Tiheyspistelauseita

Petteri Salovaara

Pro Gradu tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2006

Sisältö

JOHDANTO

Tiheyspistelauseen mukaan käytetyn mitan suhteen mitallisen joukon A tiheys on 1 melkein kaikilla pisteillä x, jotka kuuluvat joukkoon A. Vastaavasti joukon A komplementin tiheys on 0 melkein kaikilla pisteillä x, jotka kuuluvat joukon A komplementtiin. Usein mittana käytetään Lebesguen mittaa, mutta tiheyspistelauseet pätevät myös yleisemmille mitoille. Mitan derivoinnilla toisen mitan suhteen on suora yhteys joukkojen tiheyksiin. Tässä työssä esiteään tiheyspistelause Radon-mitoille ja tutustutaan erityisesti Hausdorffin mitan ja pakkausmitan avulla määriteltyihin tiheyksiin ja niihin liittyviin tuloksiin. Vastaavasti, kuten joukoille, voidaan myös mitoille määritellä tiheys. Mittojen tiheyttä hyödynnetään pakkausmitan yhteydessä.Tekstin lukijalta oletetaan, että mitta- ja integraaliteorian perusteet ovat hyvin hallussa.

Ensimmäisessä luvussa esitetään perusmääritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan todistettaessa tiheyksiin liittyviä tuloksia. Aluksi määritellään Radon-mitta ja mitan rajoittuma. Lisäksi esitetään monessa muussa yhteydessäkin hyödylliset ns. 5r-peitelause ja Vitalin peitelause Radon mitoille. Ensimmäisessä luvussa määritellään myös s-ulotteinen Hausdorffin mitta ja s-ulotteinen pakkausmitta. Luvun lopuksi määritellään Minkowskin dimensio, Hausdorffin dimensio ja pakkausdimensio. Tässä kirjoitelmassa dimensioita tarvitaan mm. esitettäessä tulos, milloin joukon yläpakkausdimensio ja Hausdorffin dimensio ovat yhtäsuuret, kun tiedetään, että sen alatiheys on positiivinen pakkausmitan suhteen melkein kaikilla pisteillä, jotka kuuluvat kyseiseen joukkoon A.

Toisessa luvussa määritellään mitan ylä- ja aladerivaatat toisen mitan suhteen. Tärkeimpänä tuloksena esitetään lause, joka antaa perusteet mitan derivoinnille toisen mitan suhteen. Tämän lauseen seurauksena saadaan tiheyspistelause joukoille. Lisäksi seurauksena saadaan lause integraalien differentioinnille.

Kolmannessa luvussa pyritään todistamaan tiheyspistelause s-ulotteiselle Hausdorffin mitalle $\mathbb{R}^n$:ssä. Luvussa määritellään ala- ja ylätiheydet joukolle Hausdorffin mitan avulla. Lisäksi esitetään lause, jonka avulla voidaan tutkia joukkojen tiheyksiä Hausdorffin mitan avulla.

Neljännessä luvussa määritellään ala- ja ylätiheydet yleisille mitoille. Mittojen tiheyttä hyödynnetään erityisesti tutkittaessa pakkausmitan tiheyttä. Lisäksi esitetään tuloksia, joissa käytetään hyväksi tietoa tutkittavan joukon tiheydestä.

MERKINTÖJÄ

$\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko
$\mathcal{L}^n$ n-ulotteinen Lebesguen mitta $\mathbb{R}^n$:ssä
$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$ $\mathbb{R}^n$:n avoin pallo
$\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq r\}$ $\mathbb{R}^n$:n suljettu pallo
$\mathrm{diam}A = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$, joukon A halkaisija
$\mathbb{R}^n$:ssä $d(x,y) = |x-y|$
χ_A joukon A karakteristinen funktio
$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ joukon X kaikkien osajoukkojen kokoelma, X:n potenssijoukko

Tekstissä esiintyvä mitta μ on ulkomitta, ellei toisin mainita. Toisin sanoen μ on mitta X:ssä, jos

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(2) jos $A \subset B$, niin $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonisuus),
(3) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (subadditiivisuus).

1. LUKU: Esitietoja

Ensimmäisessä luvussa esitellään jatkossa tarvittavia perusmääritelmiä ja hyödyllisiä lauseita. Aluksi määritellään Radon-mitta ja mitan rajoittuma. Peitelauseista annetaan 5r-peitelause ja Vitalin peitelause, jotka ovat hyödyllisiä lauseita myös monessa muussa yhteydessä. Näitä lauseita ei todisteta tässä työssä, vaan todistuksiin esitetään vain kirjallisuusviitteet. Luvussa määritellään myös Hausdorffin mitta ja pakkausmitta ja näihin liittyen Hausdorffin dimensio ja pakkausdimensio. Lisäksi määritellään Minkowskin dimensio ja esitetään lyhyesti myös eri dimensioiden väliset suhteet.

1.1. **Määritelmä.** Olkoon μ mitta X:ssä.

(1) Mitta μ on Borel-mitta, jos kaikki Borel-joukot ovat μ-mitallisia.
(2) Mitta μ on Borel-säännöllinen, jos se on Borel-mitta ja jos jokaiselle $A \subset X$ on Borel-joukko $B \subset X$ siten, että $A \subset B$ ja $\mu(A) = \mu(B)$.

1.2. **Määritelmä.** Mitta μ on Radon-mitta, jos se on Borel-mitta ja

(1) $\mu(K) < \infty$ jokaiselle kompaktille $K \subset X$
(2) $\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V,\ \text{K kompakti}\}$ avoimille joukoille $V \subset X$
(3) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ \text{U avoin}\}$, $A \subset X$.

1.3. **Määritelmä.** $\mathbb{R}^n$:ssä määritelty mitta μ on äärellinen, jos $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Mitta μ on lokaalisti äärellinen, jos kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ on olemassa $r > 0$ siten, että $\mu(B(x,r)) < \infty$.

1.4. **Määritelmä.** Mitan μ rajoittuma joukkoon $A \subset X$, $\mu\lfloor_A$,määritellään

$$\mu\lfloor_A(B) = \mu(A \cap B) \text{ kaikilla } B \subset X.$$

1.5. **Lemma.** *Olkoot μ mitta ja joukot $A, B \subset X$ siten, että $A \subset B$, B μ-mitallinen ja $\mu(A) = \mu(B) < \infty$. Tällöin $\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$ kaikilla μ-mitallisilla joukoilla $C \subset X$.*

Todistus.
Olkoon C μ-mitallinen joukko, jolloin
$\mu(A) = \mu(C \cap A) + \mu(A \setminus C) = \mu(B) = \mu(C \cap B) + \mu(B \setminus C)$.

Nyt $B \setminus C = (A \setminus C) \cup ((B \setminus A) \setminus C)$ ja $A \setminus C$ ja $(B \setminus A) \setminus C$ ovat erillisiä, joten

$$\mu(B \setminus C) = \mu(A \setminus C) + \mu((B \setminus A) \setminus C) = \mu(A \setminus C),$$

sillä koska $\mu(A) = \mu(B) < \infty$, niin $0 = \mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A)$. Tällöin siis $\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$. $\square$

1.6. **Lause.** *Olkoon $A \subset X$.*

(1) $\mu\lfloor_A$ *on mitta.*
(2) *Jos joukko B on μ-mitallinen, niin silloin B on myös $\mu\lfloor_A$- mitallinen.*
(3) *Jos joukko A on μ-mitallinen, $\mu(A) < \infty$ ja μ on Borel-säännöllinen, niin $\mu\lfloor_A$ on Borel-säännöllinen.*

Todistus.
Väite (1):
Selvästi $\mu\lfloor_A(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

Olkoot $B \subset C \subset X$, jolloin $A \cap B \subset A \cap C$.
Nyt $\mu\lfloor_A(B) = \mu(A \cap B) \leq \mu(A \cap C) = \mu\lfloor_A(C)$.

Olkoot $B_1, B_2, \ldots \subset X$.

$$\mu\lfloor_A(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap B_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\lfloor_A(B_i)$$

Siis $\mu\lfloor_A$ on mitta.

Väite (2):
Olkoon B μ-mitallinen. Tällöin kaikilla $E \subset X$

$$\begin{aligned}\mu\lfloor_A(E \setminus B) + \mu\lfloor_A(E \cap B) &= \mu(A \cap (E \setminus B)) + \mu(A \cap (E \cap B)) \\ &= \mu((A \cap E) \setminus B) + \mu((A \cap E) \cap B) \\ &= \mu(A \cap E) = \mu\lfloor_A(E).\end{aligned}$$

Väite (3):
Olkoon B Borel-joukko siten, että $A \subset B$ ja $\mu(A) = \mu(B)$. Siten $\mu(B \setminus A) = 0$. Olkoon $C \subset X$ ja D Borel-joukko siten, että $B \cap C \subset D$ ja $\mu(B \cap C) = \mu(D)$. Tällöin $C \subset D \cup (X \setminus B) =: E$ ja

$$\begin{aligned}\mu\lfloor_A(E) &\leq \mu(B \cap E) = \mu(B \cap D) \leq \mu(D) \\ &= \mu(B \cap C) = \mu(A \cap C) = \mu\lfloor_A(C).\end{aligned}$$

Täten $\mu\lfloor_A(E) = \mu\lfloor_A(C)$, joten $\mu\lfloor_A$ on Borel-säännöllinen. $\square$

Seuraavaksi esitellään kaksi peitelausetta, ns. 5r-peitelause ja Vitalin peitelause Radon-mitoille. Peitelauseet ovat hyvin tärkeitä työkaluja mittateoriassa ja yleensä reaalianalyysissä. Peitelauseiden avulla annettu $\mathbb{R}^n$:n joukko voidaan peittää tietyntyyppisillä erillisillä joukoilla, yleensä suljetuilla palloilla. 5r-peitelause soveltuu suureen joukkoon peitteitä, kun taas Vitalin peitelauseessa peitteiden vaatimukset rajoittavat sovellettavien peitteiden määrää.

Kyseisiä peitelauseita ei tässä yhteydessä todisteta, vaan todistuksiin annetaan vain kirjallisuusviitteet.

1.7. **Lause** (5r- peitelause). *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $\mathcal{B} = \{B(x, r_x) : x \in A\}$ kokoelma $\mathbb{R}^n$:n suljettuja palloja siten, että $\sup\{diam(B) : B \in \mathcal{B}\} < \infty$. Tällöin löydetään $x_1, x_2, ... \in A$, joita voi olla numeroituvan monta tai äärellinen määrä, siten, että pallot $B(x_i, r_i)$ ovat erillisiä ja*

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B(x, r_x) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 5r_i).$$

Todistus.
Katso esimerkiksi [4] lause 2.1. □

1.8. **Seuraus** (5r-peitelause, yleinen muoto). *Olkoon $\mathcal{B}$ kokoelma $\mathbb{R}^n$:n suljettuja palloja siten, että $\sup\{diam(B) : B \in \mathcal{B}\} < \infty$. Tällöin on olemassa erilliset pallot $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$ siten, että*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B(x, r_x) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 5r_i).$$

Todistus. Tämän todistuksen idea löytyy esimerkiksi [4] lauseen 2.1 todistuksesta. □

1.9. **Lause** (Vitalin peitelause Radon-mitoille). *Olkoot μ Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä, $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathcal{B}$ perhe suljettuja palloja siten, että $\inf\{r : B(x, r) \in \mathcal{B}\} = 0$ kaikille $x \in A$. Tällöin löydetään erilliset pallot $B_i \in \mathcal{B}$ siten, että*

$$\mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0.$$

Todistus.
Katso esimerkiksi [4] lause 2.8. □

1.10. **Lause.**
Olkoot μ Borel-säännöllinen mitta X:ssä, A μ-mitallinen joukko ja $\epsilon > 0$.

(1) *Jos $\mu(A) < \infty$, niin on olemassa suljettu joukko $C \subset A$ siten, että $\mu(A \setminus C) < \epsilon$.*
(2) *Jos on olemassa avoimet joukot $V_1, V_2, \ldots$ siten, että $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ ja $\mu(V_i) < \infty$ kaikilla i, niin on olemassa avoin V siten, että $A \subset V$ ja $\mu(V \setminus A) < \epsilon$.*

Todistus.
Katso esimerkiksi [4] lause 1.10. □

1.11. *Huomautus.*
Lauseen 1.10 kohdassa (1) joukko C voidaan suoraan valita kompaktiksi, kun $X = \mathbb{R}^n$.

Carathéodoryn konstruktion avulla saadaan luotua paljon erilaisia mittoja. Esimerkiksi Lebesguen mitta saadaan Carathéodoryn konstruktiosta. Seuraavaksi esitetään Carathéodoryn konstruktio ja sen avulla määritellään Hausdorffin mitta.

1.12. **Carathéodoryn konstruktio.**
Olkoot X metrinen avaruus, $\mathcal{F}$ kokoelma X:n osajoukkoja ja funktio $\zeta : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$. Oletetaan, että

(1) kaikilla $\delta > 0$ on olemassa $E_1, E_2 \ldots \in \mathcal{F}$ siten, että diam$E_i \leq \delta$ ja $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.
(2) kaikilla $\delta > 0$ on olemassa $E \in \mathcal{F}$ siten, että diam$E \leq \delta$ ja $\zeta(E) \leq \delta$.

Määritellään kaikilla $0 < \delta \leq \infty$ ja $A \subset X$

$$\psi_\delta(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \zeta(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ \mathrm{diam} E_i \leq \delta, E_i \in \mathcal{F}\}$$

ja

$$\psi(A) = \lim_{\delta \to 0} \psi_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \psi_\delta(A).$$

1.13. **Lause.**
Carathéodoryn kostruktiossa saatu

(1) ψ_δ *on mitta,*
(2) ψ *on Borel-mitta ja*
(3) *jos $\mathcal{F}$:n alkiot ovat Borel-joukkoja, niin ψ on Borel-säännöllinen.*

Todistus.
Katso esimerkiksi [4] lause 4.1. □

1.14. **Hausdorffin mitta.**
Olkoon X separoituva metrinen avaruus ja $0 \leq s < \infty$. Valitaan Carathéodoryn konstruktiossa $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$ ja $\zeta(E) = (\mathrm{diam} E)^s$, missä $0^s = 1$ ja $\mathrm{diam}(\emptyset)^s = 0$. Tällöin $\psi = \mathcal{H}^s$ on s-ulotteinen Hausdorffin mitta. Tätä merkitään

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \mathrm{diam}(E_i) \leq \delta, E_i \in \mathcal{P}(X)\}$$

ja

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

1.15. *Huomautus.*

(1) $\mathcal{H}^0$ on lukumäärämitta.
(2) Kun $X = \mathbb{R}^n$, niin $\mathcal{H}^n = 2^n \alpha(n)^{-1} \mathcal{L}^n$, missä $\alpha(n) = \mathcal{L}^n(B^n(0,1))$ ja $\mathcal{L}^n$ n-ulotteinen Lebesguen mitta. Täten pallon $B(x,r)$ Hausdorffin mitta on $\mathcal{H}^n(B(x,r)) = (2r)^n$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n, 0 < r < \infty$.
(3) $\mathcal{H}^s$on Borel-säännöllinen lauseen 1.13 (3) nojalla, sillä voidaan valita $\mathcal{F} = \{E \subset X : E \text{ suljettu}\}$ (katso [4] lause 4.4(1)).

Pakkausmitta on eräänlainen Hausdorffin mitan muunnos. Merkittävin ero Hausdorffin mittaan on, että pakkausmitan tapauksessa tutkittavaa joukkoa ei peitetä joukoilla, vaan joukon kokoa tutkitaan ”pakkaamalla” sen sisään palloja.

1.16. **Määritelmä.** Olkoon $0 \le s < \infty$. Asetetaan kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $0 < \delta < \infty$

$$P^s_\delta(A) = \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} B_i)^s : B_i = B(x_i, r_i) \text{ kokoelma erillisiä suljettuja palloja}$$
$$\text{siten, että } x_i \in A \text{ ja } \mathrm{diam} B_i \le \delta\}$$

ja

$$P^s(A) = \lim_{\delta \to 0} P^s_\delta(A) = \inf_{\delta > 0} P^s_\delta(A).$$

Funktiota P^s kutsutaan pakkausesimitaksi.

1.17. *Huomautus.*
P^s on monotoninen eli $P^s(A) \le P^s(B)$, jos $A \subset B$. Lisäksi $P^s(\emptyset) = 0$. Kuitenkaan P^s ei ole mitta, sillä P^s ei ole subadditiivinen.

1.18. **Määritelmä.** Pakkausmitta $\mathcal{P}^s$ määritellään kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{P}^s(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} P^s(A_i) : A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}.$$

1.19. **Lause.**
Pakkausmitta $\mathcal{P}^s$ on Borel-säännöllinen mitta.

Todistus.
Selvästi $\mathcal{P}^s(\emptyset) = 0$ ja $\mathcal{P}^s(A) \le \mathcal{P}^s(B)$, jos $A \subset B$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathcal{P}^s$ on subadditiivinen. Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ ja $A_{i,j}$ siten, että $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} P^s(A_{i,j}) \le \mathcal{P}^s(A_i) + \epsilon/2^i$. Tällöin

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}.$$

Siten

$$\mathcal{P}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P^s(A_{i,j}) \le \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}^s(A_i).$$

Väite seuraa antamalla $\epsilon \to 0$. Siis $\mathcal{P}^s$ on mitta.

Osoitetaan vielä, että $\mathcal{P}^s$ on Borel-säännöllinen. Huomataan aluksi, että aina $P^s_\delta(\overline{A}) = P^s_\delta(A)$, joten $\mathcal{P}^s(\overline{A}) = \mathcal{P}^s(A)$. Täten

$$\mathcal{P}^s(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} P^s(F_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, F_i \text{ suljettu}\}.$$

Valitaan kaikilla i suljettu $A_{i,j}$ siten, että $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$, $\mathrm{diam} A_{i,j} \le 1/i$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} P^s(A_{i,j}) \le \mathcal{P}^s(A) + 1/i$. Tällöin

$$A \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} =: B.$$

Nyt B on Borel-joukko siten, että $A \subset B$ ja siis $\mathcal{P}^s(A) \le \mathcal{P}^s(B)$. Lisäksi

$$\mathcal{P}^s(B) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}^s(A_{i,j}) \le \sum_{j=1}^{\infty} P^s(A_{i,j}) \le \mathcal{P}^s(A) + 1/i.$$

Kun $i \to \infty$ saadaan $\mathcal{P}^s(B) \leq \mathcal{P}^s(A)$. Siis $\mathcal{P}^s(B) = \mathcal{P}^s(A)$. □

Dimensioista

Määritellään seuraavaksi Hausdorffin dimensio, Minkowskin dimensio ja pakkausdimensio.

1.20. **Lause.** *Olkoot* $0 \leq s < t < \infty$ *ja* $A \subset X$. *Tällöin*

(1) *jos* $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, *niin* $\mathcal{H}^t(A) = 0$,
(2) *jos* $\mathcal{H}^t(A) > 0$, *niin* $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Todistus.
Olkoot $\delta > 0$ ja $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ siten, että $\mathrm{diam} E_i \leq \delta$ ja $\sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} E_i)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1$. Tällöin

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} E_i)^t = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} E_i)^{t-s+s} \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} E_i)^s \leq \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s_\delta(A) + 1).$$

Kun $\delta \to 0$, niin saadaan väite (1).

Kohta (2) seuraa suoraan kohdasta (1) antiteesillä, mutta todistetaan kohta (2) tässä erikseen samaan tapaan kuin kohta (1).

Olkoon $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ siten, että $\mathrm{diam} E_i \leq \delta$. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} E_i)^s = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} E_i)^{t-(t-s)} \geq \delta^{s-t} \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} E_i)^t.$$

Ottamalla epäyhtälöstä inf saadaan

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}^t_\delta(A).$$

Kun $\delta \to 0$, niin saadaan väite (2), sillä tällöin $\delta^{s-t} \to \infty$ ja oletuksen mukaan $\mathcal{H}^t_\delta(A) > 0$, joten $\mathcal{H}^s(A) \geq \infty$. □

Edellisen lauseen havainnon perusteella voimme määritellä joukon Hausdorffin dimension.

1.21. **Määritelmä.** Joukon $A \subset X$ Hausdorffin dimensio on

$$\begin{aligned} \dim_H A = & \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \\ = & \inf\{t : \mathcal{H}^t(A) < \infty\} = \inf\{t : \mathcal{H}^t(A) = 0\}. \end{aligned}$$

Määritellään seuraavaksi joukon Minkowskin ylä-ja aladimensiot.

1.22. **Määritelmä.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja epätyhjä ja $0 < \epsilon < \infty$. Määritellään luku

$$N(A, \epsilon) = \min\{k : A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \epsilon), x_i \in \mathbb{R}^n\}$$

eli $N(A,\epsilon)$ on pienin määrä ϵ-säteisiä palloja, jotka tarvitaan peittämään joukko A.

Joukon A Minkowskin ylä- ja aladimensiot ovat

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_M A &= \inf\{s : \limsup_{\epsilon\to 0} N(A,\epsilon)\epsilon^s = 0\}\\ &= \inf\{s : \limsup_{\epsilon\to 0} N(A,\epsilon)\epsilon^s < \infty\}\\ &= \sup\{s : \limsup_{\epsilon\to 0} N(A,\epsilon)\epsilon^s = \infty\}\\ &= \sup\{s : \limsup_{\epsilon\to 0} N(A,\epsilon)\epsilon^s > 0\}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_M A &= \inf\{s : \liminf_{\epsilon\to 0} N(A,\epsilon)\epsilon^s = 0\}\\ &= \inf\{s : \liminf_{\epsilon\to 0} N(A,\epsilon)\epsilon^s < \infty\}\\ &= \sup\{s : \liminf_{\epsilon\to 0} N(A,\epsilon)\epsilon^s = \infty\}\\ &= \sup\{s : \liminf_{\epsilon\to 0} N(A,\epsilon)\epsilon^s > 0\}.\end{aligned}$$

Jos $\overline{\dim}_M A = \underline{\dim}_M A = s$, niin joukon A Minkowskin dimensio on $\dim_M A = s$.

1.23. *Huomautus.*

(1) Suoraan määritelmistä seuraa, että

$$\dim_H A \leq \underline{\dim}_M A \leq \overline{\dim}_M A.$$

(2) Edellisen kanssa ekvivalentit määritelmät Minkowskin dimensioille ovat

$$\overline{\dim}_M A = \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\log N(A,\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

ja

$$\underline{\dim}_M A = \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{\log N(A,\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}.$$

Lisäksi, jos luvussa $N(A,\epsilon)$ peittävinä joukkoina käytetään ϵ-halkaisijaisia kuutioita, saadaan sama dimensio kuin Minkowskin dimensioiden määritelmistä. Näitä dimensioita kutsutaan vastaavasti ylä- ja alalaatikkodimensioksi. (katso [1] s.41-42)

Seuraavaa lausetta tarvitaan myöhemmin tiheyksien yhteydessä.

1.24. **Lause.** *Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja epätyhjä. Oletetaan, että μ on Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä ja a, b, r_0 ja s ovat positiivisia lukuja siten, että $0 < \mu(A) \leq \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ ja*

$$0 < ar^s \leq \mu(B(x,r)) \leq br^s \leq \infty \text{ kaikille } x \in A, 0 < r \leq r_0.$$

Tällöin $\dim_H A = \underline{\dim}_M A = \overline{\dim}_M A = s$.

Todistus.
Peitetään A joukoilla E_i siten, että $0 < \mathrm{diam} E_i \leq r_0$ ja $A \cap E_i \neq \emptyset$. Tällöin voidaan valita pisteet $x_i \in A \cap E_i$, jolloin A voidaan peittää palloilla $B(x_i, \mathrm{diam} E_i)$. Täten

$$b \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} E_i)^s \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B(x_i, \mathrm{diam} E_i)) \geq \mu(A) > 0.$$

Tästä saadaan $\mathcal{H}^s(A) \geq \mu(A)/b$, joten

$$s \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_M A \leq \overline{\dim}_M A.$$

Toisaalta, olkoon $0 < \epsilon \leq r_0$. Merkitään
$k = P(A, \epsilon) = \max\{k : \text{on olemassa erilliset pallot} B(x_i, \epsilon),\ i = 1, \ldots, k,\ x_i \in A\}$.
Valitaan erilliset pallot $B(x_i, \epsilon)$, $x_i \in A$ ja $i = 1, \ldots, k$. Tällöin

$$a P(A, \epsilon) \epsilon^s \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(B(x_i, \epsilon)) \leq \mu(\mathbb{R}^n) < \infty,$$

mistä seuraa, että $\overline{\dim}_M A \leq s$, sillä luvulle $P(A, \epsilon)$, pätee
$N(A, 2\epsilon) \leq P(A, \epsilon) \leq N(A, \epsilon/2)$ (katso [4] s.78).

Siis $s \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_M A \leq \overline{\dim}_M A \leq s$, joten
$\dim_H A = \underline{\dim}_M A = \overline{\dim}_M A = s$. □

1.25. **Määritelmä.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Muokatut Minkowskin ylä- ja aladimensiot, joita myös kutsutaan ylä- ja alapakkausdimensioiksi, määritellään seuraavasti:

$$\overline{\dim}_p A = \inf\{\sup_i \overline{\dim}_M A_i : A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \text{ rajoitettu}\}$$

ja

$$\underline{\dim}_p A = \inf\{\sup_i \underline{\dim}_M A_i : A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \text{ rajoitettu}\}.$$

1.26. *Huomautus.* Selvästi

$$\dim_H A \leq \underline{\dim}_p A \leq \underline{\dim}_M A$$

ja

$$\underline{\dim}_p A \leq \overline{\dim}_p A \leq \overline{\dim}_M A.$$

1.27. **Lause.** *Olkoot $0 \leq s < t < \infty$ ja $A \subset X$. Tällöin*

(1) *jos $\mathcal{P}^s(A) < \infty$, niin $\mathcal{P}^t(A) = 0$,*
(2) *jos $\mathcal{P}^t(A) > 0$, niin $\mathcal{P}^s(A) = \infty$.*

Todistus.
Samalla tavalla kuten lause 1.20. □

Edellisen lauseen perusteella pakkausmitan avulla voidaan määritellä joukon dimensio samalla tavalla kuin Hausdorffin mitan yhteydessä.

1.28. **Määritelmä.** Pakkausmitan avulla voidaan määritellä joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ pakkausdimensio

$$\begin{aligned}\dim_p A =& \inf\{s : \mathcal{P}^s(A) = 0\} = \inf\{s : \mathcal{P}^s(A) < \infty\} \\ =& \sup\{s : \mathcal{P}^s(A) > 0\} = \sup\{s : \mathcal{P}^s(A) = \infty\}.\end{aligned}$$

1.29. *Huomautus.*
Kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $\overline{\dim}_p A = \dim_p A$. Todistus löytyy esimerkiksi [4] lause 5.11.

1.30. **Lause.** *Kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{P}^s(A)$.*

Todistus.
Riittää osoittaa, että $\mathcal{H}^s(A) \leq P^s(A)$, sillä jos tämä pätee ja $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ja $\sum_{i=1}^{\infty} P^s(A_i) \leq \mathcal{P}^s(A) + \epsilon$, niin

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P^s(A_i) \leq \mathcal{P}^s(A) + \epsilon.$$

Tällöin kun $\epsilon \to 0$, niin $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{P}^s(A)$.

Voidaan olettaa, että $P^s(A) < \infty$. Olkoon $\epsilon > 0$ ja valitaan $\delta > 0$ siten, että $P^s_\delta(A) < P^s(A) + \epsilon$. Olkoot $B_1, B_2, \ldots$ erillisiä suljettuja palloja, joiden keskipisteet ovat A: ssa, $\mathrm{diam} B_i < \delta$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} B_i)^s \leq P^s_\delta(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} B_i)^s + \epsilon. \text{ (*)}$$

Koska $P^s_\delta(A) < \infty$, on olemassa k, jolle

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} (\mathrm{diam} B_i)^s < \epsilon. \text{ (**)}$$

Sovelletaan 5r-peitelausetta (lause 1.7) kokoelmaan suljettuja palloja $B(x, r)$, joille pätee $x \in A$, $10r \leq \delta$ ja

$$B(x, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i.$$

Tällöin löydetään erilliset suljetut pallot $B_1', B_2', \ldots$, joille $\mathrm{diam} B_i' \leq \delta/5$, keskipisteet ovat A: ssa siten, että

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} 5B_j' \text{ (***)}$$

ja yhdistetty kokoelma palloja $\{B_i : i = 1, \ldots, k\} \cup \{B_j' : j = 1, 2, \ldots\}$ on erillinen.

Siten (*):stä ja (**):stä seuraa

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{diam} B_i)^s + \sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_j^{'})^s \leq P_\delta^s(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_i)^s + \epsilon \\
&= \sum_{i=1}^{k}(\mathrm{diam} B_i)^s + \sum_{i=k+1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_i)^s + \epsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}(\mathrm{diam} B_i)^s + 2\epsilon.
\end{aligned}
$$

Siten

$$
\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_j^{'})^s \leq 2\epsilon.
$$

(***):stä ja edellä lasketusta seuraa

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^s(A) &\leq \sum_{i=1}^{k}(\mathrm{diam} B_i)^s + \sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam} 5B_j^{'})^s = \sum_{i=1}^{k}(\mathrm{diam} B_i)^s + 5^s\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_j^{'})^s \\
&\leq P_\delta^s(A) + 5^s 2\epsilon \\
&< P^s(A) + (1+5^s 2)\epsilon.
\end{aligned}
$$

Nyt antamalla $\delta \to 0$ ja $\epsilon \to 0$ saamme $\mathcal{H}^s(A) \leq P^s(A)$. □

1.31. **Seuraus.** *Kaikilla* $A \subset \mathbb{R}^n$ $\dim_H A \leq \dim_p A$.

1.32. *Huomautus.*
Lauseessa 1.29 voi olla $\mathcal{H}^s(A) < \mathcal{P}^s(A)$. On myös mahdollista, että $\mathcal{H}^s(A) = 0$ ja $\mathcal{P}^s(A) = \infty$. Itse asiassa tapaus $0 < \mathcal{H}^s(A) = \mathcal{P}^s(A) < \infty$ on harvinainen.

2. LUKU: Mittojen derivointia ja tiheyspistelause

Toisessa luvussa keskitytään mittojen derivointiin, joka johtaa lopulta tiheyspistelauseeseen. Aluksi määritellään mitan ylä- ja aladerivaatat toisen mitan suhteen. Tärkeimpänä lauseena esitetään ns. Radon-Nikodym-Lebesgue -lause, joka antaa perusteet mitan derivoinnille toisen mitan suhteen. Lauseen todistamiseksi tarvitaan tietoa mittojen absoluuttisesta jatkuvuudesta ja erästä lemmaa, joka todistetaan ennen varsinaisen lauseen todistusta. Lisäksi tämän lauseen seurauksena saadaan eräs tiheyspistelause.

2.1. **Määritelmä.** Olkoot μ ja λ lokaalisti äärellisiä Borelin mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä. Mitan μ ylä- ja aladerivaatat mitan λ suhteen pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ ovat

$$
\overline{D}(\mu, \lambda\ , x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))}
$$

ja

$$
\underline{D}(\mu, \lambda\ , x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))}.
$$

Jos raja-arvo on olemassa pisteessä x määritellään mitan μ derivaataksi
$D(\mu, \lambda\ , x) = \overline{D}(\mu, \lambda\ , x) = \underline{D}(\mu, \lambda\ , x)$.

2.2. *Huomautus.*

(1) Tässä tulkitaan $0/0 = 0$.
(2) Kuvaukset $x \mapsto \overline{D}(\mu, \lambda\ , x)$ ja $x \mapsto \underline{D}(\mu, \lambda\ , x)$ ovat Borelin funktioita.

2.3. **Määritelmä.** Olkoot μ ja λ mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä. Jos $\mu(A) = 0$ aina, kun $\lambda(A) = 0$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$, toisin sanoen $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ kaikilla A $\subset \mathbb{R}^n$, niin sanotaan, että mitta μ on absoluuttisesti jatkuva mitan λ suhteen. Tätä merkitään $\mu \ll \lambda$.

Seuraavassa lausessa esitetään perusteet mitan μ derivoinnille mitan λ suhteen.

2.4. **Lause.** *Olkoot μ ja λ Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä.*

(1) *Derivaatta $D(\mu, \lambda, x)$ on olemassa ja se on äärellistä λ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.*
(2) *Kaikille Borel-joukoille $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee*
$$\int_A D(\mu, \lambda, x) d\lambda(x) \leq \mu(A)$$
ja yhtäsuuruus pätee kaikille Borel-joukoille A, jos $\mu \ll \lambda$.
(3) *$\mu \ll \lambda$, jos ja vain jos $\underline{D}(\mu, \lambda, x) < \infty$ μ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.*

Tämän todistamiseksi tarvitsemme seuraavan lemman.

2.5. **Lemma.** *Olkoot μ ja λ Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä, $0 < t < \infty$ ja $A \subset \mathbb{R}^n$.*

(1) *Jos $\underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq t$ kaikille $x \in A$, niin silloin $\mu(A) \leq t\lambda(A)$.*
(2) *Jos $\overline{D}(\mu, \lambda, x) \geq t$ kaikille $x \in A$, niin silloin $\mu(A) \geq t\lambda(A)$.*

Todistus.
(1) Olkoon $\epsilon > 0$. Koska λ on Radon-mitta, löydetään määritelmän 1.2(3) perusteella avoin joukko U siten, että $A \subset U$ ja $\lambda(U) \leq \lambda(A) + \epsilon$. Vitalin peitelauseen 1.9 perusteella löydetään erilliset suljetut pallot $B_i \subset U$ siten, että
$$\mu(B_i) \leq (t + \epsilon)\lambda(B_i) \text{ ja } \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0.$$
Tällöin
$$\begin{aligned}
\mu(A) &\leq \mu(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap B_i)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\
&\leq (t + \epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) = (t + \epsilon)\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\
&\leq (t + \epsilon)\lambda(U) \\
&\leq (t + \epsilon)(\lambda(A) + \epsilon).
\end{aligned}$$

Antamalla $\epsilon \to 0$, saadaan $\mu(A) \le t\lambda(A)$, mikä oli väite (1).

Kohdan (2) voi todistaa samoin. $\square$

Lauseen 2.4 todistus.
Väite (1) Olkoot $0 < r < \infty$ ja $0 < s < t < \infty$ ja merkitään

$$\begin{aligned} A_{s,t,r} &= \{x \in B(0,r) : \underline{D}(\mu,\lambda,x) \le s < t \le \overline{D}(\mu,\lambda,x)\} \text{ ja} \\ A_{t,r} &= \{x \in B(0,r) : \overline{D}(\mu,\lambda,x) \ge t\}. \end{aligned}$$

Huomautuksen 2.2(2) perusteella joukot $A_{s,t,r}$ ja $A_{t,r}$ ovat Borelin joukkoja ja siten mitallisia.

Lemman 2.5 mukaan

$$\begin{aligned} t\lambda(A_{s,t,r}) &\le \mu(A_{s,t,r}) \le s\lambda(A_{s,t,r}) < \infty \text{ ja} \\ u\lambda(A_{u,r}) &\le \mu(A_{u,r}) \le \mu(B(0,r)) < \infty. \end{aligned}$$

Näistä epäyhtälöistä seuraa, että $\lambda(A_{s,t,r}) = 0$, koska $s < t$ ja
$\lambda(\bigcap_{u>0} A_{u,r}) = \lim_{u\to\infty} \lambda(A_{u,r}) = 0$.

Toisaalta

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}(\mu,\lambda,x) < \overline{D}(\mu,\lambda,x)\} = \bigcup_{s,t\in\mathbb{Q}, s<t, r\in\mathbb{N}} A_{s,t,r},$$

joten

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}(\mu,\lambda,x) < \overline{D}(\mu,\lambda,x)\}) = \lambda(\bigcup_{s,t\in\mathbb{Q}, s<t, r\in\mathbb{N}} A_{s,t,r}) \le \sum \lambda(A_{s,t,r}) = 0.$$

Toisin sanoen joukko, jossa derivaattaa $D(\mu,\lambda,x)$ ei ole olemassa on λ - nollamittainen eli derivaatta $D(\mu,\lambda,x)$ on olemassa λ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Lisäksi käyttämällä lemmaa 2.5(2) saadaan

$$\begin{aligned} \lambda(\{x \in B(0,r) : \overline{D}(\mu,\lambda,x) = \infty\}) &\le t^{-1}\mu(\{x \in B(0,r) : \overline{D}(\mu,\lambda,x) = \infty\}) \\ &\le t^{-1}\mu(B(0,r)). \end{aligned}$$

Antamalla $t \to \infty$ saadaan $\lambda(\{x \in B(0,r) : \overline{D}(\mu,\lambda,x) = \infty\}) = 0$.
Siis $D(\mu,\lambda,x) < \infty$ λ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Väite (2) Olkoon $t > 1$ ja merkitään $A_k = \{x \in A : t^k \le D(\mu,\lambda,x) < t^{k+1}\}$, kun $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin A_k on Borelin joukko ja siten mitallinen ja
$\{x \in A : 0 < D(\mu,\lambda,x) < \infty\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k$.

Nyt käyttämällä lemman 2.5(2) kohtaa apuna saadaan

$$\begin{aligned}\int_A D(\mu,\lambda,x)d\lambda(x) &= \int_{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k} D(\mu,\lambda,x)d\lambda(x)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{A_k} D(\mu,\lambda,x)d\lambda(x)\\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} t^{k+1}\lambda(A_k)\\ &\le t\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(A_k)\\ &\le t\mu(A).\end{aligned}$$

Antamalla $t \to 1$ saadaan arvio

$$\int_A D(\mu,\lambda,x)d\lambda(x) \le \mu(A).$$

Merkitään

$$\begin{aligned}A_0 &= \{x\in A : D(\mu,\lambda,x) = 0\}\\ A_\infty &= \{x\in A : D(\mu,\lambda,x) = \infty\} \text{ ja}\\ A_N &= \{x\in A : D(\mu,\lambda,x) \text{ ei ole olemassa}\}.\end{aligned}$$

Kohdan (1) perusteella $D(\mu,\lambda,x) = D(\lambda,\mu,x)^{-1} > 0$ μ-melkein kaikilla $x\in\mathbb{R}^n$, koska $\mu \ll \lambda$. Siten $\mu(A_0) = 0$.

Kohdan (1) perusteella myös $\lambda(A_N) = 0 = \lambda(A_\infty)$. Siten koska $\mu \ll \lambda$, niin $\mu(A_N) = 0 = \mu(A_\infty)$. Täten

$$\mu(A) \le \mu(A\setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k) + \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k) \le \mu(A_0\cup A_\infty\cup A_N) + \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k) = \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k).$$

Siten käyttämällä lemman 2.5 (1) kohtaa apuna saadaan

$$\begin{aligned}\int_A D(\mu,\lambda,x)d\lambda(x) &\ge \int_{\bigcup A_k} D(\mu,\lambda,x)d\lambda(x)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{A_k} D(\mu,\lambda,x)d\lambda(x)\\ &\ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} t^{k}\lambda(A_k)\\ &\ge t^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(A_k)\\ &\ge t^{-1}\mu(A).\end{aligned}$$

Antamalla $t \to 1$ saadaan arvio

$$\int_A D(\mu,\lambda,x)d\lambda(x) \ge \mu(A).$$

Siten yhtäsuuruus on voimassa ja kohta (2) on todistettu.

Väite (3)
$'' \Rightarrow ''$ Kohdan (1) nojalla $\underline{D}(\mu, \lambda, x) < \infty$ λ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Koska $\mu \ll \lambda$ ja $\lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}(\mu, \lambda, x) = \infty\}\right) = 0$, niin $\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}(\mu, \lambda, x) = \infty\}\right) = 0$.

Siten $\underline{D}(\mu, \lambda, x) < \infty$ μ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

$'' \Leftarrow ''$ Olkoon $\underline{D}(\mu, \lambda, x) < \infty$ μ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $\lambda(A) = 0$ ja $k = 1, 2, 3 \ldots$ Lemman 2.5 (1) avulla saadaan

$$\mu(\{x \in A : \underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq k\}) \leq k\lambda(A) = 0.$$

Siten $\mu(A) = 0$, joten $\mu \ll \lambda$.

$\square$

Lauseen 2.4 seurauksena saamme tiheyspistelauseen Radon-mitoille ja lauseen integraalien differentioinnille.

2.6. **Seuraus.** *Olkoon λ Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä.*

(1) *Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on λ-mitallinen, silloin raja-arvo*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\lambda(A \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))}$$

on olemassa ja

$$\lim_{r \to 0} \frac{\lambda(A \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = 1 \ \lambda\text{-melkein kaikilla } x \in A \text{ ja}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\lambda(A \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = 0 \ \lambda\text{-melkein kaikilla } x \in \mathbb{R}^n \setminus A.$$

(2) *Jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on lokaalisti λ-integroituva, niin*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f d\lambda = f(x) \ \lambda\text{-melkein kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Todistus.
Väite (1) seuraa väitteestä (2), kun asetetaan $f = \chi_A$. Todistetaan väite (2). Voidaan olettaa, että $f \geq 0$. Määritellään Radon-mitta μ siten, että $\mu(A) = \int_A f d\lambda$. Silloin $\mu \ll \lambda$ ja lause 2.4 (2) antaa

$$\int_A D(\mu, \lambda, x) d\lambda(x) = \mu(A) = \int_A f d\lambda,$$

kaikille Borelin joukoille A.

Tämä tarkoittaa, että $f(x) = D(\mu, \lambda, x)$ λ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, mikä todistaa väitteen (2). $\square$

2.7. *Huomautus.*
Seurausta 2.6 (1) kutsutaan Lebesguen tiheyspistelauseeksi, kun $\lambda = \mathcal{L}^n$, missä $\mathcal{L}^n$on n-ulotteinen Lebesguen mitta.

3. LUKU: Hausdorffin mitta ja tiheydet

Seurauksessa 2.6 (1) saimme tulokseksi tiheyspistelauseen Radon-mitoille. Luvussa kolme pyritään todistamaan vastaava tulos Hausdorffin mitalle. Hausdorffin mitan avulla määritellään ylä- ja alatiheydet joukolle A. Lisäksi esitetään lause, jonka avulla voidaan tutkia joukkojen tiheyksiä Hausdorffin mitan avulla. Tällöin yleensä ylätiheydet ovat hyödyllisempiä kuin alatiheydet.

3.1. **Määritelmä.** Olkoot $0 \leq s < \infty, A \subset \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}^n$. Joukon A s-ulotteiset ylä- ja alatiheydet pisteessä a määritellään seuraavasti:

$$\Theta^{*s}(A, a) = \limsup_{r \to 0} (2r)^{-s} \mathcal{H}^s(A \cap B(a, r)) \text{ ja}$$

$$\Theta^s_*(A, a) = \liminf_{r \to 0} (2r)^{-s} \mathcal{H}^s(A \cap B(a, r)).$$

Jos $\Theta^{*s}(A, a) = \Theta^s_*(A, a)$, niin merkitään $\Theta^s(A, a) = \Theta^{*s}(A, a) = \Theta^s_*(A, a)$ ja sanotaan, että $\Theta^s(A, a)$ on joukon A s-ulotteinen tiheys pisteessä a.

Kun $s = n$, niin $\Theta^{*s}(A, a)$ ja $\Theta^s_*(A, a)$ ovat tavallisia Lebesguen tiheyksiä. Lebesguen tiheyspistelauseen (seuraus 2.6 (1)) nojalla $\Theta^n(A, a) = 1$ $\mathcal{L}^n$-melkein kaikilla $a \in A$ ja, jos A on $\mathcal{L}^n$-mitallinen, niin $\Theta^n(A, a) = 0$ $\mathcal{L}^n$-melkein kaikilla $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Yleensä Hausdorffin mitasta voi sanoa paljon vähemmän. Kuitenkin seuraava lause on hyvä korvike tutkittaessa joukkojen lokaaleja ominaisuuksia Hausdorffin mitan avulla.

3.2. **Lause.**
Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Tällöin

(1) $2^{-s} \leq \Theta^{*s}(A, x) \leq 1$ *$\mathcal{H}^s$-melkein kaikilla $x \in A$,*
(2) *jos A on $\mathcal{H}^s$- mitallinen, niin $\Theta^{*s}(A, x) = 0$ $\mathcal{H}^s$-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$.*

Todistus.
Todistetaan ensimmäiseksi kohdan (1) vasemmanpuoleinen epäyhtälö. Merkitään

$$B_k = \{x \in A : \mathcal{H}^s(A \cap B(x, r)) < \frac{k}{k+1} r^s, \text{ kaikilla } 0 < r < \frac{1}{k}\},\ k = 1, 2, \ldots$$

Tällöin

$$\{x \in A : \Theta^{*s}(A, x) < 2^{-s}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Siis riittää osoittaa, että $\mathcal{H}^s(B_k) = 0$ kaikilla k. Kiinnitetään seuraavaksi k ja merkitään $t = k/(k+1)$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Nyt joukko B_k voidaan peittää joukoilla $E_1, E_2, \ldots$ siten, että $0 < \mathrm{diam}(E_i) < 1/k$, $B_k \cap E_i \neq \emptyset$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s \leq \mathcal{H}^s(B_k) + \epsilon.$$

Jokaisella i valitaan $x_i \in B_k \cap E_i$ ja olkoon $r_i = \mathrm{diam}(E_i)$. Tällöin $B_k \cap E_i \subset A \cap B(x_i, r_i)$ ja

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(B_k) &\leq \mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B_k \cap E_i)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(B_k \cap E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A \cap B(x_i, r_i)) \\
&< \sum_{i=1}^{\infty} t r_i^s = t \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} E_i)^s \leq t(\mathcal{H}^s(B_k) + \epsilon).
\end{aligned}
$$

Antamalla $\epsilon \to 0$ saamme $\mathcal{H}^s(B_k) \leq t\mathcal{H}^s(B_k)$. Koska $\mathcal{H}^s(B_k) < \infty$ ja $t < 1$, niin silloin $\mathcal{H}^s(B_k) = 0$.

Kohdan (1) oikeanpuoleista epäyhtälöä varten voimme olettaa, että A on Borel-joukko, sillä $\mathcal{H}^s$ on Borel-säännöllinen huomautuksen 1.15(3) perusteella.

Olkoon $t > 1$ ja $B = \{x \in A : \Theta^{*s}(A, x) > t\}$. Kuten todistuksen alkuosassa nytkin riittää osoittaa, että $\mathcal{H}^s(B) = 0$. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\delta > 0$. Soveltamalla lausetta 1.10 (2) rajoittumaan $\mathcal{H}^s\lfloor_A$ löydämme avoimen joukon U siten, että $B \subset U$ ja $\mathcal{H}^s\lfloor_A(U) = \mathcal{H}^s(A \cap U) < \mathcal{H}^s(B) + \epsilon$.

Kaikilla $x \in B$ löytyy mielivaltaisen pieniä lukuja r siten, että $0 < r < \delta/2$, $B(x, r) \subset U$ ja $\mathcal{H}^s(A \cap B(x, r)) > t(2r)^s$. Nyt Vitalin peitelauseen 1.9 perusteella löydetään erilliset pallot $B_1, B_2, \ldots$, joille pätee $\mathcal{H}^s(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$. Täten

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(B) + \epsilon > \mathcal{H}^s(A \cap U) &\geq \mathcal{H}^s(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A \cap B_i) \\
&> \sum_{i=1}^{\infty} t(2r_i)^s = t \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} B_i)^s \\
&\geq t\mathcal{H}^s_\delta(B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) \\
&= t\mathcal{H}^s_\delta(B).
\end{aligned}
$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa tiedosta $\mathcal{H}^s(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$ ja $\mathcal{H}^s_\delta$:n subadditiivisuudesta. Nyt antamalla $\epsilon \to 0$ ja $\delta \to 0$ ja koska $t > 1$, saamme $\mathcal{H}^s(B) = 0$.

Todistetaan lopuksi kohta (2). Olkoon $t > 0$ ja $B = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus A : \Theta^{*s}(A, x) > t\}$. Osoitetaan, että $\mathcal{H}^s(B) = 0$, mistä väite seuraa.

Olkoon $\epsilon > 0$. Sovelletaan lausetta 1.10 (2) Borel-säännölliseen mittaan $\mathcal{H}^s\lfloor_A$. Koska $B \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, niin $\mathcal{H}^s\lfloor_A(B) = \mathcal{H}^s(A \cap B) = 0$, joten löydämme lauseen 1.10 (2) perusteella avoimen joukon U siten, että $B \subset U$ ja $\mathcal{H}^s(A \cap U) < \epsilon$.

Nyt jokaisella $x \in B$ on $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset U$ ja $\mathcal{H}^s(A \cap B(x, r_x)) > t(2r_x)^s$. 5r-peitelauseen 1.7 nojalla löydetään $x_1, x_2, \ldots \in B$ siten, että pallot $B_i = B(x_i, r_i)$ ovat erillisiä ja pallot $5B_i$ peittävät B:n. Siten

$$\begin{aligned} t\mathcal{H}^s_\infty(B) &\leq t\sum_{i=1}^\infty \mathrm{diam}(5B_i)^s = t5^s\sum_{i=1}^\infty \mathrm{diam}(B_i)^s = t5^s\sum_{i=1}^\infty (2r_{x_i})^s \\ &< 5^s\sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^s(A\cap B_i) \leq 5^s\mathcal{H}^s(A\cap(\bigcup_{i=1}^\infty B_i)) \\ &\leq 5^s\mathcal{H}^s(A\cap U) < 5^s\epsilon. \end{aligned}$$

Antamalla $\epsilon \to 0$ saamme $\mathcal{H}^s_\infty(B) = 0$. Tästä seuraa edelleen, että $\mathcal{H}^s(B) = 0$. □

3.3. *Huomautus.*
Lauseen 3.2 kohdassa (1) yläraja on tarkka ja alaraja on paras mahdollinen, kun $s \leq 1$. Alaraja ei välttämättä ole paras mahdollinen, kun $s > 1$.

4. LUKU: Pakkausmitta ja tiheydet

Myös yleisille mitoille voidaan määritellä tiheyksiä samaan tapaan, kuin edellisessä luvussa tehtiin Hausdorffin mitalle. Tässä luvussa määritellään yleisten mittojen tiheys ja esitetään tämän perusteella tulos pakkausmitan tiheydelle. Lisäksi esitetään pari tulosta, joissa käytetään hyväksi tietoa tutkittavan joukon tiheydestä.

4.1. **Määritelmä.** Olkoon $0 \leq s < \infty$ ja μ mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Mitan μ s-ulotteiset ylä- ja alatiheydet pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$ ovat

$$\Theta^{*s}(\mu, a) = \limsup_{r\to 0}(2r)^{-s}\mu(B(a,r))$$

ja

$$\Theta^s_*(\mu, a) = \liminf_{r\to 0}(2r)^{-s}\mu(B(a,r)).$$

Jos $\Theta^{*s}(\mu, a) = \Theta^s_*(\mu, a)$, niin merkitään $\Theta^s(\mu, a) = \Theta^{*s}(\mu, a) = \Theta^s_*(\mu, a)$ ja sanotaan, että $\Theta^s(\mu, a)$ on mitan μ s-ulotteinen tiheys pisteessä a.

4.2. *Huomautus.*
Mitan μ tiheyden määritelmä on samanlainen kuin Hausdorffin mitan avulla määritelty tiheys, kun määritelmässä käytetään mitan μ rajoittumaa $\mu\lfloor_A$.

Tarkastellaan seuraavaksi pakkausmitan tiheyttä. Pakkausmitalle alatiheys on hyödyllisempi kuin ylätiheys.

4.3. **Lause.** *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $\mathcal{P}^s(A) < \infty$. Tällöin*

$$\Theta^s_*(\mathcal{P}^s\lfloor_A, x) = 1\ \mathcal{P}^s - \textit{melkein kaikilla } x \in A.$$

Todistus.
Lemman 1.5 ja lauseen 1.19 perusteella voidaan olettaa, että A on Borel-joukko. Koska $\mathcal{P}^s(A) < \infty$, niin huomautuksen 1.11 nojalla löydetään kompakti $K \subset A$ siten, että $\mathcal{P}^s(A\backslash K) < \epsilon$ ja lauseen 1.10(2) nojalla avoin $V \supset A$ siten, että $\mathcal{P}^s(V\backslash A) < \epsilon$. Lisäksi lauseen 1.6 (3) nojalla $\mathcal{P}^s\lfloor_A$ on Borel-säännöllinen, joten $\mathcal{P}^s\lfloor_A$ on Radon-mitta.

Todistetaan ensin, että $\Theta^s_*(\mathcal{P}^s\lfloor_A, x) \geq 1$ $\mathcal{P}^s$-melkein kaikilla $x \in A$.

Olkoon $0 < t < 1$. Merkitään $B = \{x \in A : \Theta^s_*(\mathcal{P}^s\lfloor_A, x) < t\}$. Riittää siis osoittaa, että pätee $\mathcal{P}^s(B) = 0$.

Olkoon $E \subset B$ ja $\epsilon > 0$. Nyt pakkausesimitan määritelmän nojalla on $\delta > 0$ siten, että $P^s_\delta(E) \leq P^s(E) + \epsilon$. Vitalin peitelauseen 1.9 nojalla löydetään erilliset pallot $B_i = B(x_i, r_i), i = 1, 2, \ldots$ siten, että $\mathrm{diam} B_i < \delta$, $x_i \in E$, $\mathcal{P}^s(A \cap B_i) < t(\mathrm{diam} B_i)^s$ ja $\mathcal{P}^s(E \setminus \bigcup_{i=1}^\infty B_i) = 0$. Siten

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^s(E) &\leq \mathcal{P}^s(E \cap (\bigcup_{i=1}^\infty B_i)) + \mathcal{P}^s(E \setminus \bigcup_{i=1}^\infty B_i) = \mathcal{P}^s(\bigcup_{i=1}^\infty (E \cap B_i)) \\ &\leq \mathcal{P}^s(\bigcup_{i=1}^\infty (A \cap B_i)) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{P}^s(A \cap B_i) \leq t \sum_{i=1}^\infty (\mathrm{diam} B_i)^s \\ &\leq t P^s_\delta(E) \\ &\leq t(P^s(E) + \epsilon).\end{aligned}$$

Antamalla $\epsilon \to 0$ saadaan $\mathcal{P}^s(E) \leq tP^s(E)$, kun $E \subset B$.

Siten jos $B = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$, niin

$$\mathcal{P}^s(B) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{P}^s(E_i) \leq t \sum_{i=1}^\infty P^s(E_i).$$

Siten pakkausmitan määritelmän perusteella $\mathcal{P}^s(B) \leq t\mathcal{P}^s(B)$. Koska t oli mielivaltainen, täytyy olla $\mathcal{P}^s(B) = 0$.

Todistetaan lopuksi, että $\Theta^s_*(\mathcal{P}^s\lfloor_A, x) \leq 1$ $\mathcal{P}^s$-melkein kaikilla $x \in A$.
Olkoot $t > 1$ ja $r_0 > 0$. Merkitään $B = \{x \in A : \mathcal{P}^s(A \cap B(x, r)) \geq t(2r)^s, 0 < r < r_0\}$. Nyt B on Borel-joukko. Riittää siis osoittaa, että pätee $\mathcal{P}^s(B) = 0$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Sovelletaan lausetta 1.10 ja huomautusta 1.11 mittaan $\mathcal{P}^s\lfloor_A$, jolloin löydetään kompakti joukko F ja avoin joukko U siten, että $F \subset B \subset U$ ja $\mathcal{P}^s(A \cap U) < \mathcal{P}^s(B) + \epsilon < \mathcal{P}^s(F) + 2\epsilon$.

Olkoon $0 < \delta < \min\{r_0, d(F, \mathbb{R}^n \setminus U)\}$. Valitaan pallot $B_i, i = 1, 2, \ldots$ siten, että pallot B_i ovat erillisiä ja suljettuja ja niiden keskipisteet ovat F:ssä ja $\mathrm{diam} B_i \leq \delta$. Tällöin $B_i \subset U$ ja

$$t \sum_{i=1}^\infty (\mathrm{diam} B_i)^s \leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{P}^s(A \cap B_i) \leq \mathcal{P}^s(A \cap U) < \mathcal{P}^s(B) + \epsilon.$$

Täten ottamalla sup edellisen epäyhtälön molemmin puolin saadaan $tP^s_\delta(F) \leq \mathcal{P}^s(B) + \epsilon$ ja antamalla $\delta \to 0$ saadaan $tP^s(F) \leq \mathcal{P}^s(B) + \epsilon$.

Lisäksi

$$t\mathcal{P}^s(B) \leq t(\mathcal{P}^s(F) + \epsilon) \leq t(P^s(F) + \epsilon) \leq \mathcal{P}^s(B) + \epsilon + \epsilon t.$$

Antamalla $\epsilon \to 0$ saamme $t\mathcal{P}^s(B) \leq \mathcal{P}^s(B) < \infty$, joten $\mathcal{P}^s(B) = 0$, sillä $t > 1$. □

Seuraavaksi todistetaan kaksi tulosta, joissa hyödynnetään tietoa tutkittavan joukon tiheydestä. Näiden todistuksissa tarvitsemme kuitenkin seuraavia lemmoja.

4.4. **Lemma.** *Olkoot μ Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä, $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $0 < \lambda < \infty$.*

(1) *Jos $\Theta^{*s}(\mu, x) \leq \lambda$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \leq 2^s \lambda \mathcal{H}^s(A)$.*

(2) *Jos* $\Theta^{*s}(\mu, x) \geq \lambda$ *kaikilla* $x \in A$, *niin* $\mu(A) \geq 5^{-s}\lambda\mathcal{H}^s(A)$.

Todistus.
Väite(1): Olkoon $\delta > 0$. Merkitään

$$A_\delta = \{x \in A : \mu(B(x,r)) \leq 2^s \lambda r^s \text{ kaikilla } 0 < r \leq \delta\}.$$

Jos $\delta' \leq \delta$, niin $A_\delta \subset A_{\delta'}$ ja $A = \bigcup_{\delta>0} A_\delta$, joten $\mu(A) = \lim_{\delta\to 0}\mu(A_\delta)$.

Olkoon $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ A_δ:n peite siten, että $\mathrm{diam}E_i < \delta$ ja $A_\delta \cap E_i \neq \emptyset$. Olkoon $x_i \in A_\delta \cap E_i$. Tällöin $E_i \subset B(x_i, \mathrm{diam}E_i)$ ja

$$\mu(E_i) \leq \mu(B(x_i, \mathrm{diam}E_i)) \leq 2^s\lambda(\mathrm{diam}E_i)^s,$$

joten

$$\mu(A_\delta) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) \leq 2^s\lambda\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}E_i)^s.$$

$\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ on mielivaltainen A_δ:n peite, joten ottamalla inf saadaan

$$\mu(A_\delta) \leq 2^s\lambda\mathcal{H}^s_\delta(A)$$

ja antamalla $\delta \to 0$ saadaan väite $\mu(A) \leq 2^s\lambda\mathcal{H}^s(A)$.

Väite (2): Olkoot $\epsilon > 0$ ja V avoin siten, että $\mu(V) \leq \mu(A) + \epsilon$ ja $A \subset V$. Koska kaikilla $x \in A$

$$\Theta^{*s}(\mu, x) = \limsup_{r\to 0}(2r)^{-s}\mu(B(x,r)) \geq \lambda,$$

niin

$$r^s \leq \lambda^{-1}2^{-s}\mu(B(x,r))) \ (*)$$

mielivaltaisen pienillä $r > 0$.

Olkoon $\mathcal{B}_\delta$ kokoelma suljettuja palloja $B(x,r)$ siten, että $x \in A$, $0 < 10r < \delta$, $B(x,r) \subset V$ ja (*) pätee. Nyt 5r-peitelauseen 1.8 nojalla löydetään erilliset pallot $B_i \in \mathcal{B}_\delta$ siten, että $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i$.

Tällöin

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq 5^s\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}B_i)^s = 5^s2^s\sum_{i=1}^{\infty}r_i^s &\leq 5^s2^s\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-1}2^{-s}\mu(B_i)\\ &\leq 5^s\lambda^{-1}\mu(V)\\ &\leq 5^s\lambda^{-1}(\mu(A)+\epsilon).\end{aligned}$$

Antamalla $\delta \to 0$ ja $\epsilon \to 0$ saadaan väite $\mu(A) \geq 5^{-s}\lambda\mathcal{H}^s(A)$. □

4.5. **Lemma.** *Olkoot* μ *Radon-mitta* $\mathbb{R}^n$*:ssä,* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ja* $0 < \lambda < \infty$.
(1) *Jos* $\Theta^s_*(\mu, x) \leq \lambda$ *kaikilla* $x \in A$, *niin* $\mu(A) \leq \lambda\mathcal{P}^s(A)$.
(2) *Jos* $\Theta^s_*(\mu, x) \geq \lambda$ *kaikilla* $x \in A$, *niin* $\mu(A) \geq \lambda\mathcal{P}^s(A)$.

Todistus.
Samaan tapaan kuin lemma 4.4:

Väite (1): Koska kaikilla $x \in A$

$$\Theta^s_*(\mu, x) = \liminf_{r\to 0}(2r)^{-s}\mu(B(x,r)) \leq \lambda,$$

niin mielivaltaisen pienillä $r > 0$ pätee

$$r^s \geq \lambda^{-1} 2^{-s} \mu(B(x, r))). \ (*)$$

Olkoot $\delta > 0$ ja $\mathcal{B}_\delta$ kokoelma suljettuja palloja $B(x, r)$ siten, että $x \in A$, $0 < r < \delta$ ja (*) pätee. Nyt Vitalin peitelauseen 1.9 nojalla löydetään erilliset pallot $B_i \in \mathcal{B}_\delta$ siten, että $\mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^\infty B_i) = 0$ ja $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty B_i) \geq \mu(A)$.

Tällöin

$$\begin{aligned} P_\delta^s(A) \geq \sum_{i=1}^\infty (\mathrm{diam} B_i)^s = 2^s \sum_{i=1}^\infty r_i^s \geq 2^s \sum_{i=1}^\infty \lambda^{-1} 2^{-s} \mu(B_i) \\ = \lambda^{-1} \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) = \lambda^{-1} \mu(\bigcup_{i=1}^\infty B_i) \\ \geq \lambda^{-1} \mu(A). \end{aligned}$$

Antamalla $\delta \to 0$ saadaan $\mu(A) \leq \lambda P^s(A)$. Lisäksi

$$\mathcal{P}^s(A) = \inf\{\sum_{i=1}^\infty P^s(A \cap A_i)\} \geq \inf\{\sum_{i=1}^\infty \lambda^{-1} \mu(A \cap A_i)\} \geq \lambda^{-1} \mu(A),$$

mikä oli väite.

Väite(2): Olkoon $\delta > 0$ ja merkitään

$$A_\delta = \{x \in A : \mu(B(x, r)) \geq 2^s \lambda r^s \text{ kaikilla } 0 < r < \delta\}.$$

Jos $\delta' \leq \delta$, niin $A_\delta \subset A_{\delta'}$ ja $A = \bigcup_{\delta > 0} A_\delta$, joten $\mu(A) = \lim_{\delta \to 0} \mu(A_\delta)$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa avoin joukko $V \supset A$, jolle $\mu(V) \leq \mu(A) + \epsilon$. Olkoon $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ A_δ:n δ-pakkaus eli B_i:t ovat palloja, joiden keskipisteet $x_i \in A_\delta$, $B_i \subset V$ ja $r_i < \delta$. Tällöin

$$\mu(A) + \epsilon \geq \mu(V) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) \geq \sum_{i=1}^\infty 2^s \lambda r_i^s = \lambda \sum_{i=1}^\infty (2r_i)^s,$$

joten

$$\mathcal{P}^s(A_\delta) \leq P_\delta^s(A_\delta) \leq \lambda^{-1}(\mu(A) + \epsilon).$$

Antamalla $\delta \to 0$ ja $\epsilon \to 0$ saadaan $\mathcal{P}^s(A) \leq \lambda^{-1} \mu(A)$, mikä oli väite. □

Seuraavissa lauseissa käytetään hyväksi tietoa tutkittavan joukon tiheydestä ja tiheyden olemassa olosta mitan $\mathcal{P}^s$ suhteen.

4.6. **Lause.** *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $\mathcal{P}^s(A) < \infty$. Tällöin $\mathcal{P}^s(A) = \mathcal{H}^s(A)$, jos ja vain jos tiheys $\Theta^s(A, x)$ on olemassa ja $\Theta^s(A, x) = 1$ $\mathcal{P}^s$-melkein kaikilla $x \in A$.*

Todistus.
$'' \Rightarrow ''$Olkoon $\mathcal{P}^s(A) = \mathcal{H}^s(A)$. Käyttämällä mittojen Borel-säännöllisyyttä ja lemmaa 1.5 voidaan olettaa, että A on Borel-joukko. Tällöin, koska lauseen 1.30 mukaan $\mathcal{H}^s \leq \mathcal{P}^s$, niin $\mathcal{P}^s(B) = \mathcal{H}^s(B)$ kaikille Borel-joukoille $B \subset A$.

Täten lauseiden 3.2(1) ja 4.3 perusteella $\mathcal{H}^s$- melkein kaikilla $x \in A$

$$\begin{aligned}1 &= \Theta^s_*(\mathcal{P}\lfloor_A, x)\\ &= \liminf_{r\to 0}(2r)^{-s}\mathcal{P}^s(A\cap B(a,r)) = \liminf_{r\to 0}(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(A\cap B(a,r)) = \Theta^s_*(A,x)\\ &\le \limsup_{r\to 0}(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(A\cap B(a,r)) = \Theta^{*s}(A,x) \le 1.\end{aligned}$$

Täten $\Theta^s(A,x) = 1$ $\mathcal{H}^s$-melkein kaikilla $x \in A$.

Koska $\mathcal{H}^s(B) = \mathcal{P}^s(B)$ kaikille Borel-joukoille $B \subset A$, niin Borel-säännöllisyyden nojalla kaikille A:n osajoukoille $C \subset A$ pätee $\mathcal{P}^s(C) = \mathcal{H}^s(C)$. Tällöin $\Theta^s(A,x) = 1$ $\mathcal{P}^s$-melkein kaikilla $x \in A$.

$'' \Leftarrow''$Olkoon $\Theta^s(A,x) = 1$ $\mathcal{P}^s$-melkein kaikilla $x \in A$. Olkoon B Borel-joukko siten, että $A \subset B$ ja $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$. Lemman 1.5 nojalla

$$\begin{aligned}\Theta^s_*(B,x) &= \liminf_{r\to 0}(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(B\cap B(x,r))\\ &= \liminf_{r\to 0}(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(A\cap B(x,r)) = \Theta^s_*(A,x), \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Lemman 4.5(2) perusteella sovellettuna Radon-mittaan $\mu = \mathcal{H}^s\lfloor_B$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(A) &\ge \mathcal{H}^s(\{x \in A : \Theta^s_*(B,x) \ge 1\})\\ &\ge 1\cdot \mathcal{P}^s(\{x \in A : \Theta^s_*(A,x) \ge 1\}) = \mathcal{P}^s(A),\end{aligned}$$

sillä $\Theta^s(A,x) = 1$ $\mathcal{P}^s$-melkein kaikilla $x \in A$. Lisäksi lauseen 1.30 mukaan $\mathcal{H}^s(A) \le \mathcal{P}^s(A) < \infty$.

Siis $\mathcal{P}^s(A) = \mathcal{H}^s(A)$. □

4.7. **Lause.** *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *Borel-joukko siten, että* $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$. *Jos* $\Theta^s_*(A,x) > 0$ $\mathcal{P}^s$*-melkein kaikilla* $x \in A$, *niin* $\overline{\dim}_p A = \dim_H A$.

Todistus. Huomautuksen 1.26 mukaan $s = \dim_H A \le \overline{\dim}_p A$.

Olkoon $B = \{x \in A : \Theta^s_*(A,x) = 0\}$ ja $C = \{x \in A : \Theta^{*s}(A,x) > 1\}$. Tällöin $\mathcal{P}^s(B) = 0$ ja lauseen 3.2(1) perusteella $\mathcal{H}^s(C) = 0$, jolloin lemmasta 4.5(2) seuraa $\mathcal{P}^s(C \setminus B) = 0$, joten myös $\mathcal{P}^s(B \cup C) = 0$.

Nyt voimme kirjoittaa $A \setminus (B \cup C) = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, missä joukot A_i ovat rajoitettuja, $\mathcal{H}^s(A_i) > 0$ ja joillekin $r_i > 0$, $0 < a_i < b_i < \infty$,

$$a_i r^s \le \mathcal{H}^s(A\cap B(x,r)) \le b_i r^s \;\; x \in A_i, 0 < r < r_i.$$

Täten määritelmän 1.28 ja huomautuksen 1.29 perusteella $\overline{\dim}_p(B\cup C) \le s$ ja lauseen 1.24 mukaan kaikille $i \ge 1$, $\overline{\dim}_M A_i = \dim_H A_i = s$. Siten huomautuksen 1.26 nojalla $\overline{\dim}_p A_i = s$. Tällöin myös $\overline{\dim}_p A = s$. □

Lähteet:

[1] Falconer, K., Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons Ltd., 1990
[2] Järvenpää, E., Fraktaaligeometrian muistiinpanot, Jyväskylän yliopisto, kevät 2006
[3] Koskela, P., Reaalianalyysin muistiinpanot, Jyväskylän yliopisto, kevät 2005
[4] Mattila, P., Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, Cambridge studies in advanced mathematics 44, Cambrigde University Press, 1995