# Tasaväli-integraali

Mikko Rautiainen

matematiikan Pro Gradu-tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2006

## Sisältö

# Johdanto

Tässä matematiikan Pro Gradu-tutkielmassa perehdytään paloittain jatkuvien ja rajoitettujen funktioiden integroimiseen tasavälijaolla. Aluksi tarkastellaan tasaväli-porrasfunktioita ja määritellään näille määrätty tasaväli-integraali. Tästä jatketaan paloittain jatkuvien funktioiden määrätyn tasaväli-integraalin muodostamiseen. Lähestymistapa on samantapainen kuin T. Apostolin Calculus 1 -kirjassa [1].

Tasaväli-integraaliteorian muodostamisen jälkeen tehdään vertailua Riemann-integraaliin. Havaitaan, että paloittain jatkuville ja rajoitetuille funktioille tasaväli- ja Riemann-integraalit ovat yhtenevät. Samoin todistetaan, että jos funktio on Riemann-integroituva, on sen määrätty tasaväli-integraali sama kuin määrätty Riemann-integraali.

Opetusosuus on kehitetty lukion integraalilaskennan kurssin jälkeen käytäväksi, jolloin opiskelijalla on jonkinlainen käsitys integraalista. Kurssi ei kuitenkaan ole jatkokurssi lähestymistavan ollessa vähemmän laskennallinen. Kohderyhmä on lukion 3. vuoden opiskelijat, jotka ovat kiinnostuneita matematiikasta. Opetusosuuden sisältö on pääpiirteittäin sama kuin tutkielman matematiikkaosassa.

**Osa I**

# Tasaväli-integraali: teoria

## 1 Peruskäsitteitä

Integraalilaskennan perusongelma on ratkaista annetun tasojoukon pinta-ala. Tämä tapahtuu yleisessä tapauksessa jollain tyhjennysmenetelmällä. Tavallisesti integraalilaskennan teoriaa kehitettäessä pitäydytään aluksi yksinkertaisessa tilanteessa: Pyritään määrittämään funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kuvaajan ja $x$-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala. Pinta-alaa on mielekästä ajatella pinta-alafunktion $p : \mathcal{M} \to [0, \infty[$ avulla, missä $\mathcal{M}$ on ne tason osajoukot, joille pinta-ala voidaan määrittää. Seuraavassa listataan joitain järkevän tuntuisia ominaisuuksia, joita pinta-alalla tai pinta-alafunktiolla soisi olevan.

i $p(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathcal{M}$

ii Mikäli $A, B \in \mathcal{M}$, niin $A \cap B \in \mathcal{M}$ ja $A \cup B \in \mathcal{M}$ ja

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

iii Jos $A, B \in \mathcal{M}$ siten, että $A \subseteq B$, niin tällöin $(B \setminus A) \in \mathcal{M}$ ja $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$[1]

iv Mikäli $A \in \mathcal{M}$ on yhtenevä[2] $B$:n kanssa, on $B \in \mathcal{M}$ ja pätee $p(A) = p(B)$.

v Jokaiselle suorakaiteelle $S$ pätee $S \in \mathcal{M}$, ja on $p(S) = ab$, missä $a, b$ ovat suorakaiteen leveys ja korkeus.

vi Olkoon $C$ sellainen joukko, jolle löytyy kuvan 1 mukaisesti suorakulmaiset monikulmiot[3] $A, B$ siten, että

(1) $$A \subseteq C \subseteq B.$$

Mikäli löytyy täsmälleen yksi $c \in \mathbb{R}$ joka toteuttaa epäyhtälöt

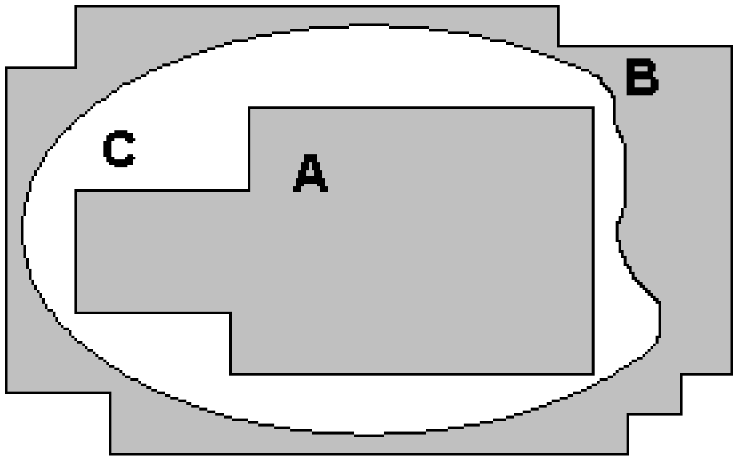
$$p(A) \leq c \leq p(B)$$

kaikille $A, B$ jotka toteuttavat ehdon 1, on $C \in \mathcal{M}$ ja $p(C) = c$.

[1] Tästä seuraa, että myös tyhjä joukko kuuluu $\mathcal{M}$:ään ja sen pinta-ala on 0.

[2] joukot ovat yhteneviä, jos ne voidaan siirtää päällekäin. toisin sanoen, jos löytyy etäisyydet säilyttävä (jokaiselle $x, y \in A$ pätee $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, $d$ on tavallinen metriikka) bijektio $f : A \to B$,

[3] suorakulmaiselle monikulmiolle löytyy suorakaiteet $A_i$ siten, että $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ja näin saatu joukko on yhtenäinen.




Kuva 1: $A \subseteq C \subseteq B,\ A$ ja $B$ suorakulmaisia monikulmioita.

Nämä kaikki ovat hyvin järkevän tuntuisia pinta-alan ominaisuuksia. Viides aksiooma antaa keinon laskea suorakulmaisten monikulmioiden pinta-aloja. Piste ja suora tulkitaan surkastuneiksi suorakaiteiksi; niiden pinta-ala on $0$. Suorakulmion pinta-alaa hyväksi käyttäen päästään laskemaan myös yleisempien alueiden pinta-aloja rajaprosessin avulla. Kuudes aksiooma antaa eväitä tähän.

Tutkielmassa ei paneuduta kovin syvällisesti ongelmaan, millaisille tason osajoukoille pinta-ala voidaan määritellä. Kuitenkin kaikki määriteltävät käsitteet ovat sellaisia, että saadut tulokset integraaleille ovat sopusoinnussa näiden pinta-alaa määrittelevien ominaisuuksien kanssa. Tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että myöhemmin määriteltävälle tasaväli-integraalille voidaan soveltaa pinta-alatulkintaa.

Tässä tutkielmassa ei olla kiinnostuneita kovin yleisestä tapauksesta, vaan tutkitaan vain paloittain jatkuvan, suljetulla ja rajoitetulla välillä määritellyn funktion ja $x$-akselin väliin jäävää aluetta. Käytettävä tyhjennysmenetelmä on myöskin rajoittunut: tarkastelussa rajoitutaan käyttämään välin $[a, b]$ jakamista yhtä pitkiin pätkiin. Tarkoituksena on päästä tällä rajoitetulla välineistöllä luomaan toimiva integraaliteoria. Seuraavassa esitellään muutamia termejä, joista teoriaa lähdetään rakentamaan.

**Määritelmä 1.1.** Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on *paloittain jatkuva*, mikäli väliltä $[a, b]$ löytyy korkeintaan äärellinen määrä pisteitä joissa $f$ on epäjatkuva.

**Määritelmä 1.2.** Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on *rajoitettu*, mikäli on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|f(x)| < M$ kaikilla $x \in [a, b]$.

**Määritelmä 1.3** (jako)**.** *Välin* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *jako* $P$ on pistejono $x_0, x_1, \ldots, x_n$, missä $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Mikäli löytyy $c \in \mathbb{R}$ siten, että $c = x_i - x_{i-1} \in \mathbb{R}$ kaikille $i = 1, 2, \ldots, n$, sanotaan, että jako $P$ on välin $[a, b]$ *tasavälijako*.

*Huomautus* 1.4. Mikäli jaoille $P$ ja $P'$ pätee $P \subset P'$, sanotaan, että $P$ on *karkeampi* kuin $P'$ ja vastaavasti $P'$ on *hienompi* jako kuin $P$.

**Määritelmä 1.5** (porrasfunktio ja tasaväliporrasfunktio)**.** Funktio $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ on *porrasfunktio*, mikäli löytyy jako $P = \{a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ siten, että jokaisella jakopisteiden määrämällä välillä $]x_{i-1}, x_i[$ funktio $f$ on vakio. Jaon $P$ pisteissä funktion arvot saavat olla mitä tahansa reaalilukuja. Täsmällisesti ilmaistuna, löytyy pisteet $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ siten, että $s(x) = a_i$, mikäli $x \in ]x_{i-1}, x_i[$.

Porrasfunktio $s$ on *tasaväliporrasfunktio*, mikäli löytyy $\delta \in \mathbb{R}$ siten, että jokaisen välin $]x_{i-1}, x_i[$ pituus on $\delta$.

*Huomautus* 1.6. Porrasfunktiot ovat paloittain jatkuvia.

**Lause 1.7.** *Tasaväliporrasfunktioiden $s$ ja $t$ summa*

$$s + t = u : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto s(x) + t(x)$$

*ja tulo*

$$s \cdot t = v : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto s(x)t(x)$$

*ovat myös tasaväliporrasfunktioita.*

*Todistus.* Olkoot $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktioita. Olkoon

$$P_s = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$$

sellainen funktioon $s$ liittyvä jako, että $s$ on vakio kullakin välillä $]x_{i-1}, x_i[$. Olkoon kunkin välin pituus $\delta_s$. Olkoon $P_t$ funktiota $t$ vastaava jako. Olkoot jaon määrittelemien välien pituudet $\delta_t$.

$P_t$ jakaa välin $[a, b]$ $m$:ään $\delta_t$:n pituiseen osaväliin ja $P_s$ $n$:ään $\delta_s$:n pituiseen osaväliin, joten

$$\delta_t m = \delta_s n = b - a$$

Näin ollen $\delta_s = \frac{m}{n}\delta_t$, missä $m, n \in \mathbb{N}$. Valitaan $\delta := \frac{1}{n}\delta_t$. Nyt $P = \{a, a + \delta, a + 2\delta, \ldots, b\}$ on haluttu tasavälijako. Todistetaan tämä.

Selvästi $P_t \subset P$, sillä $P_t$:n alkiot ovat muotoa $a + ln\delta$, missä $l \in \mathbb{N}$. Olkoon $x_i \in P_s$. Osoitetaan, että $x_i \in P$. Jaon $P_s$ määrittelyn nojalla löytyy $k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$x_i = a + k\delta_s = a + k\frac{m}{n}\delta_t = a + km\delta \leq b,$$

joten $x_i \in P$. Löydetty jako $P$ on hienompi kuin $P_s \cup P_t$, joten $s$ ja $t$ ovat vakioita $P$:n määräämillä väleillä $]a + (i - 1)\delta, a + i\delta[$ □

*Huomautus* 1.8. Jos on annettu suljetulla ja rajoitetulla välillä määritelty äärellinen määrä tasaväliporrasfunktioita, löytyy näitä funktiota vastaavien jakojen hienonnus siten, että uudessa jaossa kaikki funktiot ovat edelleen tasaväliporrasfunktioita. Todistuksessa etsitään sellainen jako $P$, joka on kaikkien alkuperäisten jakojen hienonnus. Tulokseen päästään käyttämällä lausetta 1.7 tarpeellisen monta kertaa.

# 2 Tasaväliporrasfunktion määrätty tasaväli-integraali

Kappaleessa esitetään määritelmä tasaväliporrasfunktion määrätylle tasaväli-integraalille. Lisäksi tarkastellaan määritellyn integraalin eri ominaisuuksia. Havaitaan, että monet porrasfunktioiden ominaisuudet löytyvät myös tasaväliporrasfunktioilta.

**Määritelmä 2.1** (tasaväliporrasfunktion määrätty tasaväli-integraali)**.** Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio. Olkoon $\delta > 0$ sellainen luku, että $s$ on vakio jokaisella väleistä $]a + (i-1)\delta, a + i\delta[$, missä $i = 1, 2, \ldots, n$. Merkitään $s$:n välillä $]a + (i-1)\delta, a + i\delta[$ saamaa arvoa $s_i$:llä. *Tasaväliporrasfunktion $s$ määrätty tasaväli-integraali yli välin* $[a, b]$ on

$$\int_a^b s(x)dx := \sum_{i=1}^{n} s_i \delta = \delta \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

*Huomautus* 2.2. Integraali on aina olemassa. Jokaiselle tasaväliporrasfunktiolle löytyy jokin $\delta$ ja sitä vastaavat $s_i$. Jos valitaan mikä hyvänsä eri välin pituus $\delta_2$, jonka määräämillä väleillä $]a + (i-1)\delta_2, a + i\delta_2[$ $s$ saa arvot $s_j$, on voimassa

$$\int_a^b s(x)dx = \delta \sum_{i=1}^{n} s_i = \delta_2 \sum_{j=1}^{m} s_j.$$

Näin ollen määritelmä liittää annettuun kolmikkoon $a, b, s$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ja $s$ tasaväliporrasfunktio, täsmälleen yhden reaaliluvun.

*Huomautus* 2.3. Tässä tutkielmassa käytetään funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ määrätylle tasaväli-integraalille[4] merkintää

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Kyseessä on siis tasaväli-integraali, eikä Riemann-integraali tai mikään muukaan entuudestaan tuttu integraali.

*Huomautus* 2.4. Jatkossa saatetaan puhua määrätystä tasaväli-integraalista nimityksillä integraali, tasaväli-integraali tai määrätty integraali. Kuitenkin aina on kysymys määrätystä tasaväli-integraalista, ellei toisin mainita.

Seuraavassa tarkastellaan minkälaisia ominaisuuksia tasaväliporrasfunktion määrätyllä tasaväli-integraalilla on. Ensimmäinen lause kertoo, että jos tasaväliporrasfunktiota kerrotaan jollakin vakiolla, on saadun funktion määrätty tasaväli-integraali sama kuin jos kerrottaisiin alkuperäisen funktion määrätty tasaväli-integraali kyseisellä vakiolla.

[4]Määritelmä annetaan 3. luvun alussa

**Lause 2.5.** *Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio. Tällöin jokaiselle $c \in \mathbb{R}$ pätee*

$$\int_a^b cs(x) = c \int_a^b s(x)dx.$$

*Todistus.* Selvästi myös $cs : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto cs(x)$ on tasaväliporrasfunktio. Olkoon tasavälijaon $P_s = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ määräämän yhden välin pituus $\delta > 0$. Merkitään $s_i := s(x)$, missä $x \in ]x_{i-1}, x_i[$. Summan ominaisuuksista ja tasaväli-integraalin määritelmästä seuraa, että

$$\int_a^b cs(x)dx = \delta \sum_{i=1}^{n} cs_i = c\delta \sum_{i=1}^{n} s_i = c \int_a^b s(x)dx.$$

□

Seuraavan lauseen mukaan kahden tasaväliporrasfunktion summafunktion määrätty tasaväli-integraali on sama kuin määrättyjen tasaväli-integraalien summa.

**Lause 2.6** (additiivisuus, tasaväliporrasfunktion määrätty tasaväli-integraali)**.** *Olkoot $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktioita. Tällöin pätee*

$$\int_a^b s(x) + t(x)dx = \int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)dx.$$

*Todistus.* Huomautuksen 1.7 nojalla $s + t$ on tasaväliporrasfunktio. Olkoon $\delta > 0$ sellainen, että $s + t, s$ ja $t$ ovat vakioita kullakin välillä $]a + (i - 1)\delta, a + i\delta[$, missä $i = 1, 2, \ldots, n$. Merkitään vastaavia funktioiden arvoja $s_i$:llä ja $t_i$:llä. Tällöin on

$$\int_a^b (s(x) + t(x))dx = \delta \sum_{i=1}^{n} (s_i + t_i) = \delta \sum_{i=1}^{n} s_i + \delta \sum_{i=1}^{n} t_i = \int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)dx.$$

□

Lauseet 2.5 ja 2.6 voidaan yhdistää yhdeksi tulokseksi:

**Seuraus 2.7** (määrätyn tasaväli-integraalin lineaarisuus tasaväliporrasfunktiolle)**.** *Olkoot $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktioita ja $A, B \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee*

$$\int_a^b As(x) + Bt(x)dx = A \int_a^b s(x)dx + B \int_a^b t(x)dx.$$

*Todistus.* Lauseiden 2.5 ja 2.6 nojalla

$$\int_a^b As(x)dx + Bt(x)dx \overset{2.6}{=} \int_a^b As(x)dx + \int_a^b Bt(x)dx \overset{2.5}{=} A \int_a^b s(x)dx + B \int_a^b t(x)dx.$$

□

Seuraava lause kertoo, että pienemmän tasaväliporrasfunktion määrätty tasaväli-integraali on pienempi kuin suuremman.

**Lause 2.8.** *Mikäli $s$ ja $t$ ovat tasaväliporrasfunktioita siten, että $s(x) \leq t(x)$ kaikilla $x \in [a,b] \setminus (P_s \cup P_t)$, missä $P_s$ ja $P_t$ ovat funktioita $s$ ja $t$ vastaavat tasavälijaot, pätee*

$$\int\limits_a^b s(x)dx \leq \int\limits_a^b t(x)dx$$

*Todistus.* Olkoon $\delta > 0$ sellainen, että $s, t$ ovat vakioita kullakin välillä $]a + (i-1)\delta, a + i\delta[$, missä $i = 1, 2, \dots, n$. Merkitään vastaavia funktioiden arvoja $s_i$:llä ja $t_i$:llä. Tällöin on

$$\int\limits_a^b s(x)dx = \delta \sum_{i=1}^{n} s_i \leq \delta \sum_{i=1}^{n} t_i = \int\limits_a^b t(x)dx,$$

jos $s(x) \leq t(x)$ kaikilla $x \in [a,b] \setminus (P_s \cup P_t)$. □

*Huomautus* 2.9. Mikäli lauseen 2.8 tilanteessa löytyy lisäksi jokin osaväli $[a + (i-1)\delta, a + i\delta] \subset [a,b]$, jolla pätee $s_i < t_i$, niin pätee

$$\int\limits_a^b s(x)dx < \int\limits_a^b t(x)dx.$$

*Todistus.* Todistus on samanlainen kuin edellä, mutta pätee

$$\int\limits_a^b s(x)dx = \delta \sum_{i=1}^{n} s_i < \delta \sum_{i=1}^{n} t_i = \int\limits_a^b t(x)dx,$$

sillä $s_i < t_i$ jollakin $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. □

Seuraavaksi todistetaan, että mikäli integroimisvälille lisätään ylimääräinen piste, on määrätty tasaväli-integraali yli koko välin yhtä suuri kuin osavälien määrättyjen integraalien summa. Tässä tulee oikeastaan ensimmäisen kerran ongelmia. Mikäli $c \in ]a, b[$ valitaan hankalasti, eli $\frac{c-a}{b-c} \notin \mathbb{Q}$, $s$ ei olekaan tasaväliporrasfunktio väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$. Lauseessa välipisteelle asetetaan rajoitus, ettei ongelmia muodostu.

**Lause 2.10.** *Olkoon $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio ja $c \in ]a, b[$ sellainen, että $\frac{c-a}{b-c} =: \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ ja $l, k \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee*

$$\int\limits_a^c s(x)dx + \int\limits_c^b s(x)dx = \int\limits_a^b s(x)dx.$$

*Todistus.* Koska $s$ on tasaväliporrasfunktio, löytyy välin $[a, b]$ tasavälijako

$$P = \{a, a + \delta, a + 2\delta, \ldots, a + n\delta = b\}.$$

Valitaan $\delta_2 := \frac{\delta}{k+l} = \frac{b-a}{n(k+l)}$. Nyt välien $[a, c]$ ja $[c, b]$ tasavälijaot

$$P_{ac} := \{a, a + \delta_2, a + 2\delta_2, \ldots, a + nl\delta_2 = c\}$$

ja

$$P_{cb} := \{c, c + \delta_2, c + 2\delta_2, \ldots, a + n(k + l)\delta_2 = b\}$$

sisältyvät tasavälijakoon

$$P_2 := \{a, a + \delta_2, a + 2\delta_2, \ldots, a + nk\delta_2 = c, \ldots, a + n(k + l)\delta_2 = b\}.$$

Merkitään funktion $s$ välillä $]a+(i-1)\delta_2, a+i\delta_2[$ saamaa arvoa $s_i$:llä. Ei ole vaikea näyttää, että

$$\frac{c-a}{nk} = \frac{b-a}{n(k+l)}$$

joten

$$\int_a^c s(x)dx = \frac{c-a}{nk}\sum_{i=1}^{nk} s_i = \frac{b-a}{n(k+l)}\sum_{i=1}^{nk} s_i.$$

Vastaavasti pätee

$$\int_c^b s(x)dx = \frac{b-c}{nl}\sum_{i=1}^{nl} s_i = \frac{b-a}{n(k+l)}\sum_{i=nk+1}^{n(k+l)} s_i.$$

Saadaan siis

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)dx &= \frac{b-a}{n(k+l)}\sum_{i=1}^{n(k+l)} s_i \\ &= \frac{b-a}{n(k+l)}\sum_{i=1}^{nk} s_i + \frac{b-a}{n(k+l)}\sum_{i=nk+1}^{n(k+l)} s_i \\ &= \frac{c-a}{nk}\sum_{i=1}^{nk} s_i + \frac{b-c}{nl}\sum_{i=1}^{nl} s_i \\ &= \int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx,\end{aligned}$$

mikä oli todistettava. □

Saatu tulos yleistyy äärelliselle pistejoukolle:

**Seuraus 2.11.** *Olkoon $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio ja $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Mikäli muodostuvat pisteet saadaan sisällytetyksi johonkin tasavälijakoon, jonka jokaisella määrittelemällä välillä $]x_{i-1}, x_i[$ $s$ on vakio, on voimassa*

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} s(x)dx.$$

*Todistus.* Käytetään lausetta 2.10 $n-1$ kertaa. □

Tavallisessa integraaliteoriassa vastaavat tulokset riittävät jatkuvien funktioiden arvioimiseen. Tasaväli-integraaliteorian kannalta tulokset eivät vielä kuitenkaan riitä. Nimittäin $s$ ei ole lauseen 2.10 tilanteessa tasaväliporrasfunktio jaossa $P_u$. Tästä syntyy ongelmia tasaväliala- ja tasaväliyläintegraalia määriteltäessä. Seuraavat lauseet kuitenkin korjaavat tilannetta.

**Lause 2.12.** *Olkoon $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio, $c \in ]a,b[$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin löytyy tasaväliporrasfunktiot $t : [a,c] \to \mathbb{R}$ ja $u : [c,b] \to \mathbb{R}$ siten, että $t(x) \leq s(x)$ kaikilla $x \in [a,c]$, $u(x) \leq s(x)$ kaikilla $x \in [c,b]$ ja lisäksi pätee*

$$\int_a^c t(x)dx + \int_c^b u(x)dx > \int_a^b s(x)dx - \epsilon$$

*Todistus.* Etsitään sopivat tasaväliporrasfunktiot $t$ ja $u$. Merkitään $\sup|s(x)| =: M$. Olkoon $t : [a,c] \to \mathbb{R}$ sellainen, että se saa samat arvot kuin $s$ lukuunottamatta välejä, joiden yhteenlaskettu pituus on $< \frac{\epsilon}{5M}$. Tällainen porrasfunktio on olemassa, koska $s$ vaihtaa arvoaan vain äärellisen monessa pisteessä, ja tasaväliporrasfunktion jakoa hienontamalla saadaan kunkin hyppäsysepäjatkuvuuspisteen lähistöllä väli, jolla funktioiden arvot eroavat toisistaan, mielivaltaisen pieneksi. Määritellään epäjatkuvuuspisteiden lähellä $t(x) := -M$. Vastaavasti saadaan määriteltyä hyvin $s$:ää välillä $[c,b]$ alapuolelta arvioiva tasaväliporrasfunktio $u$. Nyt on voimassa $t(x) \leq s(x)$ kaikilla $x \in [a,c]$ ja $u(x) \leq s(x)$ kaikilla $x \in [c,b]$. Koska funktioiden arvojen erotus on korkeintaan $2M$, on voimassa

$$\left| \left( \int_a^c t(x)dx + \int_c^b u(x)dx \right) - \int_a^b s(x)dx \right| \leq 2 \cdot \frac{2M\epsilon}{5M} < \epsilon.$$

Koska aina on voimassa $-A \leq |A|$, kunhan $A \in \mathbb{R}$, edellisestä epäyhtälöstä seuraa, että

$$-\left[ \left( \int_a^c t(x)dx + \int_c^b u(x)dx \right) - \int_a^b s(x)dx \right] < \epsilon,$$

josta väite seuraa. □

**Lause 2.13.** *Olkoon $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio, $c \in ]a,b[$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin löytyy tasaväliporrasfunktiot $t : [a,c] \to \mathbb{R}$ ja $u : [c,b] \to \mathbb{R}$ siten, että $t(x) \geq s(x)$ kaikilla $x \in [a,c]$, $u(x) \geq s(x)$ kaikilla $x \in [c,b]$ ja lisäksi pätee*

$$\int_a^c t(x)dx + \int_c^b u(x)dx < \int_a^b s(x)dx + \epsilon$$

*Todistus.* Samalla tavalla kuin edellinen todistus. □

Lauseet 2.12 ja 2.13 voidaan yleistää koskemaan äärellisen montaa pistettä:

**Lause 2.14.** *Olkoon $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio ja $\epsilon > 0$. Muodostakoot pisteet $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ välin $[a,b]$ tasavälijaon. Tällöin löytyy tasaväliporrasfunktiot $t_i : [c_{i-1}, c_i] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ siten, että*

$$t_i(x) \leq s(x) \text{ kaikilla } x \in ]c_{i-1}, c_i[,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

*ja lisäksi*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} t_i(x)dx > \int_a^b s(x)dx - \epsilon$$

*Todistus.* Valitaan $\epsilon_2 := \frac{\epsilon}{n}$. Lauseen 2.12 nojalla pätee

$$\int_a^b s(x)dx - \epsilon_2 < \int_a^{c_1} t_1(x)dx + \int_{c_1}^b u_1(x)dx.$$

joillekin tasaväliporrasfunktiolle $t_1 : [a, c_1] \to \mathbb{R}$ ja $u_1 : [c_1, b] \to \mathbb{R}$. Tämän jälkeen tehdään sama uudestaan siten, että $u_1$ vastaa funktiota $s$, ja lausetta sovelletaan pisteeseen $c_2$. Näin jatkamalla saadaan todistettua jokainen piste erikseen, ja lisäys on aina $< \epsilon_2$. Saadaan lopulta

$$\int_a^b s(x)dx - \epsilon < \int_a^b s(x)dx - (n-1)\epsilon_2 < \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} t_i(x)dx,$$

joten väite pätee. □

**Lause 2.15.** *Olkoon $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio, $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin löytyy tasaväliporrasfunktiot $t_i : [c_{i-1}, c_i] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ siten, että*

$$t_i(x) \geq s(x) \text{ kaikilla } x \in ]c_{i-1}, c_i[,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

*ja lisäksi*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} t_i(x)dx < \int_a^b s(x)dx + \epsilon$$

Kuva 2: Lauseen 2.17 tilanne, kun $k = 2$. Vasemmalla $\int_a^b f(x)dx$, oikealla $\int_{ka}^{kb} f(\frac{x}{k})dx$.

*Todistus.* Samalla tavalla kuin lauseen 2.14 todistus. □

Seuraavissa lauseissa todettavat ominaisuudet ovat siirto ja venytys. Siirto ei muuta integraalia, mutta venytys muuttaa integraalia venytyksen verran.

**Lause 2.16.** *Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee*

$$\int_a^b s(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)dx.$$

*Todistus.* Olkoon $P = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ välin $[a, b]$ tasavälijako, välin pituutena $\delta$. Nyt $P_c = \{x_0 + c, x_1 + c, \dots x_n + c\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n\}$ on välin $[a + c, b + c]$ tasavälijako. Merkitään väliä $]x_{i-1}, x_i[$ vastaavaa $s$:n arvoa $s_i$:llä. Olkoon $t(x)$ sellainen funktio, että jokaisella välillä $]y_{i-1}, y_i[$ pätee $t_i = t(x) := s(x - c)$. Nyt arvot $s_i$ ja $t_i$ vastaavat toisiaan. Näin ollen pätee

$$\int_a^b s(x)dx = \delta \sum_{i=1}^{n} s_i = \delta \sum_{i=1}^{n} t_i = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)dx.$$

□

**Lause 2.17.** *Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio ja $k > 0$. Tällöin pätee*

$$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b s(x)dx.$$

*Todistus.* Olkoon $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ funktioon $s$ liittyvä tasavälijako. Määrittelemällä $P_2 = \{kx_0, kx_1, \dots, kx_n\}$ saadaan välin $]ka, kb[$ tasavälijako. Merkitään $s(x) =: s_i$, mikäli $x \in ]x_{i-1}, x_i[$, ja $t(x) = s(\frac{x}{k})$, mikäli $x \in ]ka, kb[$. Tällöin $t(x)$, missä $x \in ]kx_{i-1}, kx_i[$, vastaa lukua $s_i$.

$$\int_{ka}^{kb} t(x)dx = \sum_{i=1}^{n} s_i k\delta = k\delta \sum_{i=1}^{n} s_i = k \int_a^b s(x)dx.$$

□

Lauseissa 2.10 ja 2.17 asetettiin rajoituksia välipisteen valinnalle ja valitulle vakiolle. Näitä tuloksia saadaan kuitenkin yleistettyä ottamalla käyttöön uusia määritelmiä:

**Määritelmä 2.18.** Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio. Määritellään

$$\int_b^a s(x)dx := -\int_a^b s(x)dx.$$

**Määritelmä 2.19.** Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio ja $c \in [a, b]$. Määritellään

$$\int_c^c s(x)dx := 0.$$

Näiden määritelmien avulla voidaan lauseen 2.10 pisteiden $a, b, c$ järjestys valita miten hyvänsä (kunhan oletus välien osamäärän rationaalisuudesta on voimassa) ja tasaväliporrasfunktiolle $s$ pätee

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx.$$

Todistetaan esimerkiksi tapaus $b < a < c$ :

*Todistus.* Lauseen 2.10 nojalla

$$\int_b^c s(x)dx = \int_b^a s(x)dx + \int_a^c s(x)dx.$$

Lisäämällä molemmille puolille

$$-\int_b^c s(x)dx - \int_b^a s(x)dx$$

saadaan

$$-\int_b^a s(x)dx = -\int_b^c s(x)dx + \int_a^c s(x)dx.$$

Sitten järjestetään termejä ja käytetään määritelmää 2.18 jolloin saadaan

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^c s(x)dx - \int_b^c s(x)dx,$$

josta uudestaan määritelmän 2.18 nojalla saadaan

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx,$$

mikä riittää todistamaan väitteen.

□

Myöskin lausetta 2.17 voidaan käyttää yleisemmässä muodossa, ja valita $k$ myös negatiiviseksi. Todistetaan ensin aputulos:

**Lause 2.20.** *Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio. Tällöin pätee*

$$\int_{-a}^{-b} s(-x)dx = -\int_{a}^{b} s(x)dx.$$

*Todistus.* Olkoon $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ välin $[a, b]$ tasavälijako. Merkitään $s_i := s(x)$, missä $x \in ]x_{i-1}, x_i[$. Olkoon $P_2 = \{-b = y_0, y_1, \ldots, y_n = -a\}$ välin $[-b, -a]$ tasavälijako. Olkoon $t : [-b, -a] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio siten, että $t(x) := s(-x)$. Merkitään $t_i = t(x)$, missä $x \in ]y_{i-1}, y_i[$. Nyt $t_i = s_{n-i+1}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Merkitään $\delta := x_i - x_{i-1} = y_i - y_{i-1}$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{-b} t(x)dx &\overset{2.18}{=} -\int_{-b}^{-a} t(x)dx \\
&\overset{\text{määr.}}{=} -\delta \sum_{i=1}^{n} t_i = -\delta(s_n + s_{n-1} + \cdots + s_1) \\
&= -\delta \sum_{i=1}^{n} s_i = -\int_{a}^{b} s(x)dx.
\end{aligned}$$

□

*Lauseen 2.17 todistus, kun $k < 0$.* Olkoon $k < 0$ ja $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio. Voidaan muokata integraalia:

$$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = \int_{(-k)(-a)}^{(-k)(-b)} s\left(\frac{-x}{-k}\right) dx.$$

Nyt lausetta 2.17 käyttämällä saadaan

$$\int_{(-k)(-a)}^{(-k)(-b)} s\left(\frac{-x}{-k}\right) dx = -k\int_{-a}^{-b} s(-x)dx.$$

Käyttämällä aputulosta 2.20 saadaan

$$-k\int_{-a}^{-b} s(-x)dx = -(-k)\int_{a}^{b} s(x)dx = k\int_{a}^{b} s(x)dx.$$

□

# 3 Paloittain jatkuvan, rajoitetun funktion määrätty tasaväli-integraali

Edellisessä kappaleessa havaittiin, että tasaväliporrasfunktion tasaväli-integraali on monessa suhteessa samanlainen kuin porrasfunktion Riemann-integraali. Tämä viittaisi siihen, että myös suljetulla ja rajoitetulla välillä määritellylle rajoitetulle ja paloittain jatkuvalle funktiolle saadaan määriteltyä mielekäs integraalin käsite tasavälijaon avulla. Tässä kappaleessa näin tehdäänkin, eli määritellään rajoitetun ja paloittain jatkuvan funktion määrätty tasaväli-integraali. Kappaleessa esitetään myös vaihtoehtoinen määritelmä, joka osoittautuu varsinaisen määritelmän kanssa yhtäpitäväksi, kun tarkastellaan paloittain jatkuvia ja rajoitettuja funktioita.

Määrätyn tasaväli-integraalin olemassaoloa tai funktion integroituvuutta ei määritellä sen kummemmin. Tässä onkin mielenkiintoinen jatkotutkimuksen aihe: Mitkä funktiot ovat "tasaväli-integroituvia"? Myöhemmin todistetaan, että Riemann-integroituvalle funktiolle määrätty Riemann-integraali ja tasaväli-integraali ovat samat.

**Määritelmä 3.1** (rajoitetun, paloittain jatkuvan funktion tasaväli-integraali)**.** Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva ja rajoitettu. Funktion $f$ *määrätty tasaväli-integraali yli välin* $[a,b]$ on

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right).$$

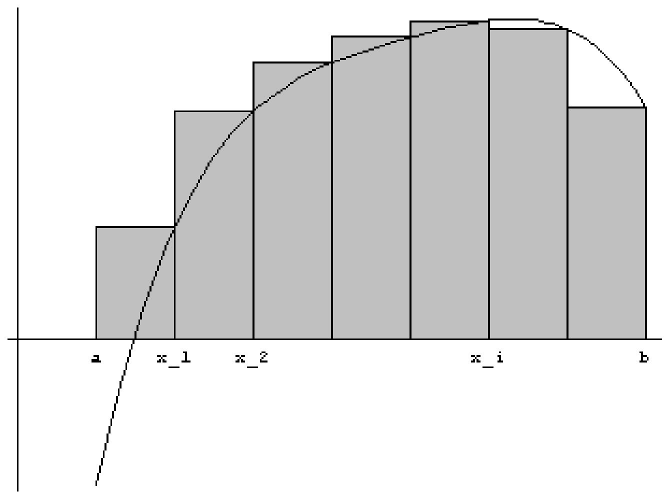
*Huomautus* 3.2. Määritelmässä on valittu funktion arvon laskemispisteeksi kunkin välin[5] oikeanpuoleinen päätepiste, mutta tällä ei ole suurta merkitystä lopputuloksen kannalta koska tarkastellaan vain paloittain jatkuvia funktioita. Pisteen valinnalla on kuitenkin yleisessä tapauksessa merkitystä: jos se saadaan valita joka väliltä mielivaltaisesta kohdasta, päädytään perustavalla tavalla[6] eri määritelmään.

*Huomautus* 3.3. Määritelmän kanssa tulee ongelmia, jos $f$ onkin rajoittamaton, esim $f : ]0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, tai määrittelyväli on rajoittamaton, esim. $f : [-5,\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan x$. Ei kuitenkaan mietitä näitä vaan pitäydytään rajoitetuilla väleillä määritellyissä rajoitetuissa funktioissa.

*Huomautus* 3.4. Määrätty tasaväli-integraali on määritelty *vain paloittain jatkuville, rajoitetuille funktioille*. Raja-arvo on tällöin aina olemassa ja yksikäsitteinen. Tämä todistetaan seuraavassa. Ensin todistetaan tulos jatkuville funktioille.

[5]Tässä kunkin välin pituus on vakio, $\frac{b-a}{n}$.

[6]Vaikka tässä ei tasaväli-integroituvuutta määriteltykään, voitaisiin määritellä että funktio on tasaväli-integroituva, mikäli määritelmässä esiintyvä raja-arvo on olemassa ja se on yksikäsitteinen. Tämä ei kuitenkaan ole mielekästä, sillä tällöin integraalin käsite olisi ristiriidassa yleisesti käytössä olevien integraalien määritelmien kanssa. Katso esimerkki 16.6.




Kuva 3: Määrätyn tasaväli-integraalin määritelmässä esiintyvä summa vastaa kuvion tummennettua alaa. Kun jakovälien määrä $n \to \infty$, saadaan integraali.

**Lause 3.5.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin raja-arvo*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right).$$

*on olemassa.*

*Todistus.* Todistus perustuu siihen, että jatkuva funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva[7], ks. [3, s. 100-101]. Merkitään

$$F_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

$F_n$ on arvio integraalille, kun osavälien määrä on $n$. Funktion arvo lasketaan kunkin osavälin oikeanpuoleisessa päätepisteessä ja kerrotaan osavälin pituudella; tämä antaa yhden suorakaiteen pinta-alan.

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $f$ on tasaisesti jatkuva, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, kunhan $|x - y| < \delta$. Olkoon $S_n = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ sellainen tasavälijako, että osavälin $[x_{i-1}, x_i]$ pituus on $< \delta$. Olkoon tasavälijako $S_N = \{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$ tasavälijaon $S_n$ hienonnus, siis $S_n \subset S_N$. Merkitään

$$F_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{b-a}{N} f\left(a + j\frac{b-a}{N}\right).$$

[7]Se, että funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva tarkoittaa sitä, että jos on annettu $\epsilon > 0$, on olemassa $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ siten, että kaikilla $\alpha, \beta \in [a, b]$

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < \epsilon, \quad \text{kunhan } |\alpha - \beta| < \delta.$$

Jaossa $S_N$ väli $[x_{i-1}, x_i]$ jaetaan osaväleihin $[y_r, y_{r+1}], [y_{r+1}, y_{r+2}] \ldots, [y_{s-1}, y_s]$. Näitä välejä vastaavien termien osuus $F_N$:stä on

$$\sum_{j=r+1}^{s} \frac{b-a}{N} f\left(a + j\frac{b-a}{N}\right).$$

Osaväliä $[x_{i-1}, x_i]$ vastaavan termin vaikutus $F_n$:ään on $\frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$, mikä voidaan kirjoittaa muodossa

$$(s-r) \cdot \frac{b-a}{N} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{j=r+1}^{s} \frac{b-a}{N} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Väliin $[x_{i-1}, x_i]$ liittyville, jakoja $S_N$ ja $S_n$ vastaaville termeille ($j = r+1, r+2, \ldots, s$) pätee

$$\left| f\left(a + j\frac{b-a}{N}\right) - f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right| < \epsilon,$$

koska oli valittu[8] $\frac{b-a}{n} < \delta$. Siispä on voimassa

$$\left| \sum_{j=r+1}^{s} \left[ f\left(a + j\frac{b-a}{N}\right) - f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right] \frac{b-a}{N} \right| \leq \sum_{j=r+1}^{s} \epsilon \cdot \frac{b-a}{N} = \epsilon \frac{b-a}{n}.$$

Ottamalla huomioon kaikkiin osaväleihin $x_{i-1}, x_i$ liittyvät termit saadaan arvioksi

$$|F_N - F_n| \leq \sum_{i=1}^{n} \epsilon \frac{b-a}{n} = \epsilon(b-a), \tag{2}$$

kunhan $\frac{b-a}{n} < \delta(\epsilon)$ ja $S_N$ on jaon $S_n$ hienonnus.

Valitaan nyt tasavälijaot $S_n, S_m$ ja $S_N$ siten, että $S_N$ on tasavälijakojen $S_n, S_m$ hienonnus. Oletetaan, että $\frac{b-a}{n} < \delta(\epsilon)$ ja $\frac{b-a}{m} < \delta(\epsilon)$. Kolmioepäyhtälön ja yhtälön 3 avulla saadaan

$$|F_n - F_m| \leq |(F_n - F_N) + (F_N - F_m)| \leq |F_n - F_N| + |F_m - F_N| \leq 2\epsilon(b-a).$$

Voidaan kirjoittaa

$$|F_n - F_m| < 3\epsilon(b-a)$$

kunhan $m, n$ ovat riittävän suuria. Tästä ja Cauchyn ehdosta lukujonon suppenemiselle seuraa, että raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F = \int_a^b f(x)dx.$$

on olemassa. $\square$

[8]Ehdosta seuraa, että

$$\left| \left(a + j\frac{b-a}{N}\right) - \left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right| < \delta.$$

Seuraavassa todistetaan, että arvo $\int_a^b f(x)dx$ ei riipu valituista pisteistä: voidaan valita jokin muu kuin tarkasteltavan välin oikeanpuoleinen päätepiste integraalin pysyessä muuttumattomana.

**Lause 3.6.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja olkoon $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_i)$$

*on olemassa ja yksikäsitteinen. Raja-arvo ei siis riipu siitä miten pisteet $\xi_i$ on väleiltä valittu. Lisäksi pätee*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx.$$

*Todistus.* Osoitetaan, että jos valitaan mikä muu hyvänsä välin piste, tulos on sama. Olkoon

$$F_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{b-a}{m} f(\xi_i),$$

missä $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ voidaan valita mielivaltaisesti. Lauseen 3.5 todistuksessa ei tarvittaisi oletusta siitä, että $F_n$:n ja $F_m$:n lausekkeissa lasketaan funktion arvoja osavälin oikeanpuoleisessa päätepisteessä. Nimittäin jos valitaan päätepisteen $a + i\frac{b-a}{n}$ sijasta mikä hyvänsä pisteistä

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

päästään samaan epäyhtälöön, koska funktion arvot ovat kuitenkin $\epsilon$:ia lähempänä toisiaan, ks. [3, s. 193-194]. Muodostetuille $F_n$ ja $F_m$ pätee siten

$$|F_n - F_m| < 3\epsilon(b-a)$$

kunhan $m, n$ ovat tarpeeksi isoja. Merkitään $\lim_{m\to\infty} F_m = A$. Nyt pätee myöskin

$$|F_n - A| \leq 3\epsilon(b-a).$$

ja koska tämä pätee kaikilla $\epsilon > 0$, on oltava

$$\lim_{n\to\infty} F_n = A,$$

eli raja-arvo ei riipu välipisteen valinnasta. □

**Lause 3.7.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva ja rajoitettu. Tällöin raja-arvo*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

*on olemassa.*

*Todistus.* Olkoon $\epsilon > 0$. Määritellään $A := \{f\text{:n epäjatkuvuuspisteet}\}$. Koska $f$ on tasaisesti jatkuva joukossa $[a, b] \setminus A$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, kunhan $|x - y| < \delta$, eikä $x$:n ja $y$:n välissä ole epäjatkuvuuspistettä.

Olkoon $M$ sellainen, että $M > \sup |f(x)|$. Olkoon epäjatkuvuuspisteitä $k$ kappaletta. Määritellään $\delta := \frac{\epsilon}{5kM}$. Olkoon $n > \frac{5k(b-a)M}{\epsilon}$ jolloin $\frac{b-a}{n} < \delta$. Määritellään

$$F_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Olkoon $S_n = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ välin $[a, b]$ tasavälijako. Olkoon tasavälijako $S_N = \{a = y_0, y_1, \ldots, y_N = b\}$ tasavälijaon $S_n$ hienonnus, siis $S_n \subset S_N$. Merkitään

$$F_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{b-a}{N} f\left(a + j\frac{b-a}{N}\right)$$

Jaossa $S_N$ väli $[x_{i-1}, x_i]$ jaetaan osaväleihin $[y_r, y_{r+1}], [y_{r+1}, y_{r+2}], \ldots, [y_{s-1}, y_s]$. Näitä välejä vastaavien termien osuus $F_N$:stä on

$$\sum_{j=r+1}^{s} \frac{b-a}{N} f\left(a + j\frac{b-a}{N}\right)$$

Tarkastellaan osavälejä $[x_{i-1}, x_i]$, joilla ei ole epäjatkuvuuspistettä. Tällöin osavälin vaikutus $F_n$:ään on

$$\frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right),$$

mikä voidaan kirjoittaa muodossa

$$(s-r) \cdot \frac{b-a}{N} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{j=r+1}^{s} \frac{b-a}{N} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Näihin väleihin $[x_{i-1}, x_i]$ liittyville, jakoja $S_N$ ja $S_n$ vastaaville termeille ($j = r, r+1, \ldots, s$) pätee

$$\left| f\left(a + j\frac{b-a}{N}\right) - f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right| < \epsilon,$$

koska oli valittu $\frac{b-a}{n} < \delta$. Siispä on voimassa

$$\left| \sum_{j=r+1}^{s} \left[ f\left(a + j\frac{b-a}{N}\right) - f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right] \frac{b-a}{N} \right| \leq \sum_{j=r+1}^{s} \epsilon \cdot \frac{b-a}{N} = \epsilon\frac{b-a}{n}.$$

Epäjatkuvuuspisteen sisältävien välien lukumäärä on $\leq k$, joten niiden kontribuutio on korkeintaan $2 \cdot k\frac{b-a}{n} \cdot M < \epsilon$. Ottamalla huomioon kaikkiin osaväleihin $[x_{i-1}, x_i]$ liittyvät termit saadaan näin ollen arvioksi

$$|F_N - F_n| < \sum_{i=1}^{n} \epsilon\frac{b-a}{n} + \epsilon = \epsilon(b-a) + \epsilon, \tag{3}$$

kunhan $\frac{b-a}{n} < \delta(\epsilon)$ ja $S_N$ on jaon $S_n$ hienonnus.

Valitaan nyt tasavälijaot $S_n, S_m$ ja $S_N$ siten, että $S_N$ on tasavälijakojen $S_n, S_m$ hienonnus. Oletetaan, että $\frac{b-a}{n} < \delta(\epsilon)$ ja $\frac{b-a}{m} < \delta(\epsilon)$. Kolmioepäyhtälön ja yhtälön 3 avulla saadaan

$$|F_n - F_m| \leq |(F_n - F_N) + (F_N - F_m)| \leq |F_n - F_N| + |F_m - F_N| \leq 2(\epsilon(b-a) + \epsilon).$$

Voidaan kirjoittaa

$$|F_n - F_m| < 3(\epsilon(b-a) + \epsilon)$$

kunhan $m, n$ ovat riittävän suuria. Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, epäyhtälöstä ja Cauchyn ehdosta lukujonon suppenemiselle seuraa, että raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F = \int_a^b f(x)dx$$

on olemassa. □

**Lause 3.8.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva ja olkoon $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$ mielivaltainen. Tällöin raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_i)$$

*on olemassa, ja se on sitä riippumatta miten pisteet $\xi_i$ on väleiltä valittu. Lisäksi pätee*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx.$$

*Todistus.* Todistus on samanlainen kuin lauseen 3.7 todistus. □

Riemann-integroituvan funktion määrätyn tasaväli-integraalin olemassaoloon palataan myöhemmin kappaleessa *Riemann-integraali*.

Tasaväli-integraali voidaan määritellä myös toisella tapaa:

**Määritelmä 3.9** (rajoitetun, paloittain jatkuvan funktion tasaväli-integraali, 2. versio)**.** Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva funktio. Olkoot $s, t$ sellaisia tasaväliporrasfunktioita, että $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$. Mikäli löytyy tasan yksi luku $I \in \mathbb{R}$ siten, että jokaisella ehdon täyttävällä tasaväliporrasfunktioparilla $s, t$ pätee

$$\int_a^b s(x)dx \leq I \leq \int_a^b t(x)dx,$$

niin funktion $f$ määrätty tasaväli-integraali yli välin $[a,b]$ on

$$\int_a^b f(x)dx := I.$$

*Huomautus* 3.10. Paloittain jatkuvalle, rajoitetulle funktiolle tasaväli-integraali on aina olemassa ja yksikäsitteinen myös tämän toisen määritelmän mukaan.

*Huomautus* 3.11. Osoittautuu, että rajoitetuille ja paloittain jatkuville funktioille määritelmät ovat yhtäpitävät. Yleisessä tapauksessa määritelmät *eivät* kuitenkaan ole yhtäpitävät. Esimerkin 16.6 mukaan raja-arvomääritelmä antaa integraalin arvoksi 1, mutta vaihtoehtoinen määritelmä ei suostu integroimaan funktiota.

**Määritelmä 3.12** (tasavälialaintegraali ja tasaväliyläintegraali)**.** Olkoon $f$ rajoitettu, paloittain jatkuva välillä $[a, b]$. Olkoot $s, t$ tasaväliporrasfunktioita. Sanotaan, että *väliin* $[a, b]$ *liittyvä* $f$*:n tasavälialaintegraali* on

$$\underline{I}(f) = \underline{I}(f_{[a,b]}) := \sup \left\{ \int_a^b s(x)dx : s(x) \leq f(x) \text{ kaikilla } x \in [a, b] \right\}$$

ja *tasaväliyläintegraali* on

$$\overline{I}(f) = \overline{I}(f_{[a,b]}) := \inf \left\{ \int_a^b t(x)dx : f(x) \leq t(x) \text{ kaikilla } x \in [a, b] \right\}.$$

*Huomautus* 3.13. Tasavälialaintegraalit ovat olemassa, sillä ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on supremum ja alhaalta rajoitetulla infimum. Joukkojen rajoittuneisuus seuraa $f$ rajoittuneisuudesta.

*Huomautus* 3.14. Mikäli $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, on tämä yhteinen arvo määritelmässä esiintyvä arvo $I$. Tämä seuraa suoraan tasaväliala- ja tasaväliyläintegraalien määritelmistä.

**Lause 3.15.** *Olkoon* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva. Tällöin*

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

*Todistus.* Koska $f$ on jatkuva suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$, on se tasaisesti jatkuva. Olkoon $\epsilon > 0$. Nyt löytyy $n \in \mathbb{N}$ siten, että mikäli

$$|x - y| \leq \frac{b - a}{n}, \text{ niin } |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2(b - a)}.$$

Olkoon $P = \{a = x_0, x_1, \ldots x_n = b\}$ välin $[a, b]$ tasavälijako. Määritellään tasaväliporrasfunktiot

$$s_i = s(x) := \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

ja

$$t_i = t(x) := \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Nyt $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$. Jatkuva funktio saavuttaa suljetulla ja rajoitetulla välillä pienimmän ja suurimman arvonsa, joten joillakin muttujien $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ arvoilla $f(y_i) = s_i$ ja $f(z_i) = t_i$. Koska

$$|y_i - z_i| \leq x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n},$$

pätee

$$|s_i - t_i| = |f(y_i) - f(z_i)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned}\int_a^b t(x)dx - \int_a^b s(x)dx &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n t_i - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n s_i \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n (t_i - s_i) \\ &< \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n\epsilon}{b-a} = \epsilon.\end{aligned}$$

Näin ollen tasaväliyläintegraalille ja tasavälialaintegraalille pätee

$$|\overline{I}(f) - \underline{I}(f)| < \epsilon,$$

joten koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, väite pätee. □

**Lause 3.16.** *Olkoon* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva. Tällöin pätee*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) = \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

*Todistus.* Osoitetaan, että raja-arvo on aina tasaväliala- ja tasaväliyläintegraalien välissä. Koska $f$ on jatkuva,

$$\inf\{f(x) : x \in ]x_{i-1}, x_i[\} \leq f(x_i) \leq \sup\{f(x) : x \in ]x_{i-1}, x_i[\}.$$

Mikäli näin ei olisi, löytyisi[9] $c \in [x_{i-1}, x_i]$ siten, että $f(x) < \inf f(x)$ tai $f(x) > \sup f(x)$ kun $x \in ]c, x_i[$, mikä on mahdotonta.

Olkoot $s, t$ porrasfunktioita, joista $s$ arvioi $f$:ää alapuolelta ja $t$ yläpuolelta siten, että kullakin välillä $]x_{i-1}, x_i[$ pätee $s_i = s(x) := \inf\{f(x) : x \in ]x_{i-1}, x_i[\}$ ja $t_i = t(x) := \sup\{f(x) : x \in ]x_{i-1}, x_i[\}$. Olkoot $P_s$ ja $P_t$ funktioita $s$ ja $t$ vastaavat tasavälijaot, ja olkoon $P$ sellainen jako, että $P_s \cup P_t \subset P$ ja lisäksi $s$ ja $t$ ovat tasaväliporrasfunktioita, kun jakopisteinä ovat $P$:n alkiot. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ sellainen, että $P$:n alkioiden lukumäärä on $n + 1$. Tällöin raja-arvolausekkeessa esiintyvän summan termeille pätee

$$s_i \leq f(x_i) \leq t_i$$

kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Näin ollen pätee

$$\int_a^b s(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n s_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i) \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n t_i = \int_a^b t(x)dx.$$

[9] $x$:n ollessa lähellä $x_i$:tä funktion $f$ arvot ovat lähellä $f(x_i)$:tä

Siispä koska $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) \in \mathbb{R}$, pätee myös

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) = \underline{I}(f).$$

□

Näin on saatu todistettua, että jatkuvalle $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ voidaan käyttää kumpaa tahansa määritelmistä tasaväli-integraalia $\int_a^b f(x)dx$ laskettaessa. Seuraavat lauseet sisältävät saman tuloksen rajoitetuille ja paloittain jatkuville funktioille.

**Lause 3.17.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Tällöin pätee*

$$\underline{I}(f_{[a,b]}) = \underline{I}(f_{[a,c]}) + \underline{I}(f_{[c,b]}).$$

*Todistus.* Koska $f$ on rajoitettu, ovat $\underline{I}(f_{[a,c]})$, $\underline{I}(f_{[a,c]})$ ja $\underline{I}(f_{[c,b]})$ olemassa. Selvästi kaikilla tasaväliporrasfunktiolla $s : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t : [a,c] \to \mathbb{R}$ ja $u : [c,b] \to \mathbb{R}$ joille on voimassa $t(x) \leq s(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in [a,c]$ ja $u(x) \leq s(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in [c,b]$ pätee

$$\int_a^b s(x)dx \geq \int_a^c t(x)dx + \int_c^b u(x)dx$$

joten

$$\begin{aligned}\sup\left\{\int_a^b s(x)dx : s(x) \leq f(x), x \in [a,b]\right\} &\geq \sup\left\{\int_a^c t(x)dx : t(x) \leq f(x), x \in [a,c]\right\} \\ &\quad + \sup\left\{\int_c^b u(x)dx : u(x) \leq f(x), x \in [c,b]\right\},\end{aligned}$$

eli

$$\underline{I}(f_{[a,b]}) \geq \underline{I}(f_{[a,c]}) + \underline{I}(f_{[c,b]}).$$

Todistetaan sitten, että

$$\underline{I}(f_{[a,b]}) \leq \underline{I}(f_{[a,c]}) + \underline{I}(f_{[c,b]}).$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Lauseen 2.12 nojalla jokaiselle tasaväliporrasfunktiolle $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ löytyy tasaväliporrasfunktiot $t : [a,c] \to \mathbb{R}$ ja $u : [c,b] \to \mathbb{R}$ siten, että

$$t(x) \leq s(x) \text{ kaikilla } x \in [a,c] \qquad \text{ja} \qquad u(x) \leq s(x) \text{ kaikilla } x \in [c,b]$$

ja lisäksi

$$\int_a^b s(x)dx - \epsilon < \int_a^c t(x)dx + \int_c^b u(x)dx.$$

Nyt on välttämättä

$$\int_a^b s(x)dx \leq \int_a^c t(x)dx + \int_c^b u(x)dx,$$

sillä mikäli olisi $\underline{I}(f_{[a,b]}) > \underline{I}(f_{[a,c]}) + \underline{I}(f_{[c,b]})$, löytyisi $\epsilon_2 > 0$ siten, että

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)dx - \epsilon_2 > \sup &\left\{ \int_a^c t(x)dx : t(x) \leq f(x), x \in [a,c] \right\} \\ + \sup &\left\{ \int_c^b u(x)dx : u(x) \leq f(x), x \in [c,b] \right\},\end{aligned}$$

mikä on lauseen 2.12 nojalla mahdotonta. Siis antiteesi on väärä ja pätee

$$\underline{I}(f_{[a,b]}) \leq \underline{I}(f_{[a,c]}) + \underline{I}(f_{[c,b]}).$$

Saaduista kahdesta tuloksesta seuraa, että

$$\underline{I}(f_{[a,b]}) = \underline{I}(f_{[a,c]}) + \underline{I}(f_{[c,b]})$$

□

**Lause 3.18.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin pätee*

$$\overline{I}(f_{[a,b]}) = \overline{I}(f_{[a,c]}) + \overline{I}(f_{[c,b]}).$$

*Todistus.* Samalla tavalla kuin edellinen todistus. □

**Lause 3.19.** *Paloittain jatkuvalle, rajoitetulle funktiolle $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pätee*

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

*Todistus.* Olkoon $\epsilon > 0$. Riittää osoittaa, että

$$\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \underline{I}(f) + \epsilon.$$

Ensimmäinen epäyhtälö seuraa suoraan tasaväliala- ja tasaväliyläintegraalien määritelmistä.

Todistetaan sitten toinen epäyhtälö. Koska $f$ on rajoitettu, on $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|f(x)| < M$ kaikilla $x \in [a,b]$. Koska $f$ on paloittain jatkuva, löytyy korkeintaan äärellisen monta pistettä, joissa $f$ on epäjatkuva. Merkitään tätä pistejoukkoa $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, missä $x_{i-1} < x_i$ kaikilla $i = 2, 3, \ldots, k$. Merkitään $x_0 = a$ ja $x_{k+1} = b$. Valitaan $\delta := \frac{\epsilon}{10(k+1)M}$. Merkitään

$$\underline{I}(f_i) := \underline{I}(f_{[x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]}).$$

ja

$$\overline{I}(f_i) := \overline{I}(f_{[x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]}),$$

missä $i = 1, 2, \ldots, k+1$.

Lauseen 3.17 nojalla

$$\underline{I}(f_{\bigcup_{i=1}^{k+1}[x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]}) = \sum_{i=1}^{k+1}(f_{[x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]}).$$

Näin ollen tasavälialaintegraali eroaa summalausekkeen arvosta vain epäjatkuvuuspisteiden $\delta$-ympäristöjen aiheuttaman muutoksen verran:

$$\left|\underline{I}(f) - \sum_{i=1}^{k+1}\underline{I}(f_i)\right| < (k+1)\cdot 2M \cdot 2\delta < \frac{4}{10}\epsilon = \frac{2}{5}\epsilon$$

Siispä

$$\underline{I}(f) \in \left]\sum_{i=1}^{k+1}\underline{I}(f_i) - \frac{2}{5}\epsilon, \sum_{i=1}^{k+1}\underline{I}(f_i) + \frac{2}{5}\epsilon\right[$$

Samalla tavalla nähdään vastaavasti, että

$$\overline{I}(f) \in \left]\sum_{i=1}^{k+1}\overline{I}(f_i) - \frac{2}{5}\epsilon, \sum_{i=1}^{k+1}\overline{I}(f_i) + \frac{2}{5}\epsilon\right[.$$

Lauseen 3.15 nojalla pätee[10]

$$\sum_{i=1}^{k+1}\underline{I}(f_i) = \sum_{i=1}^{k+1}\overline{I}(f_i),$$

joten on voimassa

$$\left|\underline{I}(f) - \overline{I}(f)\right| < \frac{4}{5}\epsilon < \epsilon,$$

mistä seuraa, että

$$\overline{I}(f) \leq \underline{I}(f) + \epsilon.$$

Näin ollen väite pätee. $\square$

**Lause 3.20.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva. Tällöin pätee*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) = \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

*Todistus.* Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \geq \underline{I}(f).$$

[10] Tulos pätee jokaiselle välille $[x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]$ erikseen, joten se pätee myös summalle

Riittää osoittaa, että jos on annettu $\epsilon > 0$, on voimassa

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) + \epsilon > \underline{I}(f).$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Merkitään epäjatkuvuuspisteiden joukkoa $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k$. Merkitään $M := \max |f(x)| : x \in [a,b]$. Olkoon

$$n := \frac{\epsilon}{(b-a)(k+1)3M}.$$

Epäjatkuvuuspisteiden lähellä raja-arvotermiin voi tulla pienempiä arvoja, kuin mitä vastaavat tasavälialaintegraalin tasaväliporrasfunktion termit ovat. Vaikutus on kuitenkin pienempää kuin

$$(k+1) \cdot 2M \cdot \frac{b-a}{n} = (k+1) \cdot 2M \cdot \frac{\epsilon(b-a)}{(b-a)3M(k+1)} = \frac{2}{3}\epsilon.$$

Niillä väleillä $[x_{i-1}, x_i]$, joille ei kuulu epäjatkuvuuspisteitä, raja-arvolausekkeen termit ovat vähintään yhtä suuria kuin tasavälialaintegraalin vastaavat termit:

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sup\{s(x) : s(x) \leq f(x)\} \leq \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

kaikille $i = 1, 2, \ldots, n$. Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) \geq \underline{I}(f) - \frac{2}{3}\epsilon,$$

eli

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) + \epsilon > \underline{I}(f),$$

joten koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, on oltava

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \geq \underline{I}(f).$$

Samanlaisella päättelyllä nähdään, että

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \leq \overline{I}(f).$$

Lauseen 3.19 nojalla pätee

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f),$$

joten täytyy olla

$$\underline{I}(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \overline{I}(f),$$

$\square$

# 4 Määrätyn tasaväli-integraalin ominaisuuksia

Tässä kappaleessa listataan joitain tasaväli-integraalin ominaisuuksia.

**Lause 4.1.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva. Olkoon $c \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

*Todistus.* Lauseen 3.7 nojalla raja-arvo on olemassa[11]. Vakio saadaan ottaa summasta ja raja-arvosta ulos, joten

$$\begin{aligned}
\int_a^b cf(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}cf\left(a+j\frac{b-a}{n}\right)\\
&= c\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+j\frac{b-a}{n}\right) = c\int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

□

Seuraava lause kertoo että summan integraali on integraalien summa.

**Lause 4.2.** *Olkoot $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettuja ja paloittain jatkuvia. On voimassa*

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

*Todistus.* Todistuksessa käytetään jälleen raja-arvon ominaisuuksia hyväksi.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)+g(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}\left(f\left(a+j\frac{b-a}{n}\right)+g\left(a+j\frac{b-a}{n}\right)\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+j\frac{b-a}{n}\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}g\left(a+j\frac{b-a}{n}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+j\frac{b-a}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}g\left(a+j\frac{b-a}{n}\right)\\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.
\end{aligned}$$

□

Lauseita 4.1 ja 4.2 hyväksi käyttäen saadaan integroitua mikä hyvänsä rajoitettujen, paloittain jatkuvien funktioiden lineaarikombinaatio:

[11] Tulosta käytetään useasti kappaleen aikana. Sitä ei kuitenkaan aina mainita.

**Lause 4.3.** *Olkoot $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettuja ja paloittain jatkuvia. Olkoot $c_i \in \mathbb{R}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots n$. Tällöin pätee*

$$\int_a^b \left( \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i(x) dx.$$

*Todistus.* Tulos seuraa lauseista 4.1 ja 4.2:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left( \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right) dx &= \int_a^b (c_1 f_1(x) dx + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)) dx \\
&\overset{4.2}{=} \int_a^b c_1 f_1(x) dx + \int_a^b (c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)) dx \\
&\overset{4.2}{=} \ldots \overset{4.2}{=} \int_a^b c_1 f_1(x) dx + \int_a^b c_2 f_2(x) dx + \cdots + \int_a^b c_n f_n(x) dx \\
&\overset{4.1}{=} c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx + \cdots + c_n \int_a^b f_n(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i(x) dx.
\end{aligned}$$

□

**Lause 4.4.** *Mikäli $c \in ]a,b[$, ja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja paloittain jatkuva, on voimassa yhtäsuuruus*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

*Todistus.* Lauseen 3.17 nojalla rajoitetulle $f$ on voimassa

$$\underline{I}(f_{[a,b]}) = \underline{I}(f_{[a,c]}) + \underline{I}(f_{[c,b]})$$

ja lauseen 3.18 nojalla pätee

$$\overline{I}(f_{[a,b]}) = \overline{I}(f_{[a,c]}) + \overline{I}(f_{[c,b]}).$$

Lauseen 3.19 nojalla taas pätee kullekin osavälille erikseen

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

Näistä tuloksista väite seuraa. □

**Lause 4.5.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva. Olkoon $c \in \mathbb{R}$. Tällöin on*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx.$$

*Todistus.* Olkoon $g : [a+c, b+c] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x-c)$. Merkitään $\overline{I}(g)$:llä $g$:n tasaväliyläintegraalia ja $\underline{I}(g)$:llä $g$:n tasavälialaintegraalia. Riittää osoittaa, että

$$\overline{I}(g) = \underline{I}(g) = \int_a^b f(x)dx.$$

Olkoon $s : [a+c, b+c] \to \mathbb{R}$ mikä hyvänsä tasaväliporrasfunktio, jolle pätee $s(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a+c, b+c]$. Tällöin tasaväliporrasfunktiolle $s_1 : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto s(x+c)$ pätee $s_1(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$. Lauseen 2.16 nojalla pätee

$$\int_{a+c}^{b+c} s(x)dx = \int_a^b s(x+c) = \int_a^b s_1(x)dx.$$

Siispä pätee

$$\underline{I}(g) = \sup\left\{\int_{a+c}^{b+c} s(x)dx : s(x) \leq g(x)\right\} = \sup\left\{\int_{a+c}^{b+c} s_1(x)dx : s_1(x) \leq f(x)\right\} = \int_a^b f(x)dx.$$

Koska $f$ on rajoitettu ja paloittain jatkuva, lauseen 3.19 nojalla pätee

$$\underline{I}(g) = \overline{I}(g),$$

joka riittää väitteen todistamiseen. □

**Lause 4.6.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva. Kaikilla $k > 0$ pätee*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right).$$

*Todistus.* Määritellään $g(x) := f(\frac{x}{k})$, missä $g : [ka, kb] \to \mathbb{R}$. Olkoot $\underline{I}(g)$ ja $\overline{I}(g)$ väliin $[ka, kb]$ ja funktioon $g$ liittyvät tasaväliylä- ja tasavälialaintegraalit. Osoitetaan, että

$$\overline{I}(g) = \underline{I}(g) = k\int_a^b f(x)dx.$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa suoraan lauseesta 3.19 ja siitä, että $g$ on rajoitettu ja paloittain jatkuva. Osoitetaan toinen yhtäsuuruus: Olkoon $s : [ka, kb] \to \mathbb{R}$ mikä hyvänsä tasaväliporrasfunktio, jolle pätee $s(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [ka, kb]$. Tällöin tasaväliporrasfunktiolle $u : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto s(kx)$ pätee $u(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$. Lauseen 2.17 nojalla on voimassa

$$\int_{ka}^{kb} s(x)dx = k \int_a^b s(kx)dx = k \int_a^b u(x)dx.$$

Näin ollen saadaan (tässä $u$ ja $s$ eivät ole kiinnitettyjä)

$$\begin{aligned}
\underline{I}(g) &= \sup \left\{ \int_{ka}^{kb} s(x)dx : s(x) \leq g(x) \right\} \\
&= \sup \left\{ k \int_a^b u(x)dx : u(x) \leq f(x) \right\} \\
&= k \sup \left\{ \int_a^b u(x)dx : u(x) \leq f(x) \right\} \\
&= k \int_a^b f(x)dx,
\end{aligned}$$

mikä riittää väitteen todistamiseen. □

**Lause 4.7.** *Olkoot $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettuja ja paloittain jatkuvia. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

*mikäli $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$.*

*Todistus.* Olkoon $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$. Määritellään tasaväliporrasfunktio $s : [a, b] \to \mathbb{R}$. Jos porrasfunktio arvioi $f$:ää alapuolelta, arvioi se myös $g$:tä alapuolelta. Jos se arvioi $g$:tä yläpuolelta, arvioi se myös $f$:ää yläpuolelta. Tästä seuraa

$$\overline{I}(f) \leq \overline{I}(g) \qquad \text{ja} \qquad \underline{I}(f) \leq \underline{I}(g).$$

Koska $f$ ja $g$ ovat rajoitettuja ja paloittain jatkuvia, pätee lauseen 3.19 nojalla tasaväliylä- ja tasavälialaintegraaleille

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) \leq \underline{I}(g) = \overline{I}(g)$$

mikä riittää todistamaan väitteen. □

Halutaan määritellä määrätty tasaväli-integraali myös siinä tapauksessa, että alaraja on ylärajaa suurempi. Määritelmä on analoginen vastaavan tasaväliporrasfunktion integraalin määritelmän kanssa; määritelmä voitaisiin todistaa lähtien tasaväliala- ja tasaväliyläintegraalien määritelmistä sekä tasaväliporrasfunktion määritelmästä, kun alaraja on ylärajaa suurempi. Kuitenkaan määrätyn tasaväli-integraalin raja-arvomääritelmästä ei päästä suoraan johtamaan kyseistä tulosta, joten erillinen määritelmä on hyvä olla olemassa.

**Määritelmä 4.8.** Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva. Määritellään

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

**Määritelmä 4.9.** Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva ja $c \in [a,b]$. Määritellään

$$\int_c^c f(x)dx := 0.$$

Määritelmien avulla voidaan muutamia lauseita muotoilla yleisemmin:

**Lause 4.10.** *Mikäli $c \in \mathbb{R}$, ja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja paloittain jatkuva, niin pätee*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

*Todistus.* Todistetaan esimerkiksi tilanne $c < a < b$. Lauseen 4.4 nojalla rajoitetulle, paloittain jatkuvalle $f : [c,b] \to \mathbb{R}$ pätee

$$\int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx.$$

Nyt käyttämällä määritelmää 4.8 saadaan

$$-\int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx,$$

joten

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

mistä väite seuraa. □

**Lause 4.11.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva. Kaikilla $k \neq 0$ pätee*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx.$$

*Todistus.* Lauseen 2.17 mukaan jokaiselle tasaväliporrasfunktiolle $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $k \neq 0$ pätee

$$\int\limits_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int\limits_{a}^{b} s(x) dx.$$

Näin ollen tasavälialaintegraalille $\underline{I}(f_{[a,b]})$ pätee

$$\begin{aligned}\sup\left\{\int\limits_{a}^{b} s(x)dx : s(x) \leq f(x), x \in [a,b]\right\} &= \sup\left\{\frac{1}{k}\int\limits_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx : s\left(\frac{x}{k}\right) \leq f\left(\frac{x}{k}\right), x \in [ka,kb]\right\} \\ &= \frac{1}{k}\sup\left\{\int\limits_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx : s\left(\frac{x}{k}\right) \leq f\left(\frac{x}{k}\right), x \in [ka,kb]\right\} \\ &== \frac{1}{k}\int\limits_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx.\end{aligned}$$

Koska $f$ oli paloittain jatkuva, ja rajoitettu, ovat sen tasaväliala- ja tasaväliyläintegraalit samat. Niinpä on voimassa

$$\underline{I}(f_{[a,b]}) = \overline{I}(f_{[a,b]}) = \frac{1}{k}\int\limits_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx,$$

eli

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \frac{1}{k}\int\limits_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx.$$

□

# 5 Polynomien integrointi tasavälijaon avulla

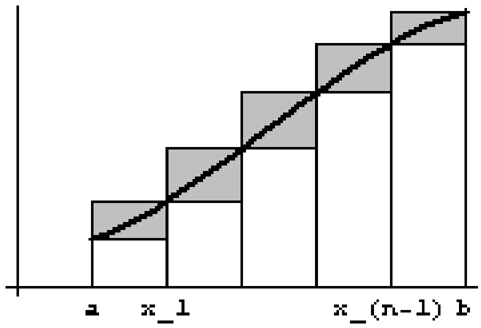
Polynomifunktio $p : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^q$, missä $q \in \mathbb{N}$ voidaan integroida kohtuullisen helposti käyttäen geometrisesti kasvavia välejä. Pieniä ongelmia tulee, jos integrointia yritetään tehdä tasavälijaolla. Tässä tarvitaan hieman aputuloksia.

**Lause 5.1.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kasvava. Olkoon $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ tasavälijako. Mikäli $I \in \mathbb{R}$ toteuttaa epäyhtälöt*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

*kaikilla $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on*

$$I = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$




Kuva 4: Väritettyjen suorakaiteiden pinta-ala vastaa termiä $\frac{C}{n}$

*Todistus.* Jokaisen tasavälijaon $P$ määräämän osavälin pituus on $\frac{b-a}{n}$. Riittää todistaa, että

$$0 \leq |I - \int_a^b f(x)dx| \leq \frac{C}{n}$$

jollekin $C \in \mathbb{R}$, ja kaikille $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Esimerkiksi $C = ([f(b) - f(a)](b-a))$ käy. Olkoot $s, t$ tasaväliporrasfunktioita, joille pätee $s(x) = f(x_{k-1})$ ja $t(x) = f(x_k)$ kaikilla $x \in ]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Merkitään porrasfunktion $s$ saamaa arvoa välillä $]x_{i-1}, x_i[$ $s_i$:llä, $i = 1, 2, \ldots, n$. Samoin merkitään $t_i$:llä tasaväliporrasfunktion $t$ saamia arvoja vastaavilla väleillä. Saadaan

$$\int_a^b t(x)dx - \int_a^b s(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i - s_i\right) = \frac{C}{n}.$$

Kuvasta 4 tilanne näkyy paremmin. Suorakaiteet voidaan pistää päällekkäin, jolloin saadaan $f(a) - f(b)$-korkuinen palkki, jonka leveys on $\frac{b-a}{n}$. Näin ollen tasavälialaintegraali ja tasaväliyläintegraali eroavat toisistaan korkeintaan $\frac{C}{n}$ verran. Kun $n \to \infty$, saadaan

$$0 \leq |I - \int_a^b f(x)dx| \leq 0$$

joten väite pätee. □

*Huomautus* 5.2. Samanlainen tulos saadaan myös vähenevälle funktiolle tekemällä pieniä muutoksia todistukseen.

**Lause 5.3.** *Olkoot $n$ ja $p$ positiivisia kokonaislukuja. Tällöin pätee*

$$n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} < (n+1)^p.$$

*Todistus.* Muistetaan, että $a^r - b^r = (b-a)(b^{r-1} + b^{r-2}a + \cdots + ba^{r-2} + a^{r-1})$, missä $r \in \mathbb{N}$. Nyt vain sijoitetaan $b = n+1,\ a = n$ ja $r = p+1$. Saadaan

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = (n+1)^p n^0 + (n+1)^{p-1} n^1 + \cdots + (n+1)^1 n^{p-1} + (n+1)^0 n^p.$$

Summan termeille $a_k$ pätee $n^p \leq a_k \leq (n+1)^p$, eikä molemmat yhtäsuuruudet toteudu yhtä aikaa. Termejä on $p+1$ kappaletta, joten

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} < (p+1)(n+1)^p$$

ja

$$(p+1)n^p < (n+1)^{p+1} - n^{p+1}$$

eli

$$(p+1)n^p < (n+1)^{p+1} - n^{p+1} < (p+1)(n+1)^p$$

josta väite seuraa. □

**Lause 5.4.** *Olkoot $n$ ja $p$ positiivisia kokonaislukuja. Tällöin pätee*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

*Todistus.* Induktiotodistus. Alkuaskel. Olkoon $n = 1$. Saadaan välittömästi

$$0^p < \frac{1^p}{p+1} < 1^p.$$

Induktioaskel. Induktio-oletus: väite pätee $n$:lle. Todistetaan, että on

$$\sum_{k=0}^{n} k^p < \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n+1} k^p$$

Vasemmanpuoleiselle summalle voidaan kirjoittaa

$$\sum_{k=0}^{n} k^p = \sum_{k=0}^{n-1} k^p + n^p \overset{1)}{<} \frac{n^{p+1}}{p+1} + n^p \overset{2)}{<} \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1},$$

missä 1):ssä on käytetty induktio-oletusta ja 2):ssa Lausetta 5.3. 2):ssa vähentämällä molemmilta puolilta termi $\frac{n^{p+1}}{p+1}$ saadaan lauseen tilanne. Oikeanpuoleiselle summalle saadaan

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^p = \sum_{k=1}^{n} k^p + (n+1)^{p+1} \overset{1)}{>} \frac{n^{p+1}}{p+1} + (n+1)^p \overset{2)}{>} \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1},$$

missä 1):ssä on taas käytetty induktio-oletusta ja 2):ssa lausetta 5.3. □

**Lause 5.5.** *Olkoon $p$ positiivinen kokonaisluku ja $b \in \mathbb{R}, b > 0$. Tällöin on voimassa*

$$\int\limits_0^b x^p dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}.$$

*Todistus.* Todistuksessa päästään nyt helpolla, kun työ on tehty edellisissä lauseissa. Lauseen 5.4 mukaan pätee

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Kertomalla nämä epäyhtälöt termillä $b^{p+1}/n^{p+1}$ saadaan

$$\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{k=0}^{n-1} k^p < \frac{b^{p+1} n^{p+1}}{(p+1)n^{p+1}} < \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p,$$

eli

$$\frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{kb}{n}\right)^p < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kb}{n}\right)^p$$

Merkitsemällä missä $f(x) = x^p$ ja $x_k = \frac{kb}{n}$, eli $f(x_k) = (\frac{kb}{n})^p$ edellä oleva voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Yhtälö vastaa lauseen 5.1 ehtoa

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

missä on asetettu $a = 0$ ja $I = \frac{b^{p+1}}{p+1}$. Saadaan tulos

$$\int\limits_0^b x^p dx = \frac{b^p + 1}{p+1}$$

$\square$

Saadun tuloksen avulla saadaan integroitua kaikki polynomifunktiot:

**Lause 5.6** (polynomin integrointi)**.** *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $c_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin pätee*

$$\int\limits_a^b \sum_{k=0}^{n} c_k x^k dx = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

*Todistus.* Lause 4.4 kertoo, että jatkuvalle funktiolle $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja jollekin $c \in ]a, b[$ pätee

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

erityisesti

$$\int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

eli

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x) - \int_0^a f(x)dx$$

Tätä tulosta ja lausetta 5.5 käyttämällä saadaan

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Lauseen 4.3 mukaan jatkuvalle funktiolle pätee

$$\int_a^b \left( \sum_{k=1}^n c_k f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k(x)dx.$$

Tästä seuraa, että

$$\int_a^b \sum_{k=0}^n c_k x^k dx = \sum_{k=0}^n c_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

□

# 6 Analyysin peruslause

Määrätyn tasaväli-integraalin kautta päästään käsiksi integraalifunktioihin totutusti analyysin peruslauseen kautta. Lauseen todistus ei sinällään tuo hirveästi uutta teoriaa, koska tarkastelu ei juurikaan riipu käytettävästä jaosta muuten kuin käytettävien aputulosten osalta. Aputulokset (lause 4.4 ja lause 4.7) löytyvät aiemmasta tekstistä. Johdatus integrointiteoriaan ilman analyysin peruslausetta tuntuu kuitenkin vajaalta, joten täydellisyyden vuoksi tulokset tässä mukana ovat.

**Lause 6.1** (Analyysin peruslause, osa 1)**.** *Olkoon*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

*missä $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja paloittain jatkuva. Tällöin $G$ on jatkuva funktio ja pätee*

$$G'(x) = f(x),$$

*mikäli $f$ on jatkuva $x$:ssä.*

*Lauseen 6.1 todistus, jatkuvuus.* Osoitetaan, että lauseen 6.1 tilanteessa $G$ on jatkuva.

Lauseen 4.4 nojalla rajoitetulle ja paloittain jatkuvalle $f$ pätee

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt,$$

joten

$$\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt,$$

eli

$$G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Koska $f$ on rajoitettu, löytyy $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|f(t)| < M$ kaikilla $t \in [a, b]$. Oletetaan aluksi, että $x_0 < x$. Nyt pätee

$$\int_{x_0}^x (-M)dt \leq \int_{x_0}^x f(t)dt \leq \int_{x_0}^x M dt,$$

eli

$$-M(x - x_0) \leq G(x) - G(x_0) \leq M(x - x_0)$$

mikä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$|G(x) - G(x_0)| \leq M|x - x_0|.$$

Olkoon sitten $x < x_0$. Tällöin pätee

$$\int_x^{x_0} M dt \leq \int_x^{x_0} f(t)dt \leq \int_x^{x_0} (-M)dt,$$

eli

$$M(x_0 - x) \leq G(x_0) - G(x) \leq -M(x_0 - x)$$

joten

$$-M(x - x_0) \leq G(x_0) - G(x) \leq M(x - x_0)$$

mikä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$|G(x) - G(x_0)| \leq M|x - x_0|.$$

Näin ollen viimeisin epäyhtälö pätee kaikilla $x$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitsemalla $\delta$ tarpeeksi pieneksi saadaan $G$:n liikahtelu pisteen $x_0$ ympäristössä mielivaltaisen pieneksi. Tehdään valinta $\delta := \frac{\epsilon}{2M}$. Jos tarkastellaan väliä $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, saadaan tulos $|G(x) - G(x_0)| < 2M\delta = 2M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon$, joten $G$ on jatkuva pisteessä $x_0$. Koska $x_0$ oli mielivaltainen välin $[a, b]$ piste, pätee jatkuvuus joka pisteessä. Siis $G$ on jatkuva määrittelyvälillään. □

*Lauseen 6.1 todistus, derivoituvuus.* Oletetaan, että $x_0 \in [a, b]$ ja $f$ on jatkuva $x_0$:ssa. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin jatkuvuuden määritelmän perusteella pätee

$$f(x_0) - \epsilon \leq f(t) \leq f(x_0) + \epsilon, \tag{4}$$

kunhan $|x_0 - t| < \delta$, missä $\delta > 0$ on riittävän pieni, sovitaan että $\delta$ ehdot täyttää. Olkoon $x$ sellainen, että $|x - x_0| < \delta$. Nyt epäyhtälöt 4 pätevät kun $t$ on $x$:n ja $x_0$:n välissä. Lauseen 4.7 nojalla

$$\int_{x_0}^{x} [f(x_0) - \epsilon]dt \leq \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq \int_{x_0}^{x} [f(x_0) + \epsilon]dt$$

mikäli $x_0 < x$, ja

$$\int_{x}^{x_0} [f(x_0) - \epsilon]dt \leq \int_{x}^{x_0} f(t)dt \leq \int_{x}^{x_0} [f(x_0) + \epsilon]dt.$$

mikäli $x < x_0$. Laskemalla vakiofunktioiden integraalit saadaan

$$[f(x_0) - \epsilon](x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq [f(x_0) + \epsilon](x - x_0) \qquad | : (x - x_0)$$

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq f(x_0) + \epsilon \tag{$*$}$$

mikäli $x_0 < x$, ja

$$[f(x_0) - \epsilon](x - x_0) \leq \int_{x}^{x_0} f(t)dt \leq [f(x_0) + \epsilon](x - x_0) \qquad | : (x_0 - x)$$

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{1}{x_0 - x} \int_{x}^{x_0} f(t)dt \leq f(x_0) + \epsilon$$

josta saadaan määritelmän 4.8 nojalla

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq f(x_0) + \epsilon$$

mikäli $x < x_0$. Siispä joka tapauksessa on

$$(*) \qquad f(x_0) - \epsilon \leq \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \epsilon,$$

mikäli $x \neq x_0$ ja $|x - x_0| < \delta$. Itse asiassa on osoitettu, että oli $\epsilon > 0$ mikä hyvänsä, löytyy $\delta > 0$ siten, että $(*)$ pätee. Tämä tarkoittaa, että

$$\lim_{x \to x_0} \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

eli $G'(x_0) = f(x_0)$. Mikäli $x_0 = a$ tai $x_0 = b$, todistus on lähestulkoon samanlainen.

□

Tuossa oli ensimmäinen osa analyysin peruslauseesta. Seuraavassa käydään läpi toinen osa, joka on integraalien laskemisessa jatkuvasti käytössä.

**Lause 6.2** (Analyysin peruslause, osa 2)**.** *Olkoon $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva. Oletetaan, että*

$$F'(x) = f(x),$$

*lukuunottamatta mahdollisesti äärellisen montaa pistettä. Tällöin pätee*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

*Todistus.* Oletetaan aluksi, että $f$ on jatkuva ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$. Asetetaan

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Pitää näyttää, että $G(b) = F(b) - F(a)$. Olkoon $H(x) = G(x) - F(x) + F(a)$. Nyt riittäisi osoittaa, että $H(b) = 0$. Tiedetään lauseen 6.1 perusteella, että $G'(x) = f(x)$. Siispä $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tiedetään, että jos $f'(x) \equiv 0$, niin $f \equiv$ vakio (ks. esim.[2, s. 207]) Mutta

$$H(a) = G(a) - F(a) + F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0,$$

joten $H \equiv 0$. Siispä $H(b) = 0$.

Jos $f$ on paloittain jatkuva ja $F'(x) = f(x)$ pätee lukuunottamatta äärellisen montaa pistettä, voidaan väli $[a, b]$ jakaa pätkiin, joilla pätee $H'(x) \equiv 0$, jolloin $H(x)$ on vakio. Lisäksi tiedetään, että $H$ on jatkuvien funktioiden summana jatkuva koko välillä[12], on se siten vakio koko välillä. Koska $H(a) = 0$ aiemman tarkastelun nojalla, saadaan $H \equiv 0$. □

[12] $G$ on jatkuva analyysin perulauseen 1. osan (lause 6.1)nojalla, ja $F$ on oletuksen mukaan jatkuva

Mikäli nyt tiedetään, että $F'(x) = f(x)$, saadaan tulos

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Funktioiden derivointikaavoista saadaan analyysin peruslauseen avulla integrointikaavat.

# 7 Riemann-integraali

Riemann[13]-integraali on tavallisesti ensimmäinen integraali, joka integraaleja käsittelevässä matematiikassa tulee vastaan. Se eroaa tasaväli-integraalista siinä mielessä, että jakoja ei rajoita vaatimus yhtä pitkistä osaväleistä. Myöskin piste, jossa funktion arvoa lasketaan, saadaan valita vapaasti osaväliltä. Kappaleessa määritellään Riemann-integroituvuus ja Riemann-integraali. Lisäksi tutkitaan millä ehdolla tasaväli- ja Riemann-integraali ovat samat.

Kappaleessa käytetään merkintää

$$\int_a^b f(x)dx$$

tarkoittamaan $f$:n Riemann-integraalia yli välin $[a, b]$. Tasaväli-integraalille käytetään merkintää

$$[tv]\int_a^b f(x)dx.$$

**Määritelmä 7.1.** Olkoon $[a, b] \subset \mathbb{R}$ suljettu väli ja olkoon $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ välin jako. Merkitään välin $]x_{i-1}, x_i[$ pituutta $\Delta x_i$:llä. Olkoon $\xi_i$, missä $i = 1, 2, 3, \ldots n$, mielivaltainen välin $]x_{i-1}, x_i[$ piste. Funktioon $f$ ja jakoon $P$ liittyvä *Riemannin summa* on (ks. kuva 5)

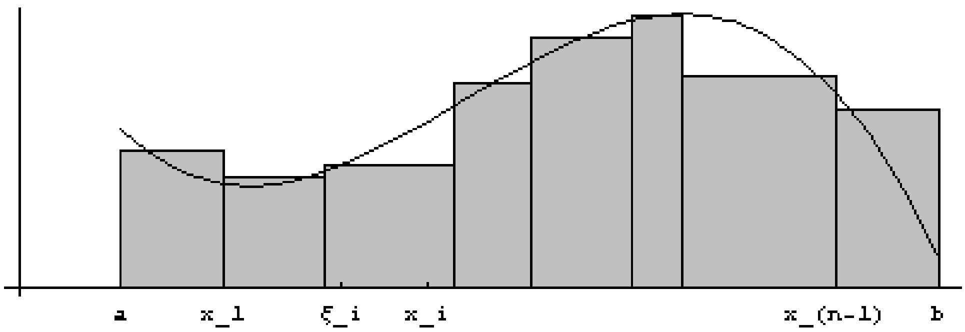
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

**Määritelmä 7.2** (Riemann-integraali)**.** Mikäli edellä määritellyllä Riemannin summalla on raja-arvo, kun $\max \Delta x_i \to 0$, on $f$ Riemann-integroituva, ja funktion *Riemann-integraali* yli välin $[a, b]$ on

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

*Huomautus* 7.3. Integroituvuudelle ei riitä, että löytyy yksi hyvä jako ja yhdet välien pisteet $\xi_i$, joilla raja-arvo on olemassa. Pitää nimittäin olla, että millä tahansa välien valinnalla, ja millä tahansa jakopisteillä, jotka toteuttavat määritelmän ehdon, saadaan sama raja-arvo.

[13] Bernhard Riemann, saksalainen matemaatikko, 1822-1862




Kuva 5: Riemannin summa vastaa palkkien pinta-alaa. Väli $[a, b]$ on jaettu $n$ osaväliin. Tästä saadaan Riemann-integraali, kun $\max \Delta x_i \to 0$

*Huomautus* 7.4. Riemann-integraalia ei määritellä rajoittamattoman välin yli. Myöskin funktion $f$ tulee olla rajoitettu.

Tasaväli-integraali määriteltiin raja-arvona, mutta määriteltäessä tehtiin rajaus paloittain jatkuviin funktioihin. Tasaväli-integraali on kuitenkin aina olemassa, mikäli integrandi on Riemann-integroituva. Integraalien arvot ovat tällöin samat.

**Lause 7.5.** *Mikäli funktio* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on Riemann-integroituva, on raja-arvo*

$$[tv] \int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right).$$

*olemassa, ja pätee*

$$\int_a^b f(x)dx = [tv] \int_a^b f(x)dx.$$

*Todistus.* Valitaan välin $[a, b]$ jako siten, että kyseessä on tasavälijako $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$. Valitaan pisteet $\xi_i$ välien oikeiksi päätepisteiksi. Riemannin summan termit ovat tällöin muotoa

$$f(\xi_i)\Delta x_i = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n},$$

Myös tällä valinnalla raja-arvon tulee olla sama kuin Riemann-integraalin arvo. Näin ollen

pätee

$$
\begin{aligned}
\int\limits_a^b f(x)dx &= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) \\
&= [tv]\int\limits_a^b f(x)dx.
\end{aligned}
$$

□

Toiseen suuntaan tulos ei päde:

**Esimerkki 7.6.** Tasavälijaon avulla määritellylle integraalille ei kaikki toimi hyvin, jos integroitava funktio ei ole paloittain jatkuva. Määritellään funktio $I_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$
I_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}
$$

Nyt $0 + j\frac{1-0}{n} \in \mathbb{Q}$ kaikilla $j \in [1, 2, \ldots, n]$. Siten

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1-0}{n} f\left(0 + j\frac{1-0}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = 1.
$$

Näyttäisi, että funktion integraali on 1. Kuitenkaan tasaväli-integraalin teoriassa ei ole annettu mietään ehtoa funktion integroituvuudelle. Ei ole myöskään määritelty funktion tasaväli-integraalia muille kuin paloittain jatkuville funktioille. Esimerkin valossa ei ole mielekästä samastaa tasaväli-integroituvuutta raja-arvon olemassaoloon.

Paloittain jatkuville integraali on mielekäs ja antaa samat tulokset kuin muillekin integraaleille. Funktio $I_{\mathbb{Q}}$ on kuitenkin epäjatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä. Se ei ole Riemann-integroituva, sillä riippuen välipisteiden valinnasta Riemannin summan raja-arvo vaihtelee. Lebesgue-integroituva se tosin on, mutta Lebesgue-integraali $I_{\mathbb{Q}}$:lle on[14] 0. Ei tarkastella Lebesgue-integraalia sen tarkemmin.

Esimerkki 16.6 havainnollistaa sitä seikkaa, että tasaväli-integraali, jonka määrittelyssä valitaan aina osavälin oikeanpuoleinen päätepiste, ei toimi aina samalla tavalla kuin Riemann-integraali. Onko ongelma sitten tasavälijaossa, vai pisteen valinnassa? Osoittautuu, että jos pisteen saa valita osaväliltä vapaasti, tasaväli- ja Riemann-integraalit ovat hyvin lähellä toisiaan. Funktio on nimittäin tällöin Riemann-integroituva täsmälleen silloin

[14] $I_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ melkein kaikilla $x \in [0,1]$

kun tasaväli-integraalin määritelmässä oleva raja-arvo on olemassa. Todistuksessa käytetään Riemannin ehtoa:

**Lause 7.7** (Riemannin ehto)**.** *Rajoitettu funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva täsmälleen silloin, kun kaikilla $\epsilon > 0$ löytyy porrasfunktiot $s$ ja $t$ siten, että $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$ ja lisäksi*

$$\int_a^b t(x)dx - \int_a^b s(x)dx < \epsilon.$$

*Todistus.* Todistus löytyy vaikkapa lähteestä[4, s. 9]. □

**Lause 7.8.** *Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituva täsmälleen silloin kun raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_j),$$

*on olemassa ja se on riippumaton pisteiden $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ valinnasta.*

*Todistus.* Mikäli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, on raja-arvo olemassa. Perustelu on samanlainen kuin lauseen 16.5 todistus.

Olkoon $\epsilon > 0$. Todistetaan, että mikäli raja-arvo on olemassa, löytyy porrasfunktiot $s, t$ siten, että $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$ ja

$$\int_a^b t(x)dx - \int_a^b s(x)dx < \epsilon.$$

Olkoon $A := \frac{\epsilon}{3(b-a)} > 0$. Merkitään $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$ missä $n$ on jakovälien määrä. Olkoon $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ sellainen, että

$$f(\xi_j) - A < \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

Infimumin määritelmän perusteella ehdon täyttävä $\xi_j$ on olemassa; muussa tapauksessa infimum olisi suurempi. Muodostetaan porrasfunktio

$$s : [a, b] \to \mathbb{R}, s(x) = f(\xi_j) - A,$$

missä $s(x)$ :n arvo (eli $f(\xi_j)$) riippuu välistä $[x_{j-1}, x_j[$. Näin määritelty $s$ on $f$:n alaporrasfunktio. Vastaavasti voidaan löytää yläporrasfunktio $t : [a, b] \to \mathbb{R}, t(x) = f(\eta_j) + A$ joillakin $\eta_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$ siten, että

$$t : [a, b] \to \mathbb{R}, s(x) = f(\eta_j) + A.$$

Porrasfunktioiden integraalien erotukselle pätee

$$\int_a^b t(x)dx - \int_a^b s(x)dx \leq (b-a) \cdot 2A = (b-a) \cdot 2 \cdot \frac{\epsilon}{3(b-a)} < \epsilon.$$

Väite seuraa nyt Riemannin ehdosta. □

## Osa II

# Tasaväli-integraali: lukion pitkän matematiikan soveltava kurssi

## 8 Esitiedoista ja muusta kurssiin liittyvästä

Tasaväli-integraali on lukion pitkän matematiikan soveltava kurssi. Kurssille vaaditaan esitietoina integraalilaskennan kurssi, joka on viimeinen pakollisista kymmenestä kurssista lukion pitkässä matematiikassa. Integraalilaskennan kurssin sisällöt ovat seuraavanlaiset:

- integraalifunktion käsite
- alkeisfunktiot ja niiden integraalifunktioiden määrittäminen
- määrätyn integraalin käsite
- määrätyn integraalin avulla pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

Integraalilaskennan kurssilla käydään melko ripeästi integraalifunktioiden olemassaolon ja alkeisfunktioiden avulla niiden esittämisen välinen yhteys, tai pikemminkin sen puuttuminen. Käytännössä koko kurssi on helppojen funktioiden integrointia, joille löytyy annetulla kaavalla integraalifunktio.

Tasaväli-integraalikurssissa lähestymistapa on erilainen. Kurssilla pitäydytään yksinkertaisemmissa tapauksissa, mutta integraalin muodostamiseen paneudutaan syvällisemmin. Kurssilla käydään läpi seuraavia asioita:

- joukko-oppia
- $\epsilon$ - $\delta$ - menetelmä
- jako, tasavälijako
- porrasfunktio, tasaväliporrasfunktio
- integroimistuloksia: vakiofunktiot, lineaarifunktiot, paloittain jatkuvat funktiot
- funktion integraalin esittäminen alkeisfunktioiden avulla
- numeerista integrointia (kun edellä mainittu ei onnistu)

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- syventää käsitystään integraalista, etenkin sen määrittelystä pinta-alan määrittämisen kautta
- oppii käyttämään tasavälijakoa ja porrasfunktioita määrittäessään määrättyä integraalia.
- oppii muodostamaan yksinkertaisten funktioiden integrointikaavan (esim $f(x) = cx, c \in \mathbb{R}$) tasavälijaon avulla.
- sisäistää sen, että paloittain jatkuvalla funktiolla on aina integraalifunktio, mutta sen esittäminen ei ole aina mahdollista alkeisfunktioiden avulla.
- oppii primitiivin ja integraalifunktion käsitteet, ja integraalifunktion erilaiset määritelmät
- oppii laskemaan numeerisia approksimaatioita integraaleille, kun integrointi integraalifunktion kautta ei onnistu
- harjaantuu piirtämään funktioiden kuvaajia.

Kurssilla perehdytään matemaattiseen käsitteenmuodostukseen syvällisemmin kuin muilla matematiikan kursseilla. Kurssilla pääpaino on matemattisten käsitteiden muodostamisessa eikä laskennossa. Kurssilla lähdetään liikkeelle pinta-alan määrittelystä ja siihen liittyvistä ongelmista. Tavoitteena on laajentaa integraalin käsitettä derivoinnin käänteisoperaatiota laajemmaksi.

Kurssilla keskeistä on käsitteiden keksiminen ja muotoilu. Määritelmiin ja niiden pohtimiseen perustuvan lähestymistavan ansiosta päästään askel lähemmäksi yliopistomatematiikkaa. Kurssi on suunniteltu matematiikasta kiinnostuneille ja jatko-opinnoissaan sitä tarvitseville.

Uutena asiana kurssilla tulee integroituvuuden käsite. Integroituvuuden yhteyttä integraalifunktioon pyritään selkiyttämään. Integroituvuuden määrittelyn tekee ongelmalliseksi integraalifunktion erilaiset määritelmät. Ylioppilaskirjoituksissa käytettävän määritelmän mukaan integraalifunktio on kaikkialla derivoituva. Kuitenkin on integroituvia funktioita joilla ei ole integraalifunktiota, ainakaan ylioppilaskirjoituksissa käytössä olevan määritelmän mukaisia. Myös tähän ongelmaan kiinnitetään huomiota.

Eräs mahdollisuus kurssintuntijaoksi on taulukon 1 mukainen. Kurssilla on noin 30 tuntia opetusta.

# 9 Johdanto

Integraalilaskennan kurssilla perehdytään integraalifunktion käsitteeseen. Integrointi on derivoinnille käänteinen operaatio ja sillä saadaan laskettua pinta-aloja. Määrittely poh-

| Aihe | Tunnit |
|---|---|
| Johdatus aiheeseen, pinta-alan määrittelystä | 2 |
| Joukko-oppia ja menetelmiä | 6 |
| Tasavälijako, tasaväliporrasfunktio | 3 |
| Tasaväliporrasfunktion määrätty tasaväli-integraali | 3 |
| Paloittain jatkuvan, rajoitetun funktion tasaväli-integraali | 3 |
| Määrätyn tasaväli-integraalin ominaisuuksia | 4 |
| Analyysin perulause | 3 |
| Riemann-integraaliin vertaaminen | 3 |
| Numeerinen integrointi | 1 |
| kertaus | 2 |
| Yhteensä | 30 |

Taulukko 1: Tasaväli-integraalikurssin tuntijako

jautuu derivaatan tuntemiseen ja integrointi määritellään derivoinnin käänteisoperaationa. Monet tulokset jäävät kurssilla kuitenkin todistamatta, koska todistukset ovat kovin vaikeita. Lähestymistapa on kuitenkin perusteltu, sillä derivaatan kautta päästään äkkiä käsiksi laskemiseen ilman aikaavievää teorian luomista.

Integraalilaskenta on kuitenkin syntynyt ennen differentiaalilaskentaa. Derivaattaa ei tarvita integraalifunktion eikä määrätyn integraalin muodostamisessa. Funktion määrätty integraali voidaan määritellä pinta-alatulkinnan avulla, jota tällä kurssilla myös käytetään.

Integraalilaskennan kurssilla ei myöskään käsitellä erilaisia integraalin määritelmiä, vaan puhutaan vain yhdestä integraalista ikään kuin ainoana. Tällä kurssilla määritellään toinen integraali, *tasaväli-integraali*, ja nähdään että sillä on lähes samat ominaisuudet kuin integraalilaskennan kurssilta tutulla integraalilla.

**Ongelma.** Miten määrität umpinaisen tasokäyrän rajaaman alueen pinta-alan $10\%$ tarkkuudella? Entä miten määrität alan $1\%$ tarkkuudella?

Eräs ratkaisu ongelmalle saadaan piirtämällä riittävän tiheä ruudukko, ja laskemalla ruuduista arvio pinta-alalle.

Onnistuuko tehtävä mielivaltaisella tarkkuudella? Millä ehdolla tason osalla on pinta-ala? Mitä tarkoittaa pinta-ala?

Integraalilaskennan perusongelma, joukon pinta-alan määrittely, on vaikea ratkaista täsmällisesti yleisessä tapauksessa. Sen vuoksi kurssilla pitäydytään yksinkertaistetussa tilanteessa:

**Ongelma.** Halutaan määrittää funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, suorien $x = a$, $x = b$ ja $x$-akselin rajaaman alueen pinta-ala. Milloin tällä alueella on pinta-ala, ja kuinka suuri se on, mikäli se on olemassa?

Ongelman ydin on funktion $f$ käyttäytyminen: Jos $f$ on vakiofunktio, on ongelman määrittelemä alue suorakaide, joten sen pinta-ala on tällöin $f(x) \cdot (b-a)$. Vai onko? Mistä voimme tietää tämän? Entä jos $f$ ei olekaan siisti, hyvin käyttäytyvä funktio?

Havaitaan, että tarvitaan jotain määritelmiä, että voidaan päästä laskemaan pinta-aloja. Intuitiivisesti pinta-alan pitää toteuttaa ainakin seuraavat ehdot:

- Alueen pinta-ala on ei-negatiivinen luku.
- Isomman alueen pinta-ala on isompi kuin pienemmän alueen.
- Suorakaiteen pinta-ala on sen kahden vierekkäisen sivun pituuksien tulo.
- Pinta-ala ei muutu vaikka aluetta siirretään.
- Koko alueen pinta-ala on alueen osien pinta-alojen summa.

Pinta-ala voidaan määritellä tällä tavoin aksiomaattisesti. Aksioomat ovat siis perusolettamuksia, joita ei todisteta.

Minkälaisia pinta-alan määrittelyjä sitten voi olla? Voidaanko sanoa, että kaikkien joukkojen pinta-ala on neljä, riippumatta joukoista? Voidaanko kokeellisesti todeta, että ympyrän pinta-ala on $3,14r^2$, missä $r$ on ympyrän säde, suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala on $3,142 \cdot rs$, missä $r$ pohjaympyrän säde ja $s$ sivujanan pituus jne. Näin saadaan varmasti käytännöllisiä pinta-aloja näille kappaleille, mutta tämän kaltainen määrittely on työlästä ja rajoittavaa. Edellä kuvattuihin arvioihin pääsemiseksi tarvitaan kuitenkin alkeellista integraalilaskentaa, joka voi osoittautua hyvinkin työlääksi tai virhealttiiksi ilman perusteellista teoriaa. Tarvitaan siis välineistöä pinta-alan määrittämiseksi. Tätä välineistöä kutsutaan integraalilaskennaksi. Integraalilaskentaan kuuluu luonnollisesti paljon muutakin.

Tällä kurssilla muodostetaan pinta-ala eräille tason osajoukoille raja-arvoprosessina käyttäen hyväksi tasavälijakoa. Tarkalleen ottaen pinta-ala, ja samalla integraali, määritellään välillä $[a, b]$ paloittain jatkuvan funktion ja $x$-akselin väliin jäävälle tasoalueelle. Ongelma, minkälaiset funktiot saadaan tasaväli-integraalin avulla integroitua, tai millaisille tasoalueille pinta-ala määriteltyä, jätetään sen mutkikkuuden takia vähemmälle tarkastelulle. Lähinnä todetaan että ongelmia tulee, mikäli funktion annetaan olla pahasti epäjatkuva.

## 10 Joukko-oppia ja muita työkaluja

Kurssilla käsitellään joukko-opin alkeita, epsilon-delta -menetelmää ja kerrataan summamerkintä. Tutkielman opetusosuudessa on ainoastaan aiheeseen liittyviä tehtäviä; kurssilla tulee toki käydä asioita läpi yhdessä muutenkin kuin tehtävien kautta. Supremumin ja infimumin läpikäynti voi olla tarpeellista.

## Tehtäviä

1. Todista (epsilon-delta määritelmän avulla), että funktio $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ on jatkuva pisteessä $1$.

2. Olkoot $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, d, e\}$ ja $C = \{a, b, e\}$. Määritä joukot

   *a)* $A \cup B$,

   *b)* $A \cap B$,

   *c)* $A \cap B \cap C$,

   *d)* $C \setminus A$

3. Määritä $\mathbb{N} \cap [0, 3] \cap ]-\sqrt{5}, \sqrt{2}[$.

4. Osoita, että kaikille joukoille $A$, $B$ pätee

   *a)* $A \cap B \subset A \cup B$,

   *b)* $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

5. Määritä $\{x : x = 3k \text{ jollakin } k \in \mathbb{Z}\} \cap \{x : x = 4m \text{ jollakin } m \in \mathbb{Z}\}$.

6. Osoita, että
$$\lim_{x \to 2} 4x = 8.$$

7. Osoita, että
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

8. Osoita, että puoliavoimella välillä $]0, 1]$ ei ole pienintä lukua, mutta että sillä on suurin luku.

9. Jaetaan väli $[a, b]$ $n$:ään yhtä pitkään osaväliin. Osoita, että kun $n \to \infty$, niin kunkin osavälin pituus lähestyy nollaa[15].

10. Kirjoita auki summamerkinnät

    (a) $\sum_{i=1}^{n} a_i$,

    (b) $\sum_{i=1}^{n} a_n$,

    (c) $\sum_{i=n}^{2n+3} b_i$.

11. Laske summat

    (a) $\sum_{i=1}^{n} 1$,

    (b) $\sum_{i=1}^{n} 5i$,

    (c) $\sum_{i=1}^{n} i^2$

[15] Vihje: Osoita, että kunkin osavälin pituus tulee mitä hyvänsä positiivista lukua pienemmäksi.

**Tehtävien ratkaisuja**

1. $f(x) = 2x$. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta := \frac{\epsilon}{3}$. Nyt on

$$|f(x) - f(1)| < \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon, \text{ kunhan } |x - 1| < \delta,$$

mikä oli todistettava.

2. *a)* $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

   *b)* $A \cap B = \{a\}$

   *c)* $A \cap B \cap C = \{a\}$,

   *d)* $C \setminus A = \{e\}$

3. $\mathbb{N} \cap [0, 3] \cap ] - \sqrt{5}, \sqrt{2}[= \{0, 1\}$.

4. *a)* Olkoon $x \in A \cap B$. Tällöin pätee $x \in A$. Siispä $x \in A \cup B$. Koska $x$ oli mielivaltainen leikkausjoukon pistee, tästä seuraa, että $A \cap B \subset A \cup B$.

   Olkoon $x \in (A \cup B) \cap C$. Tällöin pätee $x \in C$. Lisäksi on $x \in A$ tai $x \in B$. Siispä $x \in A \cap C$ tai $x \in B \cap C$, eli $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

   Olkoon sitten $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Ei voi olla $y \notin C$, koska tällöin joukot $A \cap C$ ja $B \cap C$ olisivat tyhjiä. Siispä pätee $y \in C$.

   Jos $y \notin A \cup B$, pätee $y \notin A \cap C$ ja $y \notin B \cap C$, mikä on mahdotonta. Siispä $y \in A \cup B$. Näin ollen $y \in (A \cup B) \cap C$, mistä seuraa että $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cup B) \cap C$.

   Saadusta kahdesta tuloksesta seuraa $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap C$, mikä oli todistettava.

5. On määritettävä luvut, jotka ovat jaollisia sekä kolmella että neljällä. Nämä luvut ovat muotoa $3 \cdot 4 \cdot n$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Siis $\{x : x = 3k \text{ jollakin } k \in \mathbb{Z}\} \cap \{x : x = 4m \text{ jollakin } m \in \mathbb{Z}\} = \{x : x = 12n \text{ jollakin } n \in \mathbb{Z}\}$.

# 11 Tasavälijako ja tasaväliporrasfunktio

Johdantokappaleessa pohdiskeltiin, mitä tasoalueelta vaaditaan, että sillä olisi pinta-ala. Ongelman ratkaisussa todettiin, että jakamalla alue pieniin osiin saadaan hyvä arvio pinta-alalle. Kurssilla arvio muodostetaan tekemällä pinta-alalle arvio tasavälijaon avulla. Tämä tarkoittaa sitä, että tarkasteltava väli jaetaan yhtä pitkiin osaväleihin.

**Määritelmä 11.1** (jako ja tasavälijako). *Välin* $[a, b]$ *jako* $P$ on pistejono $x_0, x_1, \ldots, x_n$, missä $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Mikäli löytyy $c \in \mathbb{R}$ siten, että $c = x_i - x_{i-1} \in \mathbb{R}$ kaikille $i = 1, 2, \ldots, n$, sanotaan, että jako $P$ on välin $[a, b]$ *tasavälijako*.

Tasavälijaon etuna voidaan pitää sitä, että arvion laskeminen pinta-alalle helpottuu. Mikäli käytetään tasavälijakoa, suorakaiteiden pinta-aloja laskiessa ei tarvitse ottaa huomioon kuin niiden korkeus. Jos käytettäisiin yleistä jakoa, laskeminen muuttuu heti työläämmäksi. Tasavälijako soveltuu kuitenkin lähinnä vain paloittain jatkuvien ja rajoitettujen funktioiden käsittelyyn.

Mikäli jaoille $P_1$ ja $P_2$ pätee $P_1 \subset P_2$, sanotaan että $P_1$ on *karkeampi* kuin $P_2$. Vastaavasti $P_2$ on *hienompi* jako kuin $P_1$.

**Esimerkki 11.2.** Etsi välin $[2, 5]$ se tasavälijako, joka koostuu *a*) 3:sta *b*) $n$:stä pisteestä.

*Ratkaisu. a)* Tasavälijako sisältää välin päätepisteet, joten se on

$$P_a = \left\{2, \frac{7}{2}, 5\right\}.$$

(tällöin $\frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2} = 5 - \frac{7}{2}$)

*b)* Tasavälijaossa on $n$ pistettä, joten se jakaa välin $[2, 5]$ $n - 1$ yhtä pitkään osaväliin. Siis

$$\begin{aligned} P_b &= \left\{2, 2 + \frac{5-2}{n-1} = \frac{3}{n-1}, 2 + 2\frac{3}{n-1}, \ldots, 2 + (n-2)\frac{3}{n-1}, 2 + (n-1)\frac{3}{n-1} = 5\right\} \\ &= \{2, 2 + \delta, 2 + 2\delta, \ldots, 2 + (n-2)\delta, 5\}, \end{aligned}$$

missä $\delta = \frac{3}{n-1}$.

Funktiota $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yksinkertaisesti arvoiva väline on tasaväliporrasfunktio. Tasaväliporrasfunktio voi hypätä vain tasavälein. Muualla kuin hyppäyspisteissä se on vakio. Funktion graafi muistuttaa portaita, josta nimitys tulee. Yleisellä porrasfunktiolla voi olla hyppäysepäjatkuvuuksia missä vain, kunhan hyppäyksiä on korkeintaan äärellisen monta. Tasaväliporrasfunktioita käytetään hyväksi funktion tasaväli-integraalin määrittelyssä.

**Määritelmä 11.3** (porrasfunktio ja tasaväliporrasfunktio)**.** Funktio $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ on *porrasfunktio*, mikäli löytyy jako $P = \{a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ siten, että jakopisteiden määrämällä välillä $]x_{i-1}, x_i[$ funktio saa vakioarvon. Jaon $P$ pisteissä funktion arvot saavat olla mitä tahansa reaalilukuja. Täsmällisesti ilmaistuna, löytyy pisteet $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ siten, että $s(x) = a_i$, mikäli $x \in ]x_{i-1}, x_i[$.

Porrasfunktio $s$ on *tasaväliporrasfunktio*, mikäli löytyy $\delta \in \mathbb{R}$ siten, että jokaisen välin $]x_{i-1}, x_i[$ pituus on $\delta$.

**Esimerkki 11.4.**

Osoita, että

$$s : [0, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{3}, \text{ kun } x \in [1, 4] \\ \pi, \text{ kun } x \in ]4, 5] \end{cases}$$

on tasaväliporrasfunktio.

*Ratkaisu.* Pitää löytää sellainen välin $[1,5]$ jako $P$, että jokaisella jaon $P$ määräämällä avoimella välillä funktio saa vakioarvon. Esimerkiksi jako $P = \{x_0 = 1, 2, 3, 4, 5 = x_n\}$ kelpaa. Jokaisella välillä $]x_{i-1}, x_i[=]i, i+1[$, missä $i \in \{1,2,3,4,5\}$, funktio $f$ saa vakioarvon.

Kahden tasaväliporrasfunktion summa ja tulo ovat tasaväliporrasfunktioita. Todistus on harjoitustehtävä.

## Tehtäviä

1. Muodosta välin $[0,1]$ se tasavälijako, joka koostuu a) viidestä b) $n$:stä jakopisteestä
2. Muodosta välin $[a,b]$ se tasavälijako, joka koostuu a) viidestä b) $n$:stä jakopisteestä
3. Mikä on välin $[a,b]$ $n+1$-alkioisen tasavälijaon määräämän yhden välin pituus? Mitä voit sanoa jaon pisteistä, jos *a*) $a, b$ rationaalisia, *b*) toinen pisteistä $a, b$ rationaalinen ja toinen irrationaalinen tai *c*) molemmat pisteet ovat irrationaalisia?
4. Onko olemassa välin $[0,e]$ tasavälijakoa $P = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_n = e\}$siten, että jollekin $i$ pätee $x_i = 1$? Perustele.
5. Millä ehdolla $c \in [a,b]$ kuuluu johonkin välin $[a,b]$ tasavälijakoon?
6. Määritellään luvun $x \in \mathbb{R}$ kokonaisosa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto [x]$ siten, että $[x] :=$ se kokonaisluku $N$, jolle pätee $N \leq x$ ja tällaisista kokonaisluvuista $N$ on suurin. Osoita, että $f : [-2,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto [x]$ on tasaväliporrasfunktio. Piirrä funktion $f$ kuvaaja välillä $[-2,2]$.
7. Osoita, että
$$s : [0,3] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, \text{kun } x \in [0,1] \\ 2, \text{kun } x \in ]1,3] \end{cases}$$
on tasaväliporrasfunktio.
8. Todista, että tasaväliporrasfunktioiden summa ja tulo ovat edelleen tasaväliporrasfunktioita.

## Tehtävien ratkaisuja

1. *a*) Jaoksi kelpaa $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$
   *b*) Jaoksi kelpaa $\left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$.
2. *a*) Jaoksi kelpaa $\left\{a, a+\frac{b-a}{4}, a+2\frac{b-a}{4}, a+3\frac{b-a}{4}, b\right\}$
   *b*) Jaoksi kelpaa $\left\{a, a+\frac{b-a}{n-1}, a+2\frac{b-a}{n-1}, \ldots, a+(n-2)\frac{b-a}{n-1}, b\right\}$.

3. Yhden välin pituus on $\frac{b-a}{n}$.

   *a*) Mikäli sekä $a$ että $b$ ovat rationaalisia, niin niiden erotus on rationaalinen, ja osavälin pituus $\frac{b-a}{n}$ on myös rationaalinen. Kaikki jakopisteet ovat rationaalisia.

   *b*) Mikäli toinen luvuista $a, b$ on irrationaalinen ja toinen rationaalinen, niin osavälin pituus $\frac{b-a}{n}$ on irrationaalinen. Näin ollen kaikki jaon pisteet toista päätepistettä lukuunottamatta ovat irrationaalisia.

   *c*) Voi olla että osavälin pituus on rationaalinen $a = \sqrt{2} - 1, b = \sqrt{2}$ tai irrationaalinen $a = \sqrt{2}, b = \pi$. Mikäli se on rationaalinen, ovat jakopisteet irrationaalisia. Jos se taas on irrationaalinen, voi jakopisteistä löytyä irrationaalisia ja rationaalisia pisteitä. Esimerkiksi jos valitaan $a = \sqrt{2} - 1, b = 3 - \sqrt{2}$, ja jaetaan väli $[a, b]$ kahteen osaväliin, jakopisteiden joukko on $\{\sqrt{2} - 1, 1, 3 - \sqrt{2}\}$.

4. Ei, sillä välin pituus $\frac{e}{n}$on irrationaalinen ja $0 + k\frac{e}{n} \notin \mathbb{Q}$, valittiinpa $n, k$ miten hyvänsä.

5. $c$ on välin tasavälijaossa täsmälleen silloin kun $c = a + \frac{b-a}{n}$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\frac{c-a}{b-c} \in \mathbb{Q}$.

6. Olkoon $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Selvästi $P$ on tasavälijako. Kullakin $P$:n määräämällä välillä $]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, 2, 3, 4$ funktio $[x]$ saa vakioarvon: Jos $x \in x_i$, niin $[x] = i - 3$.

   Jakopisteissä funktio voi saada mitä hyvänsä arvoja.

7. Valitaan tasavälijako $P = \{0, 1, 2, 3\}$. Tällöin $f(x) \equiv 1$, jos $x \in ]0, 1[$. Mikäli $x \in ]1, 2[$ tai $x \in ]2, 3[$ on funktion arvo $f(x) = 2$. Näin ollen $f$ on tasaväliporrasfunktio.

8. Lause on muotoiltu ja todistettu kohdassa 1.7

## 12 Tasaväliporrasfunktion määrätty tasaväli-integraali

Luonnollinen tapa määritellä määrätty integraali on tehdä se ensin porrasfunktiolle ja sitten laajentaa määritelmää muihin funktioihin. Tasaväli-integraalin määrittelyssä käytetään tasaväliporrasfunktioita. Tasaväliporrasfunktion tasaväli-integraali ilmaisee tasaväliporrasfunktion ja $x$-akselin väliin jäävän alueen alan.

On syytä käyttää nimitystä tasaväli-integraali, erotuksena Riemann-integraalista. Integraaleja voidaan määritellä lukemattomia erilaisia, eivätkä eri määritelmät anna aina samoja tuloksia. Nyt määritellään eräs mahdollinen integraali, ja koska määritelmässä käytetään tasavälijakoa, on integraalista luontevaa käyttää nimeä tasaväli-integraali. Tasajakointegraali olisi yhtä hyvä nimi.

Pinta-alan määritteleviin perusolettamuksiin kuului, että suorakaiteen pinta-ala on sen vierekkäisten sivujen pituuksien tulo. Tämä havainto on perusta tasaväliporrasfunktion tasaväli-integraalin määrittelylle, jossa jokaista osaväliä vastaa suorakaide, jonka pinta-ala osataan laskea.

**Määritelmä 12.1** (tasaväliporrasfunktion määrätty tasaväli-integraali)**.** Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio. Olkoon $\delta > 0$ sellainen luku, että $s$ on vakio jokaisella väleistä $]a + (i-1)\delta, a + i\delta[$, missä $i = 1, 2, \ldots, n$. Merkitään $s$:n välillä $]a + (i-1)\delta, a + i\delta[$ saamaa arvoa $s_i$:llä. *Tasaväliporrasfunktion s määrätty tasaväli-integraali yli välin* $[a, b]$ on

$$\int_a^b s(x)dx := \sum_{i=1}^{n} s_i\delta = \delta \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

*Huomautus* 12.2. Integraali on aina olemassa. Integraalin arvo ei riipu $\delta$:n valinnasta, kunhan $s$ saa vakioarvon $\delta$:n määräämillä väleillä. Todistus on harjoitustehtävä.

Huomaa, että vielä ei osata laskea esimerkiksi jatkuvan funktion $f$ määrättyä tasaväli-integraalia

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

Tätä ei olla määritelty, eikä sitä siis ole vielä olemassa. Käytössä on vain tasaväliporrasfunktion tasaväli-integraalin määritelmä.

Tasaväliporrasfunktion määrätyllä tasaväli-integraalilla on monia tuttuja ominaisuuksia. Todistukset ovat harjoitustehtäviä.

**Lause 12.3.** *Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio. Tällöin jokaiselle $c \in \mathbb{R}$ pätee*

$$\int_a^b cs(x) = c \int_a^b s(x)dx.$$

**Lause 12.4** (additiivisuus, tasaväliporrasfunktion määrätty tasaväli-integraali)**.** *Olkoot $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktioita. Tällöin pätee*

$$\int_a^b s(x) + t(x)dx = \int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)dx.$$

**Lause 12.5** (määrätyn tasaväli-integraalin lineaarisuus tasaväliporrasfunktiolle)**.** *Olkoot $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktioita ja $A, B \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee*

$$\int_a^b As(x) + Bt(x)dx = A \int_a^b s(x)dx + B \int_a^b t(x)dx.$$

**Lause 12.6.** *Mikäli s ja t ovat tasaväliporrasfunktioita siten, että $s(x) \leq t(x)$ kaikilla $x \in [a, b] \setminus (P_s \cup P_t)$, missä $P_s$ ja $P_t$ ovat funktioita s ja t vastaavat tasävälijaot, pätee*

$$\int_a^b s(x)dx \leq \int_a^b t(x)dx.$$

Mikäli integroimisvälille lisätään ylimääräinen piste, ei funktiot $s : [a, c] \to \mathbb{R}$ ja $s : [c, b] \to \mathbb{R}$ välttämättä ole tasaväliporrasfunktioita. Valitsemalla $c$ sopivasti, eli siten, että $\frac{c-a}{b-c} = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$, missä $k, l \in \mathbb{N}$, on määrätty tasaväli-integraali yli koko välin yhtä suuri kuin osavälien yli laskettujen määrättyjen integraalien summa.

**Lause 12.7.** *Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio ja $c \in ]a, b[$ sellainen, että $\frac{c-a}{b-c} =: \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ ja $l, k \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee*

$$\int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx = \int_a^b s(x)dx.$$

*Todistus.* Koska $s$ on tasaväliporrasfunktio, löytyy välin $[a, b]$ tasavälijako

$$P = \{a, a + \delta, a + 2\delta, \dots, a + n\delta = b\}.$$

Valitaan $\delta_2 := \frac{\delta}{k+l} = \frac{b-a}{n(k+l)}$. Nyt välien $[a, c]$ ja $[c, b]$ tasavälijaot

$$P_{ac} := \{a, a + \delta_2, a + 2\delta_2, \dots, a + nl\delta_2 = c\}$$

ja

$$P_{cb} := \{c, c + \delta_2, c + 2\delta_2, \dots, a + n(k + l)\delta_2 = b\}$$

sisältyvät tasavälijakoon

$$P_2 := \{a, a + \delta_2, a + 2\delta_2, \dots, a + nk\delta_2 = c, \dots, a + n(k + l)\delta_2 = b\}.$$

Merkitään funktion $s$ välillä $]a + (i - 1)\delta_2, a + i\delta_2[$ saamaa arvoa $s_i$:llä. Harjoitustehtävä on osoittaa, että

$$\frac{c-a}{nk} = \frac{b-a}{n(k+l)}$$

joten

$$\int_a^c s(x)dx = \frac{c-a}{nk} \sum_{i=1}^{nk} s_i = \frac{b-a}{n(k+l)} \sum_{i=1}^{nk} s_i.$$

Vastaavasti pätee

$$\int_c^b s(x)dx = \frac{b-c}{nl} \sum_{i=1}^{nl} s_i = \frac{b-a}{n(k+l)} \sum_{i=nk+1}^{n(k+l)} s_i.$$

Saadaan siis

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)dx &= \frac{b-a}{n(k+l)} \sum_{i=1}^{n(k+l)} s_i \\ &= \frac{b-a}{n(k+l)} \sum_{i=1}^{nk} s_i + \frac{b-a}{n(k+l)} \sum_{i=nk+1}^{n(k+l)} s_i \\ &= \frac{c-a}{nk} \sum_{i=1}^{nk} s_i + \frac{b-c}{nl} \sum_{i=1}^{nl} s_i \\ &= \int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx,\end{aligned}$$

mikä oli todistettava. □

**Määritelmä 12.8.** Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio. Määritellään

$$\int_b^a s(x)dx := -\int_a^b s(x)dx.$$

**Määritelmä 12.9.** Olkoon $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväliporrasfunktio ja $c \in [a, b]$. Määritellään

$$\int_c^c s(x)dx := 0.$$

## Tehtäviä

1. Osoita, että tasaväliporrasfunktion $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväli-integraalin arvo ei riipu määritelmästä löytyvän $\delta$ valinnasta, kunhan $s$ on vakio väleillä $]a + (i-1)\delta, a + i\delta[$, missä $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Olkoon $f : [0, 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Etsi sellaiset tasaväliporrasfunktiot $s \leq f$ ja $t \geq f$, että

$$\int_0^3 t(x)dx - \int_0^3 s(x) < 3.$$

3. Laske.

$$\int_a^b s(x)dx,$$

kun

*a*) $s : [0, 3] \to \mathbb{R}, s(x) = \begin{cases} 1, \text{ kun } x \in [0, 1] \\ 2, \text{ kun } x \in ]1, 3] \end{cases}$

$$b)\ s:[0,4]\to\mathbb{R}, s(x)=\begin{cases}-1, \text{ kun } x\in[0,1]\\ 4, \text{ kun } x\in]1,2]\\ -5, \text{ kun } x\in[2,4]\end{cases}$$

$$c)\ s:[-\tfrac{3}{2},1]\to\mathbb{R}, s(x)=\begin{cases}-3, \text{ kun } x\in[-\tfrac{3}{2},-1]\\ 5, \text{ kun } x\in]-1,1]\end{cases}$$

4. Todista lause 12.3
5. Todista lause 12.4
6. Todista lause 12.5.
7. Todista: Mikäli $s:[a,b]\to\mathbb{R}$ ja $t:[a,b]\to\mathbb{R}$ ovat tasaväliporrasfunktioita siten, että $s(x)<t(x)$ kaikilla $x\in[a,b]$, pätee

$$\int_a^b s(x)dx<\int_a^b t(x)dx.$$

8. Todista lauseen 12.7 todistamatta jäänyt kohta:

$$\frac{c-a}{nk}=\frac{b-a}{n(k+l)}$$

Huomaa, että $b-a=(b-c)-(c-a)$.

# 13 Paloittain jatkuvan ja rajoitetun funktion tasaväli-integraali

Edellisessä kappaleessa määriteltiin määrätty tasaväli-integraali tasaväliporrasfunktioille. Pystytäänkö tilannetta yleistämään? Saadaanko integraali määritellyksi monimutkaisemmille funktioille?

**Ongelma.** Mikä on määrätty tasaväli-integraali jatkuvalle funktiolle $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ yli välin $[a,b]$?

*Ratkaisu.* Integraalilaskennan kurssin tiedoilla saadaan integraaliksi

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

missä $F'(x)=f(x)$, eli $F$ on funktion $f$ primitiivi (tai integraalifunktio, kuten lukiossa sanotaan).

Määrätyn tasaväli-integraalin avulla ei ole vielä määritelty integraalifunktiota. Myöskään yhteyttä integraalifunktion ja määrätyn integraalin välille ei ole näytetty. Miten määrätty integraali voidaan laskea ilman näitä tietoja? Tarvitaanko välttämättä integraalifunktiota, tai derivoinnin osaamista?

**Ongelma.** Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{mikäli } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{mikäli } x \in ]0, 1] \end{cases}$$

määrätty integraali yli välin $[-1, 1]$.

*Ratkaisu.* Integraalilaskennan kurssn tiedoilla tämä ei onnistu. Ei löydy primitiivifunktiota $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$, siis integraalifunktiota ei ole olemassa.

Kuitenkin kyseessä on tasaväliporrasfunktio, ja tasaväli-integraalin määritelmä ei sisällä mainintaa integraalifunktiosta. Määrätty integraali määriteltiin summana. Määritelmän avulla saadaan

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = -2 + 1 = -1.$$

**Ongelma.** Saadaanko tasaväli-integraali laskettua muillekin kuin tasaväliporrasfunktioille? Kuinka se tapahtuu? Mikä *on* funktion määrätty tasaväli-integraali? Millaisille funktioille voidaan määritellä määrätty tasaväli-integraali?

Ensimmäisiin kolmeen kysymykseen saadaan tyydyttävä vastaus, mutta neljäs on syvällinen, eikä sitä ole mahdollista käydä läpi. Funktion integroituvuus vaatii ettei funktio saa heilahdella pahasti. Jos funktio on riittävän pahasti epäjatkuva, ei tasaväli-integraalia voida määritellä mielekkäästi.

Ensimmäiseen ongelmaan tarvitaan selvästikin määrätyn tasaväli-integraalin määritelmä. Paloittain jatkuville funktioille määrätty tasaväli-integraali saadaan määriteltyä mielekkäästi.

**Määritelmä 13.1** (paloittain jatkuvan, rajoitetun funktion tasaväli-integraali)**.** Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva ja rajoitettu. Funktion $f$ *määrätty tasaväli-integraali yli välin* $[a, b]$ on

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right).$$

Mitä määritelmä pitää sisällään? Tässä $n$ kertoo, kuinka moneen osaan väli $[a, b]$ jaetaan. Summalausekkeen sisältä löytyvä osa

$$a + j\frac{b-a}{n}$$

tarkoittaa $j$. välin oikeanpuoleisessa päätepistettä. Siis summan termissä

$$f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)$$

lasketaan funktion arvo $j$. välin oikeanpuoleisessa päätepisteessä.

Termin edessä oleva kerroin on välin $[a, b]$ pituus jaettuna $n$:llä. Kerroin ei riipu $j$:stä. Summalausekkeen termi

$$\frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right).$$

tarkoittaa siis yhden osavälin pituuden ja funktion välin oikeanpuoleisessa päätepisteessä saaman arvon tuloa, siis suorakaiteen pinta-alaa. Sen jälkeen lasketaan yhteen kunkin osavälin suorakaiteen pinta-ala. Lopuksi hienonnetaan jakoa niin, että suorakaiteita tulee paljon, ja välin pituus menee nollaan. Saatu luku on funktioon $f$ ja väliin $[a, b]$ liittyvä määrätty tasaväli-integraali.

*Huomautus.* Määrättyä tasaväli-integraalia ei määritellä muille kuin paloittain jatkuville ja rajoitetuille funktioille. Määritelmä voidaan yleistää, jos piste voidaan valita osaväliltä mielivaltaisesti, eikä aina oteta osavälin oikeanpuoleista päätepistettä.

*Huomautus.* Määritelmässä esiintyvä raja-arvo on aina olemassa ja yksikäsitteinen, eikä se riipu väliltä valittavasta pisteestä. Todistus (lauseiden 3.5, 3.6, 3.7 ja 3.8 todistukset) on työläs.

*Huomautus.* Aiemmin on määritelty tasaväliporrasfunktioille määrätty tasaväli-integraali. Nyt esitetty määritelmä on yhtäpitävä sen kanssa. Todistusta helpottaa tieto siitä, että määritelmän raja-arvo on olemassa. Todistus on harjoitustehtävä.

**Esimerkki 13.2.**

Muodosta tasaväli-integraalin määritelmässä esiintyvä summa funktiolle $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$, kun väli $[0, 1]$ jaetaan $n$ yhtä suureen osaväliin. Laske raja-arvo, kun $n \to \infty$.

*Ratkaisu.* Muodostetaan ensin välin $[0, 1]$ jako $P$ joka jakaa välin $n$:ään yhtäpitkään osaväliin. Koska välin pituus on $1$, on yhden välin pituus $\frac{1}{n}$. Näin ollen jako on

$$P = \left\{0, 0 + 1 \cdot \frac{1}{n}, \dots (n-1) \cdot \frac{1}{n}, n \cdot \frac{1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

Kunkin välin oikeanpuoleinen päätepiste on siis muotoa $\frac{j}{n}$. Näin ollen funktion arvo on $f(\frac{j}{n}) = \frac{j}{n}$. Jakovälin pituus on $\frac{1}{n}$, joten summan $j$. termi on muotoa

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{j}{n}$$

ja summa on siten

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{j}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2}.$$

Summan raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}j=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(n+1)n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

Havaitaan, että määritelmän avulla on kohtuullisen helppoa saada numeerinen arvio integraalille. Tätä pohditaan kappaleessa Numeerisesta integroinnista.

Paloittain jatkuvan, rajoitetun funktion määrätty tasaväli-integraali voidaan kuitenkin määritellä myös toisin. Mikäli pitäydytään rajoitetuissa ja paloittain jatkuvissa funktioissa määritelmät ovat yhtenevät. Kahden määritelmän hyöty on siinä, että riittää osoittaa, että väite pätee toiselle määritelmälle. Ongelmana on vain osoittaa määritelmien yhtenevyys. Jälleen kerran, yhtenevyyden osoittaminen (lauseen 3.20 todistus) on työlästä.

**Määritelmä 13.3** (rajoitetun, paloittain jatkuvan funktion tasaväli-integraali, 2. versio)**.** Olkoon $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva funktio. Olkoot $s,t$ sellaisia tasaväliporrasfunktioita, että $s(x)\le f(x)\le t(x)$ kaikilla $x\in[a,b]$. Mikäli löytyy tasan yksi luku $I\in\mathbb{R}$ siten, että jokaisella ehdon täyttävällä tasaväliporrasfunktioparilla $s,t$ pätee

$$\int_a^b s(x)dx\le I\le\int_a^b t(x)dx,$$

niin funktion $f$ määrätty tasaväli-integraali yli välin $[a,b]$ on

$$\int_a^b f(x)dx:=I.$$

*Huomautus.* Vaihtoehtoisen määritelmän hyöty tulee esille lauseiden todistamisessa. Kuitenkin määritelmän täsmällinen käsittely on sen verran vaativaa, että kurssilla pitäydytään ensimmäisessä määritelmässä.

## Tehtäviä

1. *a*) Muodosta tasaväli-integraalin määritelmässä esiintyvä summa funktiolle $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+2$, tilanteessa jossa väli $[0,1]$ jaetaan $n$ yhtä suureen osaväliin.

   *b*) Laske raja-arvo, kun $n\to\infty$

2. Määritä funktioon $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\text{, kun } x\in\mathbb{Q}\\ 0\text{, kun } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

   liittyvä raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+j\frac{b-a}{n}\right).$$

Mitä tapahtuu, jos pisteet, jossa $f$:n arvo kullakin välillä lasketaan, valitaankin satunnaisesti sen sijaan että otetaan oikeanpuoleinen päätepiste?

3. Todista tasavälijakoa käyttäen, että

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

Saatat tarvita tietoa $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

4. Todista, että tasaväliporrasfunktiolle $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ tasaväli-integraalin määritelmät ovat samat, eli että

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\frac{b-a}{m} s\left(a + j\frac{b-a}{m}\right),$$

missä $s$:n välillä $]x_{i-1}, x_i[$ saamaa arvoa on merkitty $s_i$:llä.

## Tehtävien ratkaisuja

1. *a*)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1-0}{n}f\left(i\frac{1-0}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(-2\frac{i}{n}+2\right).$$

*b*)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(-2\frac{i}{n}+2\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} -\frac{2i}{n^2}+\frac{2}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\frac{n^2+n}{2} \\
&= 2 - \left(\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n}\right) = 1.
\end{aligned}$$

2. Raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1-0}{n}f\left(0 + j\frac{1-0}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(j\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n} = 1.$$

Mikäli piste valitaan satunnaisesti väliltä $[c, c+\delta]$, missä $c, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, on piste irrationaaliluku (Todennäköisyys, että saadaan rationaaliluku on $0$). Näin ollen raja-arvonkin on oltava $0$.

3. Nyt on $a = 0$ ja $f(x) = x^2$. Muodostetaan määritelmässä esiintyvä summa ja lasketaan raja-arvo:

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-0}{n}\left(j\frac{b-0}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{(jb)^2}{n^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2 b^3}{n^3}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

4. Jaetaan kukin osaväli aina kahtia. Tällöin saadaan jakoja, joita vastaavien tasaväliporrasfunktioiden arvot $s_i(x)$, ovat samat kuin tasaväliporrasfunktion arvot $s(x)$. Siispä niiden integraalitkin ovat samat. Koska näin saatavalla mielivaltaisen hienolla jaolla $P$ summan $\frac{b-a}{m}\sum_{j=1}^{m} s_i(x_j)$ arvo on sama kuin porrasfunktion integraalin $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ arvo, raja-arvo sama kuin porrasfunktion integraalin arvo[16].

## 14 Määrätyn tasaväli-integraalin ominaisuuksia

Määrätty tasaväli-integraali on monilta osin samanlainen kuin Riemann-integraali, kuten seuraavat tulokset osoittavat.

**Lause 14.1.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva. Olkoon $c \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

*Todistus.* Harjoitustehtävä. □

**Lause 14.2.** *Olkoot $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettuja ja paloittain jatkuvia. On voimassa*

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

*Todistus.* Harjoitustehtävä. □

Lauseita 14.1 ja 14.2 hyväksi käyttäen saadaan integroitua mikä hyvänsä rajoitettujen, paloittain jatkuvien funktioiden lineaarikombinaatio:

[16] Mikäli jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$suppenee, on sen raja-arvo sama kuin jonon osajonon raja-arvo

**Lause 14.3.** *Olkoot* $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ *rajoitettuja ja paloittain jatkuvia. Olkoot* $c_i \in \mathbb{R}$ *kaikilla* $i = 1, 2, \dots n$. *Tällöin pätee*

$$\int_a^b \left( \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i(x) dx.$$

*Todistus.* Harjoitustehtävä. □

**Lause 14.4.** *Mikäli* $c \in ]a,b[$*, ja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *on rajoitettu ja paloittain jatkuva, on voimassa*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

*Todistus.* Todistus on melko työläs, eikä sitä voida kurssin tiedoilla esittää. Ongelmia tulee, sillä pistettä $c$ ei välttämättä voida sisällyttää mihinkään tasavälijakoon, johon $a$ ja $b$ kuuluvat. □

**Lause 14.5.** *Olkoot* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ja* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *rajoitettuja ja paloittain jatkuvia. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

*mikäli* $f(x) \leq g(x)$ *kaikilla* $x \in [a,b]$.

*Todistus.* Tulee osoittaa, että pätee epäyhtälö

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m \frac{b-a}{m} g\left(a + j\frac{b-a}{m}\right),$$

mikäli $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$.

Valitaan $n = m$. Tällöin $f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) \leq g\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)$. Siispä

$$\sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} g\left(a + j\frac{b-a}{n}\right),$$

joten[17]

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m \frac{b-a}{m} g\left(a + j\frac{b-a}{m}\right).$$

□

Tasaväli-integraali voidaan määritellä myös siinä tapauksessa, että alaraja on ylärajaa suurempi. Määritelmä on analoginen vastaavan tasaväliporrasfunktion määrätyn tasaväli-integraalin määritelmän kanssa; määritelmää vastaavaan raja-arvoon päästään lähtien tasavälialaja tasaväliyläintegraalien määritelmistä sekä tasaväliporrasfunktion määritelmästä, kun alaraja on ylärajaa suurempi.

[17] Mikäli lukujonojen $a_n$ ja $b_n$ termeille pätee $a_n \leq b_n$ kaikilla $n$ niin silloin $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$

**Määritelmä 14.6.** Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva. Määritellään

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

**Määritelmä 14.7.** Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva ja $c \in [a, b]$. Määritellään

$$\int_c^c f(x)dx := 0.$$

Voidaan todistaa seuraavaa:

**Lause 14.8.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja paloittain jatkuva. Kaikilla $k \neq 0$ pätee*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx.$$

*Todistus.* Tämä voidaan tulkita geometrisesti venytyksenä: alaa venytetään termin $k$ verran, jolloin pinta-ala muuttuu $k$-kertaiseksi. Toditusta ei esitetä kurssilla. □

## Tehtäviä

1. Todista lause 14.1.

2. Todista lause 14.2.

3. Todista lause 14.3.

4. Laske

$$\int_b^a f(x)dx \qquad \text{ja} \qquad \int_{2a}^{2b} f\left(\frac{x}{2}\right) dx,$$

kun tiedetään, että

$$\int_a^b f(x)dx = 7.$$

5. Määritelmä sanoo, että

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Miksi määritellään näin? Mitä seuraisi, jos määriteltäisiin

$$\int_a^a f(x)dx := 1?$$

**Tehtävien ratkaisuja**

1. Lauseen 4.1 todistus.

2. Lauseen 4.2 todistus.

3. Lauseen 4.3 todistus.

4.
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = -7.$$
$$\int_{2a}^{2b} f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \cdot \int_a^b f(x)dx = 2 \cdot 7 = 14.$$

5. Saataisiin esimerkiksi $\int_a^a f(x)dx + \int_a^a f(x)dx = 2 \neq 1 = \int_a^a f(x)dx$.

# 15 Analyysin peruslause

On annettu funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$. Mikä on funktion määrätty integraali yli välin $[0, 1]$?

*Ratkaisu.* Integraalilaskennan kurssin tiedoilla tehtävä ratkeaa seuraavasti: Mikäli kaikilla $x \in [a, b]$ on voimassa $F'(x) = f(x)$,
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$
joten
$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

Onnistuuko sama käyttäen määrättyä tasaväli-intergraalia? Voitaisiin laskea raja-arvo
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right),$$
mutta tämä vaikuttaa työläältä. Voidaan kuitenkin päästä käyttämään lyhyempää, mekaanista laskutapaa analyysin peruslauseen kautta, mikäli derivointikaavoja on tiedossa. Analyysin peruslause tasaväli-integraalille pätee täsmälleen samassa muodossa kuin Riemann-integraalillekin. Tulosten todistaminen on turhan aikaavievää.

**Lause 15.1** (Analyysin peruslause, osa 1)**.** *Olkoon*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

*missä* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on rajoitettu ja paloittain jatkuva. Tällöin* $G$ *on jatkuva funktio ja pätee*

$$G'(x) = f(x),$$

*mikäli* $f$ *on jatkuva* $x$*:ssä.*

*Todistus.* Todistus perustuu lauseisiin 14.4 ja 14.5 sekä määritelmään 14.6, mutta on turhan työläs tässä esitettäväksi. □

*Huomautus.* Mikäli lauseen tilanteessa $f$ on jatkuva, voidaan kirjoittaa

$$G'(x) = f(x)$$

kaikilla $x \in [a, b]$, eli

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Integraalifunktio voidaan määritellä määrätyn (tasaväli-)integraalin avulla.

**Määritelmä 15.2** ((tasaväli-)integraalifunktio)**.** Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva ja rajoitettu. Funktion $f$ integraalifunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ arvo pisteessä $x \in [a, b]$ määritellään

$$F(x) := \int_a^x f(x)dx.$$

*Huomautus.* Osoittautuu, että funktion integraalifunktio ja tasaväli-integraalifunktio ovat samat[18]. Siksi puhutaan vain integraalifunktiosta, eikä tasaväli-integraalifunktiosta.

*Huomautus.* Integraalilaskennan kurssilla vaaditaan, että funktion $F$ tulee olla derivoituva. Edellä esitetyssä integraalifunktion määritelmässä derivoituvuutta ei vaadita. Voidaan kuitenkin osoittaa, että funktio $F$ on derivoituva kaikkialla lukuunottamatta mahdollisesti äärellisen montaa pistettä, sillä $f$:stä oletettiin, että se on paloittain jatkuva ja rajoitettu. Mikäli $f$ on tarpeeksi pahasti heilahteleva funktio, ei integraalifunktiota voida määritellä.

*Huomautus.* Jokaisella paloittain jatkuvalla ja rajoitetulla funktiolla on integraalifunktio. Tulos seuraa määrätyn tasaväli-integraalin olemassaolosta: mikäli funktio on paloittain jatkuva ja rajoitettu, on määrätty tasaväli-integraali $\int_a^c f(x)dx$ olemassa jokaiselle $c \in \mathbb{R}$.

Aina funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integraalifunktiota ei voida esittää alkeisfunktioiden avulla. Esimerkiksi funktion $f(x) = e^{x^2}$ integraalifunktio on sellainen. Integraalifunktio on silti olemassa!

[18]Tämä seuraa tasaväli-integraalin ja Riemann-integraalin yhtenevyydestä paloittain jatkuville ja rajoitetuille funktioille

*Huomautus.* Usein laajennetaan integraalifunktion käsitettä, ja sanotaan, että jokainen funktio $G : [a, b] \to \mathbb{R}, G(x) = F(x) + c$ jollakin $c \in \mathbb{R}$ on funktion $f$ integraalifunktio.

**Määritelmä 15.3.** Funktiota $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$G'(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \in [a, b],$$

kun päätepisteissä on laskettu toispuoleiset derivaatat, kutsutaan funktion $f$ primitiiviksi.

**Lause 15.4.** *Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin jokainen funktion $f$ integraalifunktio on myös funktion $f$ primitiivi, ja jokainen primitiivi vastaavasti integraalifunktio.*

*Todistus.* Tämä seuraa analyysin peruslauseen 1. osasta. □

Ylioppilaskirjoituksissa primitiivistä puhutaan integraalifunktiona, eli siellä integraalifunktion pitää olla derivoituva. Tarkista aina, mitä kukin funktion integraalifunktiolla tarkoittaa!

Joskus puhutaan funktion integroituvuudesta. Usein tällä tarkoitetaan, että funktiolla on integraalifunktio. Kysymys, onko jollain tietyllä funktiolla integraalifunktio, tai siis onko funktio integroituva on syvällinen, eikä sitä kurssilla käsitellä.

Seuraavassa käydään läpi analyysin peruslauseen toinen osa, joka on integraalien laskemisessa jatkuvasti käytössä.

**Lause 15.5** (Analyysin peruslause, osa 2)**.** *Olkoon $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva. Oletetaan, että*

$$F'(x) = f(x),$$

*lukuunottamatta mahdollisesti äärellisen montaa pistettä. Tällöin pätee*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

*Todistus.* Todistus nojaa analyysin peruslauseen 1. osaan ja tietoon, että mikäli $f'(x) \equiv 0$, niin $f$ on vakiofunktio. Se on kuitenkin turhan työläs tässä esitettäväksi. □

## Tehtäviä

1. Onko funktio $F : [-3, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto -\sin x + A$, missä $A \in \mathbb{R}$ funktion $f : [-3, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ primitiivi tai integraalifunktio?

2. Perustele väittämä tai anna vastaesimerkki:

   *a*) Mikäli on annettu jatkuva funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, aina on olemassa funktio $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ siten, että $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

*b*) Mikäli on annettu funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, aina on olemassa funktio $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ siten, että $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

*c*) Oletetaan, että funktiolla $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on ainakin yksi integraalifunktio. Tällöin jokainen funktion $f$ integraalifunktio on funktion $f$ primitiivi.

*d*) Funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$ ei ole integroituva.

*e*) Epäjatkuvalla funktiolla ei voi olla primitiiviä.

*f*) On olemassa jatkuva funktio, jolla ei ole primitiiviä.

3. Keksi esimerkki funktiosta $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, jolla ei ole primitiiviä.

4. Keksi esimerkki funktiosta $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, jolla ei ole integraalifunktiota.

5. Osoita, että funktio $F : [1, 2] \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x+1}{x}$ on funktion $f : [1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = 1 + \log x$ primitiivi. Onko funktio $F$ funktion $f$ integraalifunktio?

## Tehtävien ratkaisuja

1. Funktio $F : A \to \mathbb{R}$ on funktion $f : A \to \mathbb{R}$ primitiivi, mikäli pätee $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A$. Nyt on $F'(x) = -(-\cos x) = \cos x = f(x)$, joten $F$ on funktion $F$ primitiivi. Jokainen $f$:n primitiivi on myös sen integraalifunktio.

   *a*) Väite pätee, sillä koska $f$ on jatkuva, on tasaväli-integraali

$$\int_a^x f(t)dt$$

   olemassa riippumatta pisteen $x \in [a, b]$ valinnasta.

   *b*) Ei, esimerkiksi funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto I_{\mathbb{Q}}$ kelpaa vastaesimerkiksi.

   *c*) Ei, sillä jos integraalifunktio ei ole derivoituva, ei se voi olla primitiivi, koska primitiivi on määritelmänsä nojalla derivoituva. Esimerkiksi funktio $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ kun } x < 0 \\ -1, \text{ kun } x \geq 0 \end{cases}$$

   kelpaa vastaesimerkiksi. Sillä on olemassa integraalifunktio, mutta ei primitiiviä.

   *d*) Funktion $x \mapsto e^{x^2}$ integraalifunktiota ei voi esittää alkeisfunktioden avulla, mutta siitä huolimatta se on olemassa. Jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio, eli se on integroituva.

*e*) Tehtävässä tulee löytää derivaattafunktio, joka ei ole jatkuva. Tämä voi olla hyvinkin hankalaa. Esimerkiksi seuraava funktio käy primitiiviksi.

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ kun } x \neq 0 \\ 0, \text{ kun } x = 0. \end{cases}$$

Voidaan osoittaa[19], että funktio on derivoituva nollassa. Sen derivaattafunktiolle pätee

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \text{ kun } x \neq 0,$$

joten funktio heilahtelee pahasti nollan lähistöllä. Sitä ei voida määritellä pisteessä siten, että derivaattafunktiosta tulisi jatkuva. Siispä löytyi epäjatkuva funktio, jolla on primitiivi, ja väite on siis väärä.

*f*) Väite on väärä, sillä jatkuvalle funktiolle $f$ löytyy analyysin perulauseen nojalla $F$ siten, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $f$:n määrittelyjoukon pisteillä $x$.

## 16 Riemann-integraali

Integraalilaskennan kurssilla määritellään Riemann-integraali. Se eroaa tasaväli-integraalista siinä mielessä, että välin jakoa ei rajoita vaatimus yhtä pitkistä osaväleistä. Myöskin piste, jossa funktion arvoa lasketaan, saadaan valita vapaasti osaväliltä.

Tarkoituksena on tutkia, milloin tasaväli- ja Riemann-integraali ovat samat. Kappaleessa käytetään merkintää

$$\int_a^b f(x)dx$$

tarkoittamaan $f$:n Riemann-integraalia yli välin $[a, b]$. Tasaväli-integraalille käytetään merkintää

$$[tv]\int_a^b f(x)dx.$$

Palautetaan mieleen Riemann-integraalin määritelmä.

**Määritelmä 16.1** (Riemannin summa)**.** Olkoon $[a, b] \subset \mathbb{R}$ suljettu väli ja olkoon $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ välin jako. Merkitään välin $]x_{i-1}, x_i[$ pituutta $\Delta x_i$:llä. Olkoon $\xi_i$, missä $i = 1, 2, 3, \ldots n$, mielivaltainen välin $]x_{i-1}, x_i[$ piste. Funktioon $f$ ja jakoon $P$ liittyvä *Riemannin summa* on

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

[19]Funktio pysyy nollan lähellä lausekkeiden $\pm x^2$ sisällä, ja koska nämä ovat derivoituvia nollassa, on myöskin $f$ derivoituva nollassa

**Määritelmä 16.2** (Riemann-integraali)**.** Mikäli edellä määritellyllä Riemannin summalla on raja-arvo, kun $\max \Delta x_i \to 0$, on $f$ Riemann-integroituva, ja funktion *Riemann-integraali* yli välin $[a, b]$ on

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

*Huomautus* 16.3. Integroituvuudelle ei riitä, että löytyy yksi hyvä jako ja yhdet välien pisteet $\xi_i$, joilla raja-arvo on olemassa. Pitää nimittäin olla, että millä tahansa välien valinnalla, ja millä tahansa jakopisteillä, jotka toteuttavat määritelmän ehdon, saadaan sama raja-arvo.

*Huomautus* 16.4. Riemann-integraalia ei määritellä rajoittamattoman välin yli. Myöskin funktion $f$ tulee olla rajoitettu.

Tasaväli-integraali määriteltiin raja-arvona, mutta määriteltäessä tehtiin rajaus paloittain jatkuviin funktioihin. Määrätty tasaväli-integraali on kuitenkin aina olemassa, mikäli funktio $f$ vain on Riemann-integroituva. Tasaväli- ja Riemann-integraalien arvot ovat tällöin samat.

**Lause 16.5.** *Mikäli funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, on raja-arvo*

$$[tv]\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right).$$

*olemassa, ja pätee*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = [tv]\int\limits_a^b f(x)dx.$$

*Todistus.* Valitaan välin $[a, b]$ jako siten, että kyseessä on tasavälijako $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$. Valitaan pisteet $\xi_i$ välien oikeiksi päätepisteiksi. Riemannin summan termit ovat tällöin muotoa

$$f(\xi_i)\Delta x_i = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n},$$

Myös tällä valinnalla raja-arvon tulee olla sama kuin Riemann-integraalin arvo. Näin ollen

pätee

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) \\ &= [tv]\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

□

Toiseen suuntaan tulos ei päde:

**Esimerkki 16.6.** Tasavälijaon avulla määritellylle integraalille kaikki ei toimi hyvin, jos integroitava funktio ei ole paloittain jatkuva. Määritellään funktio $I_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$I_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nyt $0 + j\frac{1-0}{n} \in \mathbb{Q}$ kaikilla $j \in [1, 2, \ldots, n]$. Siten

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1-0}{n} f\left(0 + j\frac{1-0}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = 1.$$

Näyttäisi, että funktion integraali on 1. Kuitenkaan tasaväli-integraalin teoriassa ei ole annettu mitään ehtoa funktion integroituvuudelle. Ei ole myöskään määritelty funktion tasaväli-integraalia muille kuin paloittain jatkuville funktioille. Esimerkin valossa ei ole mielekästä samastaa tasaväli-integroituvuutta raja-arvon olemassaoloon.

Paloittain jatkuville integraali on mielekäs ja antaa samat tulokset kuin muillekin integraaleille. Funktio $I_{\mathbb{Q}}$ on kuitenkin epäjatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä. Se ei ole Riemann-integroituva, sillä riippuen välipisteiden valinnasta Riemannin summan raja-arvo vaihtelee.

Esimerkki 16.6 havainnollistaa sitä seikkaa, että tasaväli-integraali, jonka määrittelyssä valitaan aina osavälin oikeanpuoleinen päätepiste, ei toimi aina samalla tavalla kuin Riemann-integraali. Herääkin kysymys, onko ongelma tasavälijaossa, vai pisteen valinnassa. Jos pisteen saa valita osaväliltä vapaasti, saadaan erilainen integraalin määritelmä.

Voidaan todistaa seuraavaa:

**Lause 16.7.** *Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituva täsmälleen silloin kun raja-arvo*

$$[tv]\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_j),$$

*on olemassa ja se on riippumaton pisteiden $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ valinnasta.*

*Todistus.* Mikäli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, on raja-arvo olemassa. Perustelu on samanlainen kuin lauseen 16.5 todistus.

Todistuksen toinen osa on hieman työläs. Siinä tarvitaan infimumin ja supremumin käsitteitä, ja näitä ei välttämättä käydä kurssilla läpi. Todistus löytyy lauseen 7.8 yhteydestä. $\square$

## Numeerisesta integroinnista

Joskus tulee vastaan funktioita, joiden integraalifunktioita ei pysty esittämään alkeisfunktioiden avulla. Tällöin joudutaan laskemaan numeerinen arvio määrätylle integraalille. Lauseen 16.7 tulos antaa yksinkertaisen keinon laskea Riemann-integroituvan funktion määrättyjä integraaleja numeerisesti tasavälijaon avulla.

**Esimerkki 16.8.** Esimerkiksi määrätty integraali

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{\sin(2x)}{x}dx$$

joudutaan laskemaan numeerisesti. Muodostamalla kuudesta pisteestä koostuva tasavälijako, ja laskemalla funktion arvo välin keskipisteessä, saadaan arvoksi $\int_1^2 \frac{\sin(2x)}{x}dx \approx 0,1507$, kun oikea arvo on $0,1528$.

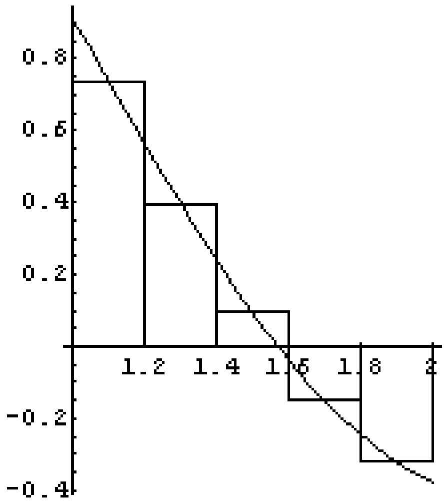
Graafisista laskimista löytyy yleensä valmis algoritmi, jolla määrättyjen integraalien arvot saa helposti laskettua. Mikäli laskimessa on ohjelmointitoimintoja, voi ohjelmoida oman integrointiohjelman.

## Tehtäviä

1. Määritellään $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$. Tällöin on

$$\int_0^1 f(x)dx = 1.$$

Poistetaan väliltä jokin piste $x_1$. Miten käy integraalin arvolle? Entä jos välitä poistetaan $10^{100}$ pistettä? Jos pisteitä poistetaan yksitellen hyvin monta, pieneneekö integraalin arvo ykkösestä? Miksi tai miksi ei?




Kuva 6: Määrätyn integraalin $\int_1^2 \frac{\sin(2x)}{x} dx$ laskeminen numeerisesti

2. Mikä on funktion määrätyn integraalin arvo yli sen määrittelyjoukon, jos joukkoon kuuluu vain yksi piste? Kuinka suuri täytyy määrittelyjoukon vähintään olla, että integraali eroaisi nollasta?

3. Suljettua väliä $[a, b] \subset \mathbb{R}$ vastaava suljettu väli voidaan määritellä myös avaruuteen $\mathbb{R}^2$. Minkälainen olisi tällainen kaksiulotteinen suljettu väli? Entä kaksiulotteinen tasaväli? Entä millainen on kaksiulotteisen suljetun välin jako tai tasavälijako?

4. Olkoon $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Laske funktion määrätty integraali yli $A$:n, kun

   *a*) $f : A \to \mathbb{R}, f(x, y) = 3$

   *b*) $g : A \to \mathbb{R}, g(x, y) = 3x + 1$

   *c*) $h : A \to \mathbb{R}, h(x, y) = x + y$.

   Piirrä kuva.

5. Laske arvio määrätylle tasaväli-integraalille

$$\int_1^3 \frac{\sin x}{x} dx.$$

6. Laske arvio määrätylle tasaväli-integraalille

$$\int_{-1}^4 e^{x^2} dx.$$

# Viitteet


[1] APOSTOL, TOM M., *Calculus, volume 1*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.

[2] BERS, LIPMAN, *Calculus*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1969.

[3] COURANT, RICHARD JA FRITZ JOHN, *Introduction to Calculus and Analysis, volume 1*, Springer, New York, 1976.

[4] KILPELÄINEN, TERO, *Analyysi 2*, `http://www.math.jyu.fi/~terok/opetus/analyysi2/analyysi2.pdf`, Jyväskylän yliopiston Analyysi 2-kurssin luentomuistiinpanoja, 2003.