisimman monen kehitysvaiheen edellyttämät valmiudet. Tutkimuksessa ei pitäydytä pelkästään valmiisiin materiaalien käyttöohjeisiin. Tarvittaessa pyrin kehittämään materiaalien toimintamahdollisuuksia pidemmälle.

Johtajatukseni on se, että toimintamateriaaleista löytyy mahdollisuuksia mielekkääseen matematiikkaan, kun niitä käytetään muiden opetusmenetelmien ja -välineiden rinnalla ja kun osataan tarjota lapselle oikeantasoisia, kehitystä tukevia harjoituksia.

7 KEPHARTIN TEORIA

Kephartin älyllisen kehityksen teoria kuvaa sarjan tärkeitä strategioita ympäristön tiedon käsittelemiseksi. Kehitysvaiheet etenevät peräkkäin. Jos aiempi taso on keskeneräinen, ylemmät tasot kärsivät siitä. Lasta tulisi ymmärtää hänen kognitiivisten rakenteidensa kautta, siitä miten lapsi kokee maailman. Kephart neuvoo kasvattajaa ymmärtämään lasta havainnoimalla ja nimeämällä lapsen laadullisen toiminnan tasoja. Lapsi oppii myös nopeasti kompensoimaan jonkin heikomman alueen, jolloin se saattaa jäädä aikuiselta huomaamatta. (Ball 1971, 109-111.)

7.1 Kehitysvaiheet

Kephartin mukaan kehityksen vaiheet seuraavat toisiaan järjestyksessä, järjestys on tärkeämpää kuin se, milloin vaihe ilmenee. Vaiheet ovat hierarkkisia, vaikkakin ne voivat mennä jonkin verran päällekkäin. Tiedonhankintatavat etenevät motoriselta tasolta havaintotasolle ja siitä edelleen käsitteelliselle tasolle. Havaintotasolla oppiminen edellyttää karkeamotoriikan kehittyneisyyttä ja samoin käsitteiden oppiminen taas havaintotason hallitsemista. Perusidea opetuksen kannalta on se, että opetuksen tulee vastata lapsen tasoa. Jos lapsella on oppimisvaikeuksia, niin niitä ei ratkaista määrää lisäämällä, vaan muuttamalla opetuksen tasoa. Kehitysvaiheita on seitsemän.

1. Motorinen vaihe

(voisi suomentaa myös ”karkeamotorinen vaihe”)

Lapsi opettelee ottamaan kontaktia ympäristöönsä aistien kautta välittyvän tiedon avulla ja hän opettelee kontrolloimaan tätä kontaktia, järjestämään ympäristöä. Lapsi on kiinnostunut omien liikkeidensä vaikutuksesta ympäristöönsä. Esimerkiksi kehittyvä motorinen kontrolli on tärkeää tarkalle kinesteettiselle tiedolle, kontrollin puute aiheuttaa oppimisvaikeuksia ja näkyy mm. hallitun käsien käytön oppimisen hitaudessa. Motorisen mallin/kaavan oppiminen mahdollistaa joustavan mukautumisen ympäristöön, pelkkä motoristen taitojen oppiminen ei siihen riitä. Lievästi aivovaurioisilla on vaikeuksia motoristen mallien oppimisessa. Tärkeitä motorisia malleja ovat:

1) Liikkuminen, joka tarkoittaa kehon liikettä tilassa, esimerkiksi kävely, juoksu, hyppiminen. Tällöin esimerkiksi kävely on osa liikkumisen kaavaa ja eri osia voidaan käyttää yhdistelminä ja erikseen. Aivovaurioisen sen sijaan täytyy keskittyä kävelyn perusideaan ja sen muuntaminen ja yhdistäminen muihin liikemuotoihin on vaikeampaa. Liikkumistaidon avulla lapsi hahmottaa esineiden välisiä suhteita tilassa.

2) Tasapaino ja asennon säilyttäminen. Painovoiman merkitys opitaan tasapainon ja asennon kaavan avulla. Mukautumalla kehonsa painovoimaan lapsi oppii painovoiman suunnan suhteessa ympäristöön ja tieto painovoimasta pysyy yllä jatkuvasti. Painovoiman sisäistäminen mahdollistaa matemaattisen kokemuksen tilan suhteista.

3) Koskettamiskaavan taidot liittyvät välineiden käsittelemiseen, kuten kiinni ottamiseen, kiinni pitämiseen, tarttumiseen ja irrottamiseen. Lapsi havaitsee samankaltaisuuksia, erilaisuuksia. Kiinni ottamalla saa kosketuksen, kiinni pitämällä ylläpitää kosketusta ja irrottamalla jättää kosketuksen. Tällä tavoin havaitseminen kehittyy ja hahmotetaan esimerkiksi kuvio ja tausta.

Lapsi tulee pian tietoiseksi kinesteettisen tiedon ja liikkeen välisestä kiinteästä yhteydestä, jolloin seuraavaan vaiheeseen siirtyminen tapahtuu nopeasti.

(Ebersole, Kephart, Ebersole 1968, 67-68; Kephart 1971, 97-100.)

2. Motorishavainnollinen vaihe

Motorishavainnollisessa vaiheessa lapsi alkaa yhdistää havaintotietoa aiemmin kehittyneeseen motoriseen tiedonhankintaan. Visuaaliset ja auditiiviset havainnot tulevat merkityksellisiksi liittymällä motoriseen tietoon. Silmä-käsikoordinaatio alkaa kehittyä. Motoriikka kontrolloi edelleen lapsen toimintaa, kunnes molemmat tiedonhankintatavat yhdenmukaistuvat. Tällöin motoriikan avulla hankitut havainnot alkavat saada yhä enemmän merkitystä ja ne alkavat myös ohjata toimintaa. Havaintojen johdosta lapsen liikkuminenkin muuttuu tehokkaaksi, edellyttäen sekä motorisen että havaitsemalla hankitun tiedon järjestelmällistä hallintaa. Pikkuhiljaa lapsi alkaa saavuttaa havaintojen avulla saman tiedon kuin minkä hän aiemmin hankki motorisesti. (Kephart 1968, 22- 25; Ball 1971, 114-115.)

3. Havaintomotorinen vaihe

Tässä vaiheessa lapsi vakiinnuttaa kyvyn kontrolloida liikkeitään havaintojen perusteella, visuaalinen tiedonhankinta tulee hallitsevaksi. Havainnot ja motoriikka tukevat toisiaan ja auttavat lasta saavuttamaan oikeanlaiset motoriset kaavat. Havaitseminen on paljon tehokkaampi tiedonhankkimistapa kuin motorinen, ja lapsi alkaa luottaa yhä enemmän havaintoihinsa. Motorista tukea tarvitaan enää ajoittain tiedon tarkistamiseen. Mikäli havainnot ja motoriikka eivät yhdisty, lapsi elää kahdessa maailmassa, havaintomaailmassa ja motorisessa maailmassa. Tällöin lapsi ei osaa yhdistää tietoja vaan joutuu ymmälleen kahdesta erityyppisestä tiedosta. (Kephart 1968, 25-26; Ebersole ym. 1968, 69.)

4. Havaintovaihe

Havaintovaiheessa lapsi alkaa tehdä havaintoja ilman motorista vahvistusta. Visuaalisuuden kehittymiseen liittyy myös matematiikan kannalta keskeisiä taitoja. Lapsi havaitsee samankaltaisuudet ja eroavuudet vertailemalla havaintoja keskenään. Lapsi kykenee esimerkiksi katsomalla erottamaan neliöitä, ympyröitä ja kolmioita ilman kosketuksen apua. Havaintojen vertaaminen ja ryhmitteleminen keskenään tuottaa tietoa jälleen edellistä havaintomotorista vaihetta nopeammin. Kielellä on yhä enemmän merkitystä. Jos lapsi ei yhdistä kunnolla edellisen vaiheen havainnollista ja motorista tiedonhankintatapaa, niin hänellä voi olla vaikeuksia tuottaa uudelleen havaintojaan. Lapsi voi esimerkiksi tunnistaa sujuvasti kirjaimia ja muotoja, mutta ei osaa itse kirjoittaa tai piirtää samanlaisia. (Kephart 1968, 26-28.) Audentiivisten ja visuaalisten havaintotaitojen kehittymistä voidaan tukea harjoittamalla aisteja mm. seuraaventyyppisillä tehtävillä.

1) Kuulon erittelykyvyn harjoituksia:

- silmät kiinni äänien (kaverien, soittimien ym.) tunnistaminen
- erilaisten äänien matkiminen
- riimisanojen tunnistaminen (kettu > lettu)
- lauseessa kuullun väärän sanan korjaaminen
- rytmin toistoharjoituksia
- kuullun tarinan kuvittaminen

2) Visuaalisen erottelukyvyn harjoittaminen:

- etäisyyksien arvioiminen
- pulmatehtävien tekeminen ("mikä puuttuu, mikä ei kuulu joukkoon, etsi samanlaiset, jatka kuviota")
- muistipelit, palapelit

(Ebersole ym. 1968, 69-73.)

5. Havaintokäsitteellinen vaihe

Havaintojen vertaamisen pohjalta lapsi alkaa luokitella niitä ja integroida havaintoja uusiksi kokonaisuuksiksi, jolloin hän alkaa muodostaa ja ymmärtää käsitteitä. Havaintoihin liitetään niiden kielellinen vastine. Käsite on abstraktio, joka koostuu havaintojen välisten suhteiden ymmärtämisestä, eikä vaadi välitöntä havaintoa. Lapsi erottaa esimerkiksi neliön ja kolmion toisistaan sen perusteella, että tietää toisessa olevan neljä sivua ja toisessa kolme. Lapsi ymmärtää että käsite 'tuoli' voi tarkoittaa monenlaisia tuoleja. (Kephart 1968, 28; Ebersole ym. 1968, 73.)

6. Käsitevaihe

Käsitteiden osuus tiedon hankinnassa tulee keskeiseksi, tällöin tietoa on mahdollista käsitellä suuria määriä kerrallaan. Lapsi ryhmittelee ja yhdistää käsitteellistä tietoa merkityksellisiksi yleistyksiksi. Lapsi vertaa käsitteitä nyt myös keskenään, eikä ainoastaan suhteessa havaintoihin. Lapsi tietää esimerkiksi että pyöreää kappaletta voi käyttää pyöränä. Kielellä on tärkeä osuus aina havaintojen nimeämisestä abstraktien käsitteiden symboleihin. Havaintovaiheessa lapsi alkaa jäsentää havaintojaan kielen avulla ja kehityksen edetessä kielen merkitys vain kasvaa. Sanat ovat abstraktien käsitteiden symboleja ja ne helpottavat samalla käsitteiden käyttöä. (Kephart 1968, 29-31; Ebersole ym. 1968, 73.)

Aiempien vaiheiden hallitseminen on tärkeää käsitteiden sisäistämisen kannalta. Havaintomotorisen ja havaintokäsitteellisen tason onnistunut läpikäyminen on tärkeää, jotta käsitteillä olisi vahva pohja käytännön kokemuksissa. Lapsi voi kyllä saavuttaa käsitevaiheen ilman edellisen vaiheen läpikäymisen tukea ja lapsesta voi kehittyä verbaalisesti hyvinkin lahjakas. Tällöin lapsen on kuitenkin vaikea soveltaa hallitsemiaan käsitteitä käytännön työskentelyyn, hän suoriutuu hyvin esimerkiksi

lukukirjan suhteen, mutta ei osaa soveltaa lukemaansa tietoa käytännön tilanteessa. Käsitteellistä ajattelua voi kehittää konkreettisen havaintomotorisen tiedon avulla, mutta käsitevaiheen kehittymistä ei voi kuitenkaan manipuloida fyysisesti yhtä helposti kuin aiempia vaiheita. (Kephart 1968, 29-31; Ebersole ym. 1968, 73.)

7. Käsitehavainnollinen vaihe

Käsitehavainnollisessa vaiheessa lapsi tulee yhä riippuvaisemmaksi käsitteellisestä tiedonhankinnasta ja havainnot tulevat toisarvoisemmiksi. Tiedon hankkiminen on kehittynyt vaiheeseen, jossa käsitteet ohjaavat havaintoja. Mahdolliset ristiriidat havaintojen ja käsitteiden välillä tarkistetaan ja korjataan tai mukautetaan käsitteisiin. ”Näemme asiat sellaisina kuin itse haluamme, emme sellaisina kuin ne ovat”. (Kephart 1968, 31-32.)

Tarkastelua

Teorian hierarkkisuuden ajatus soveltuu mielestäni hyvin nimenomaan matemaattisen ajattelun kehitykseen, jossa puutteet aiemmilla tasoilla ilmenevät myöhemmin vaikeutena päästä kehityksessä pidemmälle. Matemaattinen tieto konstruoituu aina aiempaan tietämykseen, jolloin puutteet tai virheelliset ajatusmallit aiheuttavat vaikeuksia. Lapsen etu on, että oppimisympäristö olisi niin monipuolinen, että se tukisi lapsen oppimista ennaltaehkäisten vaikeuksia ja se, että mahdolliset puutteet havaittaisiin ajoissa ja lapsi saisi riittävästi tukea niihin.

Motorisen ja kognitiivisen kehityksen painottaminen on vaihdellut eri aikoina. Aiemmin motoriikan merkitystä korostettiin paljon ja oli sellaisiakin käsityksiä, että esimerkiksi lukemisen taitoa voi harjoittaa suoraan motoristen harjoitusten avulla. Kognitiivisten teorioiden vahvistuminen sen sijaan saattaa jättää sensomotoriset kehitystekijät vähemmälle huomiolle. Ihmisen kokonaisvaltaisuuden huomioiminen edellyttää kuitenkin eri osatekijöiden tasapainoista huomioimista. Kephartin teoriaakin kapeasti tulkittaessa on mahdollista korostaa motoriikan merkitystä. Teoria ei kuitenkaan keskity ainoastaan motoriseen kehitykseen vaan näkee sen pohjana älylliselle kehittymiselle. Kussakin kehitysvaiheessa lapsen kehittymien edellyttää kyseisen vaiheen tasoista tiedonhankintatapaa. Käsitteiden oppimisen tasolla ei enää riitä motoriikan tai havaintojen avulla saatava tieto, mutta ne ovat olleet edellytyksenä sille, että lapsi on päässyt käsitteiden prosessoinnin tasolle.

Kephartin (1968) mukaan lapsi normaalisti etenee vaikeuksista kehitysvaiheelta toiselle, halliten kunkin vaiheen ennen uudelle etenemistä. Sen sijaan mahdolliset esteet tuottavat hankaluuksia tietyn tason saavuttamisessa. Vaikka lapsi ei saavuttaisi täydellisesti tietyn tason edellytyksiä, kehittyminen silti jatkuu seuraavalle tasolle, jossa lapsi yrittää parhaansa mukaan vastata uusiin vaatimuksiin. Tämä kasaa lapselle vaikeuksia oppimisessa, jotka ylemmissä vaiheissa voivat osoittautua ylitse-pääsemättömiksi. Jotkut lapsista näyttävät jonkin alemman tason puutteista huolimatta selviytyvän hyvinkin ylemmistä vaiheiden valmiuksista, mutta heilläkin voi olla esteitä erilaisen tiedon monipuolisessa yhdistelemisessä. Oppimisvaikeuksisen lapsen tueksi olisi selvitettävä, millä tasolla hänellä on vaikeuksia ja vahvistettava ja täydennettävä sitten puutteellisia taitoja. Oppiminen edellyttää, että tieto tarjotaan lapsen kehitystasoa vastaavalla tavalla. (Kephart 1968, 32-34.)

Matematiikkaan liittyvä mielenkiintoinen havainnoinnin kohde on sormilla laskeminen. Siinä lapsi voi hyödyntää useampien vaiheiden tiedonhankintatapoja. Jos lapsi laskee sormella koskettaen toisen käden sormia tai vaikka multilink-kuutioita, niin hän tarvitsee vielä motorista tukea havainnoilleen (=havaintomotorinen vaihe). Katsomalla laskeminen liittyy havaintovaiheeseen. Sormilla laskeminen vaatii kuitenkin myös lukukäsitteitä, lukusanan ja lukumäärän yhdistämistä, jolloin lapsi kykenee ainakin joltain osin havaintokäsitteelliseen prosessointiin. Lapsen voisi sanoa tällöin olevan siirtymävaiheessa kohti käsitteellisiä vaiheita. Siirtymisen tulee antaa tapahtua lapsen omaan tahtiin, eli lapsen tulee käyttää havaintomotorista tukea kunnes hän ei sitä enää tarvitse. Käsitteellisiin vaiheisiin ei voi kiiruhtaa, koska on tärkeää, että lapsi rauhassa varmistaa käsitteiden merkitysten havaintojen avulla.

Lapsen oppimista tuettaessa ja mahdollisia aiempien tasojen puutteita täydennettäessä on otettava huomioon lapsen nykyinen kehitystaso. Esimerkiksi jos kymmenvuotiaalla lapsella huomataan havaintomotorisen tason puutteita, häntä ei voi ohjata samoin kuin havaintomotorisessa vaiheessa olevaa kaksivuotiaasta. Opetuksessa on huomioitava lapsen jo saavuttamat edellytykset, vaikka alemmilla tasoilla olisi korjattavaa. (Kephart 1968, 35-36.) Mahdollisten puutteellisten alueiden kehittäminen myöhemmin vaatii opettajalta ammattitaitoa, jotta hän ei lisäisi lapsen vaikeuksia asenteiden tasolla. Lienee lapsen aliarvioimista, jos kolmasluokkalaiselle tarjotaan tehtäväksi ensimmäisen luokan kirjaa.

Kephartin näkemykset koulun valmiuksista erilaisiin koulutulokkaisiin nähden ovat edelleen ajankohtaisia. Hänen mukaansa koulu odottaa lapsen olevan kehitystasoltaan vähintään havaintotasolla ja mieluusti havaintokäsitteelliselläkin tasolla kouluun tullessaan. Tosiasiassa koulutulokkaiden taso on kuitenkin hyvin kirjava, lasten kehitysvaiheet vaihtelevat ainakin havaintomotorisista vaiheista ylimpiin käsitteellisiin vaiheisiin. Peltokankaan ja Ruuskasen (1999, 100) tutkimus matemaattisesti lahjakkaita 7-vuotiaista osoitti, että taitava ekaluokkalainen voi olla useillakin matematiikan osa-alueilla jo 3. ja 4. luokan oppilaiden tasolla.

Aiemmin ajateltiin lasten valmiuksien kehittyvän kypsymisen mukana ja kehityksestä selvästi jäljessä oleva lapsi voitiin laittaa takaisin kotiin ”kypsymään” vuodeksi. Kephart toteaa kuitenkin, että kypsymisen ohella lapsen valmiuksiin vaikuttaa yhtä paljon varhaisopetus. Kephartin mukaan koulun tulee ottaa vastuuta kehittämällä lasten valmiuksia, jos niissä havaitaan puutteita ja tarjoamalla oppimiskokemuksia, jotka lapselta ovat jääneet puuttumaan. (Kephart 1968, 38-40.) Esiopetuksen ja varhaiskasvatuksen yhtenä tehtävä on kouluvalmiuksien kehittäminen, mutta perusidea on kuitenkin se, että koulun tulee olla valmis lapsia varten eikä päinvastoin. Tämä on haasteena joka syksy, kun uudet koululaiset aloittavat koulutiensä. Koulun ja opettajan resursseihin vastata haasteeseen vaikuttavat toki monet tekijät.

7.2 Kehitysvaiheisiin liittyvät valmiudet

Liikanen (1995; Peruskoulun opetuksen opas: Alkuopetus 1987) on tarkastellut Kephartin (1968) esittämää kehitysvaihetheoriaa ja tarkentanut joidenkin vaiheiden valmiuksia hieman konkreettisemmalle tasolle kuin Kephart. Liikanen (1995) on käyttänyt Kephartin teoriaa myös kouluvalmiuksiin liittyvässä tutkimuksessaan teoreettisena lähtökohtana. Liikasen tarkastelu pysyy selvästi Kephartin teorian linjassa täydentäen eri osa-alueisiin kuuluvia valmiuksia. Liikasen näkökulma liittyy enemmän lapsen tason arviointiin, millaisia valmiuksia lapsella on kussakin kehitysvaiheessa. Kephart taas kuvailee kehityksen etenemistä vaiheesta toiseen ja kuinka tiedon prosessoiminen muuttuu.

Seuraavassa Liikasen esityksiä kehitysvaiheista, koska myös niistä on apua toimintamateriaalin arvioinnissa. Perekdyttyäni Kephartin teoriaan, näen Liikasen käsitykset tukena omalle tulkinnalleni teoriasta.

1. Motorinen vaihe

- Tietoa hankitaan kehon välityksellä (refleksiliikkeet→symmetriset liikkeet kuten taputus→tahdonalaiset motivoituneet liikkeet→automatoituneet liikkeet).
- Liikkeiden perusmuodot automatoituvat vähitellen.
(Kouluhallitus 1987, 6-7.)

2. Motorishavainnollinen vaihe

- Motoriset liikemallit määräävät ja kontrolloivat havaintoja, pelkkä katsominen ei riitä, täytyy myös koskea.
- Lapsella monet liikkeet ovat vielä eriytmättä kokonaismotoriikasta, esimerkiksi koulutulokkaallakaan silmän liikkeet eivät välttämättä ole vielä eriytyneet pään ja kehon liikkeistä.
- Lateraalisuus (l. kylkisyys) on vakiintumassa.
(Kouluhallitus 1987, 8-9.)

3. Havaintomotorinen vaihe

- Havainnot alkavat ohjata ja määrätä motorisia liikeratoja, saaden yhä suuremman merkityksen, mutta motorinen toiminta vahvistaa edelleen havaintoja.
- Havaintojen ohjaaminen tulee esiin mm. silmän ja käden yhteistyössä, kehontuntemuksessa ja kylkisyyden havaitsemisessa.
- Lapsi pystyy mm. leikkaamaan viivaa pitkin, hyppäämään ruutua ja narulla ja oppii heittämään ja ottamaan pallon kiinni.
(Liikanen 1995, 19; Kouluhallitus 1987, 9.)

4. Havaintovaihe

- Havaintoja pystytään vastaanottamaan vähitellen ilman motoriikan vahvistusta.
- Aistinelinten tuomat havainnot eriytyvät ja integroituvat, näkö, kuulo, kosketus-, kipu- ja lämpöaistit, sekä haju- ja makuaistit kehittyvät toimintavalmiuteensa.
- Näköaistiin liittyy matematiikan kannalta olennaisia tekijöitä: suunnan ja tilan havaitseminen, muodon havaitseminen, kuvien erottaminen taustasta, silmän ja

käden yhteistoiminta, huomiokyky ja visuaalinen muisti ja nopea visuaalinen havaitseminen.

- Lapsi huomaa samanlaisuuksia ja eroja, hän oppii tunnistamaan kokonaisuuden osien perusteella ja erottaa tietyn muodon, kirjaimen tai numeron tekstistä.
- Lapsi kykenee toistamaan näkemänsä ja kuulemansa kielellisesti tai motorisesti (piirtämällä, jäljentämällä).
- Opitaan vertailemaan ja erottamaan toisistaan eri aistien välittämää tietoa.
- Ulkoinen ärsyke mielletään ja muokataan sisäisesti aivoissa.

(Kouluhallitus 1987, 10-12; Liikanen 1995, 19.)

5. Havaintokäsitteellinen vaihe

- Havainnot erotetaan toisistaan ja niiden merkitys ymmärretään, havaintoihin liitetään niiden kielellinen vastine (koulutulokkaan sanavarasto keskimäärin 1500-3000 sanaa).
- Lapsi ymmärtää ja pitää mielessään kuulemaansa, esimerkiksi ohjeita.
- Lauseiden, lorujen, numerosarjojen yms. toistaminen onnistuu.
- Välittömien havaintojen yhteydessä lapsi osaa verbaalisesti ilmaista tarkoitusta, syytä ja seurausta.
- Kieli vahvistaa havaintoja, mutta ei riitä yksinään tiedon välittämiseen, vaan havainnot tukevat rinnalla.

(Liikanen 1995, 20; Kouluhallitus, 12-13.)

6. Käsitevaihe

- Lapsi alkaa käyttää kieltä tiedonvälityksessä, tiedon välittyminen on nopeaa ja tehokasta.
- Lapsi kykenee havaitsemaan käsitteiden välisiä suhteita ja vertailemaan niitä verbaalisesti.
- Syy- ja seuraussuhteiden ymmärtäminen, ajan, tilan suuruussuhteiden käsittäminen on mahdollista.
- Kuvailtavien asioiden ei tarvitse olla samanaikaisesti visuaalisesti tai auditiivisesti läsnä (muisti)
- Lukukäsitteen (yhdistetään lukumäärä ja numero) sisäistämisen myötä voidaan käyttää lukuja, suorittaa laskutoimituksia, luokitella, sarjoittaa ja soveltaa lukuja geometriassa ja soveltamistehtävissä.

(Liikanen 1995, 20-21; Kouluhallitus 1987, 13-14.)

7. Käsittehavainnollinen vaihe

- Kielelliset käsitteet alkavat ohjata ja kontrolloida käyttäytymistä, havainnot ovat sulautuneet käsitteisiin.
- Tieto välittyy paitsi käsitteiden kautta niin myös edeltävien tasojen tavoin (kielen, havaintojen ja motoriikan avulla).
- Lapsi oppii lukemaan, kirjoittamaan ja laskemaan ilman kuvan apua (1+2).
(Kouluhallitus 1987, 14.)

Arvioin toimintamateriaaleja kehitysvaiheiden yhteenvedon avulla (liite 1). Pääpaino yhteenvedossa on Kephartin teorialla (Kephart 1968; Ebersole ym. 1968), mutta myös joitain edellä esitettyjä Liikasen tarkennuksia on mukana. Joidenkin valmiuksien osalta on vaikea tehdä tarkkaa rajausta, mihin vaiheeseen ne kuuluvat. Esimerkiksi lukukäsitteen sisäistämisen Liikanen (1995, 20-21) liittää käsittevaiheeseen (6), mutta Kephartin esitys antaa viitteitä, joiden mukaan lukukäsitettä alettaisiin ainakin jollain tavoin ymmärtää jo aiemminkin, mikä vaikuttaisikin loogiselta. Ehdottoman tarkkoihin rajauksiin ei liene tarpeen pyrkiäkään, mutta vaiheen nimeäminen kertoo silti suuntaa antavasti mikä taso on kyseessä.

7.3 Tietojen ja taitojen integroituminen kokonaisuudeksi

Kephart (1968; 1971) korostaa oppimisen lähtökohtana sitä, että tieto (laajasti ymmärrettynä) eheytyy kokonaisuudeksi. Lapsi oppii yhdistelemään ja jäsentämään tietoa sen ominaisuuksien ja laadun mukaan. Hitaalla oppijalla on yleensä vaikeuksia nimenomaan tässä tiedon yleistämisen alueessa. Lapsi oppii kyllä yksittäisiä tietoja ja taitoja vaikeuksista, mutta hän ei kykene yhdistämään niitä. Koulun opetus voi tällöin jäädä erillisiksi tiedonpaloiksi ilman, että siitä muodostuisi perustavanlaatuisia oppimistapahtumia. Helposti kuitenkin oletetaan integroitumisen tapahtuvan perustiedon avulla itsestään. Kun lapsi oppii että $2 + 2 = 4$, niin hän yleensä kykeneekin vaikeuksista yleistämään saman operaation myös allekkain laskemiseen. Jos lapsella on sen sijaan puutteita integroimisessa, niin $2 + 2 = 4$ on hänelle vain yksittäinen tieto, jota on vaikea laajentaa erimuotoiseen ilmaisuun. Tällaisen lapsen kohdalla ei voi olettaa, että oppimisprosessi etenee, jos hänelle tarjotaan tieto yksittäisinä paloina. Tiedot jäävät hänelle irrallisiksi, eivätkä kunnolla yhdisty perustietoon. Ongelmanratkaisutilanteissa

lapsen täytyy käydä yksitellen kaikki tietonsa läpi, mikä on hidasta ja työlästä. Lapsi saattaa myös irrallisten tietojensa avulla tehdä vääriä, vaikkakin omasta mielestään loogisia päätelmiä. (Kephart 1968, 43-46; Kephart 1971, 49,52.)

Kephartin mukaan ongelmia syntyy jos koulussa tarjotaan tietoa vain käsitteellisellä tasolla ja jos integroimisen taitoa ei opeteta sitä tarvitseville. Omissa opetusohjelmissaan mm. geometriassa ja science-opetuksessa hän pyrki vahvistamaan systemaattista lähestymistä asiakokonaisuuksiin. Opetuksen tasoa Kephart laski niin, että on voitu hyödyntää myös havaintoaluetta ja motorista aluetta tavoitellen tietojen yleistymistä. Kephartin kokemusten mukaan koulutulokkaissa on paljon lapsia, jotka tarvitsevat vielä alempien tasojen huomioimista. (Kephart 1968, 46-47.)

- *Oppimis- ja opettamisvaikeuksista muistuttaa myös tarina Hauki on kala, siinä yksittäinen käsite "hauki", ei yhdisty pelkän hokemisen avulla perustietoon "kala".*

Tietojen yhdistämistä, integroitumista tuetaan lähtemällä liikkeelle yksittäisistä perustiedoista. Käsitteellisellä tasolla perustieto tarkoittaa käsitteellisiä faktoja, havaintotasolla havaintoainesta ja motorisella tasolla yksittäistä motorista taitoa. Nämä yksittäiset perustiedot ja -taidot lapset oppivat yleensä ilman suurempia vaikeuksia, koska niiden vaatima neurologinen prosessi on hyvin yksinkertainen. Kun perustieto on hankittu, voidaan siirtyä seuraavaan vaiheeseen, jossa tarkennetaan ja kehitetään kyseisiä tietoja ja taitoja. (Kephart 1968, 47-48; 1971, 56-57.)

Käytännössä tietojen tarkentaminen merkitsee samantapaisten, mutta ei identtisten oppimiskokemusten runsasta tarjoamista. Tällöin on mahdollista yhdistää tieto samantapaisiin, mutta silti erilaisiin kokemuksiin, jotta lapsi hahmottaa laajan joukon kokemuksia, jotka kuuluvat samaan ryhmään. Tavallisesti lapsi tuottaa vapaassa leikissä erilaisia variaatioita spontaanisti itse ja tekee samalla johtopäätöksiä ja yleistyksiä. Tässä vaiheessa lapsi voi ilmentää oppimisvaikeuksia, mikäli hän ei itse kykene tuottamaan variaatioita, vaan stereotyyppisesti toistaa aina samaa. Lapselle on turvallisempaa toistaa samaa, koska tällöin epäonnistumisen riski on pienempi ja hänellä ei ole integroimiskyvyn tuomaa apua, miten siirtyä eri variaatioon. Tällöin opettajan tehtävä on tarjota ja opettaa lapselle lukuisia erilaisia muuntelun mahdollisuuksia, vaikka se vaatiikin luovuutta ja kekseliäisyyttä opettajalta. (Kephart 1968, 48-51; 1971, 59.)

Luovuuden vaatimuksen ohella vaikeutena on se, että aikuisen logiikalla on vaikea ymmärtää lapsen ajattelua. Lapsi ei välttämättä yhdistä variaatiota perustietoon, vaikka se aikuisesta olisi hyvin yksinkertaista. Ainoa johtolanka lapsen ajatusmaailmaan on hänen käyttäytymisensä ja ilmaisunsa aktiivinen havainnointi. Jos lapsi vaikuttaa varmalta ja siirtyy mielellään uuteen variaatioon, hän on ehkä yhdistänyt edellisen perustietoonsa. Jos lapsi taas epäröi ja hänellä on vaikeuksia suoriutua tehtävästä, niin hänellä voi olla vaikeuksia tiedon integroimisessa. Olennaisinta ei ole oikea lopputulos, vaan se miten tulokseen on päädytty. Tällöin varsinaisen prosessin tarkkaileminen on tarkoituksenmukaisinta. Opettajan on oltava työssään myös joustava, hän ei voi etukäteen tietää miten lapsi prosessoii ja millaisista menetelmistä ja tehtävistä olisi lapselle hyötyä, tarvittaessa on kokeiltava jotain aivan muuta. Luovuus, joustavuus ja havainnoiminen eivät ole helppoja haasteita opettajalle, mutta ne ovat edellytyksiä lapsen tukemiseksi. (Kephart 1971, 59-60; 1968, 51-55.)

Kephart (1968) tuo esille tiedon tarjoamisen eri aistien kautta, jolloin lapsi jolla on vaikeuksia yleistämisessä voi saada tukea joltain toiselta aistikanavalta. Tärkeimmät aistikanavat opetuksessa Kephartin mukaan ovat visuaalinen (näkö), auditiivinen (kuulo), taktilinen (käden toimintaan liittyvä) ja kinesteettinen (kehon toiminta). Jos informaatiota tarjotaan vain yhden kanavan kautta, voi lapsen oppiminen estyä jos hänellä puutteita juuri kyseessä olevan aistin alueella. Esimerkiksi lukemaan oppimisessa käytetään enimmäkseen visuaalista materiaalia. Lapselle jolla on visuaalisia vaikeuksia, olisi syytä tarjota tietoa myös taktuaalis-kinesteettisen kanavan avulla, kuten kuljettamalla sormeja kirjaimia pitkin. (vrt. Montessorimateriaalin hiekkapaperikirjaimet). Sen jälkeen, kun lapsi on oppinut tekemään samasta informaatiosta eri variaatioita, niin perustiedon yleistymistä voidaan vielä tukea tarjoamalla sama tieto eri aistien kautta. Jos vaihdellaan yhtä aikaa sekä tietoa että aistikanavia, tietoa on edelleen vaikea integroida, koska se säilyy yksittäisinä paloina ilman yhteyttä muihin. Variaatioina toimivat nyt tiedon erilaiset esitykset eri aistien kautta, mutta itse tiedon tulee pysyä samana. Tällöin lapsi voi hahmottaa niiden kuuluvan samaan kokonaisuuteen. Yleistämisen kannalta on myös tärkeää, että eri aistien avulla hankitaan tietoa samanaikaisesti. Jos lapsi esimerkiksi tunnustelee neliötä käsillään, on tärkeää, että hän myös samalla katsoo sitä, jolloin sama tieto vahvistuu ja yhdistyy eri aistien kautta. Lapsi saavuttaa integraation, yleistämisen tason, kun hän

yhdistää, luokittelee yksittäiset asiat ja muodostaa niiden avulla kokonaiskäsitteitä. (Kephart 1968, 66-69.)

Onnistuneeseen kasvatukseen ja opetukseen sisältyy aina kokonaisuuksien hahmottaminen. Jos oppiminen jää kokoelmaksi yksittäisiä tietoja, se ei auta lasta muuntamaan ja hyödyntämään tietoa erilaisissa tilanteissa. Kephart (1968) muistuttaa, että lapsen kehityksen tukeminen tulee ottaa huomioon myös havaintotasolla ja motorisella tasolla yhtä hyvin kuin käsitteiden tasollakin. Tällöin tuetaan kunkin lapsen potentiaalisia kehittymismahdollisuuksia. (Kephart 1968, 76-78.) Asioiden yhdistymistä kokonaisuuksiksi tulee tukea kaikilla lapsilla, ei pelkästään oppimisvaikeuksisilla.

8 TOIMINTAMATERIAALI

8.1 Mitä toimintamateriaalit ovat?

Lindgren (1990, 90) on ottanut käyttöön sanan toimintamateriaali pohjaten englanninkielisiin termeihin ”manipulative materials”, ”manipulatives” ja ”hands-on-materials”. Manipulatiivisesta materiaalista puhutaan myös jonkin verran, mutta sana toimintamateriaali on jo vakiintunut käytäntöön.

Ilmavirta (1995) määrittelee toimintamateriaalin sellaisiksi oppilaskohtaisiksi välineiksi ja materiaaleiksi, joita voi havainnoida useilla aisteilla ja siirrellä ja järjestellä uudelleen. Erotuksena havaintovälineeseen, jota lähinnä opettaja käyttää havainnollistamiseen, toimintamateriaali mahdollistaa oppilaan, oppilasparin, tai –ryhmän työskentelyn konkreettisella materiaalilla. Materiaali johtaa oppilasta matemaattisen ajatteluun, antaa monipuolisia kokemuksia opittavasta asiasta ja tarjoaa erilaisia ajattelumalleja. Toimintamateriaalin tehtävä on helpottaa lapsen omien kokemusten ja ajattelumallien siirtämistä kohti formaalimpaa matematiikkaa. Esimerkkejä toimintamateriaalista ovat mm. toisiinsa kiinnittyvät multilinkkuutiopalikat, laskuhelmet, nopat, pelit, kymmenjärjestelmävälineet ja numerokortit. (Ilmavirta 1995, 61-62.)

Lindgren (1990) lainaa Wieben määritelmää toimintamateriaalista. Sen mukaan toimintamateriaali tarkoittaa matematiikassa symbolisten tai abstraktien esitysten fyysistä mallia. Malli auttaa hahmottamaan jotain sellaista, mitä ei voida suoraan havainnoida. Konkreettinen, kuvallinen, verbaalinen tai symbolinen malli on aina yksinkertaistus, jonka tarkoitus on selvittää käsitteen tai operaation oleellisia piirteitä. Fyysiset mallit ovat kolmiulotteisia materiaaleja, jotka esittävät tiettyjä matematiikan ideoita tai symboleja. (Lindgren 1990, 90.)

Toimintamateriaalin avulla opitaan uusia käsitteitä ja samalla myös puhumaan matematiikkaa. Ilmavirta (1995) tähdentää, että toimintamateriaalin käytössä ei saa rajoittua vain opitun kertaamiseen, koska materiaalin merkitys käsitteenmuodostusvaiheessa, uutta asiaa opeteltaessa, auttaa selkiyttämään ja todella ”käsittämään” uutta asiaa. Alkuopetuksessa tällaisella materiaalin käytöllä on jo pitkät perinteet, mutta ylempillä luokilla konkreettinen ja toiminnallinen vaihe on jäänyt

vähemmälle huomiolle. Symbolitasolla toimittaessa on vaarana mekaaninen toistaminen, joka voi kyllä automatisoitua, mutta todellinen ymmärtäminen mahdollistaa myös soveltamisen. (Ilmavirta 1995, 61- 62.)

Lindgren (1990) ja Ilmavirta (1995) muistuttavat, että toimintamateriaalien käytössä on tärkeää huomioida se, että materiaalia ei käytetä itsetarkoituksena vaan työvälineenä kohti ymmärtävää oppimista. Opettajan tehtävä on tuoda selvästi esille konkreettisen materiaalin ja matemaattisen ajattelun yhteys. (Lindgren 1990, 92; Ilmavirta 1995, 63.) Toimintamateriaalien käyttöön sisältyy piilo-opetussuunnitelman mahdollisuus, jolloin lapsi voi oppia aivan muuta kuin mitä opettaja tavoittelee. Materiaalin käyttö ei ainakaan tutustumisen jälkeen saa jäädä ”puuhastelun” tasolle, vaan siihen on kytkettävä matemaattinen ajattelu. Käsitteiden avulla opitaan uusia käsitteitä ja ajattelu voi kehittyä. Yksi keino johdatella ajatusta matemaattisille poluille on mielekkäiden tehtävien käyttäminen, pelkkä materiaali ei itsessään riitä. Tärkeää on myös keskustella mahdollisimman paljon lasten kanssa siitä, mitä he ymmärtävät ja kokevat oppivansa.

Toimintamateriaali ei yksinään ohjaa ajattelun kehittymiseen, vaan se on ainoastaan yksi oppimateriaali muiden rinnalla. Ilmavirran (1990, 63) esille tuomia näkökohtia on hyvä tarkata toimintamateriaaleja käytettäessä:

- Toimintamateriaalit ovat tärkeitä ala-asteen kaikilla luokilla ja niitä käytetään oppikirja- ja vihkotyöskentelyn ohessa.
- Työskentely syventää käsitteiden hallintaa ja johtaa parempiin tuloksiin.
- Lapsen tulee antaa rauhassa tutustua uuteen materiaaliin.
- Samaa materiaalia kannattaa käyttää niin pitkään, että lapsi tottuu siihen ja saa siitä jatkuvan tuen ja mahdollisimman suuren hyödyn.
- Opettajalla on tärkeä rooli välinetyöskentelyssä

Hyviä kotimaisia didaktisia oppaita ja esimerkkejä toiminnallisesta matematiikasta ovat tällä vuosikymmenellä julkaisseet mm. Hannele Ikäheimo ja Erkki Pehkonen (ks. Ikäheimo 1995; 1997, Pehkonen 1993; 1998). Matematiikkaan liittyviä liikunnallisia harjoituksia on kirjassa Esiopetusta liikunnan keinoin (Kokljuschkin 1997). Harrastamme matematiikkaa -kirjoista (Putkonen, Sinnemäki, Raitanen 1992; 1996) saa hyviä ideoita toimintamateriaaleihin, oppimispeleihin ja projekteihin oppitunti-, kerho- ja kotikäytössä. Kirja on suunniteltu lähinnä 9-12 vuotiaille, mutta osaa tehtävistä voi soveltaa alkuopetukseenkin.

8.2 Toimintamateriaalien merkitys oppimiselle

Sowell (1989) on tutkinut toimintamateriaalien merkitystä oppimiselle. Hän analysoi kuudenkymmenen tutkimuksen tuloksia toimintamateriaalien tehokkuudesta matematiikassa. Opiskelijoiden ikä vaihteli varhaiskasvatuksesta aikuisiin. Tulokset osoittivat, että pitkäaikainen konkreettisen materiaalien käyttö paransi sekä matemaattisia saavutuksia, että opiskelijoiden asenteita matematiikkaa kohtaan. Tämän meta-analyysinä tehdyn tutkimuksen avulla ei saatu kuitenkaan vielä selville millainen toimintamateriaali olisi otollisinta kulloiseenkin tilanteeseen. (Sowell 1989, 498, 502-504.)

Myös Lindgrenin (1990, 180) tutkimus vahvisti toimintamateriaalien arvokasta merkitystä oppimiselle. Toisella luokalla toteutettu kymmentuntinen matikkatupakokeilu osoitti, että huolellisesti ja tarkoituksenmukaisesti valitun toimintamateriaalin käyttö edistää selvästi uusien matematiikan käsitteiden sisäistämistä ja hallintaa.

Lindgren (1990, 93) havainnollistaa Brunerin kolmivaiheisen mallin avulla, miten lasta on autettava siirtymään idean yhdestä esitysmuodosta seuraavaan. Ensimmäinen oppimisen taso on toiminnallinen taso, joka tarkoittaa nimenomaan konkreettisen mallin käsittelyä. Seuraavalla ikonisella tasolla hyödynnetään toiminnallisella tasolla luotuja mielikuvia, jolloin lapsen olisi hyvä kuvata toimintaansa myös sanoin. Kolmannella symbolisella tasolla lapsi oppii toimimaan symboleilla mm. luvuilla ja merkeillä.

Konkreettisen oppimateriaalin keskeistä roolia oppimiselle on vahvasti tukenut myös Galperinin (Lindgren 1990; Ikäheimo 1995) teoria ulkoisen materiaalin tarpeellisuudesta. Sen mukaan oppimisessa oleellista on asioiden ja ilmiöiden väliset suhteet ja jokainen henkinen toiminto on ulkoisen aineellisen toiminnan heijastus. Toiminnan tasot tai sisäistämisen asteet ilmentävät muutoksia, joiden kautta ulkoinen toiminta muuttuu sisäiseksi tiedoksi tai ymmärtämiseksi. Galperin nimeää oppimisen viisi vaihetta, joista minkä tahansa vaiheen poisjäänti viivästyttää käsitteen oppimista, mutta eniten vaikeuksia aiheuttaa materiaalisien vaiheiden väliin jättäminen. Oppimisen vaiheet ovat seuraavat:

1. Orientoitumisvaihe, jolla on tärkeä merkitys uuden oppimiselle
2. Materiaalisessa vaiheessa työskennellään konkreettisilla malleilla, jotka toistavat opeteltavan asian ominaisuuksia ja suhteita. Malleina voivat olla konkreettiset välineet, piirroksot, kaaviot tai diagrammit oppilaiden tasosta riippuen.
3. Puhutussa vaiheessa puhe ei ole enää riippuvainen materiaalin läsnäolosta. Puhuminen mahdollistaa abstraktion ja edelleen käsitteen muodostamisen. Galperinin mukaan lasta on kehoitettava puhumaan matematiikkaa ääneen, jotta voidaan tarkistaa mitä lapsi ymmärtää.
4. Sisäisen puheen vaiheessa lapsi puhuu hiljaa itsekseen.
5. Sisäistyneessä vaiheessa toiminnat ovat täysin sisäistyneet ja ajatus on puhetta nopeampi.

(Lindgren 1990, 54-57; Ikäheimo 1995, 12.)

Lindgren (1990, 93) tuo esille Postin korostuksen toimintamateriaalin merkityksestä välittäjänä todellisen maailman ja matematiikan maailman välillä. Konkreettisten mallien symbolisoituminen johdattaa matematiikan maailmaan, jossa voidaan mm. laskemalla tehdä ennusteita, jotka taas tarkistetaan suhteessa todelliseen maailmaan. Todellisen maailman yksinkertaistamisella palataan jälleen konkreettisiin malleihin ja näin kehä jatkuu.

Edellistä näkökulmaa voi osittain rinnastaa myös Kolbin malliin kokemuksellisen oppimisen nelivaiheisesta syklistä. Kolbinkin mallissa kehällä vuorottelevat konkreetin kokemuksen ja abstraktien käsitteiden välinen suhde. Lähtökohtana ovat tässäkin oppijan konkreettiset kokemukset, joita toisessa vaiheessa havainnoidaan ja pohditaan. Seuraavaksi havainnoista pyritään luomaan yleistyksiä ja liitetään ne aiempiin käsitteisiin. Viimeisenä käsityksiä ja ideoita testataan uusissa tilanteissa.

Konkreettisten oppimateriaalien yhtenä merkittävimpänä uranuurtajana voidaan pitää italialaista pedagogia Maria Montessoria. Montessori näki materiaalissa paljon mahdollisuuksia lapsen oppimiselle, ja hän kehitti pitkälle oppimateriaalia myös matemaattisten käsitteiden opiskeluun. (Lindgren 1990, 49.)

Montessori (1988) antoi paljon painoarvoa oppimisympäristölle ja oppimisvälineille. Nämä kaksi tekijää yhdessä opettajan kanssa toimivat lapsen oppimisen tukena. Materiaalin käyttöön kuuluu omatoimisuuden idea; lapsi saa valita ja työskennellä

sellaisella materiaalilla, mikä häntä kulloinkin askarruttaa. Materiaali ei ole vain opettajan apuväline, vaan materiaali ohjaa myös itse lasta. Tämä edellyttää sitä, että välineet mahdollistavat itsenäisen työskentelyn ja että palautteen saa suoraan materiaalista. Virheet ja oppiminen voidaan itse kontrolloida ja samalla materiaali toimii itsessään kannustimena ja palautteen antajana. Jatkuvasti saatavilla olevan materiaalin täytyy johdattaa lasta omaan aktiivisuuteen, joka on olennaisinta oppimisessa ”aktiivisuus on lapsen aktiivisuutta”. Montessori toi esille myös sen välineiden esteettisen merkityksen, että materiaalin tuli viehättää lasta. (Montessori 1988, 101-108.)

Montessorivälineitä käytetään meilläkin erityisesti montessoripainotteisessa opetuksessa. Välineiden hankkimisen ongelmana on niiden kallis hinta, mutta ideoita voi soveltaa muutenkin. Montessoripedagogiikasta löytyy kritiikin aiheitakin, Lindgrenin (1990,175-181) tulokset osoittivat, että opettajan ohjauksella materiaalin valinnassa on tärkeä merkitys, mutta matematiikan opettamiseen ko. pedagogiikasta voi silti saada hyviä ideoita. Välineiden ohella voisi suuntaukseen kuuluvasta järjestelmällisyydestä ottaa mallia. Lapset oppivat jo pienestä pitäen palauttamaan välineet niille varatuille paikoille käytön jälkeen. Tavalliseen koululuokkaan voisi varata ”matematiikkakaapin” tai ” -hyllyn” toimintamateriaaleille.

8.3 Toimintamateriaalien jaottelu

Toimintamateriaaleja voidaan jäsentää erilaisten jaottelujen ja luokittelujen avulla. Materiaaleja voi jaotella niiden käyttötarkoituksen mukaan, sisältöalueiden mukaan tai materiaalin ominaisuuksien mukaan.

Ilmavirta (1995, 65) luokittelee materiaalit karkeasti niiden käyttötarkoituksen mukaan. Ryhmät eivät ole toisiaan poissulkevia, vaan useita välineitä voidaan käyttää eri tarkoituksiin. Ryhmiä on kolme:

- Käsitteenmuodostusta tukevat oppilaskohtaiset materiaalit ja välineet, esimerkiksi palikat, nopat, opetusrahat, tikut, mitat ja pikkuesineet
- Lukutajun ja päässälaskuvalmiuksien kehittämiseen ja opittujen asioiden varmentamiseen sopivat välineet. Välineet voivat olla yksin- ja ryhmätyöskentelyyn soveltuvia pelejä, kuten lauta-, numerokortti-, noppa-, tai

laskin- ja tietokonepelejä. Myös kymmenjärjestelmävälineet ja opetusrahat soveltuvat tähän ryhmään.

- Avoimeen, luovaan työskentelyyn ja tuottamiseen sopivat materiaalit ja välineet. Tähän ryhmään voi kuulua monenlaista materiaalia sanomalehdistä ja pakkauslaatikoista geolautoihin ja tangram-paloihin.

Toimintamateriaalien jaottelulle ei ole muotoutunut mitään erityistä periaatetta, vaan luokituksia on monenlaisia. Toisaalta luokittelu on jossain määrin hankalaakin, koska päällekkäisyyttä on paljon, esimerkiksi Ilmavirran jaottelussa kolmosryhmän materiaaleista monet sopisivat myös ensimmäisen ryhmän käsitteenmuodostukseen.

Tässä työssä jaottelen toimintamateriaalit alkuopetuksen keskeisten sisältöalueiden näkökulmasta. Tämä jaottelu on mielestäni käyttökelpoinen ja selkeä opetuksen suunnittelun kannalta sekä soveltuu kehitysvaiheiden tarkasteluun. Materiaalin käyttötarkoitus esimerkiksi käsitteenmuodostuksen tukeminen tai opitun kertaaminen, tulee ilmi kunkin materiaalin kohdalla.

Toimintamateriaalien valmistamisesta ja esteettisyydestä

Toimintamateriaaleja voi hankkia osittain valmiina sekä valmistaa itse ja oppilaiden kanssa. Materiaalien ideoita voi soveltaa eri sisältöjen opiskeluun ja oppimisleleistä voi tehdä monikäyttöisiä. Pehkoset (1993, 16-18) suosittelevat pelien valmistamisessa otettavan huomioon ainakin seuraavat seikat: pelin koko ja muoto, ulkonäkö ja kestävyys sekä pelin säilyttäminen. Materiaalien valmistamisessa voi hyödyntää kuvaamataidon, teknisten- ja tekstiilitöiden materiaaleja sekä erilaisia pakkausmateriaaleja.

Materiaalin esteettisyys on tärkeä tuki oppimiselle. Varsinkin lapselle, jolle visuaalisuus merkitsee paljon, voi opetettava asia jäädä kauniin materiaalin ja esteettisten kokemusten avulla paremmin mieleen. Toimintamateriaalin esteettisyyttä voi tarkastella sen ominaisuuksien, kuten värien, muodon, valmistusmateriaalien ja kokonaisuuden kannalta. Itse valmistettu materiaali kiehtoo lapsia, esimerkiksi pelilauta johon piirsin aapisen hahmoja ihastutti ensimmäisen luokan oppilaita kovasti ja toi vaihtelua lukemaan opettelemisen menetelmiin. Piirtämisen ja maalaamisen ohella voi käyttää valmiita kuvia lehdistä, lahjapapereista yms. pelilautojen tekoon. Esteettisyydessä on hyvä ottaa huomioon myös materiaalin selkeys hahmottamisen kannalta. Olennaisen

pitää tulla hyvin esiin, jotta mahdollisia hahmotusvaikeuksia omaavalle lapselle ei tuoteta ylimääräisiä vaikeuksia.

9 TOIMINTAMATERIAALIEN ANALYYSI

Toimintamateriaalien analyysissa verrataan materiaalin käyttömahdollisuuksia Kephartin esittämiin kehitysvaiheisiin. Osa toimintamateriaalien käyttöideoista on lainauksia ja sovelluksia valmiista ja tunnetuista harjoituksista ja materiaalista, lainaukset näkyvät lähdeviitteistä. Ilman viitteitä olevat esimerkit ovat omia esityksiäni tai sovellutuksiani joistakin tunnetuista toimintaideoista. Osa materiaalista on yleisesti tunnettua ja käytössä olevaa, jolloin materiaalin käyttötavat ja jotkut harjoitukset ovat yleisesti tunnettuja, eikä liene tarpeellista viitata mihinkään auktoriteettiin tai selvittää idean mahdollista keksijää. - Oleellisinta on kuitenkin motiivi lapsen oppimisen edistämisestä.

Osa-alueiden järjestys on osittain hierarkkinen, esimerkiksi lukukäsitteen ymmärtäminen on edellytys luvuilla operoimiselle ja yhteenlaskeminen kertolaskuille. Sen sijaan kymmenjärjestelmä ja yhteen- ja vähennyslaskut ovat rinnakkaisia ja geometriaa voidaan harjoitella hyvin monella tasolla.

Esittelen kunkin materiaalin kohdalla sen eri käyttömahdollisuuksia luetteloimalla toiminta/ käyttöohjeet helpoimmasta vaikeimpaan kirjaimin *A, B, C*, jne. Kunkin toimintatavan yhteydessä on selvitys, mitä kehitysvaihetta se vastaa ja millä perusteilla. Toimintamateriaalien harjoitukset vaativat lähes kaikki vähintään havaintotiedon käsittelyä, joten ei ole tarpeellista ottaa kahta alinta motorista vaihetta analyysiin mukaan. Tietoa voi aina välittyä alempienkin tiedonvälityskanavien kautta, mutta lähtötason vähimmäisvaatimus on kuitenkin huomioitava. Suluissa olevat numerot kertovat kehitysvaiheen järjestysluvun: Havaintomotorinen vaihe (3), Havaintovaihe (4), Havaintokäsitteellinen vaihe (5), Käsitevaihe (6), Käsitehavainnollinen vaihe (7). Kunkin osa-alueen harjoitusten jälkeen on taulukko, jossa tehtävät ovat rinnastettu Kephartin kehitysvaiheisiin. Mitä useampi rasti taulukossa harjoituksen kohdalla on, sitä monipuolisempi on harjoituskin.

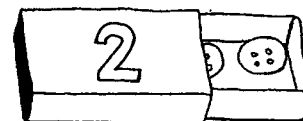
Konstruktivististen oppimisenäkemyksen mukaan opettajan rooli on sekä ohjata oppilaiden työskentelyä että samalla jatkuvasti arvioida millä tasolla lapsi on ja millaisista haasteista olisi hänelle hyötyä. Opettajan tulee opastaa oppilaita alkuun uuden materiaalin tai pelin käytössä, mutta tukea myös pienryhmätyöskentelyä, jotta oppilaat jakaisivat ajatuksiaan. Kaikkien materiaalien kohdalla ääneen puhuminen ja

ajattelu, keskustelu tukevat käsitteiden oppimista. Uutta asiaa opeteltaessa tulee materiaaliin tutustua ensin rauhassa, jotta ei tule yhdellä kerralla liian paljon uutta. Sosiaalisen konstruktivismin mukaisesti vuorovaikutus, eri vaihtoehtojen vertaaminen ja perustelevuus tukevat matemaattisen ajattelun kehittymistä.

9.1 Lukukäsite

Lukukäsitteen oppiminen ei sinänsä ole mikään solmukohta, mutta sitä tarvitaan kaikissa matematiikan osa-alueissa. Lukukäsitteen omaksuminen liittyy olennaisesti matemaattisen ajattelun kehittymiseen ja kehitysvaiheissa eteenpäin pääsemiseen. Tulevissa harjoituksissa vaaditaan lukukäsitteen hallitsemista käsitteelliselle tasolle siirryttäessä, mutta tehtävät eivät kuitenkaan itsessään auta lukukäsitteen oppimisessa. Lukukäsitteen omaksuminen kuuluneekin Kephartin mainitsemiin perustietoihin, joiden oppimisessa lapsilla ei juurikaan ole vaikeuksia. Ilman opettelua lukukäsitettä ei kuitenkaan voi omaksua ja oppimista voi vahvistaa hyödyntämällä aiempien kehitysvaiheiden tiedonhankintatapoja, samoin kuin kirjaimien opettelussakin. Lukukäsite sisältää konkreettisen lukumäärän, lukusanan ja numeromerkinnän ymmärtämisen ulottuvuudet.

Lukumäärien harjoittelua voi luontevasti yhdistää liikuntaan, ”tee kymmenen jännehyppyä, juokse toiseen päähän kaksi/kolme/nolla kertaa”. Numeroita voidaan harjoitella muodostamalla omasta kehosta yksin tai pareittain numeroita, numeroita voidaan kirjoittaa lumihankeen, hiekkaan, sormella ilmaan ja pulpettiin sekä liitutauluun. Tällaisissa harjoituksissa numeroiden muotoja lähestytään kokonaisvaltaisesti, useita aisteja ja tiedonvälitystapoja käyttämällä. Harjoitus jossa kävellään teipistä tai hyppynarusta tehdyn numeron päällä vastaa havaintomotorisen vaiheen (3) valmiuksia, koska siinä liikutaan havainnon mukaan. Lukujonotaitojen harjoituksissa esimerkiksi mittanauhan avulla, tuetaan samalla myös lukukäsitteen sisäistämistä. Seuraavassa muutama esimerkki lukumäärän ja numeron yhdistämisen harjoittelemiseksi.



Pikkurasiat

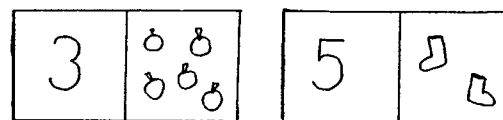
(ks. Ikäheimo ym. 1997, 25)

Materiaali: - Tulitikkurasioita (10 kpl) joiden kanteen merkitään numerot nollasta yhdeksään ja toiselle puolelle rasiaa merkitään numeroa vastaava lukumäärä pisteillä.

- Nappeja tai muita pikkuesineitä

A. Työskennellään yksin tai parin kanssa. Rasioihin laitetaan etiketin mukainen (joko piste- tai numeroetiketti) määrä nappeja ja järjestetään rasiat riviin suuruusjärjestykseen.

Pikkurasiat tukevat erityisesti havaintovaiheen (4) ja havaintokäsitteellisen vaiheen (5) valmiuksia. Pistein merkityn lukumäärän vertaaminen nappien lukumäärään liittyy havaintovaiheeseen, koska tällöin lapsi kykenee vertaamaan samanlaisuuksia. Havaintokäsitteellisessä vaiheessa lukumäärän havaintoon liitetään auditiivinen lukusana ja visuaalinen numero. Lisäksi koskettaminen ja liikeaisti nappien järjestämisessä vahvistavat vielä aiempia havaintomotoriseen vaiheeseen liittyviä (3) valmiuksia. Havaintovaihetta tukee lukumäärän havaitseminen esineiden ja pisteiden avulla. Havaintokäsitteellisessä vaiheessa lukukäsitteeseen liittyy numeron ja lukumäärän yhdistäminen.



Domino

Materiaali: Kartongista valmistetut dominokortit. Kortin toisessa puoliskossa on kuvattu lukumäärä piirroksilla (pisteet, kuviot) ja toisessa puoliskossa on numero.

A. *Dominoa voi pelata yksin tai parin kanssa. Etsitään aina edelliseen korttiin sopiva lukumäärä tai luku, kunnes kaikki kortit on käytetty.*

Domino-tehtävä vahvistaa havaintokäsitteellisen vaiheen (5) valmiuksia, havainnon (lukumäärän) yhdistämistä symboliseen esitykseen (numerot). Havaintomerkintä lukumäärästä tukee luvun käsitteen ymmärtämistä. Numeroiden käyttäminen edellyttää jo jonkinlaista lukukäsitteen hallintaa. Lapset voivat myös itse valmistaa dominokortteja, jolloin lukumäärien piirtäminen on myös hyvää harjoitusta.

TAULUKKO 1. Lukukäsitteharjoituksia vastaavat kehitysvaiheet

Materiaali	3. Hav.mot.	4. Hav.	5. Hav.käs.	6. Käs.	7. Käs.hav.
Pikkurasiat	X	X	X		
Domino			X		

9.2 Lukujonotaidot

Lukujonotaitojen hallitseminen on edellytys kaikille peruslaskutoimituksille. Seuraavissa toimintamateriaaleissa on tavoitteena lukujonon hahmottaminen ja ajatuksellinen liikkuminen lukujonossa.



Rantakivet

(Sovellus pelistä Kilpajuoksu edestakaisin, Ikäheimo, Aalto, Puumalainen 1997, 37.)

- Materiaali:
- Luistamattomia laattoja 11 kpl (tai enemmän), joita pitkin voi kävellä, toisella puolella luvut 0-10 sekä numeroin, että pistein merkittynä. (Pöytäversiossa laatat pahvista tai softiksesta.)
 - Iso superlon-aranoppa (pöytäversiossa tavallinen noppa sekä pelinappuloita ja nappeja tms.)

A. *”Rantakivet” eli laatat laitetaan jonoon ja niissä kuljetaan eri tavoin liikkumalla (tasajalkaa, konkaten jne.). Rantakivet voivat olla yhtenä osana liikuntarataa, johon on liitetty mielikuvia esimerkiksi viidakkopolku.*

Rantakivillä eteneminen kehittää havaintomotorisen vaiheen (3) valmiuksia, koska lapsen täytyy suunnata ja ohjata liikkumistaan näköaistin ja liikeaistin avulla tekemiensä havaintojen mukaisesti. Tämän tehtävän avulla voi ohjata lasta motoriikan kautta hahmottamaan lukujonon perusteita, mikäli lapsi ei ole vielä valmis omaksumaan lukukäsitteitä.

B. *Muuten sama kuin edellinen, mutta kulkemiseen liitetään nyt myös lukujonon luetteleminen ääneen (laattojen numeropuoli ylöspäin). Polkua kuljetaan molempiin suuntiin, jolloin luvut kasvavat tai vähenevät (vrt. hyppynarulla hyppiminen ja hyppyjen laskeminen). Kivillä voidaan hyppiä myös joka toisen yli, jolloin lukujonossakin liikutaan isommilla väleillä. Samalla opetellaan parillisia ja parittomia lukuja.*

Jos lapsi luettelee lukujonoa luettelomaisesti toistamalla/ matkimalla, niin hän suoriutuu tehtävästä havaintovaiheen (4) edellytyksillä, koska se ei vielä edellytä, että lapsi yhdistäisi lukumäärän käsitteen havaintoonsa. Havaintokäsitteellisessä vaiheessa (5) lapsi alkaa ymmärtää käsitteiden sisältöä. Tällöin lapsi kykenee yhdistämään havaintonsa lukujonosta sen kielellisiin vastikkeisiin, eikä lukujonon luetteleminen ole enää pelkkä ”hokema”. Lukujonon luetteleminen järjestyksessä ei silti vaadi kovin vahvaa lukukäsitteen ymmärtämistä. Havainnot ”kivien” määrästä tukevat lapsen käsitteen ymmärtämistä, koska lukumäärän voi aina tarkistaa suhteessa havaintoon. Parillisten ja parittomien lukujen luetteleminen vaatii jo lukujonon syvällisempää ymmärtämistä. Lukujonolla liikutaan pidempiä välejä mikä kehittää käsitevaiheen (6) valmiuksia, koska lukukäsitettä harjoitellaan soveltaen ja lähestytään jo yhteenlaskua.

C. *Rantakivillä liikkumiseen otetaan nyt noppa mukaan ja kilpailu. Voittaja on se joka pääsee kulkemaan kivet edestakaisin vähimmillä heitoilla. Heitoista voidaan pitää kirjaa tukkimiehen tyyliin. Laattojen numeropuoli on käännettynä alaspäin. Siirryttyään kivillä nopan osoittaman silmäluvun verran, lapsen tulee arvata mikä luku on kiven alla.*

Tätä voi pelata myös pöytäversiona, jolloin laattoja voi olla enemmän ja pelialueeksi voidaan valita esimerkiksi 15-45 tai laatoista voidaan valita vain parilliset tai joka viides peliin mukaan (lukualue ja lukujen välit sovitaan yhteisesti). Nyt siirretään pelimerkkejä nopan osoittaman määrän verran ja arvataan mikä luku jää merkin alle. Oikeasta luvun arvaamisesta voidaan antaa nappi tms. palkinnoksi. Pelin voittaa eniten nappeja kerännyt.

Tämä peliversio kehittää lähinnä käsitevaiheen (6) valmiuksia, koska siinä opetellaan sujuvaa liikkumista lukujonossa ja harjoitellaan yhteenlaskua heittojen laskemisessa. Laattojen pistein merkitty lukumäärä tukee vielä myös havaintokäsitteellisen (5) vaiheen havaintovalmiuksia. Vaikka käsite (tässä lukumäärä) ei enää vaadikaan välitöntä havaintoa tuekseen, niin tällaisen pelin avulla on kuitenkin hyvä vahvistaa lukujonon ymmärtämistä konkreettisten havaintojen avulla. Lattiaversiossa visuaalisen havaitsemisen tukena on liikeaisti ja pöytäversiossa pelinappien siirtämisessä myös kosketusaisti. Useiden aistikanavien käyttö samanaikaisesti tukee oppimista.

Mittanauha ja pyykkinaru

(Mittanauhan idea ”Mikä luku on piilossa?”, Ikäheimo ym. 1997, 36.)

Materiaali: mittanauhoja (voidaan tehdä paperisuikaleestakin), pyykkipoikia ja pikkuesineitä

A. Pari tai opettaja keksii ohjeita lukujonossa liikkumiselle ”siirry luvusta viisi, kolme lukua eteenpäin, missä olet nyt?, mikä on kuusi vähemmän kuin kaksikymmentä?” Lapset voivat siirtää pyykkipoikaa tai sormeaa mittanauhalla kyseiseen kohtaan.

Tämän harjoituksen avulla voidaan konkretisoida lukujonoa ja liikkuminen sillä valmistaa samalla ajatuksia kohti yhteen- ja vähennyslaskuja. Harjoitus edellyttää jo lukukäsitteen käyttämistä, joten harjoituksella tuetaan havaintokäsitteellisen (5) ja käsitevaiheen (6) valmiuksia. Havainnot välimatkasta auttavat luomaan sisäistä mielikuvaa lukujonosta ja vievät kehitystä havaintokäsitteellisestä vaiheesta kohti käsitevaihetta. Näissä kehitysvaiheissa oleva lapsi ymmärtää jo ohjeita ja osaa toimia niiden mukaan.

B. Toimitaan pareittain. Toinen parista peittää esimerkiksi kymmenen lukua pyykkipojilla ja toinen päättelee, mitkä luvut ovat piilossa. Oikeasta päätelmästä

saa pikkuesineen. Sovittujen vuoroparien määrän jälkeen katsotaan kummalla on enemmän merkkejä. Vaikeutta saadaan laajentamalla lukualuetta ja peittämällä useita perättäisiä lukuja.

- Pyykkinaru -versiossa kiinnitetään numerolappuja järjestyksessä pyykkipojilla naruun (esimerkiksi 0-15). Pareista tai ryhmästä valitaan ”pitkäkyntinen”, joka poistaa neljä lappua ”yön aikana pyykkinarulta on jälleen hävinnyt pyykkejä”, salapoliisi(t) selvittää mitkä ”turvamerkit” kappaleet on anastettu.

Peitettyjen tai poistettujen lukujen päättelemisen näkyvissä olevien lukujen avulla vaatii lukukäsitteen hallintaa, joka liittyy käsitevaiheeseen (6). Suuremmilla lukualueilla liikkuminen tuo haastetta tehtävään ja opettaa lasta hahmottamaan lukujen suhteita, montako lukua mahtuu tiettyjen lukujen välille, paljonko on yksi vähemmän tai enemmän jne. Näkyvissä olevat luvut tukevat kuitenkin vielä havaintoja, joille käsitteiden ymmärtäminen perustuu.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21									30
									40
									50
									60
									70
									80
									90
									100

Kävelyretki

(Matikkatuvan materiaalia ”Kävelyretki”, Lindgren 1990, 101.)

Materiaali: Pelilauta (kartongista) jossa on 10 kertaa 10 ruudukko (saatavissa myös muovisena multilink-välineenä). Ruutuihin merkitään luvut 1-100 suuruusjärjestyksessä alkaen vasemmalta ylhäältä, luvut kulkevat riveittäin vasemmalta oikealle. Pelimerkit, noppa ja tehtäväkortit (opettajan keksimät).

- A. Peliä pelataan siirtämällä pelimerkkiä nopan osoittaman lukumäärän verran. Lähtöruutuna on ”portti” 1. Voittaja on kävelyretken nopeimmiten suorittanut. Jos osuu ympyröityyn lukuun, täytyy toimia tehtäväkortin mukaisesti. Esimerkiksi ”Päiset hetkeksi pyörän jopparille ja saat siirtyä kymmenen askelta eteenpäin eli yhden rivin alaspäin”, ...joudut palaamaan kymmenen askelta taaksepäin eli yhden

rivin ylemmäs”, ”...pääset kaksitoista askelta eteenpäin eli yhden rivin alemmas ja kaksi askelta oikealle”.

Kävelyretki-pelin tavoitteena on, että lapsi hahmottaa sata-ruudukon ja liikkumisen siinä kymmeneltä toiselle. Tämän ruudukon avulla on hyvä auttaa lasta visualisoimaan lukujonoa 1-100 yhdellä silmäyksellä, kun ensin on ymmärretty lukujono mittanauhasta. Visuaalinen hahmottaminen voi auttaa lasta formalisoimaan lukujonoa myös mielessään. Mikäli opettaja tai joku muu lukee tehtäväkortit, Kävelyretken voi suorittaa havaintokäsitteellisen ja käsitevaiheen valmiuksilla (5-6), koska peli edellyttää lukujen ymmärtämistä. Havainnot ruudukosta tukevat lukukäsitteen ja lukujonon sisäistämistä. Numeroilla merkitty noppa on vaativampi ja edellyttää lukumäärän ja numeron yhdistämistä (käsitevaihe). Jos lapsi osaa itse lukea, hän on käsitehavainnollisessa vaiheessa (7).

TAULUKKO 2. Lukujonoharjoituksia vastaavat kehitysvaiheet

Materiaali		3. Hav.mot.	4. Hav.	5. Hav.käs.	6. Käs.	7. Käs.hav.
Rantakivet	A	X				
	B		X	X		
	C			X	X	
Mittanauha	A			X	X	
	B				X	
Kävelyretki					X	X

Lukujonotaitoja harjoittava toimintamateriaali liittyy helposti kehitysvaiheiden ylempiin vaiheisiin, koska luvuilla operointi edellyttää käsitteiden ymmärtämistä. Käsitteisiin siirtymisen tulee pohjata kuitenkin lapsen kokemuksiin aiemmista vaiheista ja edellyttäen, että lapsi on valmis siirtymään ylempiin vaiheisiin. Jos lapsi tarvitsee vielä motorista tukea havainnoilleen on, Rantakivien helpoimpien tehtävien tyylistä harjoituksista hyötyä. Erilaisten jonojen ja sarjojen hahmottaminen liikkumisen avulla (visuaalinen ja kinesteettinen havaitseminen) ja lukujonon ”loruttaminen” (auditiivinen aistiminen) tukee myöhemmin lukujonon sisäistämistä. Käsitteisiin siirryttäessä

toimintamateriaaleista on kuitenkin vielä hyötyä, koska ne auttavat lukujonoon liittyvien mielikuvien luomisessa abstraktin ajattelun pohjaksi. Pelkkä paperille merkitty lukujono ei tarjoa tietoa niin monen aistin välityksellä, kuin siirtyminen itse lukujonossa tai pelimerkin siirtäminen tarjoavat.

9.3 Kymmenjärjestelmä

Kymmenjärjestelmän keskeiset tekijät ovat numeromerkit nollasta yhdeksään, sekä paikan merkitys numeron arvoon nähden. Kymmenjärjestelmää voi kuvata kymmenjärjestelmävälineillä konkreettisesti, miten ykköset muodostavat kymmenen, kymmenet sadan jne. Niiden avulla on myös hyvä havainnollistaa paikkajärjestelmää. Valmiita kymmenjärjestelmävälineitä ovat mm. muoviset 10-välineet (liite), joissa yksikköä kuvaa kuutiosenttimetrin kokoinen kuutio ja kymmen-sauva koostuu kymmenestä yksiköstä, satalevy kymmenestä sauvasta ja tuhatkuutio kymmenestä satalevystä. Montessorimateriaaleihin kuuluvat Kultaiset helmet, joissa ykköstä kuvaa yksi helmi. Tavallisista helmistä voi tehdä myös itse 10-välineitä, varsinkin ykkösiä ja kymmeniä (kahdenvärisiä puuhelmiä saa kätevästi helmistä tehdyistä autonistuimista), samoin voi käyttää myös multilik-kuutioita apuna. Paikkajärjestelmää (tuhannet, sadat, kymmenet, ykköset) voi kuvata opetusrahojenkin avulla. Kymmenjärjestelmävälineitä on hyvä käyttää allekkainlaskujen opettelussa, jolloin on mahdollista toimia ensin konkreettisella materiaalilla ennen numeroilla operoimista (ks. Ikäheimo ym. 1997, 62-64; Lindgren 1990, 104).



Sydänparit

Tavoitteena on oppia luvut joiden summa on kymmenen, ns. sydänparit. Vinkkejä seuraaviin harjoituksiin on otettu Sydänpareista (Ikäheimo ym.1997, 40-41) ja Muistipelistä (Lindgren 1990, 97.)

Materiaali: Kymmenen munan kananmunakennoja, muniksi esimerkiksi kahden värisiä massapalloja, helmiä tai multilink-kuutioita, itse valmistettuja lukukortteja

A. Työskennellään pareittain munakennoilla ja korteilla joihin merkitty luvut 1-10 toiselle puolelle numeroin ja toiselle puolelle pistein. Toinen parista asettaa munakennoon kahdenvärisiä ”munia”, niin että kenno täyttyy (esimerkiksi neljä sinistä ja kuusi punaista). Pari etsii lukumääriä vastaavat kaksi pistekorttia. Munien laittaja voi samalla keksiä myös tarinan, miksi laittoi neljä ja sitten kuusi munaa.

B. Sama kuin A, mutta käytetään korttien numeropuolta

Munakennojen avulla on hyvä havainnollistaa kantalukua kymmenen. Tehtävä tukee havaintokäsiteellisiä (5) valmiuksia, koska havaintoihin liitetään niiden kielellinen vastine. B-kohta kehittää numeroiden käytön avulla myös käsitevaiheen (6) valmiuksia. Työskentely tukee kymmenjärjestelmän oppimista visuaalisten, taktiilisten ja audittiivisten aistien avulla. Kymmenjärjestelmän oppiminen auttaa matemaattisen ajattelun kehittymistä eteenpäin. Kennon kaksi riviä auttavat erottamaan viiden ja kymmenen sarjat, joihin lukumäärien suhteita on hyvä verrata (”seitsemän on kaksi enemmän kuin viisi ja kolme vähemmän kuin kymmenen”). Apukysymyksillä opettaja voi auttaa lasta huomaamaan tämän.

C. Muistipeli sydänparikorteilla. Korteissa luvut yhdestä kymmeneen. Pelataan tavallisen muistipelin säännöillä niin, että luvut joiden summa on kymmenen ovat pareja. Lukualuetta voi myös laajentaa kahteenkymmeneen, jolloin pareiksi voidaan sopia täydet kymmenet muodostavat parit. Tällöin harjoitellaan jo yhteenlaskua ja kymmenylitystä.

Sydänpari-muistipeli vaatii numeroiden ja lukumäärän ymmärtämistä, sekä yhteenlaskua, jolloin se kehittää käsitevaiheeseen (6) ja myös käsitehavainnolliseen vaiheeseen (7) liittyviä laskutaitoja. Sydänparien oppiminen tukee laskustrategioiden kehittymistä, joista on hyötyä mm. päässälaskuissa. Muistipelit, jossa ei tarvitse osata lukukäsitettä vaan ainoastaan havaita visuaalisia eroja, liittyvät havaintovaiheen tasoon (4). Muistipeli innostaa lapsia pelaamaan ja harjoitusta tulee paljon, koska peliä on seurattava koko ajan tarkasti.

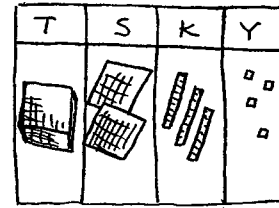
Niputuspelejä

Kuuluu Dienesin (Lindgren 1990, 71) toimintamateriaaleihin, josta on kehitetty erilaisia sovelluksia (ks. Lindgren 1990, 95 ja Ikäheimo ym. 1997, 46.)

Materiaali: runsaasti askartelu- tai jäätelötikkuja, kuminauhoja ja noppa

- A. *Peliä pelataan pienissä ryhmissä. Pistenoppaa heitetään vuorotellen ja kukin ottaa vuorollaan nopan osoittaman määrän tikkuja. Kun tikkuja on kymmenen, ne niputetaan kuminauhan avulla ”kymmenen nipuksi”. Voittaja voi olla se jolla on ensimmäisenä kolme kymmenen nippua tai se jolla on eniten nippuja sovitun kierrosmäärän pelaamisen jälkeen. Tikkuja voidaan kerätä myös alustalle, johon on piirretty kymmenen tikun paikkaa, siitä on helppo katsoa, paljonko vielä puuttuu kymmenestä.*
- B. *Peliä voidaan pelata myös vähentämällä. Pelaajilla on aluksi yhtä paljon tikkuja esimerkiksi 50 l. viisi kymmenen nippua. Tikkuja vähennetään omalla vuorolla nopan osoittama määrä. Voittaja voi olla se, jolla on vähiten tikkuja neljän kierroksen jälkeen, tai se jonka tikut ensimmäisenä loppuvat. Haastetta saadaan lisää ottamalla käyttöön kaksi noppaa, joiden summa vähennetään tikkuista. Nopissa voi olla pisteiden sijasta myös numerot.*

Niputuspelejä avulla on helppoa hahmottaa lukujen suhteita, mistä luvuista kymmenen voi koostua. Samalla opitaan sujuvasti kymmenylityksiä ja -alituksia. Ryhmässä pelatessa lasten on luonnollista keskustella ääneen tehtävistä, mikä rikastuttaa omaa ajattelua. Auditiivisen aistin ohella, pelissä tarvitaan visuaalista ja taktiillista aistia. Helpoimmassa pelitavassa (A) on runsaasti tarjolla konkreettisia havaintoja, kuten nopan pisteet, tikut ja alustapaperi. Kehitysvaiheista peli tukee havaintokäsitteellisen vaiheen (5) valmiuksia, mm. kykyä verrata havaintojaan käsitteisiin. Vaikeammassa pelitavassa (numeronopat, useampi noppa) edellytetään jo lukukäsitteen vahvaa hallintaa ja yhteenlaskua tikkujen avulla tai päässä laskuina. Tällöin voidaan puhua käsitteellisen vaiheen (6) ja käsitteellisen vaiheen (7) valmiuksista. Lindgrenin (1990, 158) matikkatuvassa Niputuspelejä oli osoittautunut kaikista suosituimmaksi materiaaliksi.



Paikkaharjoitukset

(C-kohdan peli-idea Tavoitteena 1000; Putkonen ym. 1992, 50.)

Materiaali: Kymmenjärjestelmävälineet ja alusta (kartongista) jossa merkittynä lukuyksiköt (tuhannet, sadat, kymmenet, ykköset), sekä numerokortit ja noppia.

- A. *Työskennellään pareittain. Heitetään kaksi noppaa (eriväriset) joista toinen ilmoittaa kymmenet ja toinen ykköset. Toinen pareista muodostaa luvun 10-välineillä alustalle ja toinen tekee luvun numerolapuista, molemmat lukevat luvun ääneen. Ilman noppia voidaan työskennellä myös niin, että toinen pari tekee 10-välineillä jonkin luvun alustalle, ja toinen pari ilmoittaa sen numeroilla. – Tai päinvastoin numeroluku tehdään 10-välineillä. Tällä tavoin voidaan edetä suuriinkin lukuihin ottaen sadat ja tuhannet mukaan. 10-välineistä voi kokeilla muodostaa lukuja silmät kiinni, pelkän tuntoaistin perusteella.*
- B. *Tiilitalo (Mukaelma Lasitalosta, Ikäheimo ym. 1997, 50). Pareittain rakennetaan muovisista 10-välineistä talo, jossa yksi ykköskuutio on yksi tiili. Arvioidaan tiilien määrä, kun talo on valmis. Tarkistetaan tiilien määrä alustan avulla laskemalla, eli puretaan tiilet oikeille kohdille alustalle. Merkitään luku myös lukukorteilla.*
- C. *Tavoitteena tuhat -peliä pelataan pareittain. Molemmilla oma alusta ja 10-välineistä 10 sataa, 10 kymmentä ja 10 ykköstä. -Jos 10-välineitä ei ole riittävästi voidaan niiden kuvat myös monistaa. Ensimmäisellä heittovuorolla määräytyy lukuyksikkö, jota pelin aikana lisätään. Jos nopassa on lukumäärä 1 tai 2 lisätään ykkösiä, jos 3 tai 4 lisätään kymmeniä, jos 5 tai 6 lisätään satoja. Noppaa heitetään kaksi kertaa omalla vuorolla, kun ykkösiä on kymmenen, ne vaihdetaan kymmensauvaan ja 10 kymmensauvaa vaihdetaan aina satalevyyn. Tai vaihtoehtoisesti voidaan sopia, että vihreä noppa kertoo paljonko ykkösiä lisätään ja punainen noppa paljonko kymmeniä lisätään. Voittaja on se joka saa ensin 10 sataa eli tuhat.*

Näiden tehtävien avulla lapsi voi hankkia itselleen selvän käsityksen suuristakin luvuista. A-tehtävässä ei vielä harjoitella yhteenlaskua eikä kymmenylityksiä, vaan pelkästään lukuyksiköiden paikkajärjestelmää. Lapsia kiehtovat suuret luvut ja 10-välineiden avulla niihin voi tutustua jo varhain. Aisteista tulevat käyttöön visuaalinen, auditiivinen ja taktiilinen. Välineitä koskettamalla saa käsityksen suhderoista, joka on havainnollisempaa kuin pelkkä katsominen olisi. 10-välineet tukevat lapsen lukumäärän käsitteen yleistymistä, niin että hän voi ymmärtää mitä suuretkin luvut todella merkitsevät, miten ne rakentuvat. Eri aistien välittämät havainnot tukevat eritavoin oppivien oppimista. Luvuilla ja numeroilla operoimisen johdosta nämä tehtävät liittyvät havaintokäsitteellisen (5) ja käsitevaiheen (6) valmiuksiin.

B-kohdan tiilitalon rakentaminen vahvistaa samalla myös alempia vaiheiden motorisia valmiuksia ja havaintotaitoja. Tiilitalon tekeminen on mahdollista jo havaintomotorisen vaiheen (3) valmiuksilla (toimintaa havaintojen pohjalta), jos siihen ei liity laskemista. Jos lapsi on esimerkiksi havaintovaiheessa (4) niin hän voisi hyvin tehdä talo-tehtävää yhdessä sellaisen parin kanssa, joka on jo lähempänä käsitevaihetta (6). Tällöin lapsi voisi työskennellä omalla tasollaan ja hän tutustuisi 10-välineisiin ja saisi jo hieman ideoita siitä mitä 10-välineet merkitsevät. C-kohdan peli auttaa hahmottamaan kuinka lukuyksikkö muodostuu aina kymmenestä pienemmästä lukuyksiköstä. Tästä on apua myöhemmin allekkainlaskuissakin kun lainataan ja laitetaan muistiin.

Paikkapeli

(Lindgren 1990, 100)

- Materiaali:
- jokaiselle pelaajalle pelialusta (ks. Paikkaharjoitukset edellä) joihin on merkitty paikat lukuyksiköille (sadat, kymmenet, ykköset), 3-4 pelaajaa.
 - numerolappuja laatikossa, joissa numerot 1-9, jokaista numeroa kolme kappaletta

A. Pelin alussa sovitaan tavoitellaanko mahdollisimman suurta vai pientä lukua. Numerolaput sekoitetaan ja laitetaan nurinpäin laatikkoon. Pelaajat ottavat vuorollaan laatikosta kortin ja laittavat sen haluamalleen kohdalle alustalle. Numerokorttia ei saa tämän jälkeen siirtää. Kun luvut ovat kolminumeroisia ne luetaan ja voittaja selviää.

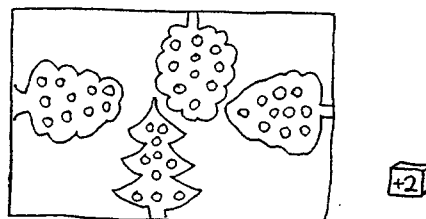
Peli tukee käsitevaiheeseen (6) liittyvää paikkajärjestelmän sisäistämistä visuaalisesti merkittyjen paikkojen avulla. Kun lapsi alkaa ymmärtää numeroiden merkitystä, niin tämäntapainen peli, jossa käsitteitä tukevat vielä jonkinlaiset havainnot, auttavat lasta siirtymään käsitevaiheeseen alemmilla tasoilla. Pelin avulla on hyvä vahvistaa lukuyksiköiden paikkojen merkitystä ja muistamista, koska pelin idea perustuu paikkajärjestelmän ymmärtämiseen. Tässä pelissä ei vielä harjoitella laskemista, vaan se sopii hyvin pelattavaksi 10-välineisiin perehtymisen jälkeen ja ennen allekkain laskemista. Jännitystä nopeaan peliin tuo se, että ei voi tietää etukäteen mitä kortteja saa, vaan on otettava riskejä.

TAULUKKO 3. Kymmenjärjestelmäharjoituksia vastaavat kehitysvaiheet

Materiaali	3. Hav.mot	4. Hav.	5. Hav.käs	6. Käs.	7. Käs.hav.
Sydänparit	A		X	X	
	B		X	X	
	C			X	X
Niputuspelejä	A		X		
	B			X	X
Paikkaharjoitukset	(X)	(X)	X	X	
Paikkapeli				X	

Kymmenjärjestelmän harjoittelussa edellytetään numeron ja lukumäärän yhdistämisen hallintaa. Tällöin kymmenjärjestelmää harjoiteltaessa lapsen on oltava jo käsitteellisten vaiheiden tasolla. Harjoitukset voivat silti tukea joitain aiempien vaiheidenkin taitoja, kuten Paikkaharjoituksissa. Lukujonon sujuva hallitseminen tukee kymmenjärjestelmän ymmärtämistä. Varsinkin Sydänpareissa, Niputuspeleissä ja Paikkaharjoituksissa on lukukäsitteen tukena toimintamateriaalia, jolla voi tukea siirtymistä havaintovaiheesta käsitteiden tasolle. Käsitteet koostuvat mielikuvista ja kokemuksista, jotka perustuvat havaintoihin.

9.4 Yhteen- ja vähennyslaskut

Satupuun

Materiaali: - Kartongista tehty pelilauta, jonka jokaiselle sivulle on piirretty yksi puu. Puihin on merkitty paikat kymmenelle hedelmälle. Hedelmä-merkit voi valmistaa softiksesta.

- Kymmenen korttia joista kuudessa on + merkki ja neljässä kortissa - merkki, sekä noppia

A. Pelataan pareittain, jolloin molemmilla on kaksi puuta. Heitetään pistenoppaa vuorotellen ja kerätään omiin puihin hedelmiä nopan osoittaman määrän mukaan. Voittaja on se, kenen puut ovat ensimmäisenä täynnä. Peli voidaan pelata myös toisinpäin l. keräämällä hedelmät puusta pois, tai pidentää peliä niin, että ensin laitetaan hedelmät puihin ja sitten kerätään pois.

Peli-idea on samanlainen kuin tavallisissa noppapelilaudoissa. Satupuun avulla opetellaan lisäämään ja vähentämään ilman vaatimusta lukukäsitteen vahvasta hallinnasta. Peliä voi pelata vertaamalla havaintoja nopan pisteistä ja hedelmistä, jolloin peli tukee havaintovaiheen (4) visuaalista havaitsemista ja vertailemista. Havaintovaiheessa lapsi oppii katsomalla vertamaan samankaltaisuuksia ja eroja. Aisteista ovat käytössä lähinnä visuaalinen ja taktiilinen. Koskettaminen auttaa pääsemistä havaintovaiheeseen alemmista vaiheista. Kosketusaisti tukee havaintoja, vaikka ei ole enää ehdoton edellytys havaintojen tekemiselle.

B. Neljä pelaajaa, joista jokainen yrittää saada omaan puuhunsa kaikki kymmenen hedelmää. Sekoitetaan + ja - kortit ja käännetään aina kierroksen alussa uusi kortti, jonka mukaan hedelmiä joko lisätään tai vähennetään. Voittaja on se, joka saa ensimmäisenä puunsa täyteen.

C. Neljä pelaajaa ja sama peli-idea, mutta nyt tarvitaan vain noppa, johon on merkitty (valkoisten pikkutarrojen avulla) numerot, joiden edessä on – tai + : +4, +2, +1, -3, -2, -1. Toimitaan nopan osoittaman luvun mukaisesti. Erikoisnoppa tuo peliin jännitystä, koska ei voi tietää etukäteen saako lisätä vai joutuuko vähentämään.

B-versiossa otetaan jo mukaan symboliset merkit + ja -, jotka liittyvät havaintokäsitteellisen vaiheen (5) valmiuksiin. Peli opettaa mitä merkit tarkoittavat, kummassa lisätään ja kummassa vähennetään. Konkreettinen lisääminen ja vähentäminen tukevat ymmärtämistä. C-versiossa vaaditaan jo numeroiden ja lukumäärän yhdistämistä, jolloin tuetaan käsitevaiheen (6) taitoja. Satupuu soveltuu opetukseen silloin kun opetellaan yhteen- ja vähennyslaskumerkkien merkitystä.

Matikkatarinat

Materiaali: Munakennoja ja ”munia” pikkuesineistä.

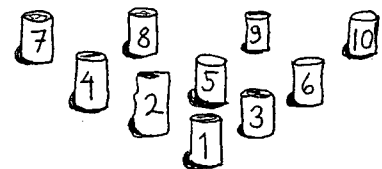
A. Pareittain tai pienryhmissä yksi kertoo vuorollaan tarinan, tai jatkaa jatkokertomusta, jossa pitää välillä lisätä ja välillä vähentää esineitä. ”Aamulla parkkipaikalta lähti ensin kaksi autoa, sitten...”. Lopuksi tarkistetaan saivatko kaikki saman lopputuloksen.

Tässä leikissä lähestytään yhteen- ja vähennyslaskuja lapselle tutulla tavalla, laittamalla lisää tai ottamalla pois jotain konkreettista. Tehtävä kehittää havaintokäsitteellisen vaiheen (5) taitoja, mm. harjoittamalla lukukäsitteen ja ohjeiden ymmärtämistä ja niiden mukaan toimimista. Materiaali vahvistaa käsitteiden ymmärtämistä ja ohjeiden kuunteleminen kehittää keskittymiskykyä. Tarinoiden keksiminen tukee matemaattista ajattelua, kun täytyy miettiä millaisia ”siirtoja” tekee ja kun vertaillaan tuloksia toisten kanssa. Aistikanavat ovat monipuolisesti käytössä, koska tarvitaan visuaalista, auditiiivista ja taktiilista aistia. Tehtävä kertoo hyvin myös opettajalle lapsen tasosta.

B. Kahden munakennon ja noppien (piste- tai numeronopat) avulla lasketaan laskuja alueella 0-20 (Idea Laske kahteenkymmeneen -tehtävästä, Ikäheimo ym. 1997, 44). Laskuille voidaan keksiä tarinat ja omat tai kaverin laskut voidaan tarvittaessa tarkistaa laskimella. Laskuja voi muodostaa eri tavoin noppia heittämällä:

- ”Heitä yhtä noppaa, kirjoita lukumäärä paperille ja laita saman verran munia kennoon. Paljonko pitää lisätä, että tulee yhteensä kaksikymmentä? Merkitse koko lasku paperille (esimerkiksi $5+15=20$).”
- ”Heitä kahta noppaa, ota niiden summan verran munia ja laske paljonko pitää lisätä, että tulee kaksikymmentä, kirjoita lasku” ($6+2+12=20$ tai $8+12=20$).
- ”Laita kennot täyteen munia. Vähennä kennosta kahden nopan osoittama määrä ja kirjoita siitä lasku” (esimerkiksi $20-4-6=10$).

Laskeminen edellyttää lukukäsitteen vahvaa ymmärtämistä ja luvun merkitsemistä numeroilla. Tehtävillä tuetaan laskutaitoja käsitevaiheen ja käsittehavainnollisen vaiheen tasoilla (6-7). Munakennojen avulla laskeminen auttaa opettelemaan kymmenylityksiä ja samalla tukee kymmenjärjestelmän ymmärtämistä. Pistenoppien avulla havaintojen vertaaminen lukumäärästä on helpompaa kuin numeronopilla. Näissä tehtävissä opetellaan tuottamaan havaittavissa olevat laskut symbolisin merkein. Vaikka käsitevaiheessa välittömät havainnot eivät ole enää välttämättömiä, niin välineet kuitenkin tukevat vielä alempiin vaiheisiin (4-5) liittyviä havaintoalumiuksia ja vahvistavat lukukäsitteiden ymmärtämistä.



Pölkyn heitto

- Materiaali:
- kymmenen puista ”pölkkyä” n. 15 cm korkeita (esimerkiksi haloista sahattuja), pölkkyihin merkitään selvästi luvut yhdestä kymmeneen, sekä yksi pölkky heittämistä varten
 - muistiinpanovälineet
 - pelaajia ei kannata olla kovin montaa (n. 4-5), jotta odottelua ei tule liikaa
- A. Pölkkyt järjestetään avorivistöön, niin että 1. rivillä on yksi pölkky, 2. rivillä kaksi, 3. rivillä kolme ja 4. rivillä neljä pölkkyä. Pölkkyjä heitetään sovitun etäisyyden päästä heittokalikalla kumoon, yksi heitto omalla vuorolla. Kaatuneet pölkkyt nostetaan

kaatumiskohdalle pystyyn seuraavaa heittäjää varten. Heittäjä käy aina heittonsa jälkeen kirjurin luona laskemassa itse saamansa kaadot yhteen. Voittaja on se joka saa ensimmäisenä yhteensä kymmenen kaatoa.

B. Lukualuetta saadaan suuremmaksi kun lasketaan pisteet pölkkyihin merkittyjen lukujen mukaan, ensimmäisenä kaksikymmentä saanut voittaa.

C. Lisää haastetta sekä heittämiseen, että laskemiseen tulee, kun muutetaan pisteiden laskutapaa. Tavoitteena on saada yhteensä kaksikymmentäviisi (tai muu sovittu luku) pistettä kasaan. Jos onnistuu kaatamaan vain yhden pölkyn saa siihen merkityn luvun verran pisteitä, jos taas useampi pölkky kaatuu saa niin monta pistettä kuin on kaatuneita pölkkyjäkin. Tuloksistaan kukin pitää itse lukea kirjurin luona. Ensimmäisenä 25 saanut voittaa. Vaikeutta voidaan lisätä vielä niin, että 25 pitää saavuttaa tasapistein, jos menee sen yli pisteet putoavat yhdeksääntoista.

Pölkyn heitto on ulkopeli, jonka voi liittää toimintaradan yhdeksi pisteeksi tai pelata ryhmissä sellaisenaan. Peli voi innostaa lapsia turnauksiin välitunneillakin, koska se sopii kaiken ikäisille seurapeliksi. Peli vahvistaa taitoja havaintomotorisesta vaiheesta (3) lähtien, sillä se perustuu havaintojen ohjaamaan motoriseen toimintaan. Havaintovaiheen (4) silmän ja käden yhteistyötä ja tilan ja suunnan havaitsemista pölkyn heitto harjoittaa myös hyvin. Pisteiden laskeminen tuo lukukäsitteet peliin mukaan, jolloin tarvitaan havaintokäsitteellisen (5) ja käsitevaiheen (6) valmiuksia. Eritasoiset lapset voivat kuitenkin osallistua peliin, koska kirjuri voi tarvittaessa auttaa pisteiden laskussa. Aisteista ovat käytössä erityisesti kinesteettinen, visuaalinen ja taktiilinen aisti. Tässä pelissä laskeminen ei ole itsetarkoitus, eikä myöskään pelin keskeisin tekijä, mutta sitä tarvitaan luonnollisena, mielekkäänä osana peliä. Peli on mukava ja hyödyllinen ”välipala” syksyllä ja keväällä yhteenlaskun opettelun tai kertaamisen yhteydessä.

Matematiikkagolf

(Yhdeksän reiän matematiikkagolf, Putkonen ym. 1992, 27.)

Materiaali: kaksi oktaedrinoppaa ja kortit (liite 2) joihin toiseen merkitään pelaajien tulokset ja toisesta selviää kulloisellakin ”reiällä” vaadittava tulos,

esimerkiksi suurempi tai pienempi kuin 7, voidaan merkitä myös $<$, $>$, $=$ merkeillä. 2-4 pelaajaa.

A. Jokaisella reiällä heitetään kahta noppaa omalla vuorolla niin monta kertaa, että saa vaaditun tuloksen. Yritysten määrä merkitään taulukkoon (onnistunut yritys pystyviivalla, epäonnistunut poikkiviivalla). Yritysten enimmäismäärä kullakin reiällä on 7, jollei seitsemännelläkään onnistu merkitään taulukkoon 8. Lopuksi lasketaan kunkin pelaajan yritysten summa ja jolla summa on pienin voittaa. Hyvä mielikuva ja muistisääntö $<$ ja $>$ merkeille on, että "nokka" on aina auki kohti suurempaan, koska lintu syö mieluummin isomman makupalan ja "piikki pistää pienempään".

Matematiikkagolfissa harjoitellaan lukujen vertaamista, suurempi kuin, pienempi kuin, yhtäsuuri kuin. Lukujen vertaaminen vaatii lukukäsitteen ymmärtämistä ja pelissä harjoitellaan myös yhteen- ja vähennyslaskuja pienellä alueella. Pelissä tarvitaan myös käsitteitä summa ja erotus, jotka ovat hyviä yhteistä keskustelua varten, käsitteitä joilla voi "puhua" matematiikkaa. Käsitteillä työskentelyn vuoksi (numeronopat, kirjalliset ohjeet) peli vastaa käsite- ja käsitehavainnollisen (6-7) vaiheiden valmiuksiin. Yhdeksän reiän matkalla ehtii tapahtua monenlaisia käännteitä, jotka tuovat peliin jännitystä ja samalla harjoitusta ja vuorovaikutusta tulee runsaasti. Pelin voi myös muuntaa tavallisilla nopilla pelattaviksi, kun tarkistaa vaadittavat tulokset sopiviksi.

TAULUKKO 4. Yhteen- ja vähennyslaskuharjoituksia vastaavat kehitysvaiheet

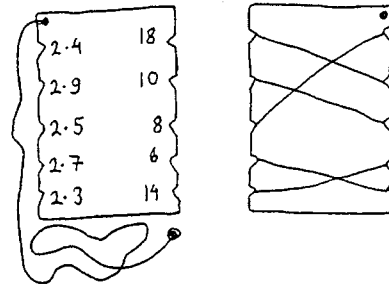
Materiaali	3. Hav.mot.	4. Hav.	5. Hav.käs.	6. Käs.	7. Käs.hav.
Satupuu	A	X			
	B		X		
	C			X	
Matikkatarinat	A		X		
	B			X	X
Pölkyn heitto	(X)	(X)	X	X	
Matematiikkagolf				X	X

Laskemiseen liittyvä lukukäsite edellyttää yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä käsitteellisten vaiheiden tasoa. Pölkyn heitossa tuetaan kyllä myös havainto- ja havaintomotorisen vaiheiden taitoja, mutta niillä ei ole suoraa yhteyttä laskemiseen. Satupuussa ja tarinoiden keksimisessä lisäämiseen ja vähentämiseen liittyy konkreettinen toiminto, joten ne sopivat hyvin laskemisen opetteluun alkuvaiheeseen. Pölkyn heitto ja Matematiikkagolf soveltuvat taas paremmin kertaamiseen.

9.5 Kertolasku

Kertolaskuissa on Ikäheimon (1995, 81) mukaan syytä lähteä liikkeelle konkreettisesti tutuista esimerkeistä ja opetella ensin ymmärtämään mitä ”kertaa” tarkoittaa. Harjoituksissa konkreettisuus voi tarkoittaa erilaisia esineitä, ”ota kaksi kolmen multilinkin pötköä” ja ryhmien muodostamisessa voidaan tehdä huomioita ”nyt meillä on viisi neljän oppilaan ryhmää”. Ikäheimo (1995, 81) suosittelee kertolaskuissa ensin 2:n, 10:n, 5:n ja 1:n ja 0:n kertotaulujen opettelemisen automaation tasolle, ja vasta näiden jälkeen siirtymään 3:n ja 4:n kertotauluihin.

Kertotaulujen opettelemisen tueksi on hyvä tehdä seinälle kertojunia tai kertotikapuut, joista voi palauttaa mieleen ja tarkistaa kertotauluja ja tehdä kysymyksiä (ks. Ikäheimo 1995, 85-87). Kahden kertotaulun kertojuna: veturissa ei ole matkustajia, joten siihen merkitään nolla ja pyöriin 0 ja 2, matkustajat tulevat aina pareittain, ensimmäiseen vaunuun merkitään kaksi matkustajaa ja pyöriin 1 ja 2 (yksi kertaa kaksi on kaksi), toiseen vaunuun 4 ja pyöriin 2 ja 2 jne. Tällaiset havaintotaulut auttavat visuaalisesti hahmottamaan kertotaulua ja erilaiset mielikuvat tukevat oppimista ja muistamista. Kertojunan ideaa on hyvä opetella niin, että on konkreettiset esineet joilla harjoitellaan, esimerkiksi multilink-kuutiot kuvaamassa matkustajia.



Langan pujotus

Materiaali: Pahvialustoja, joiden vasempaan reunaan on merkitty kertolaskuja ja oikeaan reunaan vastauksia. Laskujen ja vastauksien kohdalle reunaan on tehty pieni lovi. Ensimmäisen laskun kohdalla ylhäällä on kiinni lanka.

A. *Laskulle etsitään oikea vastaus oikeasta reunasta ja viedään lanka vastauksen loveen. Sitten lanka viedään alustan takakautta seuraavan laskun loveen ja etsitään jälleen sille vastaus. Näin edetään kaikki laskut järjestyksessä, ylhäältä alaspäin. Takapuolelle katsotaan vasta kun kaikki laskut on laskettu. Taakse on piirretty viivat oikeille ratkaisuille, jos kaikki ovat oikein niin lanka peittää viivat, jos taas on virheitä ne erottuvat.*

Tämä peli soveltuu kertotaulujen kertaamiseen ja tuo vaihtelua paperilla laskemiselle. Materiaalissa ei ole enää havaintoja tukevia aineksia, vaan se edellyttää päässä laskemista. Tällöin kehitetään käsite-käsitehavainnollisten vaiheiden (6-7) matemaattisia taitoja. Pelin avulla lapsi voi itsenäisesti tarkistaa ja korjata suorituksiaan montessori-materiaalin tyyliä. Palautteen saa suoraan pelistä. Langan pujotus-alustat käyvät esimerkiksi peruskertotaulujen 2, 5 ja 10 kertaamiseen. Yhtä hyvin idea toimii myös muissa peruslaskutoimituksissa lähtien aina lukumäärän ja sitä vastaavan numeron yhdistämisestä. Aisteista ovat käytössä visuaalinen ja taktiilinen.

Kertojuoksu

(Mukailtu Muistatko vielä -leikistä, Ikäheimo ym. 1997, 67.)

Materiaali: - multilink-kuutioita (tms. pikkuesineitä, pihalla vaikka kiviä tai käpyjä), matematiikan vihot, kynät ja kertolaskukortteja

A. *Kertojuoksu toteutetaan liikuntasalissa tai hyvällä säällä ulkona. Toisessa päässä salia on multilink-kuutioita ja niin monta numerolappua järjestyksessä kuin oppilaitakin, toisessa päässä matematiikan vihot. Oppilaat menevät numerokortin*

luokse ja luvan saatuaan kääntävät laskukortin oikein päin ja rakentavat kertolaskun multilink-kuutioilla, esimerkiksi kaksi kertaa kolme eli kaksi eriväristä kolmen palikan pötköä, tai pihalla kolme käpyä kahden hiekkaan piirretyn kuvion sisällä. Kun saa laskun muodostettua voi mennä vihon luo ja kirjoittaa allekkain numerot laskuja varten. Opettaja kerää laskukortit pois. Kertojuoksu alkaa, kaikki etenevät samaan suuntaan ja käyvät katsomassa yhden kertolaskun mallin, palaavat vihon luo ja kirjoittavat laskun vihkoon oikealle kohdalle. Näin edetään jokainen lasku. Nopeimmat juoksijat/ laskijat voivat alkaa jo laskea laskujen tuloja saatuaan kaikki laskut haettua. Lopuksi tarkistetaan tulokset (luokassa) vertaamalla keskenään tai opettajan antamaan tuloslistaan.

Tässä kertojuoksussa on integroitu liikunnan (sukulaviesti) ja matematiikan aineksista yhteisharjoitus. Kertolaskujen mallintamista on hyvä harjoitella jo ennen tätä leikkiä, jotta kaikki ei ole uutta. Toimintaidean ymmärtäminenkin vaatii ensimmäisellä kerralla ohjeiden tarkkaa kuuntelua ja muistamista. Kertojuoksussa on aineksia monesta kehitysvaiheesta, vaikka laskut harjoittavat käsitevaiheeseen (6) ja käsittehavainnolliseen vaiheeseen (7) liittyviä laskutaitoja. Aiemmista vaiheista kertojuoksu vahvistaa mm. havaintomotorisen vaiheen (3) liikkeiden kontrolloimisen taitoja havaintojen perusteella (tilan ja muiden liikkujien huomioiminen), havaintovaiheen (4) visuaalisen vertailun taitoja (kertolaskujen konkreettiset mallit), sekä havaintokäsitteellisen vaiheen (5) käsitteiden ymmärtämistä havaintojen pohjalta (ohjeet, lukukäsite). Harjoituksessa ovat käytössä lähinnä visuaalinen, taktillinen ja kinesteettinen aistikanava. Useampien aistien käytön ja toiminnallisuuden lisäksi, kertojuoksu on mukavaa vaihtelua niin matematiikkaan kuin liikuntaankin, koska se ei suosi vain jomman kumman taitoja. Levottomalle lapselle, jonka on vaikea keskittyä pidempään paikallaan, tällainen toiminnan ja keskittymisen nopea vaihtelu voi olla tervetullutta.

Kertojuoksun voi tehdä kilpailumuotoisenakin jos ryhmä on siihen valmis. Jos joukossa on kuitenkin joku, jonka laskemista kilpaileminen voi haitata tai ahdistaa, niin kilpaileminen pitää jättää pois. Kilpailuihin, joissa menestyminen riippuu nopeasta laskutaidosta, on hyvä suhtautua varovaisesti. Matematiikan harjoittelussa ei saa olla kiire, eikä laskunopeuden tule olla ensisijainen päämäärä, vaan ymmärtämisen.

Kertopeli

(Vinkkejä peliin otettu Afrikan Tähti –pelistä sekä Keksi lasku –pelistä, Pehkonen & Pehkonen 1993, 23)

Materiaali: Kartongille piirretty pelilauta (useampia reittejä aloituksesta maaliin), noppa, pelinappuloita (2-4 pelaajaa) ja tehtäväkortit joissa on kertolaskutehtävä sanallisena.

A. Peli etenee tavallisen noppa-lautapelin tapaan. Tehtäväkortit sekoitetaan ja asetetaan laudalle merkityille kohdille ylösalaisin. Korttien kohdalle tultaessa, toimitaan kortin ohjeen mukaisesti. Kun pelimerkki päätyy kohtaan joissa on merkitty jokin luku, täytyy keksiä kertolasku, jonka tulo on luku on. Laskut tarkistetaan laskimella, jos vastaa väärin joutuu jättämään yhden heittokierroksen väliin. Yhdessä pelikortissa on merkki, jonka löydyttyä ensimmäisenä maaliin tai lähtöön ehtinyt voittaa. Merkin löytäjän ei enää tarvitse suorittaa matkan varrelle osuvia tehtäviä, mutta muiden pitää ne suorittaa.

Tämäkin peli soveltuu kertotaulujen mieleenpainamiseen ja kertaamiseen, jolloin se kehittää käsitevaiheen (6) ja käsitehavainnollisen vaiheen taitoja (7). Jos lapset pelaavat itsenäisesti, niin tehtäväkorttien lukeminen edellyttää käsitehavainnollista vaihetta (7). Pelilautaan kannattaa keksiä joku juoni esimerkiksi merellä purjehtivat laivat etsivät aarretta ja matkalla voi tapahtua mitä vain, tai vaikka kummitustalo, jossa täytyy etsiä avainta ulospääsyä varten. Merkkikortin etsiminen tuo peliin jännitystä ja innostaa pelaamaan. Kun tehtäväkohtia on tiheässä, tulee harjoitustakin enemmän. Aisteista ovat käytössä visuaalinen ja taktiilinen, työskentely perustuu käsitteiden ymmärtämiselle.

Aartenmetsästys

(Korhonen & Kuuva 1997, 73; Putkonen, Sinnemäki & Raitanen ym. 1996, 47-52.)

Materiaali: Pelilauta, hirviö- ja aarrekortit (12 kpl), kaksi noppaa, pelinappulat, munakello

A. Pelilaudan ruutuihin laitetaan nurinpäin aarrekortti, jossa on kertolaskutehtävä. Aarrekortin päälle astetaan hirviökortti. Hirviö vartioi aarretta, jota pelaajat tavoittelevat. Munakello asetetaan soimaan 15 minuutin päähän pelin

aloittamisesta. Pelimerkkejä siirretään nopan osoittaman silmäluvun verran. Ruutuun päästessään pelaaja pelaaja kääntää ensin hirviökortin, jolloin alkaa taistelu aarteesta. Pelaaja heittää noppaa ja kertoo saamansa silmäluvun harjoiteltavan kertotaulun luvulla esimerkiksi viidellä. Toista noppaa ei heitetä ollenkaan vaan siinä on koko ajan näkyvissä kertoja. Saatu tulo on pelaajan ”voima”. Jos tulo on suurempi kuin hirviökortissa oleva luku, pelaaja voittaa hirviön. Jos voimat ovat yhtäsuuret, taistellaan heti uudestaan. Jos pelaaja häviää hirviölle, hänen on paettava seuraavalla heittovuorolla ruudusta. Jos pelaaja voittaa hirviön ja sen jälkeen laskee aarrekorttinsa oikein, hän saa sekä aarre- että hirviökortin itselleen. Voittaja on se, jolla on peliajan loppuessa eniten kortteja. Ilman ajan ottoa peli loppuu sitten, kun kaikki hirviöt on voitettu.

Aartenmetsästyksessä ja edellisessä Kertopelissä on samoja jännityksen elementtejä. Aartenmetsästyksessä soveltuu hyvin opitun syventämiseen ja vahvistamiseen. Peli tukee käsite- ja käsittehavainnollisten vaiheiden (6-7) laskutaitoja, koska pelissä harjoitellaan päässä laskutaitoja. Tässä pelissä juoni on niin vahva ja innostava, että se pitää yllä pelaajien mielenkiintoa. Korhonen ja Kuuva (1997) ovat käyttäneet peliä toisen luokan kertotaulupelien kokeilussa. He toteavat Aartenmetsästyksen olleen sekä oppilaiden että tutkijoiden mielestä kaikkein kiinnostavin peli 23 pelin joukosta. Peli oli kehittänyt myös päättelytaitoja, kun pelissä piti pyrkiä mahdollisimman lyhyitä reittejä aarteiden luokse.

TAULUKKO 5. Kertolaskuharjoituksia vastaavat kehitysvaiheet

Materiaali	3. Hav.mot.	4. Hav.	5. Hav.käs.	6. Käs.	7. Käs.hav.
Langan pujotus				X	X
Kertojuoksu	(X)	(X)	(X)	X	
Kertopeli				X	X
Aartenmetsästyks				X	X

Kertolaskujen opetteleminen edellyttää lukukäsitteiden vahvaa ymmärtämistä ja yhteen- ja vähennyslaskujen hallitsemista. Kertolaskujen harjoittelu multilinkeillä liittyy

havaintokäsitteellisen vaiheen (5) taitoihin, ”ota kaksi kertaa kolme kuutiota”. Kun kertolaskuihin liitetään numeroilla merkitseminen, niin lähestytään käsitevaiheen (6) valmiuksia. Konkreettisten laskuvälineiden käyttö ohella vahvistaa kuitenkin edelleen lukukäsitteen sekä laskujen ymmärtämistä. Kertojuoksussa tuetaan kertotaulujen opettelun ohella alempiakin vaiheita, joskaan ei suoraan matemaattisten valmiuksien kannalta. Motoriikkaan ja havaitsemiseen liittyvät taidot ovat silti pohja myöhemmille taidoille.

Erilaiset mielikuvat ja kertotaulun laskeminen sormien avulla (esim. Magne 1996, 7; Ikäheimo 1995, 84) voivat olla hyödyllisiä joillekin lapsille. Magnen (1996) kertoma tarina yhdeksän kertotaulusta jäänee myös hyvin mieleen ja kenties antaa samalla esteettisen kokemuksen luvuista (liite 3).

9.6 Geometria

Geometria on alue, jossa geometrian kappaleita on välttämätöntä kuvata konkreettisin mallein. Paperilla voi esittää ainoastaan kuvia kolmiulotteisista kappaleista. Geometriaa on hyvä lähestyä lapsille tutuista asioista, erilaisia pakkausmateriaaleja tarkastelemalla, ympäristöä havainnoimalla ja multilinkeillä ja muilla palikoilla rakentamalla. Tutuista materiaaleista voidaan mm. etsiä ja nimetä muotoja, luokitella ja laskea sivuja ja kulmia. Geometrisia muotoja on hyvä käyttää myös askartelussa, kuten satu- tai seikkailulinnan teossa. Geometriaan on helppo liittää alempienkin vaiheiden motoriikkaan ja havaintoihin liittyviä valmiuksia.

Kuviokulku

(Kohdat A ja B Kephartin esittämistä harjoituksista, Kephart 1968, 110-111.)

Materiaali: teippiä, jolla merkitään lattiaan geometrisia muotoja (ympyrä, neliö, kolmio, suorakulmio) ja liitutaulu

A. Lapset kävelevät valitsemaansa kuviota pitkin, musiikki voi soida taustalla. Musiikin pysähtyessä (tai muu äänimerkki) opettaja näyttää taululle piirrettyjä samoja kuvioita yksi kerrallaan ja kysyy ”kuka käveli tällaista pitkin”, tai lapset voivat itse käydä näyttämässä mikä on samanlainen. Vaihdetaan seuraavaan kuvioon.

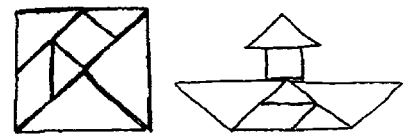
Vapaassa työskentelyssä joko motoriikka tai havainnot voivat ohjata työskentelyä, jolloin vahvistetaan motorishavainnollisia tai havaintomotorisia taitoja (2-3). Motorinen työskentely ja kosketusaistit tukevat keskeisesti havaintojen tekemistä.

B. Mallin mukaan työskentely. Malli voi olla parin tekemänä toisella geolaudalla, pistepaperilla piirrettynä tai kalvolla. ”Tee samanlainen”.

Visuaalisen mallin toistaminen liittyy havaintovaiheen (4) taitoihin. Visuaalinen muisti kehittyy niin, että lapsi vähitellen vastaanottaa havaintoja ilman motorista tukea. Lapsen ei enää ole tarpeellista kokeilla käsin toisen tekemää mallia, esimerkiksi laskea siitä nauvoja käsin tunnustelemalla.

C. Liitetään kuvioihin niiden kielellinen vastine, kuten kolmio, suorakulmio, nelikulmio ja neliö. Voidaan työskennellä pareittain keskustellen ja tehtäviä keksien. ”Minkä nimisiä/ muotoisia nämä kuviot ovat?”, ”Muodosta kolmio, jonka sisällä on vain yksi piste (naula).” ”Tee neliö, jonka sisällä on kaksi kolmiota”. ”Tee talo, jossa käytät neljää suorakulmiota, kahta neliötä ja yhtä kolmiota.”

C-kohdan tehtävät vahvistavat havaintokäsitteelliseen ja käsitevaiheeseen (5-6) liittyvää käsitteiden ymmärtämistä havaintojen avulla. Ohjeiden mukaan tehtävä käsitteiden muuntaminen havaintotasolle tukee käsitteiden vahvaa hallitsemista, vaikka välitön havainto ei enää olisikaan ehdoton. Harjoituksen avulla opettajan on hyvä seurata, kuinka hyvin oppilas ymmärtää käsitteet. Kirjoitetut ohjeet tukevat myös käsitehavainnollisen vaiheen (7) lukemisen harjoittelua.

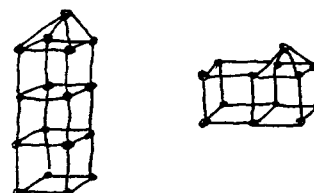


Tangramit

Materiaali: Tangram-palat (softiksesta), valmiita kuva-alustoja (oppikirjoista, oppikirjojen oheismateriaaleista, oppimateriaaliyrityksistä), alustoissa on erilaisia kuvioita, joiden ääri viivojen sisään mahtuvat kaikki seitsemän palaa.

- A. *Tangrammeista muodostetaan erilaisia kuvioita, esimerkiksi suorakulmio ja erilaisia hahmoja. Esitellään hahmoja kaverille. Pareittain voidaan antaa tehtäviä toiselle esimerkiksi ”tee kissa”.*
- B. *Valmiille alustoille (alustoja voi monistaa, liimata kartongille, värittää ja suojata kontaktimuovilla) muodostetaan tangrammeista kuvioita, niin että kaikki palat tulevat käyttöön ja palat peittävät kuvion koko pinnan.*

Työskentely tangrammeilla kehittää erityisesti havaintovaiheeseen (4) liittyvää visuaalista havaitsemista. Vapaa työskentely A-kohdassa vahvistaa myös havaintomotorista vaihetta (3), koska paloja siirretään visuaalisten havaintojen pohjalta. Alustojen käyttäminen kehittää hyvin muotojen ja tilan (pinta-alan) suhteiden hahmottamista. Tehtävät eivät ole mitenkään ”helppoja palapelejä”, vaan vaativat eri ratkaisujen kokeilemistä aikuiseltakin. Visuaalinen havaitseminen kehittyy tehtävien mukana. Osaan kuvioista voi tehdä muutaman apuviivan, jolloin saadaan eritasoisia alustoja ja voi aloittaa helpommilla. Tangrammeja voi käyttää myös muotojen nimeämisessä, jolloin siirrytään seuraavalle havaintokäsitteelliselle vaiheelle (5). Aisteista ovat käytössä lähinnä visuaalinen ja taktiilinen.



Tikut ja herneet

Materiaali: yön yli lionneita herneitä ja cocktail-tikkuja runsaasti

- A. *Herneiden avulla tikuista voi rakentaa erilaisia geometrisiä muotoja kolmiulotteisesti. Työskentelyn voi aloittaa vapaalla tutustumisella materiaaliin ja sitten siirtyä ohjeiden mukaan työskentelyyn: ”tee kaksi toisiinsa liittyvää nelikulmiota”, ”rakenna talo, mitä muotoja käytit?”. Materiaali innostaa lapsia rakentamaan suuriakin rakennelmia, joten vapaa työskentely on mieluista. Lapset voivat esitellä valmiit rakennelmat ja kertoa mitä geometrisiä muotoja siitä löytyy ja kuinka monta.*

Vapaa työskentely sellaisenaan havaintojen ohjaamana liittyy havaintomotoriseen vaiheeseen (3) ja taas mallin mukaan työskentely kehittää havaintovaiheen (4) visuaalisen havaitsemisen taitoja. Mallien tekeminen tikuista ja herneistä vahvistaa

käsitystä siitä, miten kolmiulotteiset kappaleet muodostuvat ja miten eri kappaleet eroavat toisistaan. Mallien ”läpinäkyvyys” kehittää tilantajua ja syvyyssulottuvuuden hahmottamista. Tikuista ja herneistä voidaan tehdä ensin myös tasokuvioita esimerkiksi kolmioita, joista sitten yhdistämällä saadaan kappaleita. Käsitteiden mukaan tuominen nostaa toiminnan havaintokäsitteelliselle tasolle (5). Kappaleiden avulla voidaan selventää miten eroavat toisistaan esimerkiksi suorakulmainen särmiö ja neliö. Aisteista ovat käytössä visuaalinen ja taktilinen.

TAULUKKO 6. Geometrian harjoituksia vastaavat kehitysvaiheet

Materiaali	2. Mot.hav.	3. Hav.mot.	4. Hav.	5. Hav.käs.	6. Käs.	7. Käs.hav.
Kuviokulku	A, B	X	X			
	C			X		
Geolauta	A X	X				
	B		X			
	C			X	X	(X)
Tangrammit	A	X	X			
	B		X	X		
Tikut ja herneet		X	X	X		

Geometriaa voidaan lähestyä usealla tiedonvälittymisen tasolla, koska abstraktit käsitteet eivät ole välttämättömiä. Geometria perustuu nähtävään, konkreettiseen materiaaliin, jolloin sitä on mahdollista tutkiakin motoriikan ja havaintojen kautta, ennen käsitteiden mukaan tuomista. Toimintamateriaaleista geolauta mahdollistaa kaikista monitasoisimman työskentelyn, koska sillä voi tukea valmiuksia motorishavainnolliselta tasolta aina käsitteellisiin vaiheisiin. Geolaudan ominaisuuksia voi verrata hyvän lelun kriteeriin, lelu kasvaa ja kehittyy lapsen mukana. Myös opetuskäytössä tällainen materiaali on käyttökelpoinen, koska eriyttämistä voi tehdä samalla materiaalilla työskenneltäessä.

9.7 Synteesi

Kephartin kehitysvaiheteorian valossa voidaan sanoa, että matematiikan perusasioiden opettelussa vaaditaan varhain käsitteiden, erityisesti lukukäsitteen oppimista. Tämä käsitteen käytön vaatimus nosti suurimman osan harjoituksistakin ylempien kehitysvaiheiden (5-7) valmiuksien tasolle. Ainoastaan geometrian osa-alueeseen löytyi helpommin myös alempiin kehitysvaiheisiin liittyviä tehtäviä. Alempia kehitysvaiheita voi tukea erityisesti liikunnan ja motoriikan näkökulmasta, mutta matematiikan abstraktien käsitteiden vaatimaa tasoa ei voi laskea kovin alas. Jos lapsella ei ole vielä edellytyksiä käsitteelliseen työskentelyyn, on vahvistettava hänen havaitsemiseen ja motoriikkaan liittyviä kokemuksia. Vapaa työskentely toimintamateriaaleilla tapahtuu kyllä kehitysvaiheiden alemmilla tasoilla (2-4), mutta tavoitteellisen ja matemaattisen harjoittelun mukana tulevat käsitteet pian mukaan. Jos lapsella on soveltamisessa ongelmia, ne ilmentävät Kephartin mukaan siitä, että käsitteillä ei ole vahvaa pohjaa käytännön kokemuksista.

Materiaalien vastaavuus tiettyyn kehitysvaiheeseen herättää kysymyksen. *Edellyttääkö* materiaaliin liittyvä tehtävä, että lapsi on jo kyseisessä vaiheessa vai *tuetaanko* tehtävällä ko. kehitysvaiheen taitoja? Lapsen työskentelyn havainnoiminen voi kertoa kuinka hän hallitsee tehtävän, ratkaiseeko hän ongelmaa ensimmäistä kertaa, vai sujuuko se jo varmasti. Esimerkiksi havaintokäsitteellistä vaihetta vastaava tehtävä edellyttää lapselta sitä, että hän hallitsee edellisen havaintovaiheen hyvin ja on jo valmis siirtymään havaintokäsitteelliseen vaiheeseen. Tällöin havaintokäsitteellisen vaiheen tehtävä tukee kehityksen eteenpäin menemistä. Kysymyksen voi ratkaista sillä, että tietyn kehitysvaiheen edellyttäminen merkitsee sitä, että lapsi on valmis siirtymään tälle kehitysvaiheelle, jolloin materiaali tukee tämän uuden kehitysvaiheen taitojen omaksumista ja vakiintumista. Eri kehitysvaiheisiin liittyvät tehtävät joko tukevat tai edellyttävät tiettyjen taitojen hallintaa riippuen lapsen kehitystasosta.

Opetuksen suunnittelun kannalta toimintamateriaaleja voi tarkastella kahdesta näkökulmasta. Materiaalit jotka tukevat uuden käsitteen oppimista sekä materiaalit, jotka soveltuvat opitun syventämiseen. Materiaalit joilla voidaan esittää käsitteitä konkreettisesti, ovat erinomaisia uuden asian opetteluun alkuopetuksessa. Materiaalien avulla lapsen ajattelu pääsee kehittymään kohti käsitteellisempiä tasoja. Esimerkiksi Geolaudan C-tehtävässä siirrytään konkreettisesta ilmaisusta abstraktiin käsitteeseen ja

päinvastoin. Kolbin esittämä kokemuksellinen oppiminen perustuu juuri tähän kokemuksen ja abstraktin ymmärtämisen väliseen suhteeseen ja vuorotteluun. Tässä työssä esiteltyistä materiaaleista voi suurinta osaa käyttää sekä uuden asian opetteluun että sen syventämiseen ja kertaamiseen. Ainoastaan kymmenjärjestelmän Paikkapeli, yhteen- ja vähennyslaskuista Pölkyn heitto ja Matematiikkagolf, sekä kertolaskujen tehtävät sopivat vain opitun syventämiseen.

Syventämiseen ja kertaamiseen soveltuvat toimintamateriaalit tarjoavat vaihtelevia ja toiminnallisia työtapoja opiskeluun. Erilaiset oppimispelit motivoivat ja tuovat iloa oppimiseen. Useisiin materiaaleihin liittyy leikin- ja pelinomaista jännitystä, joka kiehtoo ihmistä. Toiminnan sekä esteettisyyden mukanaan tuoma elämyksellisyys tukee kokonaisvaltaista oppimista.

Toimintamateriaalit tarjoavat hyvän mahdollisuuden pari- ja ryhmätyöskentelyyn, mikä osaltaan tukee matemaattista ajattelua vuorovaikutuksen avulla. Parityöskentelyssä lasten on mahdollista päästä aktiivisesti osallistumaan ja työstämään vertaistoverin kanssa erilaisia haasteita. Jokaisesta eri osa-alueiden materiaaleista löytyy joitakin paritehtäviä. Yksilötyöskentelyn mahdollistavia materiaaleja on lukukäsitteen, kertolaskujen ja geometrian yhteydessä. Niiden avulla opetusta voi myös eriyttää ja porrastaa. Kehitysvaiheisiin nähden monipuolisia, eritasoista työskentelyä tarjoavia materiaaleja ei ollut kovin runsaasti tarjolla. Suurin osa esiteltyistä materiaaleista esittää kyllä vähintään kahteen kehitysvaiheeseen sopivia harjoituksia, mutta jotkut harjoittivat vain yhden kehitysvaiheen valmiuksia. Monipuolinen materiaali antaisi mahdollisuuksia eriyttämiseen, koska eritasoiset lapset voisivat työskennellä sillä yhtä aikaa. Tämä olisi hyvä asia luokkaopetuksen näkökulmasta. Toisaalta tietyn tasoista harjoittelua mahdollistava materiaali voi kuitenkin olla erinomainen juuri kyseisen taidon opetteluun, esimerkiksi lukukäsitteessä Domino ja kymmenjärjestelmässä Paikkapeli. Toimintamateriaaleja ei aina ole mahdollista eikä tarpeellistakaan hankkia niin paljon, että kaikki voisivat työskennellä niillä yhtä aikaa. Työskentelyä voidaan tehdä pienryhmissä muiden työtapojen ohella tai ns. matematiikkaratana, jolloin eri pisteissä on eri materiaaleja ja tehtäviä.

Materiaalia voi käyttää myös opettajan arvioinnin tukena. Opettaja voi havainnoida miten lapsi työskentelee tiettyjen kehitysvaiheiden valmiuksia vaativalla materiaalilla. Materiaalien parissa voi tarkkailla mm., osaako lapsi soveltaa käsitettä käytännön

tasolla ja päinvastoin. Tehtävien tasoa on muutettava arvioinnin pohjalta lapselle sopivaksi, ei liian vaikeaksi, mutta kehitystä eteenpäin vieväksi. Arvioinnissa tulee välttää kuitenkin yksittäisistä tiedoista tehtäviä johtopäätöksiä, jos lapsi suoriutuu jostain Kephartin teorian havaintokäsitteellisen vaiheen tasoisesta tehtävästä, se ei merkitse vielä, että lapsi hallitsee kyseisen tason kokonaan. Lapsen systemaattinen arviointi auttaa opettajaa oppilaantuntemuksessa, vahvan konstruktivismin mukaisen ”tapauskertomuksen” muodostamisessa lapsen matematiikan osaamisesta.

Alkuopetuksen alussa on tärkeää selvittää millä tasolla lapset ovat, jotta opetus voisi kohdata jokaisen lapsen. Mikäli lapsi ei vielä hallitse esimerkiksi lukukäsitettä kovin hyvin, täytyy sen harjoitteluun paneutua rauhassa, ennen kuin voidaan siirtyä eteenpäin. Lukukäsitteen ja lukujonon hallinta on koulutulokkaan ensimmäinen tärkeä haaste matematiikassa. Ylempiä kehitysvaiheita vaativiin harjoituksiin ei saa kiiruhtaa, mikäli lapsella ei ole vielä valmiuksia niihin. Tällöin on tuettava alempien tasojen valmiuksia, jotta lapsi ne omaksuttuaan voi siirtyä kehityksessä eteenpäin.

10 TARKASTELU

10.1 Tutkimuksen anti

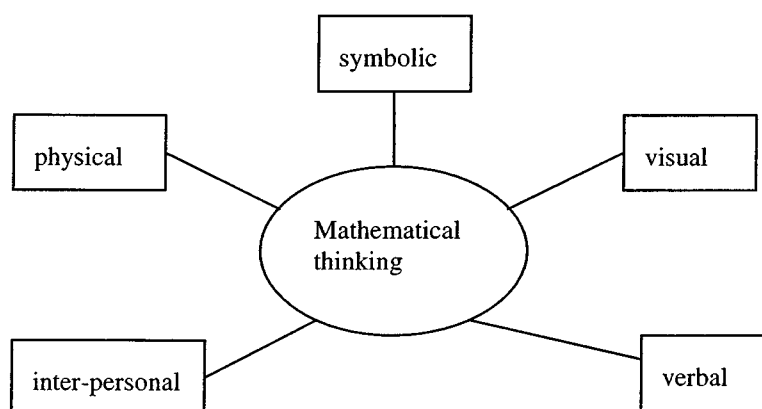
Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, toimintamateriaalien tasoa Kephartin esittämiin kehitysvaiheisiin nähden ja tarkastella miten eri toimintamateriaalit voivat tukea eritasoisten lasten matemaattisen ajattelun kehittymistä. Analyysissä selvitin, mitä kehitysvaiheita materiaalit vastaavat. Analyysi mahdollistaa näiden materiaalien systemaattisen ja tavoitteellisen käytön opetuksessa. Esimerkkien avulla tuli eritellyksi miten matematiikan eri osa-alueissa voidaan käyttää toimintamateriaaleja uuden asian lähestymiseen tai oppimisen syventämiseen. Tutkimus avartaa toimintamateriaalien käytön näkökulmia ja tarjoaa yhden mallin siitä, miten toimintamateriaaleja voidaan arvioida. Analyysi toi toimintamateriaalien käyttöön uutta näkökulmaa erittelemällä materiaaleja eritasoisen työskentelyn kannalta. Materiaaleja voi arvioida paitsi materiaalin ominaisuuksien mukaan, myös sen mukaan miten eritasoisia tehtäviä niihin voi liittää.

Analyysi osoitti sen, että toimintamateriaaleilla työskentely vaatii usein käsitteiden, erityisesti lukukäsitteen, hallintaa. Toimintamateriaalien etuna pidetään yleensä sitä, että ne vastaisivat paremmin lapsen konkreettisen ajattelun tasoa. Tämä käsitys voi johtaa siihen virheelliseen näkemykseen, että toimintamateriaaleilla työskentely edistäisi aina oppimista, koska niiden oletetaan vastaavan lapsen kehitystasoa. Toimintamateriaalit ovat kuitenkin eritasoisia, joten ei voida ajatella, että ne automaattisesti tukisivat oppimista ja olisivat esimerkiksi helpompia kuin muut työtavat.

Miten toimintamateriaaleilla sitten voi tukea ajattelun kehittymistä? Lukukäsitteen hallitseminen ei yleensä ole ongelmallista koulutulokkaille, jolloin toimintamateriaaleista löytyy sopivan tasoisia tehtäviä. Joukossa voi kuitenkin olla lapsia, joille käsitteiden hallinta on vielä vaikeaa. Tällöin on suosittava materiaaleja, jotka tukevat käsitteiden oppimista, mutta eivät edellytä niiden hallintaa. Kehityksessään alempana olevien lasten löytämiseen ja tukemiseen on edelleen panostettava arviointimenetelmiä hyödyntämällä. Jokaista lasta on pyrittävä tukemaan hänen yksilöllistä kehitysvaihetta edellyttävällä tavalla. Toimintamateriaalien vaatimaa käsitteiden hallintaa ei siis tarvitse säikähtää, mutta se on hyvä tiedostaa. On

esimerkiksi eri asia työskennellänkö numerokorteilla vai kymmenjärjestelmävälineillä, edelliset edellyttävät lukukäsitteen monipuolisen hallinnan ja jälkimmäiset eivät.

Toimintamateriaaleilla on kiistämätön etunsa siinä, että ne mahdollistavat tiedonvälityksen useiden kanavien kautta. Fisher (1995) on perehtynyt lasten ajattelun taitojen kehittämiseen ja moittii perinteisiä oppikirjoja ja opetusmenetelmiä siitä, että ne ovat keskittyneet ainoastaan käsitteellisen ajattelukanavan käyttöön. Hänen mukaansa matematiikkaakin tulisi lähestyä useita eri väyliä pitkin (kuvio 2).



KUVIO 2. Matemaattisen ajattelun lähestymistavat
(Fisher 1995, 208-209.)

Tämän tutkimuksen perusteella voidaan sanoa, että toimintamateriaalit mahdollistavat näiden eri lähestymistapojen käytön matemaattisen ajattelun kehittämiseen. Yksittäinen materiaali on harvoin niin täydellinen, että se tarjoaisi kaikki lähestymistavat. Sen sijaan useampien toimintamateriaalien käyttö muiden työtapojen ohella takaa monipuolisen opetuksen. Matematiikkaa voidaan, ja tuleekin, lähestyä sekä visuaalisen, verbaalisen, vuorovaikutuksellisen, fyysisen että symbolisen väylän kautta. Toimintamateriaalien vahvuus matematiikan opetuksessa on tämän tutkimuksen perusteella erityisesti fyysisten, visuaalisten ja vuorovaikutuksellisten kanavien käytössä. Aisteissa tämä tarkoittaa kinesteettisten, taktuaalisten, visuaalisten ja auditiivisten aistien hyödyntämistä oppimisessa.

Toimintamateriaaleilla käsitteitä voidaan havainnollistaa ja käsitellä konkreettisesti, jolloin ne auttavat käsitteiden todellisessa ymmärtämisessä. Toimintamateriaalit mahdollistavat lapselle ominaisen tavan oppia tekemällä ja toimimalla, jolloin kynnyksen lapsen matematiikasta koulumatematiikkaan madaltuu. Eri aistikanavien käyttö tukee erilaisten oppijoiden oppimista ja tiedon parempaa omaksumista. Vuorovaikutus tarjoaa mahdollisuuden yhdessä oppimiseen sekä matematiikan puhumiseen.

Tutkimus vahvistaa Kephartin näkemykset käyttökelpoisiksi ja osoittaa, että teoria on edelleen varteenotettava. Kephartin teorian anti kehityspsykologialle on huomion kiinnittäminen erityisesti sensomotorisiin taitoihin. Teoria valaisee oppimisvaikeuksien ennaltaehkäisemisen sekä korjaamisen näkökulmia. Esimerkiksi puutteellisesti kehittynyt motoriikka tai hahmotusvaikeudet voivat ilmetä kynän ja suunnan hallitsemisessa, mitkä puolestaan vaikeuttavat käsitteellistä oppimista. Tällöin olisi kehitettävä puutteellisia taitoja alemmissa vaiheissa, eikä vain lisättävä käsitteellistä opetusta. Toimintamateriaaleista voidaan valita juuri ne materiaalit ja tehtävät, jotka kehittävät puutteellisia alueita. Oppimisen ymmärtäminen kokonaisvaltaisena, yksilöllisenä kehitysprosessina on tärkeä osa oppimisenäkemyksiä.

10.2 Pedagogisia näkökulmia

Toimintamateriaalit tarjoavat mahdollisuuden sillan rakentamiseksi lapsen matemaattisen ajattelun ja koulumatematiikan välille. Siirtyminen matematiikassa käsitteellisyyteen ja abstraktiin työskentelyyn voi tapahtua lapselle liian nopeasti, jos hänen tiedonkäsittelyn valmiuksia ei oteta huomioon. Käsitteitä konkretisoiva toimintamateriaali auttaa lasta rakentamaan käsitteitä, joilla on vankka pohja kokemusmaailmassa.

Oppiminen leikkien, pelien ja tekemisen kautta on pienelle oppijalle luontaista. Jos niille jää kovin vähän tilaa, on millä tahansa oppiaineella vaara muodostua liian vaativaksi lapselle. Oikeantasoinen opetus ja monipuoliset oppimismenetelmät ehkäisevät oppimisvaikeuksia. Jos lapsi saa opiskella kehitystasonsa mukaisesti, niin opiskelu on hänelle mielekästä. Matematiikan kaltaisessa hierarkkisessa aineessa oppimisvaikeuksiin on puututtava välittömästi, koska uusi asia rakentuu aiemman

tiedon varaan. Toimintamateriaalit tukevat myönteisiä kokemuksia matematiikasta, koska leikin ja pelin elementit ovat vapauttavia eivätkä kasaa turhia esteitä oppimiselle.

Tutkimuksen näkökulmana on ollut alkuopetus, mutta toimintamateriaalien käytön periaatteet ovat samat niin esiopetuksessa kuin isommillakin oppilailla. Esiopetusta kehitettäessä olisi panostettava esi- ja alkuopetuksen vuorovaikutukseen, jotta löydettäisiin toiminnalle yhteiset suuntaviivat ja jatkumoa oppimisprosesseille. On etsittävä mm. linjausta sille, kuinka systemaattista matematiikan opetusta esiopetuksessa tarjotaan, koska käytännöt vaihtelevat paljon. Esi- ja alkuopetuksen matematiikan kysymykset ovat pitkälle samankaltaisia. Haasteena on vastata lasten yksilölliseen kehitystasoon, jotta tuettaisiin myönteistä matematiikan minäkäsitystä. Sekä esi- että alkuopetuksessa on varottava sitä, että matematiikkaa ei lähestytä liian abstraktisti. Useat tutkimuksessa esitellyistä materiaaleista soveltuvat hyvin myös esiopetukseen.

Käytännön toiminnan tarkastelu teorian avulla syventää näkemyksiä siitä mihin toiminnan avulla voidaan pyrkiä. Toimintamateriaaleihin voidaan liittää eritasoisia tehtäviä, jolloin tiettyä matematiikan osa-aluetta voidaan lähestyä eri tasoilta. Opetuksen tasoon tulee kiinnittää huomiota myös opetuksessa käytettävien välineiden kautta, sillä opettajan on tiedostettava ja kyettävä perustelemaan opetusmenetelmänsä. Kriittinen ja tutkiva suhtautuminen opetusvälineisiin, -menetelmiin ja oppisisältöihin on kehittyvän opetustyön kulmakivi. Toimintamateriaalien käyttöarvo oppimisen välineenä on riippuvainen tavoitteellisesta työskentelystä. Oppilaiden tason lisäksi on osattava arvioida oppimateriaaleja, jotta tiedetään miksi ja miten niitä voidaan käyttää. Eritasoiset materiaalit voivat tarjota oppimisen väyliä paitsi erilaisille oppijoille, niin myös eritasoisille oppijoille aina heikoista keskitasoisiiin ja lahjakkaisiin.

Opetuksessa voitaisiin kiinnittää nykyistä enemmän huomiota toimintamateriaalien systemaattiseen hyödyntämiseen satunnaisen käytön sijasta. Vaikka materiaaleja tuleekin käyttää rinnan muiden menetelmien kanssa, toimintamateriaalien tarjoamat mahdollisuudet voivat silti jäädä turhan vähälle huomiolle ja opetus voi sitoutua liaksi kirjaan. Oppimateriaalien valmistajille tämä tarjoaa myös haasteen kehittää lisää monipuolisempia materiaaleja. Toimintamateriaaleja voi tarkastella seuraavista näkökulmista. Minkä tasoiselle oppijalle materiaali soveltuu, mitä taitoja se edellyttää lapselta? Tukeeko materiaali uuden käsitteen oppimista tai soveltuuko se kertaamiseen?

Konkretisoiko materiaali asiaa vai tarjoaako se vain vaihtoehdoisen työtavan kirjalle? Mitä eri oppimisen kanavia ja aistien käyttöä materiaali mahdollistaa? Toimintamateriaaleja ei tule käyttää vain materiaalin tai toiminnan vaan oppimisen vuoksi.

10.3 Tutkimuksen kokonaisarviointi

Tutkimusprosessi on nyt tehnyt kierroksensa, lähtien aina ensimmäisestä ideasta tutkimuksen toteuttamiseen ja viimein johtopäätöksiin. Työssä on pyritty toisaalta itseymmärrykseen esimerkiksi ennakkokäsitysten tunnistamisessa ja toisaalta yksilöllisen tietoisuuden eli Kephartin teorian objektiiviseen ymmärtämiseen. Itseymmärrys, teorian tulkinta ja sen hyödyntäminen analyysin apuna on ollut kulkemista hermeneuttisella kehällä.

Tutkimus on edennyt systemaattisen analyysin vaiheiden mukaisesti ongelman ja aineiston hahmottamisesta varsinaiseen analyysiin ja tulosten selittämisen ja käyttövaiheeseen. Varsinaisen analyysin tavoitteena oli Kephartin teorian analysointi ja toimintamateriaalin käsitteiden löytäminen. Kokonaisuutta tarkastellessa kutsuisin nyt Kephartin teorian tarkastelua analyttiseksi tulkinnaksi ja taas toimintamateriaalien analyysia termillä varsinaisen analyysi. Tämä on esimerkki siitä, miten tutkimus elää ja kehittyy etenemisensä myötä. Analyttiset ja synteettiset tehtävät menevät toimintamateriaalien analyysissä rinnakkain, koska toimintamateriaalien erittelyn ohella luodaan samalla uutta ja kokoavaa arviointirakennelmaa.

Luotettavuuden kannalta olen pyrkinyt tuomaan esiin systemaattisen analyysin kannalta olennaisia seikkoja (ks. Jussila ym.1989, 204-204.) Tutkijan kokemustaustan ja ennakkokäsitysten esiintuominen tutkimuksen alussa on ollut tärkeää, koska ne ovat suunnanneet tutkimuksen kulkua ja tulkintoja. Tutkielman teoreettisen viitekehyksen sekä Kephartin teorian esittelyssä on pyritty objektiivisuuteen kuitenkin niin, että punainen lanka ei katoaisi. Viitekehyksen rajaaminen on ollut haasteellista ja varsinkin *Alkuopetus ja matematiikka* -osuudessa löytyi monta kiinnostavaa aluetta joihin olisi voinut eksyä pidemmäksikin aikaa. Kephartin teoriaa lähestyin alkuperäisten lähteiden kautta objektiivisuuteen pyrkien mutta aiemmat käsitykseni teoriasta ovat varmasti

vaikuttaneet tulkintaan suuntaa antavastikin. Teoreettiset näkökulmat ja metodiset perustelut ovat olleet työn kantavia ratkaisuja ja ne on pyritty tuomaan selvästi esiin.

Laadullisen aineiston arviointiperusteita (Mäkelä 1990, 47-55) on hyvä tarkastella tämän työn kannalta nimenomaan aineiston riittävyuden ja kattavuuden näkökulmasta. Aineiston riittävyys on tasapainoinen kokonaisuuteen nähden, koska runsaampi aineisto olisi jo toistanut itseään tuomatta uusia näkökulmia. Aineiston kattavuudessa täytyy huomioida toimintamateriaalien vähäisyys. Jos materiaalia olisi ollut runsaammin tarjolla, siitä olisi voinut perusteellisemmin valikoida soveltuvimmat esimerkit. Vielä tarkempi toimintamateriaalien kartoittaminen esimerkiksi opettajan oppaista ja oppimateriaalien valmistajilta olisi voinut lisätä lähtöaineistoa. Materiaalien valintaan vaikuttivat valintakriteerien lisäksi omiin kokemuksiin perustuvat näkemykset materiaalien toimivuudesta lasten kanssa. Näitä subjektiivisia perusteluja olisi voinut tuoda enemmän julki eli ulkoistaa nämäkin intuitiot. Materiaaleja olisi ollut hyvä kokeilla, vaikka pienimuotoisestikin lasten parissa, jotta olisi voinut selvästi perustella materiaalien käyttökelpoisuuden.

Jatkotutkimuksen kannalta voisi keskittyä materiaalien kehittämiseen eri matematiikan osa-alueiden ja kehitysvaiheiden näkökulmasta. Olisiko mahdollista kehittää monipuolisempia materiaaleja, jotka voisivat vastata useampien kehitysvaiheiden taitoihin? Materiaaleissa voisi ottaa huomioon myös tietokonepelien ja laskinten käyttömahdollisuudet. Tämän tutkielman tiimoilta herää väistämättä myös kysymys, miten arvioida lasten kehitysvaihetta, jotta opetus voitaisiin suunnitella oikeantasoisiksi. Yksi jatkotutkimusaihe olisi arvioinnin kehittäminen. Yhtälailta Kephartin teoria kuin nykyiset konstruktivistiset oppimisenäkemyksetkin haastavat opettajan oppilaiden henkilökohtaiseen tuntemiseen ja arviointiin, mikä onkin hyvä perusta opetukselle. Suurissa ja heterogeenisissä opetusryhmissä opetuksen eriyttäminen ei kuitenkaan ole kovin yksiselitteistä.

Sirkku Kananoja on käsitellyt arvioinnin problematiikkaa tuoreessa väitöskirjassaan. Kananojan (1999) mukaan arviointimenetelmien kehittäminen voisi osaltaan vastata tähän yksilöllistämisen ja ryhmän vaatimusten asettamaan ristiriitaan. Hänen mielestä opettajille tulisi tarjota uudempia ja parempia arviointimenetelmiä. Oppimisvaikeuksien näkökulmat ovat ensiarvoisen tärkeitä, mutta niitä voisi laajentaa ottamaan paremmin huomioon myös keskitasoiset ja lahjakkaat oppijat. (Kananoja 1999, 359-366.)

Arviointimenetelmien kehittämiseen kannalta on hyvä huomata Kephartin muistutus sensomotoristen taitojen merkityksestä, koska se jää helposti kognitiivisten prosessien tarkasteluissa vähempiarvoiseksi. Arvioinnin tulisi tarvittaessa selvittää onko aiemmissa tiedonhankintamenetelmissä puutteita.

Tämä opintomatka on kulkenut tiedon ääreltä oivalluksiin ja niistä jälleen uusiin kysymyksiin ja tutkimusaiheisiin. Se on antanut tekijälleen uusia näkökulmia, vahvistanut ammattitaitoa ja käsitystä teorian ja käytännön yhteydestä. Opinnäytetyö on ollut mielenkiintoinen, jatkuvasti kehittyvä, elävä prosessi alkuopetuksen, matematiikan ja tutkielman teon maailmaan. Se haastaa tekijänsä tutkivaan ja refleктоivaan otteeseen opetustyössä niin oppimateriaalien, opetusmenetelmien, sisältöjen kuin arvioinninkin suhteen. Matka jatkuu.

*”Niin, kyllä kai koulussa voi oppia paljonkin.
Mutta ei sitä silti kaikkea tiedä, vaikka tietääkin,
että kaksi kertaa kaksi on neljä.”*

- Z. Topelius -

LÄHTEET

- Ahonen, T. & Räsänen, P. 1995. Matemaattiset oppimisvaikeudet. Teoksessa Lyytinen, H., Ahonen, T., Korhonen, T., Korkman, M. & Riita, T. (toim.) *Oppimisvaikeudet - neuropsykologinen näkökulma*. Helsinki: WSOY, 209-246.
- Ball, T. S. 1971. Itard, Seguin and Kephart. *Sensory education – a learning interpretation*. Columbus, Ohio: Charles E. Merrill.
- Broudy, H. 1968. Preface. Teoksessa Kephart, N. C. *Learning Disability: An Educational Adventure*. West Lafayette, Indiana: Kappa Delta, v-vi.
- Carr, M., Jessup, D. & Fuller, D. 1999. Gender differences in first-grade mathematics strategy use: Parent and teacher contributions. *Journal for research in mathematics education* 30, 1, 20-46.
- Ebersole, M., Kephart, N. C. & Ebersole, J. B. 1968. *Steps to achievement for the slow learner*. Columbus, Ohio: Charles E. Merrill.
- Ehrnrooth, J. 1990. Intuitio ja analyysi. Teoksessa Mäkelä, K. (toim.) *Kvalitatiivisen aineiston analyysi ja tulkinta*. Helsinki: Gaudeamus, 30-41.
- Ekeblad, E. 1996. *Children. Learning. Numbers. A phenomenographic excursion into first-grade children's arithmetic*. Acta Universitatis Gothoburgensis. Göteborg studies in educational sciences 105.
- Fisher, R. 1995. *Teaching children to think*. Cheltenham: Stanley Thornes.
- Haapasalo, L. 1993. *Matematiikan opetussuunnitelmien lähtökohtia ja kehittämisenäkymiä*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 2.
- Haapasalo, L. 1997. *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu*. 2. korj. painos. Vaajakoski: MEDUSA-Software.
- Ilmavirta, R. 1995. Toimintamateriaalin käyttö ja monipuoliset työtavat parantavat oppimista. Teoksessa *Toimi, laske ja ajattele. Ala-asteen matematiikka*. Helsinki: Opetushallitus, 61-69.
- Ikäheimo, H., Aalto, A. & Puumalainen, K. 1997. *Opi matematiikkaa leikkien esi- ja alkuopetuksessa*. Helsinki: Opperi.
- Ikäheimo, H. 1995. *Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan*. Helsinki: Opperi.

- Ikäheimo, H. 1998. Matematiikan esi- ja alkuopetuksen kysymyksiä. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 239-250.
- Isaacs, A. C. & Carroll, W. M. 1999. Strategien for Basic-Facts Instruction. *Teaching Children Mathematics* 5, 9, 508-515.
- Jussila, J., Montonen, K. & Nurmi, K. 1989. Systemaattinen analyysi kasvatustieteiden tutkimusmenetelmänä. Teoksessa Gröhn, T. & Jussila, J. (toim.) *Laadullisia lähestymistapoja koulutuksen tutkimuksessa*. Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos. *Tutkimuksia* 123, 157-208.
- Kaasila, R. 1997. Konstruktivismiin eri muodot matematiikan opetuksessa peruskoulun ala-asteella. Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä julkaisuja B. *Tutkimusraportteja ja selvityksiä* 26.
- Kallonen-Rönkkö, M. 1989. Koulutulokkaan ajattelu ja matematiikka. Teoksessa Korpinen, E., Tiihonen, E. & Tuomi, P. (toim.) *Koulu elämän paikkana: haasteita ja virikkeitä ala-asteen opetukseen*. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. *Teoriaa ja käytäntöä* 34, 45-56
- Kananoja, S. 1999. Arviointi lasten kehityksen seurannassa. Oppilasarviointi eriyttämisen tukena peruskoulussa. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. *Tutkimuksia* 202.
- Kari, J. 1987. Oppimateriaalitutkimuksen teoreettisia lähtökohtia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B. *Teoriaa ja käytäntöä* 4.
- Kephart, N. C. 1968. *Learning Disability: An Educational Adventure*. West Lafayette, Indiana: Kappa Delta.
- Kephart, N. C. 1971a. *The slow learner in the classroom*. Second edition. Columbus, Ohio: Charles E. Merrill.
- Kephart, N. C. 1971b. Foreword. Teoksessa Ball, T. S. (toim.) *Itard, Seguin and Kephart. Sensory education – a learning interpretation*. Columbus, Ohio: Charles E. Merrill, v-vii.
- Kinnunen, R., Lehtinen, E. & Vauras, M. 1994. Matemaattisen taidon arviointi. Teoksessa Vaura, M., Poskiparta, E. & Niemi, P. (toim.) *Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailta ja 1. luokan oppilailta*. Turku: Turun yliopisto. Oppimistutkimuksen keskus. *Julkaisuja* 3, 55-76.

- Kinnunen, R. & Vauras, M. 1998. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa Räsänen, R., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 269-282.
- Kiviniemi, K. 1993. Taiteellisesti suuntautunut evaluointimenetelmä. Katsaus Elliot W. Eisnerin kvalitatiivisten menetelmien suuntaukseen. Jyväskylän yliopisto. *Chydenius-Instituutti. Monistesarja 6*.
- Kokljuschkin, M. 1997. *Esiopetusta liikunnan keinoin*. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Koponen, R. 1992. *Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille*. Jyväskylä: Atena.
- Korhonen, H. 1999. *Peruskoulun matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 1998*. Helsinki: Opetushallitus.
- Korhonen, M-L. & Kuuva, R. 1997. ”On jännää kun aivot menevät pahalle koetukselle”. *Kertolaskun oppiminen pelien avulla peruskoulun toisella luokalla*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.
- Kupari, P. 1993a. *Laskutaidotko kadonneet? Peruskoululaiset matematiikan kokijoina ja taitajina*. Teoksessa Linnakylä, P. & Saari, H. (toim.) *Oppiiko oppilas peruskoulussa. Peruskoulun arviointi 90 -tutkimuksen tuloksia*. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 81-104.
- Kupari, P. 1993b. *Millä tavoin matematiikan opiskelu ja opetus on muuttunut?* Teoksessa Brunell, V. & Kupari, P. (toim.) *Peruskoulu oppimisympäristönä. Peruskoulun arviointi 90 – tutkimuksen tuloksia*. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 81-104.
- Lehtinen, E 1990. *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. *Kielikukka* 4, 90, 5-6.
- Leino, J. 1993. *Konstruktivismiin suuntauksia*. Teoksessa Haapasalo, L. & Kupari, P. (toim.) *Konstruktivismi matematiikan opetuksen ja opetus suunnitelman kehittämisessä*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 6, 1-7.
- Liebeck, P. 1985. *How Children Learn Mathematics. A guide for parents and teachers. A Straightforward, illustrated introduction to the ways in which children learn the principles of mathematics*. Reading: Penguin Books.
- Liikanen, P. 1995a. *Kontrolloitu piirrostarkkailu kouluvalmiuden ja koulumestyksen ennustajana*. 5. painos. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. *Tutkimuksia* 22.

- Liikanen, P. 1995b. Lähtötilanteen kartoitus peruskoulun 1. luokalla. Kehityopsykologiset valmiudet koulumenestyksen ennustajana. 5. painos. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 23.
- Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis, ser A vol 307
- Magne, O. 1996. Är $125 \times 5 = 5 \times 125$? Om hur Anna och Sture lär sig förstå att tanka själv. Malmö: Institutionen för pedagogik och specialmetodik, Lärarhögskolan. Nr 858.
- Malaty, G. 1997. Lapsi matkalla matematiikan maailmaan. Teoksessa Siniharju, M. (toim.) Esi- ja alkuopetuksen uusia tuulia. Helsinki: Opetushallitus, 51-90.
- Merikoski, K. 1927. Valistuksen mittausoppi maalaiskansakouluille. Yhdestoista painos. Helsinki: Valistus.
- Montessori, M. 1988. The discovery of the child. The Clio Montessori series. Oxford. England: Clio Montessori.
- Mutanen, R. 1998. Esiopetuksen merkitys matematiikan opiskelulle alkuopetuksessa. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia 67.
- Mäkelä, K. 1990. Kvalitatiivisen analyysin arviointiperusteet. Teoksessa Mäkelä K. (toim.) Kvalitatiivisen aineiston analyysi ja tulkinta. Helsinki: Gaudeamus, 42-61.
- Niiniluoto, I. 1990. Maailma, minä ja kulttuuri: emergentin materialismin näkökulma. Helsinki: Otava.
- Niiniluoto, I. 1994. Järki, arvot ja välineet. Kulttuurifilosofisia esseitä. Helsinki: Otava.
- Oesch, E. 1994. Tulkinnasta. Tulkinnan tiedolliset perusteet modernissa ja filosofisessa hermeneutiikassa. Filosofisia tutkimuksia Tampereen yliopistossa 53.
- Pehkonen, E. 1995. Toiminnallista matematiikan opetusta peruskouluun. Dimensio 59, 4, 44-46.
- Peltokangas, M. & Ruuskanen, M. 1999. ”Se on neliöjuurilaskua se kaksikymmentä kertaa kaksikymmentä”. Tapaustutkimus matemaattisesti taitavien 7-vuotiaiden lasten ajattelusta, RATKO-ongelmaratkaisumenetelmästä ja opetuksen eriyttämisestä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.
- Perlmutter, J., Bloom, L., Rose, T., Rogers, A. 1997. Who uses math? Primary children's perceptions of the uses of mathematics. Journal of research in childhood education 12, 1, 58-70.

- Peruskoulun matematiikan opetuksen kehityssuunnasta 1990-luvulla. 1991. Helsinki: Valtion painatuskeskus
- Peruskoulun opetuksen opas: Alkuopetus. 1987. Helsinki: Kouluhallitus.
- Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet. 1994. Helsinki: Opetushallitus.
- Portin, A. 1995. Toiminnallisen matematiikan opetuksen historiasta. *Dimensio* 59, 6, 52-53.
- Putkonen, H., Sinnemäki, J. & Raitanen, M. 1992. Harrastamme matematiikkaa. Aktiivista matematiikkaa peruskoulun ala-asteen oppilaille. Helsinki: WSOY.
- Putkonen, H., Sinnemäki, J. & Rantanen, M. 1996. Harrastamme matematiikkaa. Aktiivista matematiikkaa peruskoulun ala-asteen oppilaille. Käyttäjän opas. Helsinki: WSOY.
- Salonen, P., Lepola, J., Vauras, M., Rauhanummi, T. Lehtinen, E. & Kinnunen, R. 1994. Diagnostiset testit 3. Motivaatio, metakognitio ja matematiikka. Turku: Turun yliopisto. Oppimistutkimuksen keskus.
- Sandberg, C. 1990. MTI-kirja. Motoriikka ja havaitseminen käytännössä. Båstad: Christer Sanberg MTI.
- Siljander, P. 1988. Hermeneuttisen pedagogiikan pääsuuntaukset. Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia 55.
- Sowell, E. 1989. Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education* 20, 5, 498-505.
- Vainikainen, T. 1998. Matematiikan oppiminen on pitkälle asennejuttu. *Lapsen maailma* 2, 98, 37.
- Väkevä, L. 1999. Musiikin merkitys ja musiikkikasvatus David J. Elliotin praktiaalisessa musiikkikasvatusfilosofiassa. Pragmaattinen tulkinta. Licensiaattityön käsikirjoitus. Saatavilla [www-muodossa: http://wwwedu oulu.fi/muko/lvakeva/Lisuri/hermeneu.htm](http://wwwedu oulu.fi/muko/lvakeva/Lisuri/hermeneu.htm) >19.4.1999

LIITTEET

Liite 1: Kooste kehitysvaiheiden valmiuksista arviointia varten

1. Motorinen vaihe

- motoristen perustaitojen kehittyminen: liikkuminen (ryömien, kävellen, juosten, hyppien jne.), tasapainon kehittyminen, asennon ylläpitäminen, tarttuminen, irrottaminen.
- Tieto ympäristöstä hankitaan kehon avulla

2. Motorishavainnollinen vaihe

- motoriseen tietoon aletaan liittämään visuaalisia ja auditiivisia havaintoja
- silmä-käsikoordinaatio alkaa kehittyä
- motoriikka kontrolloi vielä toimintaa, mutta havaintojen merkitys kasvaa koko ajan
- pelkkä havainto ei vielä riitä tiedonhankkimiseen vaan tarvitsee taktiilisen tai kinesteettisen aistin tueksi
- kylkisyys on vakiintumassa

3. Havaintomotorinen vaihe

- kyky kontrolloida liikkeitä havaintojen perusteella vakiintuu
- visuaalinen tiedonhankinta tulee hallitsevaksi
- motoriikka tukee vielä havaintoja, mutta lapsi alkaa luottaa yhä enemmän havaintoihin
- lapsi pystyy esimerkiksi leikkaamaan viivaa pitkin, hyppäämään ruutua ja narulla, oppi heittämään ja ottamaan pallon kiinni

4. Havaintovaihe

- havaintoja voi tehdä ilman motoriikan vahvistusta
- visuaalinen havaitseminen kehittyy edelleen, silmän ja käden yhteistyö paranee, samoin huomiokyky, visuaalinen muisti ja nopea visuaalinen havaitseminen (esimerkiksi muistipelit ja palapelit kehittävät visuaalisia taitoja)
- lapsi kykenee katsomalla erottamaan muotoja, suuntaa ja tilaa ja kuvioita taustasta, lapsi huomaa samanlaisuuksia ja eroja, tunnistaa kokonaisuuden osien perusteella, erottaa tietyn muodon, kirjaimen tai numeron tekstistä (ei vielä yhdistä numeroa lukumäärään).

- kielellä on yhä enemmän merkitystä (Liite jatkuu)
- eri aistien tuoma tieto erotetaan toisistaan ja tietoja voidaan vertailla

5. Havaintokäsitteellinen vaihe

- Lapsi alkaa muodostamaan lukuisista havaintokokemuksistaan käsitteitä, jolloin havaintoihin liitetään niiden kielellinen vastine
- Käsitteen ymmärtäminen ei vaadi enää välitöntä havaintoa, esimerkiksi yläkäsite tuoli, käsitettä verrataan kuitenkin vielä mielikuviin havaintojen välisistä suhteista
- Käsite on abstraktio, joka perustuu aiemmille kokemuksille
- Käsitteiden avulla ympäristön tiedon käsitteleminen on tehokasta
- Lapsi ymmärtää ja pitää mielessä ja osaa toistaa kuulemaansa

6. Käsitevaihe

- Lapsi kykenee nyt vertaamaan käsitteitä keskenään, ei vain suhteessa havaintoihin
- Käsitteiden avulla lapsi kykenee arvioimaan aiempia havaintojaan tehokkaasti ja muodostamaan uusia yleistyksiä niistä
- Syy- ja seuraussuhteiden ymmärtäminen ja ajan ja tilan suuruussuhteiden käsittäminen on mahdollista
- Lukukäsitteen sisäistämisen (lukumäärän ja numeron yhdistäminen) takia voidaan käyttää lukuja, suorittaa laskutoimituksia, luokitella, sarjoittaa ja soveltaa lukuja geometriassa ja soveltamistehtävissä

7. Käsitehavainnollinen vaihe

- Lapsi tulee yhä riippuvaisemmaksi käsitteellisestä tiedonkäsittelystä ja havainnot jäävät toisarvoisemmiksi, käsitteet kontrolloivat nyt havainnot
- Ristiriidat havaintojen ja käsitteiden välillä tarkistetaan ja muokataan käsitteisiin sopiviksi, ”näemme asiat sellaisina kuin haluamme, emme sellaisina kuin ne ovat”
- Tietoa välittyy edelleen useamman väylän kautta, mutta käsitteet kuitenkin dominoivat tiedonhankintaa
- Lapsi oppii lukemaan, kirjoittamaan ja laskemaan ilman kuvan apua

(Kephart 1968, 20-32; Ebersole ym. 1968, 67-73; Liikanen 1995, 19-21; Kouluhallitus 1987, 6-14.)

Liite 2: Matematiikkagolf

Tuloskortti

Reikä	Pelaaja 1	Pelaaja 2	Pelaaja 3	Pelaaja 4
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
Summa				

Sääntökortti

Reikä	Reiällä vaadittava tulos
1	Noppien lukujen summa > 7
2	Noppien lukujen summa < 7
3	Noppien lukujen summa $= 7$
4	Jompikumpi tai molemmat antaa 5
5	Noppien lukujen erotus > 3
6	Noppien lukujen erotus < 3
7	Noppien lukujen erotus $= 0$
8	Summa on parillinen luku
9	Summa on pariton luku

(Putkonen ym. 1992, 27)

Liite 3: Tarina Kallesta ja yhdeksän kertotaulusta

Kalle harrasti tarrojen keräilyä. Naapurin pappa lupasi antaa Kallelle tarran jokaisesta oikeasta vastauksesta yhdeksän kertotauluun. Kalle alkoi harjoitella kertotaulua ja kirjoitti laskut ylös.

$$0 \times 9 = 0, 1 \times 9 = 1, 2 \times 9 = , 3 \times 9 = , 4 \times 9 = , 5 \times 9 = , 6 \times 9 = , 7 \times 9 = , 8 \times 9 = , 9 \times 9 = , 9 \times 10 = 90$$

” 0×9 ja 1×9 ja 10×9 minä kyllä muistan, mutta muita en osaa”, Kalle tuumasi. Sitten Kalle alkoi harmissaan laskea montako tarraa hän vielä saisi jos hän osaisi kaikki muutkin laskut:

$$2 \times 9 \rightarrow 1$$

$$3 \times 9 \rightarrow 2$$

$$4 \times 9 \rightarrow 3$$

$$5 \times 9 \rightarrow 4$$

$$6 \times 9 \rightarrow 5$$

$$7 \times 9 \rightarrow 6$$

$$8 \times 9 \rightarrow 7$$

$$9 \times 9 \rightarrow 8$$

”Siis kahdeksan tarraa jäisi minulta saamatta”. Varmistaakseen määrän Kalle laski varmuuden vuoksi ja vähän huvikseenkin vielä alhaalta ylöspäin:

$$2 \times 9 \rightarrow 18$$

$$3 \times 9 \rightarrow 27$$

$$4 \times 9 \rightarrow 36$$

$$5 \times 9 \rightarrow 45$$

$$6 \times 9 \rightarrow 54$$

$$7 \times 9 \rightarrow 63$$

$$8 \times 9 \rightarrow 72$$

$$9 \times 9 \rightarrow 81$$

Kalle katseli numeroita ja yhtäkkiä hän huomasi, että tarroja laskiessaan hän olikin saanut oikeat vastaukset selville! Montako tarraa arvelet Kallen seuraavana päivänä saaneen?

Tarina on mukaelma Magnen (1996, 7) kertomuksesta