"SE ON NELIÖJUURILASKUA SE KAKSKYMMENTÄ KERTAA KAKSKYMMENTÄ".

Tapaustutkimus matemaattisesti taitavien 7-vuotiaiden lasten ajattelusta, RATKO-ongelmanratkaisumenetelmästä ja opetuksen eriyttämisestä.

Mari Peltokangas

Maaret Ruuskanen

Pro-gradu -tutkielma

Kevät 1999

Opettajankoulutuslaitos

Jyväskylän yliopisto

Hyväksytty 17.5.1999
eximia cum laude approbatur

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTON KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNNALLE

Kasvatustieteiden tiedekunnan määräämina tarkastajina esitämme kasv. yo. **Mari Peltokankaan** ja kasv. yo. **Maaret Ruuskasen** kasvatustieteen pro gradu -tutkielmaksi tarkoitetusta työstä *"Se on neliöjuurilaskua se kakskymmentä kertaa kakskymmentä". Tapaustutkimus matemaattisesti taitavien 7 -vuotiaiden lasten ajattelusta, RATKO-ongelmanratkaisumenetelmästä ja opetuksen eriyttämisestä* seuraavan lausunnon.

Tutkimusaiheen relevanssi. Työssä selvitetään kolmen matemaattisesti taitavan ekaluokkalaisen matemaattista ajattelua, RATKO-menetelmän toimivuutta sekä opetuksen eriyttämistä. Työ tarjoaa mielenkiintoisen tapaustutkimuksellisen lisän matematiikan opetusta koskeviin tutkimuksiin. Peruslähtökohtana tekijöillä on oletus, että matemaattisesti taitavien lasten tarpeisiin ei koulussa pystytä vastaamaan, vaan koko opetus etenee tasapäistäen. Tutkimus on kauttaaltaan huolellisesti tehty ja perusilmeeltään se kuvastaa tekijöiden aitoa innostusta valitsemaansa aiheeseen.Tekijät osoittavat työllään pystyvänsä itsenäiseen työskentelyyn. Tutkimusta voidaan pitää perusteltuna myös siinä mielessä, että se kartoittaa niitä tärkeitä lähtökohta-asemia, joissa oppilaan kiinnostus matematiikkaan, saadaan säilymään tai sammumaan.

Tutkimuksen kohdejoukko. Valitsemistaan oppilaista voidaan perustellusti käyttää työn tekijöiden mainitsemaa nimitystä matemaattisesti taitava oppilas. Tutkijat perustelevat kyseisten oppilaiden valinnan kolmesta näkökulmasta. (1)Oppilaiden valinta nojaa pääasiallisesti testiin, jonka tutkijat laativat käyttäen hyväksi eri matematiikan oppikirjoja. (2) Näiden testien tulosta tukivat jo aikaisemmin tehty koulupsykologin testi sekä luokanopettajan näkemykset matemaattisesti taitavavista oppilaistaan. (3) Lisäksi tutkimuksen tulososassa tekijät vertaavat valittujen oppilaiden matemaattista ajattelua Nunesin ja Bryantin (1996) kehittelemään matemaattisen ajattelun kolmiosaiseen luokitukseen. He löytävät ja perustelevat valitsemistaan oppilaista Nunesin ja Bryantin luokittelun piirteitä.

Aineiston keruu. Tekijät pitivät valituille oppilaille matematiikkakerhoa, jonka yhteydessä tutkimus suoritettiin. Kerhotapaamisia oli kymmenen, jotka kaikki videoitiin ja nauhoitettiin. Lisäksi tekijät tutustuivat matematiikan opetukseen tällä asteella pitämällä seitsemän viikon ajan kaikki matematiikan tunnit, jolloin kerran viikossa käsiteltiin eriyttäviä tehtäviä.

Teoreettinen viitekehys. Teoriaosasssa tutkijat paneutuvat matematiikkaan erityisesti kouluopetuksessa, ongelmanratkaisuun, alkuopetukseen ja lapsen ajattelun kehittymiseen. Teoriaosa (36 s) on sopivassa suhteessa koko työn laajuuteen. Se kuvastaa tutkijoiden perehtymistä valitsemiinsa aiheisiin, mutta jossain määrin teoriaosa vaikuttaa referoinnilta ei niinkään pohdiskelulta, johon tekijöillä olisi ollut mahdollisuus vielä rohkeammin. Tutkijat kokoavat teorian kautta saamansa näkemyksen mielenkiintoiseen pelastusrengas -kuvioon, jossa on kaksi repeämää. Teorian pohjalta repeämät - matemaattisesti taitavien lasten kohdalla - ovat perusteltavissa. Hieman epäselväksi jää, mikä on valittujen oppilaiden tai kyseisen luokan suhde repeämään.

Ongelmanasettelu. Tutkimuksen tekijät paikkaavat pelastusrenkaan repeämät eriyttämisellä ja ongelmanratkaisukykyä kehittävällä kerholla jo ongelmanasetteluvaiheessa, jolloin ratkaisu saa jossain määrin ennakoinnin makua. Tämä asettaa tekijät vaativan tehtävän eteen, sillä he kirjoittavat jo ennen varsinaista tutkimusta valintojensa puolesta. Heidän on saatava ja saavatkin lukijan vakuuttuneeksi valitsemistaan paikkavälineistä. Tutkimusosassa työn tekijät osoittavat onnistuneesti ongelmanratkaisuun keskittyvän kerhon keinona kehittää matemaattisesti taitavien lasten opetusta ja ajattelua.

Työn tekijät tietävät olevansa vaikean kysymyksen äärellä: miten tutkia ajattelua tai sen kehittymistä. He antavat lasten itse kertoa ajattelustaan tehtävien suorittamisen yhteydessä, mikä lienee ainut keino lähestyä valittua ongelmaa. Tutkimuksen tulososassa on runsaasti tarkkoja vuoropuheluita tutkijoiden ja oppilaiden välisistä keskusteluista.Kuvaukset lasten päättelyistä - esimerkiksi milloin luku on parillinen tai pariton - voidaan pitää myös tutkimuksen yhtenä keskeisenä tuloksena. Autenttiset lainaukset toimivat työssä kahdella tasolla: ne kuvaavat lasten ajattelua sekä lisäävät tutkijoiden argumenttien uskottavuutta. Tutkijoiden mukaan lasten ajattelussa tapahtuu kehittymistä. Tähän tulokseen he tulevat oppilaillaan teettämän, alunperin Malisen (1992) laatiman testin perusteella. Alku- ja loppumittauksen välisen muutoksen he nimittävät ajattelun kehittymiseksi.

Tutkimuksen ansioksi nousevat kohdejoukon valinta perusteluineen sekä ajattelun tutkimista käsittelevät kohdat. Erityisesti niissä kuvastuu tutkijoiden kyky tehdä itsenäistä ja perusteltua tutkimusta. Muut tulososan kohdat kuten RATKO -menetelmä, eriyttäminen ja vanhempien suhtautuminen kerhoon, jäävät vähemmälle huomiolle. Vanhempien haastattelu ei tuonut mitään ratkaisevaa kyseiseen tutkimukseen, mutta heidän tutkimukseen mukaanottaminen kuvastaa tutkijoiden halua tehdä perusteellista työtä. RATKO -menetelmän sopivuus ekaluokkalaisille jää lukijalle vähän sekavaksi. Tutkimuksen mukaan lapset eivät mieltäneet RATKOA hyväksi, mutta tutkijat kuitenkin argumentoivat sen puolesta.

Tutkielma on kaiken kaikkiaan mielenkiintoinen kokonaisuus, jossa on lähdetty rohkeasti selvittämään tärkeää aihetta. Työ on vaatinut tekijöiltään paljon - ja antanut varmasti vielä enemmän. Työ on antoisa myös lukijalle, koska työstä heijastuu kauttaaltaan tekijöiden innostuneisuus aiheeseen. Esitämme Mari Peltokankaan ja Maaret Ruuskasen työn hyväksymistä kasvatustieteen pro gradu -tutkielmana kasvatustieteen maisterin tutkintoa varten arvosanalla **eximia cum laude approbatur.**

Jyväskylässä 17.5.1999

Pekka Räihä
tutkija

Maija Ahtee
professori

Peltokangas, M. & Ruuskanen, M. 1999. "Se on neliöjuurilaskua se kakskymmentä kertaa kakskymmentä". Tapaustutkimus matemaattisesti taitavien 7-vuotiaiden lasten ajattelusta, RATKO-ongelmanratkaisumenetelmästä ja opetuksen eriyttämisestä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.

TIIVISTELMÄ

Tutkimuksen päätehtävänä oli selvittää, millaista on matemaattisesti taitavien seitsemänvuotiaiden lasten ajattelu. Lisäksi tutkittiin, miten näiden lasten tarpeisiin voidaan vastata ongelmanratkaisun ja eriyttämisen keinoilla ja kuinka taitavat lapset kokivat Matikka-kerhon. Matemaattisesti taitavaksi lapseksi tässä tutkimuksessa määriteltiin lapsi, joka jo kouluun tullessaan hallitsi ensimmäisen luokan matematiikan oppisisällöt. Tutkimus toteutettiin Jyväskylän normaalikoulun ala-asteella lukuvuonna 1998 - 1999 tutkijoiden päättöharjoittelun yhteydessä. Tutkimukseen valittiin tutkimusluokasta kahden valintatestin, seurantatestien ja opettajan suosituksen perusteella kolme matemaattisesti taitavaa oppilasta, kaksi poikaa ja yksi tyttö. Tutkimukseen valituille oppilaille järjestettiin Matikka-kerho, jossa kymmenellä kerhokerralla ratkottiin ongelmanratkaisutehtäviä ja tutustuttiin RATKO-ongelmanratkaisumenetelmään.

Tutkimus on laadullinen tapaustutkimus. Aineistonkeruumenetelminä tutkimuksessa käytettiin haastattelua ja havainnointia. Oppilaiden lisäksi haastateltiin heidän vanhempiaan ja luokanopettajaa. Lasten ajattelun kehitystä pyrittiin selvittämään Malisen (1980, 1992) loogisen ajattelun testeillä. Lisäksi tapausoppilaita havainnoitiin tavallisilla matematiikan tunneilla ja Matikka-kerhossa.

Tutkimuksen tulosten mukaan tutkimukseen osallistuneet oppilaat kykenevät matemaattisloogiseen ajatteluun, hallitsevat monia erilaisia matemaattisia käsitteitä (esimerkiksi summan parillisuus ja kertolasku) ja pystyvät tarkoituksenmukaiseen toimintaan eri tilanteissa. He osoittivat ajattelun näillä osa-alueilla olevansa ikätovereitaan selvästi taitavampia. Tutkimus on tapaustutkimus, joten saatuja tuloksia ei voida suoraan yleistää muihin samanikäisiin matemaattisesti taitaviin lapsiin. Tutkimus kuitenkin osoittaa, kuinka vaativiin ajatusprosesseihin pienetkin lapset kykenevät. Tämän asian tiedostamisella on merkitystä, jotta jokaiselle oppilaalle kyettäisiin antamaan opetusta, joka kehittää hänen ajatteluaan.

Avainsanat: matemaattinen ajattelu, matematiikka, ongelmanratkaisu, eriyttäminen, alkuopetus, RATKO-ongelmanratkaisumenetelmä.

SISÄLTÖ

1 HEITTÄKÄÄ PELASTUSRENGAS! - Ajatukset aiheeseen

Oletko tavannut ensimmäisen luokan oppilasta, joka hallitsee lukualueen 0-100 muiden harjoitellessa kymmentä pienempiä lukuja? Entä lasta, joka laskee sujuvasti suurehkoilla luvuilla ja hallitsee kymmenylityksen muun luokan aloitellessa yhteenlaskun alkeista? Tällaisia lapsia on lähes jokaisella ensimmäisellä luokalla ja he joutuvat usein opiskelemaan muun luokan tahdissa esimerkiksi ajankäyttöön tai ryhmäkokoihin liittyvien ongelmien vuoksi. Kuitenkin jokaisen lapsen olisi saatava mahdollisuus kaikkeen siihen opetukseen ja koulutukseen, johon hänellä on taipumuksia, josta hän on kiinnostunut tai jota hän kykenee omaksumaan (Brunell 1993, 43). Koulun täytyy valmistaa lapsia kohtaamaan ensi vuosituhannen uudet haasteet myös matematiikassa. Entistä enemmän tarvitaan monipuolista laskutaitoa, joka sisältää paljon muutakin kuin sujuvat aritmeettiset taidot ja selvän lukukäsitteen. Koulumatematiikassa tulisikin kiinnittää paljon enemmän huomiota siihen, miten lapsi oppisi ajattelemaan matemaattisesti. (Nunes & Bryant 1996, 2 - 5.)

Usein alkuopetuksen matematiikan opetuksessa kiinnitetään huomiota heikosti menestyviin lapsiin. Ikäheimo (1998, 245) suosittelee erilaisten testien tekemistä heti ensimmäisen luokan alussa, jotta nimenomaan heikosti menestyneiden oppilaiden oppimista voidaan tukea ja ryhdytään toimenpiteisiin heidän ajattelunsa kehittämiseksi. Myös matemaattisten oppimisvaikeuksien voittamiseksi löytyy kirjallisuudesta erilaisia keinoja, mutta matemaattisesti taitavien oppilaiden ajattelun kehittäminen jää opettajan omien valmiuksien ja kokemusten varaan. Pystyäkseen auttamaan oppilaiden ajattelun kehittymistä opettajan täytyy tuntea taitavan oppilaan ajattelun luonnetta ja ominaispiirteitä. Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, millaista on kognitiivisesti kehittyneen lapsen ajattelu. Tätä tutkimme Matikka-kerhossa, joka keskittyi ongelmanratkaisutaitoja ja loogista ajattelua vaativiin tehtäviin. Valitsimme Matikka-kerhoon testien ja tutkimusluokan opettajan kokemuksien perusteella kolme oppilasta - Kimmon, Leenan ja Jannen -, jotka osoittivat hallitsevansa suurimman osan ensimmäisellä luokalla opetettavista matemaattisista taidoista. Lisäksi halusimme tietää, miten ongelmanratkaisun ja eriyttämisen avulla voidaan vastata matemaattisesti taitavan lapsen tarpeisiin alkuopetuksen matematiikan opetuksessa.

Tutkimus tehtiin Jyväskylän Normaalikoulun ala-asteella päättöharjoittelumme yhteydessä. Se on laadullinen tapaustutkimus, jossa on myös toimintatutkimuksen piirteitä. Aineistonkeruumenetelminä käytimme haastattelua ja osallistuvaa havainnointia, jonka avulla pyrimme tutustumaan lapsiin eri näkökulmista. Lisäksi nauhoitimme lähes kaikki Matikka-kerhotapaamiset sekä otimme talteen lasten tehtävälomakkeita ja ratkaisumalleja. Pidimme myös matematiikan tunteja, joissa pyrimme eriyttävään matematiikan opetukseen ottaen huomioon oppilaiden erilaiset taidot.

Olemme käyttäneet tutkimusselosteessa melko paljon suoria lainauksia oppilaiden puheesta, jotta lukija voi helpommin ymmärtää lasten ajatuskulkuja. Vanhempien ja opettajan haastatteluista lainatut katkelmat puolestaan antavat selvyyttä asioista, joista emme ole saaneet tietoa lapsilta. Tekstikatkelmien avulla perustelemme tulkintojamme tutkittavasta asiasta ja pyrimme elävöittämään tekstiä. Ne tuovat myös parhaalla mahdollisella tavalla esiin lasten oman äänen tutkimuksessamme (vrt. Savolainen 1991, 453). Samalla annamme lukijalle mahdollisuuden omaan tulkintaan. Olemme käyttäneet tutkimusraportissa peitenimiä lasten anonymiteetin säilyttämiseksi.

Matikka-kerhossa yllätyimme usein lasten kehittyneistä matemaattisista taidoista. Oppilaat ymmärsivät kertolaskun periaatteen, kykenivät operoimaan negatiivisilla luvuilla ja tutustuivat summan parillisuuden sääntöön. Oppilaiden toiminnan seuraamisen kautta vakuutuimme eriyttämisen välttämättömyydestä myös taitavien lasten kohdalla. Taitava oppilas on mielestämme usein hädässä, koska hän ei välttämättä saa taitojaan vastaavaa opetusta. Lapsi joutuu sinnittelemään alkuopetuksen matematiikan ja omien taitojensa muodostaman pelastusrenkaan varassa, joka kuitenkin uhkaa revetä.

2 TIUKKA OTE RENKAASTA - Matematiikan maailmaan

2.1 Näkökulmia matematiikkaan

Matematiikka pohjautuu kreikan kielen sanaan, joka tarkoittaa oppimisen taitoa. Otavan Suuren Ensyklopedian (1979) mukaan matematiikkaa on aikaisemmin pidetty tieteenä, jonka piiriin kuuluvat kaikki sellaiset objektit, joiden tutkimiseen voidaan käyttää mittaamista ja laskemista. Nykyään lähes kaikkea toimintaa, joka nojautuu systemaattiseen ja rationaaliseen ajatteluun sekä käyttää apunaan erilaisia merkkejä eli symboleja, pidetään matematiikkana. Kirjassa mainitaan osuvasti, että matematiikasta on turha yrittää kirjoittaa tyhjentävää määritelmää, joka ei sitä kirjoitettaessa olisi jo osittain vanhentunut. (Otavan Suuri Ensyklopedia 6, 1979)

Matematiikka on hyvin vanha tieteenala ja laaja kulttuurisektori. Se on alunperin kehitetty käytännön tarkoituksiin: maanmittauksiin, ajan määrityksiin, kaupan ja rakentamisen tarpeisiin (Leino 1992, 42). Kuitenkin matematiikkaa opetetaan koulussa hyvin mekaanisesti ja korkealentoisesti ilman konkreettisia käytännönsovellutuksia. Matematiikan voi ymmärtää maailmankuvan jäsentämiseksi tai vaikkapa arkipäivän elämän suunnitteluksi (Haapasalo 1993, 268). Matematiikka on myös vahvasti dynaaminen tietorakennelma (Leino 1992, 41), jonka aksioomien kumoamiseksi tai uusien löytämiseksi moni tiedemies tänäkin päivänä työskentelee. Tämän päivän ihmiselle matematiikan merkitys korostuu: monimutkaistuvan maailman ymmärtämiseksi tarvitaan usein loogista ajattelutaitoa ja erilaisia ratkaisumalleja, joita matematiikan hallitseminen tuottaa (Pietilä 1994, 169). Matematiikka on myös selkeä, tehokas ja kansainvälinen kommunikoinnin väline (Kupari 1993, 116).

Malaty (1997) ottaa erilaisen ja monipuolisen näkökulman esiin matematiikasta. Hänen mielestään matematiikkaa on kaikessa, mitä ihminen on tehnyt ja kaikessa, mitä ihminen ei ole tehnyt, koska jokaisella asialla on määrä ja muoto. Sen lisäksi että matematiikkaa on kaikkialla ympärillämme, Malaty väittää sitä olevan myös meissä itsessämme. (Malaty 1997, 53 - 54.) Jos opettaja pystyisi hahmottamaan matematiikan opetuksen näin kokonaisvaltaisesti, se ei voisi olla vaikuttamatta hänen opetukseensa.

Jokaisella koulua käyneellä ihmisellä on oma käsityksensä siitä, mitä matematiikka on koulussa. Se on oppiaine, joka herättää usein voimakkaita tunteita. Ala-asteen ensimmäisillä luokilla matematiikka koetaan usein mukavana, mutta myöhemmin monet kokevat sen vastenmieliseksi ja vaikeaksi. Useat ihmiset ajattelevat matematiikan olevan vain pelkkiä peruslaskutoimituksia, joita tarvitaan koulussa, kotona, työssä tai harrastuksissa (Berry & Sahlberg 1995, 30). Tämä käsitys on luultavasti suoraan verrannollinen heidän omiin koulukokemuksiinsa, jotka eivät ole vastanneet matematiikan monipuolista luonnetta. Valitettavasti oppikirjasidonnainen opetus, joka korostaa mekaanisia rutiinilaskutoimituksia oppilaan oman ajattelun sijaan, on Suomessa yhä yleistä.

2.2 Matematiikan merkityksestä koulussa

Keranto (1990, 27) on artikkelissaan pohtinut matematiikan merkitystä kouluopetuksessa. Matematiikan opetus on hänen mielestään perinnön välittämistä, koska matematiikka vanhana tieteenalana muodostaa oleellisen osan ihmiskunnan kulttuurihistoriallisesta perinnöstä. Sen takia opetuksessa olisikin välillä tärkeää palata matematiikan juurille ja tarkastella ensimmäisten matemaatikkojen laatimia ratkaisuja.

Teknistyneessä yhteiskunnassa matematiikan opetuksen merkitys on kasvanut entisestään. Matematiikka auttaa monimutkaistuneen maailman ymmärtämisessä kehittämällä johdonmukaista ajattelua ja ajatusmallien rakentamista (Pietilä 1994, 169). Se antaa käyttökelpoisia ja välttämättömiä välineitä yhteiskunnan käytänteistä selviytymiseen (Keranto 1990, 27).

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (1994, 77) peruskoulun matematiikan opetuksen tavoite määritellään seuraavasti: "Kaikille oppilaille tarjotaan mahdollisuus hankkia peruskoulun aikana sellaiset matemaattiset perustiedot ja -taidot, jotka luovat pohjaa jatko-opinnoille ja antavat valmiuksia selviytyä jokapäiväisissä toiminnoissa ja työelämässä." Matematiikka nähdäänkin hyödyllisenä monille muille tieteellisen toiminnan ja yhteiskunnan aloille (Kupari 1993, 116).

2.3 Miksi matematiikan opetus kaipaa uudistusta?

Matematiikan opetus 1990-luvulla -niminen työryhmä on pohtinut matematiikan opetuksen kehittämistä ja kehittymistä Suomessa. Ryhmän mukaan opetuksessa olisi painotettava muunmuassa ongelmanratkaisutaitojen kehittämistä, oppilaan mahdollisuuksia yksilöllisyyteen matematiikan opiskelussa sekä matematiikan puhumista. Vastaavasti opetuksessa tulisi vähentää mm. mekaanisia kynäpaperi-laskutehtäviä sekä "yksi strategia - yksi vastaus" -tyyppisiä tehtäviä (Halinen, Hänninen, Joki, Leino, Näätänen, Pehkonen, Pehkonen, Sahlberg, Sainio, Seppälä & Strang 1991, 25).

On väitetty, että oppilaiden matemaattiset taidot ovat heikentyneet, eivätkä he osaa soveltaa tai käyttää omaksumiaan tietoja esimerkiksi ongelmanratkaisutilanteissa (Kupari 1993, 114). Perinteisesti toteutetulla matematiikan opetuksella ei näytetä saavutettavan haluttuja tavoitteita (Kinnunen & Vauras 1997, 273). Oppilaat oppivat monia asioita, kuten laskuoperaatioita, algoritmeja ja muistisääntöjä, mutta niiden ymmärtäminen ja soveltaminen käytännön ongelmiin jää usein puutteelliseksi. Oppilaat eivät opi ajattelemaan joustavasti ongelmia, koska matematiikan opetus pohjautuu liikaa teknisten menettelytapojen ja laskuoperaatioiden harjoitteluun, jolloin aikaa jää liian vähän oppilaan omaehtoiseen pohdintaan ja asioiden tutkiskeluun. (Kinnunen & Vauras 1997, 273.) Ongelmanratkaisuun painottuva opetus on yksi tie monipuolisempaan ja ajattelutaitoja kehittävään matematiikan opetukseen.

2.4 Ongelmanratkaisu matematiikassa

Puhuttaessa ongelmanratkaisusta matematiikassa tulee usein mieleen sanalliset tehtävät ja niiden ratkaiseminen sekä tehtävien sovellukset. Ongelman ratkaiseminen ei kuitenkaan tarkoita samaa kuin laskeminen ja sovellukset ovat vain pieni osa ongelmanratkaisua. Ongelmanratkaisu on tapa ajatella ja etsiä perusteluja aidoissa matematiikkaan liittyvissä toiminnoissa ja tehtävissä (Barb & Larson Quinn 1997, 536 - 542). Rutiinitehtävästä ongelma eroaa siinä, että yksilö joutuu yhdistelemään hänelle tuttuja tietoja ja taitoja uudella tavalla päästäkseen ratkaisuun. Olennaista ongelmalle onkin, että oppilaat eivät heti löydä siihen ratkaisua, vaan tielle tulee jokin este (Zimmermann 1991, 9). Rutiinitehtävästä oppija sen sijaan tunnistaa heti tehtävän vaatimat toimenpiteet (Pehkonen, Pekama & Seppälä 1991, 11).

Keskeistä ongelmanratkaisussa ei ole tietää oikeaa vastausta, vaan yritykset ratkaista ongelmatilanteita. Yrityksissä voi olla myös umpikujiin johtavia ratkaisuteitä, jotka ovat oppimisen kannalta olennaisia. (Pehkonen ym. 1991, 23.) Ongelmanratkaisussa ei kuitenkaan riitä pelkkä tiedollinen valmius ja sopivimpien toimenpiteiden valitseminen. Ongelman ratkaisijan täytyy myös ponnistella pitkäjänteisesti saavuttaakseen asettamansa päämäärän (Pehkonen ym. 1991, 11).

Oppija voi kohdata ongelmanratkaisutilanteessa monenlaisia ongelmia, joita ratkaisija eikä ongelman esittäjä (esim. opettaja) ole mahdollisesti ajatellut etukäteen. Matikka-kerhossa tällaisia tilanteita tuli eteen useita, koska emme tarkoituksella olleet ratkaisseet kaikkia ongelmia etukäteen. Ongelmien tulee olla mielenkiintoisia ja mahdollisimman paljon oppijan elämään liittyviä. Eri ongelmat vaativat erilaisia taitoja, jotka on otettava huomioon ongelmaa laadittaessa. (Pehkonen ym. 1991, 15 - 16.) Matikka-kerhossa meidän tuli ottaa huomioon erityisesti oppilaiden kehittyvä lukutaito.

2.4.1 Ongelmanratkaisu koulussa

Ongelmanratkaisua on pidetty usein ylimääräisenä lisänä tavalliseen kouluopetukseen. Sitä on käsitelty lähinnä soveltamisen yhteydessä. Kuitenkin ongelmanratkaisua tulisi opettaa rinnakkain matemaattisten tietojen ja taitojen oppimisessa, eikä erottaa sitä omaksi erilliseksi kokonaisuudeksi (Pehkonen ym. 1991, 17). Ongelmanratkaisua pitäisi integroida kaikilla matematiikan tunneilla ja sitä tulisi käsitellä jatkuvana prosessina. Lisäksi tulisi muistaa, ettei ongelmanratkaisu ole tarkoitettu vain matematiikassa taitaville oppilaille, vaan sen tarkoituksena on kehittää jokaisen lapsen ajattelua.

Matemaattisen ongelmanratkaisun avulla oppilas voi ymmärtää, että aina on olemassa perustelu, jota on etsittävä (Malaty 1993, 16). Myös Pehkonen ym. (1991, 11) perustelevat ongelmanratkaisua kouluopetuksessa monella eri tavalla. Ongelmanratkaisu kehittää yleisiä tiedollisia valmiuksia ja edistää luovuuden kehittymistä, mitä arvostetaan useilla eri ammattialoilla. Lisäksi ongelmanratkaisu on osa matemaattista soveltamista ja motivoi tehokkaasti oppilaat matematiikan opiskeluun.

Ongelmanratkaisuun ryhdyttäessä on ensin saatava lasten mielenkiinto kohdistumaan ongelmaan, erityisesti silloin, jos lapset eivät ole tottuneita ongelmanratkaisijoita. Jotta ongelmanratkaisuprosessista muodostuisi mielekäs, on varmistettava, että oppilaalla on riittävät pohjatiedot ja -taidot (Lahdes 1997, 193). Kuitenkin on tärkeää muistaa, että myös ongelmanratkaisun avulla voidaan oppia uutta, ettei ongelmanratkaisu muodostuisi pelkäksi vanhan kertaamiseksi ja soveltamiseksi. Opettajan tuleekin olla taitava valitessaan ongelmaa, koska sen pitää olla riittävän vaativa herättääkseen ponnistelua ja mielenkiintoa, mutta toisaalta riittävän helppo, ettei ongelman ratkaiseminen muodostu ylivoimaiseksi lapselle (Lahdes 1997, 194). Ongelmien tulee antaa oppilaille mahdollisuus työskennellä yhdessä, käyttää teknisiä välineitä, keskittyä oikeisiin ja mielenkiintoisiin matemaattisiin ideoihin ja kokea matematiikan voima ja hyödyllisyys. Niiden tulisi sisältää myös vaikeita lukuja, liikaa tai liian vähän tietoa, useita ratkaisuja tai ei ratkaisua ollenkaan, jotta ne antaisivat oppilaille realistisen kuvan arkipäivän monimutkaisista ongelmista. (Haapasalo 1998, 87.)

Ongelmakeskeinen opetus toteutuu tilanteessa, jossa opettaja tarkastelee käsiteltäviä asioita ongelmallisina, eikä tarjoa oppilaille valmista tietoa. Opettaja ei saa olla mallin näyttäjä tai ratkaisun selittäjä, vaan pikemminkin neuvonantaja (Pehkonen ym. 1991, 18). Tarkoituksena on saada oppilaat etsimään itsenäisesti tietoa sekä käsittelemään ja arvioimaan sitä (Pehkonen ym. 1991, 21). Oleellista on vuorovaikutus opettajan ja oppilaiden välillä sekä oppilaiden keskuudessa. Opetusprosessin tulisi sisältää sekä hiljaista itsenäistä työtä että keskustelua (Malaty 1993, 19). Hyvä opetusmenetelmä antaa lasten olla aktiivisia ajattelijoita tunnilla.

Ongelmanratkaisussa on keskeistä ymmärtäminen, joka tuottaa lapsille oppimisen iloa ja motivoi heitä ongelmanratkaisuun myös arkielämässä (Malaty 1993, 16). Ymmärtämisen on määritellyt mm. Lahdes (1997, 192) seuraavasti: "oppilas käsittää mitä viestissä välitetään ja hän osaa lisäksi käyttää viestissä välitettyä aineistoa tai ideaa." Ymmärtäminen on siis lapsen mielessä tapahtuva prosessi, joka voi olla salamannopea ahaa-elämys. Kuitenkin usein ymmärtäminen pohjautuu pitkäaikaiseen oppimisjaksoon, jossa on tapahtunut monenlaisia henkisiä prosesseja sekä niiden vuorovaikutusta (Dreyfus 1994, 25).

Jotta oppilaan ongelmanratkaisukyky todella kehittyisi, hänellä täytyy olla mahdollisuus yksin tai pienessä ryhmässä kokeilla, arvata ja tehdä myös virheitä (Pehkonen ym. 1991, 18). Kouluopetuksessa on korostettu tehtävien ratkaisemista itsenäisesti ilman muiden apua, mikä on liitetty usein myös ongelmanratkaisutilanteisiin (Talvenmäki, Simula & Meisalo 1994, 207). Pehkonen ym. (1991, 18) kuitenkin pitävät ryhmätyöskentelyä ongelmanratkaisun kannalta tehokkaampana kuin yksilöllistä työskentelyä; kuitenkaan ryhmä ei saa olla liian suuri. Opettajan tehtävänä on luoda myönteinen ilmapiiri luokkaan, lisätä oppilaiden valmiuksia luovaan toimintaan, parantaa oppilaiden asenteita ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan sekä kehittää oppilaan tiedollisia valmiuksia (Pehkonen ym. 1991, 18). Lisäksi opettajan tulisi esittää ohjailevia kysymyksiä ja pyrkiä siten suuntaamaan oppilaan ajattelua (Pehkonen ym. 1991, 22). Ongelmanratkaisussa on tärkeää myös kiireetön ilmapiiri, koska kriittinen ajattelu vie aikaa. Barb ja Larson Quinn (1997, 536 - 542) korostavat pitkäjänteistä työtä ongelmanratkaisun parissa, koska menestys ongelmanratkaisussa tulee harjoituksen kautta. Tähän tutkimukseen liittyneessä Matikka-kerhossa olosuhteet olivat mielestämme ongelmanratkaisulle otolliset.

2.4.2 Ongelmanratkaisun vaiheet

Ongelmanratkaisu on tapahtuma, jossa jokaisella ongelmalla on tietty *lähtötilanne* sekä *päämäärä*, jota kohti on tarkoitus edetä (Lahdes 1997, 13). Lähtötilanne ja päämäärä voivat olla joko kirjoitettuna tai kätkettynä ikään kuin rivien väliin, jolloin ongelmanratkaisijan ensimmäinen tehtävä on tunnistaa ongelma. Ongelmanratkaisuprosessi on hyvin monimuotoinen ja sitä voidaan lähestyä eri tavoilla, mikä näkyy jo erilaisten ongelmanratkaisumallien lukumäärästä. Myös lasten ja aikuisten ongelmanratkaisutavat saattavat poiketa yllättävästi toisistaan. Usein lapsi käyttää enemmän luovuutta kuin aikuinen, joka ratkaisee tehtäviä opitun tavan mukaan. Myös Kimmon isä on kiinnittänyt huomiota ongelmanratkaisutapojen erilaisuuteen.

> Niin joskus puhutaan näistä asioista, niin sen vain huomasin, että se minun opittu ongelmanratkaisu, matemaattisen ongelmanratkaisumalli saatto olla hieman erilainen kuin lapsen ajatus, mutta lopputuloshan meillä oli sama. Ja sitte mä kysyinkin, että miten sä sen teit.

Bloom on erottanut ongelmanratkaisun kaksi tapaa: analyysin ja synteesin (Lahdes 1997, 193). Analyysissä ongelma hajotetaan osatekijöihin ja tutkitaan osien keskinäistä järjestystä ja suhteita. Synteesissä yhdistetään ennestään tuttuja osia toisiinsa uudella ja omaperäisellä tavalla, millä pyritään organisoituun kokonaisuuteen ja ongelman ratkaisemiseen. Näitä molempia tapoja käytetään ongelmanratkaisussa, missä ne voivat esiintyä myös vuorotellen ja lomittain saman ongelman ratkaisemisen eri vaiheina.

Myös Dewey on hahmotellut ongelmanratkaisun vaiheita. Hänen mielestään ongelmanratkaisuprosessi koostuu seuraavista aineksista: ongelmatilanne, ongelman lähempi selvittely ja rajaaminen, hypoteesi ongelman ratkaisemiseksi, sen seurausten arviointi sekä ongelman ratkaisu käytännössä (Lahdes 1997, 11). Ongelmanratkaisu on rekursiivinen prosessi, jossa voidaan palata useita kertoja taaksepäin edellisiin vaiheisiin (Takala 1992, 84). Yksi tärkeimmistä lähtökohdista erilaisille ongelmanratkaisumalleille on Polyan (1973, xvi - xvii) antama nelivaiheinen ongelmanratkaisuprosessi, jota voidaan verrata tässä tutkimuksessa käyttämäämme RATKO-ongelmanratkaisumenetelmään (vrt. Allen & Allen 1998). Polyan vaiheet on esitetty vasemmalla ja niitä vastaavat RATKO:n vaiheet oikealla.

1) Ongelman ymmärtäminen	*(Rajaa)*
2) Suunnitelman laatiminen	*(Arvioi)*
3) Suunnitelman toteuttaminen	*(Tutki, Keksi)*
4) Ratkaisemisen tarkastelu.	*(Onnistuitko)*

RATKO-ongelmanratkaisuprosessin vaiheet ovat siis varsin samansuuntaiset Polyan vaiheiden kanssa, mutta niitä on yksinkertaistettu. Alkuperäinen RATKO (Allen & Allen 1998) on kehitetty kaikenlaiseen ongelmanratkaisuun, mutta tutkimustamme varten olemme muokanneet sen lähinnä lasten matemaattiseen ongelmanratkaisuun sopivaksi.

Ongelman ymmärtämisvaiheen (*Rajaa*) tarkoituksena on, että ongelmanratkaisija selvittää itselleen, mitä tehtävässä kysytään ja mitkä asiat tunnetaan jo ennestään. Usein ymmärtämistä auttaa kuvion piirtäminen ongelmatilanteesta. Keskeinen vaihe ongelmanratkaisussa on kuitenkin suunnittelu (*Arvioi*), jolloin ratkaisija miettii eri vaihtoehtoja ja keinoja päämäärään pääsemiseksi. Usein suunnitteluvaihetta ei voi tarkasti erottaa toteutusvaiheesta, koska ne nivoutuvat toisiinsa ja toteuttamisvaiheessakin (*Tutki, Keksi*) voidaan aina uudelleen palata suunnitteluun. Tarkasteluvaihe (*Onnistuitko)* on ongelmanratkaisuprosessin viimeinen vaihe, jossa pyritään lopulliseen selvyyteen siitä, mitä tehtiin ja miksi. Tarkastelu jää kuitenkin valitettavasti usein liian vähälle huomiolle, vaikka sen avulla voidaan oppia paljon omasta ongelmanratkaisusta. (Pehkonen ym.1991, 26-27).

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden 1994 mukaan ongelmanratkaisuprosessissa keskeistä on "oikeiden kysymysten asettaminen, ongelman hahmottaminen, oikeiden ratkaisumenetelmien löytäminen ja läpivieminen sekä tulosten arviointi ja muotoilu" (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 76). Juuri näitä vaiheita opeteltiin RATKO-ongelmanratkaisumenetelmän avulla.

3 LISÄÄ APUA TULOSSA - Alkuopetus osana lapsen kasvatusta

3.1 Alkuopetuksen yleiset tavoitteet

Alkuopetus sisältää peruskoulun 1. ja 2. luokan opetuksen (Peruskoulun opetuksen opas: Alkuopetus 1988, 3). Alkuopetuksen tavoitteita voidaan kuvata käyttämällä seuraavia persoonallisuuden kolmea komponenttia: *toiminnallisuus, sosiaalis-emotionaalisuus* ja *kognitiivisuus* (Kyröläinen 1994, 54). Kuhunkin komponenttiin liittyy omat tavoitteensa, jotka jakautuvat pienimpiin osatavoitteisiin. Toiminnallisiin tavoitteisiin kuuluvat esimerkiksi motivaation syntyminen, omaehtoisen tavoitteenasettelun ja arviointikyvyn kehittyminen (Kyröläinen 1994, 55). Sosiaalis-emotionaalisia tavoitteita ovat itsenäisyyden voimistaminen, aktiivisuuden virittäminen ja tunne-elämän rikastuttaminen mm. ystävyyden kokemuksella (Kyröläinen 1994, 56). Myös positiivisen minäkuvan luominen sekä myönteinen kuva ympäristöstä ja ihmisestä ovat alkuopetuksen tärkeitä tavoitteita. Kognitiiviset taidot tarkoittavat lähinnä tiedonkäsittelytaitoja: vastaanottamista, tallentamista, soveltamista ja luovaa ajattelua. Nämä tavoitteet ovat hyvin laajoja alkuopetusikäiselle lapselle ja vaativat suotuisia olosuhteita toteutuakseen. (Kyröläinen 1994, 56.)

Alkuopetuksen tavoitteet ovat hyvin kokonaisvaltaiset. Opettajalla on mahdollisuus suunnitella ja toteuttaa työtään hyvin laaja-alaisesti. Tärkeintä on kuitenkin lapsen kunnioittaminen sekä hänen kokonaisvaltaisen kasvunsa ja kehityksensä tukeminen (Kyröläinen 1994, 60). Ensimmäisillä kouluvuosilla on ratkaiseva merkitys siihen, miten oppilas suhtautuu tulevaisuudessa kouluun, itseensä ja toisiin ihmisiin.

3.2 Alkuopetuksen pedagogiikkaa

Traditionaalinen opetusnäkemys korostaa tulosta eli produktia oppimisen tavoitteena. Tämän opetusnäkemyksen mukaan opettaminen on tiedon jakamista ja oppiminen tiedon vastaanottamista. Tämä kuitenkin johtaa usein vain pinnalliseen oppimiseen, eikä anna oppijalle mahdollisuutta asioiden syvälliseen ja kriittiseen tarkasteluun sekä ymmärtämiseen. (Ikäheimo 1995, 14.)

Empiristinen opetus korostaa konkreettista materiaalia ja siitä tehtäviä aistihavaintoja oppimisen lähtökohtana. Tärkeää on, että oppilas tekee paljon itse käyttäen ympäristöään tiedonlähteenään. Taustalla empiristisessä oppimiskäsityksessä on kuitenkin Ikäheimon (1995) mielestä virheellinen ajatus siitä, että kaikki ihmiset kokevat tapahtumat samanlaisena ja havaitsevat samoja asioita. (Ikäheimo 1995, 14.)

Konstruktivistinen oppimiskäsitys korostaa oppimista aktiivisena tapahtumana. Oppilas itse rakentaa ajatteluaan aikaisempien kokemustensa pohjalta, muokaten ja tarkistaen jo olemassa olevien tietorakennelmiensa paikkansapitävyyttä (Ikäheimo, Aalto & Puumalainen 1997, 8). Elinikäisen oppimisensa aikana ihminen rakentaa itse omat ajattelurakenteensa, jotka muodostavat laajoja verkostoja (Ikäheimo 1995, 14).

Opettajan rooli muuttuu ratkaisevasti siirryttäessä behavioristisesta oppimiskäsityksestä konstruktivistiseen: aktiivisesta tiedonjakajasta kehittyy oppilaan oppimista seuraava ohjaaja, jonka tehtävänä on luoda sopiva oppimisympäristö lapsen tarkoituksenmukaiselle kehittymiselle (Ikäheimo ym. 1997, 8).

3.3 Alkuopetuksen matematiikka

3.3.1 Sisällöt ja tavoitteet

Alkuopetuksen matematiiikka voidaan jakaa neljään sisältöalueeseen:

1. lukujonot, lukujen hajoittaminen ja koonta sekä 10-järjestelmä
2. yhteen- ja vähennyslaskut päässä ja allekkain
3. kerto- ja jakolaskun käsite
4. mittaaminen, geometria ja tilastot. (Ikäheimo 1997, 246).

Osa-alueissa ei erikseen ole mainittu ongelmanratkaisua ja soveltamista, mutta sen tulisi lomittua jokaiseen osa-alueeseen. Matematiikka tulisi yhdistää arkipäivän tilanteisiin, jolloin keskeisten osa-alueiden oppiminen onnistuu helpommin (Ikäheimo 1997, 246; Ikäheimo ym. 1997, 10).

Tarkemmin alkuopetuksen matematiikan osa-alueet Ikäheimo ym. (1997, 10) ovat määritelleet seuraavasti:

1. Luokittelu
2. Vertailu
3. Järjestykseen asettaminen ja sarjoittaminen
4. Päätteleminen
5. Lukukäsite
6. Lukujonot
7. Järjestysluvut
8. Lukujen hajoittaminen ja koonta
9. Laskutoimitukset
10. 10-järjestelmä
11. Mittaaminen
12. Geometria
13. Tilastot

Ikäheimo (1997, 246) kiinnittää huomiota myös solmukohtiin, joiden varmaan ja sujuvaan hallintaan tulisi alkuopetuksessa kiinnittää huomiota. Solmukohta on "sellainen taito tai keskeinen oppisisältö, jonka hallinnan puute aiheuttaa oppimisvaikeuksia" (Ikäheimo ym. 1997, 11). Alkuopetuksen matematiikan solmukohdiksi Ikäheimo nimeää yhteen- ja vähennyslaskut lukualueella 0-20, 10-järjestelmän periaatteen ja kertolaskun käsitteen (Ikäheimo 1997, 246). Erityisesti lukualueen 0 - 20 laskujen automaattinen hallinta on ensiarvoisen tärkeää, koska niiden harjoittelemiseen ei enää palata alkuopetuksen jälkeen (Ikäheimo ym. 1997, 14).

Peruskoulun matematiikan opetukselle asetetuista tavoitteista (Peruskoulun opetuksen opas: Alkuopetus 1988, 57) Matikka-kerhossa korostettiin ongelmien ratkaisemista, päättely- ja arviointitaitoa, varmaa laskutaitoa, myönteistä asennetta ja matemaattista harrastuneisuutta sekä johdonmukaista ja täsmällistä ajattelua ja asioiden esittämisen harjoittelua.

3.3.2 Didaktiikkaa

Alkuopetuksen didaktiikassa painotetaan leikkiä osana lapsen maailmaa ja oppimista. Etenkin sitä tulee korostaa matematiikan opetuksessa, koska oikein suunniteltuna ja toteutettuna leikki kehittää lapsen ajattelua ja matemaattisia taitoja. Toiminnallisuuden ja leikkimisen kautta voidaan havainnollistaa konkretian muuttumista symboleiksi ja tätä kautta vaikuttaa lapsen ajattelun kehittymiseen. Lisäksi leikillä on vaikutusta lapsen myönteiseen asennoitumiseen matematiikkaan: se on usein jännittävää ja voi antaa positiivisesti vaikuttavia onnistumisen elämyksiä. (Ikäheimo ym. 1997, 6).

Matematiikan didaktiikkaa ovat pohtineet useat kuuluisat psykologit ja kasvattajat. Montessori oli kuuluisa erilaisista oppimisvälineistään, joiden avulla hän pyrki antamaan oppilaille konkreettisen kokemuksen. Tätä kautta pyrittiin oppilaan omaan oivallukseen ja vasta myöhemmin abstraktiin sovellukseen. (Ikäheimo 1995, 10.) Tutkimuksessa mukana ollut luokanopettaja korostaa myös havainnollisuuden ja konkreettisuuden merkitystä pienten lasten matematiikassa:

> Ja se on mun mielestä tärkeetä, että mahollisimman pitkään mennään näitten konkreettisten välineiden avulla ja kun tuntuu, että lapsi vain tarvitsee. Liian nopea siirtyminen sitten niistä pois tekee kyllä hallaa myöhemminkin.

Myös Galperin korosti konkreettisen materiaalin merkitystä. Uuden asian opetteleminen alkaa hänen mielestään aina konkreettisesta mallista. Galperin on kehittänyt toiminnan tasot, joita voidaan kutsua myös sisäistämisen asteiksi. Ihminen voi hallita henkisen toiminnon neljällä eri tasolla: *käyttäen apuna konkreettista mallia, puhuen ääneen, puhuen itsekseen* ja *miettien yksinomaan ajatuksissaan.* Näillä vaiheilla on ratkaiseva merkitys prosessissa, jossa ulkoinen toiminta muuttuu sisäiseksi tiedoksi tai ymmärtämiseksi. (Ikäheimo 1995, 12.)

Alkuopetusikäinen lapsi tekee ympäristöstään jatkuvasti havaintoja. Matematiikan oppiminenkin helpottuu, kun opetuksessa käytetään useampia aistikanavia pelkkään visuaaliseen tai auditiiviseen pohjautuvan opetuksen sijasta. Yleensä matematiikan tunneilla lasketaan liian paljon ja puhutaan liian vähän. (Ikäheimo ym. 1997, 9.) Täytyisi muistaa, että matemaattiset oivallukset eivät synny tyhjiössä, vaan lapsen täytyy olla valmistautunut uuteen ajatteluun aikaisempien kokemustensa kautta

(Ervynck 1994, 42). Keskustelu onkin ensiarvoisen tärkeää matematiikan opiskelussa, koska on tärkeää saada matemaattiset käsitteet ja termit lapsen aktiiviseen sanavarastoon. (Ikäheimo ym. 1997, 7). Samasta asiasta kertoi myös tutkimukseen osallistunut luokanopettaja:

> Tavallaan tämä matematiikka kielennettäis, että puhutaan paljon, että ei vain itsekseen lasketa tai ratkaista ongelmia vaan avataan sitä keskustelemalla.

Oppimisympäristö. Oppimisympäristö on erittäin ratkaiseva tekijä erityisesti pienten lasten oppimisessa. Matematiikan opetuksessa tulisikin kiinnittää entistä enemmän huomiota siihen, että oppimisympäristö luotaisiin suotuisaksi uusien matemaattisten oivalluksien löytämiseksi. Oppimisympäristöstä tulisi huomata, että matematiikkaa on kaikkialla jokapäiväisissäkin toiminnoista. Tutkimukseen osallistuneen luokanopettajan mielestä lapsen kokemukset arkipäivän matematiikasta auttavat häntä omaksumaan matematiikan taitoja helpommin ja näkemään matematiikan merkityksen arkielämässä.

> Kyllä mä näkisin, että kaikenlaiset kokemukset matematiikasta ennen kouluikää, että ne on aika merkittäviä - - käyttääks hän millään tavalla rahaa tai tutkitaanko yhdessä kellon aikoja, että onko niillä yhteyttä sen lapsen elämään. Siis jos lapsi saa kaiken liian valmiina, niin eihän hän näe sitä tarvetta, tavallaan käytännön funktiota, että mihin sitä matematiikkaa tarvitaan.

3.3.3 Opetuksen eriyttäminen

Jokaisen lapsen tulisi saada edellytystensä mukaista opetusta. Opettajan tehtävä ei ole helppo, koska kaikilla luokkatasoilla on oppilaita, joiden kehitystaso ja -valmiudet eroavat huomattavasti toisistaan (Ikäheimo 1995, 9). Lapsi kehittyy tiettyjen laadullisten muutosten funktiona: kehitysjärjestys on vakio, mutta kehitysnopeus vaihtelee (Liikanen 1995, 11).

Kehityksen erot ovat yleensä suurimmillaan ensimmäisen luokan syksyllä. Eriyttämisen välttämättömyys alkuopetuksen matematiikassa korostuu, koska suuri osa ensimmäisen luokan oppilaista osaa monia ensimmäisellä luokalla opetettavia asioita jo kouluun tullessaan. Kerannon 1970-luvun lopulla tekemän tutkimuksen mukaan 95 % esikoululaisista hallitsi ensimmäisen luokan syksyllä opetettavan matematiikan lukuunottamatta oikeinkirjoituksellisia asioita (Keranto 1978). Kallonen-Rönkkö (1998) on tullut samansuuntaisiin tuloksiin. Hän mainitsee 25 vuotta alkuopetuksen parissa työskennelleen opettajan, jonka mukaan syyslukukauden matematiikan opetuksesta hyötyy vain pieni osa oppilaista. Suurin osa ensimmäisen luokan oppilaista kohtaa uusia asioita matematiikassa vasta kevätlukukaudella, taitavimmat vasta toukokuussa (Kallonen-Rönkkö 1998, 262). Kuitenkin alkuopetuksen matematiikan yhtenä tavoitteena on, että jokainen lapsi hallitsee mahdollisimman hyvin yhteen- ja vähennyslaskun alkeet (ks. s. 17). Tähän joudutaan luonnollisesti käyttämään paljon aikaa, jolloin matemaattisesti taitavien lasten tarpeita ei välttämättä oteta riittävästi huomioon.

Nopeuseriyttämisellä tarkoitetaan sitä, että jokainen lapsi voi edistyä oppimisessaan edellytyksiään vastaavasti (Kallonen-Rönkkö 1998, 263). Koskisen ja Siepin (1994, 19) mukaan myös lahjakkaiden oppilaiden osa-aikainen ryhmittely voi tarjota lahjakkaille oppilaille heidän kaipaamiaan haasteita ja kehitysmahdollisuuksia, jos toiminta on suunniteltu huolellisesti. Myös Clark (1988, 184) mainitsee oppilaiden tarpeiden huomioon ottamisen ja erilaisten tehtävien merkityksen lahjakkaiden oppilaiden kasvatusta käsittelevässä kirjassaan.

Suomessa ei ole juurikaan tutkittu tutkimuksessamme mukana olleiden oppilaiden ikäisiä matemaattisesti taitavia lapsia. Sen sijaan Fulkerson (1995) kertoo amerikkalaisessa päiväkodissa toteutetusta rikastuttamisohjelmasta. Se oli suunnattu nuorille matemaatikoille ja lukijoille. Ohjelman tarkoituksena oli antaa lapsille virikkeitä heidän oman erityisosaamisensa alalla vahvistaen heidän taipumuksiaan. Vastaavia ohjelmia on Fulkersonin mukaan toteutettu myös koululaisten parissa. Ohjelmat ovat auttaneet opettajia, kouluviranomaisia, vanhempia ja lapsia ymmärtämään, miten lapset oppivat asioita ympäröivästä maailmasta ja osallistuvat sen toimintaan. Fulkersonin mukaan välttämätöntä tällaisen ohjelman onnistumisen kannalta on vanhempien ja koko yhteisön toiminta ja tuki. (Fulkerson 1995, 117 – 120.)

Lahjakkaiden oppilaiden opetus voidaan järjestää Davisin ja Rimmin (Uusikylä 1994, 169) mielestä kolmella tavalla: *luokassa tapahtuvana erityisopetuksena*, jossa käytetään apuna ryhmityksiä ja lisämateriaalia, *täysiaikaisena erityisluokkaopetuksena* sekä *erityiskouluissa annettavana opetuksena*. Ikäheimo

(1995) korostaa, että ennenkuin matemaattisesti taitaville oppilaille annetaan muita lisätehtäviä, on heidän taitojensa todellisesta tasosta ja käsitteiden hallinnasta varmistuttava. Hänen mielestään lisätehtävien ongelmana saattaa olla se, että ne eivät vaadi oppilaalta uudenlaista ajattelua, jolloin turhautumisen vaara on suuri. (Ikäheimo 1995, 45.)

Puhuttaessa lahjakkaiden lasten erityisopetuksesta nostetaan usein esille kysymys elitismistä. Elitismissä on kyse siitä, että pelätään lahjakkaiden erityisopetuksen suovan lahjakkaille oppilaille etuoikeuksia, koska lahjakkaiden oletetaan pystyvän kehittymään ja nousemaan muita parempaan asemaan ilman muiden apua. Lahjakkaiden erityisopetuksen puolustajat puolestaan korostavat sitä, että jokaisen pitäisi voida saada opetusta omien tarpeidensa mukaisesti, jolloin myös koulutuksen tasa-arvoisuus toteutuisi. (Uusikylä 1994, 164 - 166.) Uusikylän (1994, 171) mielestä olisikin parempi puhua lahjakkaiden sijasta esimerkiksi kiinnostuneista oppilaista, jotta puheita elitismistä voitaisiin vähentää.

Oppimispelit eriyttämisen muotona. Oppimispelit ovat yksi keino matematiikan opetuksen eriyttämisessä. Pehkosen ja Pehkosen (1993, 9) mukaan matematiikan oppimispeleissä lapsi käyttää hyväkseen matemaattisia käsitteitä, harjaannuttaa lasku- ja päättelytaitojaan sekä käyttää luovaa ajattelua ratkaistessaan eteen tulevia ongelmia. Peleillä voidaan pyrkiä erilaisiin tiedollisiin ja taidollisiin tavoitteisiin. Näitä voivat olla mm. ongelmien ratkaiseminen, päättely- ja arviointitaitojen kehittäminen sekä johdonmukaiseen ajatteluun ohjaaminen. Lisäksi peleillä voidaan vaikuttaa oppimisvalmiuksiin kuten loogisesti suunnittelevaan ajatteluun, luovaan ajatteluun ja erilaisten kommunikaatiomuotojen harjoitteluun (Pehkonen & Pehkonen 1993, 9.) Tässä tutkimuksessa käytettyjen pelien kuvailu ja tavoitteet on esitetty liitteissä (Liite 1).

3.3.4 Oppikirjoja

Tutustuimme muutamiin alkuopetuksen oppikirjoihin saadaksemme yleiskuvan siitä, miten kirjojen tekijät pyrkivät ottamana huomioon ajattelun kehittämisen ja eriyttämisen. Oppikirjojen tavoitteissa korostettiinkin oppilaan omaa ajattelua ja myös ongelmanratkaisukyvyn kehittymistä. Kirjojen tekijöiden alkusanoissa näkyi myös konstruktivismin vaikutus.

> Oppikirjasarjan tavoitteena on antaa vankka pohja lapsen matemaattisen ajattelun kehittymiselle (...) ohjata lasta luovaan ja keksivään ongelmanratkaisuun (...). (Lasku-Matikainen 1; Hämäläinen, Pesonen & Nyholm 1993, 3).

> (...) kirjasarja on syntynyt kansainvälisen kehityksen, uudistetun opetussuunnitelman, matematiikan oppimisen uusimman tutkimustiedon sekä monien matematiikkaa opettavien opettajien kokemusten pohjalta. Oppilas nähdään aktiivisena, ajattelevana, kokeilevana ja toimivana oppijana. (Hei, nyt lasketaan! 1 A; Helin, Ilomäki-Keisala, Saravesi, Satama, Sohlman & Virta 1996, 2).

> Oppimistilanteet on rakennettu tutkiviksi ja kokeileviksi niin, että oppilaalla on aktiivinen rooli oppimisprosessissa (Mieti ja laske 1. syksy; Vähäpassi, Hartikainen & Häggblom 1997, 3).

> Nykyisen tiedonkäsityksen mukaisesti kiinnitetään erityistä huomiota matemaattisen ajattelun, päättelykyvyn ja luovuuden kehittämiseen (Laskutaito 1 syysosa; Rikala, Sieppi, Uus-Leponiemi & Ilmavirta 1996, 3).

Uudet matematiikan oppikirjat antavat mahdollisuuden eriyttämiseen. Kuitenkin eriyttäminen nähdään matematiikan kirjoissa usein lisätehtävien antamisena nopeimmille laskijoille, eikä välttämättä haasteita tarjoavana ajattelun kehittämiseen tähtäävänä opetuksena matemaattisesti taitaville lapsille. Oppikirjoissa eriyttämiseen liittyy lähes aina myös valinnaisuus. Nopeille oppilaille, jotka usein ovat matematiikassa myös taitavimpia, annetaan mahdollisuus itse valita "lisätehtävänsä". Välttämättä tämäkään käytäntö ei palvele eriyttämisen perusideaa eikä tarjoa jokaiselle lapselle hänen kehitystasoaan vastaavaa opetusta. Lasku-Matikainen tarjoaa Matikaisen atk-ohjelmia lisäharjoitukseksi nopeille oppilaille (Hämäläinen ym.1993). Otavan kirjasarjan ensimmäisen luokan syksyn kirjassa on valinnaisosa, joka sisältää muunmuassa päättely- ja ongelmanratkaisutehtäviä. Kirjan lopussa on myös lisätehtäviä. (Helin ym. 1996.) Mieti ja laske -sarja sisältää kymmeniä vapaavalintaisia tehtäväsivuja, joiden avulla tekijöiden mukaan opettaja voi yksilöllistää oppilaidensa työskentelyä (Vähäpassi ym. 1997).

4 PYSYYKÖ PÄÄ PINNALLA? - Alkuopetusikäisen lapsen ajattelusta

4.1 Ajattelun monimuotoisuus

Ajattelu on valtavan monimuotoinen ilmiö ja korkein ihmisen tiedonkäsittelyprosesseista (Saariluoma 1990, 21). Sitä on tutkittu monien eri tieteiden näkökulmasta: matematiikka, filosofia, kielitiede, arkeologia, lääketiede ja tilastotiede ovat muutamia esimerkkejä ajattelun erilaisista käyttötarkoituksista (Saariluoma 1990, 15). Ajattelun taidoilla voidaan tarkoittaa esimerkiksi kykyä kriittisyyteen, refleksiivisyyteen tai hyvin abstraktien ongelmien käsittelyyn (Laine 1995, 71).

On olemassa tekijöitä, jotka saattavat rajoittaa ihmisen ajattelua. Näitä Saariluoma (1990) nimittää reunaehdoiksi. Ne voivat olla yleisiä ja tehtäväalueesta riippumattomia eli *staattisia reunaehtoja* tai hyvin sisällöllisiä ja tehtäväkohtaisia eli *dynaamisia reunaehtoja* (Saariluoma 1990, 181 - 182). Staattisia reunaehtoja ovat muunmuassa havainnon yksitulkintaisuus ja tarkkaavaisuuden rajat, työmuistin kapasiteetti ja ajattelun peruslogiikka, jotka ovat tärkeitä erityisesti taitavan ajattelun kannalta. Ne muodostavat ajattelun pysyvän perustan, johon ihmisen täytyy tyytyä. Dynaamisten reunaehtojen syntyyn vaikuttaa ennenkaikkea käsittellisen tiedon puute. Nämä ovat muutettavissa esimerkiksi uusien käsitteiden luomisen ja oppimisen kautta. (Saariluoma 1990, 182 - 185.)

4.2 Taitavan ajattelun tuntomerkkejä

Taitavuutta on hyvin monta lajia. Saariluoma (1990, 17) määrittelee taidon käsitteen seuraavasti: "Taidot ovat opittuja käyttäytymismuotoja, jotka on saavutettu järjestelmällisen harjoittelun avulla." Ihminen on taitava, jos hän tuntee tehtäväalueen hyvin. Taidot pohjautuvat käsitteisiin ja opittuihin ratkaisumalleihin. (Saariluoma 1990, 156.) Niinpä myös ajattelun taidoista puhuttaessa korostetaan ajattelua taitona, joka on harjoittelemalla opittavissa. Harjoittelun kautta syntyy yksilöiden taitojen välille eroja, vaikka myös luontaisilla erikoisominaisuuksilla ja ympäristötekijöillä on oma vaikutuksensa taitojen kehittymiseen (Saariluoma 1990, 18).

Taitavan ihmisen ajattelusta voidaan erottaa kolme eri osa-aluetta. Ensinnäkin taitavan ajattelijan *tiedot ovat* tehtävän kannalta *relevantteja.* Hänellä täytyy olla myös hallussaan paljon *erilaista taitoalueensa tietoa ja monenlaisia käsiterakenteita,* jotta hän voi suhtautua joustavasti alaan liittyviin ongelmiin. Kolmanneksi *tietorakenteiden tulee olla riittävän laajoja* ja yksityiskohtaisia, minkä ansiosta hän pystyy säilyttämään mielessään huomattavasti enemmän tehtävään liittyvää tietoa kuin keskitasoinen ajattelija, vaikka heidän työmuistinsa kapasiteetissa ei ole eroa. (Saariluoma 1990, 192.)

4.3 Lapsen ajattelun piirteitä

Lapsi on luotu ihmettelemään. Hänellä on kyky nähdä asiat uusina ja tuoreina sekä selvää ottamisen arvoisena, koska häntä ei ole vielä kyllästetty tiedolla eikä tottumuksilla. Lapsella on pyrkimys ymmärtämiseen jo pienestä lähtien (Freese 1992, 11). Aikuisella on kuitenkin liian usein tapana halveksia lapsen ajattelua ja sammuttaa hänen uteliaisuutensa. Hän antaa liian valmiita vastauksia ja pyrkii tiedoillaan tekemään vaikutuksen lapseen. Kuitenkin aikuisen tehtävänä on auttaa lasta viemään omaa ajatteluaan eteenpäin ja ottamaan siitä itse vastuun. (Freese 1992, 12.)

Lapsen ajattelu rakentuu mielessä suoritettavista *operaatioista* eli erilaisista henkisistä toiminnoista. Nämä operaatiot perustuvat aina yksilön mielessä oleviin *presentaatioihin* eli hänen kokemusmaailmaa koskeviin asioihin ja esityksiin (Kuusinen & Korkiakangas 1993, 95.) Operaatiot eivät kuitenkaan ole vain toiminnan jälkeen syntyviä ajatusprosesseja, vaan ne tapahtuvat tekemisen ohessa (Aebli 1991, 226). Tämän huomasimme monta kertaa tutkimuksemme aikana: lapset muodostivat käsitteitä ja ajatuskulkuja yhtäaikaisesti toiminnan lomassa rakentaen uusia presentaatioita ääneen ajatellen.

> Tutkija: Tiedätsä minkälainen on parillinen luku?
> Kimmo: Että on kaksnumeroinen.
> T: Ei vaan, se tarkoittaa sitä, että sä voit sen luvun määrän jakaa pareiksi, että niistä tulee aina parit, ettei jää yhtään yli. Ymmärrätkö? Osaisitko nyt sanoa parillisia lukuja?

K: Neljä neljä.
T: Joo. Entäs muita?
K: Viisi viisi.

T: Onko viisi parillinen luku?
K: Eiku kymmenen.

Koulun aloitusvaiheessa lapsen ajattelu saa aikuismaisia piirteitä: lyhytjännitteisyys ja hyppelehtivyys vähenevät ja pitkäjännitteisyys, keskittyneisyys ja johdonmukaisuus kasvavat (Kallonen-Rönkkö 1986, 5). Matikka-kerhon aikana ihmettelimme usein sitä sinnikkyyttä, jolla lapset miettivät vaativia tehtäviä, eivätkä suostuneet lopettamaan ennen ratkaisun löytymistä. Lapsi kykenee myös suunnittelemaan ajatuksissaan ja yhdistämään uusia asioita aikaisemmin oppimaansa (Kyröläinen 1994, 62). Kuitenkin hänen ajattelunsa ja toimintansa koskevat ennemmin konkreettisia kuin abstrakteja asioita (Rathus 1988, 320).

Myös lapsen luokittelu- ja sarjoittelukyky sekä vertailukyky kehittyvät (Kuusinen & Korkiakangas 1993, 98; Kallonen-Rönkkö 1986, 6). Nämä *kvalitatiiviset ajattelumallit* ovat ensimmäinen askel kohti abstrakteja käsitejärjestelmiä. Lapsen havainnoista tekemät päätelmät yleistyvät ja laajenevat (Kallonen-Rönkkö 1986, 6). Kvalitatiivisten ajattelumallien avulla lapsi oppii muodostamaan käsitteitä ja liittämään niitä omaan käsitejärjestelmäänsä, joka muodostaa hänen oppimisensa perustan. Käsitteet kytkeytyvät havaintojen tai toiminnan kautta konkreettisiin kohteisiin. Keskeistä lapsen kehityksessä ovat käsitejärjestelmän laatimisen välineet. (Kallonen-Rönkkö 1986, 4 - 5.) Lapsella on tietoa monista käsitteistä ennen kuin hän varsinaisesti saa niistä opetusta. Nunes ja Bryant (1996, 237) toteavatkin kärjistetysti: Valitse mikä tahansa käsite, ala opettaa sitä lapselle ja huomaat, että lapsella on jonkinlainen ymmärrys tästä käsitteestä ennen sen muodollista opettamista.

4.4 Lapsen kognitiivinen kehitys

Kognitiivisilla taidoilla tarkoitetaan tässä tutkimuksessa tiedonkäsittelytaitoja. Ihminen havannoi, tarkkailee, muistaa ja ajattelee ympärillään olevaa todellisuutta. Hän valitsee tärkeitä tietoja ympäristöstään ja yhdistelee niitä aikaisempiin kokemuksiinsa kyetäkseen toimimaan järkevällä tavalla. (Saariluoma 1990, 16.) Kognitiiviseen kehitykseen kuuluu kognitiivisten toimintojen kehittyminen (esimerkiksi ajattelu, muisti ja kieli) sekä tietojen sisällöllinen laajeneminen. Alkuopetusikäisen lapsen kognitiivinen kehitys on yhteydessä hänen toiminnalliseen kehitykseensä. (Kyröläinen 1994, 61.)

Kehitys on itseään säätelevä prosessi, jonka päämääränä on hetkellinen tai pysyvämpi tasapainotila (Piaget 1988, 14). Piagetin mukaan lapsen ajattelusta voidaan erottaa neljä kehityskautta: *sensomotorinen kausi, esioperationaalinen kausi, konkreettisten operaatioiden kausi ja formaalisten operaatioiden kausi.* Kehitys ei etene tasolta toiselle hyppäyksen omaisesti, mutta kehityskaudet ovat suuntaviittoja, jotka helpottavat lapsen ajattelun kehityksen jäsentämistä (Piaget 1988, 17). Lapsen yksilöllisessä kehityksessä saattaa olla suuria eroja riippuen ympäristön suotuisasta, viivyttävästä tai jopa estävästä vaikutuksesta (Sieppi & Tuomi 1994, 118). Piaget'n teoriaa onkin kritisoitu tilannesidonnaisuuden puutteesta (ks. esim. Malinen 1998, 104), jonka takia sen soveltaminen käytäntöön on vaikeaa. Kuitenkin Piaget'n neljää kehityksen vaihetta voidaan mielestämme pitää perusluokitteluna, jonka mukaan lapsen ajattelussa tapahtuu muutoksia.

Koulun aloitusvaiheessa lasten ajattelussa tapahtuu suuria muutoksia. Uuden tiedon omaksuminen vaatii lapselta tietojen kytkemistä omakohtaisiin havaintoihin ja kokemuksiin asioista (Kuusinen & Korkiakangas 1993, 96). Valtaosa koulutulokkaista on esioperationaalisessa vaiheessa (Kallonen-Rönkkö 1986, 5), mutta alkuopetusvuosien aikana lapsi yleensä saavuttaa konkreettisten operaatioiden vaiheen, joka kestää 11 - 12 ikävuoteen asti (Piaget 1988, 13; Lehtonen 1994, 118). Konkreettisten operaatioiden vaiheessa lapsi alkaa hallita monia loogisia operaatioita, kun ajattelun kohteet ovat konkreetisti esillä (Kuusinen & Korkiakangas 1993, 98.) Konkreettisten operaatioiden kaudella oppiminen saattaa olla jopa mahdotonta ilman konkreettista mallia. Vasta formaalisten operaatioiden kaudella lapsi kykenee abstraktiin ajatteluun, joka ei ole sidottu mihinkään välittömiin havaintoihin tai esittäviin kohteisiin (Piaget 1988, 8). Piaget'n tasoja ei kuitenkaan saa pitää oppimista rajoittavina tekijöinä: usein tehtävä sinänsä ei ole lapsille liian vaikea, vaan se tapa, jolla sitä yritetään lapsille opettaa (Sieppi & Tuomi 1994, 118).

4.5 Lapsen matemaattinen ajattelu

Lapsen matemaattinen kehittyminen on hyvin kiinnostava ja rikas tutkimuksen kohde. Nunesin ja Bryantin (1996) mukaan se sisältää monia mielenkiintoisia, monimutkaisia ja jopa yllättäviä osa-alueita kuten matemaattisloogisen ajattelun, matemaattiset taidot ja käsitteet sekä tarkoituksenmukaisen ajattelun. Alueen monimuotoisuus on ymmärrettävää, koska lasten täytyy omaksua monia uusia käsitteitä ja symboleja sekä opetella käyttämään niitä tarkoituksenmukaisesti erilaisissa tilanteissa. (Nunes & Bryant 1996, 234.)

Matemaattista taitoa pidetään monista osatekijöistä koostuvana taitohierarkiana. Se on jatkuvan muutoksen ja kehityksen alainen, joten siihen voidaan vaikuttaa myös pedagogisin keinoin (Kinnunen, Lehtinen & Vauras 1994, 55). Matemaattisloogistinen ajattelu alkaa kehittyä jo varhaislapsuudessa, mihin vaikuttavat lapsen sosiaalinen, kulttuurinen ja fyysinen toimintaympäristö (Kinnunen ym. 1994, 56). Näin ollen koulutulokkaiden kehityksessä on ymmärrettävästi ympäristöstä riippuvia suuriakin eroja. Kouluun tullessaan lapsella on kuitenkin yleensä suuri joukko matemaattiseen ajatteluun tarvittavia valmiuksia, joita he huomaamattaan käyttävät käytännön tilanteissa sekä määrällisessä että loogisessa päättelyssä (Kinnunen ym. 1994, 56).

Englantilaistutkijat Nunes ja Bryant (1996, 1 - 20) kirjoittavat matemaattisen ajattelun sisältävän kolme näkökulmaa: *logiikan perussäännöt, matemaattiset käsitteet ja symbolit sekä tarkoituksenmukaisen matemaattisen ajattelun* erilaisissa tilanteissa. Lapsen matemaattinen kehittyminen on muutosta jollakin tai useammalla mainitulla osa-alueella. Vaikka nämä osa-alueet ovat riippumattomia toisistaan, ne eivät esiinny lapsen ajattelussa irrallisina. (Nunes & Bryant 1996, 235.) Tämän huomasimme analysoidessamme oppilaiden ajattelukulkuja, jotka usein sisälsivät tekijöitä monelta osa-alueelta.

4.5.1 Matemaattisloogistinen ajattelu

Matemaattisten ongelmien ratkaisemiseksi tarvitaan logiikan sääntöjen noudattamista ja kunnioittamista. Logiikka on oppi muodollisesti pätevän päättelyn säännöistä (Otavan Suuri Ensyklopedia 5, 1979). Matematiikan ja logiikan vahva suhde on ilmeinen, eikä sitä voida asettaa kyseenalaiseksi (Nunes & Bryant 1996, 5);

kertoohan siitä jo käsite matemaattislooginen ajattelukin. Logiikan merkitystä matematiikan opetuksessa ei voi väheksyä, koska kouluopetuksen tavoitteeksi on asetettu ajattelun kehittäminen, mitä tarvitaan tiedon hankinnassa ja jäsentämisessä. Kuitenkin Malisen (1998) mukaan logiikan opettaminen sellaisenaan ei ole tarpeellista eikä hyödyllistä kouluopetuksessa: päättelyä ei voida ohjata pelkästään logiikan sääntöihin pohjautuvilla keinoilla. Sen sijaan loogisen ajattelun kehittymiselle tulisi antaa tilaa jokaisen luokka-asteen matematiikan opetuksessa. (Malinen 1998, 102 – 103.) Matemaattislooginen ajattelu ilmenee yleisenä ajattelun taitona sekä asioiden selkeänä esittämisenä. (Malinen 1992, 10.)

Lapsen looginen ajattelutaito kehittyy merkittävästi hänen ollessaan 5 – 15 – vuotias, mikä vaikuttaa myös hänen matemaattiseen kehitykseensä (Nunes & Bryant 1996, 241). Piagetin teorian mukaan lapsen täytyy hallita muutamia matemaattisloogisia perusperiaatteita ymmärtääkseen matematiikkaa. Näiden perusperiaatteiden - eli kvantitatiivisten ajattelumallien (ks. Kallonen-Rönkkö 1986, 7) - *lukumäärän säilyvyyden, transitiivisuuden, kokonaisuuden säilymisen ja sarjavastaavuuden* - hallinta saattaa viedä yllättävän kauan aikaa. Kuitenkin Piagetin mielestä lapselle on turha sitä ennen opettaa monimutkaisia matemaattisia taitoja.

Lukumäärän säilyminen on yhteydessä lukukäsitteen ymmärtämiseen. Lukumäärän säilyvyydellä tarkoitetaan sitä, että joukon alkioiden lukumäärä muuttuu vasta, kun joukkoon lisätään tai siitä otetaan pois alkioita (Nunes & Bryant 1996, 6). Alkioiden järjestyksen muuttaminen tai asetelman muuttaminen (rivin harventaminen tai tihentäminen) eivät muuta alkioiden lukumäärää. Transitiivisuus liittyy lukumäärien suhteisiin. Sitä kuvaa hyvin seuraava esimerkki: Jos A on isompi kuin B ja B on isompi kuin C, niin silloin myös A:n täytyy olla isompi kuin C (Nunes & Bryant 1996, 7). Tämä esimerkki yleistyy kattamaan myös useampien joukkojen välisiä vertailuja ja verrattavana voi olla erilaisia ominaisuuksia (Kallonen-Rönkkö 1986, 8). Jos lapsi ei ymmärrä transitiivisuuden käsitettä, hän ei todellisuudessa ymmärrä lukujen merkitystä, vaikka hän osaisi todella sujuvasti laskea ja luetella numerot eteen- ja taaksepäin. Lukumäärän säilyvyyden ja transitiivisuuden hallitseminen ovat vaatimuksena perustavanlaatuisen matemaattisen toiminnan eli laskutaidon omaksumiselle (Nunes & Bryant 1996, 8). Joustava lukujonojen käsittely on puolestaan edellytyksenä aritmeettisten operaatioiden ja strategioiden mahdollistumiselle (Kinnunen ym. 1994, 61).

Kokonaisuuden säilyvyys ilmenee lapsen ajattelussa siten, että hän ymmärtää joukon lukumäärän säilyvän samana, vaikka alkioita ryhmitellään joukon sisällä eri tavalla (Kallonen-Rönkkö 1986, 8). Lapsen täytyy ymmärtää, että esimerkiksi 12 alkion joukko voidaan jakaa kolmeen neljän alkion joukkoon tai kahteen kuuden alkion joukkoon koko joukon alkioiden lukumäärän säilyessä samana. Sarjavastaavuudessa on kysymys yksinkertaistettuna siitä, että eri sarjojen järjestyssijat vastaavat toisiaan (Kallonen-Rönkkö 1986, 8).

Nämä matemaattisloogiset säännöt ovat pohjana lapsen matemaattiselle kehitykselle. Ne ovat yleisiä, perusrakenteeltaan samana säilyviä ajattelun välineitä, jotka kuvaavat sitä, miten lapsi muodostaa käsitteitä ja miten hän suhteuttaa niitä toisiinsa. Kun lapsi hallitsee nämä neljä perussääntöä, hänen voidaan katsoa siirtyneen konkreettisten operaatioiden kaudelle. Kun lapsen ajattelun kehitystä halutaan edistää, on syytä kiinnittää huomiota näiden ajattelumallien vahvistamiseen. (Kallonen-Rönkkö 1986, 9.)

Logiikan asema koulumatematiikassa on ollut kyseenalainen jo vuosikymmenien ajan (Malinen 1992, 11 – 15). Looginen ajattelu matematiikan opetuksessa voitaisiinkin tulkita logiikan sääntöjen mukaisena päättelynä eikä formaalisten loogisten sääntöjen opettamisena, koska logiikka sellaisenaan ei tutkimusten mukaan sovellu matematiikan opetukseen (Malinen 1992, 22). Lapsille ei tarvitse opettaa logiikkaa tieteen osa-alueena, vaan opetuksessa tulisi keskittyä loogisen ajattelutaidon harjaannuttamiseen. Looginen ajattelu on subjektiivinen asia: jokainen voi ajatella loogisesti vain itse, eikä sitä voi oppia ulkolukuna vaan ainoastaan harjoittelemalla. (Laine 1995, 71 - 72.) Loogista ajattelua voidaankin kehittää hahmottelemalla erilaisia tilanteita ja käsitteitä (Malinen 1992, 23). Tavoitteena silloin on oppilaan ajattelun terävöittäminen päättelytilanteissa ja hänen analysointitaitonsa lisääminen (Malinen 1992, 17).

4.5.2 Matemaattiset käsitteet ja symbolit

Matemaattisilla sopimuksilla tarkoitetaan matemaattisia tapoja, jotka ovat siirtyneet sukupolvelta toiselle kulttuurin kehittyessä (Nunes & Bryant 1996, 11). Matemaattinen käsitte on puolestaan symbolikielinen lause, johon sisältyy sekä käsitteiden ominaisuuksia että tehtävän laskemisen täsmällisiä ohjeita (Yrjönsuuri

1998, 130). Näitä käsitteitä ja symboleja tarvitaan matemaattisten tekniikoiden hallinnassa. Symbolit tarjoavat mahdollisuuden käsitteiden kuvaamiseen ja niistä keskustelemiseen. (Nunes & Bryant 1996, 11.) Esimerkkinä eräänlaisesta matemaattisesta sopimuksesta ja symbolijärjestelmästä voidaan mainita länsimainen lukujen merkitsemis- ja lukemistapa, joka mahdollistaa keskustelun numeerisista ongelmista eri kulttuurien välillä. Myös mittaamiseen liittyvät käsitteet ovat sopimuksia; esimerkiksi metri on sovittu sen matkan pituiseksi, jonka valo kulkee tyhjiössä tietyssä ajassa (Kangasaho, Mäkinen, Oikkonen, Paasonen & Salmela 1997, 123).

Matematiikka sisältää paljon abstrakteja käsitteitä. Käsityksellä ja käsitteellä on selkeä ero. Käsitteen ymmärtämisessä on kyse siitä, millä tavalla yksilö ymmärtää yhteisön tietyn käsitteen ja miten se vastaa yksilön käsitystä asiasta. Näin ollen käsityksestä syntyy harjoittelun ja tiedon rakentumisen kautta erilaisien ominaisuuksien määrittelemä käsite. (Yrjönsuuri 1998, 129). Lapsen on yleensä vaikea ymmärtää abstrakteja käsitteitä, koska niistä ei ole helppo muodostaa selviä mielikuvia (Saariluoma 1990, 70). Esimerkiksi parillisuudelle on vaikea löytää näkyvää konkreettista edustajaa, johon mielikuvan voisi liittää. Käsitteet eivät siis ole pelkkien mielikuvien avulla hallittavissa, vaan niiden ymmärtämiseen vaaditaan työtä ja korkeatasoisia ajattelun taitoja (Saariluoma 1990, 70).

Yksi tärkeimmistä matemaattisista symboleista on numerojärjestelmämme. Lapsi oppii aluksi numeroiden erilaisia merkityksiä, jotka hän myöhemmin oppii liittämään toisiinsa (Fuson & Hall 1983, 49). Asiayhteyksiä, joissa lapsi oppii käyttämään numeroita, ovat muunmuassa *numeroiden luetteleminen, laskeminen, lukumäärän ilmoittaminen, mittaaminen* ja *ei-numeeriset kontekstit.* Lapsi käsittelee tilanteesta riippuen peruslukuja tai järjestyslukuja. (Fuson & Hall 1983, 50.)

Numeroiden luetteleminen on yleensä ensimmäinen osoitus lapsen numeerisista kyvyistä. Lapsi saattaa luetella numeroita ymmärtämättä kuitenkaan niiden merkitystä, eikä sillä ole kehityksen alkuvaiheessa mitään yhteyttä laskemiseen. (Fuson & Hall 1983, 50.) Laskeminen on numeroiden luettelemista kehittyneempi vaihe, vaikka se lapsen puheessa saattaa kuulostaakin ihan samanlaiselta kuin pelkkä numeroiden luetteleminen. Kun lapsi laskee, jokainen hänen luettelemansa numero vastaa yhtä laskettavaa kohdetta (Fuson & Hall 1983, 55). Tämä vastaavuuden periaatteen (one-one-principle) omaksuminen onkin erittäin tärkeä lapsen matemaattisessa kehityksessä.

Lukumäärän ilmoittamisella Fuson ja Hall (1983, 58) tarkoittavat tiettyjen lukumäärää kuvaavien sanojen hallittua käyttöä. Suomen kielessä tällaisiä sanoja ovat esimerkiksi pari, tupla, trio, neljännes ja kaksoset. Myös peruslukuja voidaan käyttää tässä tarkoituksessa. Lapsi oppii käyttämään esimerkiksi lukua kaksi jo ensimmäisinä ikävuosinaan ilman laskutoimitusta, missä apuna hänellä on konkreettiset kokemukset (esim. kaksi kenkää, yksi kummallekin jalalle) ja apusanojen käyttö (toinen sinulle ja toinen minulle). Tutkimusten mukaan 5-vuotias lapsi osaa käyttää ilmoittaessaan lukumäärää ilman laskutoimitusta lukuja 1 - 3, vaikkakaan ei niin nopeasti kuin aikuinen. (Fuson & Hall 1983, 58 - 59.)

Mittaamisessa on tärkeää erottaa mitattava asia muista mahdollisista suureista (Fuson & Hall 1983, 79). Esimerkiksi jos tehtävänä on mitata kappaleen massa, ei pidä kiinnittää huomiota sen tilavuuteen. Mittaamisella kerrotaan, kuinka monta yksikköä on yhdessä kokonaisuudessa (esimerkiksi kuinka monta tulitikun pituutta mahtuu kynän pituuteen).

Järjestyslukujen avulla lapsi kuvaa kappaleen asemaa erillisessä kokonaisuudessa (Fuson & Hall 1983, 85). 6-8 -vuoden iässä lapsi kykenee laittamaan useita esineitä tietyllä tavalla järjestykseen, tätä ennen hän kykenee vertailemaan vain paria esinettä toisiinsa (Full & Hall 1983, 87).

Ei-numeerisilla konteksteilla tarkoitetaan numeroiden käyttämistä ilmaisemaan erillisen tapahtuman tai asian tiettyä "nimeä" tai koodia: esimerkiksi puhelinnumeroa, henkilötunnusta tai jalkapalloilijoiden pelinumeroita. Tällaisia numerosarjoja esiintyy kaikkialla ja ne saattavat aiheuttaa hämmennystä lapselle. Joskus lapsi saattaa yrittää antaa merkityksiä näille numeroille: esimerkiksi tämä on bussi numero 3, koska se kulkee kolmea eri katua pitkin. Numeroiden käyttäminen ei-numeerisissa tarkoituksissa saattaa jopa heikentää numeeristen tarkoitusten ymmärtämistä. (Fuson & Hall 1983, 93.)

Myös muita symboleja tarvitaan matemaattisten ongelmien kuvaamiseen. Lapsi käyttää erilaisia symboleja ymmärtääkseen ongelman, jota hän aikoo ratkaista. Ne voivat olla suullisia tai kirjallisia merkkejä, graafisia esityksiä tai taulukkoja, joita käytetään ajattelun työvälineenä (Nunes & Bryant 1996, 235). Aritmeettiset taidot pohjautuvat matemaattisten sopimusten ja symbolien hallintaan. Voitaisiin sanoa jopa niin, että aritmeettisen laskun suorittaminen on parhaimmillaan matemaattisen kielen lukemista, ymmärtämistä ja tuottamista.

Usein lasten vaikeudet matemaattisissa toiminnoissa johtuvat siitä, että he eivät ole ymmärtäneet taustalla piilevää ajatuskulkua. Nunesin ja Bryantin (1996, 244) mukaan lasten virheet kirjoitetuissa numeroissa ja aritmeettisissa laskuissa johtuvat siitä, että he eivät ole todellisuudessa ymmärtäneet kymmenjärjestelmän rakennetta tai lukujen järjestysluonnetta. On myös mahdollista oppia matemaattinen toiminta, vaikka ei tiedä, mihin sitä voisi käyttää (Nunes & Bryant 1996, 245).

Kinnunen ym. (1994) ovat tutkineet ennen koulua hankittujen matemaattisten osataitojen vaikutusta aritmeettisten tasojen kehitykseen koulussa. He vertasivat koulutulokkaiden aritmeettisten taitojen tasoa heidän saavutuksiinsa ensimmäisellä luokalla. Tutkimuksensa tuloksena Kinnunen ym. totesivat, että saavuttaakseen vähintään keskitasoisen aritmeettisten operaatioiden tason, lasten tulee hallita lukujonotaidot jonkin asteisesti jo kouluun tullessaan. Toisaalta keskitasoa parempien aritmeettisten taitojen saavuttaminen 1. luokalla näyttää edellyttävän koulutulokkaalta hyvin hallittua matemaattisloogista ajattelua ja pitkälle automatisoituneita lukujonotaitoja, joita he kykenevät spontaanisti soveltamaan erilaisissa tilanteissa. (Kinnunen ym.1994, 70-71.)

4.5.3 Tarkoituksenmukainen toiminta eri tilanteissa

Kolmantena matemaattisen ajattelun tärkeänä osa-alueena Nunes ja Bryant (1996, 17) pitävät tarkoituksenmukaista toimintaa eri tilanteissa. Tähän liittyy kiinteästi ajattelun valikoivuus, jonka Saariluoma (1990) mainitsee taitavan ajattelun tärkeimpänä piirteenä. Ihmisen tulee pystyä erottamaan epäoleellinen ja oleellinen tieto yhä laajenevasta informaatiotulvasta, jotta hän kykenee toimimaan tarkoituksenmukaisesti (Saariluoma 1990, 17). Taitava ajattelija osaa käyttää resurssinsa tehtävän kannalta järkevällä tavalla sekä löytää tehokkaat ja olennaiset toimintavaihtoehdot (Saariluoma 1990, 19).

Tarkoituksenmukainen toiminta erilaisissa tilanteissa tarkoittaa sitä, että lapsi osaa yhdistää kaksi edellistä matemaattisen ajattelun osa-aluetta eli matemaattisloogisen ajattelun sekä matemaattiset käsitteet ja symbolit. Nunesin ja Bryantin (1996) mukaan opettajat usein pahoittelevat sitä, ettei lapsi osaa valita oikeaa matemaattista tekniikkaa ongelman ratkaisemiseksi. Aina yleisen mallin tai tekniikan hallitseminen ei takaa sen soveltamista erilaisiin tilanteisiin. Matemaattinen ongelma on ensin ymmärrettävä, ennen kuin sitä voidaan ajatella matemaattisesti (Nunes & Bryant 1996, 17).

Tarkoituksenmukainen toiminta ilmenee ongelmanratkaisussa usein sopivan ratkaisutavan löytämisenä. Tehokas ongelmanratkaisija ajattelee, millä tavoilla hän pääsisi helpoiten oikeaan ratkaisuun. Tärkeää on myös miettiä, johtaako ratkaisutapa varmasti oikean ratkaisutavan löytämiseen.

4.6 Matemaattisen ajattelun kehittäminen

Kasvatusalan tulevina ammattilaisina meitä kiinnostaa, voiko ajattelua kehittää tai voiko sitä lapsille opettaa. Opetuksessa täytyisi korostaa lapsen omaa tahdosta riippuvaa halua löytää ja ratkoa ongelmia tai etsiä totuutta ajattelun kehittymisen osana. Opettajan on annettava lapselle mahdollisuus näiden taitojen kehittämiseen, sillä mikään kehitysprosessi ei tapahdu itsestään, vaan vaatii oppilaalta joko tietoista tai tiedostamatonta harjoitusta (Dreyfus 1994, 25). Jotkut tutkijat katsovat ajattelutaitojen kehittämisen olevan oppimisen tärkein tavoite, sillä ajattelu liittyy kaikkeen inhimilliseen toimintaan (Sieppi & Tuomi 1994, 111). Kuitenkin opettajan on muistettava, että hän ei voi saada oppilasta ymmärtämään eikä oivaltamaan. Aebli (1991, 254) toteaakin osuvasti: "Oivaltaminen on lahja, jonka aikaansaaminen on vain osittain opettajan käsissä."

Oppilaiden matematiikan ajattelutaitoja ja ongelmanratkaisukykyä on pyritty kehittämään opettamalla heille kognitiivisia perustaitoja: määrittelemistä ja kuvailemista, vertailemista, syiden miettimistä ja tiivistämistä. Ääneen ajattelemisella pyritään tuomaan esiin oppilaan ajatteluprosessi. (Takala 1992, 128 - 129.)

Juuso (1995, 61) on luetellut taitoja, jotka luovat perustan hyvälle ajattelulle ja päättelykyvylle:

- argumentaatiotaidot
- herkkyys ihmetellä, kyseenalaistaa ja vaatia perusteita
- kyky identifioida, soveltaa ja muotoilla niitä periaatteita, joiden perusteella teemme päätöksiä

- kyky eritellä asioita siten, että meille avautuu niiden monimutkaisuus
- kyky tunnistaa erilaisiin ilmiöihin liittyviä suhteita.

Ajattelua kehitettäessä opettajan täytyisi antaa lapselle mahdollisuus näiden taitojen harjaannuttamiseen, mikä onnistuu parhaiten keskustelua suosivassa ja tutkivaa asennetta korostavassa ilmapiirissä. Juuson (1995) mukaan tutkivan yhteisön piirteitä ovat mm. ongelman kohtaaminen, ajattelun sanaston soveltaminen, puhuminen ja kyseenalaistaminen, erilaisten näkemysten havaitseminen sekä itseään korjaava ajattelu. Lapsia on kannustettava ajattelemaan myös silloin, kun asiat ovat moniselitteisiä, epäselviä tai mysteerisiä. Lasta on opetettava tekemään arviointeja, muodostamaan omia näkemyksiään, mutta samalla arvostamaan toisten mielipiteitä. (Juuso 1995, 63.)

Ajattelun kehittämisessä on tärkeää kiinnittää huomiota havaintojen tekoon. Havainnot ovat tärkeä osa ajattelua, koska todellisuutta koskeva tieto perustuu aina havaintoon (Sieppi & Tuomi 1994, 119). Kuitenkin havainnoimiskykymme on rajallinen: pystymme havaitsemaan vain sitä, mihin olemme valmistautuneet. Siepin ja Tuomen (1994, 119) mielestä ajattelun kehittymisessä on tärkeää "oppia näkemään asioita ja tekemään havaintoja sekä omasta itsestä että ympäröivästä maailmasta".

Ajattelun kehittäminen on ennen kaikkea lapsen metakognitiivisten taitojen kehittämistä. Tärkeää on, että lapsi tulee tietoiseksi omista ajatteluprosesseistaan, jolloin hän voi arvioida omaa osaamistaan ja säädellä toimintaansa. (Sieppi & Tuomi 1994, 126.) Kyky muodostaa ongelmia ja tiedostaa tarvittavia kognitiivisia strategioita ongelman ratkaisemiseksi sekä sinnikäs ongelmaan keskittyminen ja omien vastausten tarkasteleminen kertovat kehittyneistä metakognitiivisista taidoista (Rathus 1988, 339).

Opettajan tehtävänä on opetella tuntemaan lapsi ja hänen taitonsa niin, että opettaja voi aktivoida lasta ja muuttaa vuorovaikutuksen lapsen ajattelumalleja vastaavaksi (Sieppi & Tuomi 1994, 126; Kallonen-Rönkkö 1986, 10). Lisäksi opettajan tulee tuntea kehityksen luontainen mekanismi, johon vaikuttaa neljä erilaista tekijää: kypsyminen, kokemus, sosiaalinen välittyminen ja tasapainottuminen (Kananoja 1993, 93). Myös oppimisympäristön tarkoituksenmukaisella järjestämisellä on suuri merkitys. Sen tulee avata lapselle tie loogis-matemaattiseen kokemukseen, jonka lapsi saa toimimalla ja tekemällä johtopäätöksiä toimintansa tuloksista (Kallonen-Rönkkö 1986, 11).

Ajattelun kehittämiseksi on suunniteltu erilaisia malleja. Yhteistä niille on ajatteluun liittyvien perusasioiden kuten käsitteenmuodostuksen, päättelyn ja selittämisen käyttäminen (Sieppi & Tuomi 1994, 127). Mallien tulisi myös ottaa huomioon kehittyvän tiedon- ja oppimiskäsityksen vaatimukset. Ikäheimon (1995, 45) mukaan oppilaiden ajattelun kehittymisen mahdollistavia tilanteita voidaan luoda seuraavilla tavoilla:

-työskentelemällä osa ajasta opettajajohtoisesti yhdessä

-käyttämällä hyväksi pienen ryhmän dynamiikkaa

-antamalla oppitunnilla eriyttäviä tehtäviä yksilöllistä työskentelyä varten

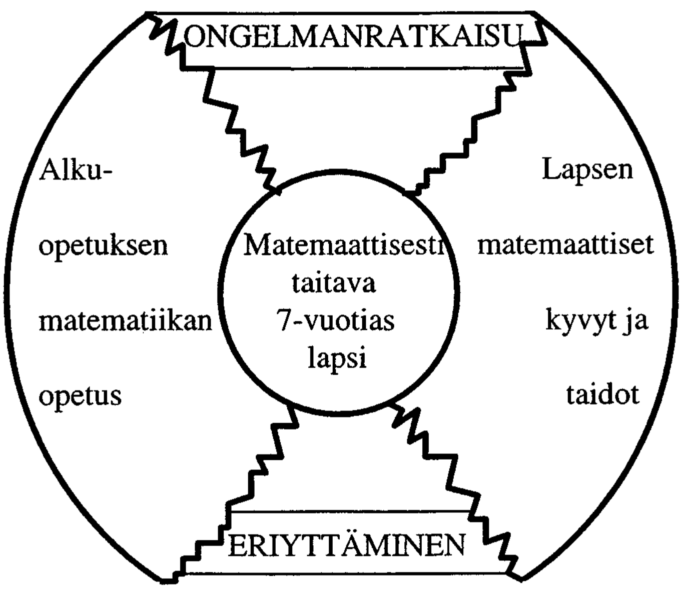
-antamalla eritasoisia kotitehtäviä

-tekemällä kokeisiin kaikille oppilaille sopivantasoisia tehtäviä.

5 PELASTUSRENGASTA PAIKKAAMASSA - Tutkimuksen suorittaminen

5.1 Tutkimusongelmat

Tässä tutkimuksessa selvitetään matemaattisesti taitavien lasten ajattelua ja alkuopetuksen matematiikan opetusta sekä pyritään etsimään näiden välisiä yhteyksiä. Tutkimuksemme ongelmakenttä on esitetty seuraavassa kuviossa. Siinä taitava lapsi ui matematiikan valtameressä apunaan hänen omista kyvyistään ja taidoistaan sekä alkuopetuksen matematiikan opetuksesta muodostettu pelastusrengas. Pelastusrengas on kuitenkin repeytynyt, koska matemaattisesti taitavan lapsen kyvyt eivät pääse oikeuksiinsa keskitasoisen oppilaan tarpeita palvelevassa alkuopetuksen matematiikan opetuksessa (ks. s. 21). Ristiriita taitavan lapsen taitojen ja matematiikan opetuksen välillä on perusteltu, koska tutkimusten mukaan nopeuseriyttäminen ja peruskoulun matematiikan opetuksen nykyiset tavoitteet ylittävän oppiaineksen lisääminen on välttämätöntä, mikäli kaikille oppilaille halutaan tarjota edellytyksiä vastaavaa opetusta (ks. Kallonen-Rönkkö 1998, 263). Tässä tutkimuksessa paikkaamme pelastusrengasta (Kuvio 1) eriyttämisen ja ongelmanratkaisun avulla.



KUVIO 1. Tutkimuksen ongelmakenttä

Tutkimuksen avulla pyritään saamaan vastauksia seuraaviin ongelmiin:

1. Millaista on matemaattisesti taitavan 7 -vuotiaan lapsen ajattelu?
    - Millaista on hänen matemaattislooginen ajattelunsa?
    - Millaiset ovat hänen aritmeettiset taitonsa?
    - Kykeneekö lapsi tarkoituksenmukaiseen ajatteluun ja miten se ilmenee?
    - Kehittyikö lasten ajattelu Matikka-kerhon aikana?
2. Miten ongelmanratkaisulla ja eriyttämisellä voidaan vastata matemaattisesti taitavien lasten tarpeisiin?
    - Miten RATKO- ongelmanratkaisumenetelmä soveltuu matemaattisesti taitavien 7-vuotiaiden lasten opetukseen?
3. Miten kerhoon osallistuneet oppilaat ja heidän vanhempansa kokivat Matikka-kerhon?

5.2 Kohdejoukon valinta

Päätimme yhdistää tutkimuksen päättöharjoitteluumme Jyväskylän Normaalikoululla. Yksi ensimmäisen luokan opettaja oli ilmoittanut erityisesti kiinnittävänsä huomiota matematiikan opetuksen kehittämiseen. Otimme luokanopettajaan yhteyttä ja kerroimme pro gradu -tutkielmamme tarkoituksesta ja mahdollisesta toteutuksesta. Keväällä 1998 saimme luvan päättöharjoitteluun ja tutkimuksen suorittamiseen kyseisessä luokassa.

Tutkimuskohteeksemme halusimme matemaattisilta taidoiltaan taitavia lapsia. Päätimme tutkia oppilaita, jotka jo ensimmäisen kouluvuoden alkaessa hallitsivat suurimman osan ensimmäisen luokan matematiikan oppisisällöistä. Valmista testiä tähän tarkoitukseen ei ollut saatavilla, joten kokosimme sen itse. Halusimme keskittyä pieneen määrään tapauksia pyrkien analysoimaan niitä mahdollisimman tarkasti. Kohdejoukon valintaa, jossa pyritään saamaan tutkimusjoukoksi tietyn tyyppisiä henkilöitä, kutsutaan harkinnanvaraiseksi otannaksi (Eskola & Suoranta 1998, 18).

Syyskuussa 1998 teimme eri alkuopetuksen matematiikan kirjojen pohjalta kaksi matematiikan perustaitoja mittaavaa valintatestiä (Liite 2 - 3). Testeillä selvitettiin oppilaiden aritmeettisia taitoja, kuten vähennys- ja yhteenlaskun periaatetta, lukujonotaitoja sekä lukukäsitteen hahmottumista (vrt. Ikäheimo 1997, 246). Mukana oli myös tehtäviä, jotka mittasivat oppilaiden valmiutta suoriutua ongelmanratkaisutehtävistä.

5.2.1 Valintatestien toteuttaminen

Suoritimme ensimmäisen valintatestin esitestauksen syyskuun 1998 alussa Pohjanmaalla sijaitsevan ala-asteen ensimmäisellä luokalla, jossa oli 16 oppilasta. Testi näytti erottelevan hyvin ja pistehaitari vaihteli 2 - 22 (max 22 p.) pisteen välillä keskiarvon ollessa 12 pistettä. Muutimme esitestauksen perusteella tehtävien järjestystä järkevämmäksi ja testitilannetta helpottavammaksi. Laitoimme kaikki opettajan ohjeita vaativat tehtävät testin alkuun, jotta testin voisi aloittaa yhteisesti, minkä jälkeen jokainen pystyisi etenemään omassa tahdissaan.

Esitestauksen jälkeen teetimme ensimmäisen valintatestin varsinaisessa tutkimusluokassa. Testiin osallistuivat luokan kaikki oppilaat. Tulokset olivat hyvin samansuuntaisia kuin esimittauksessakin (2 - 20 p./ka. 11.8). Valitsimme kuusi parhaiten testissä menestynyttä oppilasta (17 - 20 p.) ja laadimme heille uuden testin tutkimusjoukon rajaamiseksi 2 - 3 oppilaaseen. Lisäksi halusimme vähentää satunnaisvirheiden määrää ja vaikeuttaa hieman tehtävien tasoa, jolloin todellinen osaaminen tulisi paremmin näkyviin.

Toinen valintatesti pidettiin kuudelle oppilaalle viikon kuluttua ensimmäisestä testistä eli syyskuun 1998 lopussa. Testi osoittautui hyvin vaativaksi. Pistehaitari oli 23 - 33 pistettä ja maksimi 38 pistettä. Valitsimme lopulta tutkimukseemme kolme parhaiten toisessa testissä menestynyttä, yhden tytön ja kaksi poikaa. Toinenkin valintatesti osoittautui erottelevaksi. Ensimmäisessä valintatestissä parhaan tuloksen saanut oppilas sai jälkimmäisessä pienimmän pistemäärän. Tämän oppilaan taidot osoittautuivat riittämättömiksi tehtävien vaikeutuessa, koska hänen teki suurimman osan virheistään testin vaativimmissa tehtävissä. Tutkimukseen valitut oppilaat selvisivät testistä pisteillä 33, 30 ja 28.

Vaikeutena valintatestistön laadinnassa oli, että osa ensimmäisen luokan oppilaista ei osannut lukea koulun alkaessa. Siksi emme voineet ottaa testiin lukemiseen perustuvia tehtäviä, mikä vaikutti tehtävien laatuun huomattavasti. Valitsimme testeihin ongelmanratkaisutehtäviä, jotka testin pitäjä pystyi lukemaan ja testilomakkeeseen merkittiin vain vastaus. Pitkät sanalliset ongelmanratkaisutehtävät jouduimme jättämään pois testin validiteetin ja tasapuolisuuden takia. Testi suoritettiin kaikille testiin osallistuville oppilaille yhtä aikaa, mikä osaltaan vaikutti tehtävien laatuun. Pyrimme minimoimaan yksityisen ohjauksen tarpeen yksiselitteisillä ja selkeillä tehtävillä, jotka eivät vaatineet ylimääräisiä selityksiä.

5.2.2 Valintatesti 1

Ensimmäisen valintatestin (Liite 2) kaksi ensimmäistä tehtävää mittasivat Ikäheimon (1997, 10) mainitsemista alkuopetuksen matematiikan osa-alueista (ks. s. 17) lukukäsitteen hallintaa, vertailutaitoa, päättelytaitoa sekä luvun hajottamista ja koontia. Lukutaidottomilta oppilailta näissä tehtävissä vaadittiin myös kuullun ymmärtämistä, koska he tekivät tehtävät opettajan ohjeen mukaan. Tehtävien visuaalinen esitys oli tarkoitettu helpottamaan oppilaiden päättelemistä. Moni olikin tehnyt kuvaan jakoviivoja tai muita merkintöjä.

Kaksi seuraavaa tehtävää mittasivat lukukäsitteen hallintaa, lukujen hajottamista ja koontaa sekä laskutoimituksista suoriutumista sekä 10-järjestelmän hallintaa. Kolmannen tehtävän laskuissa liikutaan lukualueella 1 - 10. Mukana on yksinkertaisia kahden yhteenlaskettavan tehtäviä ja yksi vaikeampi kolmen yhteenlaskettavan tehtävä. Vähennyslaskuissa on yksi tai kaksi vähentäjää. Neljännessä tehtävässä suurennetaan lukualuetta 20:een ja testataan vähennyslaskun mekanismia. Puuttuvan vähentäjän löytäminen lisää tehtävän vaikeustasoa. Lisäksi neljännessä tehtävässä tuli mukaan kymmenylitys. Viides tehtävä (vrt. Hämäläinen, Pesonen & Nyholm 1994, 4) mittaa lukujonotaitoja sekä lukukäsitettä liikuttaessa lukualueella 30 – 90. Lisätehtävä oli tarkoitettu pohdittavaksi oppilaille, joille jää ylimääräistä aikaa.

5.2.3 Valintatesti 2

Toinen valintatesti (Liite 3) alkoi päässälaskuilla, jotka olivat lyhyitä sanallisia rahalaskuja. Halusimme testata lasten päättelytaitoa ilman konkreettisia apuvälineitä. Tehtävä osoittautui yllättävän vaikeaksi: lasten oli vaikea laskea ilman visuaalista havaintoa. Kaksi seuraavaa tehtävää olivat peruslaskutoimituksia mittaavia, joissa lukualuetta laajennettiin lähes sataan asti. Lisäksi testattiin kymmenylityksen hallintaa kaksinumeroisilla luvuilla. Molemmissa tehtävissä oli lisäksi yhteen- ja vähennyslaskuja, joissa molemmat tekijät olivat kaksinumeroisia.

Neljännessä tehtävässä (Hämäläinen ym. 1993, 110) haluttiin mitata lapsen sarjoittelutaitoa sekä kykyä loogiseen ajatteluun ja päättelyyn. Viides tehtävä (vrt. Hämäläinen ym. 1994, 33) mittasi vertailutaitoa, järjestykseen asettamista, sarjoittelua sekä lukukäsitettä ja 10-järjestelmän hallintaa. Kuudennessa tehtävässä (Rikala, Sieppi, Strang & Ilmavirta 1993, 90) vaadittiin geometriaan läheisesti liiittyvää hahmottamiskykyä. Seitsemäs tehtävä oli vaikein mekaanisia laskuja sisältävä tehtävä, jossa lukualue oli laajennettu sataan asti. Mukana oli myös lasku, jossa oli yhteen- ja vähennyslaskua peräkkäin. Kahdeksannessa tehtävässä halusimme testata lapsen kertolaskutaitoa muutamilla kertolaskuilla.

Laatimamme kaksiosainen valintatestistö sisältää tehtäviä lähes kaikista Ikäheimon (1997, 10) mainitsemista alkuopetuksen matematiikan oppisisällöistä (ks. s. 18). Luokittelua käsitteleviä tehtäviä testeissä ei ollut, koska sitä on melko vaikea testata kirjallisella testillä. Myöskään järjestyslukuja, mittaamista ja tilastoja ei testeissä käsitelty. Lasten testeissä saamat pisteet sekä tehtävien keskiarvot ovat näkyvissä liittessä (Liite 4).

5.2.4 Valinnan muut perusteet

Mielestämme olimme onnistuneet valintatestien laadinnassa, sillä myös muut mittarit eli koulun alkuun liittyneet testit sekä seurantatestit tukivat saamiamme tuloksia. Koulupsykologi testasi alkusyksystä ensimmäisen luokan oppilaiden lukukäsitteen hallintaa Liikasen testin mukaan (ks. Liikanen 1995). Ainoastaan tutkimukseen valitut oppilaat saivat normiarvoikseen +2 (vaihteluväli –2 - +2) ja he hallitsivat kaikki testissä mitatut käsitteet (esim. lähinnä, kahdeksannen, keskimmäisen, kaksi kertaa niin monta). Lisäksi alkusyksyllä suoritetussa matematiikan keskeisten käsitteiden diagnoosissa (Ikäheimo 1996) tapausoppilaat selvisivät lähes maksimipistein. Vaikeuksia heillä oli lähinnä numeroiden oikeinkirjoituksessa.

Opettajankoulutuslaitoksen alkuopetuksen yksikkö järjesti Jyväskylän Normaalikoulun ensimmäisillä luokilla sekä muutamilla kenttäkouluilla koko lukuvuoden kestävän seurannan äidinkielen ja matematiikan taidoista. Projekti liittyy

Oppimisen ohjaamisen kehittämishankkeeseen 1998 – 1999. Saimme tutkimustamme varten kolmen matemaattista ajattelua selvittävän testin tulokset. Ensimmäinen seurantatesteistä tehtiin viikolla 43 (kymmenes kouluviikko), toinen viikolla 49 ja kolmas kevätlukukauden aluksi viikolla 3. Osallistuimme keskimmäisen testin (Liite 5) laadintaan päättöharjoittelumme yhteydessä. Matematiikan seurantatestit laadittiin Turun oppimistutkimiskeskuksen METTI-testistön pohjalta (Salonen, Lepola, Vauras, Rauhanummi, Lehtinen & Kinnunen 1994). Testit pyrittiin tekemään haastaviksi myös matemaattisesti taitaville oppilaille.

Alkusyksyn ensimmäisen seurantatestin tulokset (Liite 6) vahvistivat oppilaiden valinnan tarkoituksenmukaiseksi: tutkimukseen valitut oppilaat suoriutuivat matemaattisloogista ajattelua, lukujonotaitoja sekä aritmeettisia taitoja selvittämään laaditusta testistä lähes virheittä. Valinta vastasi myös luokanopettajan arviota lasten matemaattisista taidoista.

5.3 Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden kuvailua

5.3.1 Kimmo

Kimmon vahvinta aluetta ovat erityisesti aritmeettiset laskutoimitukset, joista hän selviytyy nopeasti ja sujuvasti. Kimmo puurtaa mielellään yksin matematiikan tehtävien parissa. Hänen matemaattinen kiinnostuksensa on ilmennyt jo varhain, mistä äiti kertoi osuvan ja valaisevan esimerkin tarha-ajalta.

> 23 lasta kulki siinä parijonossa ja sitte ekana oli kaikista pienin niistä, 5-vuotias ja se oli sanonu, että tässä menee kakskytkolmipäinen lohikäärme. Montakohan jalkaa sillä on? (...) Lastentarhanopettaja oli kysynyt sitte kaikilta (...) keksiskö joku kuinka monta jalkaa, niin Kimmo oli heti sanonu, että nelkytkuus. (Kimmon äiti)

Kimmon mielestä matematiikka on kivaa ja helppoa. Matematiikka on laskemista, ”eikä hirveesti muuta”. Kimmon vanhemmat pitävät matematiikkaa tärkeänä oppiaineena. He ymmärtävät matematiikan luonteen kokonaisvaltaisesti ja korostavat loogisen ajattelun tärkeyttä. Matematiikkaa tarvitaan monessa asiassa: vanhempien mielestä ”koko elämä on matematiikkaa”. Kimmon isä on matematiikan määrittelyssään Haapasalon (vrt. s. 8) samalla linjoilla.

> Jos on yhtään tarmoa yrittää ajatella matemaattisesti näitä asioita, niin se on sitä tapaa ajatella muutenkin kuin niitä laskutehtäviä. (...) Silloinhan tulee tapa ajatella ihan tällasia jokapäiväsiä, arkipäivän asioita jokseenkin loogisella tavalla. (Kimmon isä)

Ihmettelimme taitoja, jotka Kimmolla oli hallussa jo ennen koulun alkua. Kysyimme vanhemmilta haastattelussa mahdollista syytä Kimmon matemaattiseen kyvykkyyteen. He olivat kyllä huomanneet poikansa kyvykkyyden ja myös hänen isoveljellään on taipumuksia matematiikkaan. Vanhemmat olivat usein äidin sanoja mukaillen myös ällistyneet Kimmon nopeaa suoriutumista vaikeistakin tehtävistä. Kuitenkaan he eivät osanneet antaa selitystä matemaattisen kyvykkyyden ilmenemiselle.

Vanhemmat eivät olleet omasta mielestään tietoisesti harjoittaneet Kimmon matematiikan taitoja. Perheen isällä on tosin tapana keskustella poikiensa kanssa matemaattisista asioista, mikä on luultavasti vaikuttanut heidän kiinnostumiseen matematiikasta.

> Kyllähän mä Kimmoa aina vähän testaan silleen, että en niinkään tällasia niinsanottuja yksinkertaisia lukuja vaan sitten tällaisia suurempia lukuja, että onko hahmoa siitä, että mikä on luku 10 000 ja kun siitä ottaa 10 002 pois, niin paljonko se mahtaa olla. (Kimmon isä)

Kimmolla on tapana suhtautua asioihin kyseenalaistaen ja uteliaasti tutkien, miksi asiat ovat niinkuin ovat.

> Joo, ja sitte Kimmosta oon huomannut senkin, että selittää myös tällasia, minkä ehkä isoveli aikoinaan piti itsestään selvyytenä joitain juttuja, ett se nyt on vaan näin. (...) Kimmo selittää tällaisetkin pienet asiat, niinku suullisesti sanoo, mistä on kysymys. (Kimmon isä)

Kimmo kertoi ylpeänä isoveljen opettavan hänelle joka päivä kotona matematiikkaa. He laskevat kuudennen luokan kirjasta isoveljen tehtäviä, joita Kimmo kertoi myös osaavansa hyvin. Perheessä on tapana perustella asioita ja etsiä tapahtumiin yhdessä selityksiä. Asioiden ymmärtämiseen kiinnitetään huomiota, mikä on erittäin tärkeää myös lapsen ajattelun kehittymiselle.

> Kyllähän se täältä kotoa tulee se ajattelutapa, et jos pienestä asti meillä hoidetaan asiat vähän tähän tyyliin, että kerrotaan, että miksi joku asia (...)

> niin se myös ääneen sanotaan lapsille, niin tottakai ne oppii siitä. (Kimmon isä)

Molemmilla vanhemmilla oli myönteisiä kokemuksia kouluajan matematiikasta. Isä on myös matemaattisesti taitava ja on menestynyt aina hyvin koulumatematiikassa, eikä äidilläkään omien sanojensa mukaan ongelmia ole ollut. He kannustavat poikiaan matematiikan harrastamiseen.

> Niin sitä mä vaan lapselle sanoin, et vaikka taipumuksia on, niin kyllä sitä täytyy kehittää ja muistaa tehdä. Ei niitä voi moneks vuodeks jättää oman onnensa nojaan, niin et ei ne päässä valmiina ole. (Kimmon isä)

Vanhemmat olivat iloisia, että Kimmo saa uusia haasteita Matikka-kerhossa. Kimmo itse oli epätietoinen kerhon sisällöstä, eikä osannut kertoa kerhoa koskevista odotuksistaan. Kuitenkin Kimmo oli kotona puhunut kerhosta ja oli innokkasti tulossa mukaan. Hän toivoi, että Matikka-kerhossa laskettaisiin paljon laskuja.

5.3.2 Leena

Leena on ollut kiinnostunut matematiikasta ja numeroista pienestä pitäen. Jo nelivuotiaana Leena pyysi äitiään opettamaan hänelle laskemista, joten kotiin lähettämämme kirje matemaattisesti taitavien lasten kerhosta ei tullut Leenan äidille suurena yllätyksenä.

Leena on luova monella eri alalla, mikä näkyy myös matematiikkaan liittyvissä asioissa. Leenalla on kotona tapana "nyhrätä" työpöytänsä ääressä. Hän on esimerkiksi käännellyt esineitä peilin edessä ja tutkinut, miltä ne näyttävät eri perspektiiveistä katsottuna. Leenan äiti ei osannut sanoa syytä tyttärensä matemaattiseen kyvykkyyteen. Leenan vahvuudeksi hän mainitsi luonteeseen kuuluvan kärsivällisyyden ja keskittymiskyvyn. Lisäksi Leena haluaa tehdä kaikki asiat mahdollisimman hyvin ja vaatii itseltään paljon. Hän tekee numerot ja kirjaimet todella huolellisesti ja siististi, mutta ei ole niihin itse kuitenkaan tyytyväinen.

> Se varmaan tekee silleen, tai en mä tiiä tekeekö, mutta ainakin tarkistaa aina, että onko oikee vastaus. Joskus tuntuu, että vois vähän nopeemminkin hutasta vaan. Mutta kaikilla on oma tyylinsä. (Leenan äiti)

Tämän huomasimme heti päättöharjoittelun alussa. Leenalta kului aikaa matematiikan tehtävien tekemiseen enemmän kuin tutkimukseen osallistuneilta pojilta. Lisäksi Leenan aritmeettiset taidot eivät olleet vielä täysin automatisoituneet ja siksi hän tarvitsi usein laskuissa konkreettista materiaalia selviytyäkseen tehtävistä. Tarvittaessa apuna toimivat omat sormet ja varpaat, joiden avulla Leena pääsi ratkaisuun usein sitkeän puurtamisen jälkeen.

> Tutkija: No, osaisitko nyt laskea sitä viimeistä laskua (8 x5)?
> (Laskee käsillä 5, 10, 15...)
> Leena: Mää meen sekasi, kuinka monta kertaa mää oon sen jo laskenut.
> T: Niin, tehdäänpäs sillaan, että jos mää lasken, että kuinka monta kertaa sää lasket, niin laske sinä.
> L: Joo. Mää lasken ensin varpailla, viis, kymmenen, viistoista...

Matematiikka on ollut Leenan mielestä mukavaa. Leena ei osannut kuitenkaan kertoa, mitä matematiikka hänen mielestään on ja miksi hän on siinä taitava. Toisessa valintatestissä olleet kertolaskut Leena koki helpoiksi. Matematiikan kirjasta esimerkiksi yhteenlaskut ja tehtävät, joissa saa itse keksiä laskun, ovat Leenan mielestään mukavia. Tavallisista plus- ja miinuslaskuista Leena toteaa, että ne ovat "jotenkin vähän hassuja". Tämä ilmeisesti osoittaa, että Leenan on vielä melko vaikeaa pukea todellisia ajatuksiaan sanoiksi.

Myös Leenan äiti piti matematiikasta kouluaikana ja pitää sitä tärkeänä kouluaineena. Erityisesti peruslaskutoimitukset, erilaiset kaavat ja niiden sovellutukset ovat hänen mielestään tärkeitä koulussa opittavia taitoja. Äiti antaa arvoa nykyiselle koulumatematiikalle sen monipuolisuuden vuoksi.

> Musta on kiva, mitä nyt oon seurannu näitten kotitehtäviä, että ne ei ole enää pelkkiä numeroita, vaan niissä on niitä palikoita ja kortteja ja sellasia. Että on monipuolisempaa mitä itellä on ollu sillon pienenä. (Leenan äiti)

Leenan äiti piti erityisen mukavana sitä, että Matikka-kerhossa pyrittäisiin tarjoamaan oppilaille haasteellisia tehtäviä. Äiti toivoi, että kerhossa käsiteltäisiin ongelmanratkaisua ja sanallisia tehtäviä, joissa täytyy pystyä etsimään tietoa rivienkin välistä. Leenan suhtautuminen Matikka-kerhoon oli samanlainen kuin poikienkin: on vaikea tietää onko siellä mukavaa, koska ei ole koskaan ollut sellaisessa kerhossa.

5.3.3 Janne

Jannella on ilmiömäinen päässälaskutaito. Hän osaa laskea kaksinumeroisilla luvuilla nopeasti sekä yhteen- että vähennyslaskuja ja hallitsee kertolaskun käsitteen. Erään Matikka-kerhon aikana Janne mainitsi osoitti tietävänsä jotain myös neliöjuurilaskusta (ks. tutkimuksen nimi), joten hänellä on monipuolinen matemaattinen sanavarasto. Matematiikka on koulussa Jannen lempiaine ja se on hänelle helppoa.

Janne on kotona harrastanut matematiikkaa jo muutaman vuoden. Janne kertoi omistavansa kaksi laskinta, joilla hän laskee erilaisia laskuja. Myös Jannen äiti on huolehtinut siitä, että Janne saa laskea kotona matematiikkaa, koska hän sitä kovasti haluaa. Jannella on kotona tietokonepelejä, jotka sisältävät matemaattisia tehtäviä.

> Ostin mä Jannelle semmoisen laskutehtävävihkon. - - Kyllä hän on sitäkin tehnyt - - mutta ne on niin helppoja, että ei se sillaan innosta. Mutta silloin yhteen aikaan, kun tuntu mukamas, ettei hänellä ole niitä tehtäviä tarpeeksi. (Jannen äiti)

Jannen äidille ei tullut yllätyksenä, että Janne todettiin matemaattisesti taitavaksi oppilaaksi. Kuitenkin hänelläkin oli vaikeuksia löytää syytä lapsensa matemaattiseen suuntautumiseen.

> Tutkija: Ooksää huomannut, että Janne on tässä (matematiikassa) taitava, vai oliko se yllätys?
> Jannen äiti: Kyllä mä olin huomannut tuossa syksyn mittaan, että hän itekseen päässä laskeskeli aina. (...) Sieltä tuli sitte jotain päässälaskuja 23+48 on näin paljon.

Äiti suhtautui Matikka-kerhoon innostuneesti: Janne saisi harrastaa enemmän sitä, mistä on kiinnostunut. Myös Janne oli äidin mukaan mielissään Matikka-kerhosta. Janne oli kuitenkin ennen kerhoa Kimmon kanssa huolissaan tehtävien tasosta: "Keksitteköhän te meille yhtään semmosta vaikeaa laskua, että me saatais vähä miettiä?" Janne kertoi, että hän ei vielä ollut löytänyt koulussa tarjotuista kirjoista sellaista laskua, jota hän olisi joutunut miettimään. Vaikka matematiikka on vaivatonta Jannelle ja sen takia myös kivaa, hän kuitenkin kaipaa haasteellisempaakin tekemistä. Janne tietää osaavansa matematiikkaa hyvin ja ilmaisee sen myös. Äiti kutsui poikansa puheita joskus jopa mahtipontisiksi, mutta piti itseluottamusta kuitenkin terveenä ja hyvänä asiana.

Myös Jannen äidillä on positiivisia koulukokemuksia matematiikasta. Hänen mielestään matematiikkaa tarvitaan hyvin monella elämän osa-alueella; vaikeampaa oli keksiä, missä sitä ei tarvita. Matematiikan tunteja koulusta ei saisi hänen mielestään vähentää.

5.4 Tutkimuksen toteutus

Ensimmäisessä tutkimussuunnitelmassamme keskitytiin matemaattisesti lahjakkaisiin lapsiin. Keväällä 1998 tutustuimme lahjakkuutta käsittelevään kirjallisuuteen. Perehdyttyämme kirjallisuuteen kuitenkin huomasimme, että lahjakkuutta on lähes mahdotonta luotettavasti todeta näin nuorilla lapsilla. Fulkerson (1995) väittää myös, että aikaa ei kannata tuhlata miettimiseen, onko lapsi lahjakas vai ei. Tärkeämpää on tunnistaa lasten vahvuuksia ja erilaisia kykyjä ja käyttää voimavaroja sen pohdintaan, mitä ne edellyttävät opetukselta. (Fulkerson 1995, 118.) Hylkäsimme lahjakkuus-käsitteen syksyllä 1998 ja muutimme sen matemaattiseksi taitavuudeksi. Valitsimme tutkimuksen kohteeksi matemaattisesti taitavat lapset ja halusimme tutkia, kuinka heidän ajatteluaan voisi kehittää. Tutustuttuamme tapausoppilaisiin ja juteltuamme heidän kanssaan alkoi heidän ajattelutapansa ja –kulkunsa kiinnostaa jo sellaisenaan. Samalla huomasimme ajattelun kehittämiseen liittyvän ongelman siirtyneen taka-alalle; osasyynä tähän varmasti oli myös sopivien ajattelun mittareiden puuttuminen ja ajattelun kehittymisen vaikea todistaminen.

Syyskuussa kerroimme tutkimukseen valituille oppilaille Matikka-kerhosta ja lokakuun ensimmäisellä viikolla 1998 lähetimme kirjeet heidän vanhemmilleen. Kirjeessä (Liite 7) kerrottiin tehdyistä testeistä ja tutkimuksemme tarkoituksesta sekä suunnitelmasta toteuttaa Matikka-kerho oppilaille. Kirjeessä pyydettiin lupaa lapsen osallistumiseen tutkimukseen sekä kerhojen nauhoittamiseen ja videointiin. Kaikki vanhemmat antoivat lapselleen luvan osallistua sekä kerhoon että tutkimukseen. Pian tämän jälkeen otimme henkilökohtaisesti vanhempiin yhteyttä sopiaksemme haastatteluajan heidän kanssaan. Haastatteluista kaksi tapahtui oppilaiden kotona, yksi käytännön syistä eräässä kahvilassa. Haastattelut olivat teemahaastatteluja (Liite

8) ja niiden ilmapiiri oli vapautunut. Aikaa haastatteluissa kului viidestätoista minuutista reiluun puoleen tuntiin.

Loka-marraskuussa 1998 valitsimme eri kirjoista tehtäviä Matikka-kerhoon ja matematiikan eriyttäville tunneille. Tarkoituksenamme oli opettaa kaikki seitsenviikkoisen harjoittelumme matematiikan tunnit. Yksi matematiikan tunti viikosta varattiin eriyttäville tehtäville (Liite 1), jolloin jokaisella luokan oppilaalla oli mahdollisuus saada tasoaan vastaavia tehtäviä.

Tutustuminen oppilaisiin alkoi observoinnin avulla marraskuun alussa 1998. Ensimmäisen harjoitteluviikon aikana tapausoppilaita haastateltiin tulevasta Matikka-kerhosta ja siihen liittyvistä odotuksista. Observoimme tapausoppilaiden työskentelyä etenkin matematiikan tunneilla ja keskustelimme heidän matemaattisista taidoistaan luokanopettajan kanssa. Emme käyttäneet observointilomakkeita. Ennen kerhoa teimme lapsille alkumittauksen Malisen (1980; 1992) testien mukaan. Tämä aika ennen Matikka-kerhon alkua oli tärkeää niin meille kuin kerholaisillekin, koska opimme tuntemaan oppilaita ja heillä oli aikaa tottua meihin.

Matikka-kerho toteutettiin koulun ulkopuolisena kerhona. Kerhotapaamisia oli kaksi kertaa viikossa viiden viikon ajan eli yhteensä kymmenen. Kerho alkoi keskiviikkona 11.11.1998 ja loppui keskiviikkona 9.12.1998. Keskiviikkoisin kerho oli koulun jälkeen klo 12 - 13 ja perjantaisin klo 8 - 9. Kerho pidettiin oppilaiden luokan vieressä olleessa kirjastossa. Kerhon eteneminen ja kerhotehtävien kuvailu on liitteissä (Liite 9 - 10).

Loppumittaukset ja -haastattelut tehtiin tapausoppilaille joulukuun loppupuolella. Sekä alku- että loppumittaukset (Liite 11) ja haastattelut (Liite 12 - 13) tehtiin koulun tiloissa. Oppilaiden vanhempien loppuhaastattelut teimme tammi-helmikuussa 1999, sillä perheiden jouluun valmistautumista ei haluttu häiritä. Haastatteluista kaksi tehtiin oppilaiden kodeissa ja yksi yliopiston tiloissa. Haastattelutilanteet olivat luonnollisia keskustelutilanteita, joten kaksi haastattelua kesti jopa tunnin.

Haastattelujen ja kerhotapaamisien litteroinnin aloitimme harjoittelun viimeisillä viikoilla, mutta käytännön syistä teimme suurimman osan litterointityöstä tammikuun 1999 alussa. Oppilaiden vanhempien loppuhaastattelut (Liite 14) litteroimme heti haastattelujen jälkeen.

Tammi-helmikuussa 1999 perehdyimme metodologiaa käsittelevään kirjallisuuteen tarkemmin ja kirjoitimme tutkimuksen metodologiaosuuden pääpiirteissään. Aloitimme myös aineiston analysoinnin lukemalla läpi oppilaiden, vanhempien ja opettajan haastattelut ja Matikka-kerhojen litterointeja. Maaliskuun alussa olimme viikon Konneveden tutkimusasemalla, jossa tapahtui suurin osa analysointityöstä. Maaliskuun lopun kirjoitimme tuloksia ja viimeistelimme tekstiä.

5.5 Kvalitatiivinen tapaustutkimus

Tutkimuksemme on kvalitatiivinen tapaustutkimus. Kvalitatiivinen tutkimus on kuvailevaa ja tulkitsevaa tutkijan ja aineiston vuorovaikutusta, jonka avulla pyritään saamaan selkoa numerottomasta aineistosta (Berger 1998, 26). Se pyrkii tutkimusvälineiden ja -perspektiivien kirjoa laajentamalla tarkkaan tutkimuskohteen kuvailuun ja tulkintaan (Berger 1998, 27).

Kvalitatiivinen tutkimusote tutkimuksessamme on perusteltua, koska kaikki empiirisen didaktiikan tutkimuksen kohteet voidaan nähdä ilmiöinä, ihmisen mielen tuotteina tai prosesseina ja henkisenä todellisuutena, mitä ei suoraan voida tutkia kokeellisella tutkimuksella (Maier 1998, 58 - 59). Myös lapsen ajattelun tutkiminen vaatii monipuolista lähestymistapaa. Tämä onnistuu parhaiten keskittymällä muutamaan tapausoppilaaseen ja heidän ajatteluunsa. Halusimme oppia ymmärtämään matemaattisesti taitavien lasten ajattelua ja järjestää heille haastavaa toimintaa, mikä oli mahdollista vain pienelle joukolle lapsia.

Maier (1998) esittää artikkelissaan tuoreen perustelun kvalitatiiviselle tutkimusotteelle ja tapaustutkimukselle. Koska konstruktivismin mukaan jokaisen ihmisen on itse rakennettava tietonsa, on tutkimuksenkin saatava tietoa yksityisistä ihmisistä mieluummin kuin oppijajoukosta. (Maier 1998, 68.) Tutkijan täytyy yrittää ymmärtää tutkimuksen kohdetta sen alkuperäisyydessään ja ainutlaatuisuudessaan, löytää yksilön persoonallinen tapa ajatella, tuntea ja toimia. Vaikka tutkimuskohteen ajatukset saattavat poiketa tutkijan omista mielipiteistä, tutkija ei saa rajoittua vain vertaamaan tutkimuskohteen ominaisuuksia omiin oletuksiinsa, arvostelun kriteereihin ja ihanteisiin (Maier 1998, 69).

Kvalitatiivisten metodien avulla vältetään kvantitatiivisille mittareille tyypillisiä virheitä. Ihmisen ajattelun, tunteen sekä toiminnan vaihtelevuutta ja monimutkaisuutta ei saa supistaa muutamaan muuttujaan. Ihmisen ajattelu eikä toiminta ole jäljennettävissä eikä ennustettavissa, minkä takia sitä ei voi kuvata pelkistetyillä syy-seuraussuhteilla. (Maier 1998, 69.)

Perttula (1998) painottaa artikkelissaan kvalitatiivisen tutkimusmateriaalin tekstiluonnetta. Tutkimusmateriaalin ei tarvitse olla tekstuaalista sillä hetkellä kun se kerätään, vaan se voidaan koota monenlaisesta aineistosta. Tutkimusmateriaali pitää kuitenkin aina kääntää tekstiksi, ennen kuin se on kvalitatiivista (Perttula, 1998, 73). Näin se poikkeaa huomattavasti kvantitatiivisen tutkimuksen numeraalisesta aineistosta. Toinen eroavaisuus tulee esille tutkimuksen tarkoituksessa muodostaa uutta käsitteellisesti järjestynyttä tieteellistä tietoa. Kvalitatiivinen tutkimusote ei pyri koko kohdejoukkoa koskevaan yleistettävään tietoon, vaan hankkii analyysin avulla yleistä tietoa yksittäisistä tapauksista. Yleistettävyyden sijasta kvalitatiivinen tutkimus pystyy hyödyntämään tekstimuotoista tutkimusmateriaalia ja ymmärtämään tutkittavaa ilmiötä parhaalla mahdollisella tavalla. (Perttula, 1998, 74 - 75.)

Tapaus voi tapaustutkimuksen yhteydessä tarkoittaa ihmistä, ihmisjoukkoa, yhteisöä, laitosta, jotain tapahtumaa tai laajempaa ilmiötä (Syrjälä & Numminen 1988, 5). Tässä tutkimuksessa tapauksilla tarkoitetaan kolmea matemaattisesti taitavaa 7-vuotiasta lasta. Tapauksen voi valita monella perusteella: se voi olla mahdollisimman tyypillinen tai kriittinen rajatapaus, poikkeuksellinen ja opettava tai paljastava (Syrjälä & Numminen 1988, 19). Tässä tutkimuksessa tapausoppilaat edustavat matemaattisilta kyvyiltään poikkeuksia ikäryhmässään, mutta ovat todennäköisesti tyypillisiä esimerkkejä matemaattisesti taitavista lapsista.

Tutkimuskohteena oli käytännön ongelman kuvaus ja tarkastelu, jota ei voi irrottaa kontekstistaan. Tehdessämme tutkimusta aidossa kouluympäristössä ja todellisessa tilanteessa meidän oli helpompi ymmärtää tilannetta kaikkien osapuolten kannalta. Halusimme saada lasten matemaattisesta ajattelusta ja heidän koulunkäynnistään syvällistä sekä yksityiskohtaista tietoa aidossa ympäristössä. Tapaustutkimukseen kuuluu myös menneisyyden tarkasteleminen osana nykyisyyttä, mikä oli yksi painava syy ottaa vanhemmat mukaan tutkimukseen. (Syrjälä, Ahonen, Syrjäläinen & Saari, 1995, 11 – 12.)

Kvalitatiivinen tapaustutkimus on hyvin voimakkaasti kokonaisvaltainen tutkimustapa. Siinä pyritään ottamaan huomioon koko prosessi ja ympäristö yksittäisten tuotteiden tai muuttujien sijasta (Syrjälä ym. 1995, 13). Tapaustutkimuksessa tutkijan on luotettava siihen, että tutkimuksen kohteena olevat yksilöt osaavat tulkita omaa elämäänsä ja antaa tapahtuville asioille merkityksiä. Vuorovaikutus on hyvin tärkeä tekijä tapaustutkimuksen onnistumisen kannalta (Syrjälä ym.1994, 14). Tutkijan ja tutkittavien välillä tulee olla molemminpuolinen luottamus ja tieto tutkimuksen eettisistä säännöistä. Vuorovaikutuksen tulee olla aktiivista ja pitkäaikaista, mikä vaatii sitoutumista niin tutkijalta kuin tutkittaviltakin (Eskola & Suoranta 1998, 129). Tässä tutkimuksessa vuorovaikutus korostui, koska tutkimuksen kohteena oli lapsia, joiden ei ole helppo muuttaa ajatteluaan puheen muotoon. Vuorovaikutuksen syntyyn piti kiinnittää paljon huomiota, jotta voitimme lasten luottamuksen ja he kykenivät kertomaan ajatuksistaan vapaasti. Koska olimme mukana tutkimusympäristömme toiminnassa suhteellisen pitkän ajan, vuorovaikutuksemme oppilaiden kanssa oli antoisaa ja parani koko ajan tutkimuksen edetessä.

Toimintatutkimus. Tässä tutkimuksessa on myös piirteitä toimintatutkimuksesta, joka yhdistää opettajan ja tutkijan roolin (Syrjälä ym. 1995, 25). Toimintatutkimuksessa onkin tarkoituksena pyrkiä parantamaan ja ymmärtämään kasvatuksellisia käytäntöjä ja niiden olosuhteita (Syrjälä ym. 1995, 30). Ymmärtämisen edellytyksenä on aito kiinnostus, joka herättää halun pohtia toiminnan ja sen seurauksien sekä ympäristön olosuhteiden vuorovaikutusta. Keskeistä on toiminnasta vastuussa olevien henkilöiden sitoutuminen prosessiin. (Heikkinen 1996, 25.) Tässä tutkimuksessa vahva sitoutumisemme tutkimusympäristöön sekä tapausoppilaisiin veti meidät täysipainoisesti mukaan ongelmien pohtimiseen ja vastausten etsimiseen.

Toimintatutkimuksessa ei pyritä useiden muiden tutkimusmenetelmien tavoin objektiivisuuteen. Sen sijaan että tutkija tarkastelisi toimintaa ulkopuolelta häiritsemättä tutkimuskohdetta millään tavalla, hän pyrkii avoimeen yhteistyöhön tutkittavien kanssa ja etäisyyden sijasta sekaantuu tutkimuskohteensa elämään. (Eskola & Suoranta 1998, 128.) Tässä tutkimuksessa osallistuimme tiiviisti luokan toimintaan ja tutustuimme myös oppilaiden vanhempiin.

Toimintatutkimukselle on tyypillistä prosessin sykliset kerrokset - havainnointi, reflektointi, suunnittelu ja toiminta /kokeilu - (Heikkinen 1996, 30), joissa tutkija tarkentaa tutkimusongelmaansa yhä uudelleen. Tämä toimintatutkimuksen keskeisin tuntomerkki ei toteutunut kokonaisuudessaan tässä tutkimuksessa, minkä takia emme määrittele tutkimustamme toimintatutkimukseksi. Jotta tutkimuksemme täyttäisi toimintatutkimuksen kriteerit, olisi meidän pitänyt vielä jatkaa toimintamme kehittelyä parannetun suunnitelman kautta uuteen sykliin.

5.6 Aineiston keruu

Arnold (1998) kertoo artikkelissaan muutaman viikon mittaisesta kurssista, jolla hän yritti uuden opetusmetodin avulla opettaa 12 - 13 -vuotiaille lapsille lämmön ja lämpötilan käsitettä. Kurssin jälkeen hän kuvaili parhaiten tarkoitukseen soveltuvia metodeja käyttäen, miten opetus vaikutti lasten ajatteluun. Hän keräsi aineistoa lasten koulukirjoista ja tehtävälomakkeista, tuloksia erilaisista testeistä, päiväkirjamerkintöjä, matematiikan arvosanoja sekä haastatteli lapsia ja observoi heitä erilaisissa tilanteissa. Keräämästään tutkimusaineistosta Arnold rakensi monipuolisen kuvan, kuinka kunkin lapsen ajattelu muuttui tai kehittyi. (Arnold 1998, 5 - 24.) Samanlaisilla aineistonkeruumenetelmillä saatuun tutkimusmateriaaliin perustuu myös tämän tutkimuksen tulkinnat ja johtopäätökset.

5.6.1 Haastattelu ja havainnointi aineistonkeruumenetelminä

Haastattelu ja havainnointi tukevat toisiaan tutkimusmuotoina. Havainnointi tarjoaa mahdollisuuden tarkistaa, mitä haastatteluissa on sanottu ja haastattelu puolestaan sallii observoijan mennä näkyvää käyttäytymistä syvemmälle haastatellessaan henkilöitä, joita on myös observoitu (Patton 1990, 245). Haastattelussa tutkija voi vaikuttaa havainnointia enemmän siihen, mistä asiasta hän haluaa tietoa. Haastattelussa voidaan säädellä aiheiden järjestystä ja täsmentää kysymyksiä epäselvissä kohdissa sekä ottaa esille menneitä tapahtumia. Observointi puolestaan koskee nykyisyyttä. (Hirsjärvi & Hurme 1980, 32.)

Berger (1998, 32) esittää mielenkiintoisen vertauksen haastattelun ja dinosauruksen samankaltaisuuksista. Se mitä tutkija haastattelussa etsii ihmisen mielestä, voi olla aito ja todellinen, mutta kuitenkin piilossa kuten dinosaurus. Ainoa saatavilla oleva todiste on fossiili, katkonainen jäljitelmä alkuperäisestä. Näin on myös haastattelussa. Raunioiden kaivamisen ja korjaamisen jälkeen, haastattelutekniikassa nauhoituksen ja litteroinnin jälkeen, alkuperäisen mallintaminen voi olla mahdollista korjauksen ja tulkinnan avulla. Malli, jota tutkija rakentaa haastattelun perusteella, voi olla täydellinen ja läsnä, mutta valitettavasti se on kuitenkin vain hypoteettinen oletus. Haastattelussa myös erilaiset väärinkäsitykset ovat mahdollisia ja miltei todennäköisiä, koska yhden ihmisen lausunto antaa aina tilaa erilaisille tarkoituksille ja tulkinnoille (Maier 1998, 62).

Patton (1990) toteaa tutkijoiden haastattelevan ihmisiä niistä asioista, joita tutkijat eivät voi suoraan observoida. Tällaisia asioita ovat muun muassa tunteet, ajatukset ja tarkoitukset. Haastattelun tarkoituksena onkin antaa tutkijalle mahdollisuus katsoa asioita toisen ihmisen näkökulmasta. (Patton 1990, 287.) Koska tässä tutkimuksessa perehdyimme lasten ajatteluun, oli haastattelu lähes ainoa keino saada selville tapa, jolla lapset erilaisissa tilanteissa ajattelevat.

Haastattelu voidaan toteuttaa kolmella tavalla: *yksilöhaastatteluna, parihaastatteluna* tai *ryhmähaastatteluna* (ks. esim. Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 1997, 206). Tavallisin tapa on käyttää yksilöhaastattelua. Lapset haastateltiin tässä tutkimuksessa yksitellen, koska oppilailla on usein tapana mukailla toistensa mielipiteitä. Näin lasten haastattelujen voidaan katsoa olevan luotettavampia. Parihaastattelussa haastateltavia on kaksi. Etenkin kasvatustieteellisissä tutkimuksissa parihaastattelua käytetään muun muassa lasten vanhempien haastatteluissa (Hirsjärvi ym. 1997, 206). Tutkimuksessamme haastateltiin lasten vanhempia sekä yksilö- että parihaastatteluna.

Haastateltaessa lapsia on otettava huomioon muutamia seikkoja, jotta haastattelussa saataisiin esille tutkimuksen kannalta olennaiset tiedot. Haastattelu kannattaa suunnitella mahdollisimman lyhyeksi, koska lasten on usein vaikea keskittyä pitkään. Jos haastattelu on pitkä, kannattaa se tehdä useammassa osassa. (Trost 1997, 37.) Tässä tutkimuksessa lasten haastattelut suoritti vain toinen meistä, jotta oppilas ei olisi kokenut oloaan uhatuksi kahden aikuisen läsnäollessa. Vanhempien haastatteluissa olimme molemmat mukana. Trostin (1997) mukaan useampi kuin yksi haastattelija saa usein enemmän tietoa tutkittavilta, jos tutkijat pystyvät toimimaan tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti yhdessä. Tutkittavien kannalta kaksi haastattelijaa saatetaan kokea uhkana, jos tilanteesta ei saada luonnollista. (Trost 1997, 43 - 44.) Tässä tutkimuksessa kahden tutkijan käyttö vanhempien haastatteluissa oli mielestämme onnistunut ratkaisu. Vaikka emme etukäteen jakaneet haastattelurooleja (esim. haastattelija / tarkkailija) tai suunnitelleet kysymysten esittämisvuoroja, tilanne eteni luonnollisesti erilaisten vuorovaikutustyyliemme ja luonteidemme mukaisesti.

Haastattelumenetelmät voidaan jakaa monella tavalla. Hirsjärven ym. (1997, 204-205) mukaan haastattelua on kolmea eri tyyppiä: *strukturoitu haastattelu, teemahaastattelu* ja *avoin haastattelu.* Valitsimme haastattelutyypeiksi tässä tutkimuksessa strukturoidun haastattelun ja teemahaastattelun.

Strukturoitu haastattelu. Strukturoitu haastattelu tarkoittaa lomakehaastattelua, jossa kysymysten tai väitteiden järjestys ja muoto on tarkasti määritelty ja ne esitetään kaikille haastateltaville samassa järjestyksessä (Hirsjärvi ym. 1997, 204). Strukturoitua haastattelua käytettiin tässä tutkimuksessa tapausoppilaiden alku- ja loppumittauksissa, joissa oli valmiina tarkat kysymykset, mutta joihin lapset saivat vastata omin sanoin. Strukturoidut kysymykset mahdollistivat kaikille lapsille samankaltaisen testitilanteen ja myös alku- ja loppumittaukset olivat mahdollisimman identtiset. Huomasimme tutkimusta tehdessämme, että etenkin lapsia haastatellessa haastattelijan tulee varautua joustavaan ja tarkoituksenmukaiseen kysymyksen asetteluun tilanteen hallitsemiseksi. Siksi käytimme strukturoiduissakin haastatteluissa tarvittaessa apukysymyksiä.

Käyttämästämme haastattelumenetelmästä lasten alku- ja loppumittauksessa voidaan käyttää myös nimeä tehtäviin pohjautuva haastattelu (ks. Davis 1983, 255; Ginsburg, Kossan, Schwartz & Swanson 1983, 18). Tällaisen haastattelun perusperiaatteisiin kuuluvat seuraavat asiat: lapsi tekee tehtäviä, tutkija nauhoittaa hänen puheensa, tehtävä esitetään lapselle ja tutkija keskustelee lapsen kanssa tehtävää ratkaistaessa (Davis 1983, 255). Pienten lasten matemaattista ajattelua tutkittaessa on tärkeää ottaa esiin konkreettisia välineitä havainnollistamaan ongelmaa. Konkreettiset esimerkit tekevät tilanteen lapselle ymmärrettävämmäksi ja samalla hänen on helpompi kertoa ajatuksistaan (Ginsburg ym. 1983, 10). Alku- ja loppumittauksessa käytimme lähes jokaisessa tehtävässä havainnollistavia välineitä. Niiden avulla oppilaat ratkaisivat tehtävän haastattelutilanteessa, minkä jälkeen he kertoivat ratkaisustaan meille. Tämä on lapselle huomattavasti helpompi ja tutkimukselle hyödyllisempi tapa kuin se, että lapsi yritetään saada kertomaan yleisistä ongelmanratkaisustrategioistaan. Tutkijan tehtäväksi jää muodostaa lapsen yksittäisistä kertomuksista yleiskuva lapsen ratkaisumalleista ja ajatusprosesseista.

Teemahaastattelu. Lasten, heidän vanhempiensa ja tutkimusluokan opettajan haastatteluissa käytettiin menetelmää, joka muistutti lähinnä teemahaastattelua. Teemahaastattelussa haastattelun aihepiirit eli teemat ovat etukäteen tiedossa. Teemahaastattelusta puuttuvat kysymysten tarkka muoto ja järjestys, jotka ovat ominaisia strukturoidulle haastattelulle. Tutkija voi laatia haastattelutilannetta varten teema-aiheista luettelon, jota hän käyttää haastattelussa omana muistilistanaan. (Hirsjärvi & Hurme 1980, 50 - 58 .) Eskola ja Suoranta (1998, 88) huomauttavat, että koska teemahaastattelu on muodoltaan avoin, voi haastateltava halutessaan puhua varsin vapaasti. Tällöin saadun materiaalin voidaan katsoa edustavan vastaajien puhetta. Toisaalta rajatut teemat takaavat sen, että kaikkien haastateltavien kanssa keskustellaan samoista asioista.

Tässä tutkimuksessa tarkoituksena ei ollut saada vanhemmilta tarkkoja faktatietoja, vaan tutustua heidän käsityksiinsa ja mielipiteisiinsä, minkä takia valitsimme haastattelutekniikaksi teemahaastattelun. Haastattelujen teemat koskivat pääasiassa matematiikkaa ja Matikka-kerhoa. Käsiteltävät aiheet oli kirjattu paperille (Liitteet 8, 14), mutta kysymysten muoto muokkautui tilanteen mukaan.

Osallistuva havainnointi. Yksi tapa kerätä tietoa tutkittavista on havainnoida eli observoida tutkittavien käyttäytymistä eri tilanteissa. Havainnoinnin avulla pyritään saamaan tietoa siitä, mitä todella tapahtuu ja toimivatko ihmiset niin, kuin he sanovat toimivansa (Hirsjärvi ym. 1997, 209). Dingwall (1997) kuitenkin huomauttaa, että havainnointi ei suoraan osoita meille, mikä on todellista eikä se kerro, mitä tapahtuu tutkittavien henkilöiden mielessä ja ajatuksissa. Sen sijaan havainnointi kertoo meille niistä näkyvistä ratkaisuista, joita ihmiset käyttävät selviytyäkseen eri tilanteista. (Dingwall 1997, 61 - 62.)

Tutkija voi toimia eri tavoin observointitilanteissa. Eskolan ja Suorannan (1998) mukaan tutkija voi osallistua luonnollisiin kenttätilanteisiin toimivana yksilönä tai ulkopuolisena havainnoijana (Eskola & Suoranta 1998, 100). Osallistuvassa havainnoinnissa havainnoija ottaa osaa joihinkin tai kaikkiin toimintoihin, joita observoidaan (Bell 1987, 88). Vuorovaikutus tutkittavien kanssa tapahtuu kuitenkin hyvin pitkälle havainnoitavien henkilöiden ehdoilla (Eskola & Suoranta 1998, 101). Osallistumisaste riippuu siitä, millaista tietoa tutkimuksella haetaan ja mikä on aineiston keruutarve (Syrjälä ym. 1994, 84).

Tässä tutkimuksessa observointi perustui pääasiassa osallistuvaan havainnointiin, koska toteutimme itse Matikka-kerhon ja osallistuimme täysipainoisesti luokan toimintaan. Havainnointi ei ollut keskeinen aineistonkeruumenetelmä, vaan pyrimme havainnoinnin avulla saamaan kokonaisvaltaisen käsityksen lapsista ja heidän taidoistaan.

5.6.2 Mittareiden luotettavuuden tarkastelua

Haastattelu on samanarvoinen muiden mittaustapojen joukossa ja siksi sen täytyy kohdata samat reliabiliteetti- ja validiteettivaatimukset kuin muidenkin tiedonhankkimismenetelmien. (Gall, Borg & Gall 1990, 290.) Haastattelun ongelmana pidetään muun muassa haastattelijan mahdollista vaikutusta tutkittavaan ja tämän asenteisiin. Tässä tutkimuksessa matematiikan opetuksen merkityksen korostaminen ja taitavien lasten opetuksen kehittäminen ei voinut olla vaikuttamatta haastateltavien vastauksiin kysyttäessä esimerkiksi matematiikan merkitystä ihmiselle. Haastattelija ei voi myöskään taata haastattelutilanteessa haastateltavan anonymiteettiä, vaikka se raportointivaiheessa onnistuisikin.

Lasten matemaattisen ajattelun tutkimiseen on vaikea löytää metodia, joka toisi esiin lapsen puhtaan ajattelun ja poistaisi ympäristön vaikutuksia. Tuloksiin vaikuttavat aina lapsen tiedot, elämänkokemukset, nykyinen elämäntilanne ja asennoituminen tutkittavaan asiaan ja tutkijoihin. Kuitenkin haastattelu on käyttökelpoinen menetelmä tutkittaessa ajattelua, koska sen avulla voidaan jossain määrin analysoida päättelyn vaiheita. (Malinen 1992, 24.) Tässä tutkimuksessa lapsen puheisiin perustuvan aineiston luotettavuutta parantaa se, että aineistoa on kerätty monissa eri tilanteissa kuuden viikon ajalta, eikä vain muutamilta haastattelukerroilta. Lisäksi lapset ehtivät tutustua meihin, joten ainakaan loppumittauksessa emme usko lasten jännittäneen haastattelijaa tai haastattelutilannetta. Observoidessamme tuntitilanteita saimme arvokasta tietoa lasten luonteista ja työskentelytavoista, mikä auttoi meitä tekemään haastattelutilanteista avoimempia ja luonnollisempia.

Osallistuvassa havainnoinnissa tutkijan omilla subjektiivisilla kokemuksilla ja havainnoilla on suuri merkitys. Havainnoinnista voi tulla hyvinkin valikoivaa, koska tutkijan ennakko-odotukset suuntaavat huomion tiettyihin asioihin muiden asioiden jäädessä kokonaan huomaamatta (Eskola & Suoranta 1998, 103.) Lisäksi viettäessään paljon aikaa observoitavien kanssa tutkijat saattavat menettää kykynsä nähdä asioiden kaikkia puolia (Bell 1987, 89). Etuna tässä tutkimuksessa pidämme sitä, että toimimme tutkittavien oppilaiden kanssa myös muissa tilanteissa kuin varsinaisissa tutkimustilanteissa, jolloin oppilaat ehtivät tottua meihin ja me opimme tuntemaan oppilaita myös muussa kuin tutkimusympäristössä.

5.7 Aineiston analyysi

Aineiston analyysillä pyritään laadullisessa tutkimuksessa Eskolan ja Suorannan (1998, 138) mukaan saamaan kerättyyn aineistoon selkeyttä ja tuottamaan uutta tietoa tutkitusta asiasta. Aineiston käsittely on tutkijan käsityötä ja käytännön ratkaisuja (Pyörälä 1995, 21). Kvalitatiivisen tutkimusaineiston analyysi on monimutkainen prosessi ja etenkin aineiston tulkinta tuottaa usein ongelmia kokeneellekin tutkijalle. Aineiston analysointivaiheessa tutkimusaineistosta erotellaan tutkimuksen kannalta keskeisin osa. Vasta tämän valikoidun aineiston pohjalta tehdään tulkintoja. (Eskola & Suoranta 1998, 151.) Aineiston analyysissä olisikin keskeistä pyrkiä soveltamaan menetelmiä, joiden avulla voidaan paneutua koko aineistossa esiintyviin piirteisiin ja juonteisiin (Pyörälä 1995, 21). Ensimmäisenä tutkijan on syytä perehtyä kokonaisuuteen lukemalla koko aineisto läpi, joten luimme toistemme litteroimat aineistot ensin palauttaaksemme mieliin tapahtumat.

Pääosa tämän tutkimuksen aineistosta on tallennettuna nauhoille. Tällaisen materiaalin käsittelyyn on Eskolan ja Suorannan (1998, 151) mukaan ainakin kolme tapaa:

1) aineiston purkamisen kautta edetään suoraan analyysiin
2) aineiston purkamisen jälkeen koodataan aineisto, joka sitten analysoidaan
3) yhdistetään aineiston purkaminen ja koodaaminen ja siirrytään sitten analysointiin.

Käytimme tutkimusaineistomme koodaamisessa keskimmäistä tapaa eli litteroimme nauhat, koodasimme ja analysoimme aineistoa sekä teimme näiden pohjalta tulkintoja. Koodaus ei koskaan kvalitatiivisessa tutkimuksessa ole pelkästään numeroiden lukemista, vaan se on merkityksenantoprosessi ja osa tulkintaa (Pyörälä 1995, 21 - 22). Tarkoitamme koodauksella tässä tutkimuksessa aineiston jäsentelemistä helpommin käsiteltävään muotoon. Aineiston koodauksessa käytimme hyväksemme lukemiamme teorioita, jotka liittyvät tutkimuksemme aihepiiriin ja jäsentelimme aineistoa teemahaastatteluissa käyttämiemme aihealueiden pohjalta. Merkitsimme aineistoon eri väreillä tiettyjä teemoja, leikkasimme katkelmat irti ja laitoimme samaan aihepiiriin kuuluneet asiat samaan muovitaskuun. Voidaksemme palata kokonaisiin haastatteluihin uudelleen kirjoitimme lapun taakse koodimerkin, mistä aineiston osasta kyseinen osa on. Matikka-kerhojen litterointeja emme leikelleet osiksi, vaan pyrimme säilyttämään ne yhtenäisinä. Koodauksen teemat muuttuivat useaan kertaan tutkimusongelmiemme jäsentyessä ja kehittyessä, joten koodaustakin suoritimme useita kertoja. Koodatusta aineistosta etsimme vastauksia tutkimusongelmiin.

Kuten laadullisessa tutkimuksessa yleensäkin, on tässäkin tutkimuksessa aineiston pohjalta kirjoitettu teksti vain eräs näkökulma tutkittuun aiheeseen (Eskola & Suoranta 1998, 143; Tynjälä 1991, 392). Joku toinen tutkija olisi käsitellyt samaa aineistoa toisin tai perehtyessään samoihin ongelmiin tullut ainakin jonkin verran eri johtopäätöksiin. Aineiston analysointi- ja tulkintavaiheen lisäksi aineiston tulkintaa tehdään koko tutkimusprosessin ajan, mikä osaltaan vaikuttaa kokonaisuuden muotoutumiseen. Haastateltava tekee tutkimustilanteessa tulkintoja muun muassa kysymyksistä, haastattelija puolestaan tulkitsee haastateltavan vastauksia. Kolmannen asteen tulkintaa tapahtuu tutkijan kirjoittaessa raporttiaan ja lopullista tulkintaa tekee raportin lukija saamansa informaation pohjalta (Eskola & Suoranta 1998, 142). Näiden vaiheiden lisäksi teimme tässä tutkimuksessa aineiston analysointia ja tulkintaa koko prosessin ajan keskustelemalla tutkimuksesta keskenämme ja ulkopuolisten tahojen kanssa, mikä vaikuttaa osaltaan lopputuloksen muotoutumiseen.

6 HÄTÄ KEINOT KEKSII - Tutkimuksen tulokset

6.1 Matemaattisesti taitavien lasten ajattelun piirteitä

Tärkeintä tutkimuksessa mukana olleiden lasten matemaattisen kehityksen kannalta on kiinnittää huomiota heidän ajatteluunsa ja sen olennaisiin piirteisiin. Saimme lasten ajattelusta eniten tietoa henkilökohtaisissa haastatteluissa, joissa kuuntelimme erikseen jokaisen lapsen perusteluja ja ratkaisukeinoja. Matikka-kerhon tiimellyksessä ääneen selitettyjä kokonaisia ajatuskulkuja kuulimme valitettavasti melko harvoin. Lapsilla oli kerhossa kova halu tehdä tehtäviä ja mennä eteenpäin, joten he eivät kokeneet merkityksellisenä selittää meille tehtävien ratkaisutapoja. Lapset kertoivat omasta ajattelustaan aluksi melko vastahakoisesti ja kysyttäessä toiminnan syytä yleisin vastaus oli: "En mä tiiä." Kuitenkin he pian oppivat, että vaadimme heitä miettimään ja niin he alkoivat kertoa, miksi toimivat tietyllä tavalla. Lapsen ajattelukulun saa selville vain, kun hän sen itse selittää. Aina voidaan olettaa lapsen ajattelevan tietyllä tavalla, mutta varmuuteen päästään vain hänen oman kerrontansa perusteella. Kannustimme lapsia kerhossakin ajattelemaan ääneen ja etenemään vaihe vaiheelta kohti ratkaisua.

Feldhusenin (1992) mukaan ihmisen kyvyt ovat erillisiä ja niiden kehittymiseen vaikuttavat geneettiset tekijät, ympäristötekijät kotona, koulussa ja koko yhteisössä, missä lapsi elää. Erityisen tärkeää kykyjen kehittymiselle on vuorovaikutus ihmisten ja erilaisten asioiden kanssa. (Feldhusen 1992, 92). Kaikki tutkimukseen osallistuneet oppilaat olivat oma-aloitteisesti osoittaneet *kiinnostusta matemaattisiin asioihin* jo varhaisessa lapsuudessa. Kiinnostuksen herättyä heidän vanhempansa olivat tarjonneet heille mahdollisuuden kehittää omia kykyjään erilaisten materiaalien ja keskustelun avulla. Erityisesti Kimmon tapauksessa tulee selkeästi esiin kodin vaikutus ajattelun kehittymiseen. Vaikka vanhemmat eivät osanneet sanoa syytä Kimmon ajattelun kehittyneisyydelle, ei haastatteluissa ilmennyt kodin keskusteleva ja pohtiva ilmapiiri ole voinut olla vaikuttamatta Kimmon ajatteluun.

Tutkimuksessa mukana olleille matemaattisesti taitaville lapsille on tyypillistä *halu ratkaista tehtäviä yksin* mieluummin kuin ryhmässä. Lisäksi tunnusomaista heille on pyrkimys *omatoimisuuteen.*

> He jotenkin tietyllä tavalla, kyllä he pyytävät apua sitte, jos he eivät niin kuin ymmärrä, mutta heti alkuun he eivät halua siihen ketään avuksi, että he ensiks haluaa aina yrittää itse. (...) Ja yleensäkin siinä ei tarvi kuin ihan pieni vihje eteenpäin, niin lapsi taas sitten pääsee ja taas hän haluaa työskennellä yksin. (Opettaja)

Teimme saman havainnon sekä matematiikan tunneilla että Matikka-kerhossa. Taitavat lapset ehkä kokevat muiden lasten hidastavan omaa työskentelyään ja kokevat vaikeaksi odottelun ja muiden neuvomisen. Lisäksi silmiinpistävää oli oppilaiden *sinnikkyys ja halu miettiä asioita.* Aikuiset ovat usein liian hätäisiä eivätkä kunnioita lasten miettimiseen tarvitsemaa aikaa. Sorruimme tähän itsekin etenkin harjoittelujakson ja kerhon alussa, jolloin emme vielä tunteneet lapsia tarpeeksi hyvin. Onneksi lapset uskalsivat sanoa asiasta: "Älä keskeytä, kun mä mietin."

Opettaja kuvailee taitavan oppilaan ajattelua seuraavasti:

> Hän hyvin nopeasti oivaltaa asioita, hänellä on yleensä aika hyvä päässälaskutaito ja lukukäsite on erittäin vahva eli hän päättelee loogisesti asioita ja yleensä aika nopeastikin ja sitten on sellanen melko sinnikäs siinä, että haluaa saada sen ratkasun tietoon, eikä lopeta heti ensimmäisen vastoinkäymisen takia.

Opettajan esimerkissä tulevat hyvin esiin Nunesin ja Bryantin (1996) jaottelemat matemaattisen ajattelun kolme osa-aluetta: matemaattislooginen ajattelu, matemaattiset käsitteet ja symbolit sekä tarkoituksenmukainen toiminta eri tilanteissa. Olemme käsitelleet tutkimustuloksia tätä jaottelua apuna käyttäen.

6.1.1 Matemaattislooginen ajattelu

Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden ajattelulle on tyypillistä *etsiä* pitäviä *perusteluja* väitteille. Lapset pyrkivät usein perusteluissaan etsimään *säännönmukaisuuksia* ja *yhtymäkohtia* eri asioista. Heidän muodostamansa säännöt olivat loogisia ja järkeviä. Taikamasiinan (Liite 10) avulla pyrimme etsimään säännönmukaisuuksia koneen luvuille tekemistä laskutoimituksista. Lapset keksivät luvuille kuitenkin muitakin yhteisiä piirteitä ennenkuin ajattelivat laskutoimituksia.

> Tutkija: Ykstoista ja siitä tuli kolmetoista. Kaheksasta tuli kymmenen. Mitä niille molemmille on tapahtunut?

Kimmo: Kaikki on lukuja. (...) Että ne on laitettu tuonne sisälle.
T: Niin, mutta mikä laskutoimitus niille on tehty?
Janne: Niihin tulee kaksi lisää.

Esimerkiksi Leenan luoma sääntö luvun parillisuudesta, jota käsitellään tarkemmin paritehtävän yhteydessä, oli mielenkiintoinen. Hän kertoi luvun olevan parillinen, jos siinä oli enemmän parillisia kuin parittomia numeroita. Mitä ilmeisimmin Leena on kehitellyt itse tämän säännön, koska kukaan tuskin on sitä hänelle opettanut. Tässä ilmenee mielestämme lasten pyrkimys säännönmukaisuuksiin ja loogisuuteen: parillisuus ikäänkuin "voittaa" parittomuuden suuremmalla kannattajajoukolla. Itse asiassa, jos parillisuuteen perehtymätöntä ihmistä pyydettäisiin valitsemaan tarkoituksenmukaisempi Leenan säännöstä ja parillisuuden oikeasta määritelmästä, hän saattaisi hyvin valita Leenan säännön esimerkiksi sen järkevyyden ja säännönmukaisuuden perusteella.

Tutkimuksen aikana kehotimme tapausoppilaita muodostamaan asioista yleisiä matemaattisia määritelmiä. Pätevän *määritelmän muodostaminen* vaatii lapselta ajattelun laajentamista konkreettisista esimerkeistä yleiselle tasolle. Monta kertaa huomasimme kuitenkin, että lapsi aloitti yleisen säännön muodostamisen konkreettisesta esimerkistä. Yleisen säännön muodostaminen on usein aikuisellekin vaikeaa ilman konkreettisia esimerkkejä. Kuitenkaan aikuisen ei välttämättä tarvitse ajatella ääneen, vaan hän voi tutkia esimerkkejä mielessään. Myös lapsi tarvitsee vaativan ajatusprosessin läpikäymisen askel askeleelta. Lasta helpottaa ja kannustaa myönteinen vahvistus siitä, että hän on menossa oikeaan suuntaan.

Tutkija: Sanokaas minkälaisia lukujen pitää olla, että niiden erotus on nolla?
Leena: Ai niinku vaikka 4 ja 4.
Kimmo: Miinus.
Janne: No se on 4-4.
K: Siitä tulee nolla.
T: Niin, minkälaiset luvut ne pitää aina olla, että tulee erotukseksi nolla?
Janne: No tasa. Samat.

Yleisen *säännön soveltaminen* konkreettisiin esimerkkeihin näyttää lapselle olevan määritelmän muodostamista vaikeampaa, vaikka voisi kuvitella asian olevan juuri päinvastoin. Summan parillisuutta mietittäessä oppilaat kykenivät säännön muodostamiseen, mutta eivät osanneet soveltaa sitä heti sen jälkeen käytännön esimerkkeihin. Lapsi ponnisteli ilmeisesti jo kovasti saadakseen säännön muotoiltua, ja kuullessaan meiltä positiivisen palautteen keskittyminen herpaantui. Näyttää siltä, että määritelmä vaatii aikaa muuttuessaan lapsen aktiiviseksi työkaluksi, koska lapset kuitenkin kykenivät jo tutkimuksen aikana soveltamaan useita aikaisemmin omaksuttuja sääntöjä (kuten yhteenlaskun vaihdannaisuus, kerto-ja yhteenlaskun yhteydet).

Vaikka 7-vuotias lapsi olisikin taitava matemaattiselta ajattelultaan, tarvitsee hän vielä runsaasti *konkreettista materiaalia* ajattelunsa tueksi. Yhteen- ja vähennyslasku lukualueella 0 - 10 sujui tutkimukseen osallistuneilta oppilailta ilman konkreettista mallia, mikä ei onnistu keskitasoiselta koulutulokkaalta. Konkreettinen materiaali on kuitenkin avainasemassa edettäessä vaativampiin tehtäviin. Materiaalilta ei vaadita paljon havainnollisuutta: joskus jopa luvut kirjoitettuna paperille riittää. Huomasimme usein tutkimuksen aikana, että lapset eivät olleet tottuneet työskentelemään ilman visuaalisia *havaintovälineitä.*

> Tutkija: No mietipä, miten nyt laskisit.
> Leena: Mä laskin varpaat, niitä on kymmenen ja sitte sormet ja sitte lähin tuolta varpaasta laskemaan.

Monessa tehtävässä kynä ja paperi olivat lapsille suureksi avuksi tehtävää ratkaistaessa. Usein tulikin mieleen ajatus, että lasten ajattelutaidot menevät reilusti edellä verrattuna muuhun kehitykseen: motoriikka hidasti lasten työskentelyä yllättävän paljon, joten me toimimme lasten sihteereinä paljon numeroiden merkitsemistä vaativissa tehtävissä. Leena laski yleensä yli kymmenen meneviä laskuja sormiaan ja varpaitaan apuna käyttäen.

Myös kielellinen kehitys asettaa rajoituksia lasten matemaattisloogisen ajattelun kehittymiselle. Vaikka oppilaat ymmärsivätkin yllättävän hyvin pitkät sanalliset tehtävänannot, usein matemaattinen kieli on sen verran monimutkaista, että lasten oli vaikea pysyä mukana. Lasten *kyky ottaa vastaan informaatiota* ei vielä ole niin pitkällä, että he ymmärtäisivät monimutkaiset lauserakenteet. Tätä kuitenkin helpotti asioiden toistaminen ja hitaasti puhuminen.

Tutkimukseen osallistuneilla oppilailla näytti olevan *vankka hahmottamiskyky*, joka liittyy kiinteästi matemaattisloogiseen ajatteluun. He pystyivät löytämään säännönmukaisuuksia visuaalisten havaintojensa avulla. Esimerkiksi Tangram-tehtävissä (Liite 1) tarvittiin hahmottamiskykyä. Varsinkin Janne ratkaisi vaikeita tangram-tehtäviä ilmiömäisen nopeasti. Ongelmakolmiot-tehtävässä (Liite 10) ratkaisemista auttoi huomattavasti symmetrian käsitteen hahmottaminen. Tehtävän pohjalevy oli suunnikkaan muotoinen. Kahdesta kolmiopalasta saattoi muodostaa yhden vinoneliön, joita tarvittiin neljä koko pohjalevyn peittämiseen.

Tutkija: Miten saitte tämän ratkaistua?
Leena: Minä sain sen sillein, kun siinä oli yks tämmönen...(tekee vinoneliön kolmioista)...niinku näin.
T:Ja sit sä siitä keksit, miten se tulee.
L: Niin.

Tutkimukseen osallistuneet oppilaat *ajattelivat* usein melko *kriittisesti.* Joskus kriittisen ajattelun saattoi tulkita myös lievän ylimielisyyden osoitukseksi, joka tuli esille tehtävissä, jotka olivat lapsille liian helppoja. Myös oppilaiden vanhemmat kiinnittivät huomiota lasten mahtipontisuuteen ja itsevarmuuteen matematiikan tehtävissä. Yleensä kriittisestä ajattelusta oli oppilaille suuri apu tehtäviä ratkaistaessa. He miettivät, olivatko he sittenkään oikeilla jäljillä ja tekivät arvioistaan päätelmiä. Seuraava katkelma on esimerkki Jannen kriittisestä ajattelutavasta Onnenluku-tehtävässä (Liite 10).

Tutkija: Ooksää kertonu sen kahdella?
Janne: En. Kun tästä varmana tulee liian suuri.
T: Ei se haittaa, ei voi tulla liian suuri, jos sä vaan osaat laskee sen. Kaksi kertaa se luku.
J: No osaanhan mä laskee sen (mumisee vastauksen).
T: No niin.
Leena: 369?
J: Tietenkin. Jos mä kerron tämän kahdella, niin siitä tulee toi.

Ennen tätä Onnenluku-tehtävässä oli pitänyt valita omaksi onnenluvuksi joku luku 1-20 väliltä ja sen jälkeen lisätä siihen viisi. Janne oli valinnut onnenluvukseen luvun 18 ja lisännyt siihen numeron viisi perään. Näin hän esimerkissä yrittää kertoa kahdella lukua 185, missä hän melkein onnistuukin. Törmätessään näin isoihin lukuihin Janne kuitenkin alkaa oikeutetusti epäillä omia ratkaisujaan ja korjata omaa ajatteluprosessiaan (vrt. s. 35). Tämä keskustelu johti Jannen Onnenluku-prosessin uudelleen aloittamiseen.

6.1.2 Matemaattiset käsitteet ja symbolit

Tutkimukseen osallistuneiden lasten kanssa keskustelimme myös valintatesteistä. Näiden keskustelujen avulla pyrimme saamaan selville, miten lapset ajattelevat ratkaistessaan tehtäviä ja kuinka hyvin he pystyvät käyttämään matemaattista kieltä. Tehtävässä, jossa neljälle lapselle piti jakaa tasan yksi viiden markan kolikko ja kolme markan kolikkoa (Liite 2), selviytyivät tutkimukseen valitut oppilaat hyvin.

> Tutkija: Miten sä sen ajattelit?
> Kimmo: Kaikille tulee kaks.
> T: Mites sä sait sen, että kaikille tulee kaks? Mitä sä teit tuolle vitoselle? Teiksä sille jotain?
> K: Joo.
> T: Mitä sä teit sille?
> K: Panin sen markoiks.
> T: Niin ja sit jaoit?
> K: Joo.
>
> Leena: Niin, että tuosta vitosesta jaetaan kaikille varmaan sitte, ja täältä jää yksi markka niin se menee tuolle ja tuo markka tuolle ja tuo yks markka tuonne.
>
> Janne: Siten, että tuon laitoin viideksi markaksi, tälle laitoin kaksi markkaa, ja tälle kaksi ja tälle kaksi ja tälle kaksi.

Myös *yhteen- ja vähennyslaskun periaatteet* lapsilla oli selkeästi mielessään. Lähtömittauksissa oli vähennyslaskutehtävä (100-8-9), jonka ratkaisemista helpotti huomattavasti, jos tiesi että vähennyslaskua voi ositella tahtomallaan tavalla.

> Tutkija: Osaisitko nyt laskee tuota viimeistä laskua? Mikä siitä tulis?
> Janne: Ai se (...) seittemäntoista.
> T: Niin?
> J: 83.
> T: Niin justiin. Minkä takia sä 17 siitä vähennät (...) , kun ei sitä näy tässä?
> J: Kun laskin nuo (8 ja 9) yhteen.

Kertolasku oli tutkimukseen osallistuneille oppilaille tuttua entuudestaan ja yksinkertaiset kertolaskut onnistuivat niin testeissä kuin kerhossakin. Kertolasku 8 x 5 oli kuitenkin sen verran hankala, että ainoastaan Janne oli sen osannut laskea ja selittää miten hän sen teki.

> Tutkija: Selitäppäs mulle, että miten sä lasket tuon 8 kertaa 5.
> Janne: No siten että, silleen vaan. Siitä vaan tulee 40.
> T: No mutta miten sä sen laskit?
> J: En mä ulkoo muista. Sitten tiiän sen, että kahesta kerrasta tulee aina se, kaheksasta puolet, niin siitä tulee neljä ja neljä ja sitte laskin niitten avulla. Mä laitoin sen kasin puoliks ja sitte laitoin molempiin kaksi viitosta niin tuli kaksikymmentä ja kaksikymmentä ja siitä tuli yhteensä neljäkymmentä.

Jannen sanallinen esitys vaatii tulkintaa. Mielestämme hän on laskenut laskun seuraavasti: ensin 8:2=4 ja sen jälkeen (4x5)+(4x5)=40. Tämä ei kuitenkaan välttämättä ole ainoa oikea tulkinta Jannen ajatuskulusta mutta mielestämme todennäköisin.

Lapset hallitsivat hyvin myös *kertolaskun ja yhteenlaskun välisen yhteyden* ja osasivat muuttaa kertolaskuja yhteenlaskuksi ja tehdä vastaavasti yhteenlaskuista kertolaskuja. Tämä mielestämme vaatii kertolaskun periaatteen ymmärtämistä: kertolasku palautuu melko vaivattomasti yhteenlaskuun. Myös *luvun osittaminen* täytyy olla hallinnassa.

> Tutkija: Entäs sitten tuo 8x5? Miten se laskettais?
> Kimmo: En tiiä. Oisko se 40?
> T: No onhan se. Miten sä sen keksit?
> K: Ai että millä tavalla?
> T: Niin.
> K: Esimerkiksi että 20+20.
> T: Mitä se 20 siinä tarkoittaa?
> K: Se on puolet 40:sta.

Tutkimukseen osallistuneilla lapsilla on myös *vahvat lukujonotaidot.* Tämä ilmenee esimerkiksi luvun hajoittamista koskevissa tehtävissä. Saimme monta esimerkkiä siitä, miten voimme ositella luvun 15 (ks. s. 72). Lapset osasivat jakaa sen kahden joukkoihin, jolloin yksi jää ikäänkuin yli, sekä kolmen ja viiden joukkoihin. Käytimme Matikka-kerhossa myös negatiivisia lukuja. Osalle oppilaista ne olivat ainakin merkinnältään jo aikaisemmin tuttuja. Ensimmäisen kerran tutustuimme negatiivisiin lukuihin ihan vahingossa Taikamasiina-tehtävässä (Liite 10).

> Tutkija: Mikä luku tuli ulos?
> Leena: Ykstoista.
> T: Mut kattokaas mikä siinä ykkösen edessä on.
> Leena & Kimmo: Viiva.

T: Tiedättekste mitä tarkottaa tuo viiva tuolla edessä?
Janne: Miinus.

Lapset hahmottivat helposti lukusuoran jatkuvan myös nollan toiselle puolelle ja käyttivät negatiivisia lukuja oma-aloitteisesti eri tehtävissä.

Tutkija: Kun tässä on kaks. Tästä pitää vähentää kakstoista, niin mitenkähän se pitäis tehdä? Miettikääpäs. Mitä tästä otetaan ensin pois?
Kimmo: Kaksi.
T: Kaks pois ja tulee nolla. Ja montako vielä pitää ottaa pois?
K: Kymmenen.
T: Kun tästä nollasta otetaan pois - - kymmenen niin mitä tulee?
K: Miinus kymmenen.

Tutkija: Ykkösestä otettiin pois kakstoista niin ois tullu miinus ykstoista. Onkohan se totta?
(Myöntelyä.)
T: Onko, miten sää aattelit sen?
Janne: No kun siitä ei voi ottaa kahtatoista.

Tutkimukseen osallistuneiden taitavien lasten ajattelua leimaa myös *monipuolisten käsitteiden hallinta.* Seurantatesteissä ja matemaattisten käsitteiden diagnoosissa saimme vahvistuksen siitä, että oppilailla on hallussa tärkeimmät alkuopetuksen matematiikassa tarvittavat käsitteet. Saimme Matikka-kerhossa kokemuksia myös siitä, miten helposti lapset omaksuvat uusia käsitteitä: summa, erotus ja tulo tulivat lapsille tutuiksi ja niitä käytettiin Matikka-kerhon ajan melko säännöllisesti.

6.1.3 Tarkoituksenmukainen toiminta eri tilanteissa

Matikka-kerhossa tarkoituksenmukaiseen toimintaan erilaisissa tilanteissa pyrittiin ennen kaikkea RATKO:n avulla, jonka tehtävänä oli auttaa lapsia tiedostamaan ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheet ja niiden merkitykset. Matikka-kerhossa annettiin tilaa oppilaiden erilaisille ratkaisuille. *Ratkaisutapojen arvioiminen* pyrittiin jättämään oppilaiden omaan harkintaan. Usein kuullessaan toisten tavasta ratkaista joku tehtävä lapsi saattoi katsoa parhaaksi vaihtaa omaa ratkaisustrategiaa. Joskus lapset jatkoivat ratkaisemista samalla tavalla huolimatta siitä, että yritimme saada heitä etsimään uusia vaihtoehtoja.

Tutkija: Jos sä teet samalla lailla, niin sä oot aina siinä samassa umpikujassa.
Kimmo: Mutta en mä tätä mitenkään muuten voi aloittaa.
Tutkija: Kokeilepa Kimmo semmosta (...) mitä tulee, jos aloittaisitkin hypyllä (sammakkotehtävässä)?
Kimmo: Siis näin.
T: Ei taida onnistua. Kyllä se on pakko aloittaa pienellä siirrolla.
K: Mää koitan kuitenkin.

Tutkimukseen osallistuneet oppilaat toimivat järkevästi monessa tilanteessa ja *pyrkivät ratkaisuun mahdollisimman helpolla tavalla.* Joskus jouduimme jopa muuttamaan tehtävän sääntöjä saadaksemme oppilaat todella ajattelemaan ja asettamaan itselleen korkeampia tavoitteita. Joskus tarkoituksenmukainen tapa löytyi oppimalla omista tai toisen virheistä.

Tutkija: Mikä teitä autto, että se rupes onnistuu?
Leena: Sekun Kimmo teki siinä lopussa väärin.
T: Senkö avulla sää sitte osasit tehdä kotona tämän?
L: Niin.

Usein tarkoituksenmukainen ratkaisutapa löytyy vasta *kokeilun kautta.* RATKO:n arviointi-vaiheen tarkoituksena oli saada lapset *miettimään erilaisia ratkaisutapoja* ennen tehtävän varsinaista ratkaisemista. Usein ongelman ratkaiseminen alkoi kuitenkin summittaisella kokeilulla, joka johti ennemmin tai myöhemmin systemaattiseen kokeiluun. Symbolimerkit-tehtävässä (Liite 10) ainoa tapa edetä oli kokeilla kaikki mahdolliset luvut. Tehtävässä lukuisista vaihtoehdoista karsiutui osa pois, koska minkään symbolin arvo ei saanut olla suurempi kuin kymmenen.

Tutkija: Kerropas, miten tämän ensimmäisen esimerkin ratkaisit?
Janne: Siten, että mä tein tätä niin kauan kuin vain voi.
T: Luuletteko, että tämä voisi toimia joillain muillakin luvuilla? Esimerkiks että sydän oiski vaikka kolme ja joku vaihtais paikkaa?
J: Ei.
T: Minkäs takia ei?
J:: Siten, että jos vaikka tänne (...) tämä laitettais tonne, niin siitähän tulis ykstoista. Ja se menis yli rajojen.

Lopulta ongelman ratkettua lapset olivat yleensä valmiita kertomaan ratkaisun salaisuuden: pukemaan *ratkaisun* ytimen *sanalliseen muotoon.* Vaikeinta ratkaisun ytimen löytymisessä oli Sammakko-tehtävässä (Liite 10), joka valkeni lapsille vasta monen kokeilun kautta.

> Tutkija: Mikäs tässä oli se idea, jos voisitte nyt sanoa? Mikä siinä oli semmonen sääntö?
> Janne: Sai hypätä yhen yli tai liikkua yhen.
> T: Joo, mutta mikä tässä ratkaisussa oli semmoinen juju?- -
> J: Mää tiiän.
> T: No?
> J: Ei kannata ikinä siirtää tuota viimeistä.

Lapset tarvitsivat melko paljon kannustusta ja neuvoa, miten tehtävissä olisi hyvä edetä, koska he olivat ensimmäistä kertaa tekemisissä varsinaisten ongelmanratkaisuprosessin vaiheiden kanssa. *Oma-aloitteinen päätöksenteko ja yrittäminen* kuitenkin lisääntyivät kerhon edetessä. Sammakko-tehtävässä (Liite 10) lapset todella intoutuivat kokeilemaan erilaisia ratkaisutapoja. Heillä riitti intoa aloittaa uudelleen ja uudelleen alusta. Useassa tehtävässä lapset joutuivat miettimään, mikä valittavissa olevista laskutavoista johtaisi oikeaan lopputulokseen.

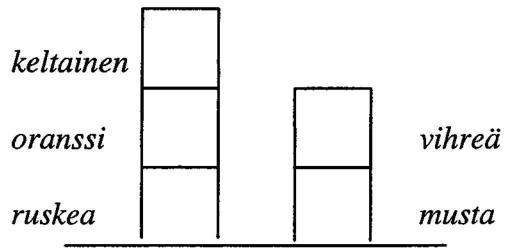
6.2 Lasten ajattelun kehitys

Ajattelun kehitystä on ajattelun monimuotoisuuden vuoksi vaikea mitata, minkä tiedostimme jo ennen tutkimuksen tekoa. Päätimme tehdä mahdollista ajattelun kehitystä seurataksemme lapsille alkumittauksen, jonka toistimme lähes samanlaisena kerhon jälkeen. Valitsimme mittariksemme Malisen (1980, 1992) laatimista matemaattisloogista ajattelua mittaavista testeistä neljä tehtävää (Liite 11). Muokkasimme joidenkin tehtävien kieltä pienille lapsille ymmärrettävämmäksi. Esimerkiksi ensimmäisessä palikkatehtävässä muutimme palikoiden nimet (A-F) väreiksi, koska ensimmäisen luokan oppilaat eivät välttämättä tunnista vierasperäisiä kirjaimia. Lisäksi muutimme alkumittauksen tehtävien joitakin lukuja loppumittaukseen, jotta lapset eivät olisi pystyneet ratkaisemaan niitä pelkän muistin varassa. Mielestämme valitsemamme tehtävät kattoivat monipuolisesti matemaattisen ajattelun osa-alueet: matemaattisloogisen ajattelun, aritmeettiset taidot ja tarkoituksenmukaisen toiminnan eri tilanteissa.

6.2.1 Palikkatehtävä

Palikkatehtävä testasi selittävään tietoon liittyvien käsitteiden "on kosketuksessa", "on alapuolella" ja "on päällä" hallintaa (Malinen 1992, 26). Tehtävä on lainattu suoraan Malisen (1992) tutkimuksesta.

Oppilaan eteen asetetaan viisi eri väristä kuutiota kuvan mukaisesti käyttäen samalla sanontoja "on kosketuksessa", "on alapuolella" ja "on päällä".



A Mitkä palikat ovat kosketuksissa keskenään? Sano kaikki parit.

B) Mitkä ovat keltaisen alapuolella?

C) Mitkä ovat kosketuksissa oranssiin ja samalla oranssin alapuolella?

D) Onko totta: "Vihreä on mustan alapuolella"? Mikä on totta tässä tilanteessa?

E) Onko totta: "On olemassa sellainen palikka, joka on vihreän päällä"?

F) Aseta palikat niin, että keltainen on vihreän ja mustan päällä. (Malinen 1992,26.)

Palikkatehtävä oli tutkimukseen osallistuneille oppilaille suhteellisen.helppo. He hallitsivat hyvin vaaditut käsitteet. Oppilaat löysivät myös kaikki parit (A-kohta), mikä Malisen (1992) tutkimuksessa oli osoittautunut hankalaksi. Se kertoo lasten kyvystä eritellä kokonaisuuksia (ks. s. 35). Palikkatehtävän vaikein kohta oli kahden samanaikaisen ehdon ymmärtäminen (C-kohta), mikä sujui kahdelta oppilaalta vasta jälkimittauksessa ja silloinkin toiselta kehotusten sekä pitkän mietinnän jälkeen.

> Tutkija: Mitkä palikat ovat kosketuksissa oranssiin ja samalla oranssin alapuolella?
> Leena: No keltainen ja ruskee ja oranssi. Nää kaikki.
> T: Kuuntelepas vielä - - mitkä ovat kosketuksissa oranssiin ja samalla oranssin alapuolella?
> L: Keltainen ja oranssi - - niin joo samalla.

T: Niin.
L: Ei oo muuta kuin ruskee, se koskee siihen oranssin alapuolelle.

Oppilaat osoittivat kriittistä ajattelua E-kohdan vastauksissaan: kaikki ei aina ole sitä, miltä näyttää.

Tutkija: Onko totta: on olemassa sellainen palikka, joka on vihreän päällä?
Leena: On sellainen palikka olemassa, mutta tuossa ei ole.

Tutkija: Onko totta: on olemassa sellainen palikka, joka on vihreän päällä?
Janne: Se on totta, mutta ei tällä hetkellä.
T: Onko tällä hetkellä sellaista palikkaa?
J: Ei, ei, ei.

Taulukko 1: Palikkatehtävän tulokset. Oikeiden vastausten lukumäärä tutkimuksessa mukana olleilla oppilailla (n=3). Suluissa loppumittauksen tulokset.

Tehtävä	Oikeat
A-kohta	3 (3)
B- kohta	3 (3)
C- kohta	0 (2)
D-kohta	3 (3)
E- kohta *)	2 (3)
F- kohta	3 (3)

*) Emme epähuomiossa kysyneet alkumittauksessa E-kohdan kysymystä yhdeltä oppilaalta ollenkaan, minkä takia taulukossa ei ole kuin kahden oppilaan tulokset.

Tässä tehtävässä ei ilmennyt kovin suurta ajattelun kehittymistä. Lapset osasivat monta kohtaa jo alkumittauksessa. Kaksi oppilasta ymmärsi C-kohdan kaksi samanaikaista ehtoa loppumittauksessa, vaikka alkumittauksessa he eivät siinä onnistuneet. Tämä kuitenkin saattoi osittain johtua siitä, että tämän tehtävän yhteydessä loppumittauksessa kyselimme lapsilta enemmän perusteluja ja yritimme saada heidät aktiivisemmin miettimään kuin alkumittauksessa.

6.2.2 Paritehtävä

Toinen tehtävä käsitteli parillisia ja parittomia lukuja sekä summan ja erotuksen parillisuuden sääntöjä (Malinen 1980, 37). B - E -kohdat ovat suoraan Malisen (1980, 95) tutkimuksesta. A-kohdan lisäsimme tehtävän alkuun varmistaaksemme parillisuuden käsitteen hallinnan, koska sitä ei oltu vielä lasten matematiikan opetuksessa käsitelty. F- ja G -kohdan laadimme tutkiaksemme pystyvätkö lapset soveltamaan parillisuuden ja summan parillisuuden sääntöä. Olemme merkinneet sulkuihin loppumittauksessa esitetyt luvut.

A) Tiedätkö, mitä ovat parilliset ja parittomat luvut?

B) Sano parillisia lukuja. Sano parittomia lukuja.

C) Onko 28 (36) parillinen? Entä 28+1 (36+1)? Entä 28-1? Entä 28+8 (36+12)? Miksi?

D) Onko 37+1 (45+1) parillinen? Entä 37-2? Entä 37+5 (45+17)? Miksi?

Vain loppumittauksessa:

E) Milloin kahden luvun summa on parillinen?

Annetaan oppilaalle lappu, jossa on luku 256 789 107 sekä summa 128 973 + 645825.

F) Onko tämä luku (256 789 107) parillinen? Miksi?

G) Onko tämä summa parillinen? Miksi? (Malinen 1980, 95)

Kaksi oppilasta tiesi, mitä parillinen ja pariton luku tarkoittavat. Halusimme lisäksi tietää, miten lapset päättelevät, onko luku parillinen vai ei. Alussa kuulimme tästä asiasta erilaisia mielipiteitä. Kimmo ajatteli parillisuuden alkumittauksessa tarkoittavan luvun kaksinumeroisuutta (ks. s. 25). Hän kuitenkin hahmotti parillisuuden käsitteen nopeasti vaikeasti ymmärrettävästä määritelmästä huolimatta ja luokitteli lukuja sujuvasti parillisuuden perusteella.

> Tutkija: Entäs semmoinen kuin 28+1?
> Kimmo: Ei oo.
> T: Miksi se ei oo (parillinen)?
> K: No ku siitä ei voi laskea pareja.

Tutkija: Onkos se (42) parillinen luku?
Kimmo: 42.
T: Niin. Onko se parillinen?
K: On. 21+21.

Leena hahmotteli parillisuuden käsitettä mielessään haastattelun aikana. Mielestämme hänen ajatuskulkunsa on hyvä osoitus taitavan lapsen kyvystä identifioida, soveltaa ja muotoilla periaatteita (ks. s. 34). Seuraava esimerkki Leenan ajattelusta on alkumittauksesta hänen määriteltyään 28 parilliseksi ja 28+1 parittomaksi luvuksi.

Tutkija: Mutta mites sä aattelit, että tämä 28 on parillinen luku?
Leena: No ku kaheksan on parillinen ja kaksi on parillinen.
T: Jaha. No entäs sitten 28+1? Miksei se ole parillinen?
L: Siksi koska yhdeksän ei ole parillinen.

Leena etsi tässä vaiheessa vielä oikeaa määritelmää. Hänen esittämänsä sääntö on hyvin looginen: jos molemmat luvun numerot ovat parillisia, luku on parillinen. Muissa tapauksissa Leena määritteli luvun parittomaksi, vaikka toisen numeron ollessa parillinen ja toisen pariton Leena epäröi melko pitkään. Parillisuuden käsitteen hallinnassa onkin olennaista ymmärtää viimeisen numeron merkitys parillisuutta määriteltäessä, minkä takia pyrimme kysymyksillä kiinnittämään Leenan huomion luvussa olevien numeroiden paikkaan.

Tutkija: No entäs jos toinen luku on parillinen? Vaikka 43? Onko se parillinen?
Leena: No silloin se, hmmm. (...) Ei oo, kun se kolmonen ei oo.
T: No entäs sitte, jos on niin päin, että 34? Onkos semmoinen parillinen?
L: No sellainen taas sitte on.
T: Ja minkäs takia?
L: No sen takia, kun siinä neljässä on kaksi paria.

Pojat määrittelivät luvun parillisuuden viimeisen numeron mukaan. He kiinnittivät huomiota viimeiseen lukuun jo alkumittauksessa kuten seuraavista esimerkeistä käy ilmi. Vastauksista huomaa, että lapset ovat tottuneet vaatimaan itseltään perusteluja päätelmilleen.

Tutkija: Onko 28 parillinen luku?
Janne: On se.

T: Minkäs takia se on?
J: Siksi, kun siinä se kaheksan on parillinen luku.

Tutkija: Onko 36 parillinen?
Kimmo: On.
T: Ja mistäs sen päättelit?
K: No kun kuusi on parillinen luku.

Loppumittaukseen liitetyssä E-kohdassa mitattiin moninumeroisen luvun parillisuuden tunnistamista. Meitä kiinnosti, osaavatko tapausoppilaat yhdistää viimeisen numeron merkityksen myös suureen lukuun vai sekoittaako moninumeroisuus heidän määritelmänsä. Osa lapsista osasi heti luvun nähdessään kertoa, mikä parillisuuden määrää.

Tutkija: Katopas, kun mä kirjoitan tähän luvun. Onko tämä (256 789 107) parillinen vai pariton?
Janne: Pariton.
T: Mistä tiedät?
J: Seiska on siellä lopussa ja seiska on pariton.

Kaikki huomasivat viimeistään tässä vaiheessa, mikä numeroista ratkaisee parillisuuden, vaikka Leenaa saimmekin melko paljon johdatella ja kysyä häneltä apukysymyksiä. Leenan sääntö luvun parillisuudesta oli ilmeisesti monivaiheinen. Jos luvussa on enemmän parittomia numeroita, luku on hänen mielestään pariton. Parillisen luvun hän perustelee vastaavasti parillisten numeroiden enemmistöllä. Jos parillisia ja parittomia numeroita on yhtä monta, Leena ottaa käyttöön viimeistä numeroa koskevan säännön.

Tutkija: Onkos tuo luku tuossa ylhäällä (256 789 107) parillinen vai pariton?
Leena: Tuo on parillinen, tuo ei oo parillinen, tuo on, tuo ei. (...) Pariton.
T: Miksi se on pariton?
L: No kun siellä ei ole kuin kaksi eikun kolme parillista.
T: Aatteleksä, että suurin osa on parittomia?
L: Joo.
T: Mietipäs, miksi 15 on pariton?
L: Koska 5 on pariton.
(...)
T: Mikäs tässä luvussa (256 789 107) olis samalla paikalla kuin se 5 siinä 15:ssä? (...) Mikä siinä on viimeinen numero?
L: 7.

T: Niin. Voisko se jotenkin ratkaista sen? (...) Minkäslainen luku tämä (256 789 107) on?
L: Pariton.

Summan parillisuutta lapset osasivat perustella yllättävän hyvin. Alkumittauksessa he melko usein laskivat yhteenlaskun ennen kuin miettivät summan parillisuutta. Ohjailimme heitä tarpeen mukaan miettimään, olisiko parillisuuden ratkaisemiseen muita keinoja. Loppumittauksessa Janne ratkaisi parillisuuden oma-aloitteisesti ilman laskemista.

Tutkija: No entäs 36+12? Onko se parillinen?
Janne: Minä lasken. On.
T: Mites sää sen aattelit?
J: En mää sitä laskenut. Ku siinä on molemmat parillisia.

Tutkija: No entäs sitte sellainen kuin 45+17?
Janne: On.
T: Mites sen aattelit?
J: Siten kun molemmat on niinku parittomia.

Summan parillisuutta koskevan säännön muuttaminen yleiseen muotoon sujui kaikilta oppilailta, Janne huomasi säännön idean ilman minkäänlaisia apukysymyksiä. Toisetkin lapset osasivat myös muotoilla säännön sanallisesti johdattelevien kysymysten turvin.

Tutkija: Niin milloin, kun kaksi lukua lasketaan yhteen, niin milloin se vastaus on parillinen? Osaatko sanoa? Mietipä hetki.
Kimmo: (pitkän mietinnän jälkeen) No jos siinä on kaksi parillista lukua. Tai kaksi paritonta lukua.
T: Milloinkas siitä tulee pariton?
K: Jos siinä on pariton ja parillinen tai parillinen ja pariton.

Tutkija: Niin, milloin kahden luvun summa on parillinen? Jos kaksi lukua lasketaan yhteen, niin milloin se on parillinen?
Leena: Silloin kun on 2+2.
T: Esimerkiksi.
L: Silloin kun on parilliset luvut.
T: Kaksi parillista lukua, niinkö?
L: Niin.
T: No voisko olla mitään muuta?
L: Kaksi paritonta lukua.

Säännön soveltaminen käytäntöön ei kuitenkaan ollut helppoa. Edellä olevien päättelykulkujen jatkeeksi ei Kimmo eikä Leena osannut ilman avustusta sanoa, miten 36+12 summasta voisi päätellä summan parittomuuden ilman laskemista. Sama asia selviää esimerkiksi Jannen haastattelusta, jossa hän sujuvasti sanoo säännön, mutta ei osaakaan soveltaa sitä käytäntöön suurten lukujen summaa tutkittaessa. Kuitenkin hän löytää toisen keinon ja laskee lukujen ykköset yhteen määrittääkseen luvun parillisuuden.

> Tutkija: No milloin kahden luvun summa on parillinen?
> Janne: 1+3.
> T: Elikkä minkälaisia niiden lukujen pitää olla, jotka sää lasket yhteen, että tulee parillinen luku?
> J: Molempien pitää olla samanlaisia.
> T: Eli jos on pariton luku, niin minkälainen luku siihen pitää lisätä, että tulee parillinen luku?
> J: Pariton ja parillinen.
> T: No entäs sitten jos on parillinen luku, niin minkälainen luku siihen pitää lisätä, että tulee parillinen luku?
> J: No toinen parillinen luku.
> (...)
> T: Entäs sitte tällainen? Tuollainen lasku (128 973+645 825). Tuleeko summaksi parillinen vai pariton?
> J: Parillinen.
> T: Ja mistä sen päättelit?
> J: Noista tulee kahdeksan ja se on parillinen.

Jannen summan parillisuutta koskevassa säännössä jää askarruttamaan, mitä Janne tarkoitti sanoessaan, että parittomaan lukuun pitää lisätä parillinen ja pariton luku, jotta summasta tulee parillinen. Haastattelutilanteessa emme valitettavasti kiinnittäneet tähän huomiota, joten Janne ei päässyt selittämään lauseensa merkitystä tai korjaamaan erehdystään. Joka tapauksessa sääntö pitää tällaisenaankin paikkaansa, koska parillisen luvun lisääminen ei vaikuta luvun parillisuuteen.

Malinen (1980, 37) on jakanut tehtävästä suoriutumisen neljään tasoon seuraavasti:

> I taso: Osataan vain suoraan luvusta sanoa, onko se parillinen vai pariton. Summasta saadaan tulos laskemalla sen arvo.
>
> II taso: Edellisen lisäksi osataan määrätä parillinen/pariton, jos lukuun on lisätty tai siitä on vähennetty yksi tai kaksi, siis tilanteissa n +/- ja n+/-2, mutta ei yleisesti.
>
> III taso: Osataan sanoa parillinen ja pariton oikein kaikissa tilanteissa, mutta sääntöä summan ja erotuksen parillisuudesta osataan muodostaa vain

osittain.

IV taso: Periaatteet summan ja erotuksen parillisuudesta hallitaan alkuoletuksia vaihdellen. Yleistys onnistuu jollain tavoin myös verbaalisesti.

Kuten Malinenkin (1980, 52) toteaa, II tason vastauksia on vähän, koska lapset luultavasti laskivat helpot laskut päässä, vaikka olisivat ehkä osanneet päätellä parillisuuden ilman laskun suorittamistakin.

Taulukko 2: Paritehtävän tulokset. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden (n=3) jakautuminen eri tasoille tehtävästä suoriutumisen mukaan. Suluissa loppumittauksen tulokset.

Taso	Oppilaiden lukumäärä
I taso	2 (0)
II taso	1 (0)
III taso	0 (2)
IV taso	0 (1)

Tässä tehtävässä on näkyvissä ajattelun kehittymistä. Emme ottaneet summan parillisuuden yleistä sääntöä ollenkaan esille alkumittauksessa, koska huomasimme sen olevan liian vaativa ainakin kahdelle oppilaalle, emmekä halunneet tehdä ensimmäisestä tapaamisesta liian paljon ponnistelua vaativaa. Emme usko, että oppilaat olisivat vielä alkumittauksessa päässeet kolmannelle tasolle, koska jouduimme joidenkin kanssa lähtemään parillisuuden määrittelyssä alkeista. Loppumittauksessa kuitenkin kaikki oppilaat osasivat jollakin tavalla muodostaa säännön summan parillisuudesta. Aihetta sivuttiin yhdellä kerhokerralla, mutta sitä ei varsinaisesti lapsille opetettu.

Esimerkkinä ajattelun kehittymisestä voidaan mainita Kimmon ajatteluprosessissa tapahtunut muutos. Alkumittauksessa Kimmolle kerrottiin parillisuuden käsitteestä (ks. s. 25), jonka jälkeen edettiin parillisten ja parittomien lukujen tunnistamisesta summan parillisuudesta kertovan säännön muodostamiseen.

6.2.3 Pistetehtävä

Malisen (1980, 94) tutkimuksesta suoraan lainatussa pistetehtävässä pohdittiin kerto- ja jakolaskun mallia pistejoukkojen avulla (Malinen 1980, 48). Se mittasi myös osittelulain ymmärtämistä, mikä näkyy mallin eli pistejoukon hahmotustaitona (Malinen 1980, 35). Suluissa on loppumittauksessa esitetyt luvut. Piirretyt pistejoukot ovat alkumittauksesta; loppumittauksen joukot olivat rakenteeltaan samanlaisia.

Paperilla esitetään 3 x 4 (5 x 3) pistejoukko.

*   *   *

*   *   *

*   *   *

*   *   *

A) Kuinka monta pistettä? Miten laskit?

B) Kuinka monta neljän (kolmen) pisteen joukkoa siinä on? Miten sait tuloksen?

Kaksi oppilasta hallitsi todella hyvin kertolaskun mallinnuksen jo alkumittauksessa. He ilmoittivat pistejoukon pisteiden lukumäärän todella nopeasti; näytti siltä, ettei heidän tarvinnut tehdä minkäänlaisia laskutoimituksia.

> Tutkija: Kuinka monta pistettä siinä on?
> Janne: 12.
> T: Mites sää sen laskit?
> J: 3+3, 6, 3+3, 6 ja 6+6 on 12.

> Tutkija: Montakos pistettä siinä on?
> Kimmo: 12.
> T: Ja kuinkas laskit?
> K: 6+6.

Loppumittauksessa kyselimme pojilta useampia vaihtoehtoja pistejoukon lukumäärän ilmoittamiseen. He kertoivatkin erilaisia laskutapoja ja viimeisenä mainitsivat myös kertolaskun. Janne osoitti hallitsevansa myös kertolaskun käänteisyyden ilmoittaen vaihtoehdoiksi sekä 3x5 että 5x3.

Tutkija: Kuinka monta pistettä?
Kimmo: 15.
T: No mites sä laskit sen?
K: 5+5+5.
T: Voikos laskea mitenkään muuten?
K: Voi. 3+3+3+3+3.
T: Hyvä. Entä sitten osaisitko sanoa sen kertolaskuna?
K: (pitkän mietinnän jälkeen) 3 x 5.

Leena laski pisteet aluksi yksitellen sekä alku- että loppumittauksessa. Loppumittauksessa pyysimme häntä keksimään muita laskutapoja, jolloin hän osasi luetella niitä useampia. Kuitenkaan hän ei oma-aloitteisesti käyttänyt yhdistettyä yhteenlaskua tai kertolaskua laskiessaan pisteiden määrää, vaikka osasikin liittää malliin myös kertolaskun.

Tutkija: Sanopas, kuinka monta pistettä siinä on.
Leena: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 15.
T: Joo. Voisitko laskea sitä mitenkään muuten kuin yksitellen?
L: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ja 15.
T: Entäs vielä? Tulisko vielä joku tapa?
L: 5+5+5+5.
T: Onko niin monta? 5+5+5. Osaisitko sanoa tuon kertolaskuna?
L: 3 x 5.
T: Tai?
L: 5 x 3.

Malinen (1980, 48) on määritellyt A-kohdan suoritustasot seuraavasti:

I taso: Ei saada oikeaa pistemäärää.

II taso: Saadaan tulokseksi 12 (15) laskemalla yksitellen tai 2, 4 jne.

III taso: Lasketaan kertolasku 3 x 4 (5 x 3) tai yhdistetty yhteenlasku.

Taulukko 3: Pistetehtävän A-kohdan tulokset. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden (n=3) jakautuminen eri tasoille tehtävästä suoriutumisen mukaan. Loppumittauksen tulokset suluissa.

Taso	Oppilaiden lukumäärä
I taso	0 (0)
II taso	1 (1)
III taso	2 (2)

B-kohta koski samaa pistejoukkoa. Siinä kysyttiin, kuinka monta neljän (kolmen) pisteen joukkoa pistejoukossa on. Tämä tehtävä vaikutti melko helpolta oppilaille. He osasivat vastata oikein ja perustelivat vastaustaan rivien määrällä - ei kuitenkaan sanallisesti vaan konkreettisesti. Perusteluna oppilas veti kynällä viivat rivien päälle tai seurasi riviä sormilla samanaikaisesti kun laski ääneen rivien määrää. Ensimmäisen tason oppilas jakoi pisteet ensin väärin tavalla, joka Malisen (1980, 47) mukaan on yleisin lasten tekemä virhe tämän tyyppisissä tehtävissä. Kuitenkin hän korjasi pian erehdyksensä.

> Tutkija: No kuinkas monta neljän pisteen joukkoa siinä (3 x 4 – pistejoukossa) on?
> Kimmo: Neljä.
> T: Neljäkö? Mites sä sait tuloksen?
> K: Mä laskin tällä lailla (osoittaa sormella rivejä yksi kerrallaan). (...) Eiku kolme.

Tämänkaltainen virhe voi kertoa esimerkiksi siitä, että oppilas ei ole ymmärtänyt kieliasultaan melko hankalaa tehtävää. Kuitenkin Kimmon käyttäytyminen, rivien laskeminen ja oikean vastauksen löytäminen puhui sen puolesta, että hän oli tehtävän ymmärtänyt.

Yksi oppilaista piti tehtävää ehkä jopa liian helppona, minkä voi päätellä hänen vastauksestaan. Toisaalta se saattaa myös kertoa hänen kyvyttömyydestään selittää ajatuskulkuaan ääneen.

> Tutkija: Kuinkas monta neljän pisteen joukkoa siinä on?
> Leena: Kolme.

T: Miten sait tuloksen? (...) Miten ajattelit?
L: Siten, että mää nään ne ja mää äsken laskin ne.

Malisen (1980, 48) määrittelemät tasot ovat seuraavat:

I taso: Ei osata suorittaa jakoa.

II taso: Jako osajoukkoihin on havaittavissa, mutta esitys on sekava.

III taso: Jako suoritetaan selvästi riveittäin.

Taulukko 4: Pistetehtävän B-kohdan tulokset. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden (n=3) jakautuminen eri tasoille tehtävästä suoriutumisen mukaan. Loppumittauksen tulokset suluissa.

Taso	Oppilaiden lukumäärä
I taso	1 (0)
II taso	0 (0)
III taso	2 (2)

Yhdeltä oppilaalta unohdimme loppumittauksessa kysyä tämän tehtävän: siitä epätarkkuus taulukon luvuissa.

Otetaan tilalle paperille piirretty 4 x 5 pistejoukko (vain alkumittauksessa).

*   *   *   *

*   *   *   *

*   *   *   *

*   *   *   *

*   *   *   *

C) Jaa tämä viiteen yhtä suureen osaan. Kuinka monta pistettä on jokaisessa osajoukossa?

C-kohdan kysyimme lapsilta vain alkumittauksessa, koska se tuntui olevan heille melko vaivaton. Vaikeutena tässä tehtävässä oli erottaa käsitteellisellä tasolla toisistaan viiden pisteen osajoukot ja jakaminen viiteen yhtä suureen osaan. Kaksi oppilasta selvitti tämän ilman ongelmia ja veti suorat viivat rivien väliin, vaikkakin siihen tarvittiin hiukan miettimisaikaa. Kimmo pääsi oikeaan tulokseen pienen johdattelun jälkeen ymmärrettyään, mitä tehtävässä kysyttiin.

Tutkija: Jaa tämä viiteen yhtä suureen osaan.
Kimmo: Siis pitääkö siitä panna viiva mistä menee toiseen?
T: Joo.
K: (miettii kauan) Näin, näin, näin...
T: Elikkä viiteen yhtä suureen osaan.
K: Kyllä mä sen tiedän jo, mutta mä teen viivaa.
T: No tee viivaa ihan rauhassa.
K: No siinä on mun viiva.
T: Aha. Onko tää nyt jaettu viiteen yhtä suureen osaan (linnanmuuria muistuttava viiva erottaa joukon keskeltä kahteen yhtä suureen osaan)?
K: Kyllä. Eiku neljään.
T: Neljään. Jaapas viiteen. (...)
K: Saako tehdä montakin viivaa?
T: Saa. (Kimmo vetää nopeasti neljä suoraa viivaa rivien väliin erottaen joukon viiteen yhtä suureen osaan.)

Malisen tasot (Malinen 1980, 49) ovat tässä samat kuin edellisessä B-kohdassa.

I taso: Ei osata suorittaa jakoa.

II taso: Jako osajoukkoihin on havaittavissa, mutta esitys on sekava.

III taso: Jako suoritetaan selvästi riveittäin.

Taulukko 5: Pistetehtävän C-kohdan tulokset. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden (n=3) jakautuminen eri tasoille tehtävästä suoriutumisen mukaan.

Taso	Oppilaiden lukumäärä
I taso	0
II taso	1
III taso	2

Paperilla esitetään 8 x 6 (8 x 7) sekä 6 x 3 (7 x 3) pistejoukot rinnakkain.

* * * * * * * *   * * * * * *
* * * * * * * *   * * * * * *
* * * * * * * *   * * * * * *
* * * * * * * *
* * * * * * * *
* * * * * * * *

D) Kuinka monta pistettä tarvitaan pienempään kuvioon lisää, jotta saadaan yhtä monta pistettä kuin isommassa kuviossa?
E) Kuinka ajattelit?

Pistetehtävän D- ja E-kohdat käsittelivät kertolaskun osittelulakia. Näissäkin tehtävissä tarvitaan kuvion hahmottamiskykyä, mutta etsitty matemaattinen ajatusrakenne on toinen kuin aiemmissa kohdissa (Malinen 1980, 36). Tehtävän avulla pyritään selvittämään, kykenevätkö lapset laskemaan pistejoukkojen pisteiden määrien erotuksen käyttäen apunaan kertolaskun osittelulakia. Tehtävä osoittautui todella hankalaksi oppilaille. Malinen (1980) ei ollut tehnyt tätä tehtävää ollenkaan 1.–3. luokan oppilaille, mutta me halusimme kokeilla sitä. Osa oppilaista yritti eri tavoilla laskea joukkojen erotusta. Kuitenkaan kukaan ei saanut oikeaa vastausta ja jokainen heistä tarvitsi kynää ja paperia yrittäessään ratkaista tehtävää. Malinen oli siis oikeassa tehtävän vaativuuden suhteen.

> Tutkija: Eli 36 pitäisi laittaa lisää, miten laskit?
> Janne: Siten, että laitoin näin niinku...että näitä on 7.
> T: Niin teit niistä kolmen rivejä.
> J: Ja sitten kerroin sen kertolaskulla päässä.
> T: 3x7.
> J: Ja sitten peitin tästä (suuremmasta) ja sitten otin nämä tästä (peittämättömät) ja laskin.

Leenan mielestä pisteitä oli liikaa, joten hän luovutti eikä yrittänytkään laskea pistejoukkojen erotusta. Tässä tehtävässä tuli muutenkin hyvin esiin se, että lapset tarvitsevat visuaalista havaintoa vaikeampien laskujen hahmottamiseksi. Päässälaskutaito ei vielä riitä kovin suurilla luvuilla laskemiseen.

Tutkija: Kuinka monta pistettä tarvitaan tähän kuvioon lisää, että siinä on yhtä monta pistettä kuin tässä kuviossa?
Kimmo: (Laskee hiljaa kauan). Ei mulla pysy tää lasku enää päässä.

Lopputestissä johdattelimme lapsia ratkaisemaan tehtävää kertolaskun avulla. Lapset osasivat muodostaa joukoista kertolaskut, mutta eivät ymmärtäneet yhteisen tekijän merkitystä. Leena kuitenkin oli oikeilla jäljillä laskiessaan kahdeksan ja kolmen erotuksen.

Tutkija: Voisitsä nyt näistä laskuista, kun ajatellaan, että tässä on 7x8 ja 7x3, niin paljonko tähän (7x3) pitää lisätä, että tulee tuo (7x8)? Pystyisitkö sä tästä laskusta päättelemään?
Leena: Siihen pitää lisätä 3, 4, 5...11.
T: 11. Mites sä sen laskit?
L: Sormilla. (...) Kolmeen pitää lisätä 11 että saadaan 8. (...) Voi voi, minä unohdin pistää sen kolme pois, 1, 2, 3, 4, 5.
T: Viisi. Pitääkö tähän lisätä luku viisi, että saadaan tuo toinen?
L: Joo.

Malinen (1980, 50) jakoi D- ja E-kohdista suoriutumisen kolmeen tasoon:

I taso: Ei saada oikeaa lukumäärää.

II taso: Lasketaan joukossa olevien pisteiden erotus.

III taso: Löydetään joukoista yhteinen tekijä 6 (7).

Taulukko 6: Pistetehtävän D- ja E -kohdan tulokset. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden (n=3) jakautuminen eri tasoille tehtävästä suoriutumisen mukaan. Loppumittauksen tulokset suluissa.

Taso	Oppilaiden lukumäärä
I taso	3 (3)
II taso	0 (0)
III taso	0 (0)

Pistetehtävässä ei ollut havaittavissa ajattelun kehittymistä. Kaikissa tehtävän kohdissa oppilaat pysyivät samalla tasolla myös loppumittauksessa. Osa kohdista oli oppilaille helppoja, kun taas D- ja E-kohdat melko vaikeita, minkä takia ajattelun kehitystä on vaikea huomata lyhyessä ajassa. Oppilaiden ajatuskulut olivat alku- ja loppumittauksissa yllättävän samanlaisia, joten niissäkään ei tapahtunut juurikaan muutosta.

6.2.4 Voittolukutehtävä

Viimeinen eli neljäs tehtävä käsitteli voittolukuja, jossa oppilaan tuli arvioida lauseiden totuusarvoa (Malinen 1992, 26-27). Voittolukutehtävä on lainattu Malisen (1992) tutkimuksesta.

Tutkija antaa oppilaalle kolme lappua, joissa on numerot 6, 8 ja 11. Hän selostaa seuraavasti:
Luokassa on 20 oppilasta ja kolmen voiton arvonnassa on mukana luvut 1 – 20. Sinulle on kerrottu nämä voittoluvut ja kukaan toinen ei tiedä niitä. Minä yritän arvata voittolukuja ja sinä sanot, onko arvaukseni "totta" vai "ei totta". Jos tätä ei voi sanoa varmasti, niin sano "ei voi sanoa varmasti". Nyt sanon arvaukseni.

A) Kaikki voittoluvut ovat pienempiä kuin 12.
B) Yksikään voittoluku ei ole alle 10:n.
C) Kaikki luvut ovat voittolukuja, jos ne ovat parillisia ja suurempia kuin 10.
D) On olemassa pariton voittoluku.(Malinen 1992, 26 – 27.)

Oppilailla ei ollut voittolukutehtävässä suuria ongelmia. He hallitsivat hyvin käsitteet pariton ja parillinen sekä vaaditut lukujonotaidot. Myöskään totuusarvon arviointi ei näyttänyt olevan heille vaikeaa. Hieman hankalalta vaikuttava negaatiotehtävä (B-kohta) sujui tapausoppilailta hyvin yhden oppilaan alkumittauksessa epäonnistumista lukuunottamatta.

> Tutkija: Toinen arvaus: Ei yksikään voittoluku ole alle 10.
> Kimmo: Ei ole totta.
> T: Minkä takia ei?
> K: Kuus ja kaheksan ovat kymmentä pienempiä.
>
> Tutkija: Ei yksikään voittoluku ole alle 10.
> Leena: No, yksi on päälle ja yksi on alle.

T: Niin, onko tämä silloin totta tämä mun väite, että...
L: Ei oo totta.

C-kohta tuotti ongelmia jokaiselle oppilaalle. Yksi oppilaista sai kuitenkin tehtävän ratkaistua alkumittauksessa vaikkakin hieman ontuvin perustein, mutta ei enää loppumittauksessa. Tämä kertonee siitä, että hänkään ei ollut varma alkumittauksen päättelystään eikä ehkä ollut todellisuudessa ymmärtänyt tehtävänantoa.

Tutkija: Onko totta: kaikki luvut ovat voittolukuja, jos ne ovat parillisia ja suurempia kuin kymmenen.
Janne: On suurempia kuin 10, ei tässä ole.

C-kohdan vastauksia tarkastellessamme huomasimme, että meidän olisi ehkä pitänyt muokata tehtävänantoa ymmärrettävämmäksi. Tehtävää olisi selkeyttänyt huomattavasti, jos se olisi kuulunut esimerkiksi seuraavasti: "Kaikki arvonnassa mukana olevat luvut eli luvut yhden ja 20:n väliltä ovat voittolukuja, jos ne ovat parillisia ja suurempia kuin kymmenen." C-kohdassa tyypillinen virhe oli, että oppilaat vertasivat annettuja ehtoja (parillisuus ja suurempi kuin 10) voittolukuihin, vaikka niitä olisi pitänyt verrata kaikkiin arvonnassa mukana oleviin lukuihin. Tämä kertoo mielestämme siitä, etteivät lapset olleet ymmärtäneet pitkää tehtävänantoa eivätkä välttämättä koko tehtävässä esiintyneen arvontatavan ideaa.

Tutkija: Kaikki luvut ovat voittolukuja, jos ne ovat parillisia ja suurempia kuin kymmenen.
Janne: Ei oo totta.
T: Minkä takia ei oo?
J: Noku nää (6 ja 8) ei oo suurempia kuin 10 ja tää (11) on suurempi kuin 10 ja se ei oo parillinen.

Tutkija: Kaikki luvut ovat voittolukuja, jos ne ovat parillisia ja suurempia kuin 10.
Kimmo: Ei.
T: Miksi ei?
K: Kaikki eivät ole parillisia ja nämä (luvut 6 ja 8) eivät ole suurempia kuin 10.

Taulukko 7: Voittolukutehtävän tulokset. Oikeiden vastausten lukumäärä tutkimukseen osallistuneilla oppilailla (n=3). Suluissa loppumittauksen tulokset.

Tehtävä	Oikeat
A- kohta	3 (3)
B-kohta	2 (3)
C-kohta	1 (0)
D-kohta	2 (3)

Tässä tehtävässä ajattelun kehitystä ei tulosten perusteella tapahtunut paljoakaan. Toisaalta, kun tarkastelee oikeiden vastausten lukumäärää alkumittauksessa, ajattelun kehityksellä ei ollut mahdollisuutta tulla esiin. Kimmo erehtyi alkumittauksessa parillisuuden käsitteessä (D-kohta), mutta korjasi virheensä loppumittauksessa. Selkeimmin ajattelun kehitys näkyy Jannen B-kohdan vastauksessa. Alkumittauksessa Janne ei ymmärtänyt tehtävää, eikä osannut sanoa, pitikö väite paikkaansa.

> Tutkija: Yksikään voittoluku ei ole alle 10.
> Janne: Ja mistä näistä puhutaan.
> T: Kaikki nämä. Kaikki on voittolukuja. Eli yksikään voittoluku ei ole alle kymmenen.
> J: Tämä ei ole alle kymmenen, muut on.

Loppumittauksessa Janne kuitenkin ratkaisi tehtävän mallikelpoisesti.

> Tutkija: Ei yksikään voittoluku ole alle kymmenen.
> Janne: Ei oo totta.
> T: Minkäs takia se ei oo totta?
> J: Noku nämä (6 ja 8) on alle kymmenen.

6.2.5 Vertailua Malisen tutkimuksien tuloksiin

Malinen (1992) on käyttänyt sekä palikkatehtävää että voittolukutehtävää empiirisessä tutkimuksessaan Jyväskylän normaalikoulun ala-asteen 3. – 6.luokilla huhtikuussa 1992. Yhteensä hänen tutkimukseensa osallistui 40 oppilasta. Tutkimusjoukossa oli opettajan mukaan suunnilleen yhtä paljon hyviä, keskinkertaisia ja heikkoja oppilaita sekä suunnilleen yhtä paljon tyttöjä ja poikia, joten se oli yhtä heterogeeninen kuin peruskoululaisten joukko yleensä (Malinen 1992, 29). Pistetehtävä ja paritehtävä ovat puolestaan olleet osana Malisen vuonna 1979 suorittamaa matemaattisen ajattelun tutkimusta, jossa mukana oli 1.-6. luokkien oppilaita. Jokaiselta luokalta tutkimukseen osallistui noin 30 oppilasta.

Näihin Malisen tutkimuksien tuloksiin voimme hieman verrata tähän tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden ajattelua. Ongelmia tuottaa kuitenkin Malisen kohdejoukkojen suuruus verrattuna tämän tutkimuksen kolmen oppilaan joukkoon. Lisäksi tähän tutkimukseen osallistui vain matemaattisesti taitavia oppilaita, kun taas Malisen tutkimuksissa mukana oli heterogeeninen ryhmä oppilaita. Vaikka tutkimusjoukot olisivatkin yhteneväisiä, tulokset eivät olisi välttämättä suoraan vertailukelpoisia, koska emme tarkasti tiedä Malisen (1992) haastattelutapaa. Hänen mukaansa (1992, 24) tutkimushaastattelun on oltava strukturoitu, mutta haastattelijan on varauduttava apukysymyksiin ja joustavaan etenemiseen. Tässä tutkimuksessa kehotimme oppilaita usein virheellisen vastauksen jälkeen miettimään uudestaan. Vältimme kuitenkin lisävihjeiden antoa. Joissakin tilanteissa pyrimme ohjailemaan päättelyä askel askeleelta oikeaan suuntaan, mutta testituloksissa emme ole tällä tavoin löytynyttä ratkaisua hyväksyneet oikeaksi ratkaisuksi. Vaikka tutkimusten tulosten vertailussa onkin ongelmia, mielestämme ne antavat jonkinlaista suuntaa tutkimukseemme osallistuneiden lasten matemaattisista kyvyistä ja niiden suhteista eri ikäluokkien keskitasoon.

Malisen tutkimustuloksiin verrattaessa tähän tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden ajattelu näyttäisi olevan varsin kehittynyttä verrattuna 3. - 4. luokan oppilaiden ajatteluun. Useassa tehtävässä he ylsivät 3. - 4. luokan oppilaiden tasolle, vain voittolukutehtävässä oppilaat jäivät tästä tasosta. Pistetehtävässä vain harva 2. - 4. luokan oppilas on päässyt samalle tasolle kuin tähän tutkimukseen osallistuneet oppilaat loppumittauksessa pääsivät. Kukaan Malisen tutkimuksessa mukana olleista 2. - 4. luokan oppilaista ei yltänyt viimeiselle tasolle, jonne taas yksi tähän tutkimukseen osallistunut oppilas ylsi. On myös huomattava, että muutamassa kohdassa kaikki 5. - 6. luokan oppilaatkaan eivät saavuttaneet tähän tutkimukseen osallistuneiden lasten tasoa.

6.3 Ongelmanratkaisu ja eriyttäminen

RATKO-ongelmanratkaisumenetelmä. Käsittelimme RATKO:a lähes joka kerta Matikka-kerhossa. Tavoitteenamme oli paneutua jokaiseen RATKO:n vaiheeseen yksitellen, jotta lapsille selkiytyisi paremmin prosessin eri vaiheet. Kerhokertojen myötä huomasimme, että on tehokkaampaa ottaa RATKO esille vasta kunkin kerhoajan lopussa ja ikään kuin peilata sen avulla tapahtunutta toimintaa. Lapset olivat jokaisen kerhokerran alkaessa niin innokkaita aloittamaan työskentelyn, että he eivät vielä malttaneet keskittyä pelkkään pohdintajaksoon. RATKO:a emme käsitelleet tavallisilla matematiikan tunneilla.

Lapset eivät kokeneet RATKO:a kovin mielenkiintoiseksi. Sitä oli hankala soveltaa käytäntöön, koska oli vaikea keksiä sellaisia tehtäviä, joissa kaikki RATKO:n vaiheet olisivat tulleet selkeästi esiin. Lapsia oli vaikea motivoida pohtimaan jotain tiettyä RATKO:n vaihetta, mikäli se ei ollut tehtävän ratkaisemisen kannalta olennaista. Yritimmekin miettiä tehtäviä jokaisesta RATKO:n vaiheesta erikseen. Tutki-, keksi- ja onnistuitko-vaiheita voitiin käsitellä oikeastaan jokaisen tehtävän yhteydessä. Rajaa-vaihe oli vaikein selittää lapsille, koska rajaaminen sanana ja käsitteenä ei kuulu lapsen jokapäiväiseen sanastoon. Teimme rajaamista helpottamaan sanallisia tehtäviä (Liite 15), joissa rajaaminen oli välttämätöntä.

Loppumittauksen yhteydessä kerhon jälkeen haastattelimme lapsia myös RATKO:sta. Vaiheet olivat jääneet lapsille hyvin mieleen ja he osasivat yleensä selittää, mitä missäkin vaiheessa tehdään. Myös rajaa-vaiheen käsittely oli ilmeisesti onnistunut, koska lapset osasivat kertoa, mitä rajaamisvaiheessa on tärkeintä.

> Rengastaa se tärkein osa siitä. (Kimmo)
>
> No jos oli semmoinen tehtävä, mistä piti ettiä vaikka joku, niin sitä piti rajata. No vaikka ympyrä pistetään sen ympäri. (Leena)
>
> Että otetaan siitä se tärkein osa. --- Ja sitte ne muut voi jättää pois, joita ei ollenkaan siinä tarvi. (Janne)

Arviointivaiheesta lapsille oli erityisesti jäänyt mieleen tulitikkutehtävät. Niissä tarkoituksena oli ensin miettiä ilman tikkujen konkreettista siirtämistä mahdollista ratkaisua ja piirtää se ikään kuin hypoteesiksi tehtäväpaperiin. Tämä oli lapsille melko vaikeaa, koska ajatteleminen ilman konkreettia mallia on heille vielä hankalaa.

No esimerkiksi laskuissa paljonko siitä tulee. (...) Tulitikkutehtävissä minkälainen siitä tulee. (Kimmo)

No niissä tulitikkutehtävissä arvioitiin että mikäs siitä vois tulla. (Leena)

No sitä että arvioi sen, mitä se vois olla. (Janne)

Tutki- ja keksi-vaiheet yhdistyivät lasten mielissä tehtävän varsinaiseksi ratkaisuvaiheeksi. Tutkimisen synonyymina käytimme kerhossamme kokeilemista, koska varsin moni tehtävä pohjautui kokeilun avulla ratkaisemiseen. Tutkiminen ja keksiminen olivat lapsille mielekästä puuhaa, johon heitä ei tarvinnut kehottaa.

Tutkimaan sitä, että onko se (hypoteesi) oikein. (Kimmo)

Saako noppia joka sivulle esimerkiksi 10. (Leena)

Tutkitaan, onko se (hypoteesi) oikein vai onko se väärin. ---. Keksitään, mikä se vois olla se (ratkaisu). (Janne)

Onnistuitko-vaihe oli lapsille helpoin omaksua ja muistaa jo kerhon alusta alkaen. Tarkistaminen oli heille myös tuttua. Kuitenkin lapsia piti usein muistuttaa RATKO:n viimeisestä vaiheesta, jotta he muistivat sen tehdä.

Tarkistetaan. (Kimmo)

Siinä kysytään että onnistuitko. ---. Tarkistetaan. (Leena)

No siinä piti tehdä se uudestaan ja miettiä, että onko se oikein. (Janne)

RATKO-ongelmanratkaisumenetelmästä ei välttämättä ole kovin suurta käytännön hyötyä matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa alkuopetuksessa tavallisessa luokkaopetuksessa, koska käsiteltävät ongelmat ovat kaikesta huolimatta melko yksinkertaisia. Matemaattisesti taitavat oppilaat saattavat kokea RATKO:n lähinnä hidasteena, jos RATKO:sta ei ole käytännön hyötyä. Kuitenkin RATKO luo hyvää pohjaa tulevaisuuden matematiikan opiskelulle, mikä tuli esille myös lasten haastatteluissa.

Siksi koska sitä (RATKO:a) tarvitaan siellä ylemmilläkin luokilla. (Janne)

Mielestämme RATKO on riittävän yksinkertainen lapsille ja herättää kiinnostusta lukemaan opettelevissa lapsissa kirjainyhdistelmien takia. Se antaa lapsille käsityksen ongelmanratkaisuprosessista ja auttaa heitä tunnistamaan ongelmia. RATKO lisää valmiutta käsitellä ongelmia hätääntymättä ja luo pohjan oman ongelmanratkaisustrategian muodostumiselle.

Eriyttäminen. Eriyttämisen osuus alkuopetuksen matematiikassa korostuu, koska lapset ovat yleensä hyvin eritasoisia matemaattisilta taidoiltaan koulun alkaessa. Matikka-kerhon ja tähän tutkimukseen kiinteästi liittyneen päättöharjoittelun keskeisenä teemana matematiikan opetuksessa oli opetuksen yksilöiminen. Näin pyrittiin takaamaan, että jokainen oppilas pystyisi etenemään matemaattisissa taidoissa omien edellytystensä mukaisesti. Tähän luokanopettajan täytyy kiinnittää erityistä huomiota.

Tutkimukseen osallistuneen luokanopettajan mielestä alkuopetuksen matematiikan tärkein tavoite liittyy motivaation säilymiseen.

> Musta tärkeintä on se, että se lapsi sais edetä niitten omien taitotasojen mukaisesti, jotta matematiikan oppimisen motivaatio säilyisi. Elikkä sen motivaation ylläpitäminen on se lähtökohta.

Matematiikan tunneilla tapahtunut eriyttäminen perustui tehtävillä eriyttämiseen sekä oppilaiden ryhmittelyyn heidän taitojensa mukaan. Kerran viikossa oli varsinainen matematiikan eriyttävä tunti, jolloin työtapoina käytettiin usein molempia eriyttämisen keinoja. Suunnittelutyössä meitä auttoi luokanopettaja. Tehtävillä eriyttäminen oli melko yksinkertaista, koska etenkin taitavat oppilaat tekivät tehtäviä mielellään omaan tahtiin. Eriyttämisessä käytettiin myös ryhmätyöskentelyä, jotta oppilaat oppisivat toimimaan yhdessä. Tämä ei kuitenkaan ole aina yksinkertaista kuten luokanopettaja toteaa:

> He (tutkimuksessa mukana olleet oppilaat) kokevat, sitten jos he saavat työskennellä nämä kolme jotka ovat pitemmällä keskenään, tai sitten pareittain, niin sillon se sujuu oikein hyvin. Mutta jos mukana on heikompi lapsi tai tämmönen ihan keskimääräsesti hyvin osaava, niin he kokevat jotenkin että he joutuvat jarruttelemaan ja hidastamaan siinä, että he eivät saa niin nopeasti ratkaista kuin he haluaisivat näitä tehtäviä.

Yksilöeriyttämisessä käytimme eriyttämiskeinoina pääasiassa eriyttäviä tehtäviä oppilaiden omasta kirjasta sekä muista opetusmateriaaleista. Yksilöeriyttämisen vahvuutena voidaan pitää sitä, että matemaattisten tehtävien avulla voidaan vahvistaa myös oppilaan muita taitoja kuten lukutaidon kehittymistä. Eriyttäminen vaatii opettajalta kuitenkin muitakin taitoja kuin sopivien tehtävien valitsemista, jotta työskentelystä tulisi mieluisaa. Luokanopettaja mainitsee tilanteen huomioon ottamisen tärkeänä eriyttämisen osa-alueena. Lisäksi eriyttämisen tulisi olla säännöllistä ja systemaattista.

Yksi onnistunut eriyttämiskokeilu oli mielestämme tangram-tunnit. Kävimme ensin yhdessä oppilaiden kanssa läpi tangram-tehtävien (Liite 1) periaatteen. Tämän jälkeen oppilaat saivat edetä omaa tahtia vaikeutuvana sarjana edenneiden tehtävien parissa. Kun oppilas oli saanut tehtävän tehdyksi, merkitsi opettaja oppilaan henkilökohtaiseen korttiin tehtävän suoritetuksi. Tämän jälkeen oppilas sai hakea seuraavan tehtävän. Ensimmäiset tehtävät olivat niin helppoja, että jokainen oppilas selviytyi niistä. Tehtävien valinta onnistui mielestämme hyvin, sillä niissä riitti haastetta jokaiselle. Tosin Jannen hahmotuskyky on niin hyvä, että häntä varten jouduimme etsimään vaikeampia tehtäviä seuraavaksi kerraksi.

Yksilöeriyttäminen on usein opettajan ainoa keino eriyttää opetusta matematiikan tunneilla, jos oppilaiden taitotasoerot ovat suuret. Vaikka meillä ei ole kovin paljon kokemusta yksilöeriyttämisestä, sisältyy siihen mielestämme muutamia ongelmia. Koska tutkimukseemme osallistuneille pojille matematiikka oli helppoa, muodostui laskemisesta helposti kilpailua. Lisätehtävät he saivat usein valita oman kirjan vapaavalintaisilta tehtäväsivuilta. Näin ollen lisätehtävät eivät aina tuoneet pojille lisää haasteita eikä heidän kehityksensä välttämättä mennyt eteenpäin. Pojat jäivät myös muita helpommin ilman yksilöllistä ohjausta, koska toiset oppilaat tarvitsivat enemmän apua. Leenan kohdalla tämä ei mielestämme muodostunut niin pahaksi ongelmaksi, koska hän ei yleensä kiirehtinyt laskujen tekemisessä. Siksi Leena tarvitsi poikia vähemmän myös lisätehtäviä.

Kerran viikossa matematiikan tunneilla käytettiin toiminnallista ryhmäeriyttämistä. Eriyttämismuotoina käytettiin erilaisia pelejä ja työpajatoimintaa. Pelit motivoivat lähes poikkeuksetta kaikkia oppilaita ja opettajan on helpompi seurata oppilaiden työskentelyä ja taitojen soveltamista pelien luomassa vapaammassa ilmapiirissä. Pelien merkitystä tiedollisten tavoitteiden lisäksi sosiaalisena kasvatustapahtumana ja asenteiden muokkaajina matematiikkaa kohtaan ei pidä unohtaa (Pehkonen & Pehkonen 1993, 8 - 12). Tutkimuksemme aikana oppilaat oppivat esimerkiksi käsitteen prisma ja käyttivät sitä tarkoituksen mukaisesti tehdessään parinsa kanssa Multilink-palikoilla rakennelmia. Jos käsite prisma olisi otettu esille teoreettisena asiana ilman oppilaiden mahdollisuutta leikkiä prismoilla, ei käsitteen oppiminen todennäköisesti olisi ollut yhtä tehokasta.

Ryhmät toimintaa varten jaettiin yhdessä luokanopettajan kanssa ja niihin pyrittiin saamaan taitotasoltaan mahdollisimman samanlaisia oppilaita. Joissakin tehtävissä ryhmäjaon perusteena pidettiin myös sitä, kuinka hyvin oppilaat tulivat toimeen keskenään. Yleensä ryhmässä oli kolme oppilasta, jotta pelaaminen mahdollistui eikä ryhmästä tullut liian suurta. Ryhmäeriyttämistunneilla tutkimukseemme osallistuneet oppilaat työskentelivät yhdessä. Näin heidän työskentelyään oli helpompi observoida ja saimme kuvan heidän toimimisestaan yhdessä.

Taitotasoltaan samanlaisten oppilaiden työskentely ryhmänä oli mielestämme hyvä eriyttämisen keino, mutta se ei saa olla ainut käytettävä ryhmittelyn muoto. Oppilaat oppivat toisiltaan uusia asioita ja pääsivät yhteisen ponnistelun tuloksena tavoiteltuun lopputulokseen. Myös oppilaiden turhautuminen oli vähäisempää, kun kaikki pystyivät suunnilleen samantasoisiin operaatioihin. Näin sekä ryhmän sisäistä että ryhmien välistä kilpailua oli vähemmän. Tutkimukseen osallistuneet oppilaat keksivät usein itse omalle ryhmälleen vaikeampia sovelluksia ja selvästi nauttivat yhdessä työskentelemisestä.

6.4 Oppilaiden ja vanhempien ajatuksia Matikka-kerhosta

Oppilaiden mielestä Matikka-kerhossa oli ollut "ihan kivaa". Poikien mielestä kaikista mukavinta oli ollut Sammakko-peli, Leenan mielestä hauskinta oli tulitikkutehtävät. Kerhopäivä oli piristysruiske, jota oppilaat odottivat innostuneesti ja muistivat mainita kotonakin, milloin on kerhopäivä. Vaikka oppilaat kokivat kerhon tärkeäksi, he eivät aina kertoneet päivän tapahtumista kovin yksityiskohtaisesti.

> Kimmon isä: Joo kertoili, joo, mutta sano vaan mulle, että ettet sää kuitenkaan niistä ymmärtäis mitään. Yritä nyt kertoo vähän edes, mitä ne oli. Sitte sai sieltä jotain aina irti.
> Kimmon äiti: ...kyllä se niinku hirveen tärkeeksi tuli ja silleen, että siitä puhuttiin ja ehkä (Kimmo) vähän röyhisti rintaansakin jonkun verran.

Myös vanhemmat kokivat kerhon tärkeäksi ja sille toivottiin jatkoa. Erityisen tärkeänä pidettiin uusien haasteiden saamista: kaikki tehtävät eivät olleet liian helppoja, vaan niiden avulla opeteltiin myös sinnikkyyttä. Oppilaat veivät joitakin ratkaisemattomia Matikka-kerhossa pohdittuja tehtäviä kotiin ja näiden esimerkkien perusteella vanhemmat arvioivat tehtäviä melko vaativiksi, mutta motivoiviksi niiden konkreettisuuden vuoksi.

> Silleen mulla ainakin välillä tuli, että onpa aika vaikeita juttuja noin pienille, että miten ne voi osata tollasia. (Leenan äiti)

Tehtäviä kotona ratkaistessaan olivat oppilaat toisinaan käyttäneet apunaan vanhempiaan ja muita sukulaisia. Tämä osoittaa osaltaan oppilaiden motivoitumisen ja halun ratkaista tehtäviä omalla vapaa-ajallaan.

> Se oli hyvä, kun aina tuli vieraita niin sitte aina sano, että mitenkäs ne tulitikut menikään, tolleen ja tolleen, missä myös oltiin monessa paikassa. Papalle se jätti aina ne ratkottavaks kanssa mitä oli ollu siellä päivällä. (...) Sitte ne sopi, että pappa soittaa, kun se on saanu ratkastua ja sitte ne puhelimessa jutteli, että onks se oikein vai ei. (Leenan äiti)

Ennen Matikka-kerhon alkua oppilailta kysyttiin, mitä matematiikka heidän mielestään on. Kaikkien kolmen oppilaan mielestä se oli ainoastaan laskemista. Työskentely erilaisten tehtävien parissa Matikka-kerhossa ei ollut laajentanut oppilaiden käsitystä matematiikasta, vaan he kokivat sen edelleen olevan pelkästään laskemista.

> Laskemista. - - Numeroiden oppimista. (Kimmo)

> Se on sitä, missä lasketaan. (Janne)

> Lasketaan. Plus- ja miinus- ja kertolaskuja. (Leena)

Oppilaiden käsitykset siitä, mitkä taidot ovat olennaisia, jotta matemaattisia tehtäviä voisi ratkaista, ovat melko kehittyneitä ja yhteneväisiä keskenään. Vastaukset eivät kuitenkaan tulleet oppilailta suoraan, vaan heidän mieliin täytyi palauttaa muun muassa kerhossa tehtyjä tehtäviä, jotta vastaukseksi saatiin muutakin kuin "en mä tiiä".

> Kimmo: Keskittynyt, pitää olla oppinut numeroita.
> Tutkija: Mihinkäs sitä keskittymistä tarvitaan?
> K: Miettimiseen.

> Täytyy osata laskuja. (...) Numeroita. (...) Miettiä. (Leena)

> Aikaa. (...) Ja taitoa ainakin vähän. (...) Päätä. (...) No siihen tarvitaan ainakin tutkimista ja sitä ettei hermostu ja semmosta. (Janne)

Oppilailla itsellään oli melko selkeä kuva siitä, mitä he olivat Matikka-kerhossa oppineet, mutta vanhemmilleen he eivät näitä asioita olleet korostetusti tuoneet esille. Oppilaiden mainitsemat taidot liittyivät pääasiassa varsinaiseen laskemiseen. Kerhotehtävien mieliinpalauttaminen konkreettisen materiaalin avulla olisi saattanut tuoda lasten mieliin muitakin opittuja taitoja.

> Käyttämään miinusmerkkisiä lukuja. (Kimmo)

> Kertolaskuja. (...) Niitä summia ja niitä. (Leena)

> Janne: Lisää laskuja.
> Tutkija: Minkälaisia laskuja sä opit, mitä sä et ole ennen osannut?
> J: No vaikeita. (...) No mä en ole ennen tiennyt, minkälainen on kertomerkki, muuta kuin laskuissa oon nähny.

Matikka-kerho lisäsi mielestämme oppilaiden aktiivista ajattelua ja oma-aloitteista ongelmien ratkaisutaitoa. Oppilaat tottuivat kerhon aikana jo ratkaisutapojen selittämiseen ja he pystyivät hyvin perustelemaan ratkaisunsa, jos vaan malttoivat hetkeksi keskittyä puhumaan. Myös yhden tapausoppilaan vanhemmat kiinnittivät tähän huomiota.

> Mut se tuolla Kimmolla, en tiedä liittyykö se tähän matikan kerhoon millään tavalla, mutta sen ihan nyt tässä ennen joulua ja nyt sitten huomannut, että kyllä se ajatus on aika selkeä sillä tavalla, että on joitain sellaisia asioita, joita Kimmo kommentoi hyvin asiantuntevan oloisesti. (...) Niin että onko teillä siellä kerhossa keskusteltu ongelmanratkaisusta ja siitä, että joku tarvitsee selityksen ja asia täytyy pystyä perustelemaan? (Kimmon isä)

6.5 Tulosten arviointia ja tutkimuksen luotettavuus

Eskolan ja Suorannan (1998, 220) mukaan tutkimuksen kirjallinen tuotos ja arvioinnin perusta on näkyvissä tekstinä, joka on "luetun, koetun, havaitun, luullun, kuvitellun, pohditun, muistetun ja haaveillun yhteenliittymä". Koska laadullisessa tutkimuksessa tutkija itse toimii tutkimusvälineenä, inhimilliset tekijät eivät voi olla vaikuttamatta tutkimustekstin sisältöön. Lukijan tulisi kuitenkin tutkimusselosteen luettuaan olla varma tutkimustulosten todenperäisyydestä, mikä kertoo tutkimuksen luotettavuudesta (Peräkylä 1997, 208).

Vastaavuus. Validiteetin sijasta kvalitatiivisessa tutkimuksessa puhutaan usein vastaavuudesta. Vastaavuudella tarkoitetaan sitä, että tutkimuksen tuottamat rekonstruktiot vastaavat tutkittavien alkuperäisiä konstruktioita eli ajatusrakennelmia (Tynjälä 1991, 390). Toisaalta vastaavuus kertoo aineiston tulkinnan kyvystä tulkita sitä, mitä tutkimuksessa on haluttu tutkia (Pyörälä 1995, 13). Tutkijan tulee osoittaa, että juuri hänen käyttämänsä tutkimusasetelman ja kohderyhmän avulla voidaan vastata tutkimuksen kysymyksenasetteluun (Pyörälä 1995, 15).

Tilanne ensimmäisen luokan oppilaiden matemaattisessa kehityksessä on muuttunut huomattavasti syksystä: erot ovat pienentyneet ja tapausoppilaamme eivät välttämättä enää erotu niin selkeästi muista. Tutkimuksemme vastaavuuden kannalta on kuitenkin tärkeää, että olemme valinneet tutkimukseemme kolme luokan matemaattisilta taidoiltaan taitavinta oppilasta aineiston keruun alkaessa. Saimme valintaamme perusteluja monesta eri lähteestä. Hämeenlinnassa lahjakkaiden oppilaiden tunnistamisessa on käytetty ns. asiantuntijan menetelmää, jossa arvion oppilaasta antavat oppilas itse sekä oppilaan vanhemmat ja opettajat. Lopullisen valinnan kuitenkin tekevät rikastamisohjelmien vetäjät. (Koskinen & Sieppi 1994, 7.) Asiantuntijamenetelmää käytettiin myös tässä tutkimuksessa luotettavuuden lisäämiseksi. Lisäksi monipuoliset testistöt - laatimamme valintatestistö, seurantatestit ja koulutulokkaille pidetyt testit - vahvistivat tapausoppilaiden valinnan oikeaksi.

Eräänä vastaavuuden mittana voidaan pitää sitä, onko tutkimuksen tuloksilla ja teoreettisella viitekehyksellä yhteyksiä (Peräkylä 1997, 212). Analysoimme lasten matemaattista ajattelua mm. Nunesin ja Bryantin (1996) teorian pohjalta valiten analysoinnillemme kolme teemaa matemaattisen ajattelun osa-alueiden mukaan.

Löysimme lasten ajattelusta eri osa-alueisiin liittyviä piirteitä, jotka on osoitettu viittaamalla tämän tutkimusselosteen eri kohtiin .

Arvioitavuus. Toinen laadullisen tutkimuksen luotettavuuteen vaikuttava tekijä on aineiston analyysin arvioitavuus ja uskottavuus (Pyörälä 1995, 13). Arvioitavuus tarkoittaa sitä, että lukijan on mahdollista seurata tutkijan päättelyä ja kritisoida sitä. Uskottavuus kertoo siitä, että tutkimusraportin pohjalta on uskottavaa päätyä esitettyihin tulkintoihin. (Pyörälä 1995, 16). Arvioitavuutta ja uskottavuutta lisätäksemme olemme käyttäneet selosteessa paljon suoria lainauksia haastatteluista ja Matikka-kerhoista.

Tutkimuksen luotettavuuden toteamiseksi on myös arvioitava tutkimustilannetta ja siihen vaikuttavia tekijöitä. Tutkijan on otettava huomioon sekä ulkoiset vaihtelua aiheuttavat tekijät että tutkimuskohteesta johtuvat tekijät. (Tynjälä 1991, 391.) Huomasimme tutkimusta tehdessämme esimerkiksi kehittyvämme haastattelijoina, mikä näkyi esimerkiksi litteroidessamme lasten alku- ja loppumittausten strukturoituja kysymyksiä. Teimme tutkimuksen loppuvaiheessa parempia apukysymyksiä, koska osasimme paremmin varautua lasten vastauksiin. Tulkintoja tehdessämme olemme pyrkineet ottamaan huomioon mahdolliset vaihtelua aiheuttavat tekijät mainitsemalla niistä myös tekstissä.

Nauhoitimme ja litteroimme tässä tutkimuksessa kaikki haastattelut ja lähes kaikki Matikka-kerhotapaamiset, koska tutkija ei välttämättä etukäteen tiedä, mitä tutkittavana oleva ilmiö oikeastaan sisältää ja mihin hän aikoo tutkimuksessaan keskittyä (Peräkylä 1997, 206). Analysointia ja tulkintoja tehdessämme emme joutuneet tukeutumaan ainoastaan muistiimme tilanteiden ja tunnelmien palauttamiseksi mieliin, vaan saatoimme tarvittaessa palata tilanteisiin aina uudelleen nauhoja kuuntelemalla ja lukemalla niistä tehtyjä litterointeja. Ongelmaksi muodostui kuitenkin se, että tapausoppilaat puhuivat melko hiljaisella äänellä; varsinkin Leenan puhe kuului nauhalla melko heikosti. Litteroinnissa meitä auttoi se, että olimme itse olleet osallisina keskusteluissa ja meillä oli puheenvuoroista muistikuvia. Litterointia tehdessämme kirjoitimme kaiken nauhalta kuuluvan puheen muistiin, mutta emme merkinneet tarkasti esimerkiksi lasten miettimistaukojen pituuksia emmekä äänensävyjä. Kuitenkin litterointiteksteistämme löytyy mielestämme tutkimuksen ongelmien kannalta relevantteja huomautuksia: “miettii pitkään”, “kuin tykin suusta” ja “laskee sormilla”.

Triangulaatio. Triangulaatio on tutkimusote, jossa käytetään useita eri menetelmiä, tutkijoita, aineistoja tai teorioita luotettavuuden lisäämiseksi (ks. esim. Tynjälä 1991, 392). Tällä on merkitystä luotettavuuden kannalta, koska toisen menetelmän vahvuus on usein toisen menetelmän heikkous (Sandahl 1997, 32). Tutkimusaineiston koonnissa triangulaatiolla tarkoitetaan "erilaisen ja eri tavoin tilanteesta kootun informaation vastakkainasettamista ja vertailua" (Syrjälä ym. 1994, 44). Erilaisten kvantitatiivisten ja kvalitatiivisten esimerkkien avulla (esim. testitulokset ja puhe) voidaan saada erilaista tietoa samasta asiasta. Jos eri tiedonlähteet tuottavat saman tuloksen, johtopäätös on luotettavampi (Arnold, 1998, 22).

Triangulaatiota on myös kahden tutkijan osallistuminen tutkimukseen: molemmat käsittelevät aineistoa samoihin sääntöihin nojautuen ja lopuksi verrataan tuloksia (Pyörälä 1995, 15). Käytännössä uskottavuutta koetellaan tutkijoiden ja tutkimukseen osallistuneiden kesken käytävissä keskusteluissa, joissa pohditaan aineistoon pohjautuvia havaintoja ja tulkintoja (Pyörälä 1995, 15 - 16).Tässä tutkimuksessa olimme molemmat tutkijoina lähes jokaisessa tutkimusvaiheessa. Keskustelimme paljon ja pohdimme yhdessä saatuja tuloksia ja niiden merkityksiä. Toimme erilaisia näkökulmia esiin, mutta päädyimme silti samoihin johtopäätöksiin. Lisäksi pyrimme ottamaan huomioon niin lasten, vanhempien kuin opettajankin mielipiteet ja havainnot käsiteltävistä asioista ja analysoimme näiden merkitystä tutkimuksen kokonaisuuden kannalta.

Oppilaiden valinta tähän tutkimukseen nojautui triangulaation periaatteen mukaisesti useisiin eri lähteisiin. Kaikki käyttämämme valintakriteerit tukivat toisiaan, joten valintamenetelmien voidaan katsoa olevan luotettavia ja tutkimukseen osallistuineiden oppilaiden siten edustavan tapausluokan taitavimpia oppilaita.

Siirrettävyys. Laadullisessa tutkimuksessa puhutaan tulosten siirrettävyydestä yleistettävyyden sijasta. Tutkimustulosten siirrettävyydellä arvioidaan, miten hyvin tutkittu ympäristö ja sovellusympäristö vastaavat toisiaan. Tutkijan tulee kuvata aineistoaan ja tutkimustaan riittävästi, jotta lukija voi pohtia tulosten soveltamista toisiin ympäristöihin. (Tynjälä 1991, 290.) Tässä tutkimuksessa olemme pyrkineet tähän kuvailemalla mahdollisimman tarkasti tutkimuksen kulkua, tutkimukseen valittujen lasten taustoja sekä heidän ajattelunsa piirteitä. Uskomme tutkimustulosten olevan siirrettävissä myös muihin matemaattisesti taitaviin lapsiin. Jokaisella luokalla on todennäköisesti vähintään yksi vaativampia matemaattisia haasteita kaipaava lapsi. Lapsen kykyjen tunnistamisessa ja hänen ajattelunsa kehittämisessä opettaja voi mielestämme soveltaa tämän tutkimuksen tuloksia.

7 MAATA NÄKYVISSÄ - Tutkimuksen merkitystä pohtimassa

Tutkimme koulunsa juuri aloittaneita matemaattisesti taitavia oppilaita, koska olemme molemmat erikoistuneet alkuopetukseen. Halusimme tutkimuksen avulla saada kokemuksia ja tietoja, kuinka opettaa matematiikkaa kullekin lapselle hänen omien kykyjensä mukaisesti. Merkityksellistä on tiedostaa oppilaiden erilaiset tarpeet, koska lapsien väliset taitoerot ovat alkuopetuksessa suuret. Oppimisongelmista kärsivien lasten erityisopetus on usein hyvin järjestettyä maassamme, joten halusimme tässä tutkimuksessa keskittyä taitavien lasten opetuksen kehittämiseen. Oppiaksemme tunnistamaan matemaattisesti taitavan lapsen heterogeenisestä ryhmästä keskityimme lapsen ajattelun tutkimiseen. Luokittelimme tutkimuksen tulokset Nunesin ja Bryantin (1996) matemaattista ajattelua käsittelevän teorian mukaisesti matemaattisloogiseen ajatteluun, matemaattisten käsitteiden ja symbolien hallintaan sekä tarkoituksenmukaiseen toimintaan eri tilanteissa.

Tutkimukseen osallistuneet oppilaat työskentelivät hyvin itsenäisesti ja sinnikkäästi. Lasten ajattelu oli usein kriittistä, mikä motivoi heitä etsimään perusteluja ratkaisuilleen. Loogiseen ajatteluun pyrkiminen näkyi myös säännönmukaisuuksien löytämisenä. Oppilaat kykenivät muodostamaan konkreettisista esimerkeistä yleisiä matemaattisia sääntöjä sekä osittain soveltamaan niitä uusiin tilanteisiin. Abstraktein määritelmä, jonka lapset konstruoivat, koski summan parillisuutta.

Matemaattisesti taitavan lapsen kohdatessaan opettaja kiinnittää yleensä ensimmäisenä huomiota oppilaan vahvoihin aritmeettisiin taitoihin, jotka ovat osoituksena matemaattisten käsitteiden ja symbolien hallinnasta. Tähän tutkimukseen osallistuneet oppilaat kykenivät yhdistelemään ja osittelemaan yhteen- ja vähennyslaskua eri tavoilla laajalla lukualueella. He ymmärsivät myös kerto- ja yhteenlaskun välisen yhteyden ja hallitsivat monipuolisesti matemaattisia käsitteitä. Lisäksi oppilaat käsittelivät lukuja sujuvasti erilaisissa laskuissa ja ongelmatehtävissä.

Tarkoituksenmukainen toiminta eri tilanteissa näkyi oppilaiden pyrkimyksenä ratkaista ongelmatilanteita mahdollisimman taloudellisesti. Ratkaisuun pääseminen vaati yleensä systemaattista kokeilua ja epäolennaisten vaihtoehtojen eliminoimista. Tarkoituksenmukaista toimintaa oppilaat harjoittelivat RATKO-ongelmanratkaisumenetelmän avulla (ks. Allen & Allen 1998).

Saamiemme tutkimustulosten perusteella tutkimukseen osallistuneet lapset ovat Piaget'n teorian mukaan konkreettisten operaatioiden vaiheessa. Lapset tarvitsevat ajattelunsa tueksi konkreettista materiaalia, jonka avulla he pystyvät operoimaan vaativillakin abstrakteilla käsitteillä. Tämän tutkimuksen matemaattisesti taitavat oppilaat olivat kouluun tullessaan selvästi matemaattisessa ajattelussaan kehittyneempiä kuin luokkatoverinsa, mikä ilmenee myös verrattaessa heidän tuloksiaan Malisen (1980, 1992) tutkimusten tuloksiin. Niiden perusteella nämä kolme ensimmäisen luokan oppilasta näyttäisivät olevan useilla eri matemaattisilla osa-alueilla 3. - 4. luokan oppilaiden tasolla. Aiheellista onkin kysyä, mitä annettavaa alkuopetuksen matematiikalla on tutkimukseen osallistuneiden lasten kaltaisille oppilaille. Tämän tutkimuksen tulosten perusteella on mielestämme selvää, että opettaja ei kykene tarjoamaan heille haasteita ilman asian tiedostamista ja siihen paneutumista. Ratkaisuehdotuksina tähän ristiriitaan käytimme ongelmanratkaisua ja eriyttämistä. Lasten taitotasoon mukautettuna ongelmanratkaisu ja eriyttäminen näyttivät onnistuneilta ratkaisuilta, koska ne tulosten perusteella antoivat lapsille mahdollisuuden kehittää ajatteluaan ja oppia uusia matemaattisia taitoja.

Mielestämme tämän tutkimuksen merkitystä korostaa se, että matemaattisesti taitava lapsi ei näytä olevan harvinainen ilmiö. Löysimme Normaalikoulun tavallisesta 15 oppilaan luokasta kolme matemaattisesti taitavaa lasta, joten todennäköisesti jokaisessa keskikokoisessa luokassa on vähintään yksi matemaattisesti taitava oppilas. Kolmen tapausoppilaan ajattelun pohjalta emme voi vetää johtopäätöksiä kaikkien matemaattisesti taitavien 7-vuotiaiden lasten ajattelusta. Meillä ei ole varmuutta siitä, että tutkimuksen tulokset olisivat samanlaisia laajassa matemaattisesti taitavien lasten joukossa. Peräkylä (1995, 48) puhuukin distributiivisen yleistämisen sijasta mahdollisuuden yleistettävyydestä, joka sopii mielestämme myös tämän tutkimuksen tuloksiin. Välttämättä kuvaamamme matemaattisesti taitavan lapsen ajattelu ei ole yleistä ja levinnyttä, mutta se voi olla mahdollista: 7-vuotiaalla matemaattisesti taitavalla oppilaalla saattaa olla ajattelussaan samoja piirteitä kuin tapausoppilailla tässä tutkimuksessa. Niinpä tämän tutkimuksen tuloksia voidaan soveltaa harkiten myös toisenlaisissa konteksteissa.

Matikka-kerhon ideoimis-, suunnittelu-, toteutus- ja arviointivaiheet opettivat meille, että opettajalla tulisi olla aikaa lapsen yksilölliseen kohtaamiseen ja kuuntelemiseen. Opettaja aliarvioi helposti lapsen kyvyt iän tai esimerkiksi jonkin kehityksen osa-alueen perusteella. Opettajan täytyisi antaa lapselle tarpeeksi haastavia tehtäviä, jotta lapsella olisi mahdollisuus itsensä ja opettajan yllättämiseen.

Tutkimuksemme tulokset herättävät pienen huolen, kuinka kykenemme tulevaisuudessa antamaan riittävän haasteellisia ja kehittäviä tehtäviä matemaattisesti taitaville lapsille. Opettajan täytyy vanhempien avulla ottaa vastuu lapsen kykyjen huomioon ottamisesta ja kehittämisestä. Feldhusen (1992) nostaa kuitenkin myös lapsen oman vastuun tärkeäksi näkökulmaksi. Hänen mukaansa vastuu on pääsääntöisesti taitavalla lapsella itsellään: hänen täytyy itse tunnistaa kykynsä ja osata hyödyntää niitä. Lapsen tulisi myös asettaa itselleen omat henkilökohtaiset tavoitteensa, jotka saavuttaakseen hänen pitäisi käyttää omia erityiskykyjään. (Feldhusen 1992, 92.) 7-vuotias lapsi tarvitsee kuitenkin vielä paljon ohjausta kehittääkseen omia metakognitiivisia taitojaan: opettajan tulee ohjata lasta itsenäiseen tavoitteenasetteluun ja omien kykyjen tunnistamiseen sekä käyttämiseen.

Työelämään kohta siirtyvinä opettajina olemme tyytyväisiä tutkimuksen antamiin valmiuksiin ja kokemuksiin. Olemme paljon rohkeampia antamaan taitaville lapsille vaikeitakin tehtäviä ja luotamme heidän kykyynsä ratkaista niitä. Uskallamme antaa lapselle tilaa miettiä ja pohtia ratkaisua, vaikka se vaatisikin häneltä paljon. Olemme tutkimuksen aikana nähneet, miten taitavasti jo ensimmäisen luokan oppilas voi ratkaista matemaattisia ongelmia, joiden vastaantulemista he saisivat tavallisessa kouluopetuksessa turhaan odottaa monen kouluvuoden ajan. Kuitenkaan yhdenkään lapsen kehitystä ei saa jarruttaa, vaan sille pitää yrittää luoda parhaat mahdolliset edellytykset, vaikka opettajan työmäärä kasvaisikin. Lapsen iloinen asenne ja ponnistelun tuottama mielihyvä ovat paras palkinto työhönsä haasteena suhtautuvalle opettajalle.

LÄHTEET:

Aebli, H. 1991. Opetuksen perusmuodot. Suom. U. Sinkkonen. Porvoo: WSOY.

Ahtee, M. & Pehkonen, E. (Eds.) 1998.Research Methods in Mathematics and Science Education. Graduate School for Mathematics, Physics, and Chemistry Teachers. Volume 1. Department of Teacher Education. University os Helsinki. Helsinki: Hakapaino.

Allen, R.E. & Allen, S.D. 1998. Nalle Puh ja ongelmanratkaisun taito: jossa Nalle Puh ja Nasu ystävineen tutkivat, miten ongelmia ratkotaan. Porvoo: WSOY.

Arnold, M. 1998. Methods of Data Collection and Analysis in the Development and Evaluation of a New Teaching Approach. Teoksessa M. Ahtee & E. Pehkonen (Eds.) Research Methods in Mathematics and Science Education. Helsinki: Hakapaino. 5 - 24.

Barb, C. & Larson Quinn, A. 1997. Problem Solving Does Not Have to Be a Problem. The Mathematics teacher. National Council of Tearcers of Mathematics. Vol. 90, No 7. 536 - 542.

Bell, J. 1987. Doing Your Reseach Project. A Guide for First-Time Researchers in Education and Social Science. Philadelphia: Open University Press.

Berger, P. 1998. Exploring Mathematical Beliefs - the Naturalistic Approach. Teoksessa M. Ahtee & E. Pehkonen (toim.) Research Methods in Mathematics and Science Education. Helsinki: Hakapaino. 25 - 40.

Berry, J. & Sahlberg, P. 1995. Matematiikka elämään. Opetus 2000. Helsinki: WSOY.

Brunell, V. 1993. Pitääkö koulun olla kaikille sama? Teoksessa E. Kangasniemi & R. Konttinen (toim.) Lue, etsi, tutki. Tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi.Opetus 2000. Porvoo: WSOY. 32 - 51.

Clark, B. 1988. Growing up Gifted: Developing the Potential of Children at Home and at School. Merill Publishing Company. Columbus. Ohio.

Davis, R.B. 1983. Complex Mathematical Cognition. Teoksessa H. P. Ginsburg (Ed) The Development of Mathematical Thinking. Orlando: Academic Press. 254 - 291.

Dingwall, R. 1997. Accounts, Interviews and Observations. Teoksessa G. Miller & R. Dingwall (Eds.) Contest & Method in Qualitative Research. London: Sage.

Dreyfus, T. 1994. Advanced Mathematical Thinking Processes. Teoksessa D. Tall. (toim.) Advanced Mathematical Thinking. 25 – 41.

Ervynck, G. 1994. Mathematical Creativity. Teoksessa D. Tall (toim.) Advanced Mathematical Thinking. 42 – 53.

Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Tampere: Osuuskunta Vastapaino / Jyväskylä: Gummerus.

Feldhusen, J. F. 1992. Talent Development: The New Direction in Gifted Education. Roeper Review. Vol. 18, 2. 92.

Freese, H-L. 1992. Lapset ovat filosofeja. Suom. E. Wiegand. Jyväskylä: Gummerus.

Fulkerson, J. L. 1995. A Talent Approach to District Programming for Gifted and Talented Youth K-12. Roeper Review. Vol. 18., 2. 117 – 120.

Fuson, K.C. & Hall, J. W. 1983. The Acquisition of Early Number Word Meanings: A Conceptual Analysis and Review. Teoksessa H.P. Ginsburg (Ed.) The Development of Mathematical Thinking. Orlando: Academic Press. 49 - 107.

Gall, M. D., Borg, W.R. & Gall, J. P. 1996. Educational Research. An introduction. 6. painos. New York: Longman.

Ginsburg, H.P. (Ed.) 1983. The Development of Mathematical Thinking. Orlando: Academic Press.

Ginsburg, H.P., Kossan, N. E., Schwartz, R. & Swanson, D. 1983. Protocol Methods in Research of Mathematical Thinking. Teoksessa H.P. Ginsburg (Eds.) The Development of Mathematical Thinking. Orlando: Academic Press. 7 - 47.

Haapasalo, L. 1993. Miksi opetuksen uudistaminen ei onnistu? Kasvatus 24 (3), 266 - 275.

Haapasalo, L. 1998. Ongelmanratkaisun oppimisesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino. 80 – 98.

Halinen, I., Hänninen, L., Joki, J., Leino, J., Näätänen, M., Pehkonen, E., Pehkonen, L., Sahlberg, P., Sainio, E., Seppälä, R. & Strang, T. 1991. Peruskoulun matematiikan opetuksen kehityssuunnasta 1990-luvulla. Opetus & Kasvatus. Helsinki: VAPK-kustannus.

Heikkinen, H.L.T. 1996. Perinteisellä tyylillä vai vapaalla? Kohti reflektiivistä dialogia opetusharjoittelussa toimintatutkimuksen avulla. Lisensiaattityö. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satama, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1996. Hei, nyt lasketaan! 1A. Helsinki: Otava.

Hirsjärvi, S. & Hurme, H. 1980. Teemahaastattelu. Tampere: Gaudeamus.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 1997. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Kirjayhtymä Oy.

Hämäläinen, U., Pesonen, T. & Nyholm, K. 1993. Lasku-Matikainen 1. Jyväskylä: Oppi-Data Oy.

Hämäläinen, U., Pesonen, T. & Nyholm, K. 1994. Lasku-Matikainen 2. Jyväskylä: Oppi-Data Oy.

Ikäheimo, H. 1995. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. Helsinki: Monila Oy.

Ikäheimo, H. 1996. Matematiikan keskeisten käsitteiden diagnosointi esiopetuksen alussa ja lopussa sekä 1. luokan alussa. Helsinki: Oy Opperi Ab.

Ikäheimo, H. 1998. Matematiikan esi- ja alkuopetuksen kysymyksiä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino. 239 – 250.

Ikäheimo, H., Aalto, A. & Puumalainen, K. 1997. Opi matematiikkaa leikkien esi- ja alkuopetuksessa. Helsinki: Monila Oy.

Juuso, H. 1995. Ajattelu kasvatuksessa - Matthew Lipmanin Filosofiaa lapsille -ohjelman pääpiirteet. Teoksessa J. Kotkavirta (toim.) Filosofia koulunpenkillä. Kirjoituksia oppiaineen didaktiikasta. Kasvatus & Opetus. Helsinki: Painatuskeskus.

Kallonen-Rönkkö, M. 1986. Lapsen ajattelu ja sen kehityksen edistäminen peruskoulun alkuvaiheessa. 6/1986. Kouluhallitus. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Kallonen-Rönkkö, M. 1998. Matematiikan oppiminen ala-asteen uusiutuvissa oppimisympäristöissä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino. 251 – 268.

Kananoja, S. 1993. Luokan heterogeenisuus opettajan kokemana. Tapaustutkimus pääkaupunkiseudun kahdesta ensimmäisestä luokasta. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta.

Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J. & Salmela, M. 1997. Geometria. Pitkä matematiikka. Porvoo: WSOY.

Kangasniemi, E. & Konttinen, R. (toim.) 1993. Lue, etsi, tutki. Tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Opetus 2000. Porvoo: WSOY.

Karilas, Y. (toim.) 1962. Antero Vipunen. Arvoitusten ja ongelmien, leikkien ja pelien sekä eri harrastelualojen pikku jättiläinen. Porvoo: WSOY.

Keranto, T. 1978. Esikouluikäisen lapsen lukukäsitteen kehitysasteesta ja laskuvalmiuksista. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitos.

Keranto, T. 1990. Kontekstuaalinen lähestymistapa matematiikan opetukseen ja oppimiseen. I osaraportti. Oulun yliopiston kasvatustieteellisen tiedekunnan tutkimuksia 67/1990.

Kinnunen, R. & Lehtinen, E. & Vauras, M. 1994. Matemaattisen taidon arviointi. Teoksessa M. Vauras, E. Poskiparta & P. Niemi (toim.) Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla. Turun yliopisto. Oppimistutkimuksen keskus. Julkaisuja 3.

Kinnunen, R. & Vauras, M. 1998. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T.Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka -näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino. 269-282.

Koskinen, K-L. & Sieppi, H. 1994. Lahjakkaiden kerhomuotoinen rikastamisohjelma. Teoksessa H. Lehtonen (toim.) Opetuksen yksilöinti. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 1.

Kotkavirta, J. (toim.) 1995. Filosofia koulunpenkillä. Kirjoituksia oppiaineen didaktiikasta. Opetus & Kasvatus. Helsinki: Painatuskeskus.

Kupari, P. 1993. Mistä rohkeus ja keinot koulumatematiikan uudistumiseen. Teoksessa E. Kangasniemi & R. Konttinen (toim.) Lue, etsi, tutki. Tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Opetus 2000. Porvoo: WSOY. 114 - 131.

Kuusinen, J. (toim.) 1993. Kasvatuspsykologia. Porvoo: WSOY.

Kuusinen J. & Korkiakangas, M. 1993. Ihmisen kehitys elämänkaaren näkökulmasta. Teoksessa J. Kuusinen (toim.) Kasvatuspsykologia. Porvoo: WSOY.

Kyröläinen, K. 1994. Eheyttävä opetus ja eräät alkuopetuksen sosiaalisemotionaaliset tavoitteet.Didaktinen kokeilu peruskoulun 1.-2. Luokilla opetusharjoittelun yhteydessä. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunta. Turun opettajankoulutuslaitos. Julkaisusarja A/169.

Lahdes, E. 1997. Peruskoulun uusi didaktiikka. Keuruu: Otava.

Laine, T. 1995. Filosofiaa dialogina. Teoksessa J. Kotkavirta (toim.) Filosofia koulunpenkillä. Kirjoituksia oppiaineen didaktiikasta. Opetus & Kasvatus. Helsinki: Painatuskeskus. 70 - 108.

Lehtonen, H. (toim.) 1994. Opetuksen yksilöinti. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 1.

Leino, J. 1992. Uutta ajattelua matematiikan opetukseen! Kasvatus 23 (1), 40 - 46.

Leskinen, J.1995. Laadullisen tutkimuksen risteysasemalla. Kuluttajatutkimuskeskus. Helsinki: Ykköspaino Oy.

Liikanen, P. 1995. Lähtötilanteen kartoitus peruskoulun 1. luokalla. Kehityspsykologiset valmiudet koulumenestyksen ennustajana. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 23.

Maier, H. 1998. On empirical research in didactics. Teoksessa M. Ahtee & E. Pehkonen (Eds.) Research Methods in Mathematics and Science Education. Helsinki: Hakapaino. 57 - 72.

Malaty, G. 1993. Geometrinen ajattelu 1. Didaktiikka. Tampere: Tammer-Paino Oy.

Malaty, G. 1997. Lapsi matkalla matematiikan maailmaan. Teoksessa M. Siniharju (toim.) Esi- ja alkuopetuksen uusia tuulia. Opetushallitus. Jyväskylä: Gummerus.

Malinen, P. 1980. Matemaattisen ajattelun kehittyminen peruskoulun ala-asteen oppilailla. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 4.

Malinen, P. 1992. Looginen ajattelu matematiikan opetuksessa. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 49.

Malinen, P. 1998. Oppilaiden kehittyminen todistusajatteluun. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino. 99 - 110.

Martschinke, J. 1990. Tangramables. A Tangram Activity Book. Deerfild: Learning Resources.

Mason, J. 1996. Qualitative Researching. London: Sage Publications.

Miller, G. & Dingwall, R. (Eds.)1997. Context & Method in Qualitative Research. London: Sage Publications.

Otavan Suuri Ensyklopedia 5. 1979. Helsinki: Otava.

Otavan Suuri Ensyklopedia 6. 1979. Helsinki: Otava.

Paasonen, J. 1993. Matematiikan opetus perusteitaan etsimässä. Kasvatus 24 (2), 166 - 170.

Patton, M.Q. 1990. Qualitative Evaluation and Research Methods. 2. painos. London: Sage.

Pehkonen, E. 1998. Etappi. Toiminnallisia matematiikan tehtäviä peruskouluun. Helsinki: Oy Edita Ab.

Pehkonen, E. & Pehkonen, L. 1993. Nyt on mun vuoro! Oppimispelejä peruskoulun matematiikan opetukseen. Helsingin yliopisto. Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus.

Pehkonen, E., Pekama, E. & Seppälä, R. 1991. Matemaattinen ongelmanratkaisu. Tehtäviä peruskoulun ja lukion matematiikan opetukseen. MAOL ry:n julkaisusarja n:o 26/1991. Helsinki: MFKA-Kustannus Oy.

Perttula, J. 1998. The Possibilities and Impossibilities of Qualitative Research Orientations. Teoksessa M. Ahtee & E. Pehkonen (Eds.) Research Methods in Mathematics and Science Education. Helsinki: Hakapaino. 73 - 89.

Peruskoulun opetuksen opas: Alkuopetus. 1988. 3. korjattu painos. Kouluhallitus. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994. 3. korjattu painos.Opetushallitus. Helsinki: Edita AB.

Peräkylä, A. 1995. Kvalitatiivisen tutkimuksen kohteet ja ihmiskuva. Teoksessa J. Leskinen (toim.) Laadullisen tutkimuksen risteysasemalla. Kuluttujatutkimuskeskus. Helsinki: Ykköspaino Oy. 39 - 50.

Peräkylä, A. 1997. Reliability and Validity in Research Based on Transcripts. Teoksessa D. Silverman (Ed.) Qualitative Research. Theory, Method and Practice. 201 - 220.

Piaget, J. 1988. Lapsi maailmansa rakentajana: kuusi esseetä lapsen kehityksestä. Suom. S. Palmgren. Porvoo: WSOY.

Pietilä, A. 1994. Millaisia motivointikeinoja ala-asteen opettajat käyttävät matematiikan opetuksessa. Teoksessa S. Tella (toim.) Näytön paikka. Opetuksen kulttuuri ja arviointi. Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 4.2.1994. Osa 2. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 130. Helsingin yliopistopaino. 169 - 174.

Polya, G. 1973. How To Solve It. A New Aspect of Mathematical Method. 2. painos. Princeton: Princeton University Press.

Putkonen, H., Sinnemäki, J. & Raitanen, M. 1992. Harrastamme matematiikkaa. Aktiivista matematiikkaa peruskoulun ala-asteen oppilaille. Porvoo: WSOY.

Pyörälä, E. 1995. Kvalitatiivisen tutkimuksen metodologiaa. Teoksessa J. Leskinen (toim.) Laadullisen tutkimuksen risteysasemalla. Kuluttajatutkimuskeskus. Helsinki: Ykköspaino Oy. 11 - 27.

Rathus, S.A. 1988. Understanding Child Development. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Rikala, S., Sieppi, H., Strang, T. & Ilmavirta, R. 1993. Laskutaito 1. Kevätosa. Porvoo: WSOY.

Rikala, S., Sieppi, H., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R.1996. Laskutaito 1. Syysosa. Porvoo: WSOY.

Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) 1998. Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino.

Saariluoma, P. 1990. Taitavan ajattelun psykologia. Helsinki: Otava.

Salonen, P. , Lepola, J., Vauras, M., Rauhanummi, T., Lehtinen, E. & Kinnunen, R. 1994. Diagnostiset testit 3. Motivaatio, metakognitio ja matematiikka. Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla. Turun yliopisto. Oppimistutkimuksen keskus.

Sandahl, A. 1997. Skolmatematiken – kultur eller myt?: mot en bestämning av matematikens didaktiska identitet. Linköping Universitet. Linköping studies in education and psyckology. 51.

Savolainen, P. 1991. Kvalitatiiviset tutkimustavat suomalaisessa kasvatustieteessä. Kasvatus 22, 5 – 6, 451 – 457.

Sieppi, H. & Tuomi, M. 1994. "Lapsi on kyllin nuori ajatellakseen itse". Ajattelun kehittämiseen tähtäävien työtapojen kokeilu. Teoksessa H. Lehtonen (toim.) Opetuksen yksilöinti. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 1.

Silverman, D. (Ed.) 1997. Qualitative Research. Theory, Method and Practice. Lontoo: SAGE Publications.

Siniharju, M. (toim.) 1997. Esi- ja alkuopetuksen uusia tuulia. Opetushallitus. Jyväskylä: Gummerus.

Syrjälä, L., Ahonen, S., Syrjäläinen, E. & Saari, S. 1994. Laadullisen tutkimuksen työtapoja. Helsinki: Kirjayhtymä Oy.

Syrjälä, L. & Numminen, M. 1988. Tapaustutkimus kasvatustieteessä. Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia 51/1988.

Takala, S. 1992. Virikkeitä uutta kokeilevaan koulutyöhön. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Jyväskylän yliopisto.

Tall, D. (toim.) 1994. Advanced Mathematical Thinking. 2. painos. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Talvenmäki, P., Simula, O. & Meisalo, V. 1994. Luova ongelmanratkaisu ryhmätyömenetelmiä käyttävässä matemattisten aineiden opetuksessa. Teoksessa S. Tella (toim.) Näytön paikka. Opetuksen ja kulttuurin arviointi. 207-212.

Tella, S. 1994. (toim.) Näytön paikka. Opetuksen kulttuuri ja arviointi. Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 4.2.1994. Osa 2. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 130.

Trost, J. 1997. Kvalitativa intervjuer. Lund: Studentlitteratur.

Tynjälä, P. 1991. Kvalitatiivisten tutkimusmenetelmien luotettavuudesta. Kasvatus 22, 5 - 6, 387 - 397.

Uusikylä, K. 1994. Lahjakkaiden kasvatus. Opetus 2000. Porvoo: WSOY.

Vauras, M., Poskiparta, E. & Niemi, P. (toim.) 1994. Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla. Turun yliopisto. Oppimistutkimuksen keskus. Julkaisuja 3.

Vähäpassi, A., Hartikainen, S. & Häggblom, L. 1997. Mieti ja laske. 1 syksy. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

Wragg, E. C. 1994. An Introduction to Classroom Observation. London: Routledge.

Yrjönsuuri, R. 1998. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino. 128 – 141.

Zimmermann, B. 1991. Problematierter Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzberker.

Liite 1: Eriyttävät tehtävät

Tangram -tehtävien (Martschinke 1990) idea on peittää erilaisia kuvioita tietyillä pienemmillä geometrisilla kuvioilla. Oppilaille tehtiin tangram-pussit ja seitsemän pientä kuviota, jotka tarvittiin jokaisessa tehtävässä. Oppilaat tekivät tangram-tehtäviä vaikeutuvana sarjana aloittaen helposta ja edeten omaa tahtiaan vaikeampiin tehtäviin. Tangram-tehtävät kehittävät hahmottamiskykyä sekä ongelmanratkaisutaitoja.

Voittorivissä (Pehkonen & Pehkonen 1993, 30 – 31) pelilautana toimii ruudukko, jossa on eri lukuja. Ruudukon alapuolella on toiset luvut, joista oppilaan tehtävänä on muodostaa laskuja siten, että hän saa tulokseksi jonkun ruudukossa olevan luvun. Tämän ruudun oppilas saa vallata. Tarkoituksena on saada vallattua ruudukosta kolmen ruudun rivi. Tehtävä kehittää loogista ajattelua valloituksia suunniteltaessa, aritmeettisia taitoja sekä lukujen hajottamista sopivia laskuja keksittäessä.

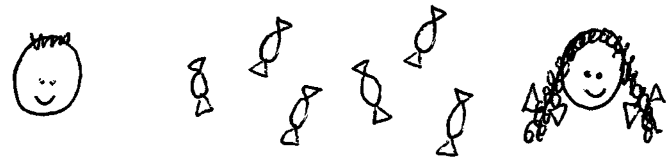
Suuressa hevoskilpailussa (Pehkonen 1998, 88 - 89) oppilas valitsee itselleen hevosen, joka saa numeron 1-12. Pelissä heitetään kahta noppaa, joiden summan osoittama hevonen saa edetä yhden askeleen. Pelin tarkoituksena on varmentaa yhteenlaskutaitoja ja auttaa niiden automatisoitumista.

Erilaiset palikkatehtävät olivat osa geometrian jaksoa. Oppilaat rakensivat pareittain tiettyjä kappaleita suullisten ohjeiden mukaan, kokosivat eri muotoisista palikoista kappaleita konkreettisen mallin mukaan ja kirjallisen ohjeen mukaan.

Liite 2: Valintatesti 1

Nimi:______________________________

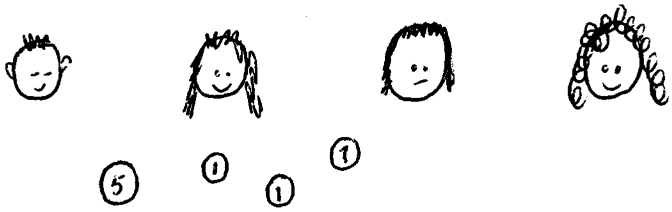
1.



Lapset jakavat karkit tasan. Kuinka monta karkkia jokainen saa?

__________ karkkia.

2.



Lapset jakavat rahat tasan. Kuinka monta markkaa jokainen saa?

___________markkaa.

3. 2+2=______________ 3-2=______________

4+3=______________ 8-4=______________

1+8+1=____________ 7-2-4=____________

4. 13-5=______________ 14-2-1=___________

13-_________=9 15-9=_____________

18-2-4=______ 12-_____________=3

5. Täydennä. (vrt. Hämäläinen, Pesonen & Nyholm 1994, 4)

29, 30, 31, ________ 87, 86, 85, ________

44, ________, 46, 47 91, ________, 89, 88

68, 69, ________, 71 31, 30, ________, 28

________, 61, 62, 63 ________, 79, 78, 77

Lisätehtävä: Kuinka monta paria tulee 15 oppilaasta?

______________ paria

Liite 3: Valintatesti 2

Nimi:________________________

1. ___________ ___________ _________

___________ ___________ _________

2. 7+2=____________ 40+10=_______________

15+3=____________ 25+9=_______________

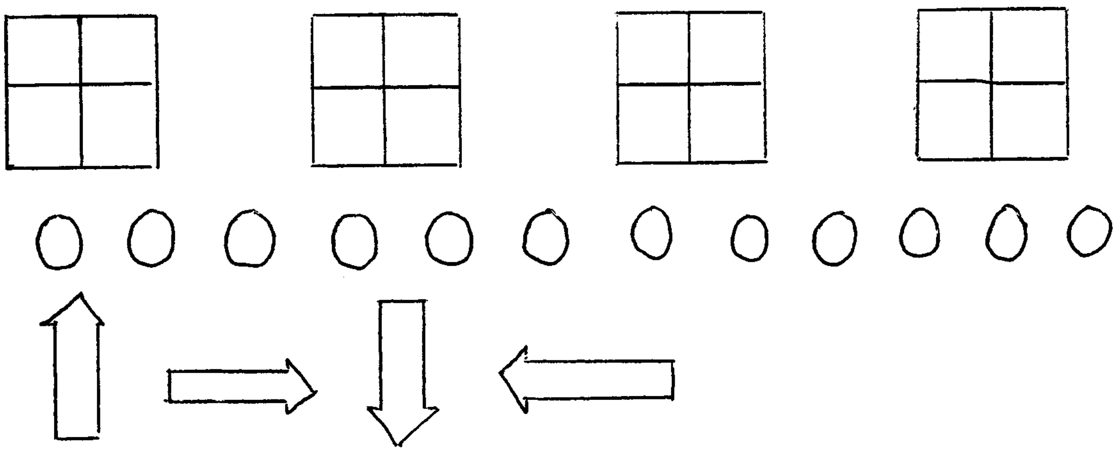
35+4=____________ 78+7=_______________

3. 9-5=____________ 60-10=_______________

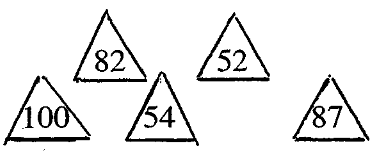
18-6=____________ 53-8=_______________

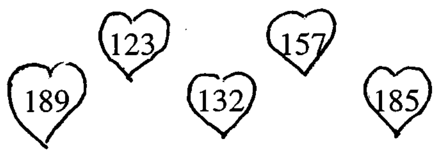
27-7=____________ 81-6=_______________

4. Mikä on seuraava? (Hämäläinen ym 1993, 110)



5. Kirjoita luvut pienimmästä suurimpaan. (vrt. Hämäläinen ym. 1994, 33)



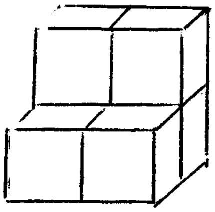


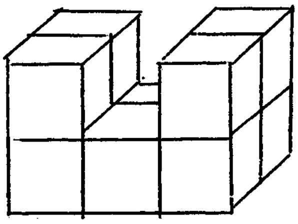
____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

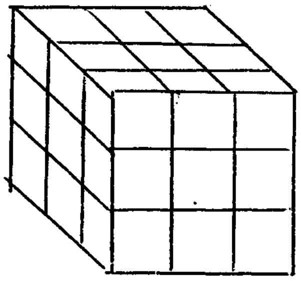
(jatkuu)

(Liite jatkuu)

6. Kuinka monta palikkaa? (vrt. Rikala ym. 1993, 90)







_____ _____ _____

7.	18+2+3=____________	66-3-3=____________
	46+9+5=____________	85-13-3=____________
	77+6-2=____________	100-8-9=____________
8.	2 x 3=______	3 x 10=____________
	4 x 1=______	8 x 5=____________

(jatkuu)

(Liite jatkuu)

Päässälaskut toiseen valintatestiin

1. Karilla on 13 markkaa rahaa. Juhalla on 8 markkaa vähemmän. Kuinka monta markkaa Juhalla on?
2. Tikkari maksaa 4 markkaa. Eijalla on rahaa 14 markkaa. Kuinka monta tikkaria Eija voi ostaa?
3. Leenalla on 75 markkaa. Kuinka monta markkaa puuttuu sadasta markasta?
4. Pekka osti puseron, joka maksoi 75 markkaa. Kalle osti housut, jotka maksoivat 4 markkaa enemmän. Kuinka paljon Kallen housut maksoivat?
5. Liisalla oli 19 markkaa ja Leenalla 12 markkaa. Kuinka paljon vähemmän Leenalla on rahaa?
6. Kaisalla on rahaa 7 markkaa ja Katariinalla 12 markkaa. Kuinka paljon rahaa heillä on yhteensä?

Liite 4: Valintatestien tulokset

Esitestaus kenttäkoulun ensimmäisessä luokassa 18.9.1998

Tulokset

Taneli	21+1
Tiina	21
Jediitta	18
Anni	18
Jyri	17
Emilia	16
Karoliina	14 +1
Tero	14
Minta	12
Janika	11
Niko	11
Heidi	6
Tuuli	5
Johanna	4
Sakari	2
Mira	2
Keskiarvo	12

Tulokset tutkimusluokassa

Poika 1	20
Leena	19
Janne	18+1
Kimmo	18+1
Poika 2	18
Poika 3	16+1
Tyttö 1	15
Tyttö 2	15+1
Tyttö 3	13
Tyttö 4	8
Tyttö 5	5
Tyttö 6	4
Poika 4	4
Poika 5	2
Tyttö 7	2
Keskiarvo	11,8

(jatkuu)

(Liite jatkuu)

Tulokset tehtävätyypeittäin:

K= kenttäkoulu, T= tutkimusluokka

1. tehtävä: Helpompi ongelmanratkaisutehtävä

keskiarvo 1/1 (K) 0,87/1 (T)

2. tehtävä: vaikeampi ongelmanratkaisutehtävä

keskiarvo: 0,25/1 (K) 0,4/6 (T)

3. tehtävä: Yhteen- ja vähennyslaskua lukualueella 0 - 10

keskiarvo 4,75/6 (K) 4,33/6 (T)

4. tehtävä: Vähennyslaskua lukualueella 0 - 15, myös kymmenylitys

keskiarvo: 2,125/6 (K) 2,47/6 (T)

5. tehtävä: Lukujonotehtävä lukualueella 30 - 100

keskiarvo 4/8 (K) 3,73/8 (T)

Tapausoppilaiden pisteet tehtävittäin

Tehtävät	1	2	3	4	5
Kimmo	1	1	4	5	7
Leena	1	1	6	5	6
Janne	1	1	5	5	6
Max	1	1	6	6	8

Toisen valintatestin tulokset

2. Testi (max. 38)

Janne	33
Leena	30
Kimmo	28
Poika 3	25
Poika 2	25
Poika 1	23

(jatkuu)

(Liite jatkuu)

1. tehtävä: Päässälaskuja
2. tehtävä: Yhteenlaskua lukualueella 10 – 90
3. tehtävä: Vähennyslaskua lukualueella 0 – 80
4. tehtävä: Jatka mallin mukaan.
5. tehtävä: Luvuilla sarjoittaminen lukualueella 50 - 200
6. tehtävä: Avaruudellinen hahmoittaminen
7. tehtävä: Yhteen- ja vähennyslaskua lukualueella 20 – 100
8. tehtävä: Kertolaskua lukualueella 0 - 40

Pisteet tehtävittäin

Tehtävät	1	2	3	4	5	6	7	8
Kimmo	5	5	4	3	4	2	2	3
Leena	5	6	6	3	4	1	2	3
Janne	5	6	6	1	4	3	4	4
Max	6	6	6	3	4	3	6	4

Liite 5: Toinen seurantatesti

(vrt. Salonen ym. 1994)

MATEMAATTINEN AJATTELU

Näillä tehtävillä pyritään selvittämään 1. luokan oppilaiden matemaattisloogisen ajattelun taitoja, lukujonotaitoja ja aritmeettisia taitoja. Tehtävät esitetään koko luokalle yhtä aikaa luokkatehtävinä. Tehtävät on vaikeutuvaksi sarjaksi ja niiden tarkoitus on erotella oppilaiden taitotasoa. Kaikkien oppilaiden ei siis ole tarkoitus osata kaikkea. Kestoltaan tehtäväsarja vie korkeintaan yhden matematiikan oppitunnin.
Tarvikkeet:

- opettaja: suullisten tehtävien ohjeet, kuvakalvot ja magneettinapit (24 kpl) (Magneettinappien puuttuessa joitain muita keskenään samanlaisia kuvioita, jotka voi kiinnittää taululle.)
- oppilas: vastauspaperi ja kynä

Matemaattislooginen ajattelu

1. Norsutehtävä (Transitiivinen päättely)
"Kuulet seuraavaksi arvoituksen kolmesta kynästä. (Opettaja näyttää kalvolta kynät.) *Sininen kynä on pidempi kuin punainen kynä, ja sininen kynä on lyhyempi kuin vihreä kynä. Kumpi on lyhyempi, punainen vai vihreä kynä? Jos punainen kynä on lyhyempi, merkitse ympyrä 0 ja jos vihreä kynä on lyhyempi, merkitse rasti X."*

2. Kissatehtävä (Lukumäärän säilyvyys)
Opettaja järjestää 24 magneettinappia kahdeksi riviksi taululle. *"Nyt voit laskea nämä magneettinapit."* Opettaja ryhmittelee alarivin 12 nappia kolmeen neljän magneettinapin ryhmään ja kysyy: *"Onko tässä rivissä yhtä monta magneettinappia kuin ylärivissä? Jos on niin merkitse ympyrä 0, jos ei ole, niin merkitse rasti."*

3. Sammakkotehtävä (Luokkainkluusio)
"Tässä näet joukon eläimiä. (Opettaja näyttää kalvon.) *Siinä on 15 kissaa ja 6 koiraa. Kumpia on enemmän, kissoja vai eläimiä? Jos kissoja on enemmän, merkitse ympyrä 0 ja jos eläimiä on enemmän, merkitse rasti X."*

4. Valastehtävä (Pitävä päättely)
"Tässä näet sinisen, punaisen ja vihreän karkkipussin. (Opettaja näyttää kalvolta kuvan.) *Sinisessä ja punaisessa on yhtä monta karkkia. Liisa ottaa niistä kummastakin yhtä monta karkkia ja pistää ne vihreään karkkipussiin. Kummassa on enemmän karkkeja, punaisessa vai sinisessä, vai onko niissä yhtä paljon karkkeja? Jos punaisessa on enemmän, merkitse ympyrä 0, jos sinisessä on enemmän, merkitse rasti X ja jos niissä on yhtä paljon, merkitse yhtä suuri kuin -merkki =."* (Opettaja näyttää merkit kalvolta.)

(jatkuu)

(Liite jatkuu)

Lukujonotaidot

Eteenpäin
1. *Minkä luvun saat, kun lasket neljä eteenpäin seitsemästä? Merkitse se kukan kohdalle.*
2. *Minkä luvun saat, kun lasket kuusi eteenpäin 18:sta? Merkitse se sienen kohdalle.*

Taaksepäin
1. *Minkä luvun saat, kun lasket kuusi taaksepäin yhdeksästä? Merkitse se saappaan kohdalle.*
2. *Minkä luvun saat, kun lasket neljä taaksepäin 13:sta? Merkitse se luun kohdalle.*

Aritmeettiset taidot

"Laske nyt kaikki osaamasi yhteen- ja vähennyslaskut, joita paperilla on."

Liite 6: Seurantatestien tulokset tutkimukseen osallistuneilla oppilailla

Seurantatestit	Kimmo	Leena	Janne	max	ka
1. testi	20	19	19	20	16,9
2. testi	19	19	21	24	14,6
3. testi	18	19	20	24	15,1
	57	57	60	68	46,6

Matemaattis-looginen ajattelu

Osa-alue	Kimmo	Leena	Janne	max
Joukkojen vertailu	1	1	1	1
Transitiivinen päättely	3	3	3	3
Lukumäärän säilyvyys	2	2	2	2
Luokkainkluusio	3	2	2	3
Pitävä päättely	2	2	2	2
Pituuden pysyvyys	1	1	0	1
	12	11	10	12

Testi	Kimmo	Leena	Janne	max.	ka
1. testi	4	3	3	4	3,3
2. testi	4	4	4	4	3,3
3. testi	4	4	3	4	2,5
	12	11	10	12	

Lukujonotaidot

Testi	Kimmo	Leena	Janne	max.	ka
1. testi	4	4	4	4	3,8
2. testi	3	4	4	4	3,1
3. testi	4	4	4	4	2,9
	11	12	12	12	

(jatkuu)

(Liite jatkuu)

Aritmeettiset taidot

Osa-alue	Kimmo	Leena	Janne	max.	ka
Lukualue 0-5	4	4	4	4	3,9
Lukualue 0-10	8	8	8	8	7,4
Lukualue 10-20	3	4	4	4	2,9
Kymmenylitys	12	12	12	12	8,25
Aukkotehtävä	6	6	7	8	3,9
Kaksinum. luvuilla laskeminen	1	0	3	8	0,7
	34	34	38	44	

Testi	Kimmoi	Leena	Janne	max.	ka
1. testi	12	12	12	12	9,8
2. testi	12	11	13	16	8,3
3. testi	10	11	13	16	9,6
	34	34	38	44	

Liite 7: Kirje vanhemmille

Hyvä kotiväki

Olemme opettajankoulutuslaitoksen 4. vuosikurssin opiskelijoita ja teemme pro gradu -tutkielmaamme ensimmäisen luokan matematiikasta. Marras-joulukuussa olemme päättöharjoittelussa Normaalikoululla. Keskitymme harjoittelussa erityisesti matematiikan opetukseen.

Syksyn aikana olemme tehneet kartoitusta 1c-luokan matematiikan taidoista. Testit ovat mitanneet 1. luokan aikana saavutettavia matemaattisia taitoja. Teidän lapsenne on menestynyt testeissä keskimääräistä paremmin ja osoittanut matematiikkaan suuntautuneisuutta selviten ensimmäisen luokan matematiikan asioista jo näin lukuvuoden alkuvaiheessa. Tarkoituksenamme olisi päättöharjoittelun aikana antaa matematiikassa taitaville oppilaille mahdollisuus haasteellisempiin tehtäviin kehittääksemme edelleen heidän matemaattista ajatteluaan. Käytännössä tämä olisi mahdollista toteuttaa koulukerhotoimintana, johon osallistuisi kolme oppilasta. Opettaja ehdotti koulukerhoajoiksi keskiviikkoa klo 12-13 ja perjantaita klo 8-9, mikäli ne sopivat teille eikä ne aiheuta ylimääräisiä järjestelyjä. Olemme keskustelleet kerhosta Kimmon, Leenan ja Jannen kanssa ja suunnitelleet hieman, mitä voisimme kerhossa tehdä. Monipuolisten toimintojen ja tehtävien avulla pyrimme kehittämään lapsen ongelmanratkaisutaitoja ja vahvistamaan peruslaskutaitoja.

Tutkimustamme varten haluaisimme videoida opetustilanteita ja haastatella lapsia heidän matematiikkaan liittyvistä kokemuksistaan. Tähän kaikkeen tarvitsemme kuitenkin teidän lupanne. Mahdollisuuksien mukaan haluaisimme myös haastatella teitä lapsenne matematiikan opetuksesta ja oppimisesta.

Jos teillä on kysyttävää tutkimuksestamme, ottakaa meihin tai opettajaan yhteyttä; vastaamme mielellämme. Tarkempia tietoja koulukerhosta saatte lokakuun lopussa. Pyydämme, että palauttaisitte allaolevan lomakkeen mahdollisimman pian lapsenne mukana kouluun.

Kiitos!

Mari Peltokangas (puh. 273583)

Maaret Ruuskanen (puh. 050-3551318)

(jatkuu)

(Liite jatkuu)

Lapsen nimi: ____

____ Lapseni saa osallistua koulukerhoon ja tutkimukseen.

____ Olen itse käytettävissä haastatteluun tutkimusta varten (Kirjoitathan tässä tapauksessa yhteystietosi alle).

Muita toiveita tai huomioitavaa:

____

____

____

____

Huoltajan allekirjoitus____

Puhelinnumero:____

Osoite:____

Liite 8: Vanhempien haastattelurunko 1

1. Koulukerhosta ja tutkimuksesta kertominen

    Mitä mieltä olet?

    Miltä tuntuu?

    Mitä toiveita?

2. Kodin asenne matematiikkaan

    Omat koulukokemukset matematiikasta

    Missä matematiikkaa tarvitaan?

    Onko matematiikka tärkeää? Miksi?

3. Lapsen matemaattinen suuntautuneisuus

    Oliko kutsu Matikka-kerhoon yllätys?

    Onko matemaattinen taitavuus ilmennyt kotona ja jos on niin milloin?

    Mistä lapsen matemaattinen taitavuus johtuu?

    Harrastetaanko/opetetaanko kotona?

    Missä lapsi on oppinut matematiikkaa?

    Onko lapsi ollut esikoulussa?

4. Lapsen asenne matematiikkaan

    Kertooko lapsi mielellään koulupäivän tapahtumista?

    Kertooko lapsi matematiikan tunneista kotona? Jos kertoo, niin mitä?

    Tekeekö mielellään tehtäviä?

    Mistä lapsi aloittaa läksyjen teon?

    Lapsen suhtautuminen koulukerhoon etukäteen

Liite 9: Matikka-kerhon tavoitteet ja kokonaissuunnitelma

10 tuntia

Keskiviikkoisin 11.11.-9.12. klo12-13 ja perjantaisin 13.11. - 11.12. klo 8-9

Tutkimusongelma:

Miten RATKO-ongelmanratkaisumenetelmä soveltuu ensimmäisellä luokalla olevien matemaattisesti taitavien lasten matematiikan oppimiseen?

Kokonaistavoitteet:

1) Ongelmanratkaisu- ja päättelytaidot

Lapsen matemaattisen ajattelun kehittäminen:

* Lapsi oppii kertomaan ajatteluprosesseistaan ja päättelynsä tuloksista.

* Lapsi tulee tietoiseksi siitä, miten hän ajattelee ja ratkaisee tehtäviä.

* Lapsi tutustuu yksinkertaistettuun RATKO-ongelmanratkaisumenetelmään: Rajaa, Arvioi, Tutki, Keksi, Onnistuitko? ja oppii käyttämään sitä. (Sovellettu Allen & Allen (1998): Nalle Puh ja Ongelmanratkaisutaito)

2) Aritmeettiset taidot

Peruslaskutoimitusten automatisoituminen ja lukualueen laajentaminen.

3) Lapsi saa tasoaan vastaavia tehtäviä ja hänen pitkäjänteinen pohdintansa palkitaan onnistumisen elämyksellä ja ohjaajien antamalla myönteisellä palautteella.

1. kerta 11.11.
Keksi lasku -peli
- peruslaskutoimitusten automatisoituminen, hoksaaminen
- laskutoimitusten tuottaminen
Lasten matemaattisen ajattelutason alkumittaus (Malinen)

2. kerta 13.11.
Maaginen lukulinko
- tutustuminen RATKO:on
- päättelytaidot, hoksaaminen
- laskutoimitusten tuottaminen ja soveltaminen

3. kerta 18.11.
Omat numeromerkit (symbolikuvat)
- RATKO:n soveltaminen
- päättely
- ääneen selittäminen

(jatkuu)

- ongelmanratkaisutaidot
- ongelman tuottaminen

(Liite jatkuu)

4. kerta 20.11.
Tulitikkutehtävät
- RATKO:n soveltaminen
- hahmottaminen
- kokeilun kautta ongelmanratkaiseminen
- pitkäjännitteisyys

Ongelmakolmiot
- hoksaaminen ja kokeileminen
- itsenäinen ongelmanratkaisu
- hahmottaminen

5. kerta 25.11.
Rajaa- vaiheen tehtävät
Tulitikkutehtävät jatkuu

6. kerta 27.11.
Erilaisia lukukolmioita ja -pyramideja
- peruslaskutaitojen varmentaminen
- päättely, kokeilun kautta oikean tuloksen löytäminen
- ongelmanratkaiseminen RATKO:n avulla

7. kerta 2.12.
Matemaattinen temppu tikuilla
- RATKO:n soveltaminen
- päättely

8.kerta 4.12.
Kuka kukin on? -ongelmia
- RATKO:n soveltaminen
- ongelmanratkaisutaidot

Kymppipulma
- ongelmanratkaisu
- systemaattinen kokeileminen
- laskutoimitusten automatisoituminen

Laskumonisteita

9. kerta 8.12.
Matematiikkagolf
- laskutoimitusten automatisoituminen

Sammakot
- itsenäinen ongelmanratkaisu
- päättely ja kokeileminen

10. kerta 9.12.
Onnenluku
- Ongelmanratkaisutaidot
- Todistamistekniikan harjoittelua

Liite 10: Kerhotehtävät

Keksi lasku -peli (Pehkonen & Pehkonen 1993, 22 - 23) Pelin tarkoituksena oli peruslaskutoimitusten varmentaminen ja hoksaaminen. Samalla saimme käsityksen oppilaiden aritmeettisista taidoista isommillakin lukuilla sekä kertolaskuperiaatteen hallinnasta. Pelin luvut olivat lukualueella 0 - 100. Keksi lasku -pelissä tarkoituksena on keksiä lasku, jonka vastaus on valmiiksi annettu. Vaikeutimme peliä siten, että oppilaat joutuivat keksimään yhteenlaskujen lisäksi myös vähennys- ja kertolaskuja.

Taikamasiina (ks. Putkonen, Sinnemäki & Raitanen 1992, 13). Taikamasiinan avulla oli tarkoitus tutustua RATKO-ongelmanratkaisumenetelmään, vahvistaa peruslaskutoimituksia sekä auttaa oppilaita hoksaamaan erilaisten laskutoimitusten merkityksen laskutehtävissä. Taikamasiinan ideana oli, että kartongista rakennettuun taikamasiinaan syötettiin luku, joka muuttui koneessa toiseksi luvuksi. Oppilaiden tehtävänä oli keksiä, mitä luvulle on koneessa tapahtunut. Koneeseen laitettiin uusi luku niin monta kertaa, että oppilaat keksivät säännönmukaisuuden, joka kaikille syötetyille luvuille tapahtui. Lopuksi tarkastettiin vielä vähintään yhdellä luvulla oliko päätelmä ollut oikea. Laskutoimituksia, joita kone teki luvuille, olivat muun muassa n + 5, n x 2 ja n - 12.

Oudot numerot eli symbolimerkit (ks. Putkonen ym. 1992). Oudot numerot tarkoittivat tässä tehtävässä erilaisia symbolimerkkejä (esim. sydän, kolmio ja pilvi), jotka oli annettu numeroille 1 – 10. Symbolimerkeillä oli laskettu erilaisia laskuja, joista oppilaan piti päätellä, mikä merkki vastaa kutakin numeroa. Apuna tässä oli vastauslomake, johon oppilas sai merkitä vaiheittain saamiaan tuloksia. Tehtävää vaikeutti se, että ensimmäisen laskun ratkaistuaan oppilaalle jäi vielä monia vaihtoehtoja laskussa oleville symboleille. Vasta viimeisissä 8. tai 9. laskussa kaikkien symbolien merkitykset vahvistuivat.

(jatkuu)

(Liite jatkuu)

Tulitikkutehtävät (Karilas 1962, 403 - 429). Tulitikkutehtävien tarkoituksena oli soveltaa RATKO-ongelmanratkaisumenetelmää sekä kehittää oppilaiden hahmottamiskykyä, ongelmanratkaisutaitoja ja pitkäjänteistä työskentelyä. Väistämättä se kehitti myös lasten hienomotoriikkaa. Ennen tulitikkutehtävän konkreettista ratkaisuyritystä oppilaan tehtävänä oli arvioida piirtämällä paperille, millainen lopullinen ratkaisu mahdollisesti olisi. Tämän jälkeen oppilas sai tehdä tulitikuista alkukuvion ja yrittää ratkaista tehtävän. Lopuksi vastausta ja omaa arviota verrattiin keskenään.

Ongelmakolmiot (Karilas 1962, 269) Ongelmakolmiot perustuvat Karilaksen kirjassa olevaan tehtävään, mutta kolmiot ja aluslevy on tehty kovalevystä kappaleiden käsittelyn helpottumiseksi. Tehtävän tavoitteena on kehittää hamotuskykyä sekä kannustaa oppilaita hoksaamiseen ja kokeilemiseen. Tehtävän tarkoituksena on peittää kahdeksalla pienellä kolmiolla isompi nelikulmio. Tehtävää helpottaa huomattavasti, jos oppilas ymmärtää symmetrian käsitteen ja osaa soveltaa sitä käytäntöön.

Laskukolmiot ja -pyramidit (vrt. Pehkonen 1998, 14 - 15). Tehtävien tavoitteena on peruslaskutoimitusten varmentaminen, päättely ja kokeilemisen kautta oikean tuloksen löytäminen. Jotkut tehtävistä tuottivat erilaisia ratkaisuja sen mukaan, mitkä luvut oppilas valitsi aluksi. Näin oppilaat saattoivat huomata, että oikeita ratkaisuja ongelmiin voi olla useita. Valituista luvuista johtuen joihinkin tehtäviin tuli laskemista negatiivisilla luvuilla, mitä taitoa samalla harjoiteltiin.

Kuka kukin on? (Putkonen ym. 1992, 39). Tehtävän tavoitteena oli kehittää oppilaiden päättelykykyä ja loogista ajattelua. Tehtävässä on henkilöiden kuvia ja sanallisia vihjeitä, joiden perusteella täytyy päätellä kuka kukin on.

(jatkuu)

(Liite jatkuu)

Yhdeksän reiän matematiikkagolf (Putkonen ym. 1992, 27) Pelin tavoitteena oli ottaa esille uusia käsitteitä: summa, erotus ja tulo sekä merkit pienempi kuin (<) ja suurempi kuin (>). Lisäksi harjoiteltiin peruslaskutoimituksia. Tehtävässä annettiin ehtoja kahden heitettävän nopan silmäluvuille (esim. Noppien lukujen summa < 7 tai noppien lukujen summa on parillinen luku). Noppia tuli heittää niin monta kertaa, että annetut ehdot täyttyivät.

Kymppi-pulma (Pehkonen 1998, 20 - 21) Kymppi-pulman tarkoituksena on varmentaa päässälaskua pienillä kokonaisluvuilla sekä harjoitella systemaattista kokeilua. Siten oppilaiden pitkäjänteinen työskentely ongelmien parissa myös harjaantuu. Kymppipulmassa oli neljä kartongista tehtyä noppaa, jossa jokaisella sivulla pisteitä yhdestä neljään. Tarkoituksena oli rakentaa nopista ensin torni, jossa yhdellä sivulla noppien silmäluku on kymmenen. Tämän jälkeen tehtävänä on saada tornin kahdelle sivulle, sitten kolmelle ja lopuksi kaikille neljälle sivulle yhtä aikaa noppien silmäluvuksi kymmenen.

Onnenluku (Putkonen ym. 1992, 76) Onnenluku-tehtävissä tavoittena oli säännönmukaisuuden löytäminen ja arviointi. Tehtävissä valittiin jokin onnenluku, jolle suoritettiin tietyt ennalta määrätyt laskutoimenpiteet. Lopussa huomattiin, että valittiinpa mikä luku tahansa, tulokseksi tuli aina sama luku. Tehtävissä harjoiteltiin myös yleisen todistamisen alkeita käyttämällä symbolina sydäntä, jonka saattoi korvata millä luvulla tahansa ja tulos piti paikkansa.

Sammakot (Pehkonen 1998, 26 - 27) Sammakko-pelissä tavoitteena oli ongelmanratkaisukyvyn ja pitkäjännitteisyyden kehittäminen kokeilemisen avulla. Pelin ideana oli saada viisiruudukkoisen pelilaudan molemmissa päissä olevat kaksi nappulaa vaihtamaan paikkaa siten, että kerrallaan siirretään vain yhtä nappulaa tiettyjen sääntöjen mukaan. Peliä vaikeutettiin lisäämällä ruutujen ja nappuloiden määrää. Jälkeenpäin mietittiin, mikä säännönmukaisuus pelissä esiintyi ja laskettiin tarvittavien siirtojen määrät.

(jatkuu)

(Liite jatkuu)

Matemaattinen temppu tikuilla (Putkonen ym. 1992, 74) Tehtävän tavoitteena on säännönmukaisuuden löytäminen ja arviointi sekä todistamistekniikan harjoitteleminen. Alussa tikkuja on aina kaksikymmentä, joille tehdään tietyt laskutoimenpiteet. Vaikka laskuissa vaihdeltiin muuttujan arvoa, jäljelle jäi aina yhdeksän tikkua. Oppilaat pyrkivät selvittämään, mistä sama lopputulos johtuu.

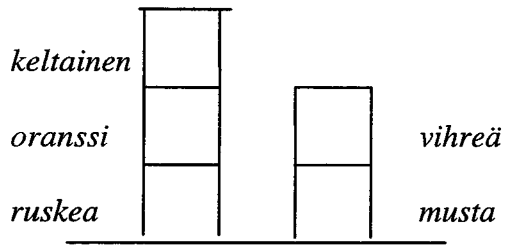
Laskumonisteita. Laskumonisteita varattiin välipaloiksi pohdintatehtävien lomaan, koska oppilaat halusivat laskea kerhossa vaikeita laskuja. Monisteet olivat pääasiassa kertotaulutehtäviä.

Sanalliset tehtävät. Sanalliset tehtävät olivat tutkijoiden itsensä keksimiä ja niillä pyrittiin kiinnittämään oppilaiden huomio tehtävän kannalta olennaisiin ja ratkaisuun johtaviin tietoihin. Tehtävät oli tarkoitettu Rajaa-vaiheen harjoittelemiseen. Koska kaikki tutkittavista eivät vielä osanneet lukea, luettiin tehtävät ääneen ja pohdittiin yhdessä sen jälkeen, mitä tehtävässä kysyttiin, mitä tietoja tarvitaan ja mikä on tehtävässä epäolennaista tietoa ratkaisun kannalta.

Liite 11: Alku- ja loppumittaus

1. Palikkatehtävä (Malinen 1992, 26)

Oppilaan eteen asetetaan viisi eri väristä kuutiota kuvan mukaisesti käyttäen samalla sanontoja "on kosketuksessa", "on alapuolella" ja "on päällä".



A) Mitkä palikat ovat kosketuksissa keskenään? Sano kaikki parit.

B) Mitkä ovat keltaisen alapuolella?

C) Mitkä ovat kosketuksissa oranssiin ja samalla oranssin alapuolella?

D) Onko totta: "Vihreä on mustan alapuolella"? Mikä on totta tässä tilanteessa?

E) Onko totta: "On olemassa sellainen palikka, joka on vihreän päällä"?

F) Aseta palikat niin, että keltainen on vihreän ja mustan päällä.

2. Paritehtävä (Malinen 1980, 95)

Suluissa on loppumittauksessa esitetyt asiat.

A) Tiedätkö, mitä ovat parilliset ja parittomat luvut?

B) Sano parillisia lukuja. Sano parittomia lukuja.

C) Onko 28 (36) parillinen? Entä 28+1 (36+1)? Entä 28-1? Entä 28+8 (36+12)? Miksi?

D) Onko 37+1 (45+1) parillinen? Entä 37-2? Entä 37+5 (45+17)? Miksi?

Vain loppumittauksessa:

E) Milloin kahden luvun summa on parillinen?

Annetaan oppilaalle lappu, jossa on luku 256 789 107 sekä summa 128 973 +

645825.

F) Onko tämä luku (256 789 107) parillinen? Miksi?

G) Onko tämä summa parillinen? Miksi?

3. Pistetehtävä (Malinen 1980, 94)

Suluissa on loppumittauksessa esitetyt luvut.

Paperilla esitetään 3 x 4 (5 x 3) pistejoukko.

A) Kuinka monta pistettä? Miten laskit?

B) Kuinka monta neljän (kolmen) pisteen joukkoa siinä on? Miten sait tuloksen?

Otetaan tilalle paperille piirretty 4 x 5 pistejoukko (vain alkumittauksessa).

C) Jaa tämä viiteen yhtä suureen osaan. Kuinka monta pistettä on jokaisessa osajoukossa?

Paperilla esitetään 8 x 6 (8 x 7) sekä 6 x 3 (7 x 3) pistejoukot rinnakkain.

D) Kuinka monta pistettä tarvitaan tuohon pienempään kuvioon lisää, jotta saadaan yhtä monta pistettä kuin isommassa kuviossa?

E) Kuinka ajattelit?

4. Voittolukutehtävä (Malinen 1992, 26 – 27)

Tutkija antaa oppilaalle kolme lappua, joissa on numerot 6, 8 ja 11. Hän selostaa seuraavasti:

Luokassa on 20 oppilasta ja kolmen voiton arvonnassa on mukana luvut 1 – 20. Sinulle on kerrottu nämä voittoluvut ja kukaan toinen ei tiedä niitä. Minä yritän arvata voittolukuja ja sinä sanot, onko arvaukseni "totta" vai "ei totta". Jos tätä ei voi sanoa varmasti, niin sano "ei voi sanoa varmasti". Nyt sanon arvaukseni.

A) Kaikki voittoluvut ovat pienempiä kuin 12.

B) Yksikään voittoluku ei ole alle 10:n.

C) Kaikki luvut ovat voittolukuja, jos ne ovat parillisia ja suurempia kuin 10.

D) On olemassa pariton voittoluku.

Liite 12: Lasten alkuhaastattelun runko

Testien tarkasteleminen

Minkälainen testi oli?

Osasitko mielestäsi hyvin laskea?

Mikä oli helpoin tehtävä? Miksi?

Mikä oli vaikein tehtävä? Miksi?

Miten ajattelit näitä tehtäviä?

a) Ensimmäisestä valintatestistä 1. ja 2. tehtävä

b) Toisesta valintatestistä 4. ja 6. tehtävä

c) Vaativat vähennyslaskut

d) Kertolaskut

Matematiikan oppikirja

Minkä verran olet laskenut tehtäviä?

Minkälaiset tehtävät on mukavia? Miksi?

Mitkä tehtävät ovat vaikeita? Miksi?

Kokemukset matematiikasta

Oliko eskarissa matematiikkaa? Jos oli, niin minkälaista se oli?

Minkälaista matematiikka on koulussa?

Mitä sinun mielestäsi on matematiikka?

Mistä johtuu, että osaat hyvin matematiikkaa?

Liite 13: Lasten loppuhaastattelun runko

Matikka-kerho

Mitä mieltä olit Matikka-kerhosta?

Mitkä oli mielestäsi mukavia tehtäviä? Miksi?

Mitkä oli ikäviä tehtäviä? Miksi?

Mitä opit Matikka-kerhossa?

RATKO-ongelmanratkaisumenetelmä

Muistatko, mikä RATKO on?

Muistatko RATKO:n vaiheet ja mitä niissä tehtiin?

Mihin RATKO:a tarvitaan?

Matematiikka

Mitä taitoja tarvitaan, että on hyvä matematiikassa?

Mitä matematiikka on?

Liite 14: Vanhempien haastattelurunko 2

1. Palaute kerhosta

Millainen olo teillä on kerhon jälkeen?
Mitä juttelitte lapsenne kanssa kerhosta?
Tiedättekö, mitä tehtäviä teimme?
Mitkä tehtävät näyttivät olevan lapsen mielestä vaikeita ja mitkä helppoja?
Puhuiko lapsi teille RATKO:sta? Mitä tiedätte siitä?

2. Kerhon vaikutus

Olivatko kerhopäivät erilaisia kuin tavalliset koulupäivät?
Oliko lapsi väsyneempi kerhopäivinä?
Millä mielellä lapsi odotti seuraavaa kerhoa?
Oppiko lapsenne jotain uutta kerhossa?
Muuttuiko lapsen suhde matematiikkaan?

3. Nimien käyttö tutkimuksen raportoinnissa