

Äärellisesti viritettyjen ryhmien kasvunopeus,
hyperbolisuus ja päätyjen lukumäärä

Joona Rätty

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2022

Tiivistelmä: Joonas Rätty, *Äärellisesti viritettyjen ryhmien kasvunopeus, hyperbolisuus ja päätyjen lukumäärä* (engl. *Number of ends, growth and hyperbolicity of finitely generated groups*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 49 s., liitteet 7 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2022.

Tämän tutkielman tavoitteena on tutkia ryhmiä geometrian avulla. Tähän tarkoitukseen esitellään ryhmän Cayleyn kaavio, joka on jonkin ryhmän viritäjäjoukon pohjalta muodostettu graafi. Cayleyn kaaviosta saadaan luonnollisella tavalla muodostettua geodeesinen metrinen avaruus, jonka pohjalta voidaan tehdä päätelmiä myös alkuperäisestä ryhmästä.

Vaikka Cayleyn kaavio on riippuvainen valitusta viritäjäjoukosta, osoittautuu että jotkin Cayleyn kaavion geometriset piirteet säilyvät kaikilla äärellisillä viritäjäjoukoilla. Tämän formalisoimista varten määritellään kvasi-isometriat, jotka ovat metristen avaruuksien välisiä kuvauksia, jotka tietyssä mielessä pysyvät lähellä isometrioita.

Tutkielmassa tarkastellaan ryhmiä kolmen eri geometrisen piirteen kautta. Nämä ovat hyperbolisuus, ryhmän päätyjen lukumäärä ja ryhmän kasvunopeus. Näiden avulla tutkielmassa karakterisoidaan ryhmät, joilla on additiivisen ryhmän \mathbb{Z} kanssa isomorfinen äärellisen indeksin aliryhmä. Lisäksi osoitetaan, että hyperbolisuuden tai päätyjen lukumäärän avulla voidaan päätellä, että ryhmällä on toisen asteen vapaan ryhmän kanssa isomorfinen aliryhmä.

Tutkielman lopussa käydään vielä läpi joitain esimerkkejä, jotka havainnollistavat missä määrin hyperbolisuus, päätyjen lukumäärä ja kasvunopeus liittyvät toisiinsa.

Sisällys

1 Johdanto	1
2 Ryhmät metrisinä avaruuksina	3
2.1 Sanametriikka	3
2.2 Kvasi-isometrisyys	5
2.3 Cayleyn graafit	7
2.4 Schwarzin ja Milnorin lemma sekä Kleinin kombinaatiolause	9
3 Ryhmän kasvunopeus	11
3.1 Kasvufunktioiden vertailua	11
3.2 Ryhmän kasvufunktio	13
4 Hyperboliset ryhmät	16
4.1 Hyperboliset geodeesiset avaruudet	16
4.2 Hyperbolisien ryhmien vapaat aliryhmät	20
5 Avaruuden päädyt	29
5.1 Metrisen avaruuden päädyt	29
5.2 Ryhmien päädyt	33
6 Erityisiä esimerkkejä	38
6.1 Lineaarisen kasvun ryhmät	38
6.2 Eksponentiaalisen kasvun ryhmät	42
6.2.1 Hyperbolista geometriaa	45
6.3 Yhteenveto	48
Kirjallisuutta	49
A Graafit metrisinä avaruuksina	50

1 Johdanto

Geometrinen ryhmäteoria on 1900-luvun loppupuolella omaksi kokonaisuudekseen muodostunut matematiikan ala, joka käyttää geometrisiä menetelmiä ryhmien tutkimiseen. Esimerkiksi ryhmien \mathbb{Z}^n voidaan ajatella muistuttavan avaruuksia \mathbb{R}^n , kun taas vapailla ryhmillä on samoja piirteitä säännöllisten puiden (vasen graafi kuvassa 11) kanssa. Yksi keskeisistä ideoista on käsitellä myös itse ryhmää metrisenä avaruutena. Ryhmien käsittely metrisinä avaruuksina on johtanut merkittäviin tuloksiin, kuten Gromovin lause polynomisesta kasvusta [6], Stallingin rakennelause [11] sekä Gromov-hyperbolisten ryhmien teoria [7].

Tapa, jolla ryhmistä rakennetaan metrisen avaruus on riippuvainen jostain sille valitusta virittäjäjoukosta. Jotta avaruuden pohjalta tehdyt päätelmät eivät kuitenkaan riippuisi virittäjäjoukon valinnasta, tutkielmassa rajoitaudutaan äärellisesti viritettyihin ryhmiin äärellisillä virittäjäjoukoilla ja tarkastellaan ryhmistä vain karkeita geometrisiä piirteitä. Virittäjäjoukosta johtuvat erot saadaan häivytettyä, kun avaruutta tarkastellaan ”riittävän kaukaa”.

Tutkielman ensimmäisessä kappaleessa esitellään käsitteistöä ja keskeisimpiä työkaluja. Ryhmän virittäjäjoukon pohjalta muodostetun sanametriikan avulla ryhmistä saadaan metrisiä avaruuksia. Kvasi-isometrioiden avulla taas voidaan samaistaa kahden äärellisen virittäjäjoukon antamat metriset avaruudet. Kappaleessa selitetään pintapuolisesti, kuinka ryhmään voidaan yhdistää geodeesinen metrisen avaruus, ryhmän Cayleyn kaavio. Tämän konstruktion tekniset yksityiskohdat käsitellään liitteessä A. Lopuksi esitellään myöhempiä kappaleita varten Schwarzin ja Milnorin lemma sekä Kleinin kombinaatiolause.

Ryhmän kasvunopeuden määrittämisestä ja tutkimista varten tutustutaan aluksi kasvavien funktioiden kasvunopeuksien vertailemiseen. Tämän jälkeen ryhmästä tehdään metrisen avaruus ja tarkastellaan, kuinka nopeasti tämän metrisen avaruuden pallojen alkioiden lukumäärä kasvaa suhteessa pallon säteeseen. Näin saadaan kasvava funktio, joka määrää ryhmän kasvunopeuden. Lopuksi osoitetaan kasvunopeuden avulla, että avaruudet \mathbb{R}^n ja \mathbb{R}^m ovat kvasi-isometrisiä jos ja vain jos $n = m$.

Hyperboliset ryhmät ovat yksi geometrisen ryhmäteorian keskeisistä tutkimuskohteista. Niitä käsittelevässä kappaleessa käydään läpi hyperbolisuuden määritelmä kapeiden kolmioiden avulla, sekä osoitetaan että kvasi-isometriat säilyttävät hyperbolisuuden. Lisäksi näytetään, että epätriviaaleilla hyperbolisilla ryhmillä on toisen asteen vapaan ryhmän F_2 kanssa isomorfinen aliryhmä.

Metrisen avaruuden X päädyt ovat sen ”polkuyhtenäiset komponentit äärettömydessä,” sopivissa tilanteissa päätyjen lukumäärä voidaan määrittellä sen mukaan, kuinka moneen rajoittamattomaan polkuyhtenäiseen osaan avaruus voidaan jakaa poistamalla kompakti joukko. Ryhmän päädyt taas saadaan vastaavalla tavalla ryhmän Cayleyn kaavion avulla. Keskeisinä tuloksina näytetään, että ryhmällä voi olla vain 0, 1, 2 tai äärettömästi päätyjä ja että myös äärettömät päätyiset ryhmät sisältävät vapaan ryhmän F_2 kanssa isomorfisen aliryhmän.

Viimeisessä kappaleessa tarkastellaan, missä määrin hyperbolisuus, päätyjen lukumäärä ja kasvunopeus liittyvät toisiinsa. Osoitetaan, että ryhmät, joilla on äärettömän syklisen ryhmän \mathbb{Z} kanssa isomorfinen äärellisen indeksin ali-

ryhmä, voidaan karakterisoida niin hyperbolisuuden, päätyjen lukumäärän, kasvunopeuden kuin kvasi-isometrioidenkin avulla. Hyperbolisuuden ja päätyjen lukumäärän avulla voidaan päätellä myös, onko ryhmällä eksponentiaalinen kasvunopeus. Kappaleessa annetaan neljä esimerkkiä, joiden valossa näiden kolmen geometrinen piirteiden välillä ei ole tämän enempää relaatioita.

2 Ryhmät metrisinä avaruuksina

2.1 Sanametriikka

Ryhmästä G voidaan muodostaa metrinen avaruus jonkin virittäjäjoukon S suhteen määrittelemällä alkioden g ja $h \in G$ välinen etäisyys sen mukaan, kuinka monella joukon

$$S \cup S^{-1} := S \cup \{s^{-1} : s \in S\}$$

alkiolla alkioita g pitää kertoa, jotta päätaan alkioon h . Selvästi näin määritelty metrinen avaruus riippuu virittäjäjoukon valinnasta, mutta osoittautuu, että rajoittumalla äärellisiin virittäjäjoukkoihin eri virittäjäjoukkojen erot saadaan jollain tasolla häivytettyä. Kappaleen sisältö on geometrisen ryhmäteorian perusteita ja vastaavat määritelmät sekä osa tuloksista löytyy esimerkiksi lähteistä [2], [3], [4] ja [10].

Määritelmä 2.1. Olkoon G joukon $S \subset G$ virittämä ryhmä. Alkion $g \in G$ sanapituus virittäjäjoukon S suhteen on

$$|g|_S := \min\{n \in \mathbb{N} : g = s_1 s_2 \dots s_n, s_i \in S \cup S^{-1}\}, \quad |e|_S = 0,$$

missä e on ryhmän neutraalialkio. Sanametriikka $d_S : G \times G \rightarrow \mathbb{N}$ määritellään asettamalla

$$d_S(g, h) := |g^{-1}h|_S.$$

Virittäjäjoukosta tuleva alaindeksi S jätetään usein merkitsemättä. Tällöin valittu virittäjäjoukko on joko selvä asiayhteydestä tai sillä ei ole erityistä merkitystä.

Lause 2.2. Pari (G, d_S) on metrinen avaruus.

Todistus. Tarkastetaan metriikan kolme vaatimusta:

1. Olkoon $g, h \in G$. Tällöin $d_S(g, h) = 0$ jos ja vain jos $g^{-1}h = e$, eli $g = h$.
2. Jos $d_S(g, h) = n$, niin löydetään $s_i \in S \cup S^{-1}$ siten, että

$$g^{-1}h = s_1 s_2 \dots s_n,$$

jolloin

$$h^{-1}g = (g^{-1}h)^{-1} = s_n^{-1} \dots s_2^{-1} s_1^{-1}$$

ja $d_S(h, g) \leq n$. Toistamalla päättely etäisyydelle $d_S(h, g)$ saadaan

$$d_S(g, h) = d_S(h, g) \text{ kaikilla } g, h \in G.$$

3. Olkoon $g, h, f \in G$, $d_S(g, h) = n$ ja $d_S(h, f) = m$. Tällöin löytyy $s_i \in S \cup S^{-1}$ siten, että

$$g^{-1}h = s_1 s_2 \dots s_n \text{ ja } h^{-1}f = s_{n+1} s_{n+2} \dots s_{n+m}.$$

Nyt saadaan

$$g^{-1}f = g^{-1}h h^{-1}f = s_1 s_2 \dots s_{n+m},$$

joten

$$d_S(g, f) \leq d_S(g, h) + d_S(h, f). \quad \square$$

Esimerkki. Olkoot G ja H ryhmiä ja $f : G \rightarrow H$ bijektio, tällöin f on diskreettien metristen avaruuksien (G, d_G) ja (H, d_H) välinen isometria.

Esimerkki. Vasemmalta kertominen antaa ryhmän G toiminnan metrisen avaruuden (G, d_S) isometrioina, sillä

$$d_S(hg, hg') = |g^{-1}h^{-1}hg'|_S = d_S(g, g').$$

Selvästi myös jokainen ryhmän G aliryhmä antaa toiminnan avaruuden (G, d_S) isometrioina. Tarkastelemalla etäisyyttä $d_S(h, gh)$ on selvää, että kertominen oikealta on toiminta isometrioina jos ja vain jos ryhmä on kommutatiivinen. Vasemmalta ja oikealta kertomisen ero on seurausta mielivaltaisesta valinnasta metriikan määrittelyyn yhteydessä, yhtä hyvin oltaisiin voitu valita $d(g, h)_S = |gh^{-1}|_S$.

Ensimmäisen esimerkin valossa virittäjäjoukolla on astettava joitain rajoitteita mielenkiintoisen teorian aikaansaamiseksi, jatkossa oletetaan, että ellei toisin mainita, niin jokainen virittäjäjoukko S on äärellinen ja vastaavasti jokainen ryhmä G äärellisesti viritetty. Valitulla äärellisellä virittäjäjoukolla taas ei yleensä ole merkitystä.

Geometrisessa ryhmäteoriassa ei usein tehdä eroa sellaisten ryhmien välillä, joilla on isomorfiset äärellisen indeksin aliryhmät. Seuraava lause on tällöin hyödyllinen, sillä se karakterisoi äärellisen indeksin aliryhmät puhtaasti metrisen ominaisuuden avulla.

Lause 2.3. (Äärellisesti viritetyn) ryhmän G aliryhmän H indeksi on äärellinen jos ja vain jos

$$\sup_{g \in G} (\min_{h \in H} d(g, h)) := \sup_{g \in G} d(g, H) = M < \infty.$$

Todistus. ” \Rightarrow ” Olkoon $A \subset G$ äärellinen joukko siten, että

$$G = \bigcup_{a \in A} Ha.$$

Olkoon $g \in G$, tällöin $g = ha$ joillekin $h \in H$ ja $a \in A$. Edelleen

$$d(g, H) \leq d(g, h) = d(ha, h) = |a|$$

ja

$$\sup_{g \in G} d(g, H) \leq \sup_{a \in A} |a| < \infty.$$

” \Leftarrow ” Olkoon $g \in G$ tällöin löytyy $h \in H$ siten, että $|h^{-1}g| \leq M$, joten

$$g \in Hh^{-1}g$$

ja edelleen

$$G = \bigcup_{f \in \overline{B}_G(e, M)} Hf.$$

Suljetun pallon $\overline{B}_G(e, M)$ alkioiden lukumäärä on äärellinen, sillä

$$\overline{B}_G(e, M) = \{s_1 s_2 \dots s_n \in G : 1 \leq n \leq M \text{ ja } s_i \in S \cup S^{-1}\} \cup \{e\}$$

ja edelleen

$$|\{s_1 s_2 \dots s_n \in G : 1 \leq n \leq M \text{ ja } s_i \in S \cup S^{-1}\} \cup \{e\}| \leq (|S \cup S^{-1}| + 1)^M + 1.$$

□

2.2 Kvasi-isometrisyys

Kvasi-isometria on heikennetty versio isometriasta, jossa avaruuksien voidaan ajatella muistuttavan toisiaan kaukaa katsottuna. Näin voidaan samaistaa saman ryhmän eri äärellisten virittäjäjoukkojen antamat metriset avaruudet sekä myöhemmin määritelty ryhmän Cayleyn kaavio.

Määritelmä 2.4. Olkoot (X, d) ja (X', d') metrisiä avaruuksia ja $C > 0$. Kuvaus $F : X \rightarrow X'$ on *C-kvasi-isometrinen upotus*, jos

$$\frac{1}{C}d(x, y) - C \leq d'(F(x), F(y)) \leq Cd(x, y) + C$$

kaikilla $x, y \in X$. *C-kvasi-isometrinen upotus F on kvasi-isometria*, jos $F(X)$ on lisäksi *C-tiheä*, eli $\sup_{x' \in X'} d'(x', F(X)) \leq C$. Avaruudet X ja X' ovat *kvasi-isometrisiä*, jos on olemassa kvasi-isometria $F : X \rightarrow X'$.

Huomautus. Kuvaus $F : X \rightarrow X'$ on kvasi-isometria jos ja vain jos löytyy luvut $A > 0, B, C, D, E$ siten, että

$$Ad(x, y) - B \leq d'(\psi(x), \psi(y)) \leq Cd(x, y) + D.$$

ja $\sup_{x' \in X'} d'(x', F(X)) \leq E$. Selvästi nämä vakiot löytyvät kvasi-isometrioidille. Käänteisen osoittamiseksi valitaan $C' = \max\{\frac{1}{A}, B, C, D, E\}$.

Lause 2.5. Jos $F : X \rightarrow X'$ on kvasi-isometria, niin on olemassa kvasi-isometria $\overline{F} : X' \rightarrow X$. Kahden kvasi-isometrian yhdistetty kuvaus on kvasi-isometria.

Todistus. Olkoon $F : X \rightarrow X'$ kvasi-isometria vakiolla C . Valinta-aksiiooman nojalla voidaan valita $\overline{F} : X' \rightarrow X$ siten, että $d'(x', F \circ \overline{F}(x')) \leq C$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} d'(x', y') &\leq d'(x', F \circ \overline{F}(x')) + d'(F \circ \overline{F}(x'), F \circ \overline{F}(y')) + d'(F \circ \overline{F}(y'), y') \\ &\leq 2C + Cd(\overline{F}(x'), \overline{F}(y')) + C \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} d(\overline{F}(x'), \overline{F}(y')) &\leq Cd'(F \circ \overline{F}(x'), F \circ \overline{F}(y')) + C^2 \\ &\leq C(2C + d'(x', y')) + C^2, \end{aligned}$$

lisäksi

$$\begin{aligned} d(x, \overline{F}(X')) &\leq d(x, \overline{F} \circ F(x)) \\ &\leq Cd'(F(x), F \circ \overline{F} \circ F(x)) + C^2 \\ &\leq 2C^2, \end{aligned}$$

joten \overline{F} on kvasi-isometria.

Olkoon $F : X \rightarrow X'$ ja $G : X' \rightarrow X''$ C -kvasi-isometrioita, tällöin

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq Cd'(F(x), F(y)) + C^2 \\ &\leq C(Cd''(G \circ F(x), G \circ F(y)) + C^2) + C^2 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} d''(G \circ F(x), G \circ F(y)) &\leq Cd'(F(x), F(y)) + C \\ &\leq C(Cd(x, y) + C) + C, \end{aligned}$$

joten kuvaus $G \circ F$ on kvasi-isometrinen upotus. Osoitetaan lopuksi että $G \circ F(X)$ on $C^2 + 2C$ -tiheä: Olkoon $x'' \in X''$, voidaan olettaa, että tällöin löytyy $x' \in X'$ siten, että

$$d''(x'', G(x')) \leq C.$$

Edelleen löydetään $x \in X$ siten, että

$$d'(x', F(x)) \leq C,$$

joten saadaan

$$\begin{aligned} d''(x'', G \circ F(x)) &\leq d''(x'', G(x')) + d''(G(x'), G \circ F(x)) \\ &\leq C + Cd'(x', F(x)) + C \\ &\leq 2C + C^2. \quad \square \end{aligned}$$

Lause 2.6. Olkoon S ja S' ryhmän G äärellisiä virittäjäjoukkoja. Tällöin (G, d_S) ja $(G, d_{S'})$ ovat kvasi-isometrisia.

Todistus. Osoitetaan, että identtinen kuvaus on kvasi-isometria vakiolla

$$C = \max\{|s|_{S'} : s \in S\} \cup \{|s'|_S : s' \in S'\}.$$

Olkoon $g \in G$, $|g|_S = n$ ja $g = s_1 s_2 \dots s_n$, missä $s_i \in S \cup S^{-1}$. Tällöin jokaiselle $s_i \in S \cup S^{-1}$ löydetään $k \leq C$ ja $s'_j \in S' \cup S'^{-1}$ siten, että

$$s_i = s'_1 s'_2 \dots s'_k$$

ja näin ollen $|g|_{S'} \leq Cn = C|g|_S$. Vastaavasti $|g|_S \leq C|g|_{S'}$ kaikilla $g \in G$, joten

$$d_S(g, h) = |g^{-1}h|_S \leq C|g^{-1}h|_{S'} = Cd_{S'}(g, h) \leq C^2 d_S(g, h)$$

ja väite seuraa. \square

Määritelmä 2.7. Äärellisesti viritetyt ryhmät G ja H ovat *kvasi-isometrisia*, jos metriset avaruudet (G, d_S) ja $(H, d_{S'})$ ovat kvasi-isometrisia kaikilla äärellisillä virittäjäjoukoilla S ja S' .

Huomautus. Lauseiden 2.5 ja 2.6 nojalla äärellisesti viritetyt ryhmät G ja H ovat kvasi-isometrisia jos ja vain jos (G, d_S) ja $(H, d_{S'})$ ovat kvasi-isometrisia joillakin äärellisillä virittäjäjoukoilla S ja S' .

2.3 Cayleyn graafit

Cayleyn graafit ovat keskeinen osa geometriska ryhmäteoriaa, sillä ne ovat paljon helppokäyttöisempiä metrisiä avaruuksia kuin ainmin esitetty (G, d_S) . Cayleyn graafin konstruktion idea on yksinkertainen, yhdistetään metrisen avaruuden (G, d_S) pisteet g, h isometrisellä kopiolla yksikköintervallista jos ja vain jos $d_S(g, h) = 1$. Tähän liittyy kuitenkin paljon teknisiä yksityiskohtia, joita on avattu liitteessä A.

Määritelmä 2.8. Graafi $\mathbb{G} = (V, E)$ koostuu joukoista V ja

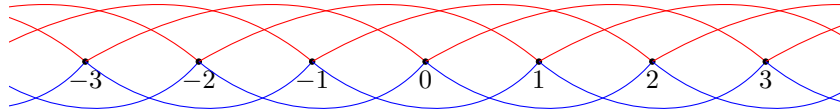
$$E \subset \{A \subset V : |A| = 2\}.$$

Joukon V alkioita kutsutaan *kärjiksi* ja joukon E alkioita *sivuiksi*.

Määritelmä 2.9. Graafin (V, E) äärellinen jono $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$, jolle pätee $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ kaikilla $i = 0, \dots, n-1$ on kärkiä v_0 ja v_n yhdistävä *polku*, jonka pituus on n . Graafi on *yhtenäinen*, jos jokainen kärkipari voidaan yhdistää polulla.

Määritelmä 2.10. Ryhmän G Cayleyn graafi $\text{Cay}(G; S)$ virittäjäjoukon S suhteen on graafi, jossa $V = G$ ja $E = \{\{g, gs\} : g \in G, s \in S \cup S^{-1} \setminus \{e\}\}$.

Cayleyn graafilla tullaan myöhemmin tarkoittamaan myös graafin liittyvää metristä avaruutta (lause 2.15).



Kuva 1: Osa Cayleyn graafista $\text{Cay}(\mathbb{Z}; \{2, 3\})$, graafin sivut on kuvattu kaarella, joka yhdistää sivuun kuuluvat kärjet. Selvästi tämä on yhtenäinen graafi. Huomaa myös, kuinka tämä graafi muistuttaa avaruutta \mathbb{R} .

Määritelmä 2.11. *Geodeesinen segmentti* tai *geodeesi* avaruudessa X on isometrinen upotus $s : I \rightarrow X$, missä $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Geodeesin s kuvajoukkoa kutsutaan myös geodeesiksi ja sille käytetään merkintää $[s(a), s(b)] = \text{Im}(s)$. Metrinen avaruus on (yksikäsitteisesti) *geodeesinen*, jos jokainen pistepari voidaan yhdistää (yksikäsitteisellä) geodeesisella segmentillä. *Geodeesinen säde* on isometrinen upotus $r : [0, \infty) \rightarrow X$ ja *geodeesinen viiva* on isometrinen upotus $l : \mathbb{R} \rightarrow X$. Määritellään vastaavalla tavalla myös kvasi-geodeesit kvasi-isometrisinä upotuksina.

Lause 2.12. Olkoon $s : [0, n] \rightarrow X$. Oletetaan, että löytyy kasvava lukujono $t_i \in \mathbb{R}$,

$$0 = t_0 < t_1 < t_2, \dots, < t_k = n$$

siten, että $s|_{[t_i, t_{i+1}]}$ on geodeesi kaikilla $0 \leq i \leq k-1$. Jos $d(s(0), s(n)) = n$, niin kuvaus s on geodeesi.

Todistus. Olkoon $a, b \in [0, n]$ ja $a < b$. Lisäämällä pisteet a ja b sopivaan väliin jonossa t_i saadaan uusi kasvava lukujono u_i , jolle edelleen pätee, että $s|_{[u_i, u_{i+1}]}$ on geodeesi. Olkoon k_1 ja k_2 siten, että $a = u_{k_1}$ ja $b = u_{k_2}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
n &= d(s(0), s(n)) \\
&\leq \sum_{i=0}^{k_1-1} d(s(u_i), s(u_{i+1})) + d(s(a), s(b)) + \sum_{i=k_2+1}^{k-1} d(s(u_i), s(u_{i+1})) \\
&= \sum_{i=0}^{k_1-1} (u_{i+1} - u_i) + d(s(a), s(b)) + \sum_{i=k_2}^{k-1} (u_{i+1} - u_i) \\
&= a + d(s(a), s(b)) + n - b \\
&\leq a + \sum_{i=k_1}^{k_2-1} d(s(u_i), s(u_{i+1})) + n - b \\
&= a + b - a + n - b = n,
\end{aligned}$$

joten $d(s(a), s(b)) = |a - b|$ ja kuvaus s on isometrinen upotus. \square

Seuraus 2.13. Kuvaus $s : [0, n] \rightarrow X$ on geodeesi, jos se on lokaali isometrinen upotus ja $d(s(0), s(n)) = n$.

Todistus. Valitaan jokaiselle $a \in [0, n]$ $\varepsilon > 0$ siten, että $s|_{(a-\varepsilon_a, a+\varepsilon_a) \cap [0, n]}$ on isometrinen upotus. Kokoelma

$$\bigcup_{a \in [0, n]} (a - \varepsilon_a/2, a + \varepsilon_a/2) \cap [0, n]$$

on kompaktin joukon $[0, n]$ avoin peite, joten löydetään äärellinen pistejoukko $A \subset [0, n]$ siten, että

$$[0, n] = \bigcup_{a \in A} (a - \varepsilon_a/2, a + \varepsilon_a/2) \cap [0, n].$$

Järjestämällä pisteet

$$\{a \pm \varepsilon_a/2 \in [0, n] : a \in A\} \cup \{0, n\}$$

suuruusjärjestykseen saadaan lauseen 2.12 vaatima jono. \square

Määritelmä 2.14. Metrinen avaruus X on *kunnollinen*, jos jokainen suljettu pallo on kompakti.

Jokaisen yhtenäisen graafin \mathbb{G} pohjalta voidaan rakentaa graafin ”geometrisen realisaatio” $|\mathbb{G}|$ korvaamalla jokainen sivu $e = \{v, w\}$ isometrisellä kopiolla yksikköintervallista ja samaistamalla kärjet v ja w välin päätepisteiden kanssa. Metriikka ja geodeesit saadaan yhdistämällä sopivasti välin $[0, 1]$ euklidista metriikkaa ja graafin kärkien välisiä polkuja. Tämä konstruktio ja seuraavan lauseen todistus on esitetty liitteessä A.

Lause 2.15. Olkoon S ryhmän G äärellinen viritäjäjoukko, tällöin $|\text{Cay}(G; S)|$ on kunnollinen geodeesinen metrinen avaruus. Lisäksi:

- On olemassa kuvaus $\text{Id} : (G, d_S) \rightarrow |\text{Cay}(G; S)|$, joka on isometrinen upotus ja 0.5-tiheä. Erityisesti kuvaus on 1-kvasi-isometria.
- Ryhmä G toimii avaruuden $|\text{Cay}(G; S)|$ isometrioina siten, että

$$g\text{Id}(h) = \text{Id}(gh) \text{ kaikilla } g, h \in G.$$

- Jos $g \in \text{Im}(\text{Id})$ ja $d(g, h) \in \mathbb{Z}$, niin $h \in \text{Im}(\text{Id})$.

Jatkossa Cayleyn kaaviolla voidaan tarkoittaa myös avaruutta $|\text{Cay}(G; S)|$, merkintää $\text{Cay}(G; S)$ käytetään myös avaruudelle $|\text{Cay}(G; S)|$ ja merkintää g käytetään myös pisteelle $\text{Id}(g)$.

2.4 Schwarzin ja Milnorin lemma sekä Kleinin kombinaatiolause

Esitetään vielä lopuksi myöhempiä kappaleita varten kaksi tutkielman ja geometrisen ryhmäteorian kannalta hyödyllistä lausetta.

Määritelmä 2.16. Ryhmän G toiminta avaruuteen X on *kunnollinen*, jos

$$|\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\}| < \infty$$

kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset X$.

Lause 2.17 (Schwarzin ja Milnorin lemma). Olkoon X geodeesinen ja kunnollinen metrinen avaruus. Olkoon G ryhmä, ja $\psi : G \rightarrow \text{isom}(X)$ kunnollinen toiminta avaruuden X isometrioina. Oletetaan lisäksi, että tekijäjoukko

$$X/G := \{Gx : x \in X\}, \text{ missä } Gx := \{gx \in X : g \in G\}$$

on kompakti. Tällöin G on äärellisesti viritetty ja kvasi-isometrinen avaruuden X kanssa. Erityisesti jokaiselle $x \in X$ kuvaus $\phi : G \rightarrow X$, $\phi(g) = gx$ on kvasi-isometria.

Todistus. Katso [3, Thm. IV.B.23]. □

Lause 2.18. Olkoon G äärellisesti viritetty ryhmä ja H sen äärellisen indeksin aliryhmä. Tällöin G ja H ovat kvasi-isometrisia.

Todistus. Osoitetaan, että aliryhmän H toiminta graafin $\text{Cay}(G; S)$ geometriseen realisaatioon on kunnollinen ja $\text{Cay}(G; S)/H$ kompakti, jolloin väite seuraa lauseesta 2.17. Olkoon $K \subset \text{Cay}(G; S)$ kompakti, voidaan olettaa, että $K \subset B_{\text{Cay}(G; S)}(e, R)$, jolloin

$$\{g \in H : K \cap gK \neq \emptyset\} \subset \{g \in H : d(e, g) < 2R\} = B_G(e, 2R) \cap H$$

ja joukko $B_G(e, 2R)$ on äärellinen, joten toiminta on kunnollinen. Lauseen 2.3 nojalla löytyy $M < \infty$ siten, että

$$\sup_{c \in \text{Cay}(G;S)} d(c, H) \leq \sup_{g \in G} d(g, H) + 0.5 = M,$$

joten projektiokuvauksen $\pi : \text{Cay}(G;S) \rightarrow \text{Cay}(G;S)/H$ rajoittuma joukkoon $\overline{B}(e, M)$ on surjektio, ja edelleen tekijäavaruus $\text{Cay}(G;S)/H$ on kompaktin joukon jatkuvana kuvana kompakti. \square

Lause 2.19 (Kleinin kombinaatiolause). Olkoon G ryhmä, joka toimii joukkoon X ja $g, h \in G$. Oletetaan, että on olemassa joukon X epätyhjät osajoukot X_1 ja X_2 siten, että $X_1 \not\subset X_2$. Jos pätee, että

$$g^n(X_1) \subset X_2 \text{ ja } h^n(X_2) \subset X_1 \text{ kaikilla } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

niin $\langle g, h \rangle$ on isomorfinen toisen asteen vapaan ryhmän kanssa.

Todistus. Katso [3, Thm. II.B.24]. \square

Esimerkki.

$$\langle A, B \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

on kahden matriisin virittämä toisen asteen vapaa ryhmä.

Todistus. Induktiolla voidaan todeta, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ja } B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

Valitaan joukot

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\},$$

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > |x|\}.$$

Olkoon $n \neq 0$ ja $|y| > |x|$. Tällöin

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2ny \\ y \end{pmatrix},$$

ja

$$|x + 2ny| \geq ||x| - |2ny|| = 2|ny| - |x| > |y|,$$

joten $A^n(X_2) \subset X_1$. Vastaavalla tavalla saadaan myös $B^n(X_1) \subset X_2$. \square

3 Ryhmän kasvunopeus

3.1 Kasvufunktioiden vertailua

Esistellään aluksi yleisemmällä tasolla kasvufunktiot ja niiden kasvunopeuksia vertailemalla saatavat ekvivalenssiluokat. Tämän jälkeen sovelletaan kehitettyä teoriaa äärellisesti viritettyihin ryhmiin ja näytetään kasvufunktioiden avulla, että \mathbb{R}^n ja \mathbb{R}^m ovat kvasi-isometrisia jos ja vain jos $n = m$. Kappaleen pääasiallisena lähteenä on käytetty kirjaa [3], josta löytyy paljon kattavampi käsittely kasvunopeudesta sekä osa myös tässä kappaleessa esitetyistä todistuksista.

Määritelmä 3.1. (Yleinen) *Kasvufunktio* on kasvava funktio $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Merkitään

$$\mathcal{K} = \{f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : f \text{ on kasvava}\}$$

Määritelmä 3.2. Kasvufunktio f *dominoi* kasvufunktiota g , jos löytyy vakio $C \geq 0$ siten, että

$$g(t) \leq Cf(Ct + C) + C \text{ kaikilla } t \in [0, \infty).$$

Merkitään $g \preceq f$, jos funktio f dominoi funktiota g . Jos $f \preceq g$ ja $g \preceq f$ niin sanotaan, että funktioilla on sama kasvunopeus ja merkitään $g \sim f$. Toisaalta jos $g \preceq f$ ja funktio g ei dominoi funktiota f , niin voidaan merkitä myös $g \prec f$.

Määritelmä 3.3. Joukon A *relaatio* on joukko $R \subset A \times A$. Käytetään relaation yhteydessä merkintää aRb , jos $(a, b) \in R$. *Osittain järjestetty* joukko on pari (A, \leq) , missä \leq on joukon A relaatio ja

1. $a \leq a$ kaikilla $a \in A$.
2. Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$.
3. Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$.

Täydellisesti järjestetty joukko on osittain järjestetty joukko, jossa lisäksi

$$a \leq b \text{ tai } b \leq a \text{ kaikilla } a, b \in A.$$

Lause 3.4. Kasvufunktiolle määritelty relaatio \sim on ekvianssirelaatio. Relaatio \preceq määrää osittaisen, mutta ei täydellisen järjestyksen joukkoon \mathcal{K}/\sim .

Todistus. Suoraan määritelmästä seuraa, että kaikilla $f, g \in \mathcal{K}$ pätee $f \sim f$ ja $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$. Oletetaan, että $f \sim g$ ja $g \sim h$, tällöin löytyy $C > 0$ siten, että

$$\begin{aligned} f(t) &\leq Cg(Ct + C) + C \text{ ja} \\ g(t) &\leq Ch(Ct + C) + C, \end{aligned}$$

joten

$$f(t) \leq Cg(Ct + C) + C \leq C^2h(C(Ct + C) + C) + 2C$$

ja $f \preceq h$. Vastaavasti myös $h \preceq f$, joten $f \sim h$, relaation on transitiivinen ja näin ollen myös ekvivalenssirelaatio.

Olkoon $[g], [h] \in \mathcal{K}/\sim$, asetetaan $[g] \preceq [h]$, jos $g \preceq h$ kaikilla $g \in [g]$ ja $h \in [h]$. Selvästi tämä on osittainen järjestys ja jälkimmäisen väitteen osoittamiseksi riittää löytää kasvufunktiot f ja g , jotka eivät ole keskenään vertailtavissa. Asetetaan $f(x) = x$ ja

$$g(x) = \begin{cases} 2^{2^{2n+1}}, & \text{kun } x \in (2^{2^{2n}}, 2^{2^{2n+2}}], \quad n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{kun } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Oletetaan, että $g \preceq f$, jolloin

$$\begin{aligned} 2^{2^{2n+1}} &= g(2^{2^{2n}} + 1) \\ &\leq C f(C(2^{2^{2n}} + 1) + C) + C \\ &= C^2 2^{2^{2n}} + 2C^2 + C \end{aligned}$$

$2^{2^{2n+1}} = 2^{2 \cdot 2^{2n}} = (2^{2^{2n}})^2$, joten jakamalla puolittain luvulla $2^{2^{2n}}$ saadaan

$$2^{2^{2n}} \leq C^2 + \frac{2C^2 + C}{2^{2^{2n}}},$$

mikä on selvä ristiriita. Toisaalta, jos $f \preceq g$ voidaan valita $x_n = 2^{2^{2n}}/C - 1$, jolloin

$$\begin{aligned} 2^{2^{2n}}/C - 1 &= f(x_n) \\ &\leq C g(Cx_n + C) + C \\ &= C 2^{2^{2n-1}} + C, \end{aligned}$$

josta edelleen seuraa

$$\begin{aligned} 2^{2^{2n}} &\leq C(C 2^{2^{2n-1}} + C + 1) \Leftrightarrow \\ 2^{2^{2n-1}} &\leq C^2 + \frac{C^2 + C}{2^{2^{2n-1}}}. \end{aligned} \quad \square$$

Joukon \mathcal{K}/\sim alkioita kutsutaan kasvunopeuksiksi. Seuraava lause osoittaa, että erilaisia polynomien antamia kasvunopeuksia (polynomisia kasvunopeuksia) on äärettömästi, kun taas eksponenttifunktiot kuuluvat kaikki samaan kasvunopeuteen (eksponentiaalinen kasvunopeus).

Lause 3.5. Olkoon $a < b$ ja $1 < c$ tällöin $x^a \prec x^b \prec c^x \sim e^x$.

Todistus. ” $x^a \preceq x^b$ ” On selvä, sillä $x^a \leq (x+1)^b + 1$.

” $x^b \not\prec x^a$ ” Oletetaan, että löytyy $C \in \mathbb{R}$ siten, että

$$x^b \leq C(Cx + C)^a + C.$$

Tällöin riittävän suurella M ja kaikilla $x > M$ saadaan

$$\begin{aligned} x^b &= x^{b-a} x^a \leq C(Cx + C)^a + C \\ &\leq 2C(Cx + C)^a \\ &\leq 2C(2Cx)^a \\ &= (2C)^{a+1} x^a. \end{aligned}$$

Toisaalta kaikilla $x > (2C)^{\frac{a+1}{b-a}}$ saadaan $x^{b-a} > (2C)^{a+1}$, mikä on ristiriita.

” $x^b \leq c^x$ ” Valitaan $C > 1$ siten, että $\log(Cc) \geq b$, tällöin

$$\begin{aligned} \log(x) &\leq x \\ \Rightarrow b \log(x) &\leq x \log(Cc) \\ \Rightarrow x^b &\leq (Cc)^x \\ &\leq C(Cc + C)^x + C. \end{aligned}$$

” $c^x \not\leq x^b$ ” Oletetaan, että löytyy C ja M siten, että kaikilla $x > M$

$$\begin{aligned} c^x &\leq Cx^b \\ \Rightarrow x \log(c) &\leq \log(C) + b \log(x), \end{aligned}$$

jolloin L'Hôpitalin säännöllä saadaan

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(C) + b \log(x)}{x \log(c)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b/x}{\log(c)} = 0,$$

mikä on ristiriita.

” $c^x \sim e^x$ ” Valitsemalla $d = \log(c)$ saadaan

$$c^x = e^{\log(c)x} = e^{dx} \leq C e^{Cx+C} + C, \text{ missä } C = \max\{1, d\}$$

vastaavasti

$$e^x = c^{x/d} \leq C c^{Cx+C} + C, \text{ missä } C = \max\{1, 1/d\}. \quad \square$$

3.2 Ryhmän kasvufunktio

Määritelmä 3.6. Olkoon G äärellisesti viritetty ryhmä ja S sen äärellinen virittäjäjoukko. Kuvaus $\beta_{G;S} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\beta_{G;S}(x) = |\{g \in G : |g|_S \leq x\}|$$

on ryhmän *kasvufunktio* joukon S suhteen.

Esimerkki. Tarkastellaan vapaata ryhmää F_n vapaan virittäjäjoukon S suhteen:

$$\begin{aligned} \{g \in F_n : |g|_S = 0\} &= 1 \\ \{g \in F_n : |g|_S = 1\} &= 2n \\ \{g \in F_n : |g|_S = 2\} &= 2n(2n-1), \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $|s_1 s_2| = 2$ jos ja vain jos $s_1 \neq s_2^{-1}$. Edelleen saadaan

$$\beta_{F_n;S}(k) = 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} 2n(2n-1)^{i-1} = 1 + 2n \frac{(2n-1)^{\lfloor k \rfloor} - 1}{2n-2}.$$

Tämä on myös tarkka yläraja minkä tahansa ryhmän kasvufunktiolle, jossa $|S| \leq 2n$.

Esimerkki. Edellisen esimerkin ja lauseen 3.5 valossa äärellisesti viritetyn ryhmän kasvufunktiolle pätee $\beta_{G;S} \preccurlyeq e^x$, joten kasvunopeus voi olla korkeintaan eksponentiaalinen. Äärelliselle ryhmälle G pätee $\beta_{G;S}(x) \leq |G|$, mistä seuraa, että jokaisen äärellisen ryhmän kasvunopeus vastaa vakiofunktiota.

Lause 3.7. Jos on olemassa kvasi-isometrinen upotus $(H, d_S) \rightarrow (G, d_{S'})$, niin $\beta_{H,S} \preccurlyeq \beta_{G,S'}$.

Todistus. Olkoon $F : H \rightarrow G$ C -kvasi-isometrinen upotus, tällöin

$$d_G(F(g), F(e)) \leq C d_H(g, e) + C,$$

joten

$$F(B_H(e, r)) \subset B_G(F(e), Cr + C).$$

Jos $F(g) = F(h)$, niin

$$\frac{1}{C} d_H(g, h) - C \leq d_G(F(g), F(h)) = 0,$$

joten $d_H(g, h) \leq C^2$ ja edelleen

$$|F^{-1}(F(g))| \leq |\overline{B}_H(g, C^2)| = \beta_{H,S}(C^2) \text{ kaikilla } g \in H.$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} \beta_{H,S}(r) &= |\overline{B}_H(e, r)| \leq |\overline{B}_H(e, C^2)| |\overline{B}_G(F(e), Cr + C)| \\ &= \beta_{H,S}(C^2) \beta_{G,S'}(Cr + C), \end{aligned}$$

joten $\beta_{H,S} \preccurlyeq \beta_{G,S'}$. □

Seuraus 3.8. Kvasi-isometrisillä ryhmillä on sama kasvunopeus. Koska kahden eri äärellisen viritäjäjoukon antamat metriset avaruudet ovat kvasi-isometriset, ryhmän kasvunopeus ei riipu viritäjäjoukon valinnasta.

Jatkossa viritäjäjoukko saatetaan jättää merkittämättä, jolloin merkintä β_G tarkoittaa ryhmän jonkin kasvufunktion määräämää ekvivalenssiluokkaa, ryhmän kasvunopeutta.

Määritelmä 3.9. Ryhmän kasvunopeus on polynominen, jos $\beta_G = [n^d]$ jollakin $d \in \mathbb{N}$, jos $d = 1$, niin kasvunopeus on lineaarinen. Ryhmän kasvunopeus on eksponentiaalinen, jos $\beta_G = [e^n]$.

Melko yllättävää on, että jos ryhmän kasvunopeus on polynominen, niin luvun d on oltava kokonaisluku. Tämä on seurausta Gromovin polynomisen kasvun lauseesta [6]. On myös olemassa ryhmiä, joiden kasvunopeus ei ole polynominen eikä eksponentiaalinen sekä ryhmiä, joiden kasvunopeudet eivät ole keskenään verrattavissa [5].

Lause 3.10. Äärellisesti viritetyn ryhmän G äärellisesti viritetylle aliryhmälle H pätee

$$\beta_H \preceq \beta_G.$$

Todistus. Olkoon S ja S' ryhmien H ja G äärelliset viritäjäjoukot. Valitaan

$$C = \max_{s \in S} \{|s|_{S'}\},$$

jolloin $d_{H;S}(h, g) \leq Cd_{G;S'}(h, g)$, $B_H(e, r) \subset B_G(e, Cr)$ ja edelleen

$$\beta_{H;S}(r) \leq \beta_{G;S'}(Cr). \quad \square$$

Seuraus 3.11. Jos ryhmällä on kahden viritäjän vapaan ryhmän kanssa isomorfinen aliryhmä, niin sen kasvunopeus on eksponentiaalinen.

Lause 3.12. Ryhmän \mathbb{Z}^n kasvufunktio on ekvivalentti polynomien $p(x) = x^n$ kanssa.

Todistus. Seurauksen 3.8 nojalla voidaan olettaa ryhmän \mathbb{Z}^n viritäjäjoukoksi standardikanta

$$S = \{(0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0) \in \mathbb{Z}^n\},$$

jolloin metriikalle pätee

$$|(a_1, a_2, \dots, a_n)|_S = \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Näin saadaan

$$\beta_{\mathbb{Z}^n;S}(t) \leq (2t + 1)^n,$$

sillä

$$\overline{B}(\mathbb{Z}^n, t) \subset \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n : |a_i| \leq t\}.$$

Toisaalta

$$t^n \leq \beta_{\mathbb{Z}^n;S}(nt),$$

koska

$$\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n : |a_i| \leq t\} \subset \overline{B}(\mathbb{Z}^n, nt). \quad \square$$

Seuraus 3.13. Lauseista 3.5 ja 3.12 seuraa, että \mathbb{Z}^n ja \mathbb{Z}^m ovat kvasi-isometrisiä jos ja vain jos $n = m$. Koska \mathbb{Z}^n ja \mathbb{R}^n ovat kvasi-isometriset, vastaava tulos pätee myös avaruuksille \mathbb{R}^n ja \mathbb{R}^m .

4 Hyperboliset ryhmät

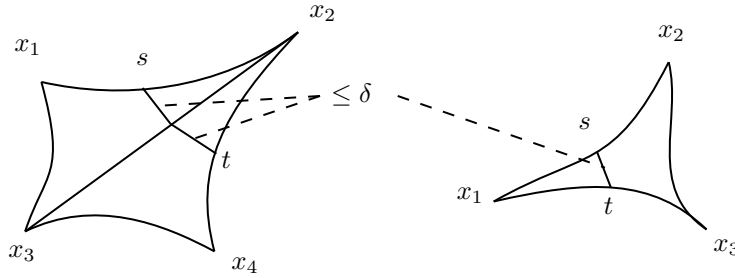
4.1 Hyperboliset geodeesiset avaruudet

Hyperbolisien ryhmien tutkimuksen katsotaan alkaneen artikkelista [7], jossa Gromov antaa useita eri määritelmiä hyperbolisesta ryhmästä ja yleistää näin negatiivisen kaarevuuden käsitteen geometrisen ryhmäteorian käyttöön. Hyperbolisilta ryhmiltä on löydetty useita mielenkiintoisia algebrallisia ominaisuuksia, joista muutama osoitetaan seuraavassa kappaleessa ja muita löytyy muun muassa Gromovin alkuperäisestä artikkelista sekä kirjoista [2], [4] ja [10].

Tässä kappaleessa määritellään geodeesisen avaruuden hyperbolisuus Eliyahu Ripsiin liitetyn Ripsin ehdon, eli kapeiden kolmioiden avulla, sekä osoitetaan sen perusominaisuuksia. Ryhmän hyperbolisuus voidaan tämän jälkeen määritellä Cayleyn kaavion hyperbolisuuden pohjalta. Kappaleen pääasiallisena lähteenä on toiminut kirja [4].

Määritelmä 4.1. Olkoon X geodeesinen avaruus. *Kolmio* $\triangle(x_1, x_2, x_3)$ koostuu kolmesta pisteestä $x_1, x_2, x_3 \in X$ sekä joistakin pisteitä yhdistävien geodeesien kuvajoukoista $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ ja $[x_3, x_1]$.

Määritelmä 4.2. Kolmio $\triangle(x_1, x_2, x_3)$ on δ -kapea, jos jokaiselle $i \in \{1, 2, 3\}$ ja $t \in [x_i, x_{i+1}]$ löytyy $s \in [x_{i+2}, x_i] \cup [x_{i+1}, x_{i+2}]$ siten, että $d(t, s) \leq \delta$. Nyt ja jatkossa kolmioiden alaindeksien yhteydessä yhteenlasku tulee tulkita mod 3. Jos geodeesisen metrisen avaruuden X kaikki kolmiot ovat δ -kapeita, niin X on (δ -)hyperbolinen.



Kuva 2: Kolmioita vastaavalla tavalla voidaan määritellä neliö neljän pisteen ja niitä yhdistävien geodeesien avulla. Hyperbolisessa avaruudessa neliöt ovat 2δ -kapeita, sillä yhdistämällä kaksi neliön vastakkaisista pistettä saadaan kaksi δ -kapeaa kolmiota.

Esimerkki. Jokainen rajoitettu metrisen avaruus X on $\sup_{x,y \in X} d(x,y)$ -hyperbolinen. \mathbb{R} on 0-hyperbolinen, yleisemmin jokainen metrisen graafi, jossa ei ole silmukoita on 0-hyperbolinen. Hyperbolinen avaruus \mathbb{H}^n on $\operatorname{arccosh}(\sqrt{2})$ -hyperbolinen [4, Proposition 4.67]. Avaruus \mathbb{R}^n standardimetriikalla ei ole hyperbolinen, jos $n > 1$.

Määritelmä 4.3. Joukkojen $A, B \subset X$ Hausdorffin etäisyys on

$$d_{\text{Haus}}(A, B) := \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}.$$

Lemma 4.4. On olemassa $R(\delta, C)$ siten, että jos X on δ -hyperbolinen avaruus ja $s : [0, L] \rightarrow X$ on C -kvasi-geodeesi, niin

$$d_{\text{Haus}}(s([0, L]), [s(0), s(L)]) \leq R.$$

Todistus. Katso [4, Thm. 11.40]. □

Lause 4.5. Olkoon $F : X \rightarrow X'$ kvasi-isometrinen upotus geodeesisten metristen avaruuksien X ja X' välillä. Jos X' on hyperbolinen, niin X on hyperbolinen.

Todistus. Oletetaan, että kuvaus $F : X \rightarrow X'$ on C -kvasi-isometrinen upotus ja X' on δ -hyperbolinen. Valitaan kolmio $\Delta(x_1, x_2, x_3) \subset X$. Kvasi-isometria F kuvaa geodeesit $[x_i, x_{i+1}]$ C -kvasi-geodeeseiksi X' , joten lemmän 4.4 nojalla löytyy R siten, että

$$d_{\text{Haus}}([F(x_i), F(x_{i+1})], F([x_i, x_{i+1}])) \leq R.$$

Lisäksi kolmio $\Delta(F(x_i), F(x_{i+1}), F(x_{i+2}))$ on δ -kapea. Olkoon $t \in [x_i, x_{i+1}]$, tällöin löytyy $t' \in [F(x_i), F(x_{i+1})]$, jolle $d(F(t), t') \leq R$. Hyperbolisuuden nojalla voidaan olettaa, että löytyy $s' \in [F(x_{i+1}), F(x_{i+2})]$, jolle $d(t', s') \leq \delta$. Lopuksi löydetään $s \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$, jolle $d(F(s), s') \leq R$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} d(s, t) &\leq Cd(F(s), F(t)) + C^2 \\ &\leq C(d(F(s), s') + d(s', t') + d(t', F(t))) + C^2 \\ &\leq C(2R + \delta + C). \end{aligned}$$

Arvio pätee kaikille $t \in \Delta(x_1, x_2, x_3)$ ja näin ollen kolmio $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ on $C(2R + \delta + C)$ -kapea. Edelleen arvio ei riipu valitusta kolmiosta, joten X on hyperbolinen. □

Lause 4.6. Olkoon $s : [0, L] \rightarrow X$ ja $s' : [0, L'] \rightarrow X$ hyperbolisen avaruuden X geodeeseja siten, että $s(0) = s'(0) = e$ ja $d(s(L), s'(L')) \leq D$. Tällöin $d(s(t), s'(t)) \leq D + 2\delta$ kaikilla $t \in [0, \min\{L, L'\}]$.

Todistus. Tarkastellaan kolmiota $\Delta(e, s(L), s'(L'))$. Pistelle

$$s(t) \in [e, s(L)] \text{ ja } s'(t) \in [e, s'(L')]$$

löytyy vastakkaisilta geodeeseilta pisteet

$$x \in [e, s'(L')] \cup [s(L), s'(L')] \text{ ja } y \in [e, s(L)] \cup [s(L), s'(L')]$$

siten, että $d(s(t), x) \leq \delta$ ja $d(s'(t), y) \leq \delta$. Jos $x, y \in [s(L), s'(L')]$, niin

$$d(s(t), s'(t)) \leq d(s(t), x) + d(x, y) + d(y, s'(t)) \leq \delta + D + \delta$$

ja väite pätee. Toisaalta, jos $x = s'(k) \in [e, s'(L')]$ jollain $k \in [0, L']$, niin

$$|t - k| = |d(s(t), e) - d(e, s'(k))| \leq d(s(t), s'(k)) \leq \delta$$

ja edelleen

$$d(s(t), s'(t)) \leq d(s(t), s'(k)) + d(s'(k), s'(t)) \leq \delta + |k - t| \leq 2\delta. \quad \square$$

Lause 4.7. Olkoon l ja l' geodeesisia viivoja hyperbolisessa avaruudessa X . Jos $d_{\text{Haus}}(\text{Im}(l), \text{Im}(l')) = R < \infty$, niin $R \leq 2\delta$.

Todistus. Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Valitaan pisteet $s^\pm \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\begin{aligned} d(l(t - (R + 2\delta + 1)), l'(s^-)) &\leq R \text{ ja} \\ d(l(t + R + 2\delta + 1), l'(s^+)) &\leq R. \end{aligned}$$

Koska neliö

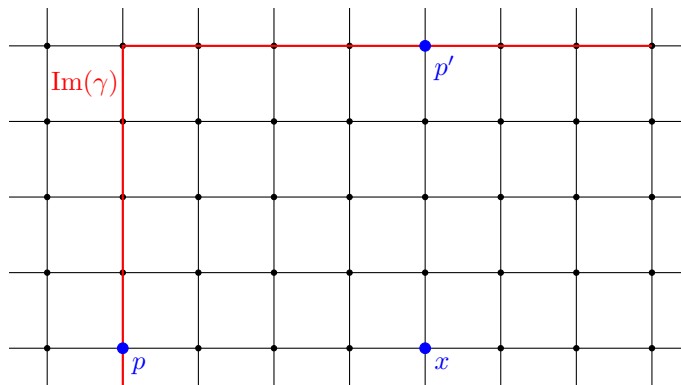
$$(l(t - R - 2\delta - 1), l(t + R + 2\delta + 1), l'(s^+), l'(s^-))$$

on 2δ -kapea ja

$$d(l(t), [l(t \pm (R + 2\delta + 1), s^\pm)]) \geq R + 2\delta + 1 - R > 2\delta,$$

löydetään piste $l'(s) \in [l'(s^+), l'(s^-)] \subset \text{Im}(l')$ siten, että $d(l'(s), l(t)) \leq 2\delta$. Selvästi vastaava arvio pätee pisteelle $l'(t)$, joten väite seuraa. \square

Olkoon γ metrisen avaruuden X geodeesi ja $x \in X$. $\text{Im}(\gamma)$ on kompakti joukko, joten löydetään piste $p \in \text{Im}(\gamma)$ siten, että $d(x, \text{Im}(\gamma)) = d(x, p)$. Yleisesti ottaen avaruudessa X voi olla useampikin piste $p, p' \in \text{Im}(\gamma)$, jolle pätee $d(x, \text{Im}(\gamma)) = d(x, p) = d(x, p')$. Seuraava lause kuitenkin osoittaa, että hyperbolisissa avaruuksissa tällaiset pisteet p ja p' ovat lähellä toisiaan.



Kuva 3: Lauseen 4.8 tulos ei päde avaruudessa \mathbb{R}^2 varustettuna metriikalla $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Lause 4.8. Olkoon X hyperbolinen ja $\gamma : I \rightarrow X$ geodeesi. Olkoon $p, p' \in \text{Im}(\gamma)$ ja $\varepsilon > 0$ siten, että

$$d(x, p') - \varepsilon < d(x, \text{Im}(\gamma)) = d(x, p).$$

Tällöin pätee $d(p, p') \leq 2(\varepsilon + 2\delta)$. Erityisesti, jos $d(x, p') = d(x, p)$, niin saadaan $d(p, p') \leq 4\delta$.

Todistus. Koska

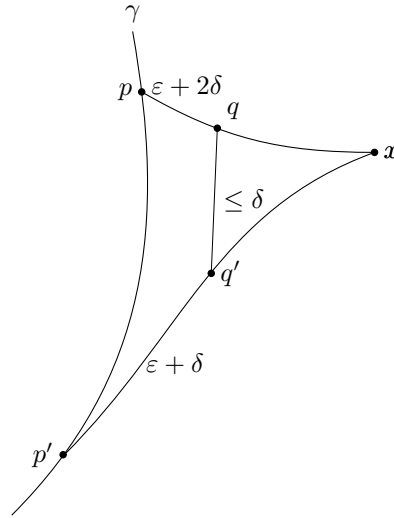
$$d(x, p) = d(x, \text{Im}(\gamma)) \leq d(x, p'),$$

niin

$$d(p, p') \leq d(p, x) + d(x, p') \leq 2d(x, p')$$

ja voidaan olettaa, että $d(x, p') > \varepsilon + 2\delta$. Valitaan geodeesilta $[x, p']$ piste q' siten, että $d(p', q') = \varepsilon + \delta$. Tällöin löytyy piste $q \in [p, p'] \cup [x, p]$ siten, että $d(q, q') \leq \delta$. Vaihtoehto $q \in [p, p']$ ei toimi, sillä tällöin

$$\begin{aligned} d(x, p) &\leq d(x, q) \leq d(x, q') + d(q', q) \\ &= d(x, q') + d(q', p') - d(q', p') + d(q', q) \\ &\leq d(x, p') - \varepsilon - \delta + \delta \\ &< d(x, p). \end{aligned}$$



Kuva 4: Lauseen 4.8 konstruktio.

Seuraavaksi huomataan, että

$$d(x, q) + d(q, p) = d(x, p) \leq d(x, p') \leq d(x, q) + d(q, q') + d(q', p'),$$

josta seuraa $d(q, p) \leq d(q, q') + d(q', p') = \varepsilon + 2\delta$. Edelleen saadaan

$$d(p, p') \leq d(p, q) + d(q, q') + d(q', p') \leq 2(\varepsilon + 2\delta). \quad \square$$

Seuraava lause yleistää edellisen lauseen tuloksen myös kvasi-geodeeseille.

Lause 4.9. On olemassa $N(C, \delta, \varepsilon)$ siten, että jos X on δ -hyperbolinen avaruus, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ on C -kvasi-geodeesinen viiva ja $t, t' \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), x) - \varepsilon &< d(x, \text{Im}(\gamma)) \quad \text{ja} \\ d(\gamma(t'), x) - \varepsilon &< d(x, \text{Im}(\gamma)), \end{aligned}$$

niin $|t - t'| < N$.

Todistus. Oletetaan, että $t' > t$. Lemman 4.4 nojalla löytyy $R(C, \delta)$ siten, että

$$d_{\text{Haus}}(\text{Im}\gamma|_{[t, t']}, [\gamma(t), \gamma(t')]) < R.$$

Olkoon $p \in [\gamma(t), \gamma(t')]$ piste, jolle

$$d(x, [\gamma(t), \gamma(t')]) = d(x, p).$$

Valitaan $s \in [t, t']$ siten, että $d(\gamma(s), p) < R$. Koska

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), x) &< d(\gamma(s), x) + \varepsilon \\ &\leq d(\gamma(s), p) + d(p, x) + \varepsilon \\ &= d(\gamma(s), p) + d(x, [\gamma(t), \gamma(t')]) + \varepsilon \\ &< R + \varepsilon + d(x, [\gamma(t), \gamma(t')]), \end{aligned}$$

saadaan lauseen 4.8 nojalla

$$d(\gamma(t), p) \leq 2(R + \varepsilon + 2\delta).$$

Vastaava arvio etäisyydelle $d(\gamma(t'), p)$ antaa

$$\frac{1}{C}|t - t'| - C \leq d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq 4(R + \varepsilon + 2\delta),$$

joten $|t - t'| \leq 4C(R + \varepsilon + 2\delta) + C^2$. □

4.2 Hyperbolisien ryhmien vapaat aliryhmät

Määritelmä 4.10. Äärellisesti viritetty ryhmä G on *hyperbolinen*, jos $\text{Cay}(G; S)$ on hyperbolinen kaikilla äärellisellä viritäjäjoukolla S .

Koska kahden eri äärellisen viritäjäjoukon antamat Cayleyn kaaviot ovat kvasi-isometrisia, seuraa lauseesta 4.5 että ryhmä on hyperbolinen, jos sen Cayleyn kaavio on hyperbolinen jollakin viritäjäjoukolla.

Määritelmä 4.11. Ryhmä G on *virtuaalisesti syklinen*, jos sillä on syklisen ryhmän kanssa isomorfinen äärellisen indeksin aliryhmä. Toisin sanoen virtuaalisesti syklinen ryhmä on joko äärellinen tai sisältää ryhmän \mathbb{Z} kanssa isomorfisen äärellisen indeksin aliryhmän.

Tässä kappaleessa on tarkoitus osoittaa, että hyperbolinen ryhmä on joko virtuaalisesti syklinen, tai sillä on toisen asteen vapaan ryhmän kanssa isomorfinen aliryhmä. Tästä seuraa, että hyperbolisen ryhmän kasvunopeus voi olla ainoastaan vakio, lineaarinen tai eksponentiaalinen.

Todistuksen ideana on löytää ryhmästä kaksi ei-syklistä alkioita g ja h siten, että näiden alkioiden kaikkien eri potenssien läpi kulkee kvasi-geodesiset viivat, joiden Hausdorffin etäisyys on ääretön. Hyperbolisuudesta seuraa, että riittävän suurella potenssilla N , g^N ja h^N kuvaavat toisen viivan kuvajoukkoa lähellä olevat pisteet lähelle omaa viivaansa. Tämän seurauksena voidaan käyttää Kleinin kombinaatiolausetta näyttämään, että g^N ja h^N virittävät toisen asteen vapaan ryhmän. Todistuksen idea on sama kuin kirjassa [10, Thm. 8.3.13], joskin olen muokannut sitä tutkielmaan paremmin sopivaksi sekä täydentänyt puuttuvia kohtia.

Aloitetaan osoittamalla, että äärettömällä hyperbolisella ryhmällä on alkio, jolle $|h^n| = n|h|$. Tätä varten tarkastellaan seuraavia joukkoja:

Määritelmä 4.12. Olkoon G ryhmä ja $g \in G$. Alkion g kartiotyyppi on joukko

$$\text{Cone}(g) = \{h \in G : |gh| = |g| + |h|\} \subset G$$

ja kartiotyyppien joukko on

$$\text{Cones}(G) := \{\text{Cone}(g) : g \in G\}.$$

Esimerkki. Ryhmän G neutraalialkion kartiotyyppi $\text{Cone}(e) = G$. Ryhmässä \mathbb{Z} luonnollisen virittäjäjoukon suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \text{Cone}(n) &= \mathbb{N}, \text{ jos } n > 0 \text{ ja} \\ \text{Cone}(n) &= -\mathbb{N}, \text{ jos } n < 0. \end{aligned}$$

Näin ollen $|\text{Cones}(\mathbb{Z})| = 3$. Yleisemmin vapaassa ryhmässä luonnollisen virittäjäjoukon S suhteen saadaan

$$\text{Cone}(s_1 s_2 s_3 \dots s_k) = \text{Cone}(s_k) = \{t_1 t_2 \dots t_n : t_1 \neq s_k^{-1}\} \cup \{e\},$$

missä $s_1 s_2 \dots s_k$ ja $t_1 t_2 \dots t_n$ ovat supistettuja sanoja. Edelleen näin ollen vapaan ryhmän kartiotyyppien joukon suuruus on $2|S| + 1$.

Lause 4.13. Hyperbolisen ryhmän kartiotyyppien joukko on äärellinen.

Todistus. Voidaan olettaa, että ryhmä G ei ole äärellinen. Olkoon $r = 2\delta + 1$, tarkastellaan joukkoja

$$P_r(g) = \{h \in G : |h| \leq r, |gh| \leq |g|\}$$

ja osoitetaan induktiolla alkion $h \in \text{Cone}(g)$ pituuden suhteen, että jos $P_r(g) = P_r(g')$, niin tällöin $h \in \text{Cone}(g')$. Tästä seuraa, että alkioilla g ja g' on sama kartiotyyppi. Edelleen saadaan, että erillaisia kartiotyyppejä on korkeintaan yhtä monta kuin erilaisia osajoukkoja

$$P_r(g) \subset \overline{B}_G(e, r),$$

mikä todistaa väitteen.

Tapaus $|h| = 0$ on triviaali, sillä $e \in \text{Cone}(g)$ kaikilla $g \in G$. Oletetaan seuraavaksi, että $|h| = 1$. Koska $h \in \text{Cone}(g)$,

$$|gh| = |g| + |h| = |g| + 1 > |g|$$

ja näin ollen $h \notin P_r(g) = P_r(g')$ ja $|g'| < |g'h|$. Toisaalta

$$|g'h| \leq |g'| + |h| = |g'| + 1,$$

joten $|g'h| = |g'| + |h|$ ja $h \in \text{Cone}(g')$.

Tehdään induktio oletus, ja oletetaan, että jos

$$P_r(g) = P_r(g'), \quad h \in \text{Cone}(g) \text{ ja } |h| \leq n,$$

niin $h \in \text{Cone}(g')$. Olkoon nyt

$$h = h's, \text{ missä } h \in \text{Cone}(g), |h| = n + 1, |h'| = n \text{ ja } s \in S \cup S^{-1}.$$

Tällöin

$$|gh'| = |ghs^{-1}| \geq |gh| - 1 = |g| + |h| - 1 = |g| + |h'|,$$

joten $h' \in \text{Cone}(g)$ ja induktio oletuksella $h' \in \text{Cone}(g')$. Tehdään antiteesi, ja oletetaan, että $h \notin \text{Cone}(g')$. Määritelmän nojalla tällöin $|g'h| < |g'| + |h|$. Lisäksi

$$|g'h| \geq |g'h'| - 1 = |g'| + |h'| - 1 \geq |g'|,$$

joten voidaan valitaan $k_1, k_2 \in G$ siten, että

$$\begin{aligned} g'h &= k_1 k_2 \\ |g'h| &= |k_1| + |k_2| \\ |g'| &= |k_1| \\ |k_2| &\leq |h| - 1. \end{aligned}$$

Osoitetaan, että $h'' = g'^{-1}k_1 \in P_r(g')$. Aluksi huomataan, että

$$|g'h''| = |k_1| = |g'| \leq |g'|.$$

Tarkastelemalla Cayleyn kaavion geodeeseja $[e, g'h']$ ja $[e, k_1 k_2]$, jotka kulkevat pisteiden g' ja k_1 kautta, saadaan lauseen 4.6 nojalla arvio

$$|h''| = d(g', k_1) \leq 2\delta + d(g'h', k_1 k_2) = 2\delta + 1 = r$$

ja näin ollen $h'' \in P_r(g') = P_r(g)$. Tästä seuraa, että

$$|g| + |h| = |gh| = |gg'^{-1}g'h| = |gg'^{-1}k_1 k_2| \leq |g'h''| + |k_2| \leq |g| + |h| - 1,$$

mikä on ristiriita, siispä $h \in \text{Cone}(g')$ ja induktio todistus on valmis. \square

Lause 4.14. Jos äärettömän ryhmän G kartiotyyppien joukko on äärellinen, niin on olemassa $h \in G \setminus \{e\}$ siten, että $|h^n| = |n||h|$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Käytetään induktiota luvun n suhteen osoittamaan, että löydetään alkiot $g', h \in G \setminus \{e\}$ siten, että

$$|g'h^n| = |g'| + |h^n| = |g'| + n|h| \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N},$$

mistä väite seuraa.

Olkoon k erillaisten kartiotyyppien lukumäärä ja $g \in G$ siten, että $|g| > k$. Tällöin Cayleyn kaavion geodeesi $[e, g]$ sisältää kaksi ryhmän G alkioita, joilla on sama kartiotyyppi ja näin ollen g voidaan hajoittaa siten, että

$$\begin{aligned} g &= g'hg'' \\ h &\neq e \\ |g| &= |g'| + |h| + |g''| \\ \text{Cone}(g') &= \text{Cone}(g'h). \end{aligned}$$

Oletuksista seuraa, että $|g'h| = |g'| + |h|$ ja $h \in \text{Cone}(g')$. Näin ollen väite pätee, kun $n = 1$. Tehdään induktio-oletus

$$|g'h^n| = |g'| + |h^n| = |g'| + n|h|,$$

josta seuraa, että

$$h^n \in \text{Cone}(g') = \text{Cone}(g'h).$$

Edelleen saadaan

$$\begin{aligned} |g'| + |h^{n+1}| &\geq |g'h^{n+1}| && |h^n \in \text{Cone}(g'h) \\ &= |g'h| + |h^n| && \text{Induktio-oletus} \\ &= |g'| + (n+1)|h| && \triangle\text{-ey} \\ &\geq |g'| + |h^{n+1}|, \end{aligned}$$

joten

$$|g'h^{n+1}| = |g'| + |h^{n+1}| = |g'| + (n+1)|h|$$

ja induktiotodistus on valmis. \square

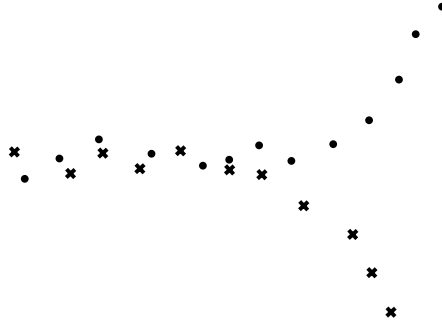
Käänteisalkioiden metristen ominaisuuksien käsittely voi olla hieman haastavaa, sillä vaikka $|g| = |g^{-1}|$, niin esimerkiksi yhtälö

$$d(g, h) = d(g^{-1}, h^{-1})$$

harvoin pätee. Tästä esimerkkinä toisen asteen vapaassa ryhmässä luonnollisen virittäjäjoukon $\{a, b\}$ suhteen saadaan

$$d(a^n b, a^n) = |b| = 1,$$

mutta toisaalta $d(b^{-1}a^{-n}, a^{-n}) = |a^n b a^{-n}| = 2n + 1$. Seuraava lemma on keskeinen osa lauseiden 4.16 ja 5.12 todistusta, sillä sen avulla saadaan edes jotain tietoa käänteisalkioiden sijainnista löytämällä alkioille h positiivinen ja negatiivinen potenssi $n > 0$, $m < 0$ siten, että $d(h^n, \langle g \rangle)$ ja $d(h^m, \langle g \rangle)$ saadaan mielivaltaisen suureksi kunhan $d_{\text{Haus}}(\langle h \rangle, \langle g \rangle) = \infty$.



Kuva 5: Kuvassa pisteet edustavat alkion g potensseja ja ruksit alkion h potensseja. Oletetaan, että vasemmalle päin pisteet ja ruksit pysyttelevät toistensa lähellä ja oikealla karkaavat eri suuntiin ja kauas toisistaan. Tällainen tilanne ei seuraavan lemmän nojalla ole mahdollinen.

Lemma 4.15. Olkoon G äärellisesti viritetty ryhmä ja $h, g \in G$. Jos

$$\min\{\sup_{n \in \mathbb{N}} d(h^n, \langle g \rangle), \sup_{n \in \mathbb{N}} d(h^{-n}, \langle g \rangle)\} < \infty,$$

niin $d_{\text{Haus}}(\langle h \rangle, \langle g \rangle) < \infty$.

Todistus. Oletetaan, että $\sup_{n \in \mathbb{N}} d(h^n, \langle g \rangle) = M < \infty$. Tällöin jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ löytyy $s_n \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$d(h^n, \langle g \rangle) = d(h^n, g^{s_n}) = |h^{-n} g^{s_n}| \leq M.$$

Koska joukko $B_G(e, M)$ on äärellinen, löydetään $n, m \in \mathbb{N}$ siten, että $0 < n < m$ ja

$$\begin{aligned} h^{-n} g^{s_n} &= h^{-m} g^{s_m} \\ \Leftrightarrow h^{m-n} &= g^{s_m - s_n}. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$d(h^{a(m-n)}, g^{a(s_m - s_n)}) = 0$$

kaikilla $a \in \mathbb{Z}$. Edelleen jos $k \in \mathbb{Z}$, niin löytyy $b \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$b(m-n) \leq k \leq (b+1)(m-n),$$

jolloin

$$d(h^k, \langle g \rangle) \leq d(h^k, h^{b(m-n)}) + d(h^{b(m-n)}, g^{b(s_m - s_n)}) \leq |h^{m-n}|,$$

mistä seuraa, että

$$d_{\text{Haus}}(\langle h \rangle, \langle g \rangle) \leq \max\{|h^{m-n}|, |g^{s_m - s_n}|\}. \quad \square$$

Lause 4.16. Hyperbolinen ryhmä on joko virtuaalisesti syklinen tai sisältää kahden viritäjän vapaan ryhmän.

Todistus. Olkoon G ääretön hyperbolinen ryhmä ja $h \in G$ lauseen 4.14 antama alkio, jolle $|h^n| = |n||h|$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Geodeesien $[h^n, h^{n+1}]$ ja lauseen 2.12 avulla voidaan rakentaa geodeesinen viiva

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \text{Cay}(G; S), \text{ missä } \gamma(n|h|) = h^n.$$

Oletetaan, että G ei ole virtuaalisesti syklinen, jolloin lauseen 2.3 nojalla

$$\sup_{f \in G} d(f, \langle h \rangle) = \infty$$

ja voidaan valita $c \in G$ siten, että $d(c, \langle h \rangle) > 2\delta + |h|$. Kuvaus $c\gamma$ on geodeesinen viiva, jolle saadaan

$$d_{\text{Haus}}(\text{Im}(c\gamma), \text{Im}(\gamma)) \geq d(c, \text{Im}(\gamma)) \geq d(c, \langle h \rangle) - |h| > 2\delta$$

ja näin ollen lauseen 4.7 nojalla

$$d_{\text{Haus}}(\text{Im}(\gamma), \text{Im}(c\gamma)) = \infty.$$

Asetetaan $g = chc^{-1}$, jolloin

$$d(g^n, \text{Im}(c\gamma)) \leq d(g^n, ch^n) = |c|$$

ja edelleen

$$d_{\text{Haus}}(\langle g \rangle, \text{Im}(c\gamma)) \leq |c| + |h|.$$

Koska lisäksi $d_{\text{Haus}}(\langle h \rangle, \text{Im}(\gamma)) \leq |h|$, seuraa siitä, että $d_{\text{Haus}}(\text{Im}(\gamma), \text{Im}(c\gamma)) = \infty$ myös

$$d_{\text{Haus}}(\langle h \rangle, \langle g \rangle) = d_{\text{Haus}}(\langle h \rangle, \langle chc^{-1} \rangle) = \infty. \quad (\star)$$

Todistuksessa käytetään Kleinin kombinaatiolausetta joukkoihin A ja B , jotka muodostuvat alkioista, joiden lähin piste joukosta $\langle h \rangle$ tai $\langle g \rangle$ on jokin suuri positiivinen tai negatiivinen alkion g tai h potenssi. Valitsemalla tämä ”suuri potenssi” oikein saadaan joukot A ja B erillisiksi. Tämä osoitetaan seuraavissa aputuloksissa 2 ja 3. Tärkeänä yksityiskohtana näytetään ensin, että vaikka lähin piste joukosta $\langle h \rangle$ tai $\langle g \rangle$ ei ole yksiselitteinen, niin tällaiset lähimmät pisteet eivät voi olla liian kaukana toisistaan.

1. Voidaan valita N siten, että kaikille $n, m \in \mathbb{Z}$, joille

$$d(x, \langle h \rangle) = d(x, h^n) = d(x, h^m) \text{ tai}$$

$$d(x, \langle g \rangle) = d(x, g^n) = d(x, g^m)$$

pätee $|n - m| < N$.

Todistus. Kuvaus $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Cay}(G; S)$, $\eta(t) = g^{\lfloor t \rfloor}$ on $(2|c| + |h|)$ -kvasi-geodeesinen viiva, sillä

$$\begin{aligned} d(\eta(t), \eta(t')) &= d(ch^{\lfloor t \rfloor} c^{-1}, ch^{\lfloor t' \rfloor} c^{-1}) \\ &\leq d(ch^{\lfloor t \rfloor}, ch^{\lfloor t' \rfloor}) + 2|c| \\ &= |h| |\lfloor t \rfloor - \lfloor t' \rfloor| + 2|c| \\ &\leq |h| (|t - t'| + 1) + 2|c| \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$d(\eta(t), \eta(t')) \geq |h| | [t] - [t'] | - 2|c| \geq |t - t'| - |h| - 2|c|.$$

Koska

$$\begin{aligned} d(x, \eta(n)) - 1 &= d(x, g^n) - 1 < d(x, \langle g \rangle) = d(x, \text{Im}(\eta)) \text{ ja} \\ d(x, \eta(m)) - 1 &= d(x, g^m) - 1 < d(x, \langle g \rangle) = d(x, \text{Im}(\eta)), \end{aligned}$$

löytyy lauseen 4.9 nojalla N siten, että $|n - m| \leq N$. Sama arvio toimii alkioille h , sillä kuvaus $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Cay}(G; S)$, $\phi(t) = h^{\lfloor t \rfloor}$ on myös $(2|c| + |h|)$ -kvasi-geodeesinen viiva. \square

2. Voidaan valita r siten, että

$$[h^n, g^m] \cap B(e, r) \neq \emptyset \text{ kaikilla } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Todistus. Lemman 4.4 nojalla löydetään R siten, että

$$d_{\text{Haus}}(\text{Im}(\eta|_{[0, m]}), [e, g^m]) < R$$

kaikilla $m \in \mathbb{Z}$. Yhtälön (\star) ja lauseen 4.15 nojalla voidaan valita $t_1 > 0$ ja $t_2 < 0$ siten, että

$$d(h^{t_i}, \langle g \rangle) > R + \delta \text{ molemmilla } i \in \{1, 2\}.$$

Nyt $r = |h| \max\{|t_1|, |t_2|\} + \delta + 1$ on haluttu säde. Tämä huomataan tarkastelemalla kolmiota $\triangle(e, h^n, g^m)$. Voidaan olettaa, että $|n||h| \geq r$, jolloin piste h^{t_i} kuuluu geodeesille $[e, h^n]$ jollakin $i \in \{1, 2\}$. Vastakkaisilta geodeesilta löytyy piste x , jonka etäisyys pisteestä h^{t_i} on korkeintaan δ . Valitaan $s \in [e, g^m]$ ja s' siten, että

$$d(h^{t_i}, [e, g^m]) = d(h^{t_i}, s) \text{ ja } d(s, g^{s'}) < R.$$

Tällöin

$$d(h^{t_i}, [e, g^m]) = d(h^{t_i}, s) \geq d(h^{t_i}, g^{s'}) - d(g^{s'}, s) > R + \delta - R,$$

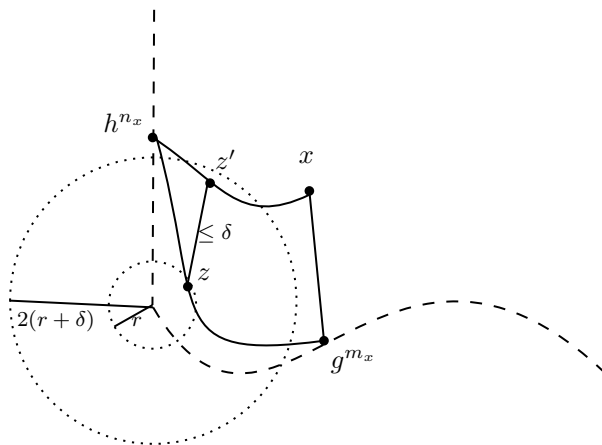
joten piste x kuuluu geodeesille $[h^n, g^m]$ ja väite seuraa, sillä

$$d(e, x) \leq d(e, h^{t_i}) + d(h^{t_i}, x) < r. \quad \square$$

3. Voidaan valita $M(r)$ siten, että joukkojen

$$\begin{aligned} A &= \{f \in G : d(f, \langle h \rangle) < d(f, h^n) \text{ kaikilla } |n| < M\} \\ B &= \{f \in G : d(f, \langle g \rangle) < d(f, g^n) \text{ kaikilla } |n| < M\} \end{aligned}$$

leikkaukselle pätee $A \cap B = \emptyset$.



Kuva 6: Lauseen 4.16 todistuksen kohdan 3 ristiriidan konstruktio.

Todistus. Valitaan M siten, että kaikilla $|n| \geq M$

$$\begin{aligned} |h^n| &> 2(r + \delta) \text{ ja} \\ |g^n| &> 2(r + \delta). \end{aligned}$$

Tehdään antiteesi ja oletetaan, että $x \in A \cap B$. Valitaan h^{n_x} ja g^{m_x} siten, että

$$\begin{aligned} d(x, \langle h \rangle) &= d(x, h^{n_x}) \\ d(x, \langle g \rangle) &= d(x, g^{m_x}). \end{aligned}$$

Geodeesi $[h^{n_x}, g^{m_x}]$ leikkaa palloa $B(e, r)$, joten löydetään piste $z \in [h^{n_x}, g^{m_x}]$ siten, että $|z| < r$. Hyperbolisuuden nojalla löydetään $z' \in [h^{n_x}, x] \cup [g^{m_x}, x]$ siten, että $d(z, z') \leq \delta$. Oletetaan, että piste z' on geodeesilla $[h^{n_x}, x]$. Tällöin

$$\begin{aligned} 2(r + \delta) &< |h^{n_x}| \\ &= |z'| + d(h^{n_x}, z') \leq 2|z'| \\ &\leq 2(r + \delta), \end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Epäyhtälö $d(h^{n_x}, z') \leq |z'|$ seuraa siitä, että h^{n_x} on pisteen x lähin piste joukossa $\langle h \rangle$ ja $z' \in [h^{n_x}, x]$, joten h^{n_x} on myös pisteen z' lähin piste joukossa $\langle h \rangle$ ja

$$d(z', \langle h \rangle) = d(z', h^{n_x}) \leq d(z', h^0) = |z'|.$$

Oletus $z' \in [g^{m_x}, x]$ johtaa samaan ristiriitaan, mikä todistaa väitteen. \square

Olkoon $K = \lceil \max\{N, M\} \rceil$. Kleinin kombinaatiolauseen 2.19 nojalla riittää osoittaa, että

$$h^{3nK}(B) \subset A \text{ ja } g^{3nK}(A) \subset B$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Olkoon $x \in B$, tällöin $x \notin A$ ja löytyy $|n_x| < M \leq K$ siten, että $d(x, \langle h \rangle) = d(x, h^{n_x})$. Edelleen saadaan

$$d(h^{3nK}x, \langle h \rangle) = d(h^{3nK}x, h^{n_x+3nK})$$

ja jos

$$d(h^{3nK}x, \langle h \rangle) = d(h^{3nK}x, h^m),$$

niin

$$K \geq N \geq |n_x + 3nK - m| \geq 3|n|K - |n_x| - |m|,$$

joten

$$|m| \geq 3|n|K - K - |n_x| \geq K \geq M$$

ja näin ollen $h^{3nK}(x) \in A$. Erityisesti $h^{3nK}(B) \subset A$. Vastaavalla päättelyllä myös $g^{3nK}(A) \subset B$. \square

Seuraus 4.17. Hyperbolisen ryhmän kasvunopeus on joko vakio, lineaarinen tai eksponentiaalinen.

5 Avaruuden päädyt

5.1 Metrisen avaruuden päädyt

Kolmantena ja viimeisenä ryhmän metrisenä ominaisuutena tutkielmassa käsitellään päätyjen lukumäärää. Päädyt voitaisiin määritellä myös täysin topologisessa kontekstissa, mutta geodeesisten ja kunnollisten metristen avaruuksien kohdalla päädyille saadaan myös hieman helppokäyttöisempiä määritelmiä.

Päädyt, niin kuin ne tullaan pian määrittelemään, eivät ole yhtä aktiivinen tutkimuskohde geometrisessa ryhmäteoriassa kuin vaikka hyperbolisuus ja mahdollisesti kaikki merkittävä päätyihin liittyvä on jo löydetty Stallingin rakennelauseen [11] myötä. Tutkielman näkökulmasta päädyt ovat kuitenkin hyvä esimerkki ryhmien geometrisista ominaisuuksista ja niille saadaan osoitettua seuraavassa kappaleessa hyperbolisien ryhmien kanssa samankaltainen lause vapaiden aliryhmien olemassaolosta.

Päätyjen joukkoon määritellään usein myös luonnollinen topologia. Kuitenkin ryhmien kohdalla tämä topologia on täysin riippuvainen päätyjen lukumäärästä, eikä näin ollen anna mitään merkittävää lisäarvoa ja on sen vuoksi sivuutettu kokonaan. Tästä topologisesta rakenteesta kerrotaan kirjassa [2], josta on otettu myös tässä työssä käytetty päätyjen määritelmä sekä osa tämän kappaleen tuloksista.

On olemassa myös toinen yleinen tapa määritellä avaruuden tai ryhmän päädyt, joka erityisesti hyperbolisien ryhmien kohdalla antaa monenlaisia eksoottisia rakenteita. Tätä Gromovin reunaksi kutsuttua konstruktiota ja sen ominaisuuksia on käsitelty artikkelissa [9].

Määritelmä 5.1. Olkoon X ja Y metrisiä avaruuksia. Funktiojono $f_n : X \rightarrow Y$ on *yhtäjatkuva*, jos kaikille $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$ siten, että $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x, y \in X$, joille $d(x, y) < \delta$.

Lause 5.2 (Arzelà-Ascoli). Olkoon X kompakti ja Y separoituva metrinen avaruus, tällöin jokaisella jonolla yhtäjatkuvia funktioita $f_n : Y \rightarrow X$ on osajono, joka suppenee (tasaisesti kompakteilla joukoilla) jatkuvaan kuvaukseen $f : Y \rightarrow X$.

Todistus. Katso [2, Lemma I.3.10]. □

Määritelmä 5.3. Olkoon X metrinen avaruus ja $x, y \in X$. Jos on olemassa jatkuva kuvaus $p : [0, 1] \rightarrow X$ siten, että $p(0) = x$ ja $p(1) = y$, niin pisteet x, y kuuluvat avaruuden X samaan *polkuyhtenäiseen komponenttiin*. Tämä määrittelee ekvivalenssiluokat

$$[x] = \{y \in X : x \text{ ja } y \text{ kuuluvat samaan polkuyhtenäiseen komponenttiin}\}.$$

Asetetaan lisäksi

$$\pi_0^u(X) = \{[x] : x \in X, [x] \text{ on rajoittamaton}\}$$

kuvaamaan avaruuden X rajoittamattomia polkuyhtenäisiä komponentteja.

Määritelmä 5.4. Olkoon X metrinen avaruus. Jatkuva kuvaus $r : [0, \infty) \rightarrow X$ on *kunnollinen säde*, jos jokaisen rajoitetun joukon $C \subset X$ alkukuva on rajoitettu. Kunnolliset säteet r_1 ja r_2 edustavat samaa *päätyä*, jos jokaiselle rajoitetulle joukolle $C \subset X$ löytyy $N \in \mathbb{R}$ siten, että kuvajoukot $r_1([N, \infty))$ ja $r_2([N, \infty))$ sisältyvät samaan joukon $X \setminus C$ polkuyhtenäiseen komponenttiin. Tämä määrittelee ekvivalenssirelaation kunnollisten säteiden joukkoon. Olkoon

$$\text{end}(r) = \{\hat{r} : \hat{r} \text{ on kunnollinen säde, joka edustaa samaa päätyä kuin } r\}$$

ja

$$\text{Ends}(X) = \{\text{end}(r) : r \text{ on kunnollinen säde}\}.$$

Avaruuden X *päätyjen lukumäärä* on $|\text{Ends}(X)|$.

Lause 5.5. Jokainen kunnollisen geodeesisen metrisen avaruuden X pääty voidaan esittää pisteestä $x_0 \in X$ lähtevän geodeesisen säteen avulla.

Todistus. Olkoon γ kunnollinen säde ja $f_n : [0, t_n] \rightarrow X$ pisteitä x_0 ja $\gamma(t_n)$ yhdistävä geodeesi kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jatketaan kuvauksia f_n välille (t_n, ∞) asetamalla

$$f_n(t) = \gamma(t), \text{ kun } t > t_n.$$

Olkoon $m \in \mathbb{N}$, tällöin kuvausperheellä $\{f_n|_{[0, m]}\}_{n \in \mathbb{N}}$ on lauseen 5.2 nojalla suppeneva osajono, koska $\text{Im}(f_n|_{[0, m]}) \subset \overline{B}(x_0, m)$ ja $\overline{B}(x_0, m)$ on kompakti. Olkoon f_{n_1} jonon f_n osajono, joka suppenee välillä $[0, 1]$ ja σ_1 jonon $f_{n_1}|_{[0, 1]}$ raja-arvo jatkettuna vakiona välille $[1, \infty)$. Olkoon f_{n_i} jonon $f_{n_{i-1}}$ välillä $[0, i]$ suppeneva osajono ja σ_i sitä vastaava jatkettu raja-arvo. Nyt kuvaukset σ_i suppenevat geodeesiseen säteeseen σ . Osoitetaan vielä, että $\sigma \in \text{end}(\gamma)$. Olkoon $C \subset X$ rajoitettu ja $R \in \mathbb{N}$ siten, että $C \subset B(x_0, R)$. Olkoon $N \in \mathbb{N}$, $N > R+1$ niin suuri, että kuvajoukot $\gamma([N, \infty))$ ja $\sigma([N, \infty))$ eivät leikkaa joukkoa $X \setminus B(x_0, R)$. Valitaan n siten, että $t_n > N$ ja $d(f_n(N), \sigma(N)) < 1$, jolloin geodeesi $[f_n(N), \sigma(N)]$ ja kuvaus $f_n|_{[N, t_n]}$ yhdistävät pisteet $\sigma(N)$ ja $\gamma(t_n) = f_n(t_n)$ joukossa $X \setminus C$ ja näin ollen $\gamma([N, \infty))$ ja $\sigma([N, \infty))$ kuuluvat samaan polkuyhtenäiseen komponenttiin. \square

Seuraus 5.6. Olkoon X kunnollinen geodeesinen metrinen avaruus ja $B \subset X$ rajoitettu. Olkoon $C \in \pi_0^u(X \setminus B)$ ja $x_0 \in X$. Tällöin löytyy pisteestä x_0 lähtävä geodeesinen säde $r : [0, \infty) \rightarrow X$ ja t siten, että $r([t, \infty)) \subset C$.

Todistus. Valitaan $x_n \in C$ siten, että $d(x_n, x_0) \rightarrow \infty$ kun $n \rightarrow \infty$ ja geodeesit f_n , jotka yhdistävät pisteet x_0 ja x_n . Kuten lauseen 5.5 todistuksessa, kuvauksista f_n saadaan raja-arvo, joka on geodeesinen säde halutuilla ominaisuuksilla. \square

Lause 5.7. Olkoon X kunnollinen geodeesinen metrinen avaruus ja $x_0 \in X$. Tällöin

$$|\text{Ends}(X)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\pi_0^u(X \setminus B(x_0, k))|.$$

Todistus. Tehdään aluksi seuraavat kolme huomiota:

1. Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$, $f(r) := |\pi_0^u(X \setminus B(x_0, r))|$ on kasvava, erityisesti raja-arvo on olemassa:

Olkoon $\varepsilon > 0$, $A \in \pi_0^u(X \setminus B(x_0, r))$ ja r_A seurauksen 5.6 antama geodeesinen säde. Koska

$$r_A([x + \varepsilon, \infty)) \subset A \setminus B(x_0, x + \varepsilon),$$

joukko $A \setminus B(x_0, x + \varepsilon)$ sisältää ainakin yhden polkuyhtenäisen rajoittamattoman komponentin. Edelleen tällöin $f(x + \varepsilon) \geq f(x)$.

2. $|\text{Ends}(X)| \geq |\pi_0^u(X \setminus B(x_0, k))|$:

Olkoon $\{C_1, C_2, \dots, C_n\} \subset \pi_0^u(X \setminus B(x_0, k))$. Tällöin seurauksella 5.6 antaa jokaiselle joukolle C_i geodeesisen säteen, jotka edustavat eri päätyjä.

3. Jos $|\text{Ends}(X)| \geq n$, niin löytyy k siten, että $|\pi_0^u(X \setminus B(x_0, k))| \geq n$:

Valitaan pisteestä x_0 lähtevät geodeesiset säteet r_i , $i = 1, \dots, n$, jotka edustavat eri päätyjä. Tällöin voidaan valita k siten, että kaikki säteet $r_i([k, \infty))$ kuuluvat avaruuden $X \setminus B(x_0, k)$ eri polkuyhtenäisiin komponentteihin.

Jos $|\text{Ends}(X)| = 0$, niin kohdasta 2 seuraa, että $\lim_{k \rightarrow \infty} |\pi_0^u(X \setminus B(x_0, k))| = 0$.

Jos $|\text{Ends}(X)| = n$, niin kohdista 1, 2 ja 3 seuraa, että

$$n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |\pi_0^u(X \setminus B(x_0, k))| \leq |\text{Ends}(X)| = n.$$

Jos $|\text{Ends}(X)| = \infty$, niin kohdista 1 ja 3 seuraa, että

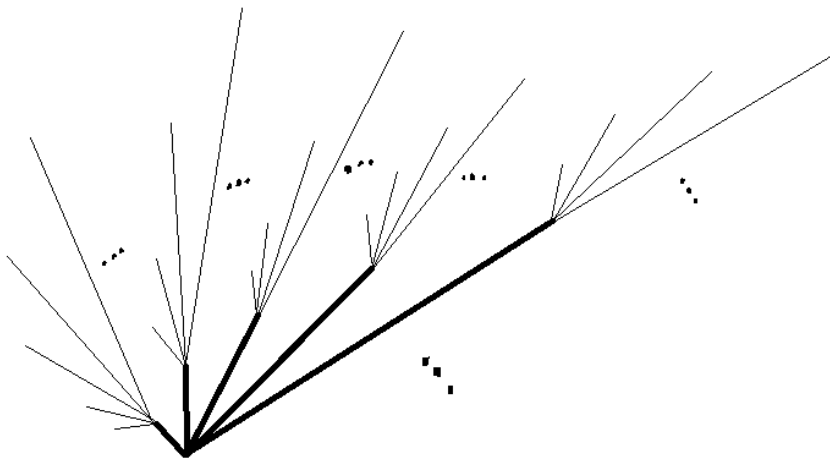
$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\pi_0^u(X \setminus B(x_0, k))| = \infty. \quad \square$$

Esimerkki. Lauseen 5.7 tulos ei päde ilman oletusta kunnollisuudesta. Oetaan joukko $A = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} [0, i] \times \{i\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ ja samaistetaan pisteet $(0, i)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Varustetaan näin saatu avaruus polkumetriikalla, jolloin saadaan geodeesinen rajoittamaton polkuyhtenäinen avaruus, jolla ei ole päätyjä. Pisteiden $(0, 0)$ poistamisen jälkeen jäljelle ei jää myöskään ainoatakaan rajoittamatonta polkuyhtenäistä komponenttia. Olkoon A_i isometrinen kopio tästä avaruudesta. Liitetään avaruus A_i pisteestä $(0, 0)$ avaruuden A pisteeseen (i, i) kaikilla $i = 1, 2, 3, \dots$. Tästä joukosta saadaan polkumetriikalla kuvassa 7 oleva geodeesinen avaruus X , jolle

$$0 = |\text{Ends}(X)| \neq \lim_{k \rightarrow \infty} |\pi_0^u(X \setminus B(x_0, k))| = \infty.$$

Määritelmä 5.8. Olkoon X metrinen avaruus ja $x, y \in X$. k -polku pisteiden x ja y välillä on pistejoukko x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ siten, että $d(x_i, x_{i+1}) \leq k$, $x_0 = x$ ja $x_n = y$.

Lause 5.9. Olkoon X metrinen geodeesinen avaruus ja $x_0 \in X$. Kunnolliset säteet r_1 ja r_2 edustavat samaa päätyä jos ja vain jos jokaiselle $R \in \mathbb{N}$ löytyy $N \in \mathbb{R}$ ja k -polku pisteestä $r_1(N)$ pisteeseen $r_2(N)$ joukossa $X \setminus B(x_0, R)$.



Kuva 7: Esimerkki geodeesisesta avaruudesta, jolle lauseen 5.7 tulos ei päde.

Todistus. ” \Rightarrow ” Olkoon $R \in \mathbb{N}$. $B(x_0, R) \subset X$ on rajoitettu, joten löytyy $N \in \mathbb{R}$ siten, että $\text{Im}(r_1([N, \infty))$ ja $\text{Im}(r_2([N, \infty))$ kuuluvat samaan joukon $X \setminus B(x_0, R)$ polkuyhtenäiseen komponenttiin. Erityisesti löydetään jatkuva polku pisteiden $r_1(N)$ ja $r_2(N)$ välillä joukossa $X \setminus B(x_0, R)$. Valitsemalla pisteitä tältä polulta riittävän tiheään saadaan haluttu k -polku.

” \Leftarrow ” Olkoon $C \subset X$ rajoitettu. Valitaan $R \in \mathbb{N}$ siten, että $C \subset B(x_0, R)$. Valitaan $N \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\text{Im}(r_1([N, \infty))) \cup \text{Im}(r_2([N, \infty))) \subset X \setminus B(x_0, R + k)$$

ja pisteet $r_1(N)$, $r_2(N)$ pystytään yhdistämään k -polulla joukossa

$$X \setminus B(x_0, R + k).$$

Yhdistämällä tämän k -polun peräkkäiset pisteet geodeeseilla saadaan jatkuva polku pisteiden $r_1(N)$, $r_2(N)$ välille joukossa $X \setminus B(x_0, R)$. \square

Lause 5.10. Jokainen geodeesisten avaruuksien X ja Y välinen kvasi-isometria $F : X \rightarrow Y$ indusoi bijektiivisen kuvauksen

$$E_F : \text{Ends}(X) \rightarrow \text{Ends}(Y).$$

Todistus. Olkoon kuvaus $F : X \rightarrow Y$ C -kvasi-isometria, r kunnollinen säde ja $g_n : [0, t_n] \rightarrow Y$ pisteitä $F(r(n))$ ja $F(r(n+1))$ yhdistävä geodeesi. Olkoon $\hat{F}(r) : [0, \infty) \rightarrow Y$ kuvaus

$$\hat{F}(r)(t) := g_{\lfloor t \rfloor}((t - \lfloor t \rfloor)t_n),$$

joka saadaan liittämällä geodeesit g_n yhteen päätepisteistään. Koska F on kvasi-isometria, $\hat{F}(r)$ on kunnollinen säde ja edelleen \hat{F} kuvaa avaruuden X kunnolliset säteet avaruuden Y kunnollisiksi säteiksi. Osoitetaan, että näin saatu kuvaus

$$E_F : \text{Ends}(X) \rightarrow \text{Ends}(Y), \quad E_F(\text{end}(r)) := \text{end}(\hat{F}(r))$$

on hyvin määritelty ja bijektio.

Olkoon r_1 ja r_2 samaa päätyä edustavat kunnolliset säteet, $x_0 \in X$ ja $R \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$F^{-1}(B(F(x_0), R)) \subset B(x_0, CR + C^2).$$

Valitaan $N \in \mathbb{N}$ siten, että $r_1(N)$ ja $r_2(N)$ voidaan yhdistää k -polulla joukossa

$$X \setminus B(x_0, CR + C^2).$$

kvasi-isometria F kuvaa tämän k -polun $Ck + C$ -poluksi, joka yhdistää pisteet $F(r_1(N)) = \hat{F}(r_1)(N)$ ja $F(r_2(N)) = \hat{F}(r_2)(N)$ joukossa $Y \setminus B(F(x_0), R)$. Tästä seuraa, että kunnolliset säteet $\hat{F}(r_1)$ ja $\hat{F}(r_2)$ edustavat samaa päätyä ja \hat{F} on hyvin määritelty.

Bijektiivisyyden näyttämiseksi riittää osoittaa, että $\hat{\bar{F}} \circ \hat{F}(r)$ edustaa samaa päätyä kuin r . Tämä on selvää, sillä

$$d(r(n), \hat{\bar{F}} \circ \hat{F}(r)(n)) = d(r(n), \bar{F} \circ F(r(n))) \leq C \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N},$$

joten $r(n)$, $\hat{\bar{F}} \circ \hat{F}(r)(n)$ on C -polku. □

5.2 Ryhmien päädyt

Määritelmä 5.11. Äärellisesti viritetyn ryhmän G päädyt on joukko

$$\text{Ends}(G) = \text{Ends}(\text{Cay}(G; S)).$$

Lauseesta 5.10 seuraa, että ryhmän päätyjen lukumäärä $|\text{Ends}(G)|$ ei riipu (äärellisen) viritäjäjoukon S valinnasta.

Ryhmän G alkio g antaa Cayleyn kaavion isometrian, joten se on myös kuvaus Cayleyn kaavion kunnollisten säteiden välillä. Selvästi gr_1 ja gr_2 edustavat samaa päätyä jos ja vain jos kunnolliset säteet r_1 ja r_2 edustavat samaa päätyä. Näin saadaan bijektio

$$g : \text{Ends}(G) \rightarrow \text{Ends}(G), \quad g(\text{end}(r)) = \text{end}(gr),$$

joka määrittelee ryhmän G toiminnan joukon $\text{Ends}(G)$ bijektioina.

Lause 5.12. Olkoon G äärellisesti viritetty ryhmä, jolla on vähintään kolme päätyä. Tällöin ryhmällä G on toisen asteen vapaan ryhmän kanssa isomorfinen aliryhmä.

Todistus. Valitaan R siten, että $|\pi_0^u(\text{Cay}(G; S) \setminus B(e, R))| = n \geq 3$ ja olkoon

$$\pi_0^u(\text{Cay}(G; S) \setminus B(e, R)) = \{C_1, \dots, C_n\}$$

avaruuden $\text{Cay}(G; S) \setminus B(e, R)$ polkuyhtenäisten rajoittamattomien komponenttien muodostama joukko.

Tehdään seuraavaksi joitain havaintoja siitä, kuinka ryhmän eri alkiot kuvaavat joukkoja C_i . Todistuksen ydin on kohta 1c, joka kertoo, että kaikki paitsi yksi komponentti saadaan sopivalla alkiolla kuvattua saman komponentin sisälle. Kohdassa 4 näytetään, kuinka kohta 1c riittäisi lähes yksinään lauseen todistamiseen, jos voitaisiin sanoa edes vähän siitä, mihin komponenttiin annetun alkion käänteisalkio kuuluu. Valitettavasti käänteisalkio voi kuulua mihin komponenttiin vain, eikä ole helppoa tietä pakottaa sitä johonkin tiettyyn komponenttiin. Loput todistuksen vaiheista pyrkivätkin nimenomaan löytämään ryhmästä sellaisen alkion, jonka käänteisalkio on sopivassa paikassa.

1. Olkoon $g \in C_1$ ja $|g| \geq 2R$ tällöin

- (a) $g^{-1} \in C_i$ jollain $i \in \{1, \dots, n\}$,
- (b) $B(e, R) \sqcup \bigsqcup_{C \in \pi_0^u(G \setminus B(e, R)) \setminus C_1} C \subset gC_i$,
- (c) $B(g, R) \sqcup \bigsqcup_{C \in \pi_0^u(G \setminus B(e, R)) \setminus C_i} gC \subset C_1$.

Todistus. Koska g antaa avaruuden $\text{Cay}(G; S)$ isometrian, niin

$$\pi_0^u(\text{Cay}(G; S) \setminus B(g, R)) = \{gC_1, \dots, gC_n\}.$$

Olkoon A avaruuden $\text{Cay}(G; S) \setminus B(e, R)$ polkuyhtenäinen komponentti, joka sisältää alkion g^{-1} . Joukko

$$B(e, R) \sqcup \bigsqcup_{k=2}^n C_k$$

on polkuyhtenäinen ja rajoittamaton, eikä leikkaa joukkoa $B(g, R) \subset C_1$, joten se sisältyy johonkin komponenttiin gC_i . Joukko gA on avaruuden

$$\text{Cay}(G; S) \setminus B(g, R)$$

polkuyhtenäinen komponentti, joka leikkaa joukkoa gC_i , joten $gA = gC_i$, mikä osoittaa väitteet (a) ja (b). Kohta (b) sovellettuna alkioon g^{-1} antaa

$$B(e, R) \sqcup \bigsqcup_{C \in \pi_0^u(G \setminus B(e, R)) \setminus C_i} C \subset g^{-1}C_1,$$

mistä (c) seuraa kuvaamalla molemmat puolet alkiolla g . □

2. Olkoon $|g| \geq 2R$, $g \in C_1$ ja $g^{-1} \in C_2$. Tällöin $\text{ord}(g) = \infty$, $g^n \in C_1$ ja $g^{-n} \in C_2$ kaikilla $n \geq 1$.

Todistus. Kohdan 1c nojalla $gC_1 \subset C_1$ ja näin ollen kaikilla $n \geq 1$

$$g^{n+1} \in g^n C_1 \subset g^{n-1} C_1 \subset \dots \subset C_1,$$

josta seuraa myös, että $g^n \neq e$. Vastaavasti $g^{-n-1} \in g^{-n} C_2 \subset C_2$. \square

3. Jokaiselle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ löytyy alkio $g_i \in C_i$ siten, että $|g_i| \geq 2R$ ja $g_i^{-1} \in C_j$, $j \neq i$.

Todistus. Riittää osoittaa, että joukosta C_1 löytyy halutunlainen alkio. Koska C_1 on rajoittamaton, sieltä löytyy alkio g , jolle $|g| \geq 2R$. Oletetaan, että $g^{-1} \in C_1$. Olkoon $h \in C_2$ siten, että $|h| \geq 2R + |g|$. Jos $h^{-1} \in C_1$, niin h^{-1} on etsitty alkio ja väite pätee. Oletetaan siis, että $h^{-1} \in C_j$, missä $j \neq 1$. Kohdan 1c nojalla $gh \in gC_2 \subset C_1$ ja $(gh)^{-1} \in C_j$. Tämän lisäksi $|gh| \geq |h| - |g| \geq 2R$ ja väite seuraa. \square

4. Olkoon $n \geq 4$ ja $g, h \in G$ siten, että $|g|, |h| \geq 2R$,

$$g \in C_1, g^{-1} \in C_2, h \in C_3 \text{ ja } h^{-1} \in C_4.$$

Tällöin $\langle g, h \rangle \cong F_2$.

Todistus. Olkoon $X_1 = C_1 \cup C_2$ ja $X_2 = C_3 \cup C_4$. Tällöin

$$\begin{aligned} g^n(X_2) &\subset g^{n-1}C_1 \subset C_1 \subset X_1 \text{ ja} \\ g^{-n}(X_2) &\subset g^{-(n-1)}C_2 \subset C_2 \subset X_1 \text{ kaikilla } n \geq 1. \end{aligned}$$

Vastaavasti $h^n(X_1) \subset X_2$ kaikilla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, joten väite seuraa kleinin kombinaatiolauseesta 2.19. \square

5. Olkoon $g, h \in G$ siten, että $|g|, |h| \geq 2R$, $g \in C_1$, $h \in C_3$ ja $g^{-1}, h^{-1} \in C_2$. Oletetaan lisäksi, että $d(g^{-1}, h^{-1}) \geq 2R$, $g^{-1} \in h^{-1}C_3$ ja $h^{-1} \in g^{-1}C_1$. Tällöin $\langle g^2, h^2 \rangle \cong F_2$.

Todistus. Oletuksista seuraa, että $|gh^{-1}| \geq 2R$, $gh^{-1} \in C_1$ ja $hg^{-1} \in C_3$. Näin ollen kohdasta 1c seuraa, että

$$\begin{aligned} gh^{-1}C_2 &\subset C_1, \text{ joten } h^{-1}C_2 \subset g^{-1}C_1, \\ hg^{-1}C_2 &\subset C_3, \text{ joten } g^{-1}C_2 \subset h^{-1}C_3, \\ h^{-1}C_2 &\subset C_2 \text{ ja } g^{-1}C_2 \subset C_2. \end{aligned}$$

Asetetaan $X_1 = C_1 \cup g^{-1}C_2$ ja $X_2 = C_3 \cup h^{-1}C_2$. Tällöin

$$\begin{aligned} h^{-2n}(X_1) &\subset h^{-2n+1}C_2 \cup h^{-2n}C_2 \subset h^{-1}C_2 \subset X_2 \text{ ja} \\ h^{2n}(X_1) &\subset h^{2n}C_1 \cup h^{2n-1}C_3 \subset C_3 \subset X_2 \text{ kaikilla } n \geq 1 \end{aligned}$$

ja vastaavasti $g^{2n}(X_2) \subset X_1$ kaikilla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, joten väite seuraa lauseesta 2.19. \square

Numeroimalla joukot C_i tarvittaessa uudelleen, löydetään alkiot $g, h \in G$ siten, että

$$|g|, |h| \geq 2R, \quad g \in C_1, \quad g^{-1} \in C_2, \quad h \in C_3 \text{ ja } h^{-1} \notin C_3.$$

Jos $h \notin C_1 \cup C_2$, niin h ja g virittävät kohdan 4 nojalla vapaan ryhmän. Näin ollen voidaan olettaa, että $h^{-1} \in C_2$. Koska h^n ja g^m kuuluvat eri komponentteihin kaikilla $n \geq 1$ ja $m \neq 0$, jokainen näitä alkioita yhdistävä polku kulkee pallon $B(e, R)$ kautta. Tästä seuraa, että

$$d(h^n, g^m) \geq |h^n| - R + |g^m| - R, \text{ joten } d(h^n, \langle g \rangle) \geq |h^n| - 2R.$$

Selvästi luku $|h^n|$ voidaan kasvattaa mielivaltaisen suureksi. Näin ollen

$$d_{\text{Haus}}(\langle h \rangle, \langle g \rangle) = \infty$$

ja lemmasta 4.15 seuraa, että löydetään $k > 0$ siten, että $d(h^{-k}, \langle g \rangle) \geq R + |g|$. Joukko $B(\langle g \rangle, |g|)$ sisältää neutraalialkion, on yhtenäinen, eikä leikkaa joukkoa $B(h^{-k}, R)$, joten

$$B(\langle g \rangle, |g|) \subset h^{-k}C_3.$$

Valitaan $l > 0$ siten, että $|g^{-l}| > |h^{-k}| + R$, jolloin geodeesi $[e, h^{-k}]$ ei leikkaa joukkoa $B(g^{-l}, R)$ ja näin ollen $h^{-k} \in g^{-l}C_1$. Alkiot g^l ja h^k täyttävät kohdan 5 oletukset, joten $\langle g^{2l}, h^{2k} \rangle$ on toisen asteen vapaa ryhmä. \square

Seuraus 5.13. Ryhmällä on joko 0, 1, 2 tai äärettömästi päätyjä.

Todistus. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että löytyy ryhmä G , jolla on tasan n päätyä, $\infty > n \geq 3$. Tällöin löytyy R siten, että

$$|\pi_0^u(\text{Cay}(G; S) \setminus B(e, R))| = n.$$

Olkoon $g \in C \in \pi_0^u(\text{Cay}(G; S) \setminus B(e, R))$ siten, että $|g| \geq 2R$. Tällöin myös

$$|\pi_0^u(\text{Cay}(G; S) \setminus B(g, R))| = n.$$

ja lauseen 5.12 kohdan 1c nojalla avaruuden $\pi_0^u(\text{Cay}(G; S) \setminus B(g, R))$ polkuyhtenäisistä rajoittamattomista komponenteista $n - 1$ sisältyy joukkoon C . Erityisesti avaruudella

$$\text{Cay}(G; S) \setminus (B(g, R) \cup B(e, R))$$

on ainakin $2(n - 1)$ rajoittamatonta polkuyhtenäistä komponenttia ja näin ollen vähintään $2(n - 1) > n$ päätyä. \square

Seuraus 5.14 (Päädyt ja kasvunopeus).

1. Ryhmällä ei ole päätyä jos ja vain jos kasvunopeus on vakio
2. Ryhmällä on kaksi päätyä jos ja vain jos kasvunopeus on lineaarinen
3. Jos ryhmällä on äärettömästi päätyjä, niin sen kasvunopeus on eksponentiaalinen.

Todistus. Kasvunopeus on vakio jos ja vain jos ryhmä on äärellinen, ryhmällä ei ole päätyjä jos sillä ei ole kunnollisia säteitä, mikä taas pätee jos ja vain jos ryhmä on äärellinen. Kaksipäätyisiä ryhmiä koskeva lause osoitetaan lauseen [6.1](#) yhteydessä. Viimeinen väite seuraa lauseesta [5.12](#). \square

6 Erityisiä esimerkkejä

6.1 Lineaarisen kasvun ryhmät

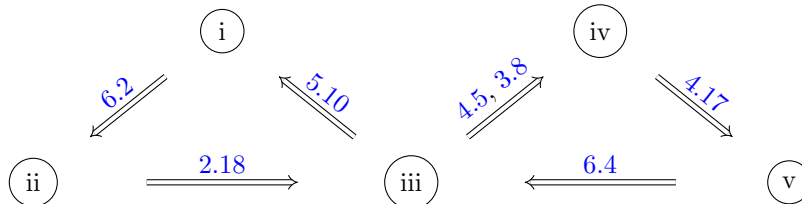
Lineaarisen kasvun ryhmät muodostavat oman erityisen joukkonsa, joka voidaan seuraavan lauseen nojalla karakterisoida kaikkien esiteltyjen geometrinen piirteiden avulla. Lisäksi huomataan, että ryhmä on kvasi-isometrinen äärettömän syklisen ryhmän kanssa jos ja vain jos sillä on tämä ryhmä äärellisen indeksin aliryhmänä. Vastaavanlainen tulos tunnetaan myös muissa tapauksissa, kuten \mathbb{Z}^n [10, Corollary 6.3.16] ja äärellisesti viritetyt vapaat ryhmät [4, Thm. 20.45].

Esitetyt tulokset ovat hyvin tunnettuja, lause 6.2 on tehtävä 8.34 kirjassa [2] ja kysymystä siitä, kuinka lineaarisesta kasvusta seuraa kvasi-isometrisuus avaruuden \mathbb{Z} kanssa, on käsitelty keskustelussa [8]. Lauseessa 6.4 tämä osoitetaan hyvin yksinkertaisella kasvunopeuden arviointiin perustuvalla argumentilla, josta en ole löytänyt kirjallisuudesta.

Lause 6.1. Seuraavat lauseet ovat yhtäpitäviä:

- i) Ryhmällä G on tasan kaksi päätyä.
- ii) Ryhmällä G on ryhmän \mathbb{Z} kanssa isomorfinen äärellisen indeksin aliryhmä.
- iii) G ja \mathbb{Z} ovat kvasi-isometrisia.
- iv) G on ääretön, hyperbolinen ja sen kasvunopeus ei ole eksponentiaalinen.
- v) Ryhmän G kasvunopeus on lineaarinen.

Todistus. Seuraa suoraan kuvassa mainituista tuloksista.

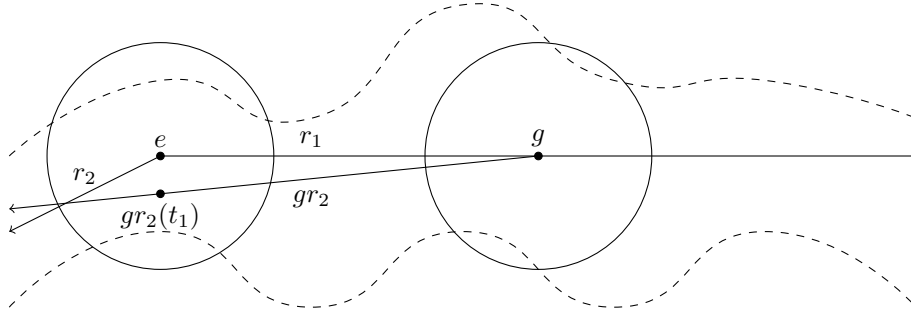


□

Lause 6.2. Kaksipäätyisellä ryhmällä on ryhmän \mathbb{Z} kanssa isomorfinen äärellisen indeksin aliryhmä.

Todistus. Todistus jakaantuu kolmeen osaan. Ensin näytetään, että kaksipäätyisessä ryhmässä on alkio $g \in G$, jonka kertaluokka on ääretön. Seuraavaksi näytetään, että tämän alkion eri potensseja löytyy ryhmän molemmista päädyistä. Lopuksi osoitetaan, että mielivaltainen alkio $h \in G$ on aina lähellä jotain g :n potenssia, jolloin väite seuraa lauseesta 2.3.

Lauseen 5.5 nojalla löydetään geodeesiset säteet $r_i : [0, \infty) \rightarrow \text{Cay}(G; S)$, $i \in \{1, 2\}$ siten, että ne edustavat ryhmän G eri päätyjä ja $r_i(0) = e$. Päätyjen



Kuva 8: Säteen gr_2 on kuljettava pallon $B(e, R)$ läpi päästäkseen takaisin samaan komponenttiin säteen r_2 kanssa.

määritelmän nojalla löydetään myös $R \in \mathbb{N}$ siten, että joukot $r_i([R, \infty))$ sisältyvät joukon $\text{Cay}(G; S) \setminus B(e, R)$ eri polkuyhtenäisiin komponentteihin. Ryhmä G toimii päätyjen bijektioina, joten on olemassa ryhmähomomorfismi

$$\psi : G \rightarrow \text{bij}(\text{Ends}(G)).$$

Homomorfismin ψ ydin on ryhmän G äärellisen indeksin aliryhmä, joten rajoittamalla tähän aliryhmään voidaan olettaa, että toiminta päätyihin on triviaali.

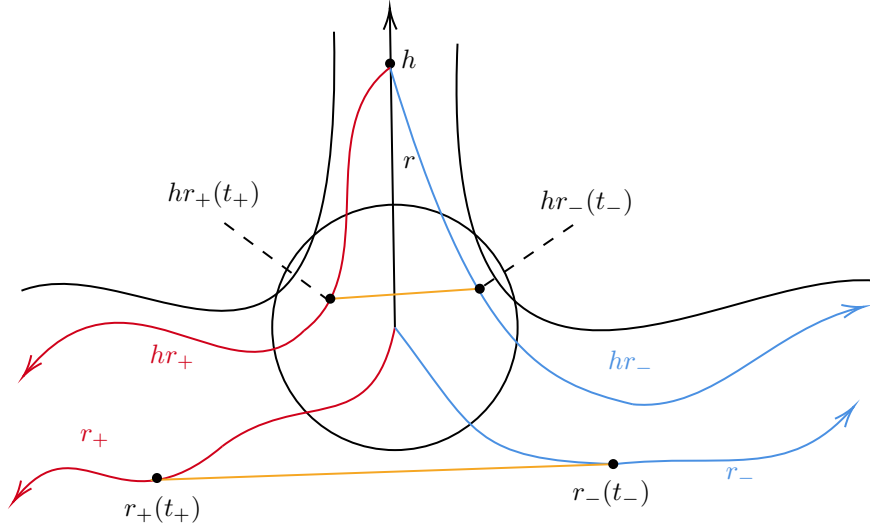
Olkoon $g = r_1(3R) \in G$, tällöin $gr_2(0) = g$ kuuluu samaan komponenttiin kuin $r_1([R, \infty))$, mutta säde gr_2 vastaa samaa päätyä kuin r_2 . Päästäkseen oikeaan komponenttiin, säteen gr_2 on kuljettava pallon $B(e, R)$ kautta. Näin ollen löytyy $t_1 \geq R$ siten, että $gr_2(t_1) \in B(e, R)$. $g^2r_2(t_1) \in B(g, R)$ kuuluu jälleen väärään komponenttiin, joten löydetään $t_2 \geq t_1 + R \geq 2R$, jolle pätee $g^2r_2(t_2) \in B(e, R)$. Induktiivisesti saadaan jono t_n , missä $g^n r_2(t_n) \in B(e, R)$ ja $t_n \geq nR$. Kolmioepäyhtälöllä saadaan

$$|g^n| + R \geq d(g^n, e) + d(e, g^n r_2(t_n)) \geq d(g^n, g^n r_2(t_n)) = t_n \geq nR,$$

joten $|g^n| \geq (n-1)R$ ja g virittää äärettömän syklisen ryhmän.

Olkoon $r_{\pm} : [0, \infty) \rightarrow \text{Cay}(G; S)$ kunnolliset säteet, jotka saadaan yhdistämällä pisteet e, g^1, g^2, \dots tai e, g^{-1}, g^{-2}, \dots geodeeseilla. Näytetään antiteesin avulla, että säteet r_{\pm} edustavat eri päätyjä. Oletetaan, että säteet r_{\pm} edustavat samaa päätyä ja olkoon r pisteestä e lähtevä geodeesinen säde, joka edustaa eri päätyä kuin säteet r_{\pm} . Olkoon $h = r(R + 5|g|)$, tällöin löytyy $t_{\pm} > 5|g|$ siten, että $hr_{\pm}(t_{\pm}) \in B(e, R)$, joten

$$d(hr_{-}(t_{-}), hr_{+}(t_{+})) < 2R.$$



Kuva 9: Alkio h pakottaa pisteet $r_+(t_+)$ ja $r_-(t_-)$ liian lähelle toisiaan.

Toisaalta

$$\begin{aligned}
d(hr_-(t_-), hr_+(t_+)) &\geq d(hr_-(\lfloor t_-/|g| \rfloor \cdot |g|), hr_+(\lfloor t_+/|g| \rfloor \cdot |g|)) - 2|g| \\
&= d(g^{-\lfloor t_-/|g| \rfloor}, g^{\lfloor t_+/|g| \rfloor}) - 2|g| \\
&\geq (\lfloor t_-/|g| \rfloor + \lfloor t_+/|g| \rfloor - 1)R - 2|g| \\
&\geq 9R - 2|g| \\
&= 3R,
\end{aligned}$$

mikä on ristiriita, joten säteet r_+ ja r_- edustavat eri päätyjä.

Olkoon $f \in G$. Avaruudella $\text{Cay}(G; S) \setminus B(f, R)$ on kaksi rajoittamatonta polkuyhtenäistä komponenttia C_1 ja C_2 . Voidaan olettaa, että $r_+((K, \infty)) \subset C_1$ jollain $K \in \mathbb{Z}$, jolloin

$$n = \max\{k \in \mathbb{Z} : g^k \in C_2\}$$

on hyvin määritelty. g^n ja g^{n+1} ovat eri polkuyhtenäisissä komponenteissa, joten niiden välinen geodeesi leikkaa palloa $B(f, R)$ ja näin ollen

$$d(f, \langle g \rangle) \leq R + |g|. \quad \square$$

Lause 6.3. Olkoon G ääretön ryhmä. Tällöin on olemassa isometrinen upotus $l : \mathbb{Z} \rightarrow G$

Todistus. Äärettömällä ryhmällä on ainakin yksi pääty, joten löydetään geodeesinen säde $r : [0, \infty) \rightarrow \text{Cay}(G; S)$ siten, että $r(0) = e$. Edelleen

$$r_n : [-n, \infty) \rightarrow \text{Cay}(G; S), \quad r_n(t) := r(n)^{-1}r(t+n)$$

on isometrinen upotus kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $r_n(0) = e$, joten $d(r_n(t), e) = |t|$. Joukko

$$S_k := \{g \in G : |g| = k\}$$

on äärellinen, joten voidaan valita $g_1, g_{-1} \in S_1$ siten, että äärettömän moni säteistä r_n kulkee näiden pisteiden kautta. Asetetaan

$$A_1 := \{n \in \mathbb{N} : r_n(1) = g_1 \text{ ja } r_n(-1) = g_{-1}\}$$

ja voidaan olettaa, että $|A_1| = \infty$. Jatketaan induktiivisesti valitsemalla alkioit $g_i, g_{-i} \in S_i$ siten, että

$$A_i := \{n \in A_{i-1} : r_n(i) = g_i \text{ ja } r_n(-i) = g_{-i}\} \text{ ja } |A_i| = \infty.$$

Nyt kuvaus $l(k) = g_k$ on haluttu isometrinen upotus, sillä kaikilla $k \in \mathbb{N}$ saadaan $l|_{[-k,k]} = r_{n_k}|_{[-k,k]}$, missä $n_k \in A_k$. \square

Lause 6.4. Jos ryhmän G kasvufunktio on lineaarinen, niin G ja \mathbb{Z} ovat kvasi-isometriset.

Todistus. Lauseen 6.3 nojalla on olemassa isometrinen upotus $l : \mathbb{Z} \rightarrow G$. Olkoon $M = \sup_{g \in G} d(g, \text{Im}(l))$. Jos $M < \infty$ kuvaus l on kvasi-isometria. Toisaalta jos $M = \infty$, löydetään jonot $g_n \in G$ ja $k_n \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$d(g_n, \text{Im}(l)) = d(g_n, l(k_n)) = n.$$

Tällöin pallot

$$B(g_{2n}, n), B(l(k_{2n}), n), B(l(k_{2n} - 2n), n) \text{ ja } B(l(k_{2n} + 2n), n)$$

eivät leikkaa toisiaan ja sisältyvät palloon $B(l(k_{2n}), 3n)$. Alkion $l(k_{2n})^{-1}$ antaman isometrian avulla saadaan

$$|B(e, 3n)| \geq 4|B(e, n)|$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Edelleen induktiolla saadaan

$$|B(e, 3^n)| \geq 4^n |B(e, 1)| = 4^n,$$

joten

$$\beta_{G,S}(n-1) = |B(e, n)| = |B(e, 3^{\log_3 n})| \geq 4^{\lfloor \log_3 n \rfloor} \geq 4^{\log_3 n - 1} = \frac{1}{4} n^{\log_3 4},$$

jolloin ryhmän kasvunopeus ei ole lineaarinen. \square

6.2 Eksponentiaalisen kasvun ryhmät

Lauseissa 4.16 ja 5.12 osoitettiin, että hyperbolisten ryhmien kasvunopeus on vakio, lineaarinen tai eksponentiaalinen ja että ääretönpäättyisien ryhmien kasvunopeus on eksponentiaalinen. Lauseessa 6.1 taas karakterisoitiin lineaarisen kasvun ryhmät myös hyperbolisuuden ja päätyjen lukumäärän avulla. Tässä kappaleessa näytetään, että yllämainitut lauseet antavat kaikki suorat relaatiot mitä kasvunopeuden, hyperbolisuuden ja päätyjen lukumäärän väliltä löytyy. Tätä varten näytetään, että on olemassa eksponentiaalisen kasvun ryhmä joka on

- ei-hyperbolinen ja ääretönpäättyinen
- ei-hyperbolinen ja yksipäättyinen
- hyperbolinen ja ääretönpäättyinen
- hyperbolinen ja yksipäättyinen.

Nämä esimerkit ovat melko suoraviivaisia yksipäättyistä hyperbolista ryhmää lukuunottamatta. Viimeistä esimerkkiä varten esitellään lyhyesti euklidisen tason hyperbolinen vastine, hyperbolinen taso \mathbb{H}^2 , joka on kunnollinen, geodeesinen ja yksipäättyinen hyperbolinen metrinen avaruus. Vastaavalla tavalla kuin ryhmä $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ laatoittaa euklidisen tason yksikköneliöllä $[0, 1] \times [0, 1]$, myös hyperbolinen taso voidaan laatoittaa sopivalla ryhmällä ja kolmiolla tai muulla monikulmiolla. Schwarzin ja Milnorin lauseesta 2.17 seuraa, että tällainen ryhmä ja hyperbolinen taso ovat kvasi-isometrisia, jolloin ne ovat molemmat hyperbolisia ja yksipäättyisiä.

Lause 6.5. Jos G on äärellisesti viritetty ääretön ryhmä, niin $G \times \mathbb{Z}$ on yksipäättyinen ja ei-hyperbolinen.

Todistus. Valitaan ryhmän $G \times \mathbb{Z}$ viritäjäjoukoksi joukko

$$S' = \{(s, 0) : s \in S\} \cup \{(e, 1)\},$$

missä S on ryhmän G äärellinen viritäjäjoukko ja e ryhmän G neutraalialkio. Tällöin on selvää, että

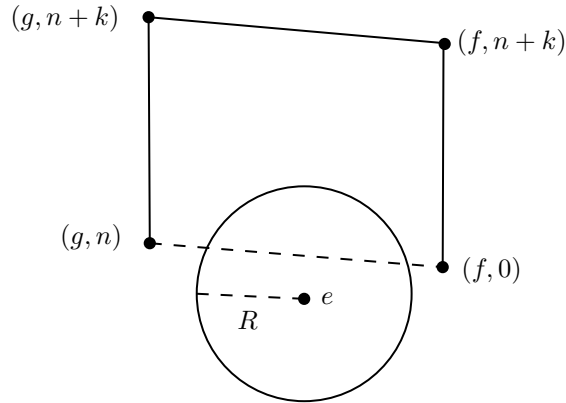
$$|(g, n)| = |g| + |n|.$$

Lauseen 6.3 nojalla löydetään isometrinen upotus $l : \mathbb{Z} \rightarrow G$ ja edelleen tällöin kuvaus

$$F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow G \times \mathbb{Z}, \quad F((n, m)) := (l(n), m)$$

on isometrinen upotus, kun ryhmässä $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ käytetään standardi viritäjäjoukon antamaa metriikkaa. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ja \mathbb{R}^2 ovat kvasi-isometriset ja \mathbb{R}^2 ei ole hyperbolinen, joten $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ei ole hyperbolinen. Edelleen lauseesta 4.5 seuraa, että $G \times \mathbb{Z}$ ei ole hyperbolinen. Olkoon $n \in \mathbb{N}$, ja

$$(f, 0), (g, n) \in (G \times \mathbb{Z}) \setminus B(e, R).$$



Kuva 10: Pisteet $(f, 0), (g, n) \in (G \times \mathbb{Z}) \setminus B(e, R)$ saadaan yhdistettyä siirtämällä niiden välistä geodeesia poispäin neutraaliakiosta.

Oletetaan, että $d(g, f) = k$. Cayleyn kaavion geodeesit

$$[(g, n), (g, n+k)], [(g, n+k), (f, n+k)] \text{ ja } [(f, n+k), (f, 0)]$$

sisältyvät joukkoon $\text{Cay}(G \times \mathbb{Z}; S') \setminus B(e, R)$ ja näin ollen (g, n) ja $(f, 0)$ kuuluvat samaan polkuyhtenäiseen komponenttiin. Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että alkiot $(g, -n)$ ja $(f, 0)$ kuuluvat samaan komponenttiin. Näin ollen $\text{Cay}(G \times \mathbb{Z}; S') \setminus B(e, R)$ sisältää vain yhden rajoittamattoman polkuyhtenäiseen komponentin ja ryhmä $G \times \mathbb{Z}$ on yksipäätyinen. \square

Lause 6.6. Olkoon G ja H äärellisesti viritettyjä ryhmiä, $|H| \geq 2$ ja $|G| \geq 3$. Tällöin ryhmien G ja H vapaalla tulolla $G * H$ on äärettömästi päätyjä.

Todistus. Olkoon S ja S' ryhmien G ja H äärelliset viritäjäjoukot. Valitaan ryhmän $G * H$ viritäjäjoukoksi joukko $S \cup S'$, jolloin

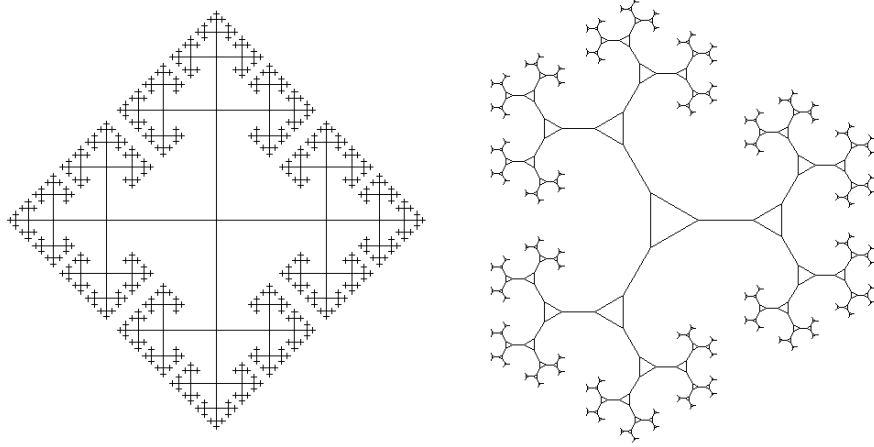
$$|g_1 h_1 \dots g_n h_n|_{S \cup S'} = |g_1|_S + |h_1|_{S'} + \dots + |g_n|_S + |h_n|_{S'},$$

kunhan $g_i \neq e \neq h_i$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.

Olkoon $h \in H \setminus \{e\}$ ja $g, g' \in G \setminus \{e\}$. Olkoon r_1 geodeesinen säde, joka saadaan yhdistämällä peräkkäiset Cayleyn kaavion geodeesit $[(hg)^i, (hg)^{i+1}]$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Valitaan vastaavasti kunnolliset säteet r_2 ja r_3 alkioiden gh ja $g'h$ avulla. Jos säteen r_i edustavat eri päätyjä, ryhmällä $G * H$ on vähintään kolme ja näin ollen äärettömästi päätyjä.

Osoitetaan, että säteet r_2 ja r_3 edustavat eri päätyjä, muut tapaukset voidaan näyttää vastaavalla tavalla. Voidaan olettaa, että $R = |gh| \leq |g'h|$. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että säteet r_2 ja r_3 edustavat samaa päätyä. Tällöin alkiot gh ja $g'h$ kuuluvat avaruuden $\text{Cay}(G * H; S) \setminus B(e, R)$ samaan polkuyhtenäiseen komponenttiin ja niitä yhdistävän polun avulla löytyy äärellinen jono $s_i \in S \cup S'$ siten, että

$$ghs_1 s_2 \dots s_n = g'h$$



Kuva 11: Osa toisen asteen vapaan ryhmän ja ryhmän $\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/2$ Cayleyn kaavioita luonnollisten virittäjäjoukkojen suhteen.

ja $|ghs_1s_2\dots s_i| \geq R$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Voidaan olettaa, että $s_i s_{i+1} \dots s_j \neq e$ kaikilla $1 \leq i < j \leq n$. Olkoon

$$k = \max\{t \in \mathbb{N} : t \leq n \text{ ja } s_i \in S \text{ kaikilla } i \leq t\}$$

toisin sanoen, olkoon k suurin mahdollinen luku, jolle $hs_1s_2\dots s_k \in H$. $hs_1s_2\dots s_k$ ei voi olla neutraalialkio, sillä tällöin $|ghs_1s_2\dots s_k| = |g| < R$. Asetetaan $h_1 = hs_1s_2\dots s_k$ ja jatketaan vastaavalla tavalla korvaamalla seuraava suurin mahdollinen ryhmään G kuuluva osajono alkiolla $g_1 \in G \setminus \{e\}$ ja niin edelleen. Näin saadaan esitettyä $ghs_1s_2\dots s_n$ supistetussa muodossa, joka alkaa alkiolla g . Tällaisen esitysmuodon yksikäsitteisyydestä seuraa, että $g = g'$, mikä on ristiriita. \square

Vapaan ryhmän F_2 Cayleyn kaavio luonnollisen virittäjäjoukon $\{a, b\}$ suhteen on puu, eli metrinen graafi, joka ei sisällä silmukoita. Jokainen puu on 0-hyperbolinen avaruus, joten F_2 on hyperbolinen ryhmä. Koska F_2 ja $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ovat isomorfiset, toisen asteen vapaalla ryhmällä on lauseen 6.6 nojalla äärettömästi päätyjä.

Toisen asteen vapaa ryhmä on siis ääretön-päätyinen hyperbolinen ryhmä, jolla on eksponentiaalinen kasvunopeus. Lauseesta 6.5 seuraa, että $F_2 \times \mathbb{Z}$ on ei-hyperbolinen yksipäätyinen ryhmä, jolla on eksponentiaalinen kasvunopeus. Ryhmän $\mathbb{Z} * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ kasvunopeus on selvästi eksponentiaalinen, lauseen 6.6 nojalla se on ääretön-päätyinen ja lisäksi se sisältää (sopivalla virittäjäjoukolla) isometrisen kopion avaruudesta $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, joten se ei ole hyperbolinen.

6.2.1 Hyperbolista geometriaa

Seuraavaksi esitellään hyperbolinen taso sekä joitain sen perusominaisuuksia. Kappaleessa jätetään paljon yksityiskohtia käsittelemättä, sillä tarkoituksena on vain esittää perusteet yksipäätyisen hyperbolisen ryhmän olemassaololle. Osion pääasiallisena lähteenä on käytetty kirjaa [1, Kappale 7], josta tarvittaessa löytyy myös todistukset todistamatta jätetyille väitteille.

Määritelmä 6.7. Olkoon \mathbb{H}^2 kompleksitason ylempi puolitaso, eli

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}.$$

Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ paloittain jatkuvasti differentioituva polku. Tällöin polun γ hyperbolinen pituus on

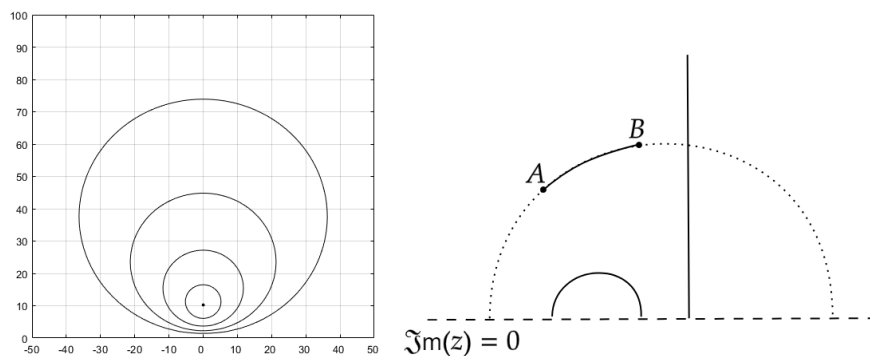
$$\|\gamma\| := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} dt$$

ja hyperbolinen metriikka $\rho : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow [0, \infty)$ saadaan asettamalla

$$\rho(z, w) := \inf\{\|\gamma\| : \gamma(a) = z, \gamma(b) = w \text{ ja } \gamma \text{ on paloittain sileä}\}.$$

Pari (\mathbb{H}^2, ρ) on metrinen avaruus, Poincarén puolitasomalli hyperbolisesta tasosta.

Joukko $B \subset \mathbb{H}^2$ on pallo hyperbolisella metriikalla jos ja vain jos se on pallo euklidisella metriikalla (hyperbolisella pallolla ja sitä vastaavalla euklidisella pallolla on kuitenkin yleensä eri säde ja keskipiste). Tästä seuraa, että hyperbolinen taso ja euklidinen puolitaso ovat homeomorfisia, hyperbolinen taso on yksipäätyinen, ja että hyperbolinen taso on kunnollinen metrinen avaruus.



Kuva 12: Oikealla hyperbolisen tason $10i$ keskisten $0.5, 1, 1.5$ ja 2 säteisien pallojen reuna, vasemmalla geodeesien viivojen kuvajoukkoja sekä geodeesi $[A, B]$.

Hyperbolinen taso on myös yksikäsitteisesti geodeesinen metrinen avaruus. Joukko L on hyperbolisen tason geodeesien viivan kuvajoukko jos ja vain jos L

on reaaliakselin kanssa ortogonaalinen puoliympyrä tai puolisuora. Kahta pistettä yhdistävän geodeesin kuvajoukko on osa tällaista puoliympyrää tai suoraa. Olkoon

$$h \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) := \left\{ g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \text{ ja } g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \right\}$$

tällöin h on hyperbolisen tason isometria. Jos $A, B \subset \mathbb{H}^2$ ovat geodeesien viivojen kuvajoukkoja, niin on olemassa $h \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, jolle $h(A) = B$. Kuvaus

$$r_i : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2, r_i(z) = -\bar{z}$$

on hyperbolisen tason isometria ja peilaus imaginääriakselin suhteen. Jokaiselle isometrialle g pätee, että $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tai $g = hr_i h^{-1}$ jollain $h \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Määritelmä 6.8. Hyperbolisen tason *peilaus* geodeesin $[a, b] \subset \mathbb{H}^2$ suhteen isometria

$$r_{[a,b]} := g \circ r_i \circ g^{-1},$$

missä A on hyperbolisen tason geodeesien viivan kuvajoukko, $[a, b] \subset A$, $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ja $g(\{ki : k > 0\}) = A$. Kuvaus $r_{[a,b]}$ on riippumaton kuvauksesta g .

Määritelmä 6.9. Joukon $A \subset \mathbb{H}^2$ *hyperbolinen pinta-ala* on

$$\text{h-area}(A) = \iint_A \frac{1}{y^2} dx dy,$$

missä $x = \Re(z)$ ja $y = \Im(z)$. Jos g on hyperbolisen tason isometria, niin $\text{h-area}(A) = \text{h-area}(gA)$.

Olkoon $T = \triangle(A, B, C)$ hyperbolisen tason kolmio. T voidaan esittää euklidisessa avaruudessa kolmen ympyräsegmentin tai pystysuoran janan avulla. Määritellään kolmion kulmat näiden segmenttien ja janojen leikkauskulmien mukaan (kuva 13). Hyperbolisen tason isometriat säilyttävät geodeesien väliset kulmat. Oletetaan, että kolmion T kärjet eivät kuulu samalle geodeesille viivalle. Tällöin avaruus $\mathbb{H}^2 \setminus [A, B] \cup [B, C] \cup [C, A]$ koostuu kahdesta komponentista, joista toinen on rajoitettu. Tämä rajoitettu joukko on kolmion sisus ja sen hyperbolinen pinta-ala on $\pi - \alpha - \beta - \gamma$. Kolmion hyperbolisen pinta-alan avulla saadaan seuraava tulos:

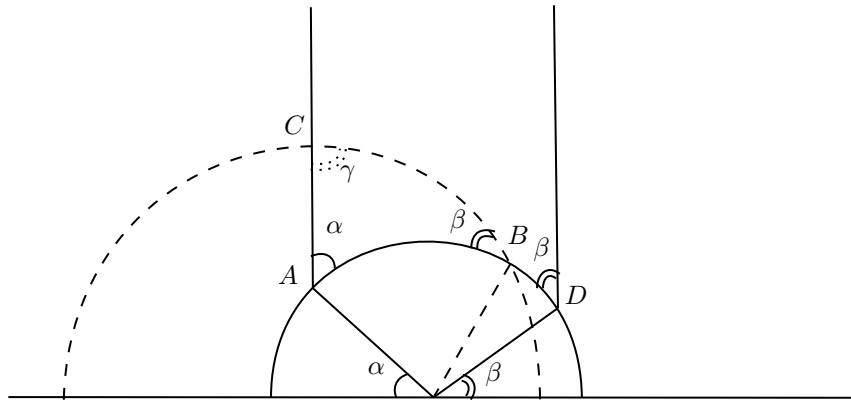
Lause 6.10. Hyperbolinen taso on hyperbolinen metrinen avaruus.

Todistus. Olkoon $z \in \mathbb{H}^2$ ja $r \in \mathbb{R}$ niin suuri, että $\text{h-area}(B(z, r)) > 2\pi$. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että \mathbb{H}^2 ei ole r -hyperbolinen, tällöin löytyy kolmio $\triangle(A, B, C)$ ja piste $w \in [A, B]$ siten, että $d(w, [B, C] \cup [C, A]) > r$. Olkoon T kolmion rajaama alue. Tällöin $B(w, r) \subset T \cup r_{[A,B]}(T)$ ja

$$2\pi \geq \text{h-area}(T \cup r_{[A,B]}(T)) \geq \text{h-area}(B(w, r)) > 2\pi,$$

mikä on ristiriita. □

Perustellaan vielä lyhyesti, miksi on olemassa hyperbolinen kolmio, jonka kulmien suuruudet ovat α , β ja γ , missä $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ja $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Valitaan aluksi A ja B yksikköympyrän kehältä kuten kuvassa 13. Oletetaan, että $B \in [A, D]$ ja $B \neq A, D$. Tällöin kulma β ja piste B määräävät yksiselitteisesti katkoviivalla esitetyn reaaliakselin kanssa ortogonaalisen ympyrän. Tämä ympyrä leikkaa pisteestä A lähtevää pystysuoraa sädettä kolmion kolmannessa kärjessä C , johon muodostuneen kulman suuruus on γ . Pisteestä B liikuttaminen geodeesilla $[A, D]$ muuttaa kulman γ suuruutta jatkuvasti. Kun B lähestyy pistettä A , kolmio alkaa muistuttamaan euklidista kolmiota ja näin ollen kulma γ lähestyy lukua $\pi - \alpha - \beta$. Pisteestä B siirtäminen kohti pistettä D taas pienentää kulman γ arvoa ja saa sen lähestymään nollaa. Jakuvuuteen nojaten kulma γ käy tällä välillä läpi kaikki arvot väliltä $(0, \pi - \beta - \alpha)$.



Kuva 13: Hyperbolisen kolmion konstruktointi annetuilla kulmilla α , β ja γ .

Määritelmä 6.11. Olkoon G ryhmä, joka toimii topologiseen avaruuteen X . Ryhmän G *fundamentaalin joukko* \hat{D} sisältää täsmälleen yhden alkion jokaisesta joukosta $\{gx : g \in G\} \in X/G$. Ryhmän *fundamentaalin alue* on avoin joukko D , jolle pätee $D \subset \hat{D} \subset \overline{D}$.

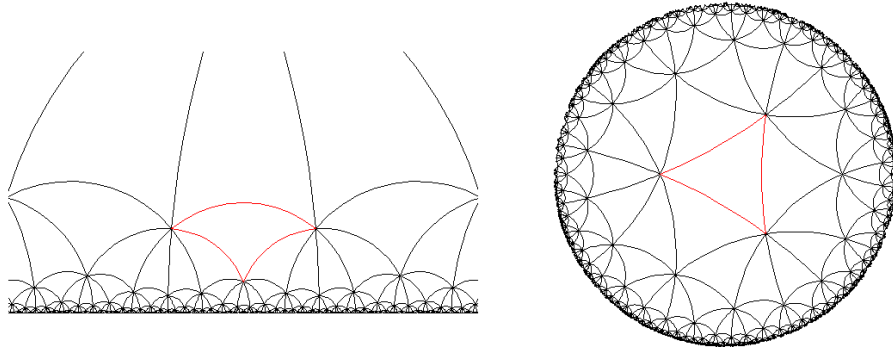
Esimerkki. Yksikköneli $(0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ on ryhmän \mathbb{Z}^2 fundamentaalinen alue.

Lause 6.12. Olkoon $n, m, k \in \mathbb{N}$, $1/n + 1/m + 1/k < 1$ ja $\triangle(A, B, C)$ hyperbolisen tason kolmio, jonka kulmien suuruudet ovat π/n , π/m ja π/k . Olkoon G kolmion sivuihin liitettyjen peilauksien $r_{[A,B]}$, $r_{[B,C]}$ ja $r_{[C,A]}$ virittämä ryhmä. Tällöin kolmion $\triangle(A, B, C)$ sisus T on ryhmän G fundamentaalinen alue ja ryhmän G toiminta hyperboliseen tasoon on kunnollinen.

Todistus. Seuraa Poincarén lauseesta, katso [3, Proposition V.B.35]. □

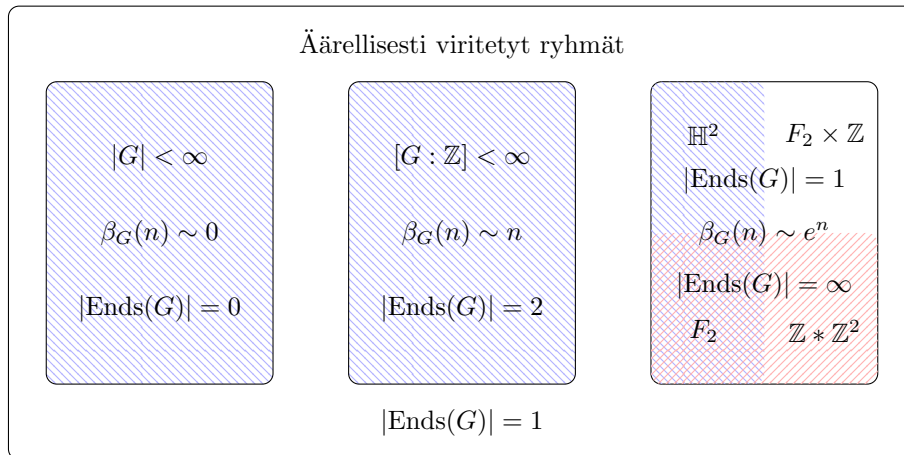
Seuraus 6.13. Lauseen 6.12 ryhmä G on yksipäätyinen hyperbolinen ryhmä.

Todistus. Tekijäkuvaus $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/G$, $\pi(z) = Gz$ rajoitettuna kompaktiin joukkoon \bar{T} on surjektio ja näin ollen \mathbb{H}^2/G on kompakti. Ryhmän toiminta hyperboliseen tasoon täyttää Schwarzin ja Milnorin lauseen 2.17 oletukset, joten G ja \mathbb{H}^2 ovat kvasi-isometriset. Koska \mathbb{H}^2 on yksipäätyinen ja hyperbolinen, kvasi-isometrisuudesta seuraa että niin on myös G . □



Kuva 14: Poincarèn puolitaso- ja pallomallissa esitetty kuva hyperbolisen tason laatoituksesta kolmiolla, jonka kaikkien kulmien suuruus on $\pi/4$.

6.3 Yhteenveto



Yhteenveto esitetystä tuloksista, sinisellä väritetty alue edustaa hyperbolisia ryhmiä.

Kirjallisuutta

- [1] A. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1983.
- [2] M. Bridson and A. Häfliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [3] P. de la Harpe and U. of Chicago Press. *Topics in Geometric Group Theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 2000.
- [4] C. Druţu and M. Kapovich. *Geometric Group Theory*. Colloquium Publications. American Mathematical Society, 2018.
- [5] R. I. Grigorchuk. Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means. *Mathematics of The Ussr-izvestiya*, 25:259–300, 1985.
- [6] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 53(1):53–78, Dec 1981.
- [7] M. Gromov. *Hyperbolic Groups*, pages 75–263. Springer New York, New York, NY, 1987.
- [8] B. K. (<https://mathoverflow.net/users/4961/beno>) Is there a simple proof that a group of linear growth is quasi-isometric to \mathbb{Z} ? MathOverflow, 2010. URL:<https://mathoverflow.net/q/21578> (version: 2010-04-16).
- [9] I. Kapovich and N. Benakli. Boundaries of hyperbolic groups. *arXiv preprint math/0202286*, 2002.
- [10] C. Löh. *Geometric Group Theory: An Introduction*. Universitext. Springer International Publishing, 2017.
- [11] J. R. Stallings. On torsion-free groups with infinitely many ends. *Annals of Mathematics*, 88(2):312–334, 1968.

A Graafit metrisinä avaruuksina

Määritelmä A.1. *Suunnistamaton graafi* $\mathbb{X} = (V, E)$ koostuu joukoista V (graafin kärjet) ja $E \subset \{A \subset V : |A| = 2\}$ (graafin sivut). Graafin (V, E) *suunnistus* on kuvaus $\iota : E \rightarrow V \times V$, $\iota(e) = \iota(\{v_0, v_1\}) := (v_0, v_1)$ ja *suunnistettu graafi* on kolmikko (V, E, ι) . Suunnistetulle graafille asetetaan $p_i^e : E \rightarrow V$, $p_0^e(e) := v_0$ (sivun lähtöpiste) ja $p_1^e(e) := v_1$ (sivun päätepiste).

Määritelmä A.2. Graafin (V, E) äärellinen jono $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$, jolle pätee $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ kaikilla $i = 0, \dots, n-1$ on kärkiä v_0 ja v_n yhdistävä *polku*, jonka pituus on n . Graafi on *yhtenäinen*, jos jokainen kärkipari voidaan yhdistää polulla. Yhtenäisessä graafissa kärkien välinen etäisyys $d_E : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ määritellään siten, että $d_E(v, w)$ on lyhimmän kärkiä v ja w yhdistävän polun pituus.

Seuraava lause todistetaan olellisesti samalla tavalla kuin lause 2.2.

Lause A.3. Olkoon (V, E) yhtenäinen graafi, tällöin (V, d_E) on metrinen avaruus.

Lisäksi huomataan, että jos $(G, E) = \text{Cay}(G; S)$, niin kärkien $v, w \in G$ välisen polun

$$v = v_0, \dots, v_n = w$$

jokainen sivu $\{v_{i-1}, v_i\}$ vastaa jotain joukon $S \cup S^{-1}$ alkioita s_i siten, että

$$v_i s_i = v_{i+1}.$$

Edelleen näin saadaan

$$v s_1 s_2 \dots s_n = w, \text{ joten } v^{-1} w = s_1 s_2 \dots s_n \text{ ja } d_S(v, w) \leq n.$$

Päätely voidaan toistaa myös toiseen suuntaan, joten sanametriikka ja polkumetriikka ovat samat, $d_E = d_S$.

Identtinen kuvaus $\text{id} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ja kuvaus $t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $t(x) = 1 - x$ muodostavat kahden alkion ryhmän $K = \{\text{id}, t\}$, jossa laskutoimituksena on kuvauksien yhdistäminen. Ryhmä K toimii joukkojen $[0, 1]$ ja $\{0, 1\}$ isometrioina. Tämä ryhmä ja sen toiminta on keskeisessä osassa seuraavissa määritelmässä ja todistuksissa, sillä sen avulla on helppo esittää pisteen $a \in [0, 1]$ etäisyys välin $[0, 1]$ jommasta kummasta päätepisteestä.

Määritelmä A.4. Yhtenäisestä graafista $\mathbb{G} = (V, E)$ saatu (*simplisiaalinen*) *metrinen graafi* $|\mathbb{G}|$ on pari $(U/\sim, d)$, missä ι on jokin graafin \mathbb{G} suunnistus,

$$U := \bigsqcup_{e \in E} \{e\} \times [0, 1], \quad v^e := \{(e, \phi) : p_{\phi 0}^e(e) = v, \phi \in K\}$$

ja \sim on osituksen

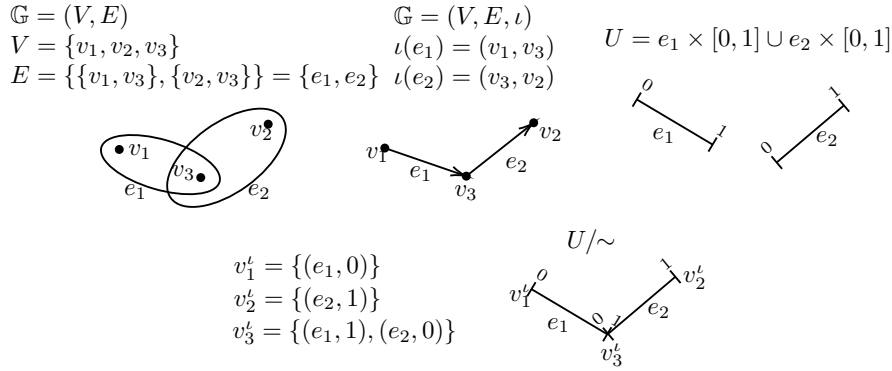
$$\{v^e : v \in V\} \cup \{(e, a) : e \in E \text{ ja } a \in (0, 1)\}$$

antama ekvivalenssirelaatio. Joukot $e \times (0, 1) \subset U/\sim$ ovat graafin sivuja ja $v^t \in U/\sim$ graafin kärkiä. Kuvaus $d : U \times U \rightarrow [0, \infty)$ määritetään asettamalla

$$\begin{aligned} d((e, a), (f, b)) &:= \min\{a + d_E(p_0^t(e), p_0^t(f)) + b, \\ &\quad a + d_E(p_0^t(e), p_1^t(f)) + 1 - b, \\ &\quad 1 - a + d_E(p_1^t(e), p_0^t(f)) + b, \\ &\quad 1 - a + d_E(p_1^t(e), p_1^t(f)) + 1 - b\} \\ &= \min_{\psi, \phi \in K} \{\psi a + d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\phi 0}^t(f)) + \phi b\}, \\ &\text{jos } e \neq f \text{ ja } |a - b| \text{ muulloin.} \end{aligned}$$

Kuvaus $\hat{d} : U/\sim \times U/\sim \rightarrow [0, \infty)$ saadaan kuvauksen d avulla asettamalla

$$\hat{d}([a], [b]) := d(a, b), \text{ missä } [a] = \{b \in U : b \sim a\}.$$



Kuva 15: Yksinkertainen graafi, suunnistettu graafi sekä määritelmän A.4 joukot U ja U/\sim .

Lause A.5. Metrinen graafi on metrinen avaruus.

Todistus. Osoitetaan, että \hat{d} on hyvin määritelty ja muodostaa metriikan joukossa U/\sim .

1. Olkoon $(e, a), (f, b) \in U$, tällöin

$$d((e, a), (f, b)) = 0$$

jos ja vain jos $(e, a) = (f, b)$ tai

$$\psi a + d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\phi 0}^t(f)) + \phi b = 0 \text{ joillain } \psi, \phi \in K.$$

Koska jokainen summan termi on ei-negatiivinen, tällöin $a = \psi 0$, $b = \phi 0$ ja $p_{\psi 0}^t(e) = p_{\phi 0}^t(f)$, jolloin

$$(e, a) \in v^t \text{ ja } (f, b) \in v^t, \text{ missä } v = p_{\psi 0}^t(e).$$

Toisin sanoen $d((e, a), (f, b)) = 0$ jos ja vain jos $(e, a) \sim (f, b)$.

2. **Kolmioepäyhtälö:** Olkoon $(e, a), (f, b), (g, c) \in U$. Oletetaan aluksi, että $e \neq f \neq g \neq e$, jolloin löytyy $\psi, \phi, \eta, \vartheta \in K$ siten, että

$$\begin{aligned} & d((e, a), (f, b)) + d((f, b), (g, c)) \\ &= \psi a + d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\phi 0}^t(f)) + \phi b + \eta b + d_E(p_{\eta 0}^t(f), p_{\vartheta 0}^t(g)) + \vartheta c \\ &= \psi a + d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\phi 0}^t(f)) + \phi b + \eta b + d_E(p_{\eta 0}^t(f), p_{\vartheta 0}^t(g)) + \vartheta c \\ &\quad + d_E(p_{\phi 0}^t(f), p_{\eta 0}^t(f)) - d_E(p_{\phi 0}^t(f), p_{\eta 0}^t(f)) \\ &\geq \psi a + d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\vartheta 0}^t(g)) + \vartheta c + \phi b + \eta b - d_E(p_{\phi 0}^t(f), p_{\eta 0}^t(f)) \\ &\geq \psi a + d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\vartheta 0}^t(g)) + \vartheta c \\ &\geq d((e, a), (g, c)). \end{aligned}$$

Oletetaan seuraavaksi, että $e = f \neq g \neq e$. Symmetrian vuoksi tämä kattaa myös tilanteen $e \neq f = g \neq e$.

$$\begin{aligned} & d((e, a), (f, b)) + d((f, b), (g, c)) \\ &= |a - b| + \eta b + d_E(p_{\eta 0}^t(f), p_{\vartheta 0}^t(g)) + \vartheta c \\ &\geq \max\{|a - b + \eta b|, |a - b - \eta b|\} + d_E(p_{\eta 0}^t(f), p_{\vartheta 0}^t(g)) + \vartheta c \\ &\geq \eta a + d_E(p_{\eta 0}^t(f), p_{\vartheta 0}^t(g)) + \vartheta c \\ &= \eta a + d_E(p_{\eta 0}^t(e), p_{\vartheta 0}^t(g)) + \vartheta c \\ &\geq d((e, a), (g, c)). \end{aligned}$$

Jos taas $e \neq f \neq g = e$, niin ensimmäisen kohdan pohjalta saadaan

$$\begin{aligned} & d((e, a), (f, b)) + d((f, b), (g, c)) \\ &\geq \psi a + d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\vartheta 0}^t(g)) + \vartheta c \end{aligned}$$

Jos $\psi \neq \vartheta$, niin $d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\vartheta 0}^t(g)) = 1 \geq |a - c|$. Voidaan siis olettaa että $\psi = \vartheta$, jolloin lauseke saadaan sievennettyä muotoon

$$\begin{aligned} & d((e, a), (f, b)) + d((f, b), (g, c)) \\ &\geq \psi a + \psi c \\ &\geq |\psi a - \psi c| = |a - c| \\ &= d((e, a), (g, c)). \end{aligned}$$

Tapaus $e = f = g$ palautuu reaalilukujen kolmioepäyhtälöön.

3. **Hyvin määritely:** Olkoon $(e, a), (f, b), (g, c) \in U$ ja $(e, a) \sim (f, b)$. Kohtien 1 ja 2 pohjalta saadaan

$$d((e, a), (g, c)) \leq d((e, a), (f, b)) + d((f, b), (g, c)) = d((f, b), (g, c)).$$

Vaihtamalla keskenään (e, a) ja (f, b) saadaan yhtäsuuruus

$$d((e, a), (g, c)) = d((f, b), (g, c)).$$

Nyt kuvauksen d symmetrisyydestä seuraa, että kuvaus \hat{d} on hyvin määritelty.

Kohdista 1 ja 2 sekä kuvauksen d symmetrisyydestä seuraa että \hat{d} on metriikka. \square

Lause A.6. Eri suunnistuksien antamat metriset graafit ovat isometriset.

Todistus. Olkoon $\iota_1 : E \rightarrow V \times V$ ja $\iota_2 : E \rightarrow V \times V$ yhtenäisen graafin (E, V) kaksi eri suunnistusta. Määritellään $T : E \rightarrow K = \{\text{id}, t\}$ siten, että

$$T(e) := \begin{cases} \text{id}, & \text{jos } \iota_1(e) = \iota_2(e), \\ t, & \text{jos } \iota_1(e) \neq \iota_2(e). \end{cases}$$

Osoitetaan, että kuvaus $F : U \rightarrow U$, $F((e, a)) = (e, T(e)a)$ on yhteensopiva ekvivalenssirelaation kanssa ja määrittelee isometrian $F : U/\sim_{\iota_1} \rightarrow U/\sim_{\iota_2}$. Suoraan määritelmästä seuraa, että

$$p_i^{\iota_1}(e) = p_{T(e)i}^{\iota_2}(e).$$

Edelleen saadaan

$$(e, i) \in v^{\iota_1} \Leftrightarrow p_i^{\iota_1}(e) = v \Leftrightarrow p_{T(e)i}^{\iota_2}(e) = v \Leftrightarrow (e, T(e)i) \in v^{\iota_2},$$

joten $F(v^{\iota_1}) = v^{\iota_2}$ ja kuvaus F on yhteensopiva ekvivalenssirelaation kanssa. Olkoon $(e, a), (f, b) \in U$, voidaan olettaa, että $e \neq f$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} d_{\iota_1}((e, a), (f, b)) &= \min_{\psi, \phi \in K} \{\psi a + d_E(p_{\psi 0}^{\iota_1}(e), p_{\phi 0}^{\iota_1}(f)) + \phi b\} \\ &= \min_{\psi, \phi \in K} \{\psi a + d_E(p_{T(e)\psi 0}^{\iota_2}(e), p_{T(f)\phi 0}^{\iota_2}(f)) + \phi b\} \\ &= \min_{\psi, \phi \in K} \{T(e)\psi a + d_E(p_{\psi 0}^{\iota_2}(e), p_{\phi 0}^{\iota_2}(f)) + T(f)\phi b\} \\ &= d_{\iota_2}(F((e, a)), F((f, b))), \end{aligned}$$

joten kuvaus F on isometrinen upotus. Lopuksi huomataan että $F \circ F = \text{Id}$, joten F on bijektio ja täten isometria. \square

Lause A.7. Olkoon $\mathbb{G}_1 = (V_1, E_1, \iota_1)$ ja $\mathbb{G}_2 = (V_2, E_2, \iota_2)$ yhtenäisiä suunnistettuja graafeja ja $F : (V_1, d_{E_1}) \rightarrow (V_2, d_{E_2})$ isometria. Tällöin on olemassa yksiselitteinen isometria $\hat{F} : |\mathbb{G}_1| \rightarrow |\mathbb{G}_2|$ siten, että $\hat{F}(v^{\iota_1}) = (F(v))^{\iota_2}$ kaikilla $v \in V_1$.

Todistus. Olemassaolo: Lauseen A.6 nojalla voidaan valita ι_2 siten, että

$$F(p_i^{\iota_1}(e)) = p_i^{\iota_2}(F(e)), \text{ missä } i \in \{0, 1\}.$$

Osoitetaan, että $\hat{F}([(e, a)]) = [(F(e), a)]$ on haluttu isometria:

$$\begin{aligned} \hat{F}(v^{\iota_1}) &= \hat{F}(\{(e, i) : p_i^{\iota_1}(e) = v\}) \\ &= \hat{F}(\{(e, i) : F(p_i^{\iota_1}(e)) = F(v)\}) \\ &= \hat{F}(\{(e, i) : p_i^{\iota_2}(F(e)) = F(v)\}) \\ &= \{(F(e), i) : p_i^{\iota_2}(F(e)) = F(v)\} \\ &= \{(e, i) : p_i^{\iota_2}(e) = F(v)\} \\ &= (F(v))^{\iota_2}, \end{aligned}$$

joten $\hat{F}(v^{\iota_1}) = (F(v))^{\iota_2}$ ja kuvaus on hyvin määritelty. Olkoon $(e, a), (f, b) \in U_1$, voidaan olettaa, että $e \neq f$, jolloin

$$\begin{aligned} d_1((e, a), (f, b)) &= \min_{\psi, \phi \in K} \{\psi a + d_{E_1}(p_{\psi 0}^{\iota_1}(e), p_{\phi 0}^{\iota_1}(f)) + \phi b\}, \\ &= \min_{\psi, \phi \in K} \{\psi a + d_{E_2}(F(p_{\psi 0}^{\iota_1}(e)), F(p_{\phi 0}^{\iota_1}(f))) + \phi b\}, \\ &= \min_{\psi, \phi \in K} \{\psi a + d_{E_2}(p_{\psi 0}^{\iota_2}(F(e)), p_{\phi 0}^{\iota_2}(F(f))) + \phi b\}, \\ &= d_2(\hat{F}((e, a)), \hat{F}((f, b))), \end{aligned}$$

joten \hat{F} on isometria.

Yksikäsitteisyys: Olkoon F_1 ja F_2 halutunkaltaisia isometrioita. Tällöin

$$F_1^{-1} \circ F_2(v^{\iota_1}) = F_1^{-1}((F(v))^{\iota_2}) = F_1^{-1}(F_1(v^{\iota_1})) = v^{\iota_1}.$$

Olkoon $a \in (0, 1)$ ja $F_1^{-1} \circ F_2((e, a)) = (f, b)$, jos $e = f$, niin edellisen kohdan perusteella

$$a = d((e, a), (e, 0)) = d(F_1^{-1} \circ F_2((e, a)), F_1^{-1} \circ F_2((e, 0))) = d((f, b), (e, 0)) = b,$$

joten $F_1^{-1} \circ F_2((e, a)) = (e, a)$. Toisaalta jos $e \neq f$, niin

$$\begin{aligned} a &= d((f, b), (e, 0)) = \psi b + d_E(p_{\psi 0}^{\iota_1}(f), p_0^{\iota_1}(e)) + 0, \text{ ja} \\ 1 - a &= d((f, b), (e, 1)) = \phi b + d_E(p_{\phi 0}^{\iota_1}(f), p_1^{\iota_1}(e)) + 0 \end{aligned}$$

joillakin $\psi, \phi \in K$. Edelleen tällöin on oltava

$$d_E(p_{\psi 0}^{\iota_1}(f), p_0^{\iota_1}(e)) = d_E(p_{\phi 0}^{\iota_1}(f), p_1^{\iota_1}(e)) = 0$$

ja $\psi \neq \phi$. Tällöin

$$e = \{p_{\psi 0}^{\iota_1}(f), p_{\phi 0}^{\iota_1}(f)\} = \{p_0^{\iota_1}(e), p_1^{\iota_1}(e)\} = f,$$

mikä on ristiriita. Näin ollen kuvaus $F_1^{-1} \circ F_2$ on identtinen kuvaus, eli $F_1 = F_2$. \square

Huomautus. Edellisen lauseen yksiselitteisyystulos on seurausta siitä, että kahta kärkeä yhdistää korkeintaan yksi sivu, mikä edelleen on seurausta käytetystä graafin määritelmästä. Selvästi tulos ei päde, mikäli kahdella eri sivulla voisi olla samat päätepisteet.

Lause A.8. Metrinen graafi on geodeesinen avaruus.

Todistus. Olkoon $(U/\sim, d)$ metrinen graafi ja $(e, a), (f, b) \in U$ eri sivuilla. Tällöin löytyy $\psi, \phi \in K$ siten, että

$$d((e, a), (f, b)) = \psi a + d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\phi 0}^t(f)) + \phi b.$$

Olkoon v_0, v_1, \dots, v_n kärkiä $p_{\psi 0}^t(e)$ ja $p_{\phi 0}^t(f)$ yhdistävä minimaalinen polku, v_{n+1} siten, että $f = \{v_{n+1}, v_n\}$ ja v_{-1} siten, että $e = \{v_{-1}, v_0\}$. Valitaan jono $\psi_i \in K$ siten, että

$$p_{\psi_i 0}^t(\{v_i, v_{i+1}\}) = v_i, \text{ kaikilla } i = 0, \dots, n-1.$$

Kuvaus $s : [-\psi a, n + \phi b] \rightarrow U/\sim$,

$$\begin{aligned} s|_{[-\psi a, 0]}(t) &:= [(e, \psi(-t))] \\ s|_{[i, i+1]}(t) &:= [(\{v_i, v_{i+1}\}, \psi_i(t-i))] \\ s|_{[n, n+\phi b]}(t) &:= [(f, \phi(t-n))] \end{aligned}$$

on hyvin määritelty, sillä

$$\begin{aligned} s|_{[i, i+1]}(i) &= [(\{v_i, v_{i+1}\}, \psi_i 0)] \\ &= v_i^t \\ &= [(\{v_{i-1}, v_i\}, \psi_{i-1} 1)] \\ &= s|_{[i-1, i]}(i), \text{ kun } i = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned} s|_{[-\psi a, 0]}(0) &= [(e, \psi 0)] = v_0^t = s|_{[0, 1]}(0) \\ s|_{[n, n+\phi b]}(n) &= [(f, \phi 0)] = v_n^t = s|_{[n-1, n]}(n). \end{aligned}$$

Lisäksi

$$s|_{[-\psi a, 0]}(t), s|_{[n, n+\phi b]}(t) \text{ ja } s|_{[i, i+1]}(t), \text{ missä } i \in \{0, \dots, n-1\}$$

ovat isometrisiä upotuksia. Koska

$$\begin{aligned} d(s(-\psi a), s(n + \phi b)) &= d((e, \psi \psi a), (f, \phi \phi b)) \\ &= d((e, a), (f, b)) \\ &= \psi a + n + \phi b. \end{aligned}$$

kuvaus säilyttää päätepisteiden välisen etäisyydet ja on lauseen 2.12 nojalla geodeesi. \square

Lause A.9. Olkoon S ryhmän G äärellinen virittäjäjoukko, tällöin $|\text{Cay}(G; S)|$ on kunnollinen geodeesinen metrinen avaruus. Lisäksi:

- On olemassa kuvaus $\text{Id} : (G, d_S) \rightarrow |\text{Cay}(G; S)|$, joka on isometrinen upotus ja 0.5-tiheä. Erityisesti kuvaus on 1-kvasi-isometria.
- Ryhmä G toimii avaruuden $|\text{Cay}(G; S)|$ isometrioina siten, että

$$g\text{Id}(h) = \text{Id}(gh) \text{ kaikilla } g, h \in G.$$

- Jos $g \in \text{Im}(\text{Id})$ ja $d(g, h) \in \mathbb{Z}$, niin $h \in \text{Im}(\text{Id})$.

Todistus. Olkoon $i, j \in \{0, 1\}$ ja $e, f \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned} & d((e, i), (f, j)) \\ &= \min_{\psi, \phi \in K} \{ \psi i + d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\phi 0}^t(f)) + \phi j \} \\ &= \min_{\psi, \phi \in K} \{ d_E(p_i^t(e), p_{\psi 0}^t(e)) + d_E(p_{\psi 0}^t(e), p_{\phi 0}^t(f)) + d_E(p_j^t(f), p_{\phi 0}^t(f)) \} \\ &= d_E(p_i^t(e), p_j^t(f)), \end{aligned}$$

joten kuvaus $\text{Id} : (G, d_S) \rightarrow |\text{Cay}(G; S)|$, $\text{Id}(g) := g^t$ on isometrinen upotus. Lisäksi $\sup_{c \in \text{Cay}(G; S)} d(c, F(G)) = 0.5$, joten kuvaus Id on 1-kvasi-isometria. Edelleen selvästi $d((e, i), (f, a)) \in \mathbb{Z}$ jos ja vain jos $a \in \{0, 1\}$ ja tällöin saadaan, että $(f, a) \in \text{Im}(\text{Id})$.

Olkoon $\overline{B}(e^t, r)$ suljettu pallo äärellisesti viritetyn ryhmän G Cayleyn graafilla. Koska G on äärellisesti viritetty, joukko

$$A = \{g \in G : g^t \in \overline{B}(e^t, r+1)\} = \overline{B}_G(e, r+1)$$

on äärellinen ja edelleen joukko

$$K = \{e \times [0, 1] : e \in E \text{ ja } p_0^t(e) \in A\}$$

on äärellisen monen kompaktin joukon yhdisteenä kompakti. Lisäksi

$$\overline{B}(e^t, r) \subset K,$$

sillä jos

$$(e, a) \in \overline{B}(e^t, r), \text{ niin } (p_0^t(e))^t = [(e, 0)] \in \overline{B}(e^t, r+1)$$

ja näin ollen $p_0^t(e) \in A$ ja $(e, a) \in K$. $\overline{B}(e^t, r)$ on kompaktin joukon suljettuna osajoukkona kompakti ja $|\text{Cay}(G; S)|$ täten kunnollinen. Lauseen A.8 nojalla $|\text{Cay}(G; S)|$ on geodeesinen metrinen avaruus.

G toimii avaruuden $(G, d_S) = (G, d_E)$ isometrioina, jotka voidaan lauseen A.7 nojalla laajentaa yksikäsitteisesti metrisen graafin $|\text{Cay}(G; S)|$ isometrioiksi, joilla on haluttu yhteensopivuus kuvauksen Id kanssa. Yksikäsitteisyydestä seuraa, että tämä on samalla ryhmän G toiminta avaruuden $|\text{Cay}(G; S)|$ isometrioina. \square