Suorien leikkauksista $\mathscr{H}^1$-äärellismittaisten tasojoukkojen kanssa

HENRI HOKKANEN

Matematiikan Pro Gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2009

Sisältö

Johdanto

Suoristuvuus on geometrisen mittateorian keskeisimpiä käsitteitä. Sillä tarkoitetaan sileyttä mittateoreettisessa mielessä: joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *m-suoristuva*, jos on numeroituva kokoelma C^1-kuvauksia $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, joille

$$\mathscr{H}^m\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)\right) = 0,$$

missä $\mathscr{H}^m$ on m-ulotteinen Hausdorffin mitta. Toisaalta joukkoja, joilla on $\mathscr{H}^m$-nollamittainen leikkaus jokaisen suoristuvan joukon kanssa kutsutaan *täysin suoristumattomiksi*. On helppo näyttää, että jokainen $\mathscr{H}^m$-äärellismittainen joukko voidaan hajoittaa suoristuvaan ja täysin suoristumattomaan osaan.

Suoristuvat joukot käyttäytyvät usein arvattavalla tavalla. Esimerkiksi m-suoristuvan joukon (vaikkapa tasopolun osajoukon) projektiolla m-ulotteiselle aliavaruudelle on "melkein varmasti" positiivinen $\mathscr{H}^m$-mitta, kunhan projisoitava joukko ei ole $\mathscr{H}^m$-nollamittainen. Sen sijaan klassisen Besicovitchin projektiolauseen mukaan täysin m-suoristumattomien joukkojen projektiot ovat melkein varmasti $\mathscr{H}^m$-nollamittaisia.

Tässä tutkielmassa keskitytään samankaltaiseen kysymykseen. Ei ole nimittäin hankala näyttää, ettei $\mathscr{H}^1$-äärellismittainen suoristuva tasojoukko leikkaa suoria kovinkaan monessa pisteessä. Tietysti leikkaus voi joskus olla ylinumeroituvakin, joten oikea muotoilu vaatii hieman väljyyttä. Siispä väite on mieluummin, että leikkaus on äärellinen tietyssä mielessä "melkein kaikille suorille". Kun tämä on selvää, niin on luonnollista kysyä, kuinka täysin suoristumattomille joukoille käy. Tämä on osoittautunut hankalaksi kysymykseksi, eikä siihen ole vielä löytynyt vastausta. Sen sijaan tässä tutkielmassa osoitetaan, ettei $\mathscr{H}^1$-äärellismittaisuus pelkästään takaa, että melkein kaikkien suorien leikkaukset joukon kanssa olisivat äärellisiä. Todistus perustuu artikkeliin [2].

Osoittautuu siis, että yleinen $\mathscr{H}^1$-äärellismittainen tasojoukko voi leikata useaakin suoraa äärettömän monessa pisteessä, mutta täysin suoristumattomien joukkojen osalta kysymykseen ei osata vastata. Yllättäen ymmärrys yleisistä tasojoukoista ei ole vieläkään sillä tasolla, että edes yksinkertaisimpiin kysymyksiin niiden ominaisuuksista osattaisiin vastata. Kyse ei tietenkään ole pelkästään joukoista ja niiden ominaisuuksista vaan myös mitoista ja niiden käyttäytymisestä tilanteissa, joissa mielikuvitus pettää. Eri näkökulmat näkyvät myös nimissä, joilla tämän tyyppistä matematiikkaa kutsutaan: fraktaaligeometria, geometrinen mittateoria ja Hausdorffin mittojen teoria.

1. Peruskäsitteitä ja -tuloksia

Tässä luvussa käydään läpi tarvittavat mittateorian ja differentiaalilaskennan tulokset. Oletus on, että lukija on jo jossain määrin perillä aiheista, ja esimerkiksi integraaliteorian esittely yksinkertaisista funktioista lähtien sivuutetaan. Lähteinä on käytetty mittateorian osalta teoksia [1] ja [9], ja differentiaalilaskennan osalta teosta [11]. Sovitaan ensin tavallisista merkinnöistä.

- Joukon X potenssijoukolle $\{A \subset X\}$ käytetään merkintää $\mathscr{P}(X)$.
- Luonnollisilla luvuilla tarkoitetaan joukkoa $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Merkintä $B(x, r)$ tarkoittaa metrisen avaruuden avointa palloa. Suljetuille palloille käytetään merkintää $\overline{B}(x, r)$.
- Joukon A sulkeumalle käytetään merkintää $\overline{A}$.
- Kun on selvää, minkä suhteen komplementti otetaan, merkitään joukon $A \subset X$ komplementtia $A^c = X \setminus A$.
- $\mathscr{L}^n$ tarkoittaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ Lebesguen mittaa. Integraaleissa $d\mathscr{L}^n(x)$ lyhennetään kirjoittamalla dx.
- Lukumäärämittaa merkitään symbolilla $\#$.
- Laajennettua reaalilukujen joukkoa merkitään $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

Mittateoriaa.

Määritelmä 1.1. Kuvaus $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ on joukon X *ulkomitta*, jos

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(2) $\mu(A) \le \mu(B)$, kun $A \subset B$, ja
(3) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, kun $A_1, A_2, \ldots \subset X$.

Määritelmä 1.2. Olkoon μ joukon X ulkomitta ja olkoon $A \subset X$. Sanotaan, että ”ominaisuus” $P(x)$ on voimassa *μ-melkein kaikilla* $x \in A$, jos

$$\mu(\{x \in A : P(x) \text{ ei ole tosi}\}) = 0.$$

Määritelmä 1.3. Olkoon μ ulkomitta. Tällöin joukko $A \subset X$ on *μ-mitallinen*, jos kaikille $E \subset X$

$$\mu(E) = \mu(E \setminus A) + \mu(E \cap A).$$

Määritelmä 1.4. Joukko $\Gamma \subset \mathscr{P}(X)$ on joukon X *σ-algebra*, jos

(1) $X \in \Gamma$,
(2) $X \setminus A \in \Gamma$, kun $A \in \Gamma$, ja
(3) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$, kun $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$.

Metrisen avaruuden suppeinta avoimet joukot sisältävää σ-algebraa (eli avoimet joukot sisältävien σ-algebrojen leikkausta) kutsutaan *Borelin σ-algebraksi*. Sen alkioita kutsutaan *Borel-joukoiksi*.

Lause 1.5. *Olkoon μ joukon X ulkomitta ja oletetaan, että $\Gamma \subset \mathscr{P}(X)$ muodostuu joukon X μ-mitallisista joukoista. Tällöin Γ on joukon X σ-algebra. Lisäksi jos joukoille $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$ pätee $A_i \cap A_j = \emptyset$, kun $i \neq j$, niin*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Todistus. [1, Theorem 2.31]. □

Määritelmä 1.6. Joukon X ulkomitta μ on *säännöllinen*, jos jokaiselle $A \subset X$ on μ-mitallinen joukko $B \supset A$ siten, että $\mu(B) = \mu(A)$.

Lause 1.7. *Olkoon μ joukon X ulkomitta ja olkoot $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset X$ μ-mitallisia joukkoja. Tällöin*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i),$$

eikä mitallisuutta tarvitse olettaa, jos μ on säännöllinen. Jos taas joukot $X \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ ovat μ-mitallisia ja $\mu(A_1) < \infty$, niin

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Todistus. Perustellaan väite, ettei ensimmäisessä kohdassa tarvitse olettaa mitallisuutta, jos μ on säännöllinen ulkomitta. Perustelu muihin kohtiin löytyy lähteestä [1, Theorem 2.20]. Olkoot siis $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset X$ joukkoja. Säännöllisyyden mukaan kaikilla i on μ-mitallinen joukko $B_i \supset A_i$, jolle $\mu(B_i) = \mu(A_i)$. Ne eivät välttämättä ole sisäkkäin, joten määritellään kaikilla i

$$C_i = \bigcap_{j=i}^{\infty} B_j \supset A_i,$$

jolloin $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset X$. Joukot C_i ovat myös μ-mitallisia. Koska $A_i \subset C_i \subset B_i$, on $\mu(C_i) \leq \mu(B_i) = \mu(A_i) \leq \mu(C_i)$, joten $\mu(A_i) = \mu(C_i)$. Koska tulos tunnetaan μ-mitallisille joukoille, saadaan

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(C_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Toisaalta $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ kaikilla j, joten myös

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

on voimassa. □

Lause 1.8. *Olkoon μ joukon X ulkomitta ja olkoot A ja B joukkoja, joille $A \subset B \subset X$. Oletetaan vielä, että A on μ-mitallinen ja $\mu(A) < \infty$. Tällöin*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Todistus. Koska A on μ-mitallinen, niin

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Koska $\mu(A) < \infty$, niin väite seuraa. □

Lause 1.9. *Olkoon μ joukon X ulkomitta, ja olkoot A ja B joukkoja, joille $A \subset B \subset X$. Oletetaan, että B on μ-mitallinen ja $\mu(A) = \mu(B) < \infty$. Tällöin*

$$\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$$

jokaiselle μ-mitalliselle joukolle $C \subset X$.

Todistus. Koska $A \subset B$, niin ainakin $\mu(A \cap C) \leq \mu(B \cap C)$ pätee. Toisaalta

$$\mu(A) \leq \mu(A \setminus (B \cap C)) + \mu(A \cap (B \cap C)) \leq \mu(B \setminus (B \cap C)) + \mu(A \cap C),$$

joten tiedon $\mu(B \setminus (B \cap C)) \leq \mu(B) < \infty$ mukaan

$$\mu(A \cap C) \geq \mu(A) - \mu(B \setminus (B \cap C)).$$

Lopulta Lauseen 1.8 mukaan

$$\mu(A \cap C) \geq \mu(A) - \mu(B \setminus (B \cap C)) = \mu(B) - (\mu(B) - \mu(B \cap C)) = \mu(B \cap C).$$

Siten väite pätee. □

Määritelmä 1.10. Olkoon μ joukon X ulkomitta ja olkoon $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funktio. Funktio f on *μ-mitallinen*, jos kaikilla $a \in \mathbb{R}$ alkukuva

$$\{x : f(x) > a\} \subset X$$

on μ-mitallinen. Jos X on metrinen avaruus ja joukko $\{x : f(x) > a\}$ on Borel-joukko kaikilla $a \in \mathbb{R}$, niin f on *Borel-mitallinen* tai *Borelin funktio*.

Lause 1.11. *Olkoon μ joukon X ulkomitta ja olkoon $f : X \to [0, \infty]$ ei-negatiivinen μ-mitallinen funktio. Tällöin*

$$\int_X f(x)\, d\mu x = 0,$$

jos ja vain jos $f(x) = 0$ μ-melkein kaikilla $x \in X$.

Lause 1.12. *Olkoon μ joukon X ulkomitta. Olkoon $A \subset X$ μ-mitallinen joukko. Tällöin*

$$\mu(A) = \int_X \chi_A(x)\, d\mu x,$$

missä χ_A on joukon A karakteristinen funktio.

Lause 1.13 (Fatoun lemma)**.** *Olkoon μ joukon X ulkomitta. Olkoon (f_i) jono μ-mitallisia ei-negatiivisia funktiota $f_i : X \to [0, \infty]$. Tällöin*

$$\int_X \varliminf_{i\to\infty} f_i(x)\ d\mu x \leq \varliminf_{i\to\infty} \int_X f_i(x)\ d\mu x.$$

Todistus. [1, Lemma 5.7]. □

Lause 1.14 (Monotonisen konvergenssin lause)**.** *Olkoon μ joukon X ulkomitta. Olkoon (f_i) kasvava jono μ-mitallisia ei-negatiivisia funktioita $f_i : X \to [0, \infty]$, ts.*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \ \textit{kaikilla } x \in X.$$

Tällöin

$$\int_X \lim_{i\to\infty} f_i(x)\ d\mu x = \lim_{i\to\infty} \int_X f_i(x)\ d\mu x.$$

Erityisesti μ-mitallisille ei-negatiivisille funktioille $f_i : X \to [0, \infty]$

$$\int_X \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\ d\mu x = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f_i(x)\ d\mu x.$$

Todistus. [1, Theorem 5.8]. □

Määritelmä 1.15. Metrisen avaruuden X ulkomitta μ on *Borelin ulkomitta*, jos Borel-joukot ovat mitallisia, ja *Borel-säännöllinen*, jos se on Borelin ulkomitta ja lisäksi jokaiselle $A \subset X$ on Borel-joukko B, jolle $A \subset B$ ja $\mu(A) = \mu(B)$.

Määritelmä 1.16. Olkoon X separoituva metrinen avaruus ja olkoon μ sen Borelin ulkomitta. Tällöin ulkomitan μ *kantaja* $\operatorname{spt} \mu$ on pienin suljettu joukko F, jolle $\mu(X \setminus F) = 0$.

Lause 1.17. *Olkoon (X, d) separoituva metrinen avaruus ja olkoon μ sen Borelin ulkomitta. Tällöin kantaja* $\operatorname{spt} \mu$ *on olemassa.*

Todistus. Olkoon

$$\mathscr{F} = \{F \subset X : F \text{ suljettu}, \mu(X \setminus F) = 0\}.$$

Joukko $\mathscr{F}$ on epätyhjä, sillä $X \in \mathscr{F}$, ja tunnetusti

$$C = \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$$

on suljettu, joten riittää näyttää, että

$$\mu(X \setminus C) = 0.$$

Koska X on separoituva, löytyy numeroituva tiheä osa $Z \subset X$. Joukosta Z tarvitaan vain ne pisteet, jotka kuuluvat joukkoon $X \setminus C$. Olkoon siis

$$Z \cap (X \setminus C) = \{z_1, z_2, \dots\}.$$

Joukolle $X \setminus C$ on toisaalta esitys

$$X \setminus C = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} (X \setminus F) = \bigcup \{V \subset X : V \text{ avoin}, \ \mu(V) = 0\},$$

joten jokaisella $x \in X \setminus C$ on $r > 0$ siten, että $\mu(B(x,r)) = 0$. Jos jollain i

$$\sup\{r > 0 : \mu(B(z_i, r)) = 0\} = \infty,$$

niin $\mu(X) = 0$ ja $\operatorname{spt} \mu = \emptyset$. Oletetaan siis, ettei tällaista i ole. Tällöin voidaan kaikilla i valita r_i, $0 < r_i < \infty$, siten, että $\mu(B(z_i, r_i)) = 0$ ja

$$r_i \geq \frac{1}{2} \sup\{r > 0 : \mu(B(z_i, r)) = 0\}.$$

Merkitään $B_i = B(z_i, r_i) \cap (X \setminus C)$ ja osoitetaan, että

$$X \setminus C = \bigcup_i B_i. \tag{1}$$

Olkoon $x \in X \setminus C$. Tällöin löytyy $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subset X \setminus C$ ja $\mu(B(x,r)) = 0$. Koska Z on tiheä, on $z_i \in B(x, \frac{1}{4}r)$ jollain i. Säteen r_i valinnan perusteella $x \in B(z_i, r_i)$: Koska $\mu(B(x,r)) = 0$ ja $B(z_i, \frac{3}{4}r) \subset B(x,r)$, on

$$r_i \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} r = \frac{3}{8} r > \frac{1}{4} r.$$

Siispä $d(z_i, x) < \frac{1}{4} r < r_i$, joten $x \in B_i$. Näin ollen (1) on voimassa. Koska μ on Borelin ulkomitta, ovat joukot B_i mitallisia. Siten Lauseen 1.7 mukaan

$$\mu(X \setminus C) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = 0,$$

joten $\operatorname{spt} \mu = C$. □

Huomautus 1.18. Lauseen 1.17 todistuksessa esiintyi hyödyllinen havainto:

$$\operatorname{spt} \mu = X \setminus \{x : \text{on } r > 0 \text{ s.e. } \mu(B(x,r)) = 0\}.$$

Koska $\mu(X \setminus \operatorname{spt} \mu) = 0$, niin $\mu(B(x,r)) > 0$ kaikille $r > 0$ μ-melkein kaikilla $x \in X$. Tämä on siis voimassa, kun μ on separoituvan metrisen avaruuden Borelin ulkomitta.

Määritelmä 1.19. Metrisen avaruuden X ulkomitta μ on *Radonin ulkomitta*, jos se on Borelin ulkomitta ja

(1) $\mu(K) < \infty$ kompakteille $K \subset X$,
(2) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U \text{ kompakti}\}$ kaikille avoimille $U \subset X$ sekä
(3) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, \ U \text{ avoin}\}$ kaikille $A \subset X$.

Määritelmä 1.20. Olkoon μ joukon X ulkomitta ja olkoon $A \subset X$. Tällöin ulkomitan μ *rajoittumamitta* joukkoon A on ulkomitta, joka saadaan asettamalla

$$(\mu|_A)(B) = \mu(A \cap B)$$

kaikille $B \subset X$.

Lemma 1.21. *Olkoon μ metrisen avaruuden X ulkomitta ja olkoon $A \subset X$. Olkoon $\nu = \mu|_A$.*

(1) *Jokainen μ-mitallinen joukko on ν-mitallinen.*
(2) *Jos μ on Borel-säännöllinen, A μ-mitallinen ja $\mu(A) < \infty$, niin myös ν on Borel-säännöllinen.*

Todistus. [9, Theorem 1.9]. (1) Olkoon $S \subset X$ μ-mitallinen ja olkoon $E \subset X$. Tällöin mitallisuus sovellettuna joukkoon $E \cap A$ antaa

$$\nu(E) = \mu(E \cap A) = \mu((E \cap A) \setminus S) + \mu((E \cap A) \cap S) = \nu(E \setminus S) + \nu(E \cap S).$$

(2) Edellisen perusteella ν on Borelin ulkomitta. Olkoon sitten $S \subset X$ ja osoitetaan, että löytyy Borel-joukko B, jolle $S \subset B$ ja $\nu(S) = \nu(B)$. Voidaan olettaa, että $\nu(S) < \infty$. Koska μ on Borel-säännöllinen, löytyy Borel-joukko $B \supset A$, jolle $\mu(B) = \mu(A)$. Samasta syystä löytyy Borel-joukko $C \supset B \cap S$, jolle $\mu(C) = \mu(B \cap S)$. Tällöin $C \cup B^c$ on Borel-joukko, ja $S \subset C \cup B^c$, joten $\nu(S) \leq \nu(C \cup B^c)$. Toisaalta Lauseen 1.9 mukaan

$$\begin{aligned} \nu(S) &= \mu(S \cap A) = \mu(S \cap B) = \mu(C) \geq \mu(B \cap C) \\ &= \mu(B \cap (C \cup B^c)) = \mu(A \cap (C \cup B^c)) = \nu(C \cup B^c). \end{aligned}$$

Siten $\nu(S) = \nu(C \cup B^c)$. □

Määritelmä 1.22. Metrisen avaruuden (X, d) osajoukon $A \subset X$ *halkaisija* on

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a,b) : a, b \in A\}$$

ja joukkojen $A, B \subset X$ *etäisyys* on

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Sovitaan, että $\sup \emptyset = 0$ ja $\inf \emptyset = \infty$.

Lause 1.23 (Approksimointilause)**.** *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon μ sen Borel-säännöllinen ulkomitta. Olkoon $A \subset X$ μ-mitallinen joukko, jolle $\mu(A) < \infty$. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ on suljettu joukko $C \subset A$ siten, että $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$.*

Todistus. [9, Theorem 1.10]. Määritellään $\nu = \mu|_A$, jolloin ν on Borel-säännöllinen Lemman 1.21 perusteella. Oletetaan, että A on Borel-joukko. Olkoon $\mathscr{A}$ niiden joukkojen S kokoelma, joille kaikille $\varepsilon > 0$ on suljettu joukko F ja avoin joukko U siten, että $F \subset S \subset U$ ja

$$\nu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

Näytetään, että $\mathscr{A}$ on σ-algebra. Selvästi $X \in \mathscr{A}$. Jos $S \in \mathscr{A}$, niin on suljettu F ja avoin U siten, että $F \subset S \subset U$ ja $\nu(U \setminus F) < \varepsilon$, ja ottamalla niiden komplementit nähdään, että $X \setminus S \in \mathscr{A}$. Olkoot sitten $S_1, S_2, \ldots \in \mathscr{A}$. Kaikilla i löytyy suljettu F_i ja avoin U_i niin, että $F_i \subset S_i \subset U_i$ ja

$$\nu(U_i \setminus F_i) < 2^{-i-1}\varepsilon.$$

Koska $\nu(X) < \infty$, saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(U_i \setminus F_i) = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Siten, kun valitaan n riittävän suureksi, saadaan joukot

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i,$$

joille $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset U$ ja

$$\nu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

Osoitetaan vielä, että $\mathscr{A}$ sisältää suljetut joukot $C \subset X$. Joukot

$$V_i = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, C) < 1/i\}$$

ovat avoimia, $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ ja

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = C,$$

sillä $\mathrm{dist}(x, C) > 0$, kun $x \in X \setminus C$. Koska $\nu(X) < \infty$, pätee

$$\lim_{i\to\infty} \nu(V_i) = \nu(C),$$

josta saadaan

$$\nu(V_i \setminus C) < \varepsilon,$$

kun i on riittävän suuri. Näin ollen $\mathscr{A}$ sisältää Borel-joukot ja erityisesti lauseen alkuperäinen väite on nyt näytetty Borel-joukoille $B \subset A$.

Jos A ei olekaan Borel-joukko vaan ainoastaan μ-mitallinen, niin Borel-säännöllisyyden mukaan on Borel-joukko $B \supset A$ niin, että $\mu(B) = \mu(A)$. Toisaalta löytyy Borel-joukko $D \supset B \setminus A$, jolle $\mu(D) = \mu(B \setminus A) = 0$. Tällöin $B \setminus D$ on Borel-joukko ja sille pätee $B \setminus D \subset A$. Alkuosan perusteella löytyy suljettu $C \subset B \setminus D$, jolle

$$\mu((B \setminus D) \setminus C) < \varepsilon.$$

Koska

$$\mu(B \setminus D) = \mu(B) - \mu(B \cap D) = \mu(B) = \mu(A),$$

on

$$\mu(A \setminus C) = \mu((B \setminus D) \setminus C) < \varepsilon,$$

mikä oli väite. □

Huomautus 1.24. Jos Lauseessa 1.23 avaruuden X suljetut joukot ovat kompaktien joukkojen numeroituvia yhdisteitä, niin joukko C saadaan kompaktiksi. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lauseen 1.23 mukaan löytyy suljettu joukko $C' \subset A$ siten, että

$$\mu(A \setminus C') < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Lisäoletuksen mukaan on kompaktit joukot $K_1, K_2, \ldots$, joille

$$C' = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Nyt $A \setminus K_1 \supset A \setminus (K_1 \cup K_2) \supset \ldots$ ja $\mu(A) < \infty$, joten

$$\mu(A \setminus C') = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right).$$

Kompaktien joukkojen äärellinen yhdiste on kompakti joukko, joten väite saadaan, kun n valitaan riittävän suureksi.

Approksimointilauseelle saadaan pari hyödyllistä seurausta.

Määritelmä 1.25. Olkoon μ joukon X ulkomitta. Sanotaan, että joukon $A \subset X$ μ-mitta on *σ-äärellinen*, jos on numeroituva kokoelma joukkoja $A_1, A_2, \ldots \subset X$ niin, että $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ja $\mu(A_i) < \infty$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Ulkomitta μ on *σ-äärellinen*, jos koko joukon X μ-mitta on σ-äärellinen.

Seuraus 1.26. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon ν sen σ-äärellinen Borel-säännöllinen ulkomitta. Olkoon $A \subset X$ ν-mitallinen. Tällöin on Borel-joukko $B \subset A$ siten, että $\nu(A) = \nu(B)$.*

Todistus. Oletuksen mukaan on joukot $S_1, S_2, \ldots$ siten, että $\nu(S_i) < \infty$ kaikilla i ja

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i.$$

Koska ν on Borel-säännöllinen, voidaan olettaa, että joukot S_i ovat Borel-joukkoja. Lisäksi voidaan olettaa, että $S_i \cap S_j = \emptyset$, kun $i \neq j$. Merkitään $A_i = A \cap S_i$, jolloin A_i on ν-mitallinen ja $\nu(A_i) < \infty$ kaikilla i. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Lauseen 1.23 nojalla kaikille $i = 1, 2, \ldots$ löytyy suljettu joukko $B_{k,i} \subset A_i$ siten, että

$$\nu(A_i) - \nu(B_{k,i}) = \nu(A_i \setminus B_{k,i}) < k^{-1}2^{-i},$$

joten

$$\nu(B_{k,i}) > \nu(A_i) - k^{-1}2^{-i}.$$

Tällöin

$$B_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{k,i}$$

on Borel-joukko ja $B_k \subset A$. Koska lisäksi $B_{k,i} \cap B_{k,j} = \emptyset$, kun $i \neq j$, pätee

$$\nu(B_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_{k,i}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) - k^{-1} \geq \nu(A) - k^{-1}.$$

Edelleen joukko $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ on Borel-joukko ja $B \subset A$. Siten $\nu(B) \leq \nu(A)$. Toisaalta

$$\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \geq \lim_{n\to\infty} \nu(A) - n^{-1} = \nu(A).$$

$\square$

Seuraus 1.27. *Olkoon μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ ulkomitta. Tällöin μ on Radonin ulkomitta, jos ja vain jos se on Borel-säännöllinen ja $\mu(K) < \infty$ jokaiselle kompaktille joukolle K.*

Todistus. [9, Corollary 1.11]. Tarkistetaan ensin ehdon välttämättömyys, johon riittää näyttää, että joukoille $A \subset X$, $\mu(A) < \infty$, on Borel-joukko $B \supset A$ niin, että $\mu(B) = \mu(A)$. Tällainen B saadaan valitsemalla avoimet

$$G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset A,$$

joille

$$\mu(G_i) < \mu(A) + 1/i.$$

Silloin $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ on Borel ja

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(G_i) \leq \mu(A).$$

Ehdon riittävyyden näyttämiseen tarvitaan jo Lausetta 1.23. Riittää tietenkin näyttää vain, että

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U \text{ kompakti}\},$$
$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) : V \supset A \text{ avoin}\},$$

kun U on avoin ja A on mikä tahansa joukko. Jos $\mu(U) < \infty$, niin väite seuraa suoraan Lauseesta 1.23 ja Huomautuksesta 1.24. Jos $\mu(U) = \infty$, niin $\mu(U) = \lim_{n\to\infty} \mu(U \cap B(0,n))$ ja $\mu(U \cap B(0,n)) < \infty$ kaikilla n, joten kaikilla $M > 0$ on n niin, että

$$2M < \mu(U \cap B(0,n)) < \infty.$$

Siten Lauseen 1.23 mukaan on kompakti $K \subset U$, jolle

$$\mu(K) > M.$$

Toisen väitteen kohdalla voidaan olettaa, että $\mu(A) < \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Borel-säännöllisyyden mukaan on Borel-joukko $B \supset A$, jolle $\mu(B) = \mu(A)$. Joukko $B^c \cap B(0,n)$ on μ-mitallinen ja $\mu(B^c \cap B(0,n)) < \infty$, joten Lauseen 1.23 mukaan on suljettu $C_n \subset B^c \cap B(0,n)$, jolle

$$\mu((B^c \cap B(0,n)) \setminus C_n) < 2^{-n}\varepsilon.$$

Tällöin $U_n = (X \setminus C_n) \cap B(0,n)$ on avoin, $B \cap B(0,n) \subset U_n$ ja

$$\mu(U_n \setminus B) < 2^{-n}\varepsilon.$$

Nyt $B \subset \bigcup_{i=1}^\infty U_i$ ja

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty U_i \setminus B\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(U_i \setminus B) \le \varepsilon,$$

joten

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty U_i\right) \le \mu(B) + \varepsilon = \mu(A) + \varepsilon.$$

Koska $\bigcup_{i=1}^\infty U_i$ on avointen joukkojen yhdisteenä avoin, niin väite seuraa. □

Lause 1.28. *Olkoon μ joukon X ulkomitta. Tällöin kuvaus $\nu : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$,*

$$\nu(A) = \inf\{\mu(B) : A \subset B, B \text{ } \mu\text{-mitallinen}\},$$

on säännöllinen ulkomitta ja jokainen μ-mitallinen joukko on ν-mitallinen. Vastaavasti jos X on metrinen avaruus ja μ on sen Borelin ulkomitta, niin kuvaus $\nu : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$,

$$\nu(A) = \inf\{\mu(B) : A \subset B, B \text{ Borel-joukko}\},$$

on Borel-säännöllinen ulkomitta.

Todistus. Todistetaan vain ensimmäinen väite, sillä perustelun toiselle saa korvaamalla μ-mitalliset joukot Borel-joukoilla. Näytetään ensin, että ν on ulkomitta. Selvästi $\nu(\emptyset) = 0$ ja $\nu(A) \le \nu(B)$, kun $A \subset B$, sillä μ on ulkomitta. Olkoot sitten $A_1, A_2, \ldots \subset X$ ja näytetään, että $\nu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \le \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i)$. Voidaan olettaa, että $\nu(A_i) < \infty$ kaikilla i. Olkoon $\varepsilon > 0$. Kaikilla i löytyy μ-mitallinen joukko B_i, jolle $A_i \subset B_i$ ja

$$\mu(B_i) \le \nu(A_i) + 2^{-i}\varepsilon.$$

Nyt $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i$ ja $\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ on μ-mitallinen, joten

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\right) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) \le \varepsilon + \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i).$$

Näin ollen ν on ulkomitta.

Osoitetaan seuraavaksi, että jokainen μ-mitallinen joukko on myös ν-mitallinen. Olkoot siis $A \subset X$ μ-mitallinen joukko ja $E \subset X$ mikä tahansa joukko. Riittää näyttää, että

$$\nu(E) \ge \nu(E \setminus A) + \nu(E \cap A) \tag{2}$$

Koska jokaiselle μ-mitalliselle joukolle E', $E \subset E'$, pätee

$$\mu(E') \ge \mu(E' \setminus A) + \mu(E' \cap A) = \nu(E' \setminus A) + \nu(E' \cap A) \ge \nu(E \setminus A) + \nu(E \cap A),$$

niin (2) seuraa. Säännöllisyyden osoittamiseksi olkoon $S \subset X$ joukko. Jos $\nu(S) = \infty$, niin $S \subset X$, $\nu(S) = \nu(X)$ ja X on ν-mitallinen. Muutoin kaikilla $i = 1, 2, \ldots$ löytyy μ-mitallinen joukko B_i, jolle $S \subset B_i$ ja $\mu(B_i) < \nu(S) + 1/i$. Valinta voidaan tehdään niin, että $B_i \supset B_{i+1}$ kaikilla i. Joukko B_i on ν-mitallinen kaikilla i, joten Lauseen 1.7 mukaan

$$\nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} \nu(B_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) \le \lim_{i\to\infty} \nu(S) + 1/i = \nu(S).$$

Koska $S \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, niin $\nu(S) \le \nu(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)$. Siten ν on säännöllinen. □

Määritelmä 1.29. Joukon X σ-algebrassa Γ määritelty kuvaus $\mu : \Gamma \to [0, \infty]$ on *mitta*, jos

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(2) $\mu(A) \le \mu(B)$, kun $A \subset B$, ja
(3) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, kun joukot $A_1, A_2, \ldots$ ovat pareittain erillisiä.

Lause 1.30. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon μ avaruuden X Borel-joukkojen σ-algebrassa määritelty mitta. Tällöin kuvaus $\nu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$,*

$$\nu(A) = \inf\{\mu(B) : A \subset B, B \textit{ Borel-joukko}\},$$

on Borel-säännöllinen ulkomitta.

Todistus. Todistus muistuttaa Lauseen 1.28 todistusta. Näytetään ensin, että ν on ulkomitta. Selvästi $\nu(\emptyset) = 0$, ja $\nu(A) \le \nu(B)$, kun $A \subset B \subset X$, koska näin on Borel-joukoille. Olkoot sitten $A_1, A_2, \ldots \subset X$ ja näytetään, että $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$. Voidaan olettaa, että $\nu(A_i) < \infty$ kaikilla i. Olkoon $\varepsilon > 0$. Kaikilla i löytyy Borel-joukko B_i, jolle $A_i \subset B_i$ ja

$$\mu(B_i) \le \nu(A_i) + 2^{-i}\varepsilon.$$

Nyt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ on Borel-joukko ja mitan μ ominaisuuksien perusteella

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \le \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

Näin ollen ν on ulkomitta.

Osoitetaan seuraavaksi, että Borel-joukot ovat ν-mitallisia. Olkoon $B \subset X$ Borel-joukko ja $E \subset X$ mikä tahansa joukko. Jokaiselle Borel-joukolle E', $E \subset E'$, pätee

$$\mu(E') = \mu(E' \setminus B) + \mu(E' \cap B) = \nu(E' \setminus B) + \nu(E' \cap B) \ge \nu(E \setminus B) + \nu(E \cap B),$$

joten mitallisuus seuraa. Borel-säännöllisyyden osoittamiseksi olkoon $S \subset X$. Jos $\nu(S) = \infty$, niin $S \subset X$, $\nu(S) = \nu(X)$ ja X on Borel-joukko. Muutoin kaikilla $i = 1, 2, \ldots$ löytyy Borel-joukko B_i, jolle $S \subset B_i$ ja $\mu(B_i) < \nu(S) + 1/i$. Valinta voidaan tehdään niin, että $B_i \supset B_{i+1}$ kaikilla i. Joukko B_i on Borel kaikilla i, joten Lauseen 1.7 mukaan

$$\nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} \nu(B_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) \le \lim_{i\to\infty} \nu(S) + 1/i = \nu(S).$$

Koska $S \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, niin $\nu(S) \leq \nu(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)$. Siten ν on Borel-säännöllinen. $\square$

Differentiaali- ja integraalilaskentaa.

Määritelmä 1.31. Olkoon $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ avaruuden $\mathbb{R}^m$ standardikanta. Avoimessa joukossa $G \subset \mathbb{R}^m$ määritelty kuvaus $f : G \to \mathbb{R}^n$ on *jatkuvasti differentioituva* eli *C^1-kuvaus*, jos kaikilla $x \in G$, $1 \leq i \leq n$ ja $1 \leq j \leq m$ raja-arvo

$$\partial_j f_i(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t}$$

on äärellisenä olemassa siten, että näin saatavat kuvaukset $x \mapsto \partial_j f_i(x) \in \mathbb{R}$, $x \in G$, ovat jatkuvia. Sen *derivaatta* pisteessä $x \in G$ on $n \times m$-matriisi $Df(x) = [\partial_j f_i(x)]$.

Yhden muuttujan reaaliarvoisten funktioiden jatkuvaa differentioituvuutta kutsutaan myös *jatkuvaksi derivoituvuudeksi.* Jos edellä $n = 1$, niin vektoria $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_m f(x)) \in \mathbb{R}^m$, $x \in G$, kutsutaan *gradientiksi.* Jatkuvasti differentioituvat kuvaukset ovat tunnetusti jatkuvia.

Lause 1.32 (Väliarvolause)**.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka on jatkuvasti derivoituva avoimella välillä $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Tällöin on $\xi \in (a, b)$, jolle*

$$f'(\xi) = \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|}.$$

Todistus. [11]. $\square$

Lause 1.33. *Olkoon $G \subset \mathbb{R}^m$ avoin joukko ja olkoon $f : G \to \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva. Olkoot $x \in G$ ja $r > 0$ sellaisia, että $\overline{B}(x, r) \subset G$. Tällöin löytyy $L \geq 0$ siten, että f on L-Lipschitz-kuvaus joukossa $B(x, r)$.*

Todistus. Käsitellään ensin tapaus $n = 1$. Olkoot $x \in G$ ja $r > 0$. Olkoot sitten $y, z \in B(x, r)$ eri pisteitä. Koska $B(x, r)$ on konveksi, niin kuvaus

$$g : [0, \|z - y\|] \to \mathbb{R},\ g(t) = f\left(y + t\frac{z - y}{\|z - y\|}\right),$$

on hyvin määritelty. Ketjusäännön nojalla se on jatkuvasti derivoituva välillä $(0, \|z - y\|)$ ja

$$g'(t) = \left\langle \nabla f\left(y + t\frac{z - y}{\|z - y\|}\right), \frac{z - y}{\|z - y\|} \right\rangle,$$

joten väliarvolauseen mukaan on $\xi \in (0, |z - y|)$, jolle

$$\begin{aligned} |f(y) - f(z)| &= |g(0) - g(\|z - y\|)| = g'(\xi)\|z - y\| \\ &= \left\langle \nabla f\left(y + \xi\frac{z - y}{\|z - y\|}\right), \frac{z - y}{\|z - y\|} \right\rangle \|z - y\|. \end{aligned}$$

Niinpä Cauchy-Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$|f(y) - f(z)| \leq \left\| \nabla f \left(y + \xi \frac{z-y}{\|z-y\|} \right) \right\| \|z-y\| \leq \max_{w \in \overline{B}(x,r)} \|\nabla f(w)\| \|z-y\|.$$

Siten valinta $L = \max_{w \in \overline{B}(x,r)} \|\nabla f(w)\|$ antaa väitteen.

Jos $n > 1$, niin soveltamalla edellistä komponenttikuvauksiin $f_1, \ldots, f_n$ saadaan jokaiselle $i = 1, 2, \ldots, n$ vakio $L_i \geq 0$, jolle

$$|f_i(y) - f_i(z)| \leq L_i \|y - z\|$$

kaikilla $y, z \in B(x, r) \subset \mathbb{R}^m$. Siten

$$\|f(y) - f(z)\| \leq |f_1(y) - f_1(z)| + \ldots + |f_n(y) - f_n(z)| \leq (L_1 + \ldots + L_n)\|y - z\|$$

kaikilla $y, z \in B(x, r)$. Valinta $L = L_1 + \ldots + L_n$ antaa siis väitteen. □

Seuraus 1.34. *Olkoot $U \subset \mathbb{R}^m$ ja $V \subset \mathbb{R}^n$ avoimia joukkoja, ja olkoon $f : U \to V$ niiden välinen C^1-bijektio siten, että myös käänteiskuvaus f^{-1} on C^1-kuvaus. Tällöin jokaisella $x \in U$ on $r > 0$ ja $K \geq 1$ siten, että f on K-*bilipschitz *joukossa $B(x, r)$ eli*

$$K^{-1}\|y - z\| \leq \|f(y) - f(z)\| \leq K\|y - z\|.$$

kaikilla $y, z \in B(x, r)$, $y \neq z$.

Todistus. Olkoon $x \in U$. Koska U on avoin, on $r > 0$ siten, että $\overline{B}(x, r) \subset U$. Lauseen 1.33 perusteella on $L > 0$, jolle kaikilla $y, z \in B(x, r)$

$$\|f(y) - f(z)\| \leq L\|y - z\|.$$

Koska f^{-1} on jatkuva, niin $f(B(x, r)) \subset V$ on avoin, joten löytyy $r' > 0$, jolle $B(f(x), r') \subset f(B(x, r))$. Koska f^{-1} on jatkuva, saadaan

$$\overline{B}(f(x), r') \subset \overline{f(B(x,r)} \subset f(\overline{B}(x, r)) \subset V,$$

joten Lauseen 1.33 mukaan on $L' > 0$, jolle kaikilla $y, z \in B(f(x), r')$ pätee

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)\| \leq L'\|y - z\|.$$

Pienentämällä sädettä r saadaan $f(B(x, r)) \subset B(f(x), r')$, jolloin kaikille $y, z \in B(x, r)$ pätee

$$\|y - z\| = \|f^{-1}(f(y)) - f^{-1}(f(z))\| \leq L'\|f(y) - f(z)\|$$

eli

$$(L')^{-1}\|y - z\| \leq \|f(y) - f(z)\|.$$

Niinpä valitsemalla $K > 0$ suuremmaksi luvuista L ja L' saadaan, että f on K-bilipschitz joukossa $B(x, r)$. □

Lause 1.35 (Fubinin lause)**.** *Jos $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ on ei-negatiivinen $\mathscr{L}^n$-mitallinen funktio, niin*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx_{\sigma(1)} \dots dx_{\sigma(n)},$$

missä $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja σ on jokin joukon $\{1, 2, \dots, n\}$ permutaatio.

Todistus. [8, Theorem 5.47]. □

Lause 1.36 (Muuttujanvaihtolause)**.** *Olkoot $U, V \subset \mathbb{R}^n$ avoimia joukkoja ja olkoon $\phi : U \to V$ niiden välinen C^1-bijektio, jolle $\det \phi'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in U$. Tällöin*

$$\int_V f(y)\ dy = \int_U f(\phi(x))|\det D\phi(x)|\ dx$$

jokaiselle Borelin funktiolle $f : V \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$.

Todistus. [8, Theorem 6.32]. □

Lemma 1.37. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ $\mathscr{L}^2$-mitallinen. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *$\mathscr{L}^2(A) = 0$,*
(2) *$\mathscr{L}^1(\{t \in \mathbb{R} : t\overline{\theta} \in A\}) = 0$ $\mathscr{L}^1$-melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$, missä $\overline{\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$.*

Todistus. (1) $\implies$ (2): Oletetaan ensin, että A on Borel-joukko. Olkoot

$$U = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times (0, \pi), V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

ja

$$\phi : U \to V, \phi(t, \theta) = t(\cos\theta, \sin\theta).$$

Kuvaus ϕ täyttää muuttujanvaihtolauseen 1.36 oletukset, joten sen ja Fubinin lauseen 1.35 perusteella

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^2(A) &= \int_V \chi_A(x, y)\ d(x, y) = \int_U \chi_A(t\overline{\theta})|t|\ d(t, \theta) \\ &= \int_{(0,\pi)} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \chi_A(t\overline{\theta})|t|\ dt\ d\theta.\end{aligned} \tag{3}$$

Koska $\int \chi_A(t\overline{\theta})|t|\ dt = 0$ täsmälleen, kun $\int \chi_A(t\overline{\theta})dt = 0$, niin väite seuraa. Tästä saadaan yleinen tapaus, sillä Borel-säännöllisyyden perusteella löytyy Borel-joukko $B \supset A$, jolle $\mathscr{L}^2(B) = \mathscr{L}^2(A) = 0$.

(2) $\implies$ (1): Koska

$$\mathscr{L}^2(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{L}^2(A \cap B(0, n)),$$

voidaan olettaa, että $\mathscr{L}^2(A) < \infty$. Koska A on mitallinen, löytyy Lauseen 1.23 nojalla kaikilla $\varepsilon > 0$ suljettu joukko $C \subset A$, jolle $\mathscr{L}^2(C) > \mathscr{L}^2(A) - \varepsilon$. Yhtälön (3) perusteella $\mathscr{L}^2(C) = 0$, joten $\mathscr{L}^2(A) < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Siten myös $\mathscr{L}^2(A) = 0$. □

Hausdorffin mitat. *Hausdorffin mitat* voidaan määritellä jokaiseen separoituvaan metriseen avaruuteen, erityisesti avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Separoituvuutta tarvitaan, jotta avaruus voidaan kaikilla $\delta > 0$ varmasti peittää numeroituvalla määrällä joukkoja A, joille $\operatorname{diam}(A) \leq \delta$.

Määritelmä 1.38. Olkoon $s \geq 0$. Separoituvan metrisen avaruuden X *s-ulotteinen Hausdorffin δ-sisältö* on ulkomitta $\mathscr{H}^s_\delta$,

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(A_i)^s,$$

missä infimum otetaan yli niiden numeroituvien joukkoperheiden $\{A_i\} \subset \mathscr{P}(X)$, joille $A \subset \bigcup_i A_i$ ja $\operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$ kaikille i. Joukko, jonka yli infimum otetaan, on epätyhjä, sillä X oletettiin separoituvaksi. Tästä saadaan *s-ulotteinen Hausdorffin mitta* asettamalla

$$\mathscr{H}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathscr{H}^s_\delta(A).$$

Kun $s = 0$, tarvitaan edellä sopimus sille, kuinka 0^0 pitää tulkita. Tässä sovitaan, että $0^0 = 1$.

Lause 1.39. *Kuvaus $\mathscr{H}^s$ on Borelin ulkomitta.*

Todistus. [9, Theorem 4.2]. □

Huomautus 1.40. Ulkomitta $\mathscr{H}^0$ eli 0-ulotteinen Hausdorffin mitta on vain lukumäärämitta $\#$. Jos joukossa A on $n \in \{1, 2, \ldots\}$ alkiota, ts. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, niin yksiöt $\{a_i\}$ peittävät joukon A, joten $\mathscr{H}^0_\delta(A) \leq n$ kaikilla δ. Siten $\mathscr{H}^0(A) \leq \#A$. Toista väitettä varten oletetaan ensin, että $\#A < \infty$. Tällöin luku $\varepsilon = \min_{a,b \in A} d(a,b) > 0$ on olemassa. Jos nyt $\delta < \varepsilon$ ja $\operatorname{diam}(U) \leq \delta$, niin leikkaus $A \cap U$ sisältää korkeintaan yhden pisteen. Siispä $\mathscr{H}^0_\delta(A) \geq \#A$ kaikilla $\delta < \varepsilon$, joten $\mathscr{H}^0(A) \geq \#A$. Väite pätee myös, kun $\#A = \infty$, koska se pätee jokaiselle äärelliselle osakokoelmalle.

Lause 1.41. *Määritelmässä 1.38 peitejoukot voidaan valita joko avoimiksi tai suljetuiksi. Erityisesti $\mathscr{H}^s$ on Borel-säännöllinen.*

Todistus. Osoitetaan ensimmäinen väite suljettujen joukkojen tapauksessa. Todistus avoimille saadaan samaan tapaan. Riittää näyttää, että

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$$

kaikille $A \subset X$. Epäyhtälö $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\overline{A})$ on selvä, joten voidaan tehdä vastaoletus $\operatorname{diam}(A) < \operatorname{diam}(\overline{A})$. Sen mukaan on $a \in A$ ja $b \in \overline{A} \setminus A$ siten, että

$$d(a,b) > \operatorname{diam}(A).$$

Tällöin $\operatorname{dist}(b, A) > 0$: Ellei, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ on $a_\varepsilon \in A$ siten, että $d(b, a_\varepsilon) < \varepsilon$. Siispä

$$d(a,b) \leq d(a, a_\varepsilon) + d(a_\varepsilon, b) \leq \operatorname{diam}(A) + \varepsilon,$$

joten $d(a,b) \leq \operatorname{diam}(A)$, mikä ei oletuksen mukaan ole mahdollista. Saatiin siis, että $\operatorname{dist}(b,A) > 0$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska b on joukon A kasautumispiste.

Osoitetaan sitten Borel-säännöllisyys, jolloin voidaan olettaa, että $\mathscr{H}^s(A) < \infty$. Valitaan alkuosan perusteella kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ suljetut joukot $F_{k,1}, F_{k,2}, \ldots$ siten, että $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty F_{k,i} = C_k$, $\operatorname{diam}(F_{k,i}) \leq 1/k$ ja

$$\sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(F_{k,i})^s \leq \mathscr{H}^s_{1/k}(A) + 1/k.$$

Nyt $\bigcap_{k=1}^\infty C_k \supset A$ on Borel-joukko ja kaikilla n

$$\mathscr{H}^s_{1/n}\left(\bigcap_{k=1}^\infty C_k\right) \leq \mathscr{H}^s_{1/n}(C_n) \leq \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(F_{n,i})^s \leq \mathscr{H}^s_{1/n}(A) + 1/n.$$

Kun $n \to \infty$, niin saadaan

$$\mathscr{H}^s\left(\bigcap_{k=1}^\infty C_k\right) \leq \mathscr{H}^s(A).$$

Koska myös käänteinen epäyhtälö pätee, niin väite seuraa. $\square$

Huomautus 1.42. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ Hausdorffin mitta $\mathscr{H}^n$ ja Lebesguen mitta $\mathscr{L}^n$ ovat melkein sama asia: löytyy vakio $0 < c_n < \infty$, jolle $\mathscr{L}^n = c_n\mathscr{H}^n$. Perustelu sivuutetaan, katso esimerkiksi [9, 4.3].

Lause 1.43. *Olkoot X ja Y separoituvia metrisiä avaruuksia. Olkoon $A \subset X$ ja olkoon $f : A \to Y$ L-Lipschitz-kuvaus, ts. jollain $L \geq 0$*

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x,y)$$

kaikilla $x, y \in A$. Tällöin

$$\mathscr{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathscr{H}^s(A).$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $\mathscr{H}^s(A) < \infty$. Näytetään, että kaikille $\delta > 0$ on

$$\mathscr{H}^s_{L\delta}(f(A)) \leq L^s \mathscr{H}^s_\delta(A),$$

mistä väite seuraa, kun $\delta \downarrow 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \subset X$ siten, että $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, $\operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$ ja

$$\sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(A_i)^s < \mathscr{H}^s_\delta(A) + \varepsilon.$$

Nyt $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^\infty f(A_i)$ ja

$$\operatorname{diam}(f(A_i)) \leq L \operatorname{diam}(A_i) \leq L\delta$$

Näin ollen

$$\mathscr{H}^s_{L\delta}(f(A)) \le \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(f(A_i))^s \le L^s \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(A_i)^s < L^s(\mathscr{H}^s_\delta(A) + \varepsilon).$$

kaikilla $\varepsilon > 0$. $\square$

Lemma 1.44. *Separoituvan metrisen avaruuden (X, d) jokaisella avoimella peitteellä on numeroituva osapeite.* Avoimella peitteellä *tarkoitetaan avaruuden X avointen joukkojen kokoelmaa $\mathscr{G}$, jolle $X = \bigcup_{G \in \mathscr{G}} G$, ja sen* osapeitteellä *joukkoa $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$, jolle edelleen $X = \bigcup_{G \in \mathscr{G}'} G$.*

Todistus. Olkoon $A \subset X$ numeroituva ja tiheä. Joukko

$$\{B(a, r) : a \in A,\ r > 0,\ r \in \mathbb{Q}\}$$

on numeroituva, joten sille voidaan käyttää esitystä $\{B_1, B_2, \ldots\}$. Olkoon sitten $\mathscr{D}$ avaruuden X avoin peite. Numeroituva alipeite saadaan valitsemalla kaikilla $i = 1, 2, \ldots$ joukko $D_i \in \mathscr{D}$, jolle $B_i \subset D_i$. Jos tällaista ei löydy, niin jätetään D_i määrittelemättä. Riittää siis osoittaa, että $\bigcup_i D_i$ peittää avaruuden X. Jos $x \in X$, niin on $D \in \mathscr{D}$, jolle $x \in D$. Koska D on avoin, on $r > 0$, jolle $B(x, r) \subset D$. Koska A on tiheä avaruudessa X, on $a \in A$, jolle $a \in B(x, q)$, kun $0 < q < r/2$ ja $q \in \mathbb{Q}$. Tällöin

$$x \in B(a, q) \subset B(x, r) \subset D.$$

Jos oletetaan, että $B(a, q) = B_i$, niin edellisen perusteella D_i on määritelty ja $x \in B_i \subset D_i$. Siten väite on todistettu. $\square$

Lause 1.45. *Olkoot X ja Y separoituvia metrisiä avaruuksia. Olkoon $A \subset X$ joukko ja olkoon $f : A \to Y$ kuvaus.*

(1) *Olkoon $\mathscr{H}^s(A) = 0$. Jos kuvaus f on* lokaalisti Lipschitz*, ts. jokaiselle $x \in A$ on $L_x \ge 0$ ja $\varepsilon_x > 0$ niin, että*

$$d(f(z), f(y)) \le L_x d(z, y)$$

kaikilla $y, z \in A \cap B(x, \varepsilon_x)$, niin $\mathscr{H}^s(f(A)) = 0$.

(2) *Olkoon $\mathscr{H}^s(A) > 0$. Jos jokaiselle $x \in A$ on $\varepsilon_x > 0$ ja $K_x > 0$ siten, että kaikille $y, z \in A \cap B(x, \varepsilon_x), y \ne z$, pätee*

$$d(f(y), f(z)) \ge K_x d(y, z),$$

niin $\mathscr{H}^s(f(A)) > 0$.

Todistus. (1) Olkoon $A \subset X$ joukko, jolle $\mathscr{H}^s(A) = 0$. Koska kuvaus f oletettiin lokaalisti Lipschitz-jatkuvaksi, on jokaisella $x \in A$ ympäristö U_x siten, että $f|_{U_x}$ on L_x-Lipschitz. Tässä oletetaan, että U_x on avoin avaruudessa X. Joukko A ajateltuna avaruuden X aliavaruutena on separoituva metrinen avaruus ja perhe $\{U_x \cap A\}_{x \in A}$

on joukon A avoin peite, joten sillä on Lemman 1.44 mukaan numeroituva alipeite. Olkoon se $\{U_{x_1} \cap A, U_{x_2} \cap A, \ldots\}$. Lauseen 1.43 mukaan

$$\mathscr{H}^s(f(A)) = \mathscr{H}^s\left(\bigcup_i f(A \cap U_{x_i})\right) \le \sum_i \mathscr{H}^s(f(A \cap U_{x_i})) \le \sum_i L_{x_i}\mathscr{H}^s(A \cap U_{x_i}) = 0.$$

(2) Olkoon toisaalta $A \subset X$ joukko, jolle $\mathscr{H}^s(A) > 0$. Oletuksen mukaan jokaisella $x \in A$ on ympäristö U_x, jolle

$$d(f(y), f(z)) \ge K_x d(y, z)$$

jollain $K_x > 0$ kaikilla $y, z \in A \cap U_x$. Jälleen Lemman 1.44 mukaan joukon A avoimella peitteellä $\{U_x \cap A\}_{x \in A}$ on numeroituva osapeite. Olkoon se $\{U_{x_1} \cap A, U_{x_2} \cap A, \ldots\}$. Tällöin löytyy i, jolle $\mathscr{H}^s(A \cap U_{x_i}) > 0$, sillä muutoin $\mathscr{H}^s(A) = 0$. Tällöin pätee myös $\mathscr{H}^s(f(A \cap U_{x_i})) > 0$: Oletetaan, ettei näin ole. Koska

$$d(f(y), f(z)) \ge K_{x_i} d(y, z) > 0$$

kaikilla $y, z \in A \cap U_{x_i}$, $y \ne z$, on $f|_{A \cap U_{x_i}}$ injektio kuvalleen. Siten f^{-1} on hyvin määritelty kuvaus joukossa $f(A \cap U_{x_i})$ ja on lisäksi $K_{x_i}^{-1}$-Lipschitz. Niinpä Lauseen 1.43 mukaan

$$\mathscr{H}^s(A \cap U_{x_i}) = \mathscr{H}^s(f^{-1}(f(A \cap U_{x_i}))) \le K_{x_i}^{-1}\mathscr{H}^s(f(A \cap U_{x_i})) = 0,$$

mikä on ristiriita. Siten $\mathscr{H}^s(f(A)) \ge \mathscr{H}^s(f(A \cap U_{x_i})) > 0$. □

Määritelmä 1.46. Olkoon μ joukon X ulkomitta. Kuvauksen $f : X \to [0, \infty]$ *yläintegraali* on

$$\int_X^* f \, d\mu = \inf_\phi \int_X \phi \, d\mu,$$

missä infimum otetaan yli μ-mitallisten funktioiden ϕ, joille $\phi(x) \ge f(x)$ kaikilla $x \in X$.

Lemma 1.47. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jatkuva ja $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti. Tällöin kuvaus*

$$y \mapsto \operatorname{diam}(K \cap f^{-1}(y))$$

on ylhäältä puolijatkuva *eli joukko*

$$S_t = \{y \in \mathbb{R}^m : \operatorname{diam}(K \cap f^{-1}(y)) \ge t\}$$

on suljettu kaikilla $t \ge 0$.

Todistus. Olkoon y joukon S_t kasautumispiste ja olkoon $(y_i) \subset S_t$ pisteeseen y suppeneva jono. Olkoon $\varepsilon > 0$. Kaikilla i on pisteet $a_i, b_i \in f^{-1}(y_i) \cap K$, joille $\|a_i - b_i\| \ge t - \varepsilon$. Koska K on kompakti, löytyy osajonot (a_{i_j}) ja (b_{i_j}), joille $a_{i_j} \to a \in K$ ja $b_{i_j} \to b \in K$, kun $j \to \infty$. Nyt

$$\|a - b\| = \|\lim_j a_{i_j} - \lim_j b_{i_j}\| = \lim_j \|a_{i_j} - b_{i_j}\| \ge t - \varepsilon$$

ja

$$f(a) = \lim_j f(a_{i_j}) = \lim_j y_{i_j} = y = \lim_j f(b_{i_j}) = f(b),$$

joten $\operatorname{diam}(K \cap f^{-1}(y)) \geq t - \varepsilon$. Niinpä myös $y \in S_t$ ja siksi S_t on suljettu. $\square$

Lause 1.48. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ L-Lipschitz-kuvaus. Oletetaan, että $m \leq s \leq n$. Tällöin*

$$\int_{\mathbb{R}^m}^* \mathscr{H}^{s-m}(A \cap f^{-1}(y))\, d\mathscr{L}^m y \leq 2^m L^m \mathscr{H}^s(A).$$

Todistus. [9, Theorem 7.7], [5, 2.10.25]. Voidaan olettaa, että $\mathscr{H}^s(A) < \infty$. Lemman 1.41 perusteella joukko A voidaan peittää kaikilla $k = 1, 2, \dots$ suljetuilla joukoilla $E_{k,1}, E_{k,2}, \dots$ siten, että $\operatorname{diam}(E_{k,i}) \leq 1/k$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_{k,i})^s \leq \mathscr{H}^s_{1/k}(A) + 1/k.$$

Olkoon $F_{k,i} = f(E_{k,i})$, jolloin

$$\operatorname{diam}(F_{k,i}) \leq L \operatorname{diam}(E_{k,i})$$

ja

$$\mathscr{L}^m(F_{k,i}) \leq C \operatorname{diam}(F_{k,i})^m \leq C L^m \operatorname{diam}(E_{k,i})^m,$$

missä $C = 2^m$. Toisaalta kaikilla $y \in \mathbb{R}^m$

$$\mathscr{H}^{s-m}(A \cap f^{-1}(y)) = \lim_{k\to\infty} \mathscr{H}^{s-m}_{1/k}(A \cap f^{-1}(y)) \leq \varliminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_{k,i} \cap f^{-1}(y))^{s-m}$$

Ylärajana oleva kuvaus on Lemman 1.47 mukaan $\mathscr{L}^m$-mitallinen, sillä

$$\operatorname{diam}(E_{k,i} \cap f^{-1}(y)) = \sup_{r\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(E_{k,i} \cap \overline{B}(0,r) \cap f^{-1}(y))$$

ja $E_{k,i} \cap \overline{B}(0,r)$ on kompakti kaikilla $r > 0$. Niinpä Fatoun lemman 1.13 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m} \varliminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_{k,i} \cap f^{-1}(y))^{s-m} d\mathscr{L}^m y \\
&\leq \varliminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{F_{k,i}} \operatorname{diam}(E_{k,i} \cap f^{-1}(y))^{s-m} d\mathscr{L}^m y \\
&\leq \varliminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_{k,i})^{s-m} \mathscr{L}^m(F_{k,i}) \\
&\leq C L^m \varliminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_{k,i})^{s} \\
&\leq C L^m \mathscr{H}^s(A).
\end{aligned}$$

□

2. Peitelauseita ja mittojen derivointi

Luku mukailee lähdettä [9]. Tutkielman päätuloksen kannalta keskeisimmät tulokset ovat Lause 2.9 ja Lause 2.11.

Lause 2.1 (Besicovitchin peitelause)**.** *Kaikille n on $P, Q \in \mathbb{N}$, joilla on seuraavat ominaisuudet: Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja olkoon $\mathscr{B}$ kokoelma suljettuja palloja siten, että kaikille $x \in A$ on $\overline{B}(x,r) \in \mathscr{B}$ jollain $r > 0$. Tällöin*

(1) *on kokoelma palloja $B_i \in \mathscr{B}$, $i = 1, 2, \ldots$, siten, että $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ja jokaiselle $x \in A$ on korkeintaan P palloa, joihin se kuuluu, ja*

(2) *on palloperheet $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots \mathscr{B}_Q \subset \mathscr{B}$ siten, että*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{Q} \bigcup_{B \in B_i} B$$

ja

$$B \cap B' = \emptyset \text{ kaikille } B, B' \in \mathscr{B}_i,\ B \neq B'.$$

Todistus. [9, Theorem 2.7] □

Lemma 2.2. *Olkoot μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ Radonin ulkomitta ja $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ kokoelma erillisiä joukkoja. Tällöin $\mu(S_\alpha) > 0$ korkeintaan numeroituvan monelle $\alpha \in I$.*

Todistus. Olkoot $K_1, K_2, \ldots$ kompakteja joukkoja niin, että

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Jos olisi ylinumeroituvan monta α, joille $\mu(S_\alpha) > 0$, niin jollain i $\mu(S_\alpha \cap K_i) > 0$ ylinumeroituvan monelle α. Nämä joukot ovat erillisiä, joten välttämättä $\mu(K_i) = \infty$. Tämä on mahdotonta, koska μ on Radonin ulkomitta. □

Lause 2.3. *Olkoot μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ Radonin ulkomitta, $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathscr{B}$ kokoelma suljettuja palloja siten, että kaikille $x \in A$*

$$\inf\{r > 0 : \overline{B}(x,r) \in \mathscr{B}\} = 0.$$

Tällöin on erilliset $B_i \in \mathscr{B}$, $i = 1, 2, \ldots$, siten, että

$$\mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0.$$

Todistus. [9, Theorem 2.8] Voidaan tietenkin olettaa, että $\mu(A) > 0$. Oletetaan lisäksi, että A on rajoitettu. Koska μ on Radonin ulkomitta, on avoin joukko U, $A \subset U$, siten, että

$$\mu(U) \leq (1 + (4Q)^{-1})\mu(A),$$

missä Q on Lauseen 2.1 takaama luku. Koska jokainen joukon A piste on keskipiste mielivaltaisen pienelle pallolle, voidaan Lausetta 2.1 soveltaa sellaiseen palloperheeseen, jonka jokainen pallo sisältyy joukkoon U. Saadaan palloperheet $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_Q$ siten, että kukin $\mathscr{B}_i$ koostuu erillisistä suljetuista palloista $B \subset U$ ja

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{Q} \bigcup_{B \in \mathscr{B}_i} B.$$

Nyt $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{Q} \mu(\bigcup_{B \in \mathscr{B}_i} B)$, joten $\mu(A) \leq Q\mu(\bigcup_{B \in \mathscr{B}_i} B)$ jollain i. Näistä voidaan valita äärellinen määrä $B_1, B_2, \ldots, B_{k_1} \in \mathscr{B}_i$ siten, että

$$\mu(A) \leq 2Q\mu(\bigcup_{j=1}^{k_1} B_j).$$

Merkitään $A_1 = A \setminus \bigcup_{j=1}^{k_1} B_j$, jolloin

$$\mu(A_1) \leq \mu(U \setminus \bigcup_{j=1}^{k_1} B_j) = \mu(U) - \mu(\bigcup_{j=1}^{k_1} B_j) \leq u\mu(A),$$

missä $u = 1 - \frac{1}{4}Q^{-1} < 1$.

Tämän jälkeen vaiheessa $m = 1, 2, \ldots$ joukko A_m sisältyy avoimeen joukkoon $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{k_m} B_j$ ja siksi on avoin joukko U_m siten, että $A_m \subset U_m \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{k_m} B_j$ ja

$$\mu(U_m) \leq (1 + (4Q)^{-1})\mu(A_m)$$

Joukko U_m valitaan näin, jotta pallot saadaan erillisiksi. Kuten edellä saadaan uusi kokoelma palloperheitä $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_Q$ siten, että

$$A_m \subset \bigcup_{i=1}^{Q} \bigcup_{B \in \mathscr{B}_i} B \subset U_m.$$

Samaan tapaan jollain i $\mu(A_m) \leq Q\mu(\bigcup_{B \in \mathscr{B}_i} B)$ ja näistä voidaan valita äärellinen määrä $B_{k_m+1}, B_{k_m+2}, \ldots, B_{k_{m+1}}$ niin, että

$$\mu(A_m) \leq 2Q\mu\left(\bigcup_{j=k+1}^{k_{m+1}} B_j\right).$$

Merkitään

$$A_{m+1} = A_m \setminus \bigcup_{j=k+1}^{k_{m+1}} B_j,$$

jolloin $\mu(A_{m+1}) \leq u\mu(A_m)$ kuten ensimmäisessä vaiheessa.

Siispä kaikilla $m = 1, 2, \ldots$

$$\mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_m} B_i) = \mu(A_m) \le u^m \mu(A),$$

missä $u < 1$, ja suljetut pallot $B_i \in \mathscr{B}$ ovat valinnan perusteella erillisiä, joten väite seuraa.

Jos A ei ole rajoitettu, niin tarvitaan Lemmaa 2.2. Olkoon $k \in \{1, 2, \ldots\}$. Olkoon $\{e_1, \ldots, e_n\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikanta. Nyt hypertasot

$$H_t = te_k + \langle \{e_1, \ldots, e_n\} \setminus \{e_k\} \rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

ovat erillisiä, joten vain numeroituvalle määrälle niitä $\mu(H_t) > 0$. Siten löytyy pisteet $x_{k,j} \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$, joille $x_{k,j} \xrightarrow{j \to \pm\infty} \pm\infty$,

$$\ldots < x_{k,-1} < x_{k,0} < x_{k,1} < \ldots,$$

ja $\mu(H_{x_{k,j}}) = 0$ kaikilla j. Määritellään sitten kaikilla $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$Q_j = (x_{1,j_1}, x_{1,j_1+1}) \times \ldots \times (x_{n,j_n}, x_{n,j_n+1}),$$

jolloin

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^n} Q_j) = 0.$$

Alkuosaa voidaan nyt käyttää joukkoihin $A \cap Q_j$. Koska jokainen Q_j on avoin, voidaan pallot B valita niin, että $B \subset Q_j$, jolloin lopullisessakin kokoelmassa on vain erillisiä palloja. $\square$

Määritelmä 2.4. Olkoot μ ja λ avaruuden $\mathbb{R}^n$ Radonin ulkomittoja. Mitan μ *ylä-* ja *aladerivaatta* mitan λ suhteen pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ ovat

$$\underline{D}(\mu, \lambda, x) = \varliminf_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} \text{ ja } \overline{D}(\mu, \lambda, x) = \varlimsup_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))}.$$

Jos ne ovat samat, niin niiden yhteistä arvoa

$$D(\mu, \lambda, x) = \underline{D}(\mu, \lambda, x) = \overline{D}(\mu, \lambda, x)$$

kutsutaan mitan μ *derivaataksi* (mitan λ suhteen).

Huomautus 2.5. (1) Määritelmässä muotoa $0/0$ olevat ilmaisut tulkitaan nollaksi. Muita tulkintavaikeuksia ei ole: ilmaisut ∞/∞ eivät ole mahdollisia, sillä määritelmä annettiin vain Radonin ulkomitoille avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

(2) Kun μ ja λ ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ Radonin ulkomittoja, niin kuvaukset

$$x \mapsto \frac{\mu(B(x,r)}{\lambda(B(x,r))}, \; x \mapsto \underline{D}(\mu, \lambda, x), \; x \mapsto \overline{D}(\mu, \lambda, x)$$

ovat Borelin funktiota. Katso esimerkiksi [5, 2.9.6].

(3) Jos $D(\mu, \lambda, x)$ on määritelty ja ei ole niin, että sekä $\mu(B(x,r)) = 0$ että $\lambda(B(x,r)) = 0$ kaikilla $0 < r < r_0$ jollain $r_0 > 0$, niin $D(\mu, \lambda, x)^{-1} = D(\lambda, \mu, x)$. Tässä siis $\infty^{-1} = 0$ ja $0^{-1} = \infty$, kuten on tapana sopia. Huomautuksen 1.18 mukaan $\mu(B(x,r)) > 0$ kaikilla $r > 0$ μ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda(B(x,r)) > 0$ kaikilla $r > 0$ λ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 2.6. *Olkoot μ ja λ avaruuden $\mathbb{R}^n$ Radonin ulkomittoja, $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $0 < t < \infty$.*

(1) *Jos $\underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq t$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \leq t\lambda(A)$.*
(2) *Jos $\overline{D}(\mu, \lambda, x) \geq t$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \geq t\lambda(A)$.*

Todistus. [9, Lemma 2.13]. (1) Voidaan olettaa, että $\lambda(A) < \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska λ on Radonin ulkomitta, on avoin joukko U niin, että $A \subset U$ ja

$$\lambda(U) \leq \lambda(A) + \varepsilon.$$

Koska $\underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq t$ kaikilla $x \in A$, niin palloperhe

$$\mathscr{B} = \{\overline{B}(x,r) \subset U : x \in A,\ r > 0,\ \mu(\overline{B}(x,r)) \leq (t+\varepsilon)\lambda(\overline{B}(x,r))\}$$

toteuttaa Lauseen 2.3 oletukset. Näin saadaan erilliset suljetut pallot $B_i \subset U$, $i = 1, 2, \ldots$, niin, että

$$\mu(B_i) \leq (t+\varepsilon)\lambda(B_i) \text{ ja } \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0.$$

Siksi

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\leq \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\
&\leq (t+\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) = (t+\varepsilon)\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\
&\leq (t+\varepsilon)\lambda(U) \leq (t+\varepsilon)(\lambda(A)+\varepsilon),
\end{aligned}$$

joten väite seuraa, kun $\varepsilon \downarrow 0$.

Kohdan (2) todistus on vastaava. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon avoin joukko U siten, että $A \subset U$ ja $\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$. Jos

$$\mathscr{B} = \{\overline{B}(x,r) \subset U : x \in A, r > 0, \mu(\overline{B}(x,r)) \geq (t-\varepsilon)\lambda(\overline{B}(x,r))\},$$

niin Lauseen 2.3 mukaan erilliset suljetut pallot $B_i \in \mathscr{B}$, $i = 1, 2, \ldots$, siten, että

$$\mu(B_i) \geq (t-\varepsilon)\lambda(B_i) \text{ ja } \lambda(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0.$$

Siispä

$$\mu(A) \geq \mu(U) - \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) - \varepsilon$$
$$\geq (t - \varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) - \varepsilon \geq (t - \varepsilon)\lambda(A) - \varepsilon,$$

mistä väite seuraa, kun $\varepsilon \downarrow 0$. □

Määritelmä 2.7. Olkoot μ ja λ joukon X ulkomittoja. Mitta μ on *absoluuttisesti jatkuva* mitan λ suhteen, merkitään $\mu \ll \lambda$, jos $\mu(A) = 0$ aina, kun $A \subset X$ ja $\lambda(A) = 0$.

Lause 2.8. *Olkoot μ ja λ avaruuden $\mathbb{R}^n$ Radonin ulkomittoja.*

(1) *Derivaatta $D(\mu, \lambda, x)$ on olemassa äärellisenä λ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.*

(2) *Jokaiselle Borel-joukolle $B \subset \mathbb{R}^n$*

$$\int_B D(\mu, \lambda, x)\, d\lambda x \leq \mu(B).$$

Edellä on yhtäsuuruus, kun $\mu \ll \lambda$.

Todistus. [9, Theorem 2.12]. (1) Olkoon $0 < r < \infty$. Määritellään kaikille $0 < t < \infty$ joukko

$$A_{t,r} = B(0, r) \cap \{x : \overline{D}(\mu, \lambda, x) \geq t\},$$

jolloin Lemman 2.6 mukaan

$$\lambda(A_{t,r}) \leq \frac{1}{t}\mu(A_{t,r}) \leq \frac{1}{t}\mu(B(0, r)).$$

Tämän perusteella

$$\lambda\Big(\bigcap_{t=1}^{\infty} A_{t,r}\Big) \leq \lim_{t\to\infty} \lambda(A_{t,r}) = 0. \tag{4}$$

Määritellään sitten kaikilla $0 < a < b < \infty$ joukko

$$B_{a,b,r} = B(0, r) \cap \{x : \underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq a < b \leq \overline{D}(\mu, \lambda, x)\},$$

jolloin Lemman 2.6 mukaan

$$b\lambda(B_{a,b,r}) \leq \mu(B_{a,b,r}) \leq a\lambda(B_{a,b,r}).$$

Koska $a < b$, niin

$$\lambda(B_{a,b,r}) = 0. \tag{5}$$

Yhdistämällä (4) ja (5) saadaan, kun $a, b \in \mathbb{Q}_+$,

$$\lambda\Big(\bigcup_{a<b} B_{a,b,r} \cup \bigcap_{t=1}^{\infty} A_{t,r}\Big) \leq \sum_{a<b} \lambda(B_{a,b,r}) + \lambda\Big(\bigcap_{t=1}^{\infty} A_{t,r}\Big) = 0.$$

Olkoon nyt
$$A = \bigcup_{r=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{a<b} B_{a,b,r} \cup \bigcap_{t=1}^{\infty} A_{t,r} \Big), \; a, b \in \mathbb{Q}_+,$$
jolloin $\lambda(A) = 0$. Nyt
$$\mathbb{R}^n \setminus \{x : \exists D(\mu, \lambda, x) < \infty\} \subset A,$$
joten väite pätee.

(2) Integroitava funktio on määritelty λ-melkein kaikkialla. Lisäksi $x \mapsto D(\mu, \lambda, x)$ on λ-mitallinen funktio. Olkoon $1 < t < \infty$ ja määritellään kaikille $p \in \mathbb{Z}$
$$B_p = \{x \in B : t^p \leq D(\mu, \lambda, x) < t^{p+1}\}.$$
Tällöin Lemman 2.6(2) perusteella
$$\begin{aligned}\int_B D(\mu, \lambda, x) d\lambda x &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{B_p} D(\mu, \lambda, x) d\lambda x \\ &\leq \sum_{p=-\infty}^{\infty} t^{p+1} \lambda(B_p) \leq t \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mu(B_p) \leq t\mu(B).\end{aligned}$$
Arvio on voimassa kaikilla $1 < t < \infty$, joten väite seuraa.

Oletetaan sitten, että $\mu \ll \lambda$. Olkoon $1 < t < \infty$. Absoluuttisen jatkuvuuden ja kohdan (1) perusteella $D(\mu, \lambda, x)$ on olemassa äärellisenä μ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Siispä μ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ $D(\lambda, \mu, x) = D(\mu, \lambda, x)^{-1} > 0$, joten $\mu(B) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mu(B_p)$. Lemman 2.6(1) mukaan saadaan
$$\begin{aligned}\mu(B) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mu(B_p) &\leq \sum_{p=-\infty}^{\infty} t^{p+1} \lambda(B_p) \\ &\leq t \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{B_p} D(\mu, \lambda, x) d\lambda x = t \int_B D(\mu, \lambda, x) d\lambda x.\end{aligned}$$
Väite seuraa, kun $t \downarrow 1$. $\square$

Lauseen 2.8 seurauksena saadaan tärkeitä aputuloksia.

Lause 2.9. *Olkoon μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ Radonin ulkomitta ja olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin*
$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\mu(A \cap B(x, r))}{\mu(B(x, r))} = 1$$
μ-melkein kaikilla $x \in A$.

Todistus. [9, Corollary 2.14]. Voidaan olettaa, että $\mu(A) < \infty$. Oletetaan lisäksi, että A on Borel-joukko. Tällöin ulkomitta λ, joka saadaan määrittelemällä kaikille $S \subset \mathbb{R}^n$ $\lambda(S) = \mu(S \cap A)$, on Radonin ulkomitta Lemman 1.21 ja Lauseen 1.27

nojalla. Selvästi $\lambda \ll \mu$, joten Lauseen 2.8 mukaan derivaatta $D(\lambda, \mu, x)$ on olemassa μ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja jokaiselle Borel-joukolle $B \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_B D(\lambda, \mu, x) d\mu x = \lambda(B) = \mu(B \cap A) = \int_B \chi_A(x)\ d\mu x, \tag{6}$$

joten $D(\lambda, \mu, x) = 1$ μ-melkein kaikilla $x \in A$. Ellei näin ole, niin

$$\lim_{k\to\infty} \mu(D_k) = \mu(\{x \in A : D(\lambda, \mu, x) < 1\}) > 0,$$

kun

$$D_k = \{x \in A : D(\lambda, \mu, x) \leq 1 - 1/k\}.$$

Koska $D(\lambda, \mu, x)$ on Borelin funktio, niin valitsemalla riittävän suuri k saadaan Borel-joukko $D \subset A$, $\mu(D) > 0$, jolle jollain k

$$D(\lambda, \mu, x) \leq 1 - 1/k$$

kaikilla $x \in D$. Tällöin

$$\int_D D(\lambda, \mu, x) d\mu x \leq (1 - 1/k)\mu(D) < \mu(D) = \lambda(D),$$

mikä on mahdotonta kohdan (6) mukaan. Niinpä μ-melkein kaikilla $x \in A$

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu(A \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = D(\lambda, \mu, x) = 1.$$

Jos A ei ole Borel-joukko, niin Borel-säännöllisyyden mukaan löytyy Borel-joukko $B \supset A$, jolle $\mu(B) = \mu(A) < \infty$. Alkuosan perusteella μ-melkein kaikille $x \in A \subset B$

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu(B \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = 1,$$

joten Lauseen 1.9 perusteella μ-melkein kaikille $x \in A$

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu(A \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = \lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu(B \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = 1.$$

□

Määritelmä 2.10. Joukon X ulkomitat μ ja λ ovat *keskenään singulaariset*, jos on joukko $A \subset X$, jolle $\lambda(A) = 0 = \mu(X \setminus A)$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ ulkomittaa μ sanotaan lyhyemmin *singulaariseksi*, jos μ ja Lebesguen mitta $\mathscr{L}^n$ ovat keskenään singulaariset.

Lause 2.11. *Olkoot μ ja λ avaruuden $\mathbb{R}^n$ keskenään singulaariset Radonin ulkomitat. Tällöin $D(\mu, \lambda, x) = \infty$ μ-melkein kaikille $x \in \mathbb{R}^n$.*

Todistus. Oletuksen mukaan on $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0 = \lambda(A)$. Riittää siis näyttää, että väite pätee μ-melkein kaikille pisteille $x \in A$. Koska λ on Borel-säännöllinen, löytyy Borel-joukko B, jolle $A \subset B$ ja $\lambda(A) = \lambda(B)$. Lauseen 2.8 perusteella

$$\int_B D(\lambda, \mu, x) d\mu x \leq \lambda(B) = \lambda(A) = 0,$$

joten $D(\lambda, \mu, x) = 0$ μ-melkein kaikille $x \in A$. Niinpä $D(\mu, \lambda, x) = D(\lambda, \mu, x)^{-1} = \infty$ μ-melkein kaikille $x \in A$. □

3. Suslin-joukot ja λ-luokat

Tässä luvussa osoitetaan pääasiassa, että Borel-joukon jatkuva kuva on tietyin oletuksin mitallinen. Tulokset muotoillaan täydellisissä ja separoituvissa metrisissä avaruuksissa kuten lähteessä [1]. Aiheen hienovaraisempi käsittely löytyy lähteestä [6].

Määritelmä 3.1. Olkoon $((X_i, d_i))_{i \in \mathbb{N}}$ jono metrisiä avaruuksia. Tällöin niiden *tuloavaruus* on metrinen avaruus $(\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i, d)$, missä

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots\}$$

ja d on kuvaus joka määritellään asettamalla kaikille $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}.$$

Jos taas $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots, (X_k, d_k)$, $k \in \mathbb{N}$, ovat metrisiä avaruuksia, niin niiden *tuloavaruus* on pari $(\prod_{i=1}^k X_i, d)$, missä

$$\prod_{i=1}^{k} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_k \in X_k\}$$

ja

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \ldots + d_k(x_k, y_k),$$

kun $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k), y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \prod_{i=1}^k X_i$.

Tarkoitus ei ole suinkaan vaihtaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ metriikkaa euklidisesta, joten sen kohdalla tehdään poikkeus, eikä noudateta Määritelmää 3.1.

Lause 3.2. *Olkoon $((X_i, d_i))_{i \in \mathbb{N}}$ jono metrisiä avaruuksia. Tällöin niiden tuloavaruus $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ on metrinen avaruus. Jos X_i on täydellinen kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin myös $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ on. Samoin jos X_i on separoituva kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin myös $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ on.*

Todistus. Merkitään $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ ja $x = (x_1, x_2, \ldots)$ kaikille $x \in X$. Huomaa ensinnäkin, että kaikilla $x, y \in X$

$$0 \leq d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1 < \infty.$$

Koska kuvaukset d_i, $i \in \mathbb{N}$, ovat metriikoita, ovat ominaisuudet

- $d(x,y) = d(y,x)$ ja
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$

voimassa kaikilla $x, y \in X$. Koska kuvaus $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(1+x)$, on kasvava ja kolmioepäyhtälö on voimassa jokaiselle d_i, $i \in \mathbb{N}$, saadaan kaikille $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)}{1+d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,z_i)}{1+d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(z_i,y_i)}{1+d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,z_i)}{1+d_i(x_i,z_i)} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(z_i,y_i)}{1+d_i(z_i,y_i)} = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Näin ollen (X, d) on metrinen avaruus.

Oletetaan sitten, että X_i on separoituva kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että jokaisella $i \in \mathbb{N}$ avaruuden X_i numeroituva tiheä osa on $\{x^{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$. (Vaikkei tiheän osan tarvitse välttämättä olla ääretön, voidaan selvyyden vuoksi käyttää luonnollisia lukuja $\mathbb{N}$ indeksijoukkona.) Riittää näyttää, että

$$D = \{(x^{1,j_1}, x^{2,j_2}, \ldots, x^{k,j_k}, x^{k+1,1}, x^{k+2,1}, \ldots) : k, j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathbb{N}\}$$

on numeroituva ja tiheä avaruudessa X. Numeroituvuus johtuu siitä, että "äärelliset" jonot $(j_1, j_2, \ldots, j_k, 1, 1, \ldots)$, missä $k, j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathbb{N}$, muodostavat numeroituvan joukon. Osoitetaan sitten, että D on tiheässä, joten olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ niin suuri, että

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kaikilla $i = 1, 2, \ldots, k$ on $y_i \in \{x^{i,j}\}_j \subset X_i$, jolle

$$d(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2k},$$

joten määrittelemällä $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k, x^{k,1}, x^{k+1,1}, \ldots) \in D \subset X$ saadaan

$$\begin{aligned} d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)} &\leq \left(\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i) \right) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Siten D on tiheä avaruudessa X, ja siksi $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ on separoituva, kun X_i on separoituva jokaisella $i \in \mathbb{N}$.

Viimeiseksi oletetaan, että X_i on täydellinen kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Olkoon $(x^1, x^2, \ldots)$ avaruuden X Cauchy-jono, missä $x^j = (x_1^j, x_2^j, \ldots) \in X$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$d(x^j, x^k) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i^j, x_i^k)}{1 + d_i(x_i^j, x_i^k)} \xrightarrow{j,k \to \infty} 0,$$

joten myös kaikilla $i \in \mathbb{N}$

$$d_i(x_i^j, x_i^k) \xrightarrow{j,k \to \infty} 0.$$

Siten $(x_i^1, x_i^2, \ldots)$ on avaruuden X_i Cauchy-jono kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Avaruus X_i on täydellinen, joten on $x_i^0 \in X_i$, jolle $x_i^j \xrightarrow{j \to \infty} x_i^0$. Niinpä myös

$$d(x^j, x^0) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i^j, x_i^0)}{1 + d_i(x_i^j, x_i^0)} \xrightarrow{j \to \infty} 0.$$

Siten X on täydellinen. □

Lause 3.2 pätee tietysti myös äärellisille tuloille.

Lause 3.3 (Tihonovin lause)**.** *Olkoon $((X_i, d_i))_{i \in \mathbb{N}}$ jono metrisiä avaruuksia. Jos X_i on kompakti kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin myös tuloavaruus $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ on.*

Todistus. [14, Lause 18.2]. □

Määritellään positiivisten kokonaislukujen muodostamien jonojen avaruus $\mathscr{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, johon asetetaan Määritelmän 3.1 hengessä metriikka

$$d(m,n) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|m_i - n_i|}{1 + |m_i - n_i|},$$

kun $m = (m_1, m_2, \ldots)$ ja $n = (n_1, n_2, \ldots)$. Lauseen 3.2 mukaan $\mathscr{N}$ on täydellinen ja separoituva metrinen avaruus. Määritellään sitten tuloavaruuden $X \times \mathscr{N}$ projektiot

$$\begin{aligned} p_1 &: X \times \mathscr{N} \to X,\ p_1(x,n) = x, \\ p_2 &: X \times \mathscr{N} \to X,\ p_2(x,n) = n, \end{aligned}$$

jotka ovat jatkuvia, kun tuloavaruuden $X \times \mathscr{N}$ metriikka on kuten Määritelmässä 3.1.

Määritelmä 3.4. Olkoon X täydellinen ja separoituva metrinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on *Suslin-joukko*, jos on suljettu $F \subset X \times \mathscr{N}$ siten, että

$$A = p_1(F).$$

Suslin-joukkoja kutsutaan usein myös *analyyttisiksi* joukoiksi.

Lause 3.5. *Olkoon X täydellinen ja separoituva metrinen avaruus. Tällöin löytyy jatkuva surjektio avaruudelta $\mathscr{N}$ avaruuteen X.*

Todistus. [1, Theorem 11.3], [5, 2.2.8]. Koska X on separoituva, on epätyhjät suljetut joukot $F(1), F(2), \ldots$ siten, että $\operatorname{diam}(F(i)) < 2^{-3}$ kaikilla i ja

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(i).$$

Vaiheessa $k = 2, 3, \ldots$ valitaan vastaavasti epätyhjät suljetut joukot $F(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ siten, että $\operatorname{diam}(F(n_1, \ldots, n_k)) < 2^{-k-2}$ ja

$$F(n_1, \ldots, n_{k-1}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(n_1, \ldots, n_{k-1}, i).$$

Tällöin kaikilla $n \in \mathscr{N}$ on sisäkkäiset suljetut joukot

$$F(n_1) \supset F(n_1, n_2) \supset \ldots$$

joiden halkaisijat menevät nollaan. Koska X on täydellinen, niiden leikkaus

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F(n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

sisältää täsmälleen yhden pisteen, jonka nimi olkoon $f(n)$. Konstruktion perusteella on selvää, että f on surjektio.

Riittää enää osoittaa, että kuvaus f on jatkuva. Jos nyt $m, n \in \mathscr{N}$ ovat eri pisteitä siten, että $d(m, n) < 1/4$, niin jollain $k \in \mathbb{N}$

$$2^{-k-2} \leq d(m, n) < 2^{-k-1}.$$

Nyt $m_i = n_i$ kaikilla $i \leq k$, kun muistaa, että kyse on kokonaislukujonoista. Jos nimittäin olisi $j \leq k$ siten, että $m_j \neq n_j$, niin olisi

$$d(m, n) \geq 2^{-j} \frac{|m_j - n_j|}{1 + |m_j - n_j|} \geq 2^{-j-1} \geq 2^{-k-1},$$

mikä on mahdotonta. Tällöin

$$d_X(f(m), f(n)) \leq \operatorname{diam}(F(m_1, \ldots, m_k)) < 2^{-k-2} \leq d(m, n),$$

joten myös jatkuvuus saadaan. $\square$

Lause 3.6. *Olkoon X täydellinen ja separoituva metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä*

(1) *A on Suslin-joukko.*
(2) *A on avaruuden $\mathscr{N}$ jatkuva kuva.*
(3) *A on jonkin täydellisen ja separoituvan metrisen avaruuden jatkuva kuva.*

Todistus. [1, Definition 11.5]. (1) $\implies$ (3): Jos A on Suslin-joukko, niin on suljettu $F \subset X \times \mathscr{N}$, joka on itsekin täydellinen ja separoituva metrinen avaruus, ja $p_1(F) = A$.

(3) $\implies$ (2): Oletuksen mukaan on täydellinen ja separoituva metrinen avaruus M ja jatkuva kuvaus $f : M \to X$ siten, että $f(M) = A$. Lauseen 3.5 mukaan on jatkuva surjektio $g : \mathscr{N} \to M$. Tällöin $f \circ g$ on jatkuva ja $f \circ g(\mathscr{N}) = A$.

(2) $\implies$ (1): Oletuksen mukaan on jatkuva kuvaus $f : \mathscr{N} \to X$ siten, että $A = f(\mathscr{N})$. Määritellään

$$C = \{(f(n), n) : n \in \mathscr{N}\} \subset X \times \mathscr{N}$$

ja osoitetaan, että se on suljettu. Jos $(f(n_i), n_i) \to (x, n)$, kun $i \to \infty$, niin $n_i \to n$ ja $f(n_i) \to x$. Jatkuvuuden (ja raja-arvon yksikäsitteisyyden) perusteella $x = f(n)$, joten $(x, n) = (f(n), n) \in C$. $\square$

Lause 3.7. *Olkoot X ja Y täydellisiä ja separoituvia metrisiä avaruuksia. Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva. Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$ Suslin-joukkoja. Tällöin myös $f(A)$ ja $f^{-1}(B)$ ovat.*

Todistus. [1, 11.6,11.7] Jos $A \subset X$ on Suslin-joukko, niin Lauseen 3.6 mukaan on jatkuva $g : \mathscr{N} \to X$, $g(\mathscr{N}) = A$. Tällöin $f \circ g$ on jatkuva ja $f \circ g(\mathscr{N}) = f(A)$, ja siksi saman lauseen mukaan $f(A)$ on Suslin-joukko.

Joukolle B sen sijaan käytetään alkuperäistä määritelmää: olkoon $F \subset Y \times \mathscr{N}$ suljettu ja $p_1(F) = B$. Kuvaus

$$h : X \times \mathscr{N} \to Y \times \mathscr{N}, \ h(x, n) = (f(x), n),$$

on jatkuva, joten $h^{-1}(F)$ on suljettu. Selvästi $p_1(h^{-1}(F)) = f^{-1}(B)$. $\square$

Lause 3.8. *Olkoot X ja Y täydellisiä ja separoituvia metrisiä avaruuksia. Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$ Suslin-joukkoja. Tällöin myös $A \times B \subset X \times Y$ on Suslin-joukko.*

Todistus. Koska A ja B ovat Suslin-joukkoja, löytyy suljetut joukot $F_A \subset X \times \mathscr{N}$ ja $F_B \subset Y \times \mathscr{N}$, joille $p_1(F_A) = A$ ja $p_1(F_B) = B$. Koska

$$F_A \times F_B = \overline{F_A} \times \overline{F_B} = \overline{F_A \times F_B} \subset (X \times \mathscr{N}) \times (Y \times \mathscr{N}),$$

on $F_A \times F_B$ suljettu. Niinpä $F_A \times F_B$ on separoituva ja täydellinen, koska $(X \times \mathscr{N}) \times (Y \times \mathscr{N})$ on separoituva ja täydellinen. Kuvaus

$$P : F_A \times F_B \to X \times Y, \ P((x, m), (y, n)) = (x, y),$$

on jatkuva ja $P(F_A \times F_B) = A \times B$, joten $F_A \times F_B$ on Suslin-joukko Lauseen 3.6 nojalla. $\square$

Suslin-joukoista tiedetään lisäksi (katso [1]):

- Suslin-joukkojen numeroituvat yhdisteet ja leikkaukset ovat Suslin-joukkoja.
- Borel-joukot ovat Suslin-joukkoja.
- On olemassa Suslin-joukko, joka ei ole Borel-joukko.
- Suslin-joukko on Borel-joukko, jos ja vain jos sen komplementti on myös Suslin-joukko.

Luvun päätulos on, että Suslin-joukot ovat mitallisia täydellisen ja separoituvan metrisen avaruuden Borelin ulkomitoille.

Lause 3.9. *Olkoon X täydellinen ja separoituva metrinen avaruus. Olkoon μ avaruuden X Borelin ulkomitta. Tällöin jokainen Suslin-joukko $A \subset X$ on μ-mitallinen.*

Todistus. [1, Theorem 11.18], [5, 2.2.12]. Olkoon $A \subset X$ Suslin-joukko. Riittää näyttää, että

$$\mu(E) \geq \mu(E \setminus A) + \mu(E \cap A).$$

kaikille $E \subset X$, joille $\mu(E) < \infty$. Kiinnitetään tällainen joukko E. Määritellään ulkomitta ν asettamalla kaikilla $S \subset X$

$$\nu(S) = \inf\{(\mu|_E)(B) : S \subset B, B \ (\mu|_E)\text{-mitallinen}\},$$

joka on säännöllinen Lauseen 1.28 perusteella. Koska μ on Borelin ulkomitta, myös $\mu|_E$ ja ν ovat Borelin ulkomittoja. Lisäksi $\nu(X) < \infty$.

Osoitetaan nyt, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on suljettu joukko $C \subset A$, jolle $\nu(A \setminus C) < \varepsilon$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska A on Suslin-joukko, löytyy jatkuva surjektio

$$f : \mathcal{N} \to A.$$

Olkoon nyt $Z_0 = A$ ja valitaan sitten kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots\}$ luku $m_i \in \mathbb{N}$ ja joukko $Z_i \subset Z_{i-1}$ siten, että

$$Z_i = Z_{i-1} \cap \{f(n) : n_i \leq m_i\} \text{ ja } \nu(Z_i) > \nu(Z_{i-1}) - 2^{-i}\varepsilon.$$

Tällaiset saadaan säännöllisyyden vuoksi: jokaisessa vaiheessa voidaan määritellä joukot

$$S_k = Z_{i-1} \cap \{f(n) : n_i \leq k\},$$

jolloin $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ ja Lauseen 1.7 perusteella

$$\lim_{k \to \infty} \nu(S_k) = \nu(Z_{i-1}).$$

Määritellään

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{Z_i},$$

joka on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu. Induktiolla nähdään, että kaikilla i

$$\nu(Z_i) > \nu(Z_0) - \varepsilon \sum_{j=1}^{i} 2^{-j} > \nu(Z_0) - \varepsilon,$$

joten

$$\nu(C) = \lim_{i\to\infty} \nu(\overline{Z_i}) \geq \nu(Z_0) - \varepsilon,$$

sillä $\nu(X) < \infty$.

Olkoon nyt

$$K = \{n \in \mathscr{N} : n_i \leq m_i \ \forall i \in \mathbb{N}\},$$

joka on kompakti Lauseen 3.3 perusteella. Osoitetaan, että $C \subset f(K) \subset A$. Olkoon $x \in X \setminus f(K)$ ja näytetään, että $x \in X \setminus C$. Koska $\{x\}$ ja $f(K)$ ovat kompakteja, on erilliset avoimet joukot U, $V \subset X$ niin, että $x \in U$ ja $f(K) \subset V$. Koska f on jatkuva, myös $W = f^{-1}(V)$ on avoin ja $K \subset W$. Nyt $\operatorname{dist}(K, \mathscr{N} \setminus W) > 0$, joten on i, jolla

$$\operatorname{dist}(K, \mathscr{N} \setminus W) > 2^{-i}.$$

Nyt jokainen $n \in \mathscr{N}$, $n_1 \leq m_1, \ldots, n_i \leq m_i$, kuuluu joukkoon W, sillä

$$\operatorname{dist}(n, K) \leq \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-i}.$$

Täten

$$Z_i \subset V \subset X \setminus U,$$

joten myös

$$\overline{Z_i} \subset X \setminus U,$$

koska $X \setminus U$ on suljettu. Siispä $x \notin \overline{Z_i}$ eli $x \notin C$. Täten $C \subset A$.

Nyt on siis löydetty suljettu joukko $C \subset A$, jolle $\nu(A) - \nu(C) \leq \varepsilon$. Koska C on Borel-joukko ja siten ν-mitallinen, on

$$\nu(A) = \nu(C) + \nu(A \setminus C),$$

joten

$$\nu(A \setminus C) = \nu(A) - \nu(C) \leq \varepsilon.$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
\mu(E \setminus A) + \mu(E \cap A) &\leq \nu(E \setminus A) + \nu(E \cap A) \\
&\leq \nu(E \setminus C) + \nu(E \cap C) + \nu(E \cap (A \setminus C)) \\
&\leq \nu(E) + \varepsilon = \mu(E) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Kun $\varepsilon \downarrow 0$, saadaan

$$\mu(E) \geq \mu(E \setminus A) + \mu(E \cap A).$$

Koska tämä pätee mielivaltaiselle joukolle $E \subset X$, joukon A μ-mitallisuus seuraa. $\square$

Määritelmä 3.10. Joukko Γ on joukon X λ-*luokka*, jos

(1) $X \in \Gamma$,
(2) $A^c \in \Gamma$, kun $A \in \Gamma$, ja
(3) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$, kun $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$ ovat erillisiä.

Lause 3.11. *Olkoon X joukko ja $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$ sellainen, että $A \cap B \in \mathscr{U}$ aina, kun $A, B \in \mathscr{U}$. Tällöin suppein λ-luokka, joka sisältää kokoelman $\mathscr{U}$ on suppein σ-algebra, joka sisältää kokoelman $\mathscr{U}$. Erityisesti jos X on metrinen avaruus ja $\mathscr{U}$ sen avoimet joukot, niin jokainen kokoelman $\mathscr{U}$ sisältävä λ-luokka sisältää Borel-joukot.*

Todistus. [6]. Olkoon Λ suppein joukon $\mathscr{U}$ sisältävä λ-luokka ja olkoon Σ vastaavasti suppein joukon $\mathscr{U}$ sisältävä σ-algebra. Koska Σ on myös λ-luokka, joka sisältää joukon $\mathscr{U}$, on $\Sigma \supset \Lambda$ voimassa. Riittää siis näyttää, että Λ on σ-algebra. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \in \Lambda$. Tällöin niiden yhdiste

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right)$$

kuuluu joukkoperheeseen Λ, mikäli $A \setminus B = A \cap B^c \in \Lambda$ ja $A \cup B = A \cup (B \setminus A) \in \Lambda$ aina, kun $A, B \in \Lambda$. Koska Λ on suljettu komplementoinnin suhteen, riittää itse asiassa osoittaa, että Λ on suljettu äärellisten leikkausten suhteen. Määritellään kaikille $C \in \Lambda$

$$\Lambda(C) = \{D \subset X : C \cap D \in \Lambda\},$$

joka on λ-luokka: ainoa ongelma on komplementoinnissa, joka sekin ratkeaa, kun huomaa, että kaikilla $D \in \Lambda(C)$

$$C \cap D^c = (C \cap C^c) \cup (C \cap D^c) = C \cap (C^c \cup D^c) = (C^c \cup (C \cap D))^c \in \Lambda.$$

Kaikille $G, G' \in \mathscr{U}$ pätee

$$G \cap G' \in \mathscr{U} \subset \Lambda,$$

joten $\mathscr{U} \subset \Lambda(G)$. Tällöin $\Lambda \subset \Lambda(G)$ kaikilla $G \in \mathscr{U}$. Olkoot sitten $A, B \in \Lambda$. Koska $B \in \Lambda \subset \Lambda(G)$ kaikille $G \in \mathscr{U}$, niin $B \cap G \in \Lambda$ kaikille $G \in \mathscr{U}$, joten $\mathscr{U} \subset \Lambda(B)$. Siispä myös $\Lambda \subset \Lambda(B)$, joten $A \cap B \in \Lambda$. Täten Λ on σ-algebra ja $\Sigma \subset \Lambda$. □

Huomautus 3.12. λ-luokkia kutsutaan myös *Dynkinin systeemeiksi* tai *σ-luokiksi*. Tiedetään, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ suppein avoimet pallot sisältävä λ-luokka on koko Borel-joukkojen σ-algebra [10], ja ettei tämä päde yleisissä metrisissä avaruuksissa [3], eikä edes Hilbertin avaruuksissa [7].

4. Suoristuvat ja täysin suoristumattomat joukot

Luku perustuu lähteisiin [4], [9] ja [5], joista ensimmäisestä löytyy kattavampi esitys tason $\mathbb{R}^2$ teoriasta. Jälkimmäiset käsittelevät joukkojen geometriaa yleisissä euklidisissa avaruuksissa, mikä on oleellisesti vaikeampaa kuin tasossa. Tässä perusmääritelmät ja -tulokset asetetaan yleisessä tapauksessa, kunnes projektiotulosten kohdalla dimensio pudotetaan kahteen.

Määritelmä 4.1. Olkoot m ja n kokonaislukuja, joille $0 < m < n$. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *m-suoristuva*, jos on jatkuvasti differentioituvat kuvaukset $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $i =$

$1, 2, \ldots$, siten, että

$$\mathscr{H}^m\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)\right) = 0.$$

Jos taas $\mathscr{H}^m(A \cap B) = 0$ kaikille m-suoristuville $B \subset \mathbb{R}^n$, niin A on *täysin m-suoristumaton*.

Usein m-suoristuvuus ja täysi m-suoristumattomuus määritellään C^1-kuvausten sijaan Lipschitz-kuvausten avulla. Tällöin käsitteet voidaan määritellä myös separoituvien metristen avaruuksien osajoukoille. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on kuitenkin sama kumpi määritelmä asetetaan. Ilmeinen puoli yhtäpitävyydestä näytetään Lauseessa 4.3. Toinen puoli löytyy lähteistä [5, 3.2.29] ja [13, 11.1].

Lemma 4.2. *Olkoon $S \subset \mathbb{R}^m$ joukko ja olkoon $f : S \to \mathbb{R}$ L-Lipschitz-kuvaus. Tällöin on L-Lipschitz-kuvaus $\tilde{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, jolle $\tilde{f}|_S = f$.*

Todistus. Osoitetaan, että kuvaus, joka saadaan asettamalla

$$\tilde{f}(x) = \inf_{z \in S}(f(z) + L\|x - z\|)$$

toteuttaa väitteen. Olkoon $x \in S$. Tällöin kaikille $z \in S$ pätee

$$f(x) - f(z) \leq |f(x) - f(z)| \leq L\|x - z\|,$$

joten $f(x) \leq f(z) + L\|x - z\|$. Niinpä $f(x) \leq \tilde{f}(x)$. Toisaalta kuvauksen $\tilde{f}$ määritelmän perusteella väite $f(x) \geq \tilde{f}(x)$ on ilmeinen, joten $f(x) = \tilde{f}(x)$ kaikilla $x \in S$. Riittää enää näyttää, että $\tilde{f}$ on Lipschitz-kuvaus. Tämäkin saadaan, koska kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^m$

$$\tilde{f}(x) = \inf_{z \in S}(f(z) + L\|x - z\|) \leq \inf_{z \in S}(f(z) + L\|y - z\|) + L\|x - y\| = \tilde{f}(y) + L\|x - y\|$$

ja vastaavasti

$$\tilde{f}(y) \leq \tilde{f}(x) + L\|x - y\|,$$

joten

$$-L\|x - y\| \leq \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) \leq L\|x - y\|.$$

Siten $\tilde{f}$ on L-Lipschitz-kuvaus. □

Lause 4.3. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ m-suoristuva joukko, missä $m < n$. Tällöin on Lipschitz-kuvaukset $g_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, joille*

$$\mathscr{H}^m\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i(\mathbb{R}^m)\right) = 0.$$

Todistus. Koska $A \subset \mathbb{R}^n$ on m-suoristuva, löytyy jatkuvasti differentioituvat kuvaukset $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, joille

$$\mathscr{H}^m\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)\right) = 0.$$

Peitetään $\mathbb{R}^m$ numeroituvalla kokoelmalla avoimia palloja B_j, $j \in \{1, 2, \ldots\}$. Lauseen 1.33 mukaan kaikille i ja j löytyy $L_{i,j} \geq 0$ niin, että $f_i|_{Bj}$ on $L_{i,j}$-Lipschitz-kuvaus. Jos $f = f_i|_{Bj} = (f^1, \ldots, f^n)$ joillain i ja j, niin Lemman 4.2 mukaan kuvauksen f komponenttifunktioille f^k löytyy $L_{i,j}$-Lipschitz-jatkuvat laajennukset $\widetilde{f^k}$ koko avaruuteen $\mathbb{R}^m$. Niinpä kuvauksen f laajennus saadaan asettamalla $\widetilde{f} = (\widetilde{f^1}, \ldots, \widetilde{f^n})$, joka on Lipschitz-kuvaus, sillä

$$\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)\| \leq |f^1(x) - f^1(y)| + \ldots + |f^n(x) - f^n(y)| \leq nL_{i,j}\|x - y\|$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}^m$. Näin saadut kuvausten $f_i|_{Bj}$ Lipschitz-laajennukset antavat väitteen. $\square$

Lause 4.4. (1) *Jokaisella m-suoristuvalla joukolla on σ-äärellinen $\mathscr{H}^m$-mitta.*
(2) *Jokainen m-suoristuvan joukon osajoukko on m-suoristuva ja jokainen täysin m-suoristumattoman joukon osajoukko on täysin m-suoristumaton.*
(3) *Jokainen m-suoristuvien joukkojen numeroituva yhdiste on m-suoristuva.*
(4) *Jos A on m-suoristuva, niin on m-suoristuva Borel-joukko B, jolle $A \subset B$ ja $\mathscr{H}^m(B) = \mathscr{H}^m(A)$.*

Todistus. (1) Väite on siis Määritelmän 1.25 mukaan, että m-suoristuvalle $A \subset \mathbb{R}^n$ löytyy joukot $A_1, A_2, \ldots$, joille $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ja $\mathscr{H}^m(A_k) < \infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Peitetään $\mathbb{R}^m$ ensin avoimilla palloilla B_j, $j \in \mathbb{N}$, joille $\mathscr{H}^m(B_j) < \infty$, sillä $\mathscr{H}^m$ on Radonin ulkomitta avaruudessa $\mathbb{R}^m$. Jos A on m-suoristuva, niin Lauseen 4.3 mukaan löytyy L_i-Lipschitz-kuvaukset $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, joille

$$\mathscr{H}^m\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)\right) = 0.$$

Niinpä

$$\mathscr{H}^m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}^m(A \cap f_i(\mathbb{R}^m)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{H}^m(A \cap f_i(B_j)).$$

Lauseen 1.43 mukaan

$$\mathscr{H}^m(f_i(B_j)) \leq L_i^m \mathscr{H}^m(B_j) < \infty.$$

kaikilla i ja j. Joukko $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituva ja

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} f_i(B_j),$$

joten väite seuraa.

(2) Väite on ilmeinen Määritelmän 4.1 perusteella.

(3) Jos $A_1, A_2, \ldots$ ovat m-suoristuvia, niin kaikille $i \in \mathbb{N}$ löytyy C^1-kuvaukset $f_{i,j} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, joille

$$\mathscr{H}^m\left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f_{i,j}(\mathbb{R}^m)\right) = 0.$$

Tällöin

$$\mathscr{H}^m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} f_{i,j}(\mathbb{R}^m)\right) \leq \mathscr{H}^m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f_{i,j}(\mathbb{R}^m)\right)\right) = 0,$$

joten väite seuraa.

(4) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ m-suoristuva joukko. Oletetaan ensin, että $\mathscr{H}^m(A) < \infty$. Borel-säännöllisyyden mukaan on Borel-joukko $B \supset A$, jolle $\mathscr{H}^m(B) = \mathscr{H}^m(A)$. Koska A on m-suoristuva, löytyy C^1-kuvaukset $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, joille

$$\mathscr{H}^m\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)\right) = 0.$$

Lauseiden 3.7 ja 3.9 mukaan joukko $\bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)$ on $\mathscr{H}^m$-mitallinen, joten myös sen komplementti on $\mathscr{H}^m$-mitallinen. Niinpä Lauseen 1.9 mukaan

$$\mathscr{H}^m\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)\right) = \mathscr{H}^m\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)\right) = 0,$$

joten myös B on m-suoristuva joukko. Jos $\mathscr{H}^m(A) = \infty$, niin käytetään kohtia (1) ja (2), joiden mukaan löytyy m-suoristuvat joukot $A_1, A_2, \ldots$, joille $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ja $\mathscr{H}^m(A_i) < \infty$. Näihin voidaan soveltaa alkuosaa, jonka mukaan löytyy m-suoristuvat Borel-joukot $B_i \supset A_i$, $i \in \mathbb{N}$, joille $\mathscr{H}^m(A_i) = \mathscr{H}^m(B_i)$. Tällöin

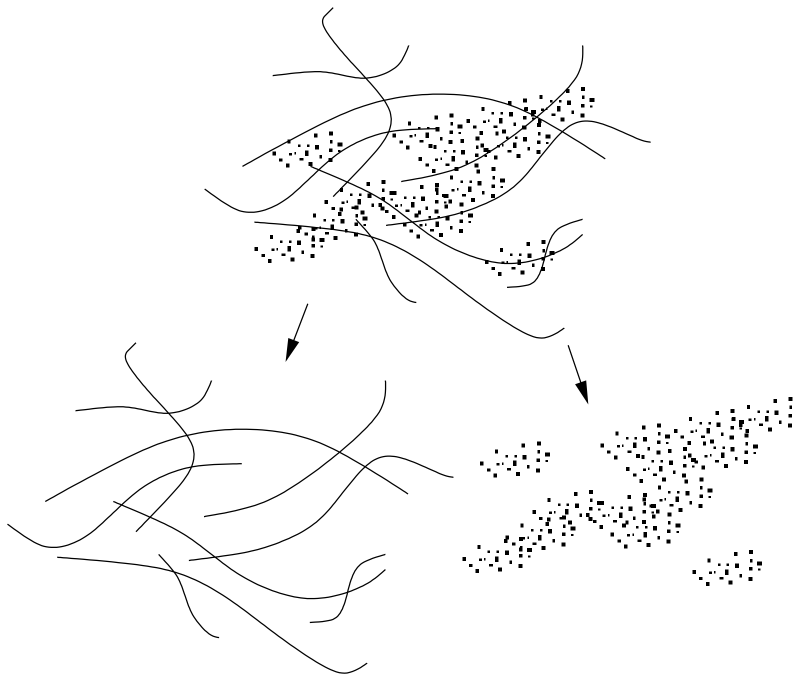
$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset A$$

on Borel-joukko ja kohdan (3) perusteella myös m-suoristuva. □

Lause 4.5. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko, jolle $\mathscr{H}^m(A) < \infty$. Tällöin on m-suoristuva joukko F ja täysin m-suoristumaton joukko E siten, että A on niiden yhdiste.*

Todistus. [9, Theorem 15.6]. Jos A on täysin m-suoristumaton, niin väite on ilmeinen. Muussa tapauksessa olkoon $M = \sup \mathscr{H}^m(A \cap B)$, missä supremum otetaan yli m-suoristuvien Borel-joukkojen B. Koska A ei ole täysin m-suoristumaton, on m-suoristuva joukko F, jolle $\mathscr{H}^m(A \cap F) > 0$. Täten Lemman 4.4(4) ja oletuksen $\mathscr{H}^m(A) < \infty$ perusteella $0 < M < \infty$. Kaikilla $i = 1, 2, \ldots$ löytyy m-suoristuva Borel-joukko B_i, jolle

$$\mathscr{H}^m(A \cap B_i) > M - 1/i.$$



Kuva 1. $\mathscr{H}^m$-äärellismittainen joukko koostuu m-suoristuvasta ja täysin m-suoristumattomasta osasta.

Olkoon $F = A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Joukko F on Lemman 4.4 mukaan m-suoristuva, joten riittää enää näyttää, että $E = A \setminus F$ on täysin m-suoristumaton. Tehdään vastaoletus, että on m-suoristuva joukko C, jolle $c = \mathscr{H}^m(C \cap E) > 0$. Lemman 4.4(4) nojalla voidaan olettaa, että C on Borel-joukko. Koska leikkaus on distributiivinen yhdisteen suhteen, pätee

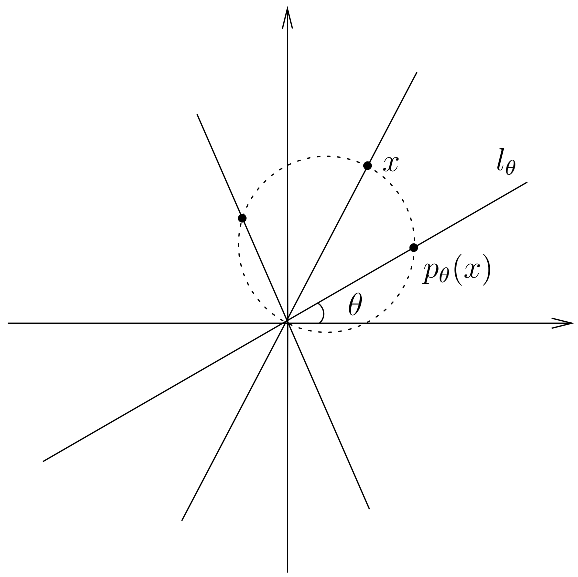
$$
\begin{aligned}
(A \cap (F \cup C)) \setminus F &= ((A \cap F) \cup (A \cap C)) \setminus F \\
&= ((A \cap F) \setminus F) \cup ((A \cap C) \setminus F) \\
&= (A \cap C) \cap F^c = C \cap (A \cap F^c) = C \cap E.
\end{aligned}
$$

Joukon F $\mathscr{H}^m$-mitallisuuden ja Lauseiden 1.7 ja 1.41 perusteella

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}^m(A \cap (F \cup C)) &= \mathscr{H}^m((A \cap (F \cup C)) \setminus F) + \mathscr{H}^m((A \cap (F \cup C)) \cap F) \\
&\geq \mathscr{H}^m(C \cap E) + \mathscr{H}^m(A \cap F) \\
&= c + \lim_{k \to \infty} \mathscr{H}^m(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_i) \\
&> \lim_{k \to \infty} \mathscr{H}^m(A \cap B_k) = M.
\end{aligned}
$$

Tämä on mahdotonta, koska $F \cup C$ on m-suoristuva Borel-joukko. Siten E on täysin m-suoristumaton ja väite pätee. $\square$

Suoristuviin ja täysin suoristumattomiin joukkoihin liittyvät projektiotulokset käsitellään ainoastaan tasossa ja niinpä 1-suoristuvia ja täysin 1-suoristumattomia joukkoja voidaan lyhyemmin kutsua suoristuviksi ja täysin suoristumattomiksi joukoiksi. Termiä *polku* käytetään tässä kuvauksen synonyymina lähinnä ajatuksen johdattamiseksi.



Kuva 2. Kuvaus p_θ projisoi tason pisteet suoralle l_θ.

Määritelmä 4.6. Kaikille $\theta \in \mathbb{R}$ määritellään yksikkövektori $\overline{\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$ ja kuvaukset

$$p_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ p_\theta(x) = \langle x, \overline{\theta}\rangle\overline{\theta},$$
$$\pi_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \pi_\theta(x) = \langle x, \overline{\theta}\rangle,$$

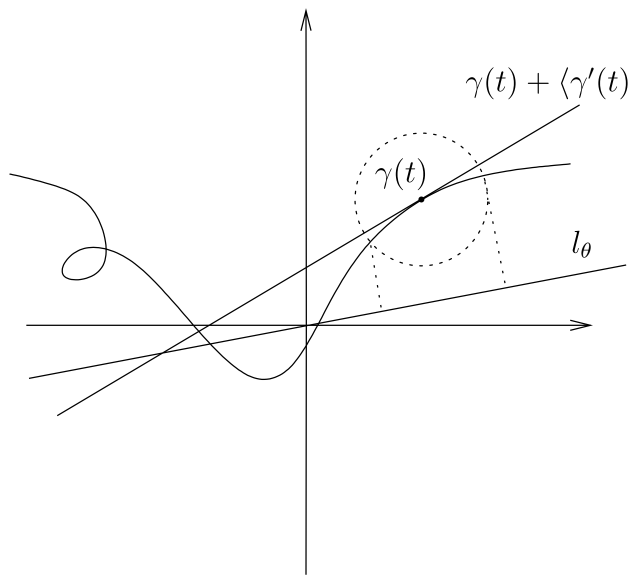
missä $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on tason $\mathbb{R}^2$ standardisisätulo. Sen sijaan merkinnät suoralle $l_\theta = \{t\overline{\theta} : t \in \mathbb{R}\}$ ja kohtisuoralle kulmalle $\theta^\perp = \theta + \frac{\pi}{2} \mod \pi$ varataan vain kulmille $[0,\pi)$. Joukossa $[0,\pi)$ käytetään Lebesguen mittaa $\mathscr{L}^1$ ja ilmaisu ”melkein kaikilla $\theta \in [0,\pi)$” ymmärretään aina sen mielessä. Sovitaan vielä, että suorat $m, n \subset \mathbb{R}^2$ ovat *yhdensuuntaiset*, jos $m = n + a$ jollekin $a \in \mathbb{R}^2$. Tätä merkitään $m \parallel n$.

Lemma 4.7. *Olkoon $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ C^1-polku.*

(1) *Korkeintaan numeroituvan monelle $\theta \in [0,\pi)$ on voimassa*

$$\mathscr{H}^1(\{t \in \mathbb{R} : \gamma'(t) = r\overline{\theta} \text{ jollain } r \neq 0\}) > 0.$$

(2) *Joukon $\gamma(\{t \in \mathbb{R} : \gamma'(t) = 0\})$ $\mathscr{H}^1$-mitta on 0.*



Kuva 3. Lemmassa 4.7 näytetään, että kunhan pisteen $\gamma(t)$ tangentti ei ole kohtisuorassa suoraa l_θ vastaan, niin pisteen $\gamma(t)$ ympäristö projisoituu "siististi" suoralle l_θ.

(3) *Jos $\theta \in [0, \pi)$ ja joukolle*

$$A = \{t \in \mathbb{R} : \gamma'(t) \neq r\overline{\theta} \ \forall r \in \mathbb{R}\},$$

pätee $\mathscr{H}^1(A) > 0$, niin projektion $p_{\theta^\perp}(\gamma(A))$ $\mathscr{H}^1$-mitta on positiivinen.

Todistus. (1) Merkitään kaikilla $\theta \in [0, \pi)$

$$T_\theta = \{t \in \mathbb{R} : \gamma'(t) = r\overline{\theta} \text{ jollain } r \neq 0\},$$

jolloin joukot T_θ ja T_ζ ovat erillisiä aina, kun $\theta \neq \zeta$. Tehdään vastaoletus, että on ylinumeroituva $\Theta \subset [0, \pi)$ niin, että $\mathscr{H}^1(T_\theta) > 0$ kaikille $\theta \in \Theta$. Välejä $[j, j+1) \subset \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$, on numeroituva määrä, joten jollain välillä $I = [k, k+1)$ on $\mathscr{H}^1(I \cap T_\theta) > 0$ ylinumeroituvan monelle $\theta \in \Theta$. Silloin erillisyyden vuoksi $\mathscr{H}^1(I) = \infty$, mikä on tietenkin mahdotonta. Siten vastaoletus on väärä.

(2) Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ rajoitettu avoin väli ja olkoon $\varepsilon > 0$. Joukko

$$S_\varepsilon = \{t \in I : \|\gamma'(t)\| < \varepsilon\}$$

on avoin, ja arvioimalla kuten Lauseen 1.33 todistuksessa nähdään, että γ on 2ε-Lipschitz-kuvaus joukossa S_ε, joten Lauseen 1.43 mukaan

$$\mathscr{H}^1(\gamma(S_\varepsilon)) \leq 2\varepsilon \mathscr{H}^1(S_\varepsilon) \leq 2\varepsilon \mathscr{H}^1(I).$$

Niinpä

$$\mathscr{H}^1(\gamma(\{t \in I : \gamma'(t) = 0\})) \leq \mathscr{H}^1\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \gamma(S_{1/k})\right) = \lim_{k\to\infty} \mathscr{H}^1(\gamma(S_{1/k})) = 0.$$

Väite seuraa, sillä $\mathbb{R}$ saadaan tällaisten välien numeroituvana yhdisteenä.

(3) Olkoon $\theta \in [0, \pi)$ sellainen, että joukolle

$$A = \{t \in \mathbb{R} : \gamma'(t) \neq r\overline{\theta} \ \forall r \in \mathbb{R}\}$$

pätee $\mathscr{H}^1(A) > 0$. Kuvaus $\pi_{\theta^\perp} \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ketjusäännön mukaan jatkuvasti derivoituva ja sen derivaatta on

$$(\pi_{\theta^\perp} \circ \gamma)'(t) = \langle \overline{\theta^\perp}, \gamma'(t) \rangle \neq 0$$

kaikilla $t \in A$. Derivaatan γ' jatkuvuuden nojalla jokaisella $t \in A$ on $\varepsilon_t > 0$ siten, että $(\pi_{\theta^\perp} \circ \gamma)'(s) \neq 0$ kaikilla $s \in [t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t]$. Niinpä väliarvolauseen 1.32 mukaan kaikilla $a, b \in [t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t]$

$$|(\pi_{\theta^\perp} \circ \gamma)(a) - (\pi_{\theta^\perp} \circ \gamma)(b)| \geq K_t |a - b|,$$

missä

$$K_t = \min_{s \in [t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t]} |(\pi_{\theta^\perp} \circ \gamma)'(s)| > 0.$$

Koska $\mathscr{H}^1(A) > 0$, niin Lauseen 1.45 mukaan

$$\mathscr{H}^1(p_{\theta^\perp}(\gamma(A))) = \mathscr{H}^1(\pi_{\theta^\perp}(\gamma(A))) > 0,$$

mikä oli väite. □

Lause 4.8. *Olkoon $F \subset \mathbb{R}^2$ suoristuva joukko, jolle $\mathscr{H}^1(F) > 0$. Tällöin*

$$\mathscr{H}^1(p_\theta(F)) > 0$$

lukuunottamatta korkeintaan yhtä suuntaa $\theta \in [0, \pi)$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $F \subset \gamma(\mathbb{R})$ jollekin C^1-polulle $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Tehdään vastaoletus, että löytyy kaksi eri suuntaa $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi)$, joille $\mathscr{H}^1(p_{\theta_i^\perp}(F)) = 0$ molemmille i. Tällöin Lemman 4.7(3) mukaan

$$\mathscr{H}^1(\{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in F, \gamma'(t) \neq r\overline{\theta_i} \ \forall r \in \mathbb{R}\}) = 0.$$

Kuitenkaan derivaatta ei voi olla kummankaan suuntainen kovin monelle t: Jos $\mathscr{H}^1(\{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in F, \gamma'(t) = r\overline{\theta_1}, r \neq 0\}) > 0$ (vastaavasti suunnalle θ_2), niin Lemman 4.7(3) mukaan

$$\mathscr{H}^1(p_{\theta_2^\perp}(F)) > 0,$$

mikä on mahdotonta. Niinpä molemmille i on

$$\mathscr{H}^1(\{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in F, \gamma'(t) = r\overline{\theta_i}, r \neq 0\}) = 0.$$

Joukko F koostuu pisteistä $\gamma(t)$, joille joko $\gamma'(t) = 0$, $\gamma'(t) = r\overline{\theta_i}$ toiselle i jollain $r \neq 0$ tai $\gamma'(t) \neq r\overline{\theta_i}$ molemmille i ja kaikille $r \in \mathbb{R}$. Ensimmäisen vaihtoehdon mukaiset pisteet muodostavat $\mathscr{H}^1$-nollamittaisen joukon Lemman 4.7(2) nojalla. Kaksi viimeistä vaihtoehtoa muodostavat $\mathscr{H}^1$-nollamittaisen joukon parametrijoukossa $\mathbb{R}$, ja Lauseiden 1.33 ja 1.45 perusteella γ säilyttää $\mathscr{H}^1$-nollamittaisuuden. Siispä $\mathscr{H}^1(F) = 0$, mikä on kuitenkin mahdotonta. Väite seuraa.

□

Vastaava projektiotulos täysin suoristumattomille joukoille on mielenkiintoisempi. Todistus on työläs ja se sivuutetaan. Katso [4, Theorem 6.13].

Lause 4.9. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2$ täysin suoristumaton $\mathscr{H}^1$-mitallinen joukko ja $\mathscr{H}^1(E) < \infty$. Tällöin*

$$\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) = 0$$

melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$.

Yhteenvetona projektiotuloksista saadaan Lause 4.10. Näin muotoiltuna se pätee yleisesti avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Vaikkei jatkossa tarvitakaan tätä enempää, on hyvä huomata, että tasossa suoristuvan joukon, jolla on positiviinen $\mathscr{H}^1$-mitta, projektiolla on positiivinen $\mathscr{H}^1$-mitta lukuunottamatta korkeintaan *yhtä* suuntaa. Lauseiden 4.5 ja 4.8 mukaan tämä tarkoittaa, että jos joukolle F, $\mathscr{H}^1(F) < \infty$, suuntia, joihin projektio on nollamittainen, on vähintään kaksi, niin joukko F on välttämättä täysin suoristumaton.

Lause 4.10 (Besicovitchin projektiolause)**.** *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ $\mathscr{H}^1$-mitallinen joukko, jolle $\mathscr{H}^1(A) < \infty$.*

(1) *Joukko A on suoristuva, jos ja vain jos kaikille $\mathscr{H}^1$-mitallisille joukoille $B \subset A$, $\mathscr{H}^1(B) > 0$, pätee $\mathscr{H}^1(p_\theta(B)) > 0$ melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$.*
(2) *Joukko A on täysin suoristumaton, jos ja vain jos $\mathscr{H}^1(p_\theta(A)) = 0$ melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$.*

Todistus. Perustelu saadaan yhdistämällä Lemma 4.4 ja Lauseet 4.5, 4.9 ja 4.8.

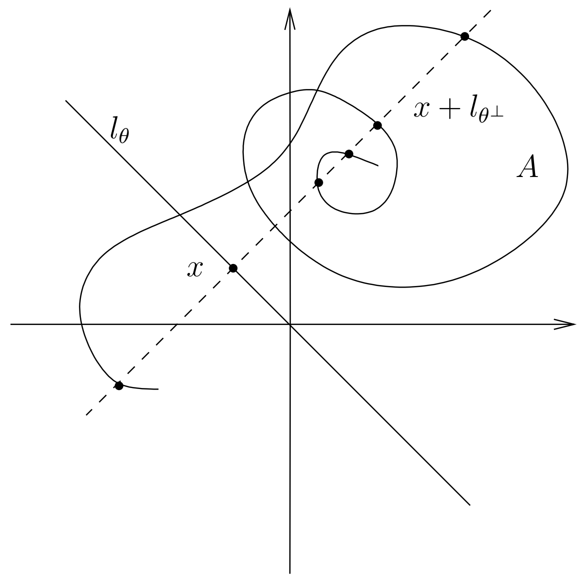
(1) Jos A on suoristuva, niin myös sen jokainen osajoukko on suoristuva Lemman 4.4 mukaan. Siten jokainen $\mathscr{H}^1$-mitallinen joukko $B \subset A$, $\mathscr{H}^1(B) > 0$, on suoristuva ja siksi Lauseen 4.8 mukaan $\mathscr{H}^1(p_\theta(B)) > 0$ melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$.

Oletetaan sitten, että joukon A jokaiselle $\mathscr{H}^1$-mitalliselle osajoukolle $B \subset A$, $\mathscr{H}^1(B) > 0$, on $\mathscr{H}^1(p_\theta(B)) > 0$ melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$. Tehdään vastaoletus: A ei ole suoristuva. Tällöin Lauseen 4.5 mukaan joukon A täysin suoristumattomalle osalle $E \subset A$ pätee $\mathscr{H}^1(E) > 0$. Koska A on $\mathscr{H}^1$-mitallinen, myös joukko E on. Siten Lauseen 4.9 mukaan $\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) > 0$ melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$. Tämä on vastoin oletusta, joten joukon A täytyy olla suoristuva.

(2) Jos A on täysin suoristumaton, niin väite seuraa suoraan Lauseesta 4.9.

Oletetaan toisaalta, että $\mathscr{H}^1(p_\theta(A)) = 0$ melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$. Tehdään vastaoletus: A ei ole täysin suoristumaton. Tällöin Lauseen 4.5 perusteella joukon

A suoristuvalle osalle F pätee $\mathscr{H}^1(F) > 0$. Koska F on Borel-joukko, niin Lauseen 4.8 mukaan $\mathscr{H}^1(p_\theta(F)) > 0$ melkein kaikille θ. Täten myös $\mathscr{H}^1(p_\theta(A)) > 0$ melkein kaikille θ. Tämä on oletuksen mukaan mahdotonta, joten A on välttämättä täysin suoristumaton. □



KUVA 4. Lemma 4.11(1).

Lemma 4.11. *(1) Kun $A \subset \mathbb{R}^2$ on joukko, jolle $\mathscr{H}^1(A) < \infty$, niin kaikille $\theta \in [0, \pi)$*

$$\#(A \cap (x + l_\theta)) < \infty$$

$\mathscr{H}^1$-melkein kaikille $x \in l_{\theta^\perp}$.

(2) Jos $(x_i, \theta_i) \to (x, \theta)$ ja on pisteet $z_i \in x_i + l_{\theta_i}$, joille $z_i \to z \in \mathbb{R}^2$, niin $z \in x + l_\theta$.

(3) Jos $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakti, niin kuvaus

$$(x, \theta) \mapsto \#K \cap (x + l_\theta),$$

missä $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \pi)$, on Borelin funktio.

(4) Jos $E \subset F$ ovat sellaisia joukkoja, että $\mathscr{H}^1(E) = \mathscr{H}^1(F) < \infty$, niin jokaiselle $x \in E$ (tai $x \in \mathbb{R}^2 \setminus F$)

$$\#F \cap (x + l_\theta) = \#E \cap (x + l_\theta)$$

melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$.

Todistus. (1) Olkoon $\theta \in [0, \pi)$. Sovelletaan Lausetta 1.48 projektioon $\pi_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Koska $\mathscr{H}^0 = \#$ Huomautuksen 1.40 mukaan, niin

$$\int_{\mathbb{R}}^* \#(A \cap \pi_\theta^{-1}(t))\, d\mathscr{L}^1 t < \infty,$$

joten $\mathscr{L}^1$-melkein jokaisella $t \in \mathbb{R}$

$$\#(A \cap (t\overline{\theta} + l_{\theta^\perp})) < \infty.$$

(2) Tehdään vastaoletus, että $z \in \mathbb{R}^2 \setminus (x + l_\theta)$. Tällöin $r = \operatorname{dist}(z, x + l_\theta) > 0$. Olkoon i_0 niin suuri, että kaikilla $i \geq i_0$ on $z_i \in B(z, r/4)$. Riittää näyttää, että kaikille $R > 0$ löytyy $n_0 \geq i_0$ siten, että kaikille $i \geq n_0$ pätee

$$x_i + l_{\theta_i} \cap B(z, R) \subset \{w \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(w, x + l_\theta) < r/4\},$$

vaikka kaikilla $i \geq i_0$ pitäisi olla

$$\operatorname{dist}(z_i, x + l_\theta) = \inf_{q \in x + l_\theta} \|z_i - q\| \geq \inf_{q \in x + l_\theta} \Big(\|q - z\| - \|z - z_i\| \Big) \geq \frac{3r}{4}.$$

Voidaan olettaa, että n_0 on ensinnäkin niin suuri, että $z_i \in B(z, R)$ kaikilla $i \geq n_0$. Olkoon

$$y = x_i + s\overline{\theta_i} \in x_i + l_{\theta_i} \cap B(z, R)$$

joillain $s \in \mathbb{R}$ ja $i \geq n_0$. Tällöin $|s| \leq 2R$ ja

$$\|y - (x + s\overline{\theta})\| \leq \|x_i - x\| + |s|\|\overline{\theta_i} - \overline{\theta}\| \leq \|x_i - x\| + 2R\|\overline{\theta_i} - \overline{\theta}\|,$$

joten lukua n_0 kasvattamalla saadaan väite.

(3) Olkoon $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Olkoon kaikilla $j = 1, 2, \ldots$ joukko V_j niiden parien (x, θ) kokoelma, joille löytyy avoimet $U_1, \ldots, U_k \subset \mathbb{R}^2$ niin, että $k \leq n$, $\operatorname{diam}(U_i) < 1/j$ ja

$$(x + l_\theta) \cap K \subset \bigcup_{i=1}^k U_i.$$

Tällöin

$$\{(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \pi) : \#K \cap (x + l_\theta) \leq n\} = \bigcap_{j=1}^\infty V_j$$

Huomautuksessa 1.40 perustellun tiedon $\mathscr{H}^0 = \#$ ja Lauseen 1.41 perusteella. Osoitetaan, että joukot V_j ovat avoimia. Olkoon $(x, \theta) \in V_j$ jollain j ja $U_1, \ldots, U_k$ paria (x, θ) vastaava kokoelma avoimia joukkoja. Kun (y, ζ) on riittävän lähellä paria (x, θ), niin myös

$$(y + l_\zeta) \cap K \subset \bigcup_{i=1}^k U_i = U.$$

Perustellaan tämä. Ellei pisteelle (x, θ) löydy tällaista ympäristöä, niin löytyy jonot (x_i, θ_i) ja (z_i), joille $z_i \in (x_i + l_{\theta_i}) \cap (K \setminus U)$. Koska $K \setminus U$ on kompakti, niin jonolla

(z_i) on suppeneva osajono, $z_{i_j} \to z \in K \setminus U$. Kohdan (2) mukaan $z \in x + l_\theta$, mikä on kuitenkin mahdotonta, sillä $x + l_\theta \cap K \subset U$.

(4) Olkoon $x \in E$. Määritellään kaikille $z \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{w \in \mathbb{R}^2 : w_1 = x_1\}$ radiaalinen projektio R asettamalla

$$R(z) = R_x(z) = \arctan \frac{z_2 - x_2}{z_1 - x_1} \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Huomaa, että kaikilla $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$

$$R^{-1}(\theta) = (x + l_\theta) \setminus \{x\}.$$

Kuvaus R on jatkuvasti differentioituva joukossa A ja kaikilla $z \in A$

$$\begin{aligned}\|\nabla R(z)\|^2 &= \left(1 + \left(\frac{z_2 - x_2}{z_1 - x_1}\right)\right)^{-2} \left(\frac{(z_2 - x_2)^2}{(z_1 - x_1)^4} + \frac{1}{(z_1 - x_1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{(z_1 - x_1)^2}\left(1 + \frac{(z_2 - x_2)^2}{(z_1 - x_1)^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\|z - x\|^2}.\end{aligned}$$

Tämän perusteella voidaan näyttää, että kuvaus R on joukkoon

$$A_i = \{z \in A : \|z - x\| > 1/i,\ z_1 > x_1 \text{ (tai } z_1 < x_1)\}$$

rajoitettuna Lipschitz-kuvaus kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Samanlainen päättely kuin Lauseessa 1.33 kelpaa, eikä sitä ole tarpeen toistaa. Siispä Lauseen 1.48 mukaan kaikilla $i = 1, 2, \ldots$ jollain $C > 0$

$$\int^*_{(-\pi/2, \pi/2)} \#((F \setminus E) \cap R|_{A_i}^{-1}(\theta))\, d\theta \leq C\mathscr{H}^1(F \setminus E) = 0,$$

joten myös

$$0 = \#((F \setminus E) \cap R^{-1}(\theta)) = \#((F \setminus E) \cap (x + l_\theta))$$

melkein kaikilla $\theta \in [0, \pi)$. Niinpä melkein kaikilla $\theta \in [0, \pi)$

$$\#(F \cap (x + l_\theta)) = \#((E \cap (x + l_\theta)) + \#((F \setminus E) \cap (x + l_\theta)) = \#((E \cap (x + l_\theta)).$$

$\square$

Lauseen 4.13 todistuksessa käytetään seuraavaa Lausetta 1.35 yleisemmän Fubinin lauseen seurausta.

Lause 4.12. *Olkoot X ja Y separoituvia metrisiä avaruuksia. Olkoot μ_X ja μ_Y niiden σ-äärellisiä Borelin ulkomittoja. Tällöin jokaiselle Borel-joukolle $A \subset X \times Y$ μ_X-melkein kaikille $x \in X$ pätee $\mu_Y(\{y : (x, y) \in A\}) = 0$ täsmälleen, kun μ_Y-melkein kaikille $y \in Y$ pätee $\mu_X(\{x : (x, y) \in A\}) = 0$.*

Todistus. Katso [1, Theorem 6.7] tai [8, Theorem 5.47]. Lähteissä ei kuitenkaan perustella aivan tätä tulosta. Separoituvuutta tarvitaan, jotta "tulomitasta" $\mu = \mu_X \times \mu_Y$ saadaan myös Borelin ulkomitta. Lauseessa [1, Theorem 6.2] näytetään, että tulojoukot $A \times B \subset X \times Y$ ovat μ-mitallisia, kun A on μ_X-mitallinen ja B on

μ_Y-mitallinen. Erityisesti avointen joukkojen tulojoukot, ts. joukot $U \times V$, missä U on avaruuden X avoin joukko ja V on avaruuden Y avoin joukko, ovat μ-mitallisia. Metristen avaruuksien X ja Y separoituvuudesta seuraa, että avaruuden $X \times Y$ avoimet joukot saadaan avointen joukkojen tulojoukkojen numeroituvina yhdisteinä. Niinpä μ-mitallisten joukkojen σ-algebra sisältää avaruuden $X \times Y$ avoimet joukot ja siten myös Borel-joukot. Tietoa tuloavaruuksien ominaisuuksista löytyy lähteestä [14]. $\square$

Lause 4.13. *Olkoon $F \subset \mathbb{R}^2$ suoristuva $\mathscr{H}^1$-mitallinen joukko, jolle $\mathscr{H}^1(F) < \infty$. Tällöin $\mathscr{H}^1$-melkein kaikilla $x \in F$*

$$\#F \cap (x + l_\theta) < \infty$$

melkein kaikilla $\theta \in [0, \pi)$

Todistus. Lauseen 1.23 mukaan löytyy kompaktit joukot $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset F$, joille $\mathscr{H}^1(K_i) \geq \mathscr{H}^1(F) - 1/i$. Olkoon $E = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$, jolloin

$$\mathscr{H}^1(E) = \lim_{i \to \infty} \mathscr{H}^1(K_i) = \mathscr{H}^1(F).$$

Tiedon $\mathscr{H}^1(F \setminus E) = 0$ ja Lemman 4.11(4) perusteella riittää osoittaa, että $\mathscr{H}^1$-melkein kaikille $x \in E$

$$\#E \cap (x + l_\theta) < \infty$$

melkein kaikilla $\theta \in [0, \pi)$. Koska E on Lemman 4.4 mukaan myös suoristuva, niin riittää itse asiassa näyttää alkuperäinen väite joukolle E. Joukolla E on se hyvä ominaisuus, että se on kompaktien joukkojen numeroituva yhdiste, joten Lemman 4.11(3) mukaan kuvaus

$$(x, \theta) \mapsto \#E \cap (x + l_\theta) = \sup_i \#K_i \cap (x + l_\theta)$$

on Borelin funktio, mitä tarvitaan sovellettaessa Fubinin lausetta.

Voidaan siis olettaa, että F on kompaktien joukkojen numeroituva yhdiste. Tehdään vastaoletus, että on $F' \subset F$, jolle $\mathscr{H}^1(F') > 0$ ja kaikilla $x \in F'$ pätee

$$\mathscr{L}^1(\{\theta \in [0, \pi) : \#F \cap (x + l_\theta) = \infty\}) > 0.$$

Koska F on suoristuva, niin on C^1-polut $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, \ldots$, joille

$$\mathscr{H}^1\left(F \setminus \bigcup_{i=1}^\infty g_i(\mathbb{R})\right) = 0.$$

Koska $F' \subset F$ ja $\mathscr{H}^1(F') > 0$, niin $\mathscr{H}^1(F' \cap g_k(\mathbb{R})) > 0$ jollain $k \in \mathbb{N}$. Voidaan olettaa, että $F' \subset g_k(\mathbb{R}) = \gamma(\mathbb{R})$. Lauseen 4.12 mukaan

$$\mathscr{L}^1(\{\theta \in [0, \pi) : \mathscr{H}^1(\{x \in F' : \#F \cap (x + l_\theta) = \infty\}) > 0\}) > 0$$

Jos merkitään

$$F'' = \{x \in F' : \#F \cap (x + l_\theta) = \infty\},$$

niin edellisen perusteella on $\theta \in [0, \pi)$, jolle $\mathscr{H}^1(F'') > 0$. Lemman 4.7(1) mukaan löytyy vieläpä sellainen θ, että lisäksi pätee

$$\mathscr{H}^1(\{t \in \mathbb{R} : \gamma'(t) = r\overline{\theta}, r \neq 0\}) = 0.$$

Koska vielä Lemman 4.7(2) mukaan

$$\mathscr{H}^1(\gamma(\gamma^{-1}(F'') \cap \{t : \gamma'(t) \neq 0\})) \geq \mathscr{H}^1(F'' \setminus \gamma(\{t \in \mathbb{R} : \gamma'(t) = 0\}) > 0,$$

niin joukolle

$$\begin{aligned} A &= \{t \in \gamma^{-1}(F'') : \gamma'(t) \neq r\overline{\theta} \ \forall r \in \mathbb{R}\} \\ &= \gamma^{-1}(F'') \cap \{t : \gamma'(t) \neq 0\} \cap \{t : \gamma'(t) \neq r\overline{\theta} \ \forall r \neq 0\} \end{aligned}$$

pätee $\mathscr{H}^1(A) > 0$. Lemman 4.7(3) mukaan $\mathscr{H}^1(p_{\theta^\perp}(F'')) > 0$. Koska suorat $x + l_\theta$ ja $p_{\theta^\perp}(x) + l_\theta$ ovat samoja kaikilla $x \in F''$, niin on $J \subset l_{\theta^\perp}$, $\mathscr{H}^1(J) > 0$, jolle kaikille $y \in J$ pätee

$$\# F \cap (y + l_\theta) = \infty.$$

Tämä on Lemman 4.11(1) mukaan mahdotonta, sillä $\mathscr{H}^1(F) < \infty$. Siksi vastaoletus on väärä ja väite pätee. $\square$

5. Duaalisuus

Tason $\mathbb{R}^2$ suorien ja pisteiden välillä on yksinkertainen vastaavuus. Suorat ovat tunnetusti yhtälöiden

$$ax + by + c = 0, \ (a, b) \neq 0,$$

ratkaisujoukkoja ja tällaista suoraa voidaan kutsua kolmikon (a, b, c) määräämäksi. Jos lisäksi $c \neq 0$, saadaan yhtäpitävä yhtälö $(a/c)x + (b/c)y + 1 = 0$. Tästä nähdään, että piste (x_0, y_0) kuuluu kolmikon (a, b, c) määräämälle suoralle täsmälleen, kun kolmikon $(x_0, y_0, 1)$ määräämä suora sisältää pisteen $(a/c, b/c)$. Näin saadaan vastaavuus

$$\begin{aligned} \text{suora } (a, b, c) &\longrightarrow \text{piste } (a/c, b/c), \\ \text{piste } (x_0, y_0) &\longrightarrow \text{suora } (x_0, y_0, 1) \end{aligned} \tag{7}$$

tason pisteiden ja suorien välille lukuunottamatta origoa ja sen kautta kulkevia suoria. Jos siis $x \neq 0$ on piste ja $L \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ suora, niin saadulle vastaavuudelle pätee

$$x \in L \Longleftrightarrow \widehat{L} \in \hat{x},$$

missä "hatulla" tarkoitetaan vastinobjektia. Kutsutaan jatkossa kohdan (7) mukaan saatuja pisteitä ja suoria *duaalisuoriksi* ja *-pisteiksi*. Määritelmän perusteella on selvää, että $\hat{\hat{x}} = x$ ja $\hat{\hat{L}} = L$ kaikille pisteille x ja suorille L, joille duaalikäsitteet on määritelty. Sovitaan vielä, että joukon $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pisteiden duaalisuorien pisteille käytetään merkintää

$$\widetilde{E} = \bigcup_{x \in E} \hat{x}.$$

Yksinkertaisen määritelmän jälkeen tarvitaan tietysti käyttökelpoisempi esitys. Suoraan edellisen määritelmän perusteella olisi vaikea vastata kysymyksiin duaalijoukkojen mitallisuudesta tai niiden pinta-alasta. Osoitetaan ensin, että yksittäisen pisteen projektiot muodostavat origon kautta kulkevan ympyrän. Tarvittava esitys saadaan peilaamalla näitä ”projektioympyröitä” yksikköympyrän suhteen, jolloin todella saadaan suoria.

Lause 5.1. *Olkoon* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *ja olkoon* $\theta \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\|x\|}{2}(\cos(2\theta - \alpha), \sin(2\theta - \alpha)),$$

kun $\alpha \in [0, 2\pi)$ *on se kulma, jolle* $x = \|x\|(\cos\alpha, \sin\alpha)$. *Erityisesti*

$$\bigcup_{\theta \in [0,\pi)} p_\theta(x) = \partial B(x/2, \|x\|/2).$$

Todistus. Trigonometrisia kaavoja

$$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1, \ \ 2\sin\gamma\cos\gamma = \sin 2\gamma \ \text{ ja } \ \sin^2\gamma = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\gamma)$$

käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
p_\theta(x_1, 0) &= x_1\cos\theta(\cos\theta, \sin\theta) = (x_1\cos^2\theta, x_1\cos\theta\sin\theta) \\
&= (x_1(1 - \sin^2\theta), \frac{1}{2}x_1\sin 2\theta) = (x_1(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta), \frac{1}{2}x_1\sin 2\theta) \\
&= (\frac{1}{2}x_1, 0) + (\frac{1}{2}x_1\cos 2\theta, \frac{1}{2}x_1\sin 2\theta)
\end{aligned}$$

ja toisaalta

$$\begin{aligned}
p_\theta(0, x_2) &= x_2\sin\theta(\cos\theta, \sin\theta) = (x_2\sin\theta\cos\theta, x_2\sin^2\theta) \\
&= (\frac{1}{2}x_2\sin 2\theta, x_2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta)) \\
&= (0, \frac{1}{2}x_2) + (\frac{1}{2}x_2\sin 2\theta, -\frac{1}{2}\cos 2\theta)).
\end{aligned}$$

Koska $x = (x_1, x_2) = \|x\|(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, saadaan summakaavojen

$$\cos(\gamma \pm \delta) = \cos\gamma\cos\delta \mp \sin\gamma\sin\delta \ \text{ ja } \ \sin(\gamma \pm \delta) = \sin\gamma\cos\delta \pm \cos\gamma\sin\delta$$

perusteella

$$\frac{1}{2}x_1\cos 2\theta + \frac{1}{2}x_2\sin 2\theta = \frac{1}{2}\|x\|(\cos\alpha\cos 2\theta + \sin\alpha\sin 2\theta) = \frac{1}{2}\|x\|\cos(2\theta - \alpha)$$

ja

$$\frac{1}{2}x_1\sin 2\theta - \frac{1}{2}x_2\cos 2\theta = \frac{1}{2}\|x\|(\sin 2\theta\cos\alpha - \cos 2\theta\sin\alpha) = \frac{1}{2}\|x\|\sin(2\theta - \alpha).$$

Niinpä

$$p_\theta(x) = p_\theta(x_1, 0) + p_\theta(0, x_2) = \frac{1}{2}x + \frac{\|x\|}{2}(\cos(2\theta - \alpha), \sin(2\theta - \alpha)),$$

mikä oli väite. $\square$

Huomautus 5.2. Erityisesti Lause 5.1 sanoo, että vaikkei kuvaus $\theta \mapsto \theta^\perp$, $\theta \in [0, \pi)$, ole jatkuva, niin projektio $(x, \theta) \mapsto p_{\theta^\perp}(x)$, $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \pi)$, on jatkuva. Jos nimittäin $\theta \geq 0$, niin löytyy $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ ja $\widetilde{\theta} \in [0, \pi)$, joille $\theta = k\pi + \widetilde{\theta}$, joten Lauseen 5.1 mukaan jollain $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} p_\theta(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{\|x\|}{2}(\cos(2\theta - \alpha), \sin(2\theta - \alpha)) \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{\|x\|}{2}(\cos(2(k\pi + \widetilde{\theta}) - \alpha), \sin(2(k\pi + \widetilde{\theta}) - \alpha)) \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{\|x\|}{2}(\cos(2\widetilde{\theta} - \alpha), \sin(2\widetilde{\theta} - \alpha)) = p_{\widetilde{\theta}}(x). \end{aligned}$$

Niinpä

$$p_{\theta^\perp}(x) = p_{\theta + \frac{\pi}{2}}(x),$$

joten jatkuvuus on selvä.

Määritelmä 5.3. Määritellään apukuvaukset

$$\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \ \psi(x) = -x\|x\|^{-2},$$

ja

$$\eta : \mathbb{R}^2 \times [0, \pi) \setminus P \to \mathbb{R}^2, \ \eta(x, \theta) = \psi(p_{\theta^\perp}(x)),$$

missä

$$P = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \pi) : p_{\theta^\perp}(x) = 0\}.$$

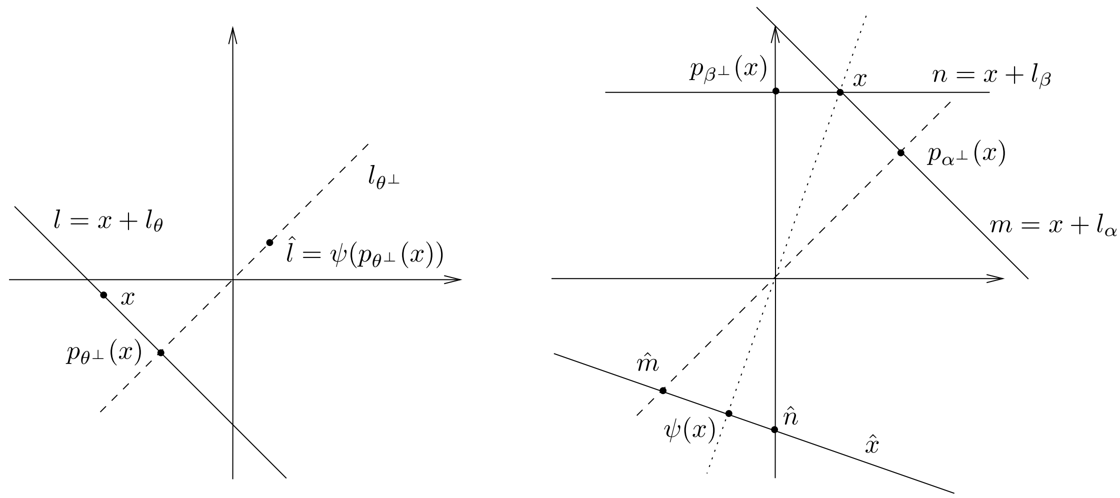
Intuitiivisesti kuvaus ψ on peilaus yksikköympyrän suhteen yhdistettynä kulman π suuruiseen kiertoon origon suhteen. Selvästi se on jatkuva bijektio ja $\psi^{-1} = \psi$. Poikkeusjoukossa P on täsmälleen ne parit, jotka määräävät origon kautta kulkevan suoran. Huomautuksen 5.2 mukaan $(x, \theta) \mapsto p_{\theta^\perp}(x)$ on jatkuva, joten myös η on jatkuva ja P on avaruuden $\mathbb{R}^2 \times [0, \pi)$ suljettu osajoukko.

Lause 5.4. *Olkoot ψ, η ja P kuten Määritelmässä 5.3.*

(1) *Suoran $x + l_\theta$ duaalipiste on $\widehat{x + l_\theta} = \eta(x, \theta)$, kun $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \pi) \setminus P$.*
(2) *Pisteen x duaalisuora on $\hat{x} = \eta(\{x\} \times [0, \pi) \setminus P) = \psi(x) + l_{\gamma^\perp}$, kun $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ja $\gamma \in [0, \pi)$ on sellainen kulma, jolle $x \in l_\gamma$.*
(3) *Erityisesti pätee*

$$\widetilde{E} = \eta(E \times [0, \pi) \setminus P) = \psi\bigg(\bigcup_{\theta \in [0, \pi)} p_\theta(E) \setminus \{0\}\bigg),$$

kun $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.



KUVA 5. Duaalisuuden geometriaa Lauseen 5.4 mukaan. Pisteen duaalisuora löydetään (oikeanpuoleinen kuva) etsimällä sen kautta kulkevien suorien duaalipisteet.

Todistus. (2) Olkoon $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Lauseen 5.1 mukaan pisteen x projektiot muodostavat ympyrän $\partial B(x/2, \|x\|/2)$, joten

$$\begin{aligned}\eta(\{x\} \times [0,\pi) \setminus P) &= \psi\Bigg(\bigcup_{\theta\in[0,\pi), \langle x,\theta\rangle \neq 0} p_\theta(x)\Bigg)\\ &= \psi\Bigg(\bigcup_{\theta\in[0,\pi)} p_\theta(x) \setminus \{0\}\Bigg) = \psi(\partial B(x/2, \|x\|/2) \setminus \{0\}).\end{aligned}$$

Väite on siis, että pisteen x duaalisuora on "peilausta" ψ vaille tämä ympyrä. Olkoon nyt $\gamma \in [0, 2\pi)$ siten, että $z = \frac{x}{2} + \frac{\|x\|}{2}(\cos\gamma, \sin\gamma) \neq 0$. Tällöin

$$\|z\|^2 = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\|x\|\cos\gamma)^2 + (\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}\|x\|\sin\gamma)^2 = \frac{1}{2}\|x\|(\|x\| + \langle x, \overline{\gamma}\rangle),$$

joten

$$\begin{aligned}\psi(z) &= -\frac{z}{\|z\|^2} = -2\|x\|^{-1}(\|x\| + \langle x, \overline{\gamma}\rangle)^{-1} z\\ &= -(\|x\| + \langle x, \overline{\gamma}\rangle)^{-1}(x_1\|x\|^{-1} + \cos\gamma, x_2\|x\|^{-1} + \sin\gamma).\end{aligned}$$

Koska

$$x_1\psi_1(z) + x_2\psi_2(z) = \frac{x_1(x_1\|x\|^{-1} + \cos\gamma) + x_2(x_2\|x\|^{-1} + \sin\gamma)}{-(\|x\| + \langle x, \overline{\gamma}\rangle)} = -1,$$

on $\psi(z) \in \hat{x} = \{(u,v) : x_1 u + x_2 v + 1 = 0\}$. Siten

$$\eta(\{x\} \times [0,\pi) \setminus P) = \psi(\partial B(x/2, \|x\|/2) \setminus \{0\}) \subset \hat{x}.$$

Toisaalta jos $(u,v) \in \hat{x}$, niin $x_1 u + x_2 v + 1 = 0$ ja

$$\begin{aligned}\|\psi(u,v) - \frac{1}{2}x\|^2 &= \left(\frac{-u}{\|(u,v)\|^2} - \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \left(\frac{-v}{\|(u,v)\|^2} - \frac{1}{2}x_2\right)^2 \\ &= \frac{x_1 u + x_2 v + 1}{\|(u,v)\|^2} + \frac{1}{4}\|x\|^2 = \frac{1}{4}\|x\|^2.\end{aligned}$$

Siten

$$\psi(\hat{x}) \subset \partial B(x/2, \|x\|/2) \setminus \{0\},$$

josta seuraa

$$\hat{x} \subset \psi(\partial B(x/2, \|x\|/2) \setminus \{0\}).$$

Olkoon vielä $\gamma \in [0,\pi)$ siten, että $x \in l_\gamma$. Tällöin $x = t\overline{\gamma}$ jollain $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, ja

$$\hat{x} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (t\cos\gamma)u + (t\sin\gamma)v + 1 = 0\}.$$

Suora $\hat{x}$ on silloin yhdensuuntainen suoran

$$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (\cos\gamma)u + (\sin\gamma)v = 0\} = l_{\gamma^\perp}$$

ja toisaalta

$$(t\cos\gamma)\frac{-t\cos\gamma}{\|x\|^2} + (t\sin\gamma)\frac{-t\sin\gamma}{\|x\|^2} + 1 = \frac{-t^2}{\|x\|^2} + 1 = 0,$$

joten $\psi(x) \in \hat{x}$. Niinpä $\hat{x} = \psi(x) + l_{\gamma^\perp}$.

(1) Olkoon $(x,\theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0,\pi) \setminus P$. Kohdan (2) mukaan

$$(\widehat{\psi(p_{\theta^\perp}(x))}) = \psi(\psi(p_{\theta^\perp}(x))) + l_\theta = p_{\theta^\perp}(x) + l_\theta,$$

joten

$$(\widehat{x + l_\theta}) = (\widehat{p_{\theta^\perp}(x) + l_\theta}) = \psi(p_{\theta^\perp}(x)) = \eta(x,\theta),$$

mikä oli väite.

(3) Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tällöin kohdan (2) perusteella

$$\widetilde{E} = \bigcup_{x \in E} \hat{x} = \bigcup_{x \in E} \eta(\{x\} \times [0,\pi) \setminus P) = \bigcup_{\theta \in [0,\pi), \langle x, \overline{\theta} \rangle \neq 0} \psi(p_\theta(E)),$$

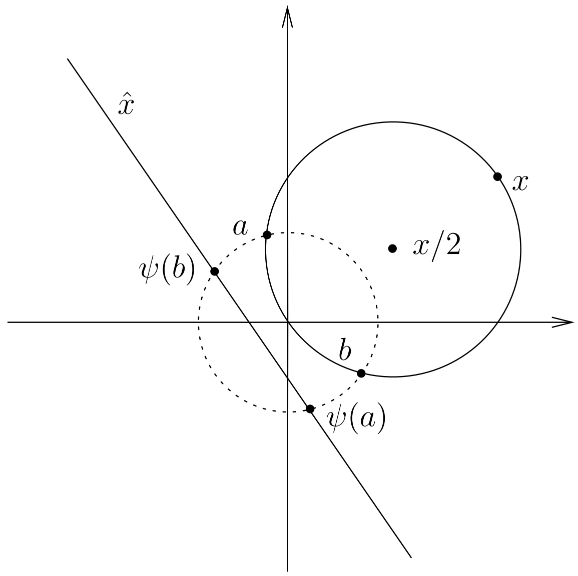
mistä väite seuraa. $\square$

Suoraan Lauseesta 5.4 saadaan muutamia havaintoja.

Lause 5.5. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Borel-joukko. Tällöin $\widetilde{E}$ on Suslin-joukko ja siten μ-mitallinen jokaiselle tason $\mathbb{R}^2$ Borelin ulkomitalle μ.*

Todistus. Lauseen 5.4 mukaan

$$\widetilde{E} = \eta(E \times [0,\pi) \setminus P) = \psi\left(\bigcup_{\theta \in [0,\pi)} p_\theta(E) \setminus \{0\}\right). \tag{8}$$



Kuva 6. Lauseen 5.4 mukaan pisteen $x \neq 0$ duaalisuora $\hat{x}$ saadaan kuvaamalla ”projektioympyrää” $\partial B(x/2, \|x\|/2) \setminus \{0\}$ kuvauksella ψ. Katkoviivalla piirretty ympyrä on yksikköympyrä, jonka suhteen ψ ”peilaa”.

Koska η on jatkuva ja E Borel-joukko, niin esityksen (8) yhdistäminen Suslin-joukoista kerrottuihin tietoihin luulisi riittävän väitteeseen. Näin ei kuitenkaan aivan ole, sillä Luvussa 3 oletettiin avaruuden täydellisyys, eikä Suslin-joukkoja ole (tässä tutkielmassa) edes määritelty muualla kuin täydellisissä ja separoituvissa avaruuksissa. Niinpä määritellään

$$T : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^2, \ T(x, \theta) = p_\theta(x),$$

joka on jatkuva. Joukot $E \subset \mathbb{R}^2$ ja $[0, \pi) \subset [0, \infty)$ ovat Borel-joukkoja ja siksi Suslin-joukkoja, joten Lauseen 3.8 mukaan myös $E \times [0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ on Suslin-joukko. Siispä Lauseen 3.7 perusteella joukko

$$E' = \bigcup_{\theta \in [0,\pi)} p_\theta(E) \setminus \{0\} = T(E \times [0, \pi)) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$$

on Suslin-joukko. Nyt

$$\widetilde{E} = \psi(E') = \bigcup_{i=1}^{\infty} \psi(E' \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1/i))),$$

joten soveltamalla Lausetta 3.7 kuvauksiin $\psi|_(\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1/i))$ nähdään, että myös $\widetilde{E}$ on Suslin-joukko avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Mitallisuus seuraa silloin Lauseesta 3.9. $\square$

Lemma 5.6. *Olkoon* $\psi(x) = -x\|x\|^{-2}$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. *Olkoon* $\mu = \mathscr{H}^s$ *jollain* $s > 0$ *tai* $\mu = \mathscr{L}^2$. *Tällöin joukolle* $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *pätee* $\mu(A) = 0$ *täsmälleen, kun* $\mu(\psi(A)) = 0$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $\mu = \mathscr{H}^s$ jollain $s > 0$, sillä Huomautuksen 1.42 mukaan $\mathscr{H}^2 = c\mathscr{L}^2$ jollain $c > 0$. Koska ψ on C^1-kuvaus ja $\psi = \psi^{-1}$, niin Lauseen 1.34 mukaan jokaiselle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ on $\varepsilon_x > 0$ niin, että ψ rajoitettuna joukkoon $B(x, \varepsilon_x)$ on K_x-bilipschitz-kuvaus, toisin sanoen

$$K^{-1}\|y - z\| \leq \|\psi(y) - \psi(z)\| \leq K\|y - z\|$$

kaikilla $y, z \in B(x, \varepsilon_x)$, $y \neq z$. Väite seuraa silloin Lauseesta 1.45. □

Lause 5.7. *Olkoon* $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *Borel-joukko. Tällöin* $\mathscr{L}^2(\widetilde{E}) = 0$, *jos ja vain jos* $\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) = 0$ *melkein kaikilla* $\theta \in [0, \pi)$.

Todistus. Lauseen 5.4 mukaan

$$\widetilde{E} = \psi\bigg(\bigcup_{\theta \in [0,\pi)} p_\theta(E) \setminus \{0\}\bigg).$$

Niinpä Lemman 5.6 mukaan $\mathscr{L}^2(\widetilde{E}) = 0$ täsmälleen, kun $\mathscr{L}^2(\bigcup_{\theta \in [0,\pi)} p_\theta(E) \setminus \{0\}) = 0$, joka Lauseen 1.37 mukaan pätee, jos ja vain jos

$$\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) = \mathscr{H}^1(p_\theta(E) \setminus \{0\}) = 0$$

melkein jokaisella $\theta \in [0, \pi)$. □

Huomautus 5.8. Suppenemisesta tasossa seuraa myös vastaavien duaalisuorien suppeneminen tietyssä mielessä samaan tapaan kuin Lemmassa 4.11(2). Olkoon (x_i) joukon $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pisteeseen $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ suppeneva jono. Osoitetaan, että kaikilla $R > 0$ ja $w > 0$ on luku $i_0 \in \mathbb{N}$ niin, että kaikille $i \geq i_0$ ja kaikille $y \in \widehat{x_i} \cap B(\psi(x), R)$ pätee $d(y, \hat{x}) < w$. Määritellään

$$f_i(t) = \psi(x_i) + t\Theta(x_i),\ t \in \mathbb{R},$$

missä $\Theta(x_i) \in S^1 = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\| = 1\}$ on se suunta, joka saadaan kiertämällä vektoria $x_i/\|x_i\|$ suoran kulman verran vastapäivään. Vastaavasti määritellään $f(t) = \psi(x) + t\Theta(x)$. Olkoon i_0 niin suuri, että kaikilla $i \geq i_0$ on

$$\|\psi(x) - \psi(x_i)\| < \min\{R, w/2\},\ \|\Theta(x) - \Theta(x_i)\| < w/4R,$$

ja olkoon $y = f_i(t) \in \widehat{x_i} \cap B(\psi(x), R)$ joillain $i \geq i_0$ ja t. Tällöin

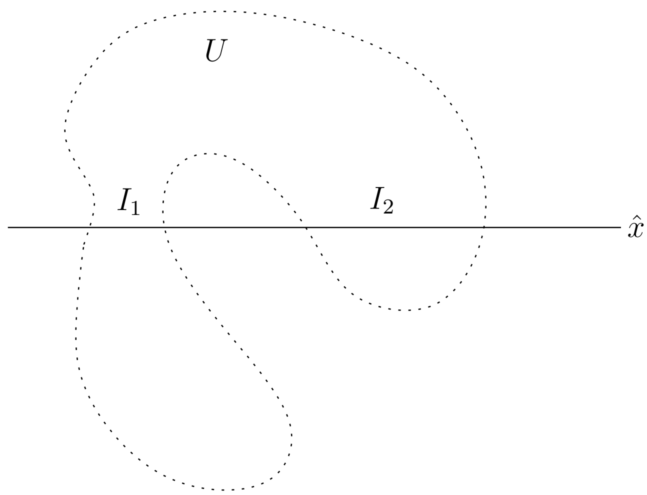
$$\begin{aligned}\|f_i(t) - f(t)\| &\leq \|\psi(x_i) - \psi(x)\| + |t|\|\Theta(x_i) - \Theta(x)\| \\ &\leq \|\psi(x_i) - \psi(x)\| + 2R\|\Theta(x_i) - \Theta(x)\| \\ &< R + 2R \cdot (w/4R) = w.\end{aligned}$$

Niinpä $d(y, \hat{x}) < w$.

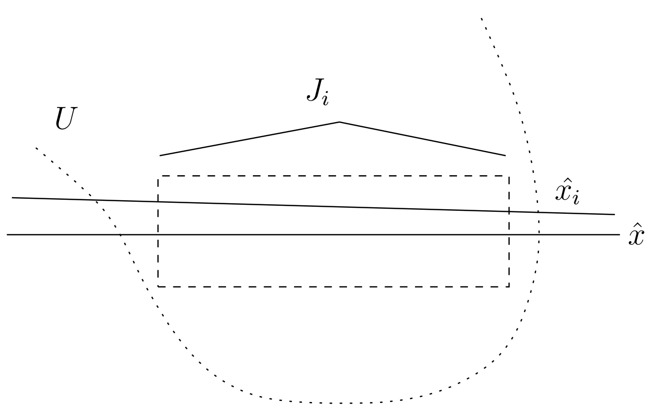
Määritelmä 5.9. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Borel. Määritellään kuvaus $\nu_E : \mathscr{P}(\mathbb{R}^2) \to [0, \infty]$ asettamalla kaikille $A \subset \mathbb{R}^2$

$$\nu_E(A) = \inf_B \int_E \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap B) \, d\mathscr{H}^1 x,$$

missä infimum otetaan yli Borel-joukkojen B, joille $A \subset B$.



Kuva 7. Lemma 5.10: Tason avoin joukko jakaa suoran avoimiin janoihin.



Kuva 8. Lemma 5.10: Pakottamalla suorat $\hat{x}_i$ joukon U sisällä suoran $\hat{x}$ ympäristöön nähdään, että ne leikkaavat joukkoa U lähes saman verran kuin $\hat{x}$.

Lemma 5.10. *Määritelmän 5.9 kuvaus*

$$x \mapsto \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap B), \; x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

on $\mathscr{H}^1$-mitallinen kuvaus kaikille Borel-joukoille $B \subset \mathbb{R}^2$.

Todistus. Lauseen 3.11 mukaan riittää osoittaa, että joukko $\mathscr{A}$, joka koostuu Borel-joukoista $A \subset \mathbb{R}^2$, joille kuvaus

$$x \mapsto \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap A \cap V)$$

on $\mathscr{H}^1$-mitallinen kuvaus jokaiselle avoimelle $V \subset \mathbb{R}^2$, on λ-luokka, joka sisältää avoimet joukot. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ erillisiä. Tällöin jokaiselle avoimelle $V \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathscr{H}^1\left(\hat{x} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap V\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap A_i \cap V),$$

joten myös $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$. Kokoelma $\mathscr{A}$ on suljettu myös komplementoinnin suhteen, sillä jos $A \in \mathscr{A}$, niin kaikille avoimille $V \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap A^c \cap V) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap A^c \cap V \cap D_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap V \cap D_i) - \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap V \cap D_i \cap A)\Big),$$

missä $D_1 = B(0,1)$ ja $D_i = B(0,i) \setminus \overline{B}(0,i-1)$, kun $i \geq 2$.

Näytetään sitten, että avoimet joukot kuuluvat kokoelmaan $\mathscr{A}$. Erityisesti tällöin saadaan $\mathbb{R}^2 \in \mathscr{A}$. Rajoittamattomat avoimet joukot voidaan pilkkoa kuten edellä, joten voidaan olettaa, että avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu. Olkoot $x \in \mathbb{R}^2$ ja (x_i) jono, jolle $x_i \to x$, ja osoitetaan, että

$$\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap U) \leq \varliminf_{i \to \infty} \mathscr{H}^1(\hat{x}_i \cap U),$$

mistä seuraa, että kaikilla $t \geq 0$ joukko

$$\{z \in \mathbb{R}^2 : \mathscr{H}^1(\hat{z} \cap U) > t\}$$

on avoin, mikä riittää mitallisuuteen. Voidaan ensinnäkin olettaa, että $\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap U) > 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Avoin joukko U jakaa suoran $\hat{x}$ erillisiin joukon $\hat{x}$ suhteen avoimiin janoihin $I_1, I_2, \ldots$, joita todella on korkeintaan numeroituvasti äärettömän monta. Koska $\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap U) < \infty$ ja

$$\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap U) = \lim_{j \to \infty} \mathscr{H}^1\left(\bigcup_{i=1}^{j} I_i\right),$$

niin löytyy k, jolle

$$\mathscr{H}^1\left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i\right) \geq \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap U) - \varepsilon.$$

Leikataan välien $I_1, I_2, \ldots, I_k$ päistä hieman pois niin, että saadaan kompaktit välit $J_i \subset I_i$, joille

$$\mathscr{H}^1\left(\bigcup_{i=1}^{k} J_i\right) \geq \mathscr{H}^1\left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i\right) - \varepsilon.$$

Tällöin myös $J = \bigcup_{i=1}^k J_i$ on kompakti, joten minimi

$$w = \min_{y \in J} \operatorname{dist}(y, U^c) > 0$$

on olemassa. Kuvaus $y \mapsto \operatorname{dist}(y, U^c)$ edellä on jatkuva, koska kaikille $y, z \in \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{dist}(y, U^c) = \inf_{a \in U^c} \|y - a\| \leq \inf_{a \in U^c} \|a - z\| + \|y - z\| = \operatorname{dist}(z, U^c) + \|y - z\|$$

ja vastaavasti $\operatorname{dist}(z, U^c) \leq \operatorname{dist}(y, U^c) + \|y - z\|$, joten

$$|\operatorname{dist}(y, U^c) - \operatorname{dist}(z, U^c)| \leq \|y - z\|.$$

Tällöin $B(x, w) \subset U$ kaikilla $x \in J$. Huomautuksen 5.8 mukaan löytyy i_0 siten, että kaikilla $i \geq i_0$ ja kaikilla $y \in \widehat{x_i} \cap U$ pätee $d(y, \hat{x}) < w$. Niinpä kaikilla $i \geq i_0$ pätee

$$\mathscr{H}^1(\widehat{x_i} \cap U) \geq \mathscr{H}^1\left(\bigcup_{i=1}^k J_i\right) \geq \mathscr{H}^1\left(\bigcup_{i=1}^k I_i\right) - \varepsilon \geq \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap U) - 2\varepsilon.$$

Koska kaikille $\varepsilon > 0$ tällainen i_0 löytyy, saadaan väite. □

Lause 5.11. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Borel-joukko. Tällöin Määritelmän 5.9 kuvaus ν_E on Borel-säännöllinen ulkomitta. Jos lisäksi $\mathscr{H}^1(E) < \infty$ ja $\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) = 0$ melkein kaikilla $\theta \in [0, \pi)$, niin ν_E on singulaarinen Radonin ulkomitta.*

Todistus. Lemman 5.10 mukaan integroitava kuvaus on mitallinen, joten myös seuraava määritelmä voidaan asettaa. Määritellään kuvaus μ,

$$\mu(B) = \int_E \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap B)\, d\mathscr{H}^1 x,$$

missä $B \subset \mathbb{R}^2$ on Borel-joukko. Tällöin $\mu(\emptyset) = 0$ ja $\mu(A) \leq \mu(B)$, kun A ja B ovat Borel-joukkoja, joille $A \subset B$. Jos $B_1, B_2, \ldots$ ovat pareittain erillisiä Borelin joukkoja, niin

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\right) = \int_E \mathscr{H}^1\left(\hat{x} \cap \bigcup_{i=1}^\infty B_i\right) d\mathscr{H}^1 x = \sum_{i=1}^\infty \int_E \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap B_i)\, d\mathscr{H}^1 x = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i).$$

Lauseen 1.30 mukaan ν_E, $\nu_E(A) = \inf_{B \supset A} \mu(B)$, on Borel-säännöllinen ulkomitta.

Oletetaan vielä, että $\mathscr{H}^1(E) < \infty$ ja $\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) = 0$ melkein kaikilla $\theta \in [0, \pi)$. Tällöin ensinnäkin jokaisen kompaktin joukon $K \subset \mathbb{R}^2$ ν_E-mitta on äärellistä, sillä

$$\nu_E(K) = \int_E \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap K)\, d\mathscr{H}^1 x \leq \int_E \operatorname{diam}(K)\, d\mathscr{H}^1 x \leq \operatorname{diam}(K) \mathscr{H}^1(E) < \infty.$$

Niinpä Seurauksen 1.27 mukaan ν_E on Radonin ulkomitta. Singulaarisuuteen riittää näyttää, että

$$\mathscr{L}^2(\widetilde{E}) = 0 = \nu_E(\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{E}).$$

Ensimmäinen yhtälö seuraa suoraan Lauseesta 5.7. Vaikkei Suslin-joukon kuten $\widetilde{E}$ komplementti välttämättä ole Suslin, on joukko $\widetilde{E}$ Lauseen 3.9 mukaan ν_E-mitallinen ja siksi myös sen komplementti $\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{E}$ on ν_E-mitallinen. Niinpä Lauseen 1.26 mukaan sen sisältä löytyy Borel-joukko $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{E}$, jolle $\nu_E(C) = \nu_E(\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{E})$. Koska

$$\hat{x} \cap C \subset \hat{x} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{E}) = \emptyset$$

kaikilla $x \in E$, on

$$\nu_E(\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{E}) = \nu_E(C) = \int_E \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap C) \, d\mathscr{H}^1 x = 0.$$

$\square$

Seuraavan lauseen muotoilua kannattaa verrata projektiolauseeseen 4.10.

Lause 5.12. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Borel-joukko, jolle $\mathscr{H}^1(E) < \infty$. Tällöin*

(1) *E on suoristuva, jos ja vain jos jokaiselle Borel-joukolle $B \subset E$, jolle $\mathscr{H}^1(B) > 0$, pätee $\mathscr{L}^2(\widetilde{B}) > 0$, ja*

(2) *E on täysin suoristumaton, jos ja vain jos $\mathscr{L}^2(\widetilde{E}) = 0$.*

Todistus. (2) Lauseen 4.10 mukaan E on täysin suoristumaton, jos ja vain jos $\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) = 0$ melkein kaikilla $\theta \in [0, \pi)$, joka on Lauseen 5.7 mukaan totta, jos ja vain jos $\mathscr{L}^2(\widetilde{E}) = 0$.

(1) Oletetaan ensin, että E on suoristuva, ja olkoon $B \subset E$ Borel-joukko, jolle $\mathscr{H}^1(B) > 0$. Lauseen 4.4 mukaan se on lisäksi suoristuva, joten B ei ole täysin suoristumaton. Siten kohdan (2) mukaan $\mathscr{L}^2(\widetilde{B}) > 0$. Oletetaan toisaalta, että jokaiselle Borel-joukolle $B \subset E$, jolle $\mathscr{H}^1(B) > 0$, pätee $\mathscr{L}^2(\widetilde{B}) > 0$. Lauseen 4.5 mukaan on suoristuva Borel-joukko $F \subset E$ siten, että $E \setminus F$ on täysin suoristumaton. Koska myös $E \setminus F$ on Borel, on kohdan (2) mukaan $\mathscr{L}^2(\widetilde{E \setminus F}) = 0$, joten välttämättä pätee $\mathscr{H}^1(E \setminus F) = 0$. Siten E on suoristuva. $\square$

Lemma 5.13. *Kaikille $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$, joille $|\theta - \gamma| \le \pi$, pätee*

$$\|\overline{\theta} - \overline{\gamma}\| \ge \frac{2}{\pi}|\theta - \gamma|.$$

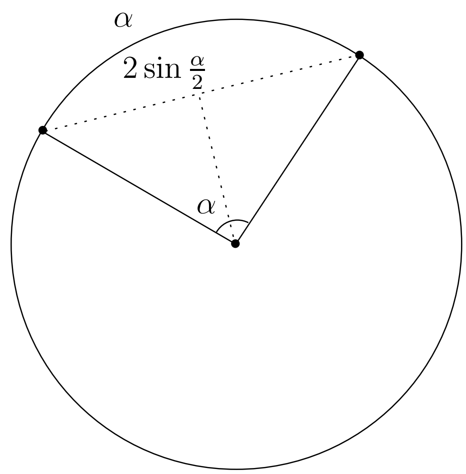
Todistus. Ensinnäkin kaikilla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \ge \frac{2}{\pi}. \tag{9}$$

Perustellaan tämä. Funktion f derivaatta välillä $(0, \frac{\pi}{2})$ on

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha^2}.$$

Jos merkitään $g(\alpha) = \alpha \cos \alpha - \sin \alpha$, niin $g'(\alpha) = -\alpha \sin \alpha < 0$ kaikilla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, joten g on aidosti vähenevä välillä $(0, \frac{\pi}{2})$. Koska $g(0) = 0$, niin $g(\alpha) < 0$ kaikilla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Siksi funktiolla f ei ole ääriarvokohtia välillä $(0, \frac{\pi}{2})$, joten se saavuttaa



Kuva 9. Lemmassa 5.13 todistetaan se ilmeinen tulos, että kahden (yksikkö-)ympyrällä sijaitsevan pisteen välisen etäisyyden suhde niitä yhdistävän lyhemmän ympyränkaaren pituuteen on vähintään $\frac{2}{\pi}$. Suhde on pienimmillään tietenkin silloin, kun pisteet ovat ympyrän vastakkaisia pisteitä.

ääriarvonsa välin päätepisteissä. Koska $\lim_{\alpha\to 0+}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ ja $f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$, niin kohta (9) seuraa. Olkoon sitten $\theta,\gamma\in\mathbb{R}$ sellaisia, että $|\theta-\gamma|\le\pi$. Trigonometristen kaavojen

$$\cos(\theta\pm\gamma)=\cos\theta\cos\gamma\mp\sin\theta\sin\gamma \text{ ja } \cos 2x = 1-2\sin^2 x$$

lisäksi kohtaa (9) käyttämällä nähdään, että

$$\begin{aligned}\|\overline{\theta}-\overline{\gamma}\| &= ((\cos\theta-\cos\gamma)^2+(\sin\theta-\sin\gamma))^{1/2}\\ &= \sqrt{2}(1-(\cos\theta\cos\gamma+\sin\theta\sin\gamma))^{1/2}=\sqrt{2}(1-\cos|\theta-\gamma|)^{1/2}\\ &= 2\sin\frac{|\theta-\gamma|}{2}\ge 2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{|\theta-\gamma|}{2}=\frac{2}{\pi}|\theta-\gamma|.\end{aligned}$$

□

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että ν_E-nollamittaisuus tarkoittaa tietyssä mielessä nollamittaisuutta joukon E kautta kulkevien suorien joukossa.

Lause 5.14. *Olkoon $E\subset\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ Borel-joukko ja olkoon ν_E kuten Määritelmässä 5.9. Jos L on kokoelma suoria siten, että ν_E-melkein kaikille $x\in\mathbb{R}^2$*

$$\#\{l\in L : x\in l\}=\infty,$$

niin $\mathscr{H}^1$-melkein kaikille $x\in E$

$$\#\{\hat{l}\in\widehat{L} : \hat{l}\in x+l_\theta\}=\infty$$

$\mathscr{L}^1$-melkein kaikille $\theta\in[0,\pi)$.

Todistus. Olkoot η ja P kuten Määritelmässä 5.3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ joukko, jolle $\nu_E(A) = 0$. Koska ν_E on Borel-säännöllinen, voidaan olettaa, että A on Borel-joukko. Tällöin siis

$$0 = \nu_E(A) = \int_E \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap A)\, d\mathscr{H}^1 x,$$

joten $\mathscr{H}^1$-melkein kaikilla $x \in E$ pätee $\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap A) = 0$. Osoitetaan, että kaikille $x \in E$, joille $\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap A) = 0$, pätee

$$\mathscr{L}^1(\{\theta \in [0, \pi) : \eta(x, \theta) \in A,\ (x, \theta) \notin P\}) = 0. \tag{10}$$

Kiinnitetään tällainen piste x. Olkoon

$$D = \{\theta \in [0, \pi) : \eta(x, \theta) \in A,\ (x, \theta) \notin P\}.$$

Tehdään vastaoletus $\mathscr{H}^1(D) = \mathscr{L}^1(D) > 0$ ja näytetään, että

$$\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap A) = \mathscr{H}^1(\eta(\{x\} \times D)) = \mathscr{H}^1(\psi(\{p_{\theta^\perp}(x) : \theta \in D\})) > 0.$$

Olkoon $\alpha \in [0, 2\pi)$ se kulma, jolle $x = \|x\|(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Lauseen 5.1 ja Lemman 5.13 nojalla kaikille $\theta, \gamma \in [0, \pi)$, $|\theta - \gamma| \leq \frac{\pi}{2}$, pätee

$$\begin{aligned}
\|p_{\theta^\perp}(x) - p_{\gamma^\perp}(x)\| &= \|p_{\theta + \frac{\pi}{2}}(x) - p_{\gamma + \frac{\pi}{2}}(x)\| \\
&= \frac{\|x\|}{2} \|(\cos(2(\theta + \frac{\pi}{2}) - \alpha), \sin(2(\theta + \frac{\pi}{2}) - \alpha)) - \\
&\quad (\cos(2(\gamma + \frac{\pi}{2}) - \alpha), \sin(2(\gamma + \frac{\pi}{2}) - \alpha))\| \\
&= \frac{\|x\|}{2} \|(\cos 2\theta, \sin 2\theta) - (\cos 2\gamma, \sin 2\gamma)\| \\
&\geq \frac{\|x\|}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 2|\theta - \gamma|.
\end{aligned}$$

Niinpä Lauseen 1.45 mukaan

$$\mathscr{H}^1(\{p_{\theta^\perp}(x) : \theta \in D\}) > 0$$

Tällöin Lemman 5.6 ja Lauseen 1.45 mukaan myös

$$\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap A) = \mathscr{H}^1(\psi(\{p_{\theta^\perp}(x) : \theta \in D\})) > 0,$$

mikä on mahdotonta.

Olkoon L sitten kokoelma suoria, jolle ν_E-melkein kaikille $x \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$\#\{l \in L : x \in l\} = \infty.$$

Tällöin $\nu_E(A) = 0$, kun määritellään

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \#\{l \in L : x \in l\} < \infty\}.$$

Kohdan (10) ja Lauseen 5.4 mukaan tällöin $\mathscr{H}^1$-melkein kaikilla $x \in E$

$$\begin{aligned}0 &= \mathscr{L}^1(\{\theta \in [0,\pi) : \#\{l \in L : \eta(x,\theta) \in l\} < \infty,\ (x,\theta) \notin P\})\\&= \mathscr{L}^1(\{\theta \in [0,\pi) : \#\{l \in L : \widehat{(x + l_\theta)} \in l\} < \infty,\ (x,\theta) \notin P\})\\&= \mathscr{L}^1(\{\theta \in [0,\pi) : \#\{l \in L : \hat{l} \in x + l_\theta\} < \infty),\end{aligned}$$

mikä oli väite. □

6. Päätulos

Lauseessa 4.13 osoitettiin, että suoristuvalle joukolle $F \subset \mathbb{R}^2$, jolle $\mathscr{H}^1(F) < \infty$, pätee $\mathscr{H}^1$-melkein jokaisessa pisteessä $x \in F$

$$\#F \cap (x + l_\theta) < \infty$$

melkein jokaiselle $\theta \in [0,\pi)$. Tässä luvussa vastataan kysymykseen, päteekö Lause 4.13 yleiselle tasojoukolle, jonka $\mathscr{H}^1$-mitta on äärellinen. Osoittautuu, että aito täysin suoristumaton osa muuttaa tilannetta niin, ettei tulos välttämättä ole enää voimassa. Avoimeksi kuitenkin jää, päteekö se täysin suoristumattomille joukoille, joiden $\mathscr{H}^1$-mitta on äärellinen. (Tietyille $\mathscr{H}^1$-äärellismittaisille täysin suoristumattomille tasojoukoille Lause 4.13 on voimassa, katso [12].) Luku perustuu artikkeliin [2].

Lause 6.1. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2$ Borel-joukko, jolle $\mathscr{H}^1(E) < \infty$ ja*

$$\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) = 0$$

melkein kaikilla $\theta \in [0,\pi)$. Tällöin on suoristuva Borel-joukko F, $\mathscr{H}^1(F) < \infty$, jolle $\mathscr{H}^1$-melkein kaikille $x \in E$

$$\#F \cap (x + l_\theta) = \infty$$

melkein kaikille $\theta \in [0,\pi)$.

Jos $E \subset \mathbb{R}^2$ on täysin 1-suoristumaton Borel-joukko ja $\mathscr{H}^1(E) < \infty$, niin Lauseen 6.1 oletukset ovat voimassa Lauseen 4.10 perusteella.

Todistuksen idea on peittää duaalijoukko $\widetilde{E}$ suorilla äärettömän monta kertaa niin, että Lauseen 5.14 oletukset tulevat voimaan. Samalla on varmistettava, ettei näiden suorien duaalipisteiden joukolle tule liikaa pituutta. Todistuksen keskeisimmät kohdat ovat Lauseissa 6.5 ja 6.7.

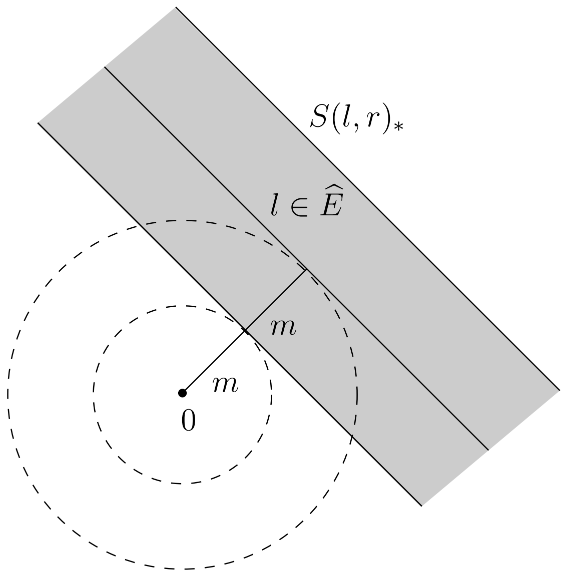
Määritelmä 6.2. Olkoon $x = s\overline{\theta^\perp}$ joillain $s \in \mathbb{R}$ ja $\theta \in [0,\pi)$. Tällöin suora $l = x + l_\theta$ ja luku $r > 0$ määräävät yhdensuuntaisten suorien joukon

$$S(l,r) = \{t\overline{\theta^\perp} + l_\theta : t \in [s-r, s+r]\},$$

jota kutsutaan *nauhaksi*. Nauhaan S kuuluvien suorien pisteille käytetään merkintää

$$S_* = \bigcup_{l \in S} l \subset \mathbb{R}^2.$$

Huomaa, että nauhat ovat aina suljettuja ja siten Borel-joukkoja. Lemmassa 6.3 osoitetaan, ettei kapeiden nauhojen duaalijanat voi olla kovin pitkiä. Tätä tarvitaan vasta juuri ennen Lauseen 6.1 todistusta Huomautuksessa 6.8. Varsinainen konstruktio alkaa Lemmasta 6.4.



KUVA 10. Nauhat pidetään poissa origon läheltä, jottei niiden duaalijanojen pituus kasva arvaamattomasti.

Lemma 6.3. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ rajoitettu. Tällöin on $m > 0$, jolle*

$$B(0,2m) \cap \widetilde{E} = \emptyset.$$

Erityisesti kaikille $l \in \widehat{E}$ ja kaikille r, $0 < r \leq m$, on voimassa

$$S(l,r)_* \cap B(0,m) = \emptyset.$$

Lisäksi jos $0 < r \leq m$, niin joukon $S = S(l,r)$ duaalipisteille $\widehat{S}$ pätee

$$\mathscr{H}^1(\widehat{S}) \leq 2r/m^2.$$

Todistus. Koska E on rajoitettu, on $M > 0$ siten, että $\|x\| \leq M$ kaikilla $x \in E$. Lauseen 5.4 perusteella

$$\operatorname{dist}(0,\hat{x}) = \|\psi(x)\| = \|x\|^{-1} \geq 1/M$$

kaikilla $x \in E$, missä $\psi(x) = -x\|x\|^{-2}$. Siispä valinta $m = 1/2M$ kelpaa, jotta $B(0,2m) \cap \widetilde{E} = \emptyset$. Jos nyt on $l \in \widehat{E}$ ja $0 < r \leq m$, niin kaikille suorille $k \in \underline{S}(l,r)$ on $\operatorname{dist}(k,0) \geq m$. Siksi $S(l,r)_* \cap B(0,m) = \emptyset$. Oletetaan sitten, että $l = s\overline{\theta^\perp} + l_\theta$

joillakin $s \in \mathbb{R}$ ja $\theta \in [0, \pi)$. Joukko $\widehat{S}$, $S = S(l, r)$, on jana, joten sen $\mathscr{H}^1$-mitta on yksinkertaisesti janan pituus. Siksi

$$\mathscr{H}^1(\widehat{S}) = \left| \frac{1}{s+r} - \frac{1}{s-r} \right| \leq \frac{2r}{m^2}.$$

$\square$

Lemma 6.4. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu joukko, jolle $A \subset l$ jollekin suoralle l, ja olkoon $r > 0$. Tällöin on äärellinen määrä erillisiä suljettuja kiekkoja $B_i = \overline{B}(x_i, r)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, niin, että $x_i \in A$ kaikilla i ja*

$$\mathscr{H}^1(A) \leq 3\mathscr{H}^1\left(A \cap \bigcup_{i=1}^m B_i \right).$$

Todistus. Näytetään, että on suljettujen kiekkojen kokoelmat $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \ldots, \mathscr{D}_N$ niin, että kiekkojen keskipisteet ovat joukossa A, niiden säde on r, $A \subset \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{D \in \mathscr{D}_i} D$ ja $D \cap D' = \emptyset$, kun $D, D' \in \mathscr{D}_i$ ovat eri kiekkoja. (Besicovitchin peitelausetta 2.1 voitaisiin hyvin käyttää tässä, mutta väite on paljon yksinkertaisempi kuin yleisessä tapauksessa.) Käytetään tämän todistuksen ajan merkintää $2\overline{B}(x, r) = \overline{B}(x, 2r)$. Konstruktio on induktiivinen: Olkoon $A_0 = A$ ja olkoon $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Jos $A_{i-1} = \emptyset$, niin koko konstruktio voidaan lopettaa. Jos $A_{i-1} \neq \emptyset$, niin löytyy $x_{i,1} \in A_{i-1}$. Olkoon $D_{i,1} = \overline{B}(x_{i,1}, r)$. Jatketaan valitsemalla pisteet $x_{i,k} \in A_{i-1}$, $k = 2, 3, \ldots$, joille

$$\|x_{i,k} - x_{i,j}\| > 2r \ \forall j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Jos tällaista ei löydy, niin lopetetaan pisteiden etsintä. Näin saadaan erillisiä suljettuja kiekkoja $D_{i,k}$, $k = 1, 2, \ldots, k_i$, joille $A_{i-1} \subset \bigcup_{k=1}^{k_i} 2D_{i,k}$. Valintoja voidaan tehdä ainoastaan äärellinen määrä, koska $A_{i-1} \subset A$ on rajoitettu. Lopuksi määritellään $\mathscr{D}_i = \{D_{i,1}, D_{i,2}, \ldots, D_{i,k_i}\}$ ja

$$A_i = A_{i-1} \setminus \bigcup_{k=1}^{k_i} D_{i,k} = A \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \bigcup_{D \in \mathscr{D}_j} D$$

ja siirrytään seuraavalle kierrokselle.

Osoitetaan, että ehto $A_{i-1} = \emptyset$ tulee voimaan jollain i. Arvataan, että ehto tulee voimaan viimeistään, kun $i = 4$ eli $N = 3$ riittää. Tehdään vastaoletus: on piste $x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^3 \bigcup_{D \in \mathscr{D}_i} D$. Olkoot $D_i = \overline{B}(y_i, r) \in \mathscr{D}_i$, $i = 1, 2, 3$, sellaisia, joille $x \in 2D_i$. Tällöin $r < \|x - y_i\| \leq 2r$ kaikilla i. Nyt y_1 ja y_2 tulevat välttämättä valituiksi pisteen x eri puolilta: Ellei, niin y_2 on pisteiden y_1 ja x (tai y_1 on pisteiden y_2 ja x) välissä, jolloin

$$\|x - y_2\| = \|x - y_1\| - \|y_2 - y_1\| \leq 2r - r = r.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä $x \notin D_2$. Entä y_3? Se on välttämättä pisteiden y_1 ja y_2 välissä: Muutoin y_3 on pisteen y_1 (tai pisteen y_2) ”takana”, joten

$$\|x - y_3\| = \|x - y_1\| + \|y_1 - y_3\| > r + r = 2r.$$

Tämäkin on mahdotonta, koska oletettiin, että $x \in 2D_3$. Huomaa, että todella pätee $\|y_1 - y_3\| > r$ ja $\|y_2 - y_3\| > r$. Koska $x \neq y_3$, voidaan vielä olettaa, että x on pisteiden y_1 ja y_3 välissä, jolloin pisteet ovat suoralla "järjestyksessä" y_1, x, y_3 ja y_2. Niinpä

$$\begin{aligned}
\|y_3 - x\| &= \|y_1 - y_3\| - \|y_1 - x\| \\
&= \|y_1 - y_2\| - \|y_3 - y_2\| - \|y_1 - x\| \\
&= \|y_1 - x\| + \|y_2 - x\| - \|y_3 - y_2\| - \|y_1 - x\| \\
&= \|y_2 - x\| - \|y_3 - y_2\| < 2r - r = r.
\end{aligned}$$

Siten $x \in D_3$, mikä on ristiriita.

Loppu seuraakin tästä. Koska

$$\mathscr{H}^1(A) \leq \mathscr{H}^1\Bigg(A \cap \bigcup_{i=1}^{3} \bigcup_{D \in \mathscr{D}_i} D\Bigg) \leq \sum_{i=1}^{3} \mathscr{H}^1\Bigg(A \cap \bigcup_{D \in \mathscr{D}_i} D\Bigg),$$

niin välttämättä jollain $i \in \{1, 2, 3\}$ pätee

$$\mathscr{H}^1(A) \leq 3\mathscr{H}^1\Bigg(A \cap \bigcup_{D \in \mathscr{D}_i} D\Bigg).$$

Näin väite on todistettu. $\square$

Lause 6.5. *Olkoon ν tason $\mathbb{R}^2$ singulaarinen Radonin ulkomitta ja olkoon L kokoelma suoria siten, että $\mathscr{H}^1(B \cap l) > 0$ jollain $l \in L$ aina, kun B on Borel-joukko, jolle $\nu(B) > 0$. Tällöin jokaiselle Borel-joukolle B, jolle $\nu(B) > 0$, on suora $l \in L$ siten, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on $r > 0$, jolle*

$$2r < \varepsilon \nu(S(l, r)_* \cap B).$$

Todistus. Olkoon $B \subset \mathbb{R}^2$ Borel-joukko, jolle $\nu(B) > 0$. Lauseiden 2.11 ja 2.9 mukaan

$$\lim_{r \to 0} \frac{\nu(\overline{B}(x, r))}{r^2} = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{r \to 0} \frac{\nu(B \cap \overline{B}(x, r))}{\nu(\overline{B}(x, r))} = 1 \tag{11}$$

ν-melkein kaikilla $x \in B$. Väitteeseen riittää etsiä rajoitettu Borel-joukko $B' \subset B$, jolle $\nu(B') > 0$ ja kohdan (11) rajankäynnit ovat tasaisia. Esimerkiksi jälkimmäisen rajankäynnin kohdalla halutaan, että kaikilla $m < 1$ on $R > 0$, jolle kaikilla $0 < r < R$ pätee

$$\frac{\nu(B \cap \overline{B}(x, r))}{\nu(\overline{B}(x, r))} > m$$

kaikilla $x \in B'$ yhtä aikaa. Jos nimittäin tällainen B' löytyy, seuraa väite suoraviivaisesti: Koska $\nu(B') > 0$, löytyy suora $l \in L$, jolle $\mathscr{H}^1(B' \cap l) > 0$, ja itse asiassa pätee $0 < \mathscr{H}^1(B' \cap l) < \infty$, sillä B' on rajoitettu. Olkoon sitten $\varepsilon > 0$. Tällöin on $r > 0$, jolle kaikilla $x \in B'$

$$\nu(\overline{B}(x,r)) > \frac{3 \cdot 8r^2}{\varepsilon \mathscr{H}^1(B' \cap l)} \text{ ja } \nu(B \cap \overline{B}(x,r)) > \frac{1}{2}\nu(\overline{B}(x,r)),$$

joten

$$\nu(B \cap \overline{B}(x,r)) > \frac{3 \cdot 4r^2}{\varepsilon \mathscr{H}^1(B' \cap l)}$$

kaikilla $x \in B'$. Lemman 6.4 mukaan löytyy erilliset suljetut kiekot $B_1, B_2, \ldots, B_m$, joiden keskipisteet ovat joukossa $B' \cap l$ ja joiden säde on r. Lisäksi niille on voimassa

$$\mathscr{H}^1(B' \cap l) \leq 3\mathscr{H}^1\left((B' \cap l) \cap \bigcup_{i=1}^m B_i\right) \leq 3m2r.$$

Kiekkojen lukumäärälle pätee siis $m \geq \frac{\mathscr{H}^1(B' \cap l)}{3 \cdot 2r}$, joten erillisyyttä käyttäen saadaan

$$\nu\left(B \cap \bigcup_{i=1}^m B_i\right) = \sum_{i=1}^m \nu(B \cap B_i) > \frac{\mathscr{H}^1(B' \cap l)}{3 \cdot 2r} \cdot \frac{3 \cdot 4r^2}{\varepsilon \mathscr{H}^1(B' \cap l)} = \frac{2r}{\varepsilon}.$$

Koska $B \cap \bigcup_{i=1}^m B_i \subset B \cap S(l,r)_*$, niin väite seuraa.

Pitää siis vain perustella, että tällainen B' löytyy. Koska $\nu(B \cap B(0,n)) < \infty$, $B \cap B(0,n)$ on Borel-joukko kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\lim_{n\to\infty} \nu(B \cap B(0,n)) = \nu(B) > 0,$$

niin valitsemalla riittävän iso n saadaan Borel-joukko $A = B \cap B(0,n)$, jolle $0 < \nu(A) < \infty$. Olkoon sitten

$$A' = \{x \in A : D(\nu, \mathscr{L}^2, x) \text{ määritelty ja } D(\nu, \mathscr{L}^2, x) = \infty\},$$

jolloin A' on Borel-joukko Huomautuksen 2.5 perusteella. Kohdan (11) mukaan $\nu(A') = \nu(A) > 0$. Määritellään kaikilla $n, k \in \mathbb{N}$ joukko

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= \left\{x \in A' : \frac{\nu(\overline{B}(x,r))}{r^2} \geq k \text{ kaikilla } r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/n]\right\} \\ &= A' \cap \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap (0,1/n]} \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{\nu(\overline{B}(x,r))}{r^2} \geq k\right\}, \end{aligned}$$

joka on Borel jälleen Huomautuksen 2.5 perusteella. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$A' = \bigcup_{n=1}^\infty A_{n,k}, \ A_{1,k} \subset A_{2,k} \subset \ldots,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_{n,k}) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_{n,k}\right) = \nu(A') < \infty.$$

Valitaan sitten indeksi $n_k \in \mathbb{N}$, jolle

$$\nu(A_{n_k,k}) \geq (1 - 2^{-k-1})\nu(A')$$

eli

$$\nu(A' \setminus A_{n_k,k}) \leq 2^{-k-1}\nu(A').$$

Niinpä määrittelemällä

$$A'' = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k,k}$$

saadaan

$$\begin{aligned}\nu(A'') = \nu(A') - \nu(A' \setminus A'') &\geq \nu(A') - \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A' \setminus A_{n_k,k}) \\ &\geq \nu(A') - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\nu(A') = \frac{1}{2}\nu(A') > 0.\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\lim_{r \to 0} \frac{\nu(\overline{B}(x,r))}{r^2} = \infty$$

tasaisesti joukossa $A'' \subset B$. Perustelematta on siis enää, että myös toinen kohdan (11) rajankäynneistä saadaan tasaiseksi jossain joukossa $A''' \subset A''$, jolle $\nu(A''') > 0$. Tällainen löytyy samanlaisella konstruktiolla kuin edellä ja todistus on valmis, kun asetetaan $B' = A'''$. $\square$

Seuraava lemma sanoo, että duaalisuoria on ulkomitan ν_E kannalta vain vähän yksittäiseen suuntaan. Sen vuoksi ulkomitan ν_E tapauksessa Lauseen 6.5 suorajoukkona ei tarvitse käyttää koko duaalijoukkoa $\widehat{E}$. Sovitaan, että $E_\theta = E \cap l_\theta$ kaikilla $\theta \in [0, \pi)$.

Lemma 6.6. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Borel-joukko, jolle $\mathscr{H}^1(E) < \infty$ ja $\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) = 0$ melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$, ja olkoon ν_E kuten Määritelmässä 5.9. Tällöin $\nu_E(\widetilde{E_\theta}) = 0$ kaikilla θ. Erityisesti Lauseen 6.5 mukaan jokaiselle Borel-joukolle B, jolle $\nu_E(B) > 0$, ja jokaiselle numeroituvalle joukolle $\Theta \subset [0, \pi)$ on suora $l \in L$,*

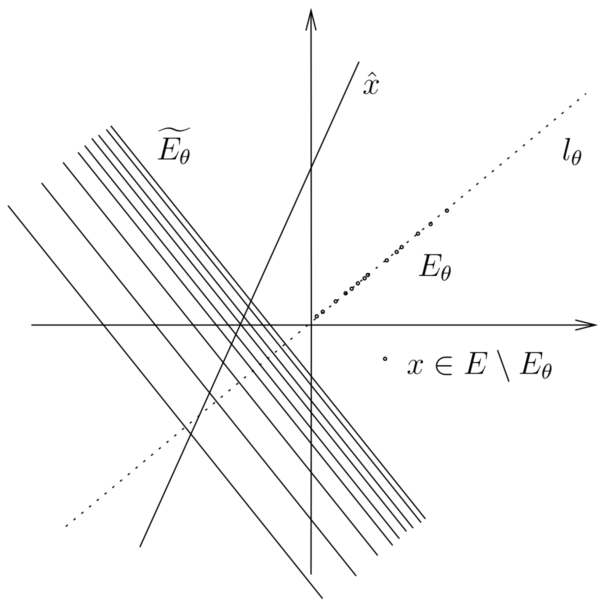
$$L = \left\{ \hat{x} : x \in E \setminus \bigcup_{\theta \in \Theta} l_\theta \right\},$$

siten, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on $r > 0$, jolle

$$2r < \varepsilon \nu_E(S(l, r)_* \cap B).$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että

$$\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap \widetilde{E_\theta}) = 0 \text{ kaikilla } x \in E \setminus E_\theta. \tag{12}$$



Kuva 11. Lemma 6.6.

Tehdään vastaoletus: on $x \in E \setminus E_\theta$, jolle $\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap \widetilde{E_\theta}) > 0$. Lauseen 5.4 perusteella $\hat{x}$ ja $l_{\theta^\perp}$ eivät ole yhdensuuntaisia, joten Lauseen 4.8 todistuksen perusteella $\mathscr{H}^1(p_\theta(\hat{x} \cap \widetilde{E_\theta})) > 0$. Niinpä Fubinin lauseen 1.35 ja muuttujanvaihtolauseen 1.36 mukaan

$$\mathscr{L}^2(\widetilde{E_\theta}) = \int_{l_\theta} \mathscr{H}^1(\widetilde{E_\theta} \cap (b + l_{\theta^\perp}))\, d\mathscr{H}^1 b = \infty,$$

koska $\mathscr{H}^1(\widetilde{E_\theta} \cap (b + l_{\theta^\perp})) = \infty$ kaikille $b \in p_\theta(\hat{x} \cap \widetilde{E_\theta})$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä $\widetilde{E_\theta} \subset \widetilde{E}$ ja Lauseen 5.7 mukaan $\mathscr{L}^2(\widetilde{E}) = 0$. Vastaoletus on väärä ja (12) pätee.

Nyt Lauseen 5.5 mukaan $\widetilde{E_\theta}$ on Suslin-joukko ja siksi myös ν_E-mitallinen, joten Lauseen 1.26 mukaan on Borel-joukko $B \subset \widetilde{E_\theta}$, jolle $\nu_E(B) = \nu_E(\widetilde{E_\theta})$. Tietenkin pätee $\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap B) = 0$ kaikilla $x \in E \setminus E_\theta$. Lisäksi joukko E_θ on suoristuva, joten $\mathscr{H}^1(E_\theta) = 0$: ellei, niin Lauseen 4.8 mukaan $\mathscr{H}^1(p_\alpha(E)) \geq \mathscr{H}^1(p_\alpha(E_\theta) > 0$ melkein kaikilla $\alpha \in [0, \pi)$. Niinpä

$$\begin{aligned}\nu_E(\widetilde{E_\theta}) = \nu_E(B) &= \int_E \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap B)\, d\mathscr{H}^1 x \\ &= \int_{E_\theta} \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap B)\, d\mathscr{H}^1 x + \int_{E \setminus E_\theta} \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap B)\, d\mathscr{H}^1 x = 0.\end{aligned}$$

Loppuosaa varten olkoon B Borel-joukko, jolle $\nu_E(B) > 0$. Lauseen 5.11 mukaan ν_E on singulaarinen Radonin ulkomitta, joten riittää näyttää, että myös L toteuttaa

Lauseen 6.5 oletukset. Nyt alkuosan perusteella

$$\nu_E(B \setminus \bigcup_{\theta\in\Theta} \widetilde{E_\theta}) \geq \nu_E(B) - \sum_{\theta\in\Theta} \nu_E(\widetilde{E_\theta}) = \nu_E(B) > 0.$$

Lauseen 1.26 mukaan on Borel-joukko $B' \subset B \setminus \bigcup_{\theta\in\Theta} \widetilde{E_\theta}$, jolle

$$0 < \nu_E(B \setminus \bigcup_{\theta\in\Theta} \widetilde{E_\theta}) = \nu_E(B') = \int_E \mathscr{H}^1(\hat{x} \cap B')\, d\mathscr{H}^1 x,$$

joten löytyy $x \in E$, jolle $\mathscr{H}^1(\hat{x} \cap B') > 0$. Koska kaikilla $x \in \bigcup_{\theta\in\Theta} E_\theta$ pätee $\hat{x} \cap B' = \emptyset$, on x välttämättä sellainen, jolle $\hat{x} \in L$. Koska $B' \subset B \setminus \bigcup_{\theta\in\Theta} \widetilde{E_\theta}$, niin väite seuraa Lauseesta 6.5. □

Lause 6.7. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Borel-joukko, jolle $\mathscr{H}^1(E) < \infty$ ja $\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) = 0$ melkein kaikilla $\theta \in [0, \pi)$. Olkoon ν_E kuten Määritelmässä 5.9 ja olkoon*

$$L = \left\{\hat{x} : x \in E \setminus \bigcup_{\theta\in\Theta} l_\theta\right\},$$

missä $\Theta \subset [0, \pi)$ on numeroituva. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ on numeroituva kokoelma nauhoja $S_i = S(l_i, r_i)$, missä $i \in \mathbb{N}$, $l_i \in L$ ja $r_i > 0$, joille

$$\nu_E\left(\widetilde{E} \setminus \bigcup_i S_{i*}\right) = 0,$$

ja

$$\sum_i 2r_i < \varepsilon.$$

Nauhat voidaan lisäksi valita niin, ettei eri nauhoilla ole yhteisiä suoria, jolloin myöskään eri nauhojen duaalijanoilla ei ole yhteisiä pisteitä.

Todistus. Olkoon $B \subset \mathbb{R}^2$ Borel-joukko, jolle $\nu_E(B) < \infty$. Näytetään ensin, että nauhat löydetään, kun vaaditaankin, että

$$\nu_E\left(B \setminus \bigcup_i S_{i*}\right) = 0$$

mutta pidetään väite muuten ennallaan. Merkitään $\nu = \nu_E$ esityksen selventämiseksi. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoot $B_0 = B$, $\Theta_0 = \Theta$ ja $L_0 = L$. Kullakin askeleella $i = 1, 2, \ldots$ toimitaan seuraavasti: Jos $\nu(B_{i-1}) = 0$, niin voidaan lopettaa. Muutoin määritellään

$$\mathscr{S}_i = \{S(l, r) : l \in L_{i-1},\ r > 0,\ 2r < \varepsilon\nu(S(l, r)_* \cap B_{i-1})\},$$

jolloin Lemman 6.6 mukaan $\mathscr{S}_i \neq \emptyset$. Niinpä oletuksen $\nu(B) < \infty$ perusteella löytyy nauha $S_i = S(l_i, r_i) \in \mathscr{S}_i$, jolle

$$\nu(S_{i*} \cap B_{i-1}) \geq \frac{1}{2} \sup_{S\in\mathscr{S}_i} \nu(S_* \cap B_{i-1}). \tag{13}$$

Olkoon $x_i \in E$ se piste, jolle $l_i = \hat{x}_i$, ja olkoon $\theta_i \in [0, \pi)$ se kulma, jolle $x_i \in l_{\theta_i}$. Lopuksi määritellään

$$B_i = B_{i-1} \setminus S_{i*} = B \setminus \bigcup_{j=1}^{i} S_{j*}, \;\; \Theta_i = \Theta_{i-1} \cup \{\theta_i\}$$

ja

$$L_i = \left\{ \hat{x} : x \in E \setminus \bigcup_{\theta \in \Theta_i} l_\theta \right\}.$$

Jos $\nu(B_i) = 0$ jollain $i \in \mathbb{N}$, niin konstruktio päättyy ja väite seuraa, kuten hetken päästä näytetään. Oletetaan ensin kuitenkin, ettei äärellinen määrä askelia riitä, ja merkitään

$$B_\infty = B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{i*}$$

Pitää siis osoittaa, että $\nu(B_\infty) = 0$. Tehdään vastaoletus: $\nu(B_\infty) > 0$. Määritellään sitten

$$L_\infty = \left\{ \hat{x} : x \in E \setminus \bigcup_{\theta \in \cup_i \Theta_i} l_\theta \right\}$$

ja

$$\mathscr{S}_\infty = \{S(l, r) : l \in L_\infty, \;\; r > 0, \;\; 2r < \varepsilon \nu(S(l, r)_* \cap B_\infty)\},$$

jolloin Lemman 6.6 mukaan $\mathscr{S}_\infty \neq \emptyset$. Olkoon $S_\infty \in \mathscr{S}_\infty$. Koska

$$L_\infty \subset \ldots \subset L_1 \subset L_0 = L$$

ja

$$\nu(S(l, r)_* \cap B_\infty) \leq \nu(S(l, r)_* \cap B_i) \leq \nu(S(l, r)_* \cap B_{i-1})$$

kaikilla $i = 1, 2, \ldots$, $l \in L$ ja $r > 0$, niin

$$\mathscr{S}_\infty \subset \ldots \subset \mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}_1.$$

Niinpä $S_\infty \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{S}_i$, joten valinnan (13) perusteella kaikille $i = 1, 2, \ldots$

$$\nu(S_{i*} \cap B_{i-1}) \geq \frac{1}{2} \nu(S_{\infty *} \cap B_{i-1}) \geq \frac{1}{2} \nu(S_{\infty *} \cap B_\infty) > 0.$$

Tällöin joukkojen $S_{i*} \cap B_{i-1}$ erillisyydestä seuraa

$$\nu(B) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (S_{i*} \cap B_{i-1}) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(S_{i*} \cap B_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \nu(S_{\infty *} \cap B_\infty) = \infty,$$

mikä on mahdotonta, sillä oletettiin, että $\nu(B) < \infty$. Näin ollen $\nu(B_\infty) = 0$.

Nyt on siis näytetty, että löytyy numeroituva kokoelma nauhoja $S_i = S(l_i, r_i)$, $l_i \in L$ ja $r_i > 0$, joille

$$\nu\left(B \setminus \bigcup_i S_{i*} \right) = 0.$$

Lauseen 5.4 mukaan $l_i \parallel l_{\theta_i^\perp}$ kaikilla i. Toisaalta $x_i \in E \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} l_{\theta_j}$, joten $\theta_i \neq \theta_j$, eivätkä l_i ja l_j voi olla yhdensuuntaisia, kun $j = 1, 2, \ldots, i-1$. Siksi $S_i \cap S_j = \emptyset$, kun $j = 1, 2, \ldots, i-1$, joten eri nauhoilla ei ole yhteisiä suoria. Lisäksi joukkojen $S_{i*} \cap B_{i-1}$ erillisyyden perusteella

$$\sum_i 2r_i \leq \sum_i \varepsilon\nu(S_{i*} \cap B_{i-1}) = \varepsilon\nu\left(B \cap \bigcup_i S_{i*}\right) = \varepsilon\nu(B).$$

***

Tarkastellaan seuraavaksi alkuperäistä väitettä. Koska ν_E on σ-äärellinen Borel-säännöllinen ulkomitta, löytyy numeroituva kokoelma Borel-joukkoja B_i, $i = 1, 2, \ldots$, joille $\mathbb{R}^2 = \bigcup_i B_i$ ja $\nu(B_i) < \infty$ kaikilla i. Todistuksen alkuosaa voidaan soveltaa näihin. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoot jälleen $\Theta_0 = \Theta$ ja $L_0 = L$. Etsitään nauhoja taas askelittain. Jokaisessa vaiheessa $i = 1, 2, \ldots$ löytyy alkuosan perusteella numeroituva kokoelma nauhoja $S_{i,j} = S(l_{i,j}, r_{i,j})$, missä $l_{i,j} \in L_{i-1}$ ja $r_{i,j} > 0$, joille

$$\nu\left(B_i \setminus \bigcup_j S_{i,j*}\right) = 0, \ \sum_j 2r_{i,j} < 2^{-i}\varepsilon.$$

Kuten edellä näytettiin, voidaan myös vaatia, ettei joukon $\mathscr{S}_i = \{S_{i,j}\}_j$ eri nauhoilla ole yhteisiä suoria. Olkoon $x_{i,j} \in E$ se piste, jolle $l_{i,j} = \widehat{x_{i,j}}$, ja olkoon $\theta_{i,j} \in [0, \pi)$ se kulma, jolle $x_{i,j} \in l_{\theta_{i,j}}$. Määritellään sitten

$$\Theta_i = \Theta_{i-1} \cup \{\theta_{i,1}, \theta_{i,2}, \ldots\}, \ L_i = \left\{\hat{x} : x \in E \setminus \bigcup_{\theta \in \Theta_i} l_\theta\right\}.$$

Huomaa erityisesti, että Θ_i pysyy numeroituvana.

Haluttu numeroituva nauhojen kokoelma on $\mathscr{S} = \bigcup_i \mathscr{S}_i = \{S_{i,j}\}_{i,j}$: Ensinnäkin

$$\nu\left(\widetilde{E} \setminus \bigcup_{S \in \mathscr{S}} S\right) = \nu\left(\widetilde{E} \setminus \bigcup_i \bigcup_j S_{i,j}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu\left(B_i \setminus \bigcup_j S_{i,j}\right) = 0$$

ja

$$\sum_{i,j} 2r_{i,j} = \sum_i \sum_j 2r_{i,j} \leq \sum_i 2^{-i}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Pitää enää näyttää, ettei joukon $\mathscr{S}$ eri nauhoilla ole yhteisiä suoria. Olkoot siis $S_{i,j}, S_{k,l} \in \mathscr{S}$ eri nauhoja. Jos $i = k$, niin valinnan perusteella $S_{i,j} \cap S_{k,l} = \emptyset$. Muutoin oletetaan, että $i > k$, ja tehdään vastaoletus: $S_{i,j} \cap S_{k,l} \neq \emptyset$. Nauhat koostuvat yhdensuuntaisista suorista, joten vastaoletuksen nojalla $l_{i,j} \parallel l_{k,l}$. Tällöin Lauseen 5.4 mukaan

$$l_{\theta_{i,j}^\perp} \parallel l_{i,j} \parallel l_{k,l} \parallel l_{\theta_{k,l}^\perp},$$

joten $\theta_{i,j} = \theta_{k,l}$. Kuitenkin $x_{i,j} \in E \setminus \bigcup_{\theta \in \Theta_{i-1}} l_\theta$ ja $\theta_{k,l} \in \Theta_{i-1}$, sillä $i > k$. Siispä $x_{i,j} \in l_{\theta_{i,j}}$ ei voi kuulua suoralle $l_{\theta_{i,j}}$, mikä on ristiriita. Tämä päättää todistuksen. $\square$

Huomautus 6.8. Ennen Lauseen 6.1 todistusta on perusteltava, että nauhoista saadaan sellaisia, että Lemman 6.3 arviota voidaan soveltaa niihin, kun E on rajoitettu. Olkoon siis $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ rajoitettu Borel-joukko, jolle $\mathscr{H}^1(E) < \infty$ ja $\mathscr{H}^1(p_\theta(E)) = 0$ melkein kaikille $\theta \in [0, \pi)$. Tällöin Lemman 6.3 mukaan on $m > 0$, jolle kaikilla $0 < r \leq m$ ja kaikilla $l \in \widehat{E}$

$$\mathscr{H}^1(\widehat{S(l,r)}) \leq 2r/m^2. \tag{14}$$

Lauseen 6.5 todistuksesta nähdään, että voidaan hyvin vaatia, että saatava nauha $S(l,r)$ on riittävän kapea, toisin sanoen $0 < r \leq m$. Sama vaatimus voidaan silloin luonnollisesti esittää myös Lemmassa 6.6, jota Lause 6.7 käyttää. Siten se "periytyy" myös sille ja siksi voidaan olettaa, että edellä mainituin oletuksin jokaisen Lauseen 6.7 antaman nauhan duaalijanalle on voimassa arvio (14).

Lauseen 6.1 todistus. Voidaan hyvin olettaa, että $0 \notin E$. Olkoon $E_n = E \cap B(0,n)$ jokaisella $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Jokaiselle E_n löytyy Lemman 6.3 mukaan luku $m_n > 0$, jolle

$$\mathscr{H}^1(\widehat{S(l,r)}) \leq m_n^{-2} 2r,$$

kun $l \in \widehat{E_n}$ ja $r \leq m_n$. Huomaa, että jokainen joukko E_n toteuttaa Lauseen 6.7 oletukset.

Totuttuun tapaan konstruktio on induktiivinen. Olkoon $\Theta_0 = \emptyset$. Ulommaisin iteraatio tehdään indeksin $n = 1, 2, \ldots$ suhteen. Olkoon $\Theta_{n,0} = \Theta_{n-1}$ ja olkoon

$$L_{n,0} = \left\{ \hat{x} : x \in E_n \setminus \bigcup_{\theta \in \Theta_{n-1}} l_\theta \right\}.$$

Tämän sisällä tehdään iteraatio indeksin $i = 1, 2, \ldots$ suhteen. Lauseen 6.7 mukaan löytyy nauhat $S_{n,i,j} = S(l_{n,i,j}, r_{n,i,j})$, $l_{n,i,j} \in L_{n,i-1}$, $j = 1, 2, \ldots$, joille

$$\nu_{E_n}\left(\widetilde{E_n} \setminus \bigcup_j S_{n,i,j*} \right) = 0, \ \sum_j 2r_{n,i,j} < m_n^2 2^{-n} 2^{-i}.$$

Ne voidaan myös valita niin, ettei eri nauhoilla ole yhteisiä suoria, mikä perusteltiin Lauseessa 6.7. Huomautuksen 6.8 mukaan voidaan lisäksi vaatia, että $r_{n,i,j} \leq m_n$, jolloin Lemman 6.3 mukaan

$$\mathscr{H}^1(\widehat{S_{n,i,j}}) \leq m_n^{-2} 2r_{n,i,j},$$

joten

$$\sum_j \mathscr{H}^1(\widehat{S_{n,i,j}}) \leq m_n^{-2} \sum_j 2r_{n,i,j} \leq 2^{-n} 2^{-i}. \tag{15}$$

Olkoon sitten $x_{n,i,j} \in E_n$ se piste, jolle $\widehat{x_{n,i,j}} = l_{n,i,j}$ ja $\theta_{n,i,j} \in [0,\pi)$ se kulma, jolle $x_{n,i,j} \in l_{\theta_{n,i,j}}$. Määritellään i-kierroksen päätteeksi

$$\Theta_{n,i} = \Theta_{n,i-1} \cup \{\theta_{n,i,1}, \theta_{n,i,2}, \dots\},\ L_{n,i} = \left\{\hat{x} : x \in E_n \setminus \bigcup_{\theta \in \Theta_{n,i}} l_\theta\right\}.$$

Kierros indeksin n suhteen päättyy, kun vastaavasti määritellään

$$\Theta_n = \Theta_{n-1} \cup \bigcup_i \Theta_{n,i} = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_i \Theta_{k,i}.$$

Olkoon $\mathscr{S} = \{S_{n,i,j}\}_{n,i,j}$, joka on numeroituva. Osoitetaan sitten, ettei joukon $\mathscr{S}$ eri nauhoilla ole yhteisiä suoria. Tehdään vastaoletus: on nauhat $S_{n,i,j}, S_{m,k,l} \in \mathscr{S}$, $(n,i,j) \neq (m,k,l)$, joille $S_{n,i,j} \cap S_{m,k,l} \neq \emptyset$. Tämän ja Lauseen 5.4 perusteella

$$l_{\theta^\perp_{n,i,j}} \parallel l_{n,i,j} \parallel l_{m,k,l} \parallel l_{\theta^\perp_{m,k,l}},$$

joten $\theta_{n,i,j} = \theta_{m,k,l}$. Jos nyt $n > m$ (tapaus $n < m$ vastaavasti), niin

$$\theta_{n,i,j} \in [0,\pi) \setminus \Theta_{n-1} \subset [0,\pi) \setminus \Theta_m.$$

Kuitenkin $\theta_{m,k,l} \in \Theta_m$, mikä on ristiriita. Niinpä voidaan olettaa, että $n = m$. Jos sitten $i > k$ (vastaavasti $i < k$), niin

$$\theta_{n,i,j} \in [0,\pi) \setminus \Theta_{n,i-1} \subset [0,\pi) \setminus \Theta_{n,k} = [0,\pi) \setminus \Theta_{m,k}.$$

Kuitenkin $\theta_{m,k,l} \in \Theta_{m,k}$, mikä on ristiriita. Niinpä välttämättä $(n,i) = (m,k)$. Nauhat kuitenkin valittiin niin, ettei varsinkaan tässä tapauksessa niillä voi olla yhteisiä suoria. Siten vastaoletus on väärä.

Huomaa, että $\nu_E(A) \leq \sum_n \nu_{E_n}(A)$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}^2$: Borel-joukoille väite on ilmeinen. Yleisessä tapauksessa ulkomitan ν_{E_n} Borel-säännöllisyyden mukaan löytyy kaikilla n Borel-joukko $A_n \supset A$, jolle $\nu_{E_n}(A_n) = \nu_{E_n}(A)$. Siten

$$\nu_E(A) \leq \nu_E\left(\bigcap_k A_k\right) \leq \sum_n \nu_{E_n}\left(\bigcap_k A_k\right) \leq \sum_n \nu_{E_n}(A_n) = \sum_n \nu_{E_n}(A).$$

Niinpä kaikilla $i = 1, 2, \dots$

$$\nu_E\left(\widetilde{E} \setminus \bigcup_{n,j} S_{n,i,j_*}\right) \leq \sum_k \nu_{E_k}\left(\widetilde{E} \setminus \bigcup_{n,j} S_{n,i,j_*}\right) \leq \sum_k \nu_{E_k}\left(\widetilde{E_k} \setminus \bigcup_j S_{k,i,j_*}\right) = 0. \tag{16}$$

Jos $\nu_E(\widetilde{E}) = 0$, niin $\mathscr{H}^1(E) = 0$ eikä väitteessä ole mitään todistettavaa. Muussa tapauksessa $\{S_{n,i,j}\}_{n,j} \neq \emptyset$ kaikilla $i = 1, 2, \dots$, joten kohdan (16) nojalla kaikilla $i = 1, 2, \dots$ ν_E-melkein jokainen $x \in \widetilde{E}$ kuuluu jollekin suoralle $l \in \bigcup_{n,j} S_{n,i,j}$. Koska valituilla nauhoilla ei ole yhteisiä suoria, on ν_E-melkein jokaiselle $x \in \widetilde{E}$

$$\#\left\{l \in \bigcup_{S \in \mathscr{S}} S : x \in l\right\} = \infty,$$

joten Lauseen 5.14 mukaan $\mathscr{H}^1$-melkein kaikilla $x \in E$

$$\# \bigcup_{S \in \mathscr{S}} \widehat{S} \cap (x + l_\theta) = \infty$$

melkein kaikilla $\theta \in [0, \pi)$. Koska $\mathscr{S}$ on numeroituva ja $\widehat{S} \subset \mathbb{R}^2$, $S \in \mathscr{S}$, on jana, niin $\bigcup_{S \in \mathscr{S}} \widehat{S}$ on suoristuva Borel-joukko. Lisäksi kohdan (15) mukaan

$$\mathscr{H}^1\left(\bigcup_{S \in \mathscr{S}} \widehat{S}\right) = \sum_{n,i,j} \mathscr{H}^1(\widehat{S_{n,i,j}}) = \sum_n \sum_i \sum_j \mathscr{H}^1(\widehat{S_{n,i,j}}) \leq \sum_n \sum_i 2^{-n} 2^{-i} = 1.$$

Näin ollen joukko $F = \bigcup_{S \in \mathscr{S}} \widehat{S}$ antaa väitteen. $\square$

Viitteet

[1] A.M. Bruckner, J.B. Bruckner, B.S. Thomson. *Real Analysis*. Prentice-Hall, 1997.

[2] M. Csörnyei, D. Preiss. *Sets of finite $\mathscr{H}^1$ measure that intersect positively many lines in infinitely many points*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Mat. **32** (2007), no. 2, 545-548.

[3] R.O. Davies. *Measures not approximable or not specifiable by means of balls.* Mathematika **18** (1971), 157-160.

[4] K.J. Falconer. *Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, 1985.

[5] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, 1969.

[6] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Springer, 1995.

[7] T. Keleti, D. Preiss. *The balls do not generate all Borel sets using complements and countable disjoint unions.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **128** (2000), no. 3, 539-547.

[8] A.W. Knapp. *Basic Real Analysis*. Birkhäuser, 2005.

[9] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*. Cambridge University Press, 1995.

[10] S. Jackson, R.D. Mauldin. *On the σ-class generated by open balls.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **127** (1999), no. 1, 99-108.

[11] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 1976.

[12] K. Simon, B. Solomyak. *Visibility for self-similar sets of dimension one in the plane*. Real Anal. Exchange **32** (2006/07), no.1, 67-78.

[13] L. Simon. *Lectures on geometric measure theory*. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, 3, 1983.

[14] J. Väisälä. *Topologia II*. Limes ry, 2005.