Fourier-menetelmistä ja tietotekniikan DI-koulutuksen matematiikan opinnoista

Samuli Röppänen

pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2022

Tiivistelmä: Samuli Röppänen, *Fourier-menetelmistä ja tietotekniikan DI-koulutuksen matematiikan opinnoista*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 42 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2022.

Tutkielma motivaationa oli tarkastella DI-koulutuksen matemaattista opintosuunnitelmaa. Tarkemmaksi esimerkkikoulutukseksi valikoitu tietotekniikan DI-koulutuksen kandidaattivaihe. Kyseisen koulutuksen matemaattisten opintosuunnitelmien sisältöjen lisäksi tarkasteluun otettiin Fourier-menetelmät. Ne toimivat esimerkkinä eräästä DI-koulutuksessa mahdollisesti vastaan tulevasta matemaattisesta työkalusta.

Tutkielman ensimmäisessä kokonaisuudessa määritellään Fourier-menetelmiä ja esitellään joitakin niiden sovelluskohteita. Tutkielmassa määritellään reaalinen ja kompleksinen Fourier-sarja, Fourier-muunnos, käänteinen Fourier-muunnos ja FFT-menetelmä. Tutkielmassa tarkastellaan lisäksi Fourier-sarjan ja Fourier-muunnoksen välistä yhteyttä. Fourier-sarjoille ja Fourier-muunnoksille sovelluskohteina esitellään differentiaaliyhtälöiden ratkaisua ja signaalinkäsittelyä. FFT-menetelmän osalta tarkastellaan määritelmän lisäksi syytä sen hyödyllisyyteen. Lähteinä tässä kokonaisuudessa on käytetty opetuskäyttöön tehtyjä luentomonisteita.

Tutkielman toisessa kokonaisuudessa tarkastellaan eri yliopistojen tietotekniikan DI-koulutuksen kandivaiheen matematiikan opintosuunnitelmia. Niiden kurssit on esitelty sisällöiltään. Opintosuunnitelmien lähteinä on käytetty yliopistojen verkkosivuilta löytyviä opinto-oppaita. Lisäksi ohjelmista on poimittu Fourier-menetelmien esiintyvyydet. Työn eräs päälähde on ACM:n ja IEEE Computer Society:n toimittama tietotekniikan opetusohjelmien suositeltujen sisältöjen opas. Oppaan suosittelemat aihealuekokonaisuudet eritellään ja eri yliopistojen opintosuunnitelmia peilataan niiden suhteen. Tutkielman lopussa on Jyväskylän yliopiston DI-koulutuksen matematiikan opintosuunnitelman suunnittelussa mukana olleen professorin haastattelu.

Avainsanat: Fourier-menetelmät, Fourier-muunnos, Fourier-sarja, FFT, diplomi-insinöörikoulutus.

Sisältö

1. Johdanto

Matematiikka kuuluu lähes poikkeuksetta diplomi-insinöörikoulutuksen opintosisältöihin riippumatta koulutuslinjasta. Tässä työssä tarkastellaan eri yliopistojen tietotekniikan diplomi-insinöörikoulutuksen kandivaiheen matematiikan opintosuunnitelmia. Lisäksi työhön sisältyy Fourier-menetelmien läpikäyntiä. Fourier-menetelmät toimivat tässä työssä esimerkkinä eräästä matemaattisesta työkalusta, joka voi tulla vastaan tietotekniikan opinnoissa.

Työssä on siis kaksi kokonaisuutta. Ensin esitellään Fourier-menetelmiä Fourier-sarjan, Fourier-muunnoksen ja FFT-menetelmän muodossa. Ajatuksena on samalla näyttää minkälaista matematiikkaa menetelmät pitävät sisällään. Toisessa kokonaisuudessa tarkastellaan eri yliopistojen tietotekniikan kandidaatin vaiheen matematiikan opintosuunnitelmia. Opintosuunnitelmien sisältöjen lisäksi esitellään ACM:n ja IEEE Computer Society:n toimittama tietotekniikan opetusohjelmien suositeltujen sisältöjen kansainvälinen opas [16]. Eri yliopistojen matematiikan opintosuunitelmia peilataan tämän oppaan suhteen. Matematiikan opintosisällöistä on myöskin poimittu Fourier-menetelmien esiintyvyydet. On siis tutkittu, että kuuluuko opintosisältöihin Fourier-menetelmiä ja millä kursseilla. Kyseisten kurssien esitiedot on myös esitelty.

Työn yhtenä päälähteenä on vuonna 2013 julkaistu tietotekniikan kattojärjestöjen ACM:n ja IEEE Computer Society:n toimittama tietotekniikan opetusohjelmien suositeltujen sisältöjen kansainvälinen opas. Tämän lisäksi lähteinä on käytetty opetuskäyttöön tarkoitettuja luentomonisteita. Eri yliopistojen tietotekniikan kandidaatin vaiheen matemaattisten opintosuunnitelmien lähteenä on käytetty yliopistojen sivuilta löytyviä opinto-oppaita. Työn lopussa on lisäksi lyhyt asiantuntijahaastattelu, jossa on haastateltu tietotekniikan diplomi-insinöörikoulutuksen kandivaiheen matematiikan opintosuunnitelman tekoon osallistunutta professoria.

Luvussa 2 taustoitetaan eräitä tässä työssä tarvittavia matemaattisia tuloksia ja määritelmiä. Luvussa 3 esitellään Fourier-sarja ja sen soveltavia käyttökohteita. Luvussa 4 esitellään Fourier-muunnos. Fourier-muunnoksen sovelluksiin tutustutaan luvussa 5. Luvussa 6 esitellään Fast Fourier Transform eli FFT-menetelmä. Luku 7 edustaa työn toista kokonaisuutta. Siinä luodaan katsaus eri yliopistojen tietotekniikan DI-koulutuksen kandidaatin vaiheen matemaattisen opintosuunnitelman sisältöihin.

2. Taustaa

Tähän lukuun on kerätty tässä työssä tarvittavia eri matemaattisia tuloksia ja määritelmiä. Näihin viitataan työn myöhemmissä vaiheissa.

Määritellään ensin Schwartzin avaruus. Määritelmä löytyy esimerkiksi lähteestä [12]. Schwartzin avaruuden määritelmää tarvitaan määritelmässä 17.

Määritelmä 1 (Schwartzin avaruus). Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuuluu Schwartzin avaruuteen $S(\mathbb{R})$, jos

$$(i) \quad f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$$(ii) \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |\frac{d^l f(x)}{dx^l}| < \infty, \quad \text{kaikilla kokonaisluvuilla } k, l \geq 0.$$

Jos funktio f kuuluu avaruuteen $C^\infty(\mathbb{R})$, niin funktio on mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituva koko $\mathbb{R}$:ssa. Kohta (ii) taas kertoo, että jokainen derivaatta pienenee vähintään yhtä nopeasti kuin luvun $|x|$ potenssi kaikilla k. Seuraavassa esimerkissä esitellään eräs tällainen funktio.

Tutustutaan Schwartzin avaruuden käsitteeseen seuraavan esimerkin avulla. Esimerkki on lähteen [12] sivun 47 esimerkki 5.5.

Esimerkki 2. Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$. Tarkoituksena on näyttää, että erityisesti Schwartzin avaruuden ehto (ii) toteutuu eli, että pätee

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |\frac{d^l f(x)}{dx^l}| < \infty, \quad \text{kaikilla kokonaisluvuilla } k, l \geq 0.$$

Ehto (i) täyttyy, sillä funktio $f(x)$ eksponenttifunktiona on jatkuvasti derivoituva.

Funktion $f(x)$ derivaatalle pätee

$$\frac{df(x)}{dx} = -2xe^{-x^2} = -2xf(x).$$

Seuraavat derivaatat saadaan vastaavasti, joten

$$\frac{d^l f(x)}{dx^l} = \text{polynomi} \cdot f(x).$$

Nyt siis

$$|x|^k |\frac{d^l f(x)}{dx^l} = |x|^k |\text{polynomi} \cdot f(x)| = \frac{|x|^k |\text{polynomi}|}{e^{x^2}}.$$

Koska e^{x^2} kasvaa nopeammin kuin mikään polynomi, ehto (ii) täyttyy. Tällöin siis

$$f(x) \in S(\mathbb{R}).$$

Seuraavaksi määritellään kompleksilukuihin kuuluva imaginääriyksikkö. Kyseinen kompleksiluku tulee vastaan tässä työssä kompleksilukuja käsiteltäessä. Se on määritelty esimerkiksi lähteessä [8].

Määritelmä 3 (Imaginääriyksikkö). Imaginääriyksikkö i on määritelty siten, että $i \in \mathbb{C}$ ja $i^2 = -1$. Imaginääriyksikkö on kompleksitason vektori $(0, 1)$.

Määritellään seuraavaksi parillinen ja pariton funktio. Nämä käsitteet on määritelty esimerkiksi lähteessä [13].

Määritelmä 4 (Parillinen ja pariton funktio). Funktiota kutsutaan parittomaksi jos funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pätee

$$f(-t) = -f(t)$$

ja parilliseksi, jos pätee

$$f(-t) = f(t).$$

Esimerkiksi $\sin(x)$ on pariton funktio ja $\cos(x)$ parillinen funktio, kun $x \in \mathbb{R}$.

Funktiolle voidaan määritellä parillinen ja pariton jatke. Määritellään seuraavaksi nämä käsitteet. Jatkeen käsitettä tarvitaan esimerkissä 14.

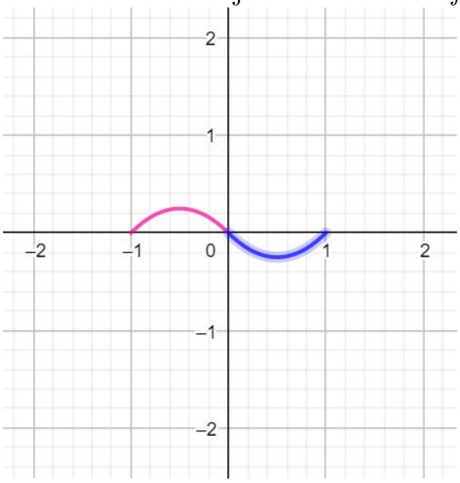
Määritelmä 5 (Funktion parillinen ja pariton jatke). Muodostettaessa funktion jatke funktiota jatketaan funktiona laajennetulle lukuvälille. Jos jatkettu funktio on parillinen, kyseessä on parillinen jatke. Jos jatkettu funktio on pariton, kyseessä on pariton jatke.

Tutustutaan seuraavaksi parilliseen ja parittomaan jatkeeseen esimerkin avulla.

Esimerkki 6 (Pariton ja parillinen jatke). Olkoon funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x-1)$. Muodostetaan funktion f pariton ja parillinen jatke. Funktion f pariton jatke välille [-1,1] on

$$g_1(x) = \begin{cases} -x(x+1), & x \in [-1, 0[\\ x(x-1), & x \in [0,1] \end{cases}.$$

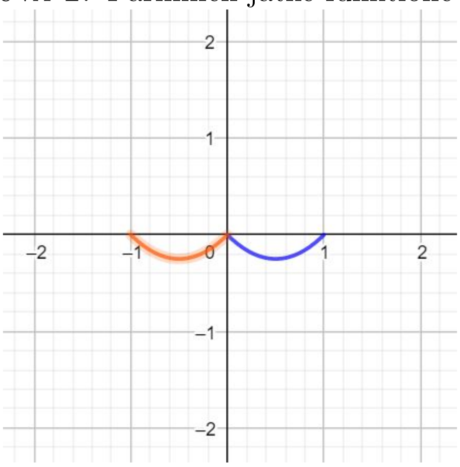
Kuva 1. Pariton jatke funktiolle f.



Funktion f parillinen jatke välille [-1,1] on

$$g_1(x) = \begin{cases} x(x+1), & x \in [-1, 0[\\ x(x-1), & x \in [0,1] \end{cases}.$$

Kuva 2. Parillinen jatke funktiolle f.



3. Fourier-sarja

Tässä luvussa määritellään Fourier-sarja eri muodoissa. Lisäksi esitellään joitakin Fourier-sarjan soveltavia käyttökohteita. Yksinkertainen Fourier-sarjan määrittely tehdään siten, että Fourier-sarja on reaalinen ja määritelty välillä $[-\pi, \pi]$. Tämä määrittely on esitelty esimerkiksi lähteessä [3].

Määritelmä 7 (Reaalinen Fourier-sarja 2π-pituisella suljetulla välillä). Olkoon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Määritetään reaalinen Fourier-sarja $g(j)$ funktiolle f välillä $[-\pi, \pi]$ siten, että

$$g(j) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}[a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)].$$

Sarjassa $a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)dx$ ja $b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)dx$.

Reaalinen Fourier-sarja voidaan määritellä myös yleiselle välille $[-L, L]$, missä $L \in \mathbb{R}$. Seuraavassa määritelmässä esitellään tämä. Määritelmä löytyy esimerkiksi lähteestä [13].

Määritelmä 8 (Reaalinen Fourier-sarja yleisellä välillä). Reaalinen Fourier-sarja $g(j)$ funktiolle f yleisellä välillä $[-L, L]$, missä $L \in \mathbb{R}$, on

$$g(j) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}[a_j \cos(\frac{j\pi x}{L}) + b_j \sin(\frac{j\pi x}{L})],$$

missä $a_j = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{j\pi x}{L})dx$ ja $b_j = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{j\pi x}{L})dx$.

Seuraavaksi on tarkoitus määritellä kompleksinen Fourier-sarja. Kompleksisen Fourier-sarjan määrittämiseksi täytyy ensin määritellä Fourier-sarjan osittaisen osasumman käsite. Määritellään tämä seuraavaksi. Osasumma on määritelty esimerkiksi lähteessä [13].

Määritelmä 9 (Fourier-sarjan osasumma). Olkoon funktio $f : [-L, L] \to \mathbb{C}$. Funktion f Fourier-sarja osasumma $S_k(t)$ on

$$S_k(t) = \sum_{j=-k}^{k} \hat{f}(j)e^{\frac{\pi i j t}{L}},$$

missä

$$\hat{f}(j) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-\frac{\pi i j t}{L}}dt, \quad j \in \mathbb{Z} \text{ ja } i \text{ imaginääriyksikkö määritelmästä 3.}$$

Kompleksinen Fourier-sarja kytkeytyy edellä määritellyn Fourier-sarjan osasumman $S_k(t)$ raja-arvoon. Määritellään seuraavaksi kompleksinen Fourier-sarja $2L$-pituisella välillä. Tämä määritelmä löytyy esimerkiksi lähteestä [13].

Määritelmä 10 (Kompleksinen Fourier-sarja $2L$-pituisella välillä). Olkoon funktio $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$. Jos osasumman $S_k(t)$ raja-arvo on olemassa, niin raja-arvo on kompleksinen Fourier-sarja $2L$-pituisella välillä eli

$$\lim_{k\to\infty} S_k(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt}.$$

Esitellään seuraavaksi reaalisen ja kompleksisen Fourier-sarjan yhteys. Tämä yhteys on esitelty esimerkiksi lähteessä [13].

Tarkastellaan ensin Fourier-sarjan osasummaa $S_k(t)$ ja muokataan sitä

$$S_k(t) = \sum_{j=-k}^{k} \hat{f}(j)e^{ijt} \tag{1}$$

$$= \sum_{j=-k}^{-1} \hat{f}(j)e^{ijt} + f(0) + \sum_{j=1}^{k} \hat{f}(j)e^{ijt} \tag{2}$$

Todetaan, että

$$\sum_{j=-k}^{-1} \hat{f}(j)e^{ijt} = \sum_{j=1}^{k} \hat{f}(-j)e^{-ijt},$$

jolloin yhtälö (2) saadaan muotoon

$$f(0) = \sum_{j=1}^{k} [\hat{f}(j)e^{ijt} + \hat{f}(-j)e^{-ijt}].$$

Eulerin kaava on määritelty esimerkiksi lähteessä [13]. Sen mukaan pätee

$$e^{ijt} = \cos(jt) + i\sin(jt).$$

Tämän nojalla saadaan

$$f(0) + \sum_{j=1}^{k} [\hat{f}(j)(\cos(jt) + i\sin(jt)) + \hat{f}(-j)(\cos(jt) - i\sin(jt))]$$
$$= f(0) + \sum_{j=1}^{k} [(\hat{f}(j) + \hat{f}(-j))\cos(jt)] + \sum_{j=1}^{k} [i(\hat{f}(j) - \hat{f}(-j))\sin(jt))],$$

missä

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t)dt.$$

Lisäksi kompleksisten trigonometristen funktioiden avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(j) + \hat{f}(-j) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t)(e^{-ijt} + e^{ijt})dt \\
&= \frac{1}{2L}\int_{L}^{L} f(t) 2\cos(jt)dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{L}^{L} f(t)\cos(jt)dt
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
i(\hat{f}(j) - \hat{f}(-j) &= \frac{i}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)(e^{-ijt} - e^{ijt})dt \\
&= \frac{i}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)(-2i)\sin(jt)dt \\
&= \frac{-i^2}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(jt)dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(jt)dt.
\end{aligned}
$$

Näin ollen on näytetty, että Fourierin osasummalle $S_k(t)$ pätee

$$
\begin{aligned}
S_k(t) &= \sum_{j=-k}^{k} \hat{f}(j)e^{ijt} \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}[a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)],
\end{aligned}
$$

missä

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt, \\
a_j &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(jt)dt, \quad j = 0, 1, ...
\end{aligned}
$$

ja

$$
b_j = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(jt)dt, \quad j = 1, 2, ...
$$

Seuraavaksi tutustutaan Fourier-sarjan sovelluksiin. Ensin määritellään Laplacen yhtälö, joka on määritelty esimerkiksi lähteessä [13]. Määritelmässä tulee vastaan merkintä C^2. Jos esim funktio $u \in C^2(\mathbb{R})$, niin funktio $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja u on kahdesti jatkuvasti derivoituva.

MÄÄRITELMÄ 11 (Laplacen yhtälö). Olkoon avoin alue Ω ja funktio $u \in C^\infty(\Omega)$.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0.$$

Määritellään seuraavaksi Dirichlet'n ongelma, joka löytyy esimerkiksi lähteestä [13]. Tällainen ongelma käydään läpi myöhemmin esimerkissä 14.

MÄÄRITELMÄ 12 (Dirichlet'n ongelma). Olkoon avoin alue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ongelmassa etsitään ratkaisua $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Olkoon funktio $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}, g \in C(\partial\Omega)$. Funktiolle u pätee

$$\begin{cases} \Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0, & \text{joukossa } \Omega \\ u = g, & \text{joukossa } \partial\Omega. \end{cases}$$

Seuraavaksi käsitellään diffuusion tasapainoon liittyvä esimerkki lähteestä [13]. Diffuusiolla tarkoitetaan esimerkiksi lämpötilaerojen tasoittumista.

ESIMERKKI 13 (Diffuusion tasapaino). Esimerkissä mallinnetaan diffuusion tasapainoa. Olkoon U sileä joukko ja tutkitaan joukon U reunasta ∂U läpi menevää vuota. Merkitään vuota vektorikenttänä F ja v on ulkoreunan normaalivektori. Tällöin

$$\int_{\partial U} F \cdot v \; dS = 0,$$

jossa lähteen [14] sivulla 77 olevan divergenssilauseen nojalla

$$0 = \int_{\partial U} F \cdot v \; dS = \int_U \operatorname{div}(F) dV.$$

Jos tämä pätee, niin riittävän sileälle vektorikentälle F pätee

$$\operatorname{div}(F) = 0.$$

Diffuusion tapauksessa esimerkiksi lämmön siirtymisessä on perusteltua olettaa, että vuon suuruus riippuu eron suuruudesta. Lämpö siirtyy kuumasta kylmään sitä nopeammin, mitä suurempi lämpötilaero on. Tällöin voidaan merkitä

$$F = -aDu,$$

missä $-a$ on materiaalin ominaisuuksista riippuva parametri ja Du on lämpötilan gradientti. Tässä esimerkissä gradientti kertoo kuinka paljon ja mihin suuntaan lämpötila muuttuu [14]. Tästä saadaan

$$0 = \operatorname{div}(-aDu) = -a\Delta u.$$

Käytännön tilanteessa tämä tarkoittaa siis, että kaikki jonkin kappaleen reunan läpi virtaava lämpö virtaa kokonaisuudessa myös ulos reunan toiselta puolelta.

Seuraavaksi esitellään esimerkki Fourier-sarjan käytöstä differentiaaliyhtälön ratkaisussa. Esimerkki on lähteestä [13].

Esimerkki 14 (Fourier-sarjan käyttö differentiaaliyhtälön ratkaisussa). Olkoon funktio $u(x,y) : [0,a] \times [0,b] \to \mathbb{R}, \quad \Omega = (0,a) \times (0,b)$ ja

$$g(x) = \begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & \Omega \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < a \\ u(x,b) = 0, & 0 < x < a \\ u(0,y) = 0, & 0 < y < b \\ u(a,y) = g(y), & 0 < y < b \end{cases},$$

missä funktio g derivoituva Ω :ssa.

Asetetaan $u(x,y) = v(x)w(y)$. Tällöin

$$0 = \Delta u(x,y) = v''(x)w(y) + v(x)w''(y),$$

josta saadaan

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda = -\frac{w''(x)}{w(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nyt

$$\begin{cases} v''(x) = \lambda v(x), & v(0) = 0 \\ -w''(y) = \lambda w(y), & w(0) = 0 = w(b). \end{cases}$$

Saatiin siis separoituvat differentiaaliyhtälöt. Seuraavaksi ratkaistaan yhtälöt kolmessa eri tapauksessa, joissa muuttuja λ saa kolme erilaista ehtoa.

Tapaus 1: Olkoon $\lambda < 0 : \lambda = -\mu^2, \mu > 0$. Tällöin saadaan

$$w''(y) = \mu^2 w(y),$$

jonka karakteristinen yhtälö on lähteen [6] (s35.) nojalla muotoa

$$r^2 - \mu^2 = 0,$$

jonka juuret ovat $r = \pm\mu$. Ratkaisu on siis lähteen 6 lauseen 3.3.17. nojalla

$$w(y) = C_3 e^{\mu y} + C_4 e^{-\mu y}, \quad C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Merkitään $C_3 = (\frac{C_1+C_2}{2})$ ja $C_4 = (\frac{C_1-C_2}{2})$, jolloin ratkaisu saadaan muotoon

$$\begin{aligned} w(y) &= \frac{C_1 + C_2}{2} e^{\mu y} + \frac{C_1 - C_2}{2} e^{-\mu y} \\ &= C_1 \frac{1}{2}(e^{\mu y} - e^{-\mu y}) + C_2 \frac{1}{2}(e^{\mu y} + e^{-\mu y}) \\ &= C_1 \sinh(\mu y) + C_2 \cosh(\mu y). \end{aligned}$$

Nyt annetuista ehdoista

$$0 = w(0) = C_1 \sinh(0) + C_2 \cosh(0) = C_2$$

ja

$$0 = w(b) = C_1 \sinh(\mu b)$$

eli $C_1 = C_2 = 0$, jolloin $w(y) = 0$.

Tapaus 2: Olkoon $\lambda = 0$. Tällöin

$$w''(y) = 0$$

eli ratkaisu on muotoa

$$w(y) = C_1 y + C_2 \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Annetuista ehdoista

$$w(0) = w(b) = 0$$

seuraa, että ratkaisu $w(y) = 0$.

Tapaus 3: Olkoon $\lambda > 0 : \lambda = \mu^2, \mu > 0$. Tällöin saadaan

$$\begin{cases} v''(x) = \mu^2 v(x) \\ -w''(y) = \mu^2 w(y) \end{cases}.$$

Tällöin saadaan tapauksen 1 tapaan

$$\begin{cases} r_1^2 = \mu^2 \\ -r_2^2 = \mu^2 \end{cases}$$

ja edelleen

$$\begin{cases} r_1 = \pm\mu \\ r_2 = \pm i\mu \end{cases}.$$

Ratkaisu on siis lähteen [6] lauseen 3.3.17. ja tapauksessa 1 käytyjen kohtien nojalla

$$\begin{cases} v(x) = C_1 \sinh(\mu x) + C_2 \cosh(\mu x) \\ w(x) = D_1 \sin(\mu y) + D_2 \cos(\mu y) \end{cases},$$

missä $C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$. Annetuista ehdoista $v(0) = 0$ ja $w(0) = 0$ saadaan $C_2 = D_2 = 0$. Lisäksi ehdosta $w(b) = 0$ saadaan, että pätee joko $D_1 = 0$ ja $w(y) = 0$ tai

$$sin(\mu b) = 0,$$

jolloin

$$\mu = \frac{j\pi}{b}, \quad j = 1, 2, ...$$

Näin ollen saadaan ratkaisu

$$\begin{cases} v(x) = C_1 \sinh(\frac{j\pi x}{b}) \\ w(y) = D_1 \sin(\frac{j\pi y}{b}) \end{cases}.$$

Alunperin lähdettiin hakemaan ratkaisua $u(x, y)$, jolle siis pätee $u(x, y) = v(x)w(y)$ eli saatiin erikoisratkaisut

$$u_j(x, y) = v(x)w(y) = a_j \sinh(\frac{j\pi x}{b}) \sin(\frac{j\pi y}{b}).$$

Etsitään täyttä ratkaisua nyt sarjana

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sinh(\frac{j\pi x}{b}) \sin(\frac{j\pi y}{b}). \tag{3}$$

Viimeisestä reunaehdosta saadaan

$$g(y) = u(a, y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sinh(\frac{j\pi a}{b}) \sin(\frac{j\pi y}{b}).$$

Muodostetaan nyt funktiolle $g(y)$ pariton jatke ja laajennetaan se koko reaaliakselille määritelmän 5 mukaan. Tällöin funktion $g(y)$ Fourier-sarja on parittomana funktiona

$$g(y) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(\frac{j\pi y}{b}),$$

missä

$$b_j = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} g(y)\sin(\frac{j\pi y}{b})dy = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin(\frac{j\pi y}{b})dy.$$

Vertailemalla kertoimia saadaan

$$a_j \sinh(\frac{j\pi a}{b}) = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin(\frac{j\pi y}{b})dy$$

eli lopulta

$$a_j = \frac{2}{b\sinh(\frac{j\pi a}{b})}\int_0^b g(y)\sin(\frac{j\pi y}{b})dy.$$

Sijoittamalla saatu a_j yhtälöön (3) saadaan

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{b\sinh(\frac{j\pi a}{b})}\int_0^b g(y)\sin(\frac{j\pi y}{b})dy \sinh(\frac{j\pi x}{b})\sin(\frac{j\pi y}{b}).$$

Äskeinen tulos antaa esityksen ratkaisusta. Tämä on kuitenkin formaali ratkaisu, sillä suppenemista ja käyttäytymistä rajalla ei tutkittu.

4. Fourier-muunnos

Tässä luvussa määritellään Fourier-muunnos ja esitellään sen yhteys Fourier-sarjaan. Tämän lisäksi määritellään käänteinen Fourier-muunnos. Fourier-muunnos on määritelty esimerkiksi lähteessä [12].

Määritelmä 15 (Fourier-muunnos). Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja f integroituva. Funktion f Fourier-muunnos funktio $\hat{f}(\xi)$ määritellään

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx.$$

Muodostetaan seuraavaksi Fourier-muunnos annetulle esimerkkifunktiolle. Seuraava esimerkki on lähteestä [12].

Esimerkki 16 (Fourier-muunnos annetulle funktiolle). Olkoon funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{jos } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0, \text{muualla.} \end{cases}$$

Muodostetaan kyseiselle funktiolle Fourier-muunnos $\hat{f}(\xi)$ eli määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i x\xi}. \end{aligned}$$

Tälle saadaan erilliset integraalit Eulerin kaavalla siten, että

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi x\xi)dx - i\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi x\xi)dx \\
&= \Big/_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi x\xi)}{2\pi\xi} - i\Big/_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-\cos(2\pi x\xi)}{2\pi\xi} \\
&= \frac{2\sin(\pi\xi)}{2\pi\xi} - i(\frac{-\cos(2\pi\cdot\frac{1}{2}\xi)}{2\pi\xi} + \frac{\cos(2\pi\cdot\frac{1}{2}\xi)}{2\pi\xi}) \\
&= \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} - i\cdot 0 \\
&= \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}.
\end{aligned}$$

Funktion $f(x)$ Fourier-muunnos $\hat{f}(\xi)$ on siis

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Esitellään seuraavaksi Fourier-muunnoksen yhteys Fourier-sarjaan. Tämä yhteys on esitelty esimerkiksi lähteessä [3]. Lasku on formaali eikä suppenemisia rajalla tutkita.

Olkoon $L \in \mathbb{R}$ ja funktio $f : [-L, L) \to \mathbb{R}$. Tämän kompleksinen Fourier-sarja on $2L$-pituisen Fourier-sarjan määritelmän mukaan

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{f}(j)e^{\frac{\pi ijx}{L}}, \quad \text{missä} \quad \hat{f}(j) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-\frac{\pi ijt}{L}}dt, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Näin ollen kompleksinen Fourier-sarja saadaan muotoon

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{\pi ij(x-t)/L}dt.$$

Määritellään nyt funktio $g(x, \xi_j)$ siten, että

$$g(x, \xi_j) = \int_{-L}^{L} f(t)e^{2\pi i\xi_j(x-t)}dt,$$

missä $\xi_j = j\Delta = j\frac{1}{2L}$ eli $\frac{1}{2L} = \Delta$. Lisäksi $\pi ijx/L = 2\pi i\xi x$. Annetaan $L \to \infty$, jolloin saadaan

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{L\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2L} g(x,\xi_j) \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \sum_{j\in\mathbb{Z}} g(x, j\Delta)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,\xi)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi i\xi(x-t)}dtd\xi.
\end{aligned}
$$

Äskeisessä $\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x, j\Delta)\Delta$ tulkittiin Riemannin summaksi. Nyt saadaan

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi i\xi(x-t)}dtd\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\xi x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi it\xi} f(t)dtd\xi.
\end{aligned}
$$

Funktio

$$
\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ix\xi} f(x)dx
$$

on nyt siis määritelmän mukaan funktion f Fourier-muunnos.

Määritellään seuraavaksi käänteinen Fourier-muunnos. Käsite on määritelty esimerkiksi lähteessä [13]. Määritelmässä mainitaan Schwartzin avaruuden käsite määritelmästä 1.

Määritelmä 17 (Käänteinen Fourier-muunnos). Oletetaan, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $f \in S(\mathbb{R})$. Tällöin pätee

$$
f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\xi x}\hat{f}(\xi)d\xi.
$$

Esitellään seuraavaksi Fourier-muunnoksen laskukaavoja. Laskukaavat ja niiden todistukset on esitelty esimerkiksi lähteessä [12].

Lause 18 (Fourier-muunnoksen laskukaavoja). *Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $f \in S(\mathbb{R})$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g \in S(\mathbb{R})$. Funktio $\hat{f}$ on funktion f Fourier-muunnos ja* *funktio $\hat{g}$ on funktion g Fourier-muunnos. Olkoon $\alpha, \beta, \epsilon, h \in \mathbb{R}$ Tällöin pätee*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad (\widehat{\alpha f + \beta g}) = \alpha\hat{f} + \beta\hat{g},\\
&(ii) \quad \widehat{\left(\frac{df}{dx}\right)}(\xi) = 2\pi i\xi\hat{f}(\xi),\\
&(iii) \quad \frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = (\widehat{-2\pi ixf})(\xi),\\
&(iv) \quad \widehat{f} \text{ on jatkuva},\\
&(v) \quad \widehat{f(\epsilon x)} = \frac{1}{e}\hat{f}_\epsilon(\xi), \epsilon > 0,\\
&(vi) \quad f\widehat{(x+h)} = \hat{f}(\xi)e^{2\pi ih\xi}\\
&ja\\
&(vii) \quad f\widehat{(x)e^{2\pi i}}{}^{hx} = \hat{f}(\xi - h).
\end{aligned}$$

Todistetaan seuraavaksi lauseen 18 kohdat (i)-(vii) eli edellä mainitut laskukaavat.

Todistus. Kohdan (i) todistuksessa näytetään, että Fourier-muunnos on lineaarinen. Määritelmästä

$$\begin{aligned}
(\widehat{\alpha f + \beta g}) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))e^{-2\pi ix\xi}dx\\
&= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi ix\xi}dx\\
&= \alpha\hat{f}(\xi) + \beta\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Kohtien (ii) ja (iii) todistuksissa näytetään funktion derivaattaan liittyviä tuloksia. Kohdan (ii) todistuksessa määritelmästä

$$\widehat{\left(\frac{df}{dx}\right)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{df}{dx}\right) e^{-2\pi ix\xi}dx,$$

missä integraali voidaan laskea osittaisintegrointikaavalla, jolloin saadaan

$$\widehat{\left(\frac{df}{dx}\right)}(\xi) = \Big/_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{dx}e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

Nyt $\Big/_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}$ menee nollaan, jolloin jää siis jäljelle ainoastaan

$$\widehat{\left(\frac{df}{dx}\right)}(\xi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{dx}e^{-2\pi ix\xi}dx = 2\pi i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ix\xi}f(x)dx = 2\pi i\xi\hat{f}(\xi).$$

Kohdan (iii) todistuksessa määritelmästä

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) &= \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{d\xi}e^{-2\pi i x\xi}dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)2\pi i x e^{-2\pi i x\xi}dx \\ &= (\widehat{-2\pi i x f})(\xi).\end{aligned}$$

Kohdan (iv) todistus toteaa Fourier-muunnoksen olevan jatkuva. Määritelmästä

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\hat{f}(\xi+h) &= \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x(\xi+h)} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\lim_{h\to 0}e^{-2\pi i x(\xi+h)} &= \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Kohdassa (v) muuttujalla x vakiokerroin $\epsilon > 0$. Määritelmästä

$$\widehat{f(\epsilon x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon x)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

Ratkaistaan integraali muuttujanvaihdolla asettamalla $y = \epsilon x, dy = \epsilon dx$, jolloin saadaan kohdan (v) tulos

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{(-2\pi i y\xi)/\epsilon}dy = \frac{1}{\epsilon}\hat{f}(\frac{\xi}{\epsilon}).$$

Kohdan (vi) todistuksessa määritelmän mukaan

$$f\widehat{(x+h)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

Ratkaistaan integraali muuttujanvaihdolla asettamalla $y = x+h, dy = dx$, jolloin saadaan kohdan (vi) tulos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i(y-h)\xi}dy = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h\xi}.$$

Kohdan (vii) todistus on (vii)

$$\begin{aligned}f\widehat{(x)e^{2\pi i h x}} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i h x}e^{-2\pi i x\xi}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x(\xi-h)}dx \\ &= \hat{f}(\xi-h).\end{aligned}$$

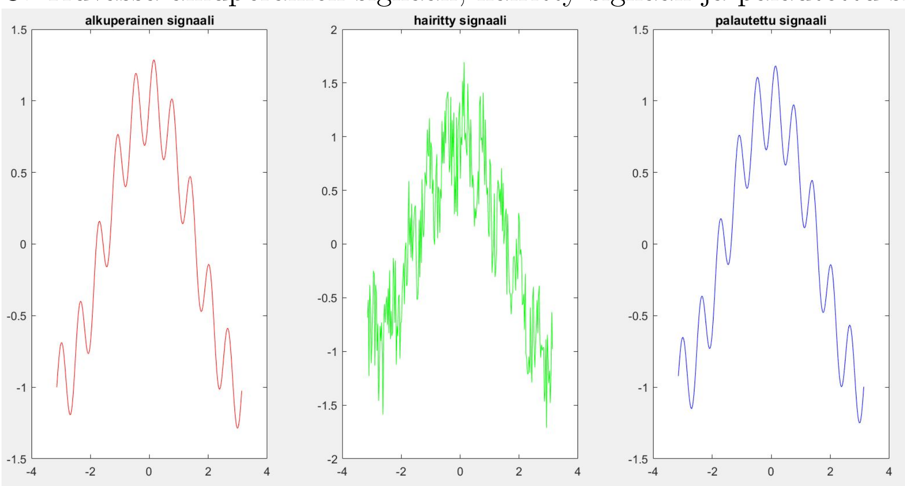
$\square$

5. Fourier-muunnoksen sovelluksia

Tässä luvussa tarkastellaan Fourier-muunnoksen kahta soveltavaa käyttökohdetta. Ensin esitellään Fourier-muunnoksen sovellus signaalinkäsittelyssä. Tämän jälkeen käydään Besselin potentiaalin löytävä esimerkki läpi. Tämän esimerkin tarkoituksena on näyttää, miten Fourier-muunnosta voidaan käyttää osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisussa.

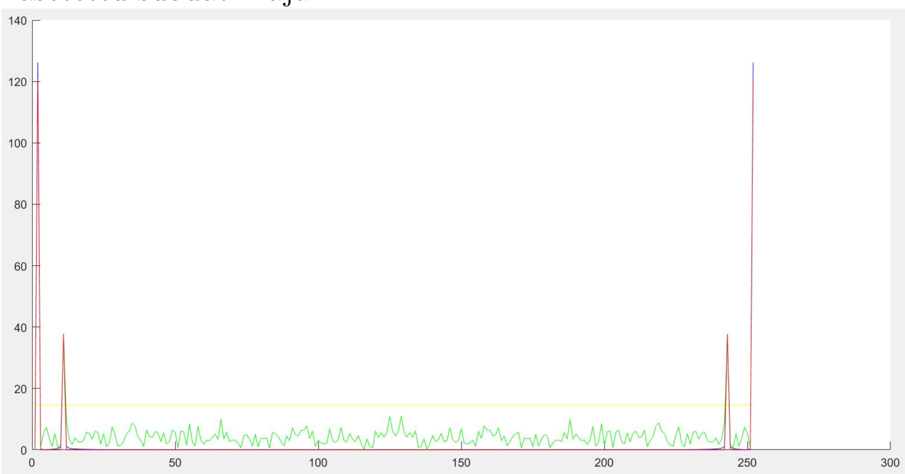
Esitellään signaalinkäsittelyn sovelluskohde Matlabia hyödyntäen. Sovelluksessa on ensin luotu alkuperäinen signaali, jonka avulla luodaan häiritty signaali. Fourier-muunnosta hyödyntäen häiritty signaali saadaan palautettua alkuperäisen signaalin muotoon. Alla kuvasarja tilanteesta.

Kuva 3. Kuvassa alkuperäinen signaali, häiritty signaali ja palautettu signaali.



Häiritystä signaalista otetaan Fourier-muunnos, joka on alla kuvassa.

Kuva 4. Kuvassa Fourier-muunnos häiriösignaalista ja keltainen viiva on asetettu suodatinraja.



Kuvassa näkyy keltaisella asetettu suodatinraja taajuuksille. Sitä säätämällä saadaan poistettua määrällisesti sopivan vähäiset taajuudet eli häiriö. Tämän jälkeen häiritystä signaalista poistetaan suodatetut taajuudet ja otetaan tämän jälkeen käänteinen Fourier-muunnos. Näin tekemällä on onnistuttu palauttamaan signaali alkuperäiseen muotoon. Edeltäneissä kuvissa käytetty koodi on alla.

```
 close all;
x=-pi:0.025:pi;
y=0.3*sin(10*x)+cos(x);
yh=y+1*(rand(size(y))-0.5);

figure(1);
hold on;
subplot(1,3,1),
plot(x,y,'r'), title('alkuperainen signaali')
subplot(1,3,2),
plot(x,yh,'g'), title('hairitty signaali')


figure(2);
f=fft(yh);
raja=0.12*max(abs(f));
apu=raja*ones(size(f));
hold on;
plot(abs(f),'g');
plot(apu,'y');
plot(abs(fft(y)),'b');

fu=[abs(f)>apu].*f;
yu=real(ifft(fu));
plot(abs(fu),'r')

figure(1);
subplot(1,3,3),
plot(x,yu,'b'),title('palautettu signaali')
```

Määritellään seuraavaksi signaalinkäsittelyyn liittyvä operaatio nimeltä konvoluutio. Konvoluutio on määritelty esimerkiksi lähteessä [13].

Määritelmä 19 (Konvoluutio). Konvoluutio-operaation merkintä on *. Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lisäksi $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Määritellään konvoluutio jatkuville funktioille f ja g integraalina

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Selvennetään konvoluution käsitettä esimerkin avulla seuraavaksi. Esimerkki on lähteestä [4].

Esimerkki 20 (Konvoluutio-esimerkki). Olkoon funktiot

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,3] \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja

$$g(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Ratkaistaan funktioiden konvoluutio $(f * g)(x)$. Kuvaajat voidaan myös ajatella yksinkertaisina signaaliaaltoina. Oletetaan, että konvoluutio tapahtuu aikaskaalalla y. Tällöin signaalifunktiot ovat kirjoitettavissa muodossa $f(y)$ ja $g(-y)$.

Signaalia $g(x-y)$ siirrettäessä vasemmalla, kun siis $x < 0$, huomataan, että signaalien välillä ei tapahdu päällekkäisyyttä. Näin ollen $(f * g)(x) = 0$, kun $x < 0$.

Siirretään seuraavaksi signaalia $g(x-y)$ oikealle. Tarkastellaan ensimmäiseksi väliä $0 \leq x \leq 1$. Nyt konvoluution määritelmästä saadaan

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy = \int_0^x 1 \cdot 2dy = 2x, \quad \text{kun } 0 \leq x \leq 1.$$

Seuraavaksi signaalia siirretään lisää oikealle ja tarkastellaan väliä $1 \leq x \leq 3$, jolloin

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^x f(x-y)g(y)dy = \int_{x-1}^x 1 \cdot 2dy = 2, \quad \text{kun } 1 \leq x \leq 3.$$

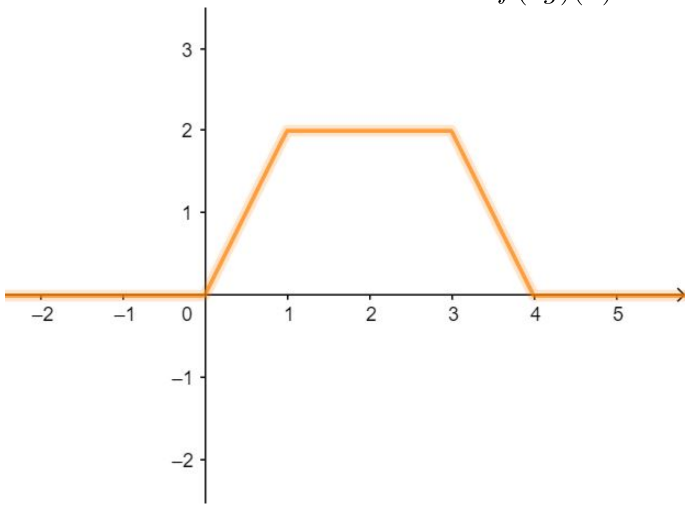
Tämän jälkeen signaalia $g(x-y)$ siirretään jälleen oikealle ja tarkastellaan väliä $3 \leq x \leq 4$, jolloin

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^3 f(x-y)g(y)dy = \int_{x-1}^3 1 \cdot 2dy = -2x + 8, \quad \text{kun } 3 \leq x \leq 4.$$

Lopulta signaali $g(x-y)$ on liikkunut kokonaan funktion $f(y)$ ohi ja $(f * g)(x) = 0$, kun $x > 4$. Näin ollen funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ konvoluutio on siis

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 3 \\ -2x + 8 & 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & x > 4 \end{cases}.$$

KUVA 5. Kuvassa konvoluutio $f(*g)(x)$.



Seuraavaksi on tarkoitus määritellä käsite nimeltä Besselin potentiaali. Sen määrittämiseen tarvitaan seuraavana esiteltävä lemma. Kyseinen lemma on esitelty esimerkiksi lähteessä [13].

LEMMA 21. *Olkoon funktiot $f, g \in S(R)$. Tällöin pätee*

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g},$$

*missä *-operaatio on konvoluutio.*

TODISTUS. Oletetaan, että Fubinin lauseen ehdot täyttyvät. Nyt

$$\widehat{f * g} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy\ e^{-2\pi i x\xi} dx,$$

josta Fubinin lauseen nojalla saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)e^{-2\pi i x\xi} dxdy.$$

Merkitään $z = x - y, dx = dz$ ja saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-2\pi i(z+y)\xi} dzdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i y\xi} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-2\pi i z\xi} = \hat{f}\hat{g}.$$

□

Esitellään seuraavaksi Bessel-potentiaali esimerkin muodossa. Bessel-potentiaali on esitelty esimerkiksi lähteessä [13].

ESIMERKKI 22 (Bessel-potentiaali). Olkoon funktio $f \in S(R)$. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä, joka on muotoa

$$u'' + u = f.$$

Nyt lauseen 18 kohdan (ii) nojalla saadaan

$$\frac{d\hat{u}}{d\xi}(\xi) = \hat{u'}(\xi) = 2\pi i\xi\hat{u}(\xi)$$

ja edelleen saman kohdan nojalla

$$\widehat{u''}(\xi) = (2\pi i\xi)^2\hat{u}(\xi) = -4\pi^2\xi^2\hat{u}(\xi).$$

Tällöin differentiaaliyhtälöstä ja edellisen nojalla

$$-(-4\pi^2\xi^2\hat{u}(\xi)) + \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

josta saadaan

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + 1}.$$

Merkitään nyt $\hat{u} = \hat{g} * \hat{f}$, jolloin tilanne on vastaava lemman 21 kanssa, missä

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2\xi^2 + 1}.$$

Nyt siis pitää löytää käänteisellä Fourier-muunnoksella funktio g, mille muodostettiin $\hat{g}$. Pätee ensinnäkin

$$\int_0^\infty e^{-ta}dt = \frac{1}{a},$$

sillä

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-ta}dt = \lim_{c\to\infty}\Big/_0^c - ae^{-ta} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{a} - \frac{e^{-ac}}{a} = \frac{1}{a},$$

joten

$$\int_0^\infty e^{-t(4\pi^2\xi^2+1)}dt = \frac{1}{4\pi^2\xi^2 + 1}.$$

Tällöin käänteisen Fourier-muunnoksen määritelmästä

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_{-\infty}^\infty \hat{g}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4\pi^2\xi^2 + 1}e^{2\pi ix\xi}d\xi \\
&= \int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{-t(4\pi^2\xi^2+1)}e^{2\pi ix\xi}dtd\xi \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\int_{-\infty}^\infty e^{2\pi ix\xi - t4\pi^2\xi^2}d\xi dt.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi suorittamalla muuttujanvaihto siten, että $z = \sqrt{b}\xi - \frac{a}{2\sqrt{b}}i$ saadaan

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ia\xi - b\xi^2}d\xi = \frac{e^{-\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}}\int_K e^{-z^2}dz,$$

missä $K = Im(z) = \{\frac{a}{2\sqrt{b}}\}$. Merkintä $Im(z)$ tarkoittaa kompleksiluvun z imaginääriosan reaalikerrointa. Lähteen [13] lemman 5.4 tuloksen nojalla pätee alla olevan yhtälön toinen yhtäsuuruus eli

$$\int_K e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}.$$

Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\xi - b\xi^2} d\xi = e^{-\frac{a^2}{4b}} \sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

Nyt merkitsemällä $a = 2\pi,\ b = t4\pi^2$ saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x\xi - t4\pi^2\xi^2} d\xi = e^{-\frac{(2\pi x)^2}{4(t4\pi^2)}} \sqrt{\frac{\pi}{t4\pi^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}.$$

Tätä tulosta kutsutaan Besselin potentiaaliksi. Täten

$$u(x) = (g * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy dt$$

eli saatiin formaali ratkaisu esimerkin alussa esitettyyn differentiaaliyhtälöön.

6. FFT-menetelmä

Tässä luvussa esitellään FFT-menetelmä eli Fast Fourier Transform. Suomenkielinen termi on nopea Fourier-muunnos. FFT-menetelmä esitellään, sillä se kuuluu monen yliopiston tietotekniikan DI-opintoihin signaalinkäsittelyn kursseilla.

6.1. Diskreetti Fourier-muunnos. Tämä luku on kirjoitettu pohjautuen lähteeseen [5], ellei toisin mainita. Määritellään ensin diskreetti Fourier-muunnos.

Määritelmä 23 (Diskreetti Fourier-muunnos eli DFT). Olkoon diskreetti jaksollinen N-jaksoinen signaali $x(n)$ eli signaali on N näytettä pitkä. Tämän signaalin diskreetti Fourier-muunnos $X(n)$ määritellään siten, että

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)(e^{\frac{2\pi i}{N}})^{-kn},$$

missä k on signaalinjonon $x(n)$ k:nnen jäsenen järjestysindeksi k ja n muodostuneen $X(n)$-jonon n:nnen jäsenen järjestysindeksi n.

Seuraavaksi määritellään käänteinen diskreetti Fourier-muunnos.

Määritelmä 24 (Käänteinen diskreetti Fourier-muunnos eli IDFT). Signaalin $X(n)$ käänteinen diskreetti Fourier-muunnos $x(n)$ määritellään siten, että

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)(e^{\frac{2\pi i}{N}})^{kn}.$$

Diskreetti Fourier-muunnos ja käänteinen diskreetti Fourier-muunnos on mahdollista esittää myös matriisimuodossa. Olkoon $x(n)$ muunnettava signaali ja vektori

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

sen yksi jakso. Tällöin sen diskreetti Fourier-muunnos saadaan kertomalla vektori $\mathbf{x}$ muunnosmatriisilla

$$\begin{pmatrix} (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & \dots & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 \\ (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{-1} & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{-2} & \dots & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{-(N-1)} \\ (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{-2} & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{-4} & \dots & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{-(N-1)} & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{-2(N-1)} & \dots & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Käänteisen diskreetin Fourier-muunnoksen voi laskea kertomalla vektori $\mathbf{X}$ muunnosmatriisilla

$$\frac{1}{N} \begin{pmatrix} (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & \dots & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 \\ (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{1} & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{2} & \dots & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{(N-1)} \\ (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{2} & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{4} & \dots & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e^{\frac{2\pi i}{N}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{N-1} & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{2(N-1)} & \dots & (e^{\frac{2\pi i}{N}})^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkin avulla diskreettiä Fourier-muunnosta.

Esimerkki 25 (Diskreetin 4-jaksoisen signaalin diskreetti Fourier-muunnos). Olkoon diskreetti jaksollinen signaali $x(n) = (0, 1, 2, 3)$. Nyt siis $N = 4$. Suoritetaan signaalille diskreetti Fourier-muunnos, joka saadaan laskettua hyödyntämällä edellä määriteltyä muunnosmatriisia, joka on nyt muodossa

$$\begin{pmatrix} (e^{\frac{2\pi i}{4}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^0 \\ (e^{\frac{2\pi i}{4}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^{-1} & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^{-2} & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^{-3} \\ (e^{\frac{2\pi i}{4}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^{-2} & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^{-4} & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^{-6} \\ (e^{\frac{2\pi i}{4}})^0 & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^{-3} & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^{-6} & (e^{\frac{2\pi i}{4}})^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Nyt kerrotaan jonosta $x(n)$ muodostettu vektori saadulla matriisilla eli

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2+2i \\ -2 \\ -2-2i \end{pmatrix}.$$

Saatiin siis haluttu diskreetti Fourier-muunnos

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2+2i \\ -2 \\ -2-2i \end{pmatrix}.$$

6.2. Nopea Fourier-muunnos. Vektoreiden laskeminen määritelmien pohjalta vaikeutuu muuttujan N eli jaksomäärän kasvaessa. N-ulotteisen vektorin kertominen $N \times N$-matriisilla vaatii N^2 kertolaskua ja $N(N-1)$. Ajantarve on siis suoraan verrannollinen muuttujan N neliöön. Tämän ongelman ratkaisemiseksi on kehitetty niin kutsuttu nopea Fourier-muunnos eli FFT (Fast Fourier Transform). Menetelmä käyttäen laskuaika pienenee merkittävästi erityisesti muuttujan N ollessa suuri. Diskreetti Fourier-muunnos kuuluu aikavaativuusluokkaan $O(N^2)$ ja nopea Fourier-muunnos aikavaativuusluokkaan $O(N \log_2 N)$. Tämä tarkoittaa käytännössä esimerkiksi jaksomäärällä $N = 10^6$, että nopea algoritmi vaatii noin 40 000 kertaa vähemmän laskuaikaa [2]. Menetelmän idean pääkehittäjinä voidaan pitää J.W. Cooleyta ja John Tukeyta, jotka julkaisivat aiheesta artikkelin vuonna 1965 [5]. Esitellään nyt niin kutsuttu Cooley-Tukey-algoritmi, joka on esitelty esimerkiksi lähteessä [5].

Muunnoksen johtamisessa tarvitaan seuraavaa merkintätapaa. Määritetään muuttuja w_N siten, että $w_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$. Lisäksi johtamisessa tarvitaan muuttujan w_N seuraavaa ominaisuutta

$$w_{pk}^p = (e^{\frac{2\pi i}{pk}})^p = e^{\frac{2p\pi i}{pk}} = e^{\frac{2\pi i}{k}} = w_k,$$

missä $p, k \in \mathbb{R}$. Eli esimerkiksi erityisesti $w_{2k}^2 = w_k$.

Olkoon $x(n)$ jaksollinen lukujono, jonka jakso $N = 2^k$. Määritelmän mukaan diskreetti Fourier-muunnos tälle on

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) w_N^{-kn}.$$

Tarkastellaan erikseen parillis- ja paritonindeksisiä komponentteja ja saadaan

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) w_N^{-n(2k)} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) w_N^{-n(2k+1)}.$$

Nyt edellä mainitun muuttujan w_N ominaisuuden nojalla $w_N^2 = w_{N/2}$, joten

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) w_{N/2}^{-nk} + w_N^{-n} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) w_{N/2}^{-nk}.$$

Merkitään nyt $x_0(k) = x(2k)$ ja $x_1 = x(2k+1)$ ja vastaavasti näiden Fourier-muunnokset $X_0(n)$ ja $X_1(n)$. Tällöin saadaan yhtälö

$$X(n) = X_0(n) + w_N^{-n} X_1(n).$$

Tulkitaan saatua yhtälöä lähteen [2] mukaan. Nyt $X_0(n)$ tarkoittaa siis $N/2$-pituista alkuperäisen signaalin $X_n(n)$ parillisindeksisistä komponenteista koostuvaa osaa ja $X_1(n)$ $N/2$-pituista alkuperäisen signaalin $X_n(n)$ paritonindeksisistä komponenteista koostuvaa osaa. Algoritmi toimii rekursiivisesti eli nämä kaksi $N/2$-pituista osaa on muodostettavista $N/4$-pituisista osista [5].

7. Eri yliopistojen tietotekniikan DI-koulutuksen kandidaatin vaiheen matemaattisen opintosuunnitelman tarkastelua

7.1. Luvun 7 johdanto. Tässä luvussa luodaan ensin katsaus ACM:n ja IEEE Computer Society:n toimittamaan kansainväliseen ohjeistukseen tietotekniikan opetusohjelmien suositelluista sisällöistä [16]. Tämän jälkeen tarkastellaan viiden suomalaisen yliopiston tietotekniikan DI-koulutuksen kandidaattiohjelmaa. Kandidaattiohjelmat toimivat siis pohjana diplomi-insinööriopinnolle. Lisäksi tutkitaan yhdysvaltalaisen MIT:n tietotekniikan DI-koulutuksen kandidaattiohjelmaa vastaavaa opetusohjelmaa. Päätavoitteena tarkastelussa on esitellä opetusohjelman matemaattinen opetussisältö. Lisäksi on esitelty opetusohjelman matemaattisen opetusohjelman oppimistavoitteita. Jos niitä ei ole ollut saatavilla, on kirjattu opetusohjelman yleisiä tavoitteita. Tämän lisäksi on tutkittu esiintyykö opetusohjelmissa Fourier-menetelmiä jossakin muodossa. Luvun lopussa on lyhyt asiantuntijahaastattelu liittyen Jyväskylän yliopiston tietotekniikan DI-koulutuksen kandidaatin vaiheen matemaattiseen opintosuunnitelmaan.

7.2. Katsaus järjestöjen Association for Computing Machinery (ACM) ja Institute of Electrical and Electronics Engineers Computer Society (IEEE) toimittamaan opetusohjelmaoppaaseen. ACM:n ja IEEE Computer Society:n toimittamassa opetusohjelmaoppaassa luodaan ensin yleisempi katsaus tietotekniikan opiskelun matemaattisiin vaatimuksiin ja tämän lisäksi oppaassa on tarkempi erittely suositelluista opetusohjelmaan sisällytettävistä matematiikan osa-alueista [16]. Oppaan on ajateltu olevan vain kehys opetusohjelmien suunnittelulle, sillä tietotekniikan opetus on moninaista ja tietotekniikka alana alati kehittyvää. Matematiikan todetaan oppaassa kuuluvan lähes kaikkiin tietotekniikan opetusohjelmiin. Sisällyttettävät osa-alueet kuitenkin vaihtelevat, mihin vaikuttaa oppaan mukaan opetuksen järjestävä tiedekunnan suuntaus ja matematiikalle varattujen kurssien määrä.

ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan mukaan enemmistö tietotekniikan opiskelijoista hyötyvät esimerkiksi joukko-opin, logiikan ja diskreetin todennäköisyyslaskennan kursseista. Tietotekniikan moninaisuuden vuoksi osa-alueiden merkitys vaihtelee. Oppaassa nostetaan esimerkkinä esiin lineaarialgrebra, josta on on hyötyä esimerkiksi grafiikassa ja taulukointien analysoimisessa ja algoritmeissa, mutta joillakin tietotekniikan osa-alueilla hyöty on pienempi.

ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan mukaan tietotekniikan opiskelijan tulee saavuttaa ”matemaattinen kypsyys”. Tällä tarkoitetaan kykyä ymmärtää tietotekniikassa käytettyjen algoritmien taustoja ja erityisesti niiden tehokkuuden tasoa. Lisäksi nykytrendien mukaisesti todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen perusteet olisi hyvä kyetä hallitsemaan liittyen datan hallintaan. Oppaassa kuitenkin todetaan, että tietotekniikan matematiikan opetusohjelma tulisi suunnitella siten, että opiskelun aloitus ei vaadi erityistä matemaattisen osaamisen taustaa.

ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan kappaleen Appendix A osiossa Discrete Structures eritellään tarkemmin tietotekniikan opetusohjelmaan suositelluista sisällytettävistä matematiikan osa-alueista. Osiossa on kirjattu eri osa-alueiden tarkat sisällöt ja niiden oppimistavoitteet. Aihealuekokonaisuuksia on kuusi ja seuraavaksi tarkastellaan näitä yksitellen.

Ensimmäinen aihealuekokonaisuus on joukot, relaatiot ja funktiot. Joukkojen osuus sisältää joukko-opin perusteet, kuten Vennin diagrammi, yhdisteen, unionin ja komplementin käsitteet ja lisäksi erinäisiä joukkojen muotoja kuten karteesinen tulojoukko. Relaatiosta tulisi sisällyttää tyypillisiä relaatioita, kuten refleksiivisyys, symmetrisyys ja käsitteet, kuten ekvivalenssirelaatio ja osittain järjestetty joukko. Funktioista tulisi sisällyttää käsitteet erityiset funktiot surjektio, injektio ja bijektio, käänteisfunktio, ja yhdistetty funktio. Oppimistavoitteet on listattu seuraavana.

(1) Joukko-opin, relaatioiden ja funktioiden perusmääritelmien selittäminen esimerkkien avulla.
(2) Joukko-oppiin, relaatioihin ja funktioihin liittyvien operaatioiden suorittaminen.
(3) Käytännön sovellusten yhdistäminen joukko-, funktio- tai relaatiomalleihin ja niihin liittyvien operaatioiden ja termistön tulkitseminen.

Toinen aihealuekokonaisuus on logiikka. Tähän sisältyy ehdollinen logiikka, loogiset konnektiivit, totuustaulut, konjunktiivit, kaavojen oikeellisuus, ehdollisen päättelyn säännöt ja predikaattilogiikka. Oppimistavoitteet on listattu seuraavana.

(1) Väittämien kääntäminen vapaamuotoisesta kielestä ehdollisen logiikan ja predikaattilogiikan ilmaisuiksi.
(2) Muodollisten ehdollisen logiikan ja predikaattilogiikan symbolisten menetelmien soveltaminen.
(3) Päättelyn sääntöjen avulla todistusten tuottaminen ehdollisessa ja predikaattilogiikassa.
(4) Symbolisen logiikan hyödyntäminen oikean elämän mallinnuksessa.
(5) Muodollisten loogisten todistusten ja/tai vapaamuotoisen täsmällisen loogisen päättelyn soveltaminen oikeisiin ongelmiin.
(6) Ehdollisen logiikan ja predikaattilogiikan vahvuuksien ja rajoitusten kuvaileminen.

Kolmas aihealuekokonaisuus on todistustekniikat. Siihen sisältyy käsitteet implikaatio, inversio, konversio, kontrapositio ekvivalentti, vastaesimerkki, negaatio ja ristiriita, matemaattisen todistuksen rakenne, suorat todistukset, vastaesimerkillä kumoaminen, ristiriidalla todistaminen, induktio luonnollisilla luvuilla, induktion rakenne, heikko ja vahva induktio, rekursiiviset matemaattiset määritelmät, ja hyvän järjestyksen periaate. Oppimistavoitteet on listattu seuraavana.

(1) Käytetyn todistustavan tunnistaminen.
(2) Kunkin edellä mainitun todistustavan pääpiirteiden tunnistaminen.
(3) Kunkin edellä mainitun todistustavan soveltaminen oikein järkevän argumentin rakentamisessa.

(4) Oikean todistustavan valitseminen.
(5) Matemaattisen ja/tai rakenteellisen induktion ja rekursion tai rekursiivisesti määritellyn rakenteen yhtäläisyyksien selittäminen.
(6) Heikon ja vahvan induktion eron selittäminen ja esimerkin antaminen kunkin äsken mainitun käytöstä.
(7) Hyvän järjestyksen periaatteen ja sen yhteyden matemaattiseen induktioon esittäminen.

Neljäs aihealuekokonaisuus on laskemisen perusteet. Tähän sisältyy käsitteet joukkolaskennan käsitteitä, kuten joukon kardinalisuus ja laskeminen, summan ja tulon säännöt, seulaperiaate, aritmeettiset ja geometriset jonot, kyyhkyslakkaperiaate, permutaatio, kombinaatio, Pascalin sääntö, binomilause, differenssiyhtälöiden ratkaiseminen ja sen esimerkkien hallinta, ja modulaariaritmetiikan perusteet. Oppimistavoitteet on listattu seuraavana.

(1) Joukkolaskennan soveltaminen sisältäen summan ja tulon säännöt, seulaperiaatteen ja aritmeettisen/geometrisen jonon.
(2) Kyyhkyslakkaperiaatteen soveltaminen matemaattisen todistuksen kontekstissa.
(3) Joukon permutaatioiden ja kombinaatioiden laskeminen ja tulkitseminen soveltamisen kontekstissa.
(4) Oikean maailman sovellusten käsittely oikeilla laskutavoilla, kuten esimerkiksi määrittämällä kuinka monella tapaa ihmiset voidaan järjestää pöydän ympärille, alkuehtojen käsittely istumajärjestyssovelluksessa tai tiettyjen korttipelien käsien muodostumistapojen määrien määrittäminen.
(5) Erilaisten perusdifferenssiyhtälöiden ratkaiseminen.
(6) Ongelman analysointi määrittämällä sen perusteella differenssiyhtälö.
(7) Modulaariaritmetiikkaa sisältävien laskujen suorittaminen.

Viides aihealuekokonaisuus on verkot ja puut. Se sisältää käsitteet puu, läpikulkukulkustrategia, suuntaamaton verkko, suunnattu verkko, puun virittäminen, ja puun isomorfoosi. Oppimistavoitteet on listattu seuraavana.

(1) Verkkoteorian peruskäsitteiden sekä erityyppisten puiden ja verkkojen määritelmien havainnollistaminen esimerkein.
(2) Polkujen ja verkkojen erilaisten läpikulkustrategioiden havainnollistaminen.
(3) Erilaisten oikean maailman tietotekniikan ongelmien mallintaminen käyttäen verkkoja ja puita, kuten esittelemällä verkkotopologiaa tai organisaation hierarkista tiedostojärjestelmää.
(4) Verkkojen ja puiden käsitteiden esiintyminen tietojärjestelmissä, algoritmeissa, todistustekniikoissa ja laskennassa.
(5) Verkossa puiden virittämisen selittäminen.
(6) Sen määrittäminen, että ovatko kaksi verkkoa isomorfiset.

Kuudes aihealuekokonaisuus on diskreetti todennäköisyys. Tähän kokonaisuuteen sisältyy äärellinen todennäköisyysavaruus, todennäköisyyden aksioomat ja mitat, ehdollinen todennäköisyys, Bayesin lause, riippumattomuus, kokonaislukusatunnaismuuttujat, odotusarvo, varianssi, ja ehdollinen riippumattomuus. Oppimistavoitteet on listattu seuraavana.

(1) Tapahtumien todennäköisyyksien ja odotusarvojen laskeminen perusongelmissa.
(2) Riippuvaisten ja riippumattomien tapahtumien erottaminen toisistaan.
(3) Tilanteen tunnistaminen, jossa voi käyttää binomijakaumaa ja todennäköisyyden laskeminen sen avulla.
(4) Bayesin lauseen käyttäminen ehdollisen todennäköisyyden laskemiseen.
(5) Todennäköisyyslaskennan työkalujen soveltaminen ongelmissa liittyen esimerkiksi algoritmien analysoinnissa tai tiivistämisen analysoinnissa.
(6) Varianssin laskeminen annetulle todennäköisyysjakaumalle.
(7) Kyky selittää, että miksi riippumattomat tapahtumat voivat olla ehdollisesti riippuvaisia ja päinvastoin sekä tämänlaisten todellisen maailman ongelmien tunnistaminen.

7.3. Eri yliopistojen tietotekniikan opetusohjelmien tarkastelua.

7.3.1. *Jyväskylän yliopiston Tieto- ja ohjelmistotekniikan kandidaattiohjelma.* Tarkastellaan Jyväskylän yliopiston Tieto- ja ohjelmistotekniikan kandidaattiohjelma lukuvuosille 2021-2023 perustuen lähteeseen [7]. Osaamistavoitteiksi on listattu, että opiskelija on omaksunut matemaattisen ajattelun ja loogisen ajattelun perustaidot, osaa analysoida päättelyketjuja ja todentaa niiden oikeellisuuden, osaa soveltaa matematiikkaa johdonmukaisten päätelmien tekemiseen, osaa käyttää tilastollisia menetelmiä havaintojen ja datan analysointiin sekä näistä tehtävien johtopäätösten luotettavuuden arviointiin, on luonut pohjan, joka mahdollistaa jatkamisen matematiikan ja tilastotieteen aine- ja syventäviin opintoihin, osaa arvostaa matematiikkaa ja tilastotiedettä tekniikan alaa tukevina ja eteenpäin vievinä tieteinä, ja on luonut perusteet matematiikan jatkuvalle oppimiselle.

Ohjelmaan sisältyy pakolliset Tekniikan alan matemaattiset perusopinnot laajuudeltaan vähintään 35 opintopistettä. Näistä 25 opintopistettä koostuu kaikille pakollisista kursseista. Kurssit ja niiden sisällöt listattu seuraavaksi.

- Tekniikan alan matematiikan valmistava kurssi (5 op)
  - Alkeisfunktiot
  - Yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaiseminen
  - Funktioiden asymptoottisen kasvuvauhdin arviointi ja vertailu
  - Yhden muuttujan funktion derivaatta
  - Kertymä ja integraalifunktio
  - Summamerkintä ja sarja, summien ja sarjojen yhdistäminen ja katkaiseminen, sekä arvioiminen ylhäältä ja alhaalta
  - Propositiologiikan konnektiivit, vastaesimerkki, päättelyimplikaatio ja päättelyekvivalenssi
  - Avoimen lauseen totuusarvo
  - Joukko-opin perusmerkintöjen (yhdiste, leikkaus, erotus, komplementti) esittely.
- Todistamisen ja päättelyn perusteet tekniikan alalle (5 op)
  - Matemaattisen päättelyn ja logiikan alkeita

  - Suora ja epäsuora päättely
  - Negaation muodostaminen
  - Kyyhkyslakkaperiaate
  - Rekursio, induktiotodistus, rakenteellinen induktio
  - Tietokoneohjelmien todistamisessa tarvittavia käsitteitä
  - Joukko-opin alkeita, äärellisyys, numeroituvuus ja ylinumeroituvuus.
- Todennäköisyysmatematiikka (4 op)
  - Kombinatoriikkaa,
  - Diskreetti odennäköisyys,
  - Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden jakaumat
  - Diskreetit satunnaisvektorit ja yhteisjakaumat
  - Riippumattomuus
  - Ehdollinen jakauma,
  - Tilastollisia tunnuslukuja
  - Jatkuvia jakaumia.
- Joukko-oppi ja graafiteoria (5 op)
  - Joukko-opin peruskäsitteet
  - Relaatiot ja funktiot, relaatioiden ominaisuuksia ekvivalenssiluokat
  - Binääripuut
  - Suuntaamattomat ja suunnatut graafit, kytketyt ja vahvasti kytketyt komponentit
  - Isomorfismi ja bisimilaarisuus.
- Lineaarialgebra ja derivointi tekniikan alalla (6 op)
  - Lineaarikuvaus, lineaarinen ja affiini funktio yhdessä ja kahdessa dimensiossa
  - Lineaarinen yhtälöryhmä ja sen esittäminen matriisiyhtälönä. Ali- ja ylimäärätty systeemi
  - Identiteettimatriisi, käänteismatriisi, determinantti, singulaarisuus, alimatriisit
  - Symmetrinen matriisi, transpoosi, jälki
  - Lineaarikuvausten yhdistetty kuvaus, matriisitulo
  - Kannanvaihto
  - Ominaisarvot ja –vektorit
  - Sisätulo
  - Yleinen äärellisulotteinen vektoriavaruus
  - Funktion derivaatan määritelmä
  - Suunnattu derivaatta ja gradientti, potentiaalifunktio
  - Jacobin matriisi
  - Lineaarialgebran ja derivaatan soveltaminen kuvankäsittelyssä käyttäen Pythonia ja OpenCV kirjastoa.

Loput 10 opintopistettä koostetaan joko tilastotieteen tai ohjelmistoteknisistä kursseista.

Tutkinto-ohjelmaan kuuluu vapaasti valittavia muita tutkinto-ohjelman opintoja. Yksi vaihtoehto on Matematiikan perusopinnot valinnaisina opintoina laajuudeltaan vähintään 25 opintopistettä. Osaamistavoitteina on, että opiskelija tuntee analyysin ja lineaarialgebran peruskäsitteistön ja omaa valmiudet niihin liittyvien tulosten soveltamiseen, ymmärtää matemaattisen teorian yleisen rakenteen ja perustelujen roolin matematiikassa, on vahvistanut menetelmä- ja ongelmanratkaisutaitojaan, ja laajentanut matematiikan osa-alueiden tuntemustaan. Opiskelija voi valita vaihtoehtoisten linjojen A ja B väliltä, joista vaihtoehto B on teoreettisempi. Vaihtoehdon B kerrotaan antavan paremman pohjan matematiikan aineopintoihin.

7.3.2. *Oulun yliopiston tietotekniikan kandidaattiohjelma.* Tarkastellaan seuraavaksi Oulun yliopiston tietotekniikan kandidaattiohjelmaa lähteenä [18]. Opetusohjelman tavotteeksi on todettu, että opiskelija saa vahvan perustan digitalisaatiossa keskeisten tietoteknisten laitteiden ja ohjelmistojen suunnitteluun ja toteuttamiseen ja lisäksi hallitsee alan keskeiset käsitteet, menetelmät ja teknologiat. Opinto-ohjelman pakollisiin perusopintoihin kuuluu kuusi matematiikan kurssia. Kurssit ja niiden sisällöt listattuna seuraavana.

- Matematiikan peruskurssi I (5 op)
  - Epäyhtälöt ja itseisarvo
  - Vektorialgebraa ja analyyttistä geometriaa
  - Funktion käsite ja alkeisfunktiot
  - Funktion monotonisuus, käänteisfunktio
  - Raja-arvot
  - Derivaatta erotusosamäärän raja-arvona, Alkeisfunktioiden derivaatat
  - Funktion kulku ja ääriarvot
  - Käyrän parametriesitys, napakoordinaatit, kompleksiluvut
  - Integraalifunktio ja määrätty integraali, integroinnin sovellukset
  - Osittaisintegrointi, sijoitusmenetelmä ja rationaalifunktioiden integrointi.
- Matriisialgebra (5 op)
  - Matriisien peruskäsitteet ja perusoperaatiot
  - Lineaarinen yhtälöryhmä
  - Vektoriavaruus
  - Matriisin tunnusluvut ja matriisiin liittyvät lineaariset avaruudet
  - Lineaarinen kuvaus ja kannanvaihtomatriisi
  - Neliömatriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit
  - Neliömatriisin diagonalisointi ja sen sovellukset
  - Matriisien LU- ja QR- hajotelmat
  - Lineaarisen yhtälöryhmän iteratiivinen ratkaiseminen
  - Pienimmän neliösumman ratkaisu
  - Cayley-Hamiltonin tulos ja sen sovellukset.
- Matematiikan peruskurssi II (5 op)
  - Lukujonot
  - Sarjat
  - Fourier-sarjat
  - Usean muuttujan reaali- ja vektoriarvoisten funktioiden differentiaali- ja integraalilaskentaa.
- Tilastomatematiikka (5 op)
  - Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet

  - Satunnaismuuttuja
  - Jakaumien tunnusluvut
  - Tunnuslukujen estimointi
  - Hypoteesien testaus
  - Regressioanalyysi.
- Tietotekniikan matematiikka (5 op)
  - Lause- ja predikaattilogiikan alkeita
  - Matemaattinen induktio
  - Lukuteorian alkeita
  - Ekvivalenssi- ja järjestysrelaatio
  - Graafien teoriaa
  - Formaalien kielten alkeita
  - Automaatit, jonokoneet ja Turingin koneet
  - Algoritminen ratkeamattomuus.
- Kompleksianalyysi (5 op)
  - Kompleksiluvut
  - Kompleksimuuttujan funktiot
  - Derivaatta ja analyyttisyys
  - Kompleksiset sarjat
  - Kompleksinen käyräintegraali
  - Cauchyn lause
  - Taylorin ja Laurentin kehitelmät
  - Residylaskenta
  - Sovelluksia signaalinkäsittelyyn.

7.3.3. *Aalto-yliopiston teknistieteellisen Tietotekniikan kandidaattiohjelma.* Tarkastellaan Aalto-yliopiston teknistieteellisen Tietotekniikan kandidaattiohjelman opetussuunnitelmaa lukuvuosilta 2020-2023 käyttäen lähteenä [1]. Opetussuunnitelmaan kuuluu pakollisena 25 opintopisteen matematiikan opinnot. Matematiikan opintojen tavoitteeksi on todettu, että opiskelija kehittää matemaattista osaamista siten, että hän hallitsee eri tietotekniikan osa-alueissa käytössä olevat matemaattiset menetelmät. Matematiikan opintojen kurssit ja niiden sisällöt listattuna seuraavaksi.

- Diskreetin matematiikan perusteet (5 op)
  - Joukko-oppi ja formaali logiikka
  - Verkkoteoria
  - Enumeratiivinen kombinatoriikka
  - Permutaatiot ja symmetria
  - Modulaariaritmetiikka
  - Matematiikan perusmenetelmät ja -käsitteet, kuten määritelmä, lause, todistus, esimerkki
- Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (5 op)
  - Jonot
  - Sarjat
  - Potenssisarjat
  - Derivaatta ja integraali

  - Tavallisten differentiaaliyhtälöiden perustyyppien ratkaisumenetelmät
- Matriisilaskenta (5 op)
  - Vektorilaskentaa
  - Lineaaristen yhtälöryhmien esittäminen matriisimuotoisina
  - Matriisimuotoisten yhtälöryhmien ratkaiseminen Gaussin eliminaatiolla
  - Matriisien peruslaskutoimitukset
  - Neliömatriisin ominaisarvot
  - Matriisihajotelmat
- Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (5 op)
  - Approksimaatioiden laskeminen osittaisderivaattojen avulla
  - Yhtälöryhmien ratkaisu Newtonin menetelmällä
  - Optimoinnin perusideat ja usean muuttujan funktion optimointi
  - Lagrangen kertoimet
  - Taso- ja avaruusintegraalit
- Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi (5 op)
  - Todennäköisyyden käsite ja peruslaskusäännöt
  - Tärkeimmät diskreetit ja jatkuvat todennäköisyysjakaumat
  - Odotusarvo, otoskeskiarvo ja suurten lukujen laki
  - Varianssi, otosvarianssi ja normaaliapproksimaatio
  - Stokastinen riippuvuus ja korrelaatio
  - Datan kuvaileminen tunnuslukujen ja histogrammin avulla
  - Todennäköisyysjakauman parametrien estimointi
  - Tilastollisen luottamusvälin käsite
  - Priorijakauma, uskottavuusfunktio ja posteriorijakauma
  - Yksinkertaisten tilastollisten hypoteesien testaaminen

7.3.4. *Tampereen yliopiston Tietotekniikan kandidaattiohjelma.* Tarkastellaan Tampereen yliopiston Tietotekniikan kandidaattiohjelmaa lukuvuotena 2021-2022 käyttäen lähteenä [15]. Tutkinto-ohjelmaan kuuluu pakollinen laajudeltaan vähintään 45 opintopisteen matemaattisluonnontieteellinen perusopintokokonaisuus. Matematiikan opintojen osalta tavoitteet ovat, että opiskelija ymmärtää matematiikan ja luonnontieteiden roolin oman tieteenalan näkökulmasta, osaa muotoilla fysikaalisen ongelman matemaattiseen muotoon, on perehtynyt oman tieteenalan kannalta tärkeisiin matemaattisiin käsitteisiin ja menetelmiin, osaa soveltaa matematiikkaa ja matemaattisia ohjelmistoja oman tieteenalan opinnoissa, osaa päätellä loogisesti ja analyyttisesti, ja on hankkinut valmiudet jatkaa oman alansa opinto- ja matemaattis-luonnontieteelliseltä pohjalta. Pakollisten matematiikan opintojen osuus on 30 opintopistettä. Pakolliset matematiikan kurssit opintokokonaisuudessa listattuna seuraavaksi.

- Analyysin peruskurssi (5 op)
  - Alkeisfunktiot ja niiden kuvaajat
  - Raja-arvo
  - Funktion kulun tarkastelu
  - Kompleksiluvun koordinaatti- ja eksponenttimuoto, peruslaskutoimitukset molempia esityksiä käyttäen, ja kompleksilukujen juuri

  - Reaalikertoimisen polynomin jakaminen tekijöihinsä
  - Integraalifunktio ja määrätyn integraalin käsitteet
- Vektorit ja matriisit (5 op)
  - Lineaariset yhtälöryhmät ja näiden ratkaisu Gaussin eliminoinnilla
  - Euklidisen avaruuden vektorijoukon lineaarinen riippumattomuus
  - Euklidisen avaruuden aliavaruus, kanta ja dimensio
  - Suorat ja tasot
  - Matriisit, determinantti, ominaisarvot ja diagonalisointi
  - Vektorien pistetulo, ristitulo ja vektorikolmitulo
- Differentiaali- ja integraalilaskenta 5 (op)
  - Integraalifunktio ja perusintegroimistekniikat, ja määrätty sekä epäoleellinen integraali
  - 1. kertaluvun ja 2. kertaluvun lineaariset differentiaaliyhtälöt
  - 1. kertaluvun separoituva differentiaaliyhtälö
  - Lukujonon raja-arvo, kasvavat ja vähenevät lukujonot
  - Sarjat ja niiden suppeneminen
  - Matlabin käyttö
  - Integraalin sovelluksia
  - Käytännön ongelmien mallintaminen differentiaaliyhtälöiksi .
- Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen päättelyyn 5 (op)
  - Todennäköisyyden käsite
  - Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä
  - Ehdollisen todennäköisyyden ja riippumattomuuden käsitteet
  - Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavat
  - Satunnaismuuttujan käsite
  - Todennäköisyysjakauma ja kertymäfunktio
  - Diskreettejä ja jatkuvia jakaumia
  - Keskeinen raja-arvolause
  - Todennäköisyysotanta, piste-estimointi, väliestimointi, merkitsevyystestaus.

Lisäksi opintokokonaisuudessa on valittava kaksi kurssia seuraavasta listasta.

- Operaatiotutkimus (5 op)
  - Optimointiin liittyvät peruskäsitteet
  - Lineaarisen optimointiongelman formulointi
  - Herkkyysanalyysi
  - Keskeisiä lineaarisia optimointiongelmia
  - Epälineaarisia kohdefunktioita, jotka voidaan linearisoida
  - Monitavoiteoptimointi
  - Diskreettejä optimointimalleja
  - Verkkomallit
  - Diskreetti dynaaminen optimointi
- Vektorianalyysi (5 op)
  - Gradientti, divergenssi ja roottori ja niihin liittyvät laskusäännöt

  - Viiva ja sen parametrisointi, derivaatta ja sileys, suunnistus ja vastakäyrä ,viivan pituus, reaaliarvoisen funktion viivaintegraali ja vektorikentän viivaintegraali
  - Greenin lause ja Gaussin lause tasossa
  - Konservatiivinen vektorikenttä, potentiaalifunktio ja sen etsiminen, peruslause ja riippumattomuus tiestä
  - Pinta ja sen parametrisointi, pinnan pinta-ala, reaaliarvoisen funktion pintaintegraali, pinnan suunnistus ja reunakäyrä, vektorikentän vuo ja Gaussin lause
  - Stokesin lause
- Fourier'n menetelmät (5 op)
  - Fourier-sarja: jaksolliset funktiot, sarjan kertoimet, erikoistapauksina parilliset ja parittomat funktiot, Gibbsin ilmiö
  - Kompleksinen Fourier-sarja, Parsevalin lause, sarja funktion taajuushajotelmana
  - Äärellisellä välillä määritellyn funktion täydentäminen jaksolliseksi
  - Diskreetti Fourier-muunnos ja sen ominaisuudet
  - Fourier'n muunnos jaksottomalle funktiolle: määritelmä ja perusominaisuudet, muunnos taajuushajotelmana
  - Nopean Fourier-muunnoksen merkitys
  - Konvoluutio, Parsevalin lause, Diracin delta-funktio työkaluna.
- Graafialgoritmit (5 op)
  - Graafiteorian perusteet (polut, komponentit, leikkaukset, näihin liittyvät algoritmit)
  - Puun käsite (juuri, vanhemmat, lehdet, virittävä puu)
  - Binäärirelaatiot (sulkeumat, järjestysrelaatiot ja näihin liittyvät algoritmit)
  - Algoritmien oikeellisuuden osoittaminen (invariantti ja induktio)
  - Ongelmien mallintaminen (lyhimmät painotetut polut, virtausongelmat, luokitteluongelmat)
  - Graafien ja puiden ohjelmalliset esitystavat (kytkentämatriisi, kytkentälista)
- Tilastollisten menetelmien perusteet (5 op)
  - Lineaarinen regressioanalyysi
  - Yksi- ja kaksisuuntainen varianssianalyysi
  - Logistinen regressioanalyysi
  - Mallien vertailu
  - Eri tilastolliset menetelmät
  - Mallinnus tilastollisen ohjelmiston avulla
- Matemaattisen tilastotieteen perusteet (5 op)
  - Tärkeimmät yksiulotteiset diskreetit ja jatkuvat jakaumat
  - Bernoullin ja Poissonin prosessi
  - Keskeinen rajaväittämä, muuttujien vaihto, momenttifunktio
  - Kaksi- ja moniulotteiset jakaumat
  - Moniulotteinen normaalijakauma ja normaalijakauman muunnokset
  - Otossuureiden jakaumat.

- Diskreetti matematiikka (5 op)
  - Joukko-oppi, logiikka ja looginen päättely: Joukko-opin ja logiikan peruskäsitteet ja operaatiot, indeksöidyt yhdisteet ja leikkaukset, todistamista sekä looginen päättelyjärjestelmä
  - Relaatiot ja funktiot, ekvivalenssirelaatio, bijektio, joukkojen mahtavuus
  - Kombinatoriikka: peruskäsitteet, summa-, tulo- ja kyyhkyslakkaperiaate
  - Modulaariaritmetiikka: kongruessin käsite ja modulaariyhtälön ratkaiseminen
  - Ryhmät ja permutaatiot: permutaatiot transpositioiden tulona ja permutaation etumerkki, permutaatio- ja symmetriaryhmät, permutaatioryhmien manipulointi.
- Usean muuttujan funktiot (5 op)
  - Kahden muuttujan reaaliarvoisen funktion kuvaaja ja tasa-arvokäyrät.
  - Usean muuttujan reaaliarvoiset funktiot: raja-arvo ja jatkuvuus, osittaisderivaatat, korkeammat osittaisderivaatat, suunnattu derivaatta ja gradientti.
  - Derivaattamatriisi ja ketjusääntö.
  - Lokaalit ja globaalit ääriarvot.
  - Taso- ja avaruusintegraalit, laskeminen projisoituvissa joukoissa, laskeminen napa-, sylinteri- ja pallokoordinaatteja käyttäen.

7.3.5. *Lappeenrannan-Lahden teknillisen yliopiston Tietotekniikan kandidaattiohjelma.* Tarkastellaan seuraavaksi Lappeenrannan-Lahden teknillisen yliopiston eli LUT:n Tietotekniikan kandidaattiohjelmaa lukuvuotena 2021-2022 käyttäen lähteenä [9]. Osaamistavoitteissa ainoa matematiikkaan suoraan liittyvä kohta on, että opiskelija osaa kehittää monimutkaisia ja skaalautuvia ohjelmistoja soveltamalla ohjelmistotuotannon teorian periaatteita, työkaluja ja prosesseja, kuin myös tietotekniikan ja matematiikan teorioita ja menetelmiä. Opinto-ohjelman yleisopintokonaisuuteen kuuluu kaksi matematiikan kurssia, jotka listattuna seuraavaksi.

- Tilastomatematiikka I (5 op)
  - Todennäköisyyslaskentaa
  - Satunnaismuuttujat ja tilastolliset perusjakaumat
  - Havaintoaineiston käsittely ja tilastolliset tunnusluvut
  - Tilastollisen päättelyn perusteet
  - Parametrien estimointi
  - Hypoteesien testaus
  - Korrelaatio ja yhden selittävän muuttujan lineaarinen regressioanalyysi
  - Tilastollisten ohjelmistojen käyttöä
- Yliopistomatematiikan perusteet (5 op)
  - Perusteet funktioista,
  - Perusteet derivaatasta, integraalista,
  - Perusteet vektoreista ja matriisilaskennasta
  - Perusteet MATLABin käytöstä

Opinto-ohjelman aineopintokokonaisuuteen kuuluu pakollisena matematiikan kurssina seuraava kurssi.

- Diskreetit mallit ja menetelmät (5 op)
  - Logiikka sisältäen päättelyä, propositiot, konnektiivit, tautologiat ja kvanttorit
  - Loogiset piirit ja kytkentäfunktiot
  - Induktio, rekursio ja rekursioyhtälöt
  - Joukko-oppi
  - Kombinaattoriikka
  - Relaatiot
  - Verkkoteoria
  - Polut ja reittioptimointi
  - Puut
  - Päätösanalyysi

Lisäksi opinto-ohjelman tietotekniikan suuntautumisvaihtoehdon aineopintoihin kuuluu seuraava kurssi.

- Discrete Models and Methods (3 op)
  - logiikka
  - induktio
  - relaatiot
  - kombinatoriikka
  - verkkoteoria
  - polut ja puut
  - matkustusongelmat.

7.3.6. *Massachusetts Institute of Technology undergraduate program for Computer Science and Engineering.* Tarkastellaan seuraavaksi yhtä kansainvälistä esimerkkiä tietotekniikan opetusohjelmista. Tarkastelu on suppea, koska tutkinnot eivät ole kansainvälisesti täysin vastaavat. MIT:ssa on mahdollista lukea Bachelor of Science-tutkinto nimikkeellä Computer Science and Engineering [10]. Laitoksen opetuksen yleiset tavoitteet on mainittu MIT EECS:n nettisivuilla [11]. Tavoitteena on, että opiskelija saa kokonaisvaltaisen kuvan tietotekniikasta tieteenalana, kehittyy ongelmanratkaisussa, kehittyy mallintamisessa ja näin saa hyvän laajan ja hyvän pohjan työelämää varten. Opinto-ohjelman sisältyy kokonaisuus Mathematics for Computer Science[10]. Kurssin sisältökuvauksen mukaan pääpaino opintokokonaisuudessa on tietotekniikassa hyödyllisissä matemaattisissa työkaluissa ja todistuksissa. Tarkemman sisältökuvauksen mukaan aihealueita listattuna seuraavana.

- Logiikka
- Todistusmenetelmät
- Joukot,
- Relaatiot
- Verkkoteoria
- Algoritmien analysointi
- Salaustyökalut
- Diskreetti todennäköisyys.

Lisäksi on mahdollista valita laajalta listalta valinnaisena lisäopintoja. Matemaattisia kokonaisuuksia näistä on listattu seuraavana.

- Introduction to Statistical Data Analysis
- Statistics, Computation and Applications

7.4. Opetusohjelmien sisältöjen tarkastelua. ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaassa todettiin, että tietotekniikan matemaattinen opetus tulisi järjestää siten, että opiskelun aloitus ei vaadi erityistä matemaattisen osaamisen taustaa [16]. Opetusohjelmien voi todeta muistuttavansa toisiaan tältä osin rakenteeltaan. Kauttaaltaan kursseilla lähdetään rakentamaan matemaattista ymmärrystä perusteiden tasolta. Yleisellä tasolla lisäksi yhteistä on, että matemaattiset opinto-ohjelmat on suunniteltu tietotekniikan spesifien vaatimusten pohjalta ja niiden sisällöissä ei juurikaan ole ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaassa mainitsemattomia aihealueita poikkeuksena matemaattisen analyysin opetus vaihtelevalla laajuudella.

7.4.1. *Jyväskylän yliopisto.* Jyväskylän yliopiston tietotekniikan matemaattinen opetusohjelman aloituskurssina järjestetään Tekniikan alan matematiikan valmistava kurssi. Kurssin voi ajatella toimivan yliopistomatematiikan opiskelun aloituksen kuormitusta laskevana tekijänä. Kurssilla tutustutaan alkeisfunktioihin, matemaattisen analyysin perusteisiin, joukko-opin perusteisiin ja logiikkaan. Lisäksi kurssiin kuuluu sarjoihin ja summiin keskittyvä osa. Jo siis valmistavaan kurssiin kuuluu aihealueita, joita ei suoranaisesti sisälly toisen asteen opetussuunnitelmiin [17], joten kurssin voi todeta mukailevan ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan ajatusta tarpeeksi alhaisesta aloituskynnyksestä. Opetusohjelma mukailee muiden kurssien osalta ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan suosituksia. Todistamisen ja päättelyn perusteet-kurssi mukailee pääpiirteittäin ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan kolmatta todistustekniikoiden aihealuekokonaisuutta sisältäen päättelyn alkeita, rekursion ja induktio käsitteet. Lisäksi kurssilla sivutaan neljättä laskemisen aihealuekokonaisuutta kyyhkyslakkaperiaatteen osalta ja toisaalta ensimmäistä aihealuekokonaisuutta sisältäen joukko-opin alkeet. Todennäisyysmatematiikka-kurssin sisältö mukailee ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan kuudetta diskreetin todennäköisyyden aihealuekokonaisuutta. Kurssi keskittyy todennäköisyyslaskennan perusteisiin, satunnaismuuttujan käsitteeseen, jakaumiin ja tilastolaskennan osalta tilastollisiin tunnuslukuihin. Joukko-oppi ja graafiteoria-kurssi esittelee nimensä mukaisesti joukko-opin ja verkkoteorian perusteita. Joukko-opin käsitteet kuuluvat ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan ensimmäiseen aihealuekokonaisuuteen ja verkkoteoria taas viidenteen aihealuekokonaisuuteen. Kurssilla käydään lisäksi ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan ensimmäisen aihealuekokonaisuuteen kuuluvat relaation, funktion, isomorfismin ja bisimilaarisuuden käsitteet. Verkkoteorian käsitteistä käydään binääripuut, suuntaamattomat ja suunnatut verkot ja kytketyt komponentit. Viimeinen pakollinen opetusohjelman kaikille pakollinen matematiikan kurssi on Lineaarialgebra ja derivointi-tekniikan alalla-kurssi. Kurssin sisältö ei kuulu mihinkään oppaan sisältämiin yleisesti suositeltuihin aihealuekokonaisuuksiin. Oppaassa nostetaan kuitenkin lineaarialgrebra esiin aiheena, josta on on hyötyä esimerkiksi grafiikassa ja taulukointien analysoimisessa ja algoritmeissa. Kurssin lineaarialgebraosaan kuuluu aihealueet, kuten lineaarinen kuvaus ja yhtälöryhmä, matriislaskennan perusteet, kannanvaihto, ja sisätulo ja äärellisulotteinen vektoriavaruus. Derivaattaosioon kuuluu muun muassa derivaatan määritelmä, suunnattu derivaatta, gradientti ja potentiaalifunktio. Lisäksi kurssiin kuuluu tietotekniikan näkökulmasta hyödyllinen osa liittyen lineaarialgebran ja derivaatan soveltamiseen kuvankäsittelyssä.

7.4.2. *Oulun yliopisto.* Oulun yliopiston tietotekniikan matematiikan opetusohjelman rakenne koostuu kahdesta niin kutsusta matematiikan peruskurssista ja neljästä tiettyyn aihealueeseen kohdennetummasta kurssista. Matematiikan peruskurssi I-kurssin sisältöön kuuluu ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan ensimmäiseen aihealuekokonaisuuteen kuuluvia funktion peruskäsitteitä, mutta muuten kurssin sisältö ei kuulu oppaan yleisesti suositeltuihin aihealuekokonaisuuksiin. Sama sisällön kuvaus koskee myös Matematiikan peruskurssi II-kurssia, mitä tulee sen sisältöön verrattaessa oppaaseen. Peruskurssien sisältöön kuuluu funktioiden käsitteiden lisäksi matemaattista analyysia sisältäen aiheita kuten raja-arvo, funktion kulun tutkiminen, derivaattalaskenta reaali- ja vektoriarvoisilla funktioilla, integraali ja integrointitekniikat, lukujonot, sarjat ja pieni osuus kompleksiluvuista. Matriisialgebra-kurssi on lineaarialgebran kurssi, joka ei siis aihealueen sisälly ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan yleisesti suositeltuihin aihealuekokonaisuuksiin. Kurssin sältöön kuuluu matriisilaskennan perusteet, lineaarinen kuvaus ja yhtälöryhmä ja kannanvaihto. Verrattuna esimerkiksi Jyväskylän yliopiston lineaarialgebraan keskittyvään kurssiin sisältöön kuuluu lisänä matriisien LU- ja QR-hajotelmat, PNS-ratkaisu ja Cayley-Hamiltonin tulos. Tilastomatematiikka-kurssilla käydään oppaan kuudennen diskreetin aihealuekokonaisuuden mukaisesti todennäköisyyslaskennan perusteita, satunnaismuuttujan käsite, jakaumien tunnusluvut, ja omana erikoispiirteenä hypoteesien testaus ja regressioanalyysi. Loput kaksi kurssia ovat Tietotekniikan matematiikka ja Kompleksianalyysi. Tietotekniikan matematiikka-kurssi sisältää lause- ja predikaattilogiikkaa toisesta aihealuekokonaisuudesta, induktion kolmannesta, relaation ensimmäisestä ja verkkoteoriaa viidennestä. Lisäksi aihealueina on vielä tietotekniikan spesifejä aiheita, kuten formaalin kielen alkeita ja algoritmeja. Kurssi yhdistelee siis useampaa tietotekniikan opiskelijalle hyödyllistä matemaattista aihealuetta. Kompleksianalyysi-kurssi pakollisena omana kompleksianalyysin kurssina on tarkasteltujen opetusohjelmien keskuudessa erikoisuus. Kurssilla käydään kompleksilukujen perusteet, kompleksilukujen analyysia kuten derivaatta ja käyräintegraali, sarjat, kompleksinalyysin tunnettuja tuloksia ja lopuksi kompleksilukujen soveltamisesta signaalinkäsittelyssä.

7.4.3. *Aalto-yliopisto.* Aalto-yliopiston tietotekniikan matematiikan opetusohjelman rakenne koostuu kahdesta differentiaali- ja integraalilaskennan kurssista ja kolmesta selkeästi rajatusta kurssista. Varsinaista yleistä valmistavaa kurssia ei ole. Differentiaali- ja integraalilaskentakurssien sisällöt eivät sisälly oppaan yleisesti suositeltuihin aihealueiseen lukuunottamatta neljänteen aihealuekokonaisuuteen kuuluvia jonoja ja differentiaaliyhtälöiden laskemista. Kursseihin sisältyy näiden lisäksi sarjat, derivaatta ja integraali, osittaisderivaattojen sovelluksia, optimointia, ja taso- ja avaruusintegraaleja. Oppaan suositeltuihin aihealuekokonaisuuksiin ei kuulu myöskään lineaarialgebran Matriislaskenta-kurssi. Kurssiin sisältyy vektorilaskentaa, lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisua, matriisilaskennan perusteita ja matriisihajotelmia. Diskreetin matematiikan perusteet-kurssin sisältö mukailee täysin ACM:n ja IEEE Computer

Society:n oppaan suositeltuja aihealuekokonaisuuksia. Kurssin sisällöistä joukko-opin perusteet kuuluvat ensimmäiseen aihealuekokonaisuuteen, formaali logiikka toiseen, verkkoteoria viidenteen, ja modulaariaritmetiikka, kombinatoriikka ja permutaatio neljänteen. Kurssin lopuksi käydään lisäksi läpi matematiikan kielessä käytettyä termistöä. Viimeisenä osana opetusohjelmassa on Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi-kurssi, joka mukailee ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan kuudetta aihealuekokonaisuutta. Kurssilla käydään todennäköisyyslaskennan perusteet, tilastolaskennan tunnusluvut, eri jakaumia, datan analysointia tunnuslukujen avulla ja hypoteesien testaamista.

7.4.4. *Tampereen yliopisto.* Tampereen yliopiston tietotekniikan matematiikan ohjelman rakenne on muista ohjelmista eriävä. Neljä kurssia on kaikille pakollisia, jonka jälkeen valitaan kaksi kurssia kahdeksan kurssin listasta. Rakenteessa korostuu siis valinnaisuus. ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan suositeltuja aihealuekokonaisuuksia mukailee pakollisista kursseista ainoastaan Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen päättelyyn-kurssi. Kurssi sisältää todennäköisyyslaskennan perusteet, satunnaismuuttujan käsitteen, eri jakaumia, keskeisen raja-arvolauseen, todennäköisyysotannan ja estimoinnin käsitteen. Valinnaisista kursseista kaksi on analyysin kursseja, kaksi diskreetin matemaatiikan ja verkkoteorian kursseja ja kaksi tilastotieteen kursseja. Näiden kurssien lisäksi on mahdollista valita operaatiotutkimuksen kurssi tai Fourier-menetelmien kurssi. Valinnaiset kurssit on eritelty tämän työn osiossa 7.3.4.

7.4.5. *Lappeenrannan-Lahden teknillisen yliopisto.* Lappeenrannan-Lahden teknillisen yliopiston tietotekniikan pakollinen matematiikan ohjelma on tässä työssä esitellyistä ohjelmista kaikista suppein kurssimäärältään. Ohjelman yleisopintokokonaisuuteen kuuluu ainoastaan kaksi matematiikan kurssia. Tilastomatematiikka I-kurssi mukailee ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan kuudetta aihealuekokonaisuutta. Toinen kurssi, Yliopistomatematiikan perusteet, sisältää perusteet funktioista, differentiaalilaskennasta, vektoreista, matriiseista ja MATLABin käytöstä. Ohjelman aineopintokokonaisuuteen kuuluu pakollisena kaksi kurssia. Diskreetit mallit ja menetelmät-kurssin sisältöön kuuluu logiikan perusteet, loogiset piirit ja kytkentäfunktiot, induktio ja rekursio, joukko-oppia, kombinatoriikkaa, diskreettiä matematiikkaa, verkkoteoriaa ja optimointia. Kyseinen kurssi siis sisältää teemoja ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan ensimmäisestä, toisesta, kolmannesta ja viidennestä aihealuekokonaisuudesta. Toinen kurssi on nimeltään Discrete Models and Methods. Sen sisältöön kuuluu logiikka, induktio, relaatiot, kombinatoriikka, verkkoteoria, polut ja puut ja matkustusongelmat. Kurssi siis mukailee ACM:n ja IEEE Computer Society:n oppaan ensimmäistä, toista, neljättä ja viidettä aihealuekokonaisuutta.

7.4.6. *MIT-yliopisto.* Tämän työn osioon 7.3 haluttiin sisällyttää yksi kansainvälinen esimerkki tietotekniikan matematiikan ohjelmien osalta. Tälläiseksi esimerkiksi valikoitui yhdysvaltalaisen Massachusetts Institute of Technology-yliopiston tietotekniikan matematiikan ohjelma. Opinto-ohjelman matemaattiseen opintokokonaisuuden sisältöön kuuluu aihealueet logiikka, todistusmenetelmät, joukot, relaatiot, verkkoteori, algoritmit, salaustyökalut ja diskreetti todennäköisyys. Lisäksi valinnaisissa opinnoissa on tarjolla johdanto tilastolliseen analyysiin.

7.4.7. *Fourier-menetelmien esiintyvyys ja opinto-ohjelmissa mainitut esitiedot.* Tarkastellaan seuraavaksi Fourier-menetelmien esiintyvyyttä edellä mainituissa opinto-ohjelmissa. Lisäksi esitellään Fourier-menetelmiä sisältävien kurssien esitiedot. Jyväskylän yliopiston tietotekniikan DI-kandidaatin opinnoissa on mahdollista valita suuntaaviksi opinnoiksi laskennallinen suunta ja sieltä Numeeriset menetelmät-kurssi. Kurssin sisältöön kuuluu FFT-menetelmä. Esitietoina kurssille suositellaan analyysin, lineaarialgebran ja differentiaaliyhtälöiden perusteet [7].

Oulun yliopiston tietotekniikan DI-kandidaatin opinnoissa pakolliseen aineopintokokonaisuuteen kuuluu 5 opintopisteen kurssi Signaalianalyysi. Kurssin sisältöön kuuluu Fourier-analyysi ja nopea Fourier-muunnos. Esitietoina kurssille suositellaan matriisialgebran kurssia, tilastomatematiikan kurssia ja kompleksianalyysin kurssia. Lisäksi jo matematiikan opintoohjelman Matematiikan peruskurssi II-kurssiin sisältyy Fourier-sarjat, jonka esitietoina on Matematiikan peruskurssi I [18].

Aalto-yliopiston tietotekniikan DI-kandidaatin opintoihin ei suoranaisesti sisälly kurssia, jossa käsiteltäisiin Fourierin menetelmiä. Aalto-yliopiston matematiikan ja systeemianalyysin laitos järjestää kurssin Fourier-analyysi. Tämän kurssin esitietovaatimuksissa on mainittu kaksi kurssia, joista toinen on edellä listattu Differentiaali- ja integraalilaskenta 1. Toinen kurssi on lineaarialgebran kurssi. Näin ollen DI-opiskelijalla olisi valmiudet opiskella myös tämä kurssi [1].

Tampereen yliopiston tietotekniikan DI-kandidaatin opinnoissa on mahdollista valita vapaavalintaisten kurssien listalta Fourier-menetelmät-kurssi. Kurssin sisältöön kuuluu Fourier-sarja, kompleksinen Fourier-sarja, diskreetti Fourier-muunnos ja FFT-menetelmä. Esitiedoissa on mainittu vaatimus siitä, että opiskelija hallitsee kompleksiluvut, trigonometrian ja integroinnin [15].

Lappeenranta-Lahden teknillisen yliopiston DI-kandidaatin opinnoissa sivuaineopintokokonaisuudeksi on mahdollista valita Elektroniikka, jonka kurssilistasta löytyy kurssi Signaalien digitaalinen käsittely I. Kyseisen kurssin sisältöön kuuluu diskreetti Fourier-muunnos ja sen soveltaminen. Matemaattisina esitietoina on listattu kompleksilukulaskennan perusteet ja lukusarjojen laskennan perusteet [9].

7.5. Asiantuntijahaastattelu. Jyväskylän yliopiston professori Petri Juutinen on ollut mukana suunnittelemassa Jyväskylän yliopiston DI-koulutuksen matematiikan opintosuunnitelmaa. Juutinen oli mukana pohtimassa kurssien yksityiskohtaisia sisältöjä ja osaamistavoitteita. Juutista haastateltiin sähköpostitse tähän tutkielmaan 9.11.2022. Kysymyksiä esitettiin kolme.

Ensimmäinen kysymys oli “Pakollisen matemaattisen opintokokonaisuuden laajuus tietotekniikan DI-koulutuksen kandivaiheessa on rajallinen. Mihin perustuen Jyväskylän yliopiston aihepiirirajaus tehtiin?” Juutinen vastasi “Matematiikan opintoihin käytettävä opintopistemäärä tosiaan on rajallinen. Opintojen sisältöjä valittaessa hyödynnettiin tieto- ja ohjelmistotekniikan kansainvälisiä suosituksia käyttäen ACM:n ja IEEE Computer Society:n opasta. Nämä puolestaan perustuvat mm. valmistuneiden ja työelämään siirtyneiden haastatteluihin ja käsitykseen siitä, millaista matematiikkaa he ovat työurallaan tarvinneet. Noissa suosituksissa korostetaan diskreetin matematiikan, logiikan ja todennäköisyyslaskennan merkitystä, ja jätetään mm. analyysi ja lineaarialgebra hiemaa perinteistä insinöörimatematiikkaa pienempään rooliin.”

Toinen kysymys oli “Tietotekniikan DI-koulutus on järjestetty Jyväskylän yliopistossa alkaen syksystä 2021. Mitä ajatuksia sinulla on nykyisestä matematiikan opintokokonaisuudesta?” Juutinen vastasi: “Kokonaisuutta ei ole vielä saatu kokonaan testattua, sillä osa kursseista pidetään ensimmäisen kerran tänä lukuvuonna. On vielä liian aikaista sanoa, miten hyvin kokonaisuus toimii, mutta ainakin oman käsitykseni mukaan valitut sisällöt ovat oikeita. Kurssien toteutustapa, vaativuustaso ja yksityiskohtainen sisältö tulee toki vielä jonkin verran muuttumaan, kuten käy kaikille uusille kursseille niiden elinkaaren alkuvaiheessa.

Kolmas kysymys oli “Miten Jyväskylän yliopiston DI-koulutuksen kandivaiheen matematiikan opintokokonaisuutta voisi kehittää tulevaisuudessa?” Juutinen vastasi:” Jyväskylän DI-koulutus tulee jatkossa laajenemaan muihinkin aihepiireihin kuin tieto- ja ohjelmistotekniikkaan. Samalla pitää arvioida nykyisten matematiikan opintojen soveltuvuutta näille uusille aloille. Matematiikan opintoja tullaan arvioimaan myös DI-opiskelijoiden pääaineen (tietotekniikka) opettajilta tulevan palautteen perusteella, ja tarvittaessa sisältöihin tai toteutustapoihin tehdään muutoksia. Matematiikan ja tilastotieteen laitos antaa siis tässä tapauksessa asiakkaan (DI-koulutusalat) toiveiden mukaista opetusta, käytettävissä olevat resurssit huomioiden.”

Lisäksi Juutinen kommentoi vielä yleisemmin “ Suunnittelussa lähdettiin liikkeelle ns. puhtaalta pöydältä, eli tehtiin aluksi kartoitus siitä, mitä taitoja kurssien tulisi tuottaa ja mitkä sisällöt ovat keskeisiä. Tämän jälkeen mietittiin keinoja tavoitteiden saavuttamiseen ja tarvittavia resursseja. Vasta hyvin myöhäisessä vaiheessa pohdittiin mahdollisuuksia hyödyntää jo olemassa olevaa opetustarjontaa DI-koulutuksen matematiikan opetuksessa; tämä ei siis ollut suunnittelun lähtökohta, vaan se tuli kuvaan mukaan vasta siinä vaiheessa, kun kokonaisuuden runko oli hahmottumassa.”

Lähdeluettelo

[1] Aalto-yliopisto: *Aalto-yliopiston opetussuunnitelma ja -ohjelma 2022-2024 (Aalto-yliopisto 2022), into.aalto.fi, viitattu 6.12.2022.*

[2] Cambridge University: *Numerical recipes in Fortran 77: The art of scientific computing (Cambridge University Press 1986).*

[3] Eirola T.: *Luentomoniste kurssille Osittaisdifferentiaaliyhtälöt (Aalto-yliopisto, 2003).*

[4] Gajic Z. *Linear Dynamic Systems and Signals (Prentice Hall, 2003)* .

[5] Huttunen H.: *Opetusmoniste kurssille Signaalinkäsittelyn menetelmät 2005 (Tampereen teknillinen yliopisto (nyk. Tampereen yliopisto)).*

[6] Juutinen P.: *Luentomoniste kurssille Differentiaaliyhtälöt (Jyväskylän yliopisto 2008).*

[7] Jyväskylän yliopisto: *Jyväskylän yliopiston opetussuunnitelma ja -ohjelma 2020-2023 (Jyväskylän yliopisto 2020), opinto-opas.jyu.fi, viitattu 6.12.2022.*

[8] Kilpeläinen T. *Luentomoniste kurssille Kompleksianalyysi 1 (Jyväskylän yliopisto 2015)* .

[9] Lappeenrannan-Lahden teknillinen yliopisto: *Lappeenrannan-Lahden teknillinen yliopiston opetussuunnitelma ja -ohjelma 2020-2023 (Jyväskylän yliopisto 2020), https://forms.lut.fi/Opinto-opas/, viitattu 6.12.2022.*

[10] Massachusetts Institute of Technology: *Catalog of undergraduate program for Computer Science and Engineering (MIT 2022), catalog.mit.edu, viitattu 6.12.2022.*

[11] Massachusetts Institute of Technology: *MIT Electrical Engineering (MIT 2022), www.eecs.mit.edu, viitattu 6.12.2022.*

[12] Parviainen M.: *Luentomoniste kurssille Harmonic Analysis (Jyväskylän yliopisto 2010*

[13] Parviainen M.: *Lecture notes for the course Partial differential equations (Jyväskylän yliopisto, 2019).*

[14] Rajala K.: *Luentomoniste kurssille Vektoricalculus 1 ja 2 (Jyväskylän yliopisto 2018).*

[15] Tampereen yliopisto: *Tampereen yliopiston opetussuunnitelma ja -ohjelma 2021-2022 (Tampereen yliopisto 2021), https://www.tuni.fi/fi/opiskelijan-opas, viitattu 1.6.2022.*

[16] The Joint Task Force on Computing Curricula Association for Computing Machinery (ACM) and IEEE Computer Society : *Computer Science Curricula 2013, Curriculum Guidelines for Undergraduate Degree Programs in Computer Science (2013).*

[17] Opetushallitus: *Lukion opetussuunnitelma 2019.*

[18] Oulun yliopisto: *Oulun yliopiston opinto-opas 2022-2023 (Oulun yliopisto 2022-2023), opas.peppi.oulu.fi, viitattu 6.12.2022.*