Cantorin joukon aritmetiikkaa

Ronja Törmälehto

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2022

Tiivistelmä: Ronja Törmälehto, *Cantorin joukon aritmetiikkaa*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 34 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, huhtikuu 2022.

Tämän tutkielman tarkoituksena on perehtyä Cantorin joukon aritmetiikkaan. Tutkielmassa keskitytään käsittelemään Cantorin $\frac{1}{3}$-joukkoa, vaikka Cantorin joukon voi muodostaa myös monella muulla tavalla. Aluksi käydään läpi Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon määritelmä ja sen perusominaisuuksia, jonka jälkeen siirrytään tutkimaan eri laskutoimituksia Cantorin joukon alkioilla. Lopuksi esitellään lyhyesti esimerkkejä siitä, mitä muita tuloksia on tutkittu aiheeseen liittyen.

Cantorin joukko on saanut nimensä 1800-luvulla kyseisiä joukkoja tutkineen Georg Cantorin mukaan. Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko C muodostetaan siten, että ensin suljettu väli $C_0 = [0, 1]$ jaetaan kolmeen yhtä suureen osaan. Tämän jälkeen keskimmäinen avoin osaväli poistetaan ja jäljelle jää reunimmaiset kaksi suljettua osaväliä, jotka muodostavat joukon C_1. Nämä osavälit jaetaan edelleen kumpikin kolmeen yhtä suureen osaan ja jälleen keskimmäiset avoimet osavälit poistetaan, jolloin saadaan joukko C_2. Tätä jakamista ja poistamista jatketaan mielivaltaisen pitkään, jolloin jäljelle jäävien suljettujen joukkojen leikkausjoukko muodostaa Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$.

Koska Cantorin joukko muodostuu suljettujen joukkojen leikkauksesta, se on suljettu. Lisäksi Cantorin joukko on rajoitettu välille $[0, 1]$, joten se on kompakti. Voidaan myös huomata, että Cantorin joukko on ylinumeroituva ja vaikka Cantorin joukon muodostaminen tapahtuu välien avulla, niin itse Cantorin joukko ei kuitenkaan sisällä yhtään väliä.

Koska Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon muodostaminen perustuu kolmeen osaan jakamiseen, niin Cantorin joukon ja 3-järjestelmän välillä on selkeä yhteys. Jokaiselle Cantorin joukon alkiolle on olemassa 3-järjestelmän avulla muodostettu desimaaliesitys, jossa alkio esitetään vain nollien ja kakkosten avulla. Tästä seuraa esimerkiksi, että jos x on Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon alkio, niin myös luvut $1-x$ ja $\frac{1}{3^n}x$ kuuluvat Cantorin joukkoon, kun n on luonnollinen luku.

Cantorin joukon aritmetiikkaa tarkasteltaessa saadaan aikaan paljon mielenkiintoisia tuloksia. Eri laskutoimitusten avulla voidaan muodostaan Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon alkioista kokonaisia lukuvälejä. Esimerkiksi $C + C = [0, 2]$ ja toisaalta $C - C = [-1, 1]$. Jos taas Cantorin joukon alkioiden summassa toista alkiota kerrotaan reaaliluvulla b, saadaan $C + bC = [0, 1 + b]$ kaikilla $\frac{1}{3} \leq b \leq 3$.

Cantorin joukon alkioiden tulon osalta voidaan näyttää, että jokainen $u \in [0, 1]$ voidaan kirjoittaa muodossa $u = x^2y$, missä $x, y \in C$. Toisaalta funktion $g(x, y) = xy$, missä $x, y \in C$, kuvajoukko $g(C^2)$ ei muodosta koko väliä $[0, 1]$. Kyseisen kuvajoukon kokoa voidaan kuitenkin arvioida Lebesguen ulkomitan avulla. Kuvajoukon $g(C^2)$ Lebesguen ulkomitaksi saadaan vähintään $\frac{17}{21}$, mutta enintään $\frac{8}{9}$. Cantorin joukon alkioiden osamäärää tarkasteltaessa puolestaan saadaan, että $\left\{\frac{x}{y} : x, y \in C \setminus \{0\}\right\} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{3} \cdot 3^m, \frac{3}{2} \cdot 3^m\right]$.

Sisältö

1. Johdanto

Cantorin joukkojen tutkiminen on lähtöisin 1800-luvulta. Tuolloin kaksi eri henkilöä, Smith ja Cantor, tutkivat samankaltaisia joukkoja. Lopulta Cantor oli se, kuka teki kyseiset joukot tunnetuiksi [**4**]. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor syntyi 3.3.1845 Pietarissa Venäjällä, mutta muutti myöhemmin perheensä mukana Saksaan, jossa hän ensin opiskeli. Vuonna 1869 Cantor aloitti opettamisen Hallen yliopistossa, jossa hän lopulta päätyi pysymään koko uransa ajan. Cantorista tuli professori poikkeuksellisen nuorena, vuonna 1879, kun hän oli vasta 34 vuotias. Cantor olisi kuitenkin halunnut edetä edelleen urallaan ja tulla laitoksen johtajaksi Berliinin yliopistossa, mutta Berliinin laitoksen johtaja Kronecker ei tukenut Cantoria ja hänen työtänsä. Elämänsä aikana Cantor oli muutenkin herkkä työnsä arvostelulle ja kärsi toisinaan masennuksesta, mikä vei hänet ajoittain pois matematiikan parista. Cantor kuoli vuonna 1918 [**11**].

Cantor sai uransa aikana paljon aikaan matematiikassa, jossa hänen tuloksensa keskittyvät lukuteoriaan ja joukko-oppiin. Tunnetuimpia Cantorin teorioita ovat muun muassa Cantorin joukko, käsitys eri tyyppisistä äärettömyyksistä sekä kontinuumihypoteesi [**11**]. Cantor ei kuitenkaan ollut ensimmäinen henkilö, joka tutki Cantorin joukon kaltaisia joukkoja. Henry J. S. Smith esitti jo aiemmin tavan muodostaa joukon, joka ei ole missään tiheä [**4**].

Smith havaitsi seuraavan asian: Olkoon m mikä tahansa lukua 2 suurempi kokonaisluku. Jaetaan väli $[0,1]$ m kappaleeseen yhtä pitkiä välejä ja poistetaan viimeinen osaväli. Jokainen jäljelle jäänyt osaväli J_i jaetaan jälleen m kappaleeseen yhtä pitkiä välejä ja mistä tahansa yhdestä välistä J_i poistetaan viimeinen osaväli. Kun tätä jakamista ja poistamista jatketaan mielivaltaisen kauan, jäljelle jää ääretön määrä pisteitä väliltä $[0,1]$. Nämä saadut pisteet ovat ei-missään tiheitä. Jos tähän vielä lisätään, että poistettavat välit ovat avoimia, päästään Cantorin joukon yleistettyyn muotoon. Smithin julkaisu vuonna 1875 jäi kuitenkin huomiotta ja Cantor pääsi muutama vuosi myöhemmin tekemään vastaavia havaintoja uudelleen [**4**].

Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko muodostetaan siten, että suljettu väli $C_0 = [0,1]$ jaetaan ensin kolmeen yhtä suureen osaan. Keskimmäinen, avoin osaväli poistetaan, jolloin jäljelle jäävät kaksi reunimmaista, suljettua osaväliä $I_{1,1}$ ja $I_{1,2}$ muodostavat joukon C_1. Nyt välit $I_{1,1}$ ja $I_{1,2}$ jaetaan kumpikin kolmeen yhtä suureen osaan ja molemmista jaoista poistetaan keskimmäiset avoimet osavälit. Jäljelle jäävät neljä suljettua väliä $I_{2,i}$, missä $i \in \{1,2,3,4\}$, muodostavat joukon C_2. Tätä jakamista ja keskimmäisten osavälien poistamista jatketaan mielivaltaiseen pitkään, jolloin joukkojen C_n leikkaus muodostaa Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon:

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^k} I_{k,i}.$$

Cantorin joukon aritmetiikkaa on tutkittu ainakin 1900-luvulta alkaen. Muun muassa Hugo Steinhaus ja hieman myöhemmin John Randolph todistivat 1900-luvun alkupuoliskolla, että jos $C + C = \{x + y : x, y \in C\}$, niin $C + C = [0,2]$. Tästä saadaan Cantorin joukon symmetrisyyden avulla helposti osoitettua, että $C - C =$

$\{x - y : x, y \in C\} = [-1, 1]$. Utz puolestaan julkaisi vuonna 1951 tuloksen laajentamaan Cantorin joukon summan käsittelyä. Utz tutki, mitä tapahtuu, jos summassa toista Cantorin luvun alkiota kerrotaan reaaliluvulla. Hän päätyi tulokseen, että $C + bC = [0, 1 + b]$ kaikilla $\frac{1}{3} \leq b \leq 3$ [**2**].

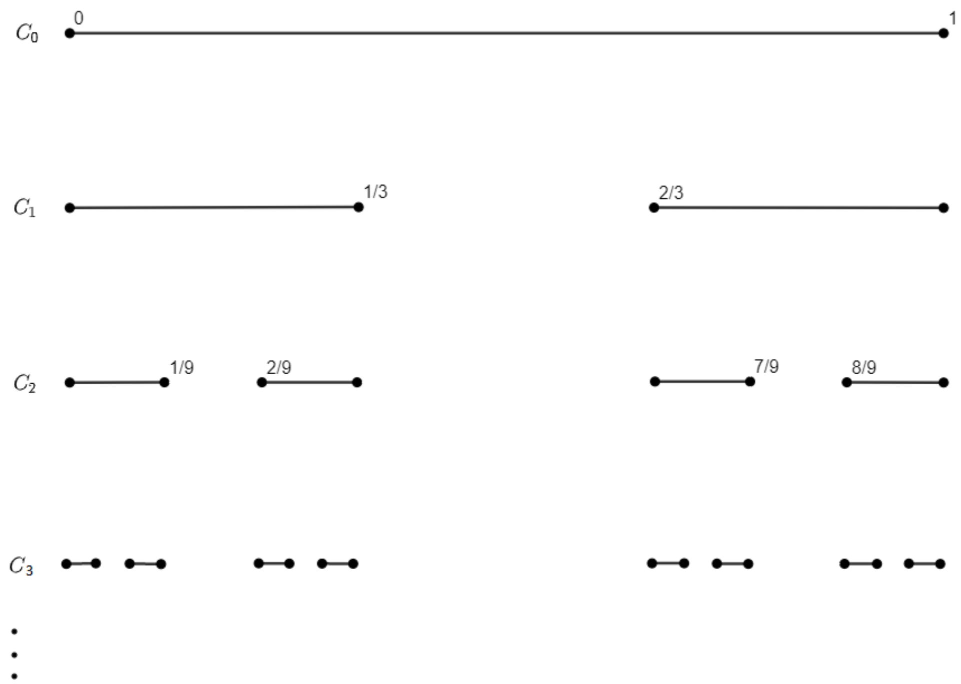
Näiden edellä mainittujen tulosten todistusten lisäksi tässä työssä tullaan käsittelemään Cantorin joukon tuloa ja osamäärää. Työssä käydään läpi, miten jokainen $u \in [0, 1]$ voidaan kirjoittaa muodossa $u = x^2 y$, missä $x, y \in C$. Lisäksi osoitetaan, että osamäärälle pätee

$$\left\{ \frac{x}{y} : x, y \in C \setminus \{0\} \right\} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{3} \cdot 3^m, \frac{3}{2} \cdot 3^m \right].$$

Aritmetiikkaosuuden lopuksi tutkitaan vielä tuloa $g(x, y) = xy$, missä $x, y \in C$. Tässä tapauksessa huomataan, että kuvajoukolle $g(C^2)$ pätee $g(C^2) \subset [0, 1]$ ja lisäksi joukon $g(C^2)$ Lebesguen ulkomitalle μ saadaan arvio $\frac{17}{21} \leq \mu(g(C^2)) \leq \frac{8}{9}$. Viimeisenä asiana tässä työssä vilkaistaan hieman muita olemassa olevia tuloksia aiheeseen liittyen.

2. Cantorin joukko

Aloitetaan tutkimalla sitä, miten Cantorin joukko muodostetaan. Perusidea Cantorin joukon muodostamisessa on, että otetaan suljettu väli nollasta ykköseen, jota sitten lähdetään jakamaan osiin. Tämä väli jaetaan kolmeen, yhtä suureen osaan. Seuraavaksi näistä kolmesta osasta keskimmäinen, avoin väli poistetaan, jolloin jäljelle jää vain reunimmaiset kaksi suljettua väliä. Sitten nämä kaksi jäljelle jäänyttä väliä jaetaan jälleen kumpikin kolmeen yhtä suureen osaan ja molemmista poistetaan taas keskimmäinen avoin väli. Tätä osiin jakamista ja keskimmäisten välien poistamista jatketaan mielivaltaisen kauan, jolloin jäljelle jäävien suljettujen joukkojen leikkausjoukko muodostaaa Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon (Kuva 1). Määritellään seuraavaksi Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko suljettujen välien avulla.



Kuva 1. Cantorin joukko muodostetaan jakamalla välejä kolmeen osaan ja poistamalla keskimmäinen avoin väli.

Määritelmä 2.1. Olkoon $C_0 = [0,1]$ suljettu väli. Olkoot C_1, C_2, $\ldots$ välin C_0 osajoukkoja siten, että

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = I_{1,1} \cup I_{1,2} \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup I_{2,3} \cup I_{2,4} \\
&\dots \\
C_n &= \bigcup_{i=1}^{2^n} I_{n,i} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Tällöin Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko on

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^k} I_{k,i}$$

Esitellään seuraavaksi Cantorin leikkauslause, jonka mukaan Cantorin joukko on epätyhjä. Lauseen todistus löytyy esimerkiksi Tom Apostolin kirjasta Mathematical Analysis, second edition [**1**, s. 56].

Lause 2.2 (Cantorin leikkauslause). *Olkoon* $\{J_1, J_2, \ldots\}$ *joukko epätyhjiä, suljettuja joukkoja,* $J_k \subset \mathbb{R}$*, siten, että* $J_1 \supset J_2 \supset \ldots$*. Oletetaan lisäksi, että* J_1 *on rajoitettu. Tällöin* $\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k \neq \emptyset$.

Cantorin joukon määritelmä voidaan muodostaa monin eri tavoin. Esimerkiksi kun Cantorin joukkoa muodostetaan, kolmeen osaan jaon ei tarvitse olla tasainen, vaan osavälit voivat olla myös eri mittaisia. Toisaalta välejä voidaan joka konstruktion vaiheessa poistaa enemmänkin. Esimerkiksi Khan ja Islam ovat esitelleet muutamia eri tapoja, katso [**6**]. Tässä työssä kuitenkin keskitytään tapaukseen, jossa väli jaetaan kolmeen yhtä suureen osaan. Näin ollen jatkossa Cantorin joukolla ja merkinnällä C tarkoitetaan nimenomaan Määritelmän 2.1 mukaista Cantorin $\frac{1}{3}$-joukkoa, ellei toisin mainita.

3. Cantorin joukon perusominaisuuksia

Tässä kappaleessa käsitellään ensin Cantorin joukon yhteyttä 3-järjestelmään ja sen jälkeen esitellään joitakin Cantorin joukon perusominaisuuksia.

3.1. Cantorin joukon yhteys 3-järjestelmään. Tulevissa tulosten todistuksissa tullaan toisinaan hyödyntämään Cantorin joukon alkioiden esittämistä 3-järjestelmän avulla, joten perehdytään ensin Cantorin joukon ja 3-järjestelmän yhteyteen. Kaikki reaaliluvut voidaan esittää 3-järjestelmässä, jolloin luku esitetään nollien, ykkösten ja kakkosten avulla.

Lemma 3.1. *Olkoon x reaaliluku väliltä $[0, 1]$. Tällöin x voidaan kirjoittaa 3-järjestelmän avulla muodossa*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \qquad \alpha_k \in \{0, 1, 2\}.$$

Todistus. Todistetaan samoin kuin 10-järjestelmän desimaaliesitys.

□

Huomautus 3.2. Lemman 3.1 mukainen esitys luvulle x on yksikäsitteinen Cantorin joukon alkioille, mutta ei yleisesti reaaliluvuille. Esimerkiksi koska kyseessä on geometrinen sarja, saadaan $0.222\ldots_3 = 1_3$.

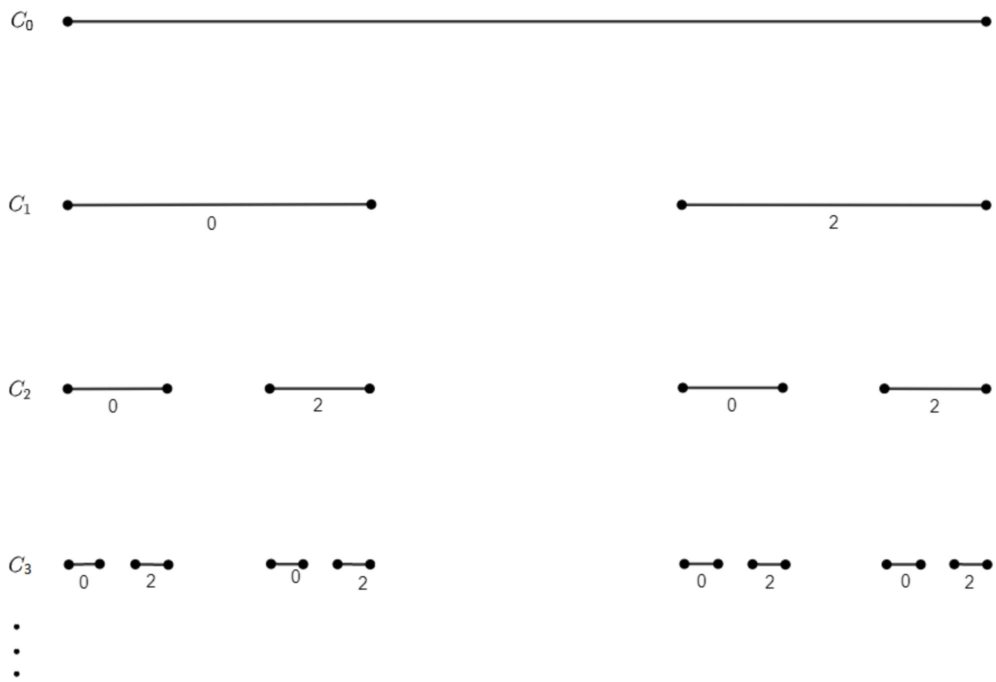
Esimerkki 3.3. Olkoon 0.2022_3 3-järjestelmän luku. Tällöin luvulle $x = 0.2022_3$ pätee

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} = \frac{2}{3^1} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \frac{0}{3^6} + \ldots = \frac{62}{81} \approx 0,765.$$

Kun $k > 4$, niin $\alpha_k = 0$, joten summan loppupään alkiot eivät vaikuta tulokseen.

Lemma 3.4. *Cantorin joukon alkioiden ja Lemman 3.1 mukaisen desimaaliesityksen välillä on bijektio, kun $\alpha_k \neq 1$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$*

Lemman 3.4 todistuksessa hyödynnetään ideaa, että jokaisen Cantorin joukon alkion sijainti voidaan ilmoittaa nollien ja kakkosten avulla: Jos Cantorin joukkoa muodostaessa alkio löytyy vasemmanpuoleisesta joukosta, saadaan sijaintiin nolla. Jos puolestaan alkio on oikeanpuoleisessa joukossa, saadaan kakkonen. Näin ollen kun Cantorin joukkoa muodostetaan mielivaltaisen pitkälle, saadaan jokaiselle sen alkiolle osoite esimerkiksi muotoa 0200222220202... sen mukaan ollaanko kussakin vaiheessa siirrytty oikealle vai vasemmalle. (Kuva 2.)



KUVA 2. Cantorin joukon jokaiselle alkiolle voidaan muodostaa osoite nollien ja kakkosten avulla.

TODISTUS. Lemman 3.1 nojalla jokaiselle Cantorin joukon alkiolle on olemassa kyseinen desimaaliesitys. Täytyy osoittaa, että tämä desimaaliesitys on eri jokaiselle Cantorin joukon alkiolle. Olkoon $x, y \in C$. Tällöin luvut x ja y voidaan kirjoittaa muodossa

$$x = c_1 c_2 c_3 \dots, \text{ ja } y = d_1 d_2 d_3 \dots,$$

missä $c_i, d_i \in \{0, 2\}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Jos yhdellekin paikalle i pätee $c_i \neq d_i$, niin $x \neq y$, sillä kyseisessä kohdassa on valittu Cantorin joukon konstruktion vaiheessa i eri osavälit, mihin haaraan lähteä (Kuva 2). Näin ollen jokaista desimaaliesitystä, joka sisältää vain nollia ja kakkosia, vastaa täsmälleen yksi Cantorin joukon alkio ja toisaalta yksi Cantorin joukon alkio ei voi kuvautua kahdeksi eri desimaaliesitykseksi. $\square$

Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko voidaan nyt määritellä yhtäpitävästi Määritelmän 2.1 kanssa 3-järjestelmän avulla. Koska Cantorin joukossa aina keskimmäinen kolmannes poistetaan, tällöin Cantorin joukon alkiot 3-järjestelmässä sisältävät vain nollia ja kakkosia.

Määritelmä 3.5. Olkoon $x \in [0,1]$. Tällöin Cantorin joukko on

$$C = \left\{ x : \; x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \; \alpha_k \in \{0,2\} \right\}.$$

Nyt kun Cantorin joukolle on saatu määriteltyä yhtäpitävästi 3-järjestelmän avulla, voidaan tarkastella paria tulosta, jotka voidaan todistaa Määritelmän 3.5 avulla. Ensimmäisenä huomataan, että jos Cantorin joukon mitä tahansa alkiota kerrotaan luvun $\frac{1}{3}$ potensseilla, niin myös tulos kuuluu Cantorin joukkoon.

Lause 3.6. *Jos $x \in C$, niin $\frac{1}{3^n}x \in C$, kun $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Määritelmän 3.5 nojalla $x \in C$, jos

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \quad \alpha_k \in \{0,2\}.$$

Nyt jos $x \in C$, niin

$$\frac{1}{3^n}x = \frac{1}{3^n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^{k+n}}.$$

Summassa osoittajassa on edelleen vain nollia ja kakkosia ja nimittäjässä puolestaan kolmosen potensseja, joten $\frac{1}{3^n}x \in C$.

□

Seuraava tulos liittyy Cantorin joukon symmetrisyyteen.

Lause 3.7. *Jos $x \in C$, niin $1 - x \in C$.*

Todistus. Määritelmän 3.5 nojalla $x \in C$, jos

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \quad \alpha_k \in \{0,2\}.$$

Nyt jos $x \in C$, niin

$$1 - x = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2-\alpha_k}{3^k}.$$

Koska $\alpha_k \in \{0,2\}$, niin tällöin $2 - \alpha \in \{0,2\}$, joten $1 - x \in C$.

□

Huomautus 3.8. Lauseen 3.7 nojalla jokaiselle $x \in C$ on olemassa $y \in C$ siten, että $x = 1 - y$. Haluttu y saadaan selville yhtälöstä $x = 1 - y \iff y = 1 - x$.

3.2. Perusominaisuudet. Käydään seuraavaksi läpi tärkeimpiä Cantorin joukon perusominaisuuksia.

Lause 3.9. *Cantorin joukko on ylinumeroituva.*

Lauseen 3.9 todistuksessa hyödynnetään jälleen ideaa, että jokaisen Cantorin joukon alkion sijainti voidaan ilmoittaa nollien ja kakkosten avulla (Kuva 2.) Näitä erilaisia osoitteita voidaan löytää mielivaltaisen paljon ja toisaalta Lemman 3.4 nojalla jokaista osoitetta vastaa täsmälleen yksi Cantorin joukon alkio. Tällöin saadaan osoitettua, että Cantorin joukko ei voi olla numeroituva.

Todistus. Olkoon C kuten Määritelmässä 3.5:

$$C = \left\{ x : \ x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \ \alpha_k \in \{0, 2\} \right\}.$$

Antiteesi: Cantorin joukko on numeroituva. Tällöin on olemassa bijektio $f : \mathbb{N} \to C$ siten, että jokaisella joukon $\mathbb{N}$ alkiolla on vastinpari Cantorin joukossa.

Olkoon $f(n) = x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $C = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$, missä

$$\begin{aligned}
x_1 &= c_{1_1} c_{1_2} c_{1_3} \ldots \\
x_2 &= c_{2_1} c_{2_2} c_{2_3} \ldots \\
&\vdots \\
x_n &= c_{n_1} c_{n_2} c_{n_3} \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

missä $c_{n_m} \in \{0, 2\}$ kaikilla n ja m. Olkoon $c = c_1 c_2 c_3 \ldots$ siten, että

$$c_1 = \begin{cases} 2, & \text{jos } c_{1_1} = 0 \\ 0, & \text{jos } c_{1_1} = 2 \end{cases}, c_2 = \begin{cases} 2, & \text{jos } c_{2_2} = 0 \\ 0, & \text{jos } c_{2_2} = 2 \end{cases}, \ldots, c_n = \begin{cases} 2, & \text{jos } c_{n_n} = 0 \\ 0, & \text{jos } c_{n_n} = 2 \end{cases}, \ldots$$

Tällöin $c \in C$. Kuitenkin kun c määritellään tällä tavoin, alkioiden c ja x_n osoitteet eroavat paikassa n, sillä $c_n \neq c_{n_n}$ kaikilla x_n. Näin ollen Lemman 3.4 nojalla $c \neq x_n$, mutta toisaalta myös alkio c kuuluu Cantorin joukkoon, mikä aiheuttaa ristiriidan. Näin ollen Cantorin joukko on ylinumeroituva.

□

Esitellään seuraavaksi Lebesguen ulkomitan määritelmä, jota hyödynnetään seuraavan tuloksen todistuksessa ja myöhemmin tutkielmassa. Kun joukko esimerkiksi Cantorin joukon tapauksessa ei ole yhteinäinen, vaan siitä on poistettu paloja, ei varsinaista joukon kokoa voida laskea. Lebesguen ulkomitalla voidaan kuitenkin arvioida joukon kokoa kyseisen joukon peittävien avoimien joukkojen koon avulla. Koska tässä tekstissä keskitytään reaalilukuväleihin, muotoillaan Lebesguen ulkomitan määritelmä kattamaan vain avaruuden $\mathbb{R}$ tapaus. Määritelmä 3.10 yleistyy avaruuteen $\mathbb{R}^n$, katso [**10**, s. 17-20].

MÄÄRITELMÄ 3.10 (Lebesguen ulkomitta). Määritellään välin $I =]a, b[$ pituus funktiolla $l(I) = b - a$. Joukon $E \subset \mathbb{R}$ Lebesguen ulkomitta on luku

$$\mu(E) = m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ I_k \text{ avoin väli} \right\}.$$

Esitellään seuraavaksi joitakin Lebesguen ulkomitan ominaisuuksia, joita tullaan hyödyntämään myöhemmin tulosten todistamisessa.

LAUSE 3.11. *Olkoon μ Lebesguen ulkomitta kuten Määritelmässä 3.10. Tällöin*

(1) *Jos $I = [a, b]$ tai $I =]a, b[$, niin $\mu(I) = b - a$.*
(2) *Olkoon $E_1, E_2, \ldots$ joukkoja, joille $E_j \subset \mathbb{R}$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$. Tällöin $\mu(\bigcup E_i) \leq \sum \mu(E_i)$ (subadditiivisuus).*
(3) *Olkoon $E_1, E_2, \ldots$ erillisiä, mitallisia joukkoja, joille $E_j \subset \mathbb{R}$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$. Tällöin $\mu(\bigcup E_i) = \sum \mu(E_i)$ (additiivisuus).*

TODISTUS. Jätetään Lauseen 3.11 todistus muualta luettavaksi:
Kohta 1: Royden & Fitzpatrick [**8**, s. 31], Tao [**10**, s. 25].
Kohta 2: Royden & Fitzpatrick [**8**, s. 33].
Kohta 3: Royden & Fitzpatrick [**8**, s. 36], Tao [**10**, s. 35].

□

HUOMAUTUS 3.12. Lauseen 3.11 kohta 3 sisältää ehdon, että joukkojen on oltava mitallisia. Tähän liittyen voidaan todeta, että jokainen väli on mitallinen [**8**, s. 38]. Samoin esimerkiksi kaikki suljetut ja avoimet joukot ovat mitallisia [**10**, s. 32].

HUOMAUTUS 3.13. Lauseen 3.11 kohdat 2 ja 3 pätevät myös äärelliselle määrälle joukkoja $E_1, E_2, \ldots, E_i$.

LAUSE 3.14. *Cantorin joukko ei sisällä välejä.*

Lause 3.14 saadaan todistettua siten, että näytetään ensin, että Cantorin joukon komplementin Lebesguen ulkomitta on yksi. Tällöin kun kyseessä on väli $[0, 1]$, niin itse Cantorin joukon Lebesguen ulkomitta on oltava nolla. Tällöin Cantorin joukko ei voi sisältää välejä, sillä jos se sisältäisi yhdenkin välin, Lebesguen ulkomitta olisi oltava vähintään kyseisen välin pituus.

TODISTUS. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Cantorin joukon muodostuksessa vaiheessa k poistetaan 2^{k-1} väliä edellisestä välien joukosta. Jokaisen poistetun välin pituus on $\frac{1}{3^k}$, joten Lauseen 3.11 kohdan 1 nojalla jokaisen poistetun välin Lebesguen ulkomitta on myös $\frac{1}{3^k}$. Cantorin joukossa välejä poistetaan mielivaltaisen paljon ja kaikki poistetut välit ovat erillisiä. Näin ollen Cantorin joukon komplementin Lebesguen ulkomitta saadaan Lauseen 3.11 kohdan 3 nojalla summaamalla kaikkien poistettujen välien Lebesguen ulkomitat eli poistettujen välien pituudet:

$$\mu(C^c) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\left(\frac{1}{3^k}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}.$$

Tämä on suppeneva geometrinen sarja, jolloin summa saadaan laskettua:

$$\mu(C^c) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1.$$

Kun rajoitutaan tarkastelemaan väliä $[0, 1]$, niin $C \cup C^c = [0, 1]$ ja toisaalta joukot C ja C^c ovat erillisiä. Lisäksi C on suljettu ja C^c on avoin, joten kyseiset joukot ovat mitallisia. Tällöin Lauseen 3.11 kohdan 3 nojalla saadaan

$$\mu([0, 1]) = \mu(C) + \mu(C^c) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(C) = \mu([0, 1]) - \mu(C^c).$$

Lauseen 3.11 kohdan 1 nojalla $\mu([0, 1]) = 1$, joten $\mu(C) = 1 - 1 = 0$. Näin ollen Cantorin joukko ei sisällä välejä.

□

LAUSE 3.15. *Cantorin joukko on suljettu ja kompakti.*

TODISTUS. Cantorin joukon muodostuksessa suljetusta joukosta poistetaan aina avoimia joukkoja, jolloin jäljelle jää suljettuja joukkoja C_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Koska Määritelmän 2.1 nojalla Cantorin joukko on näiden suljettujen joukkojen leikkaus $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$, niin Cantorin joukko on suljettu. Lisäksi koska kaikki Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon alkiot ovat välillä $[0, 1]$, niin Cantorin joukko on myös rajoitettu. Tällöin Cantorin joukko on kompakti.

□

4. Cantorin joukon aritmetiikkaa

Tässä osiossa käydään läpi Cantorin joukon aritmetiikkaa pääosin Athreyan, Reznickin ja Tysonin julkaisun [**2**] pohjalta. Cantorin joukon määritelmästä nähdään helposti, että Cantorin joukko ei sisällä kaikkia välin $[0, 1]$ alkioita ja toisaalta Lauseen 3.14 nojalla Cantorin joukko ei sisällä yhtäkään väliä. Kuitenkin jo peruslaskutoimituksilla, joissa Cantorin joukon alkioita esimerkiksi summataan tai kerrotaan keskenään, saadaan muodostettua suljettuja välejä. Cantorin joukon avulla voidaan esittää helposti muun muassa välit $[-1, 1]$ ja $[0, 2]$ erotuksen ja summan avulla. Kun vielä otetaan mukaan tulo ja osamäärä, saadaan muita mielenkiintoisia tuloksia.

4.1. Summa ja erotus Cantorin joukon alkioilla. Seuraavaksi osoitetaan, että Cantorin joukon alkioita summaamalla ja vähentämällä voidaan muodostaa kokonaisia välejä. Esimerkiksi välin $[0, 2]$ alkiot saadaan summaamalla Cantorin joukko itseensä. Aloitetaan määrittelemällä summa ja erotus Cantorin joukolla.

Määritelmä 4.1. Olkoon C Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko. Määritellään summa $C + C$ ja erotus $C - C$ siten, että

$$C + C = \{x + y : x, y \in C\} \quad \text{ja} \quad C - C = \{x - y : x, y \in C\}.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että Cantorin joukon summa itsensä kanssa sisältää kaikki välin $[0, 2]$ alkiot.

Lause 4.2. *Olkoon C Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko. Tällöin*

$$C + C = [0, 2].$$

Todistus. Olkoon C kuten Määritelmässä 3.5, eli

$$C = \left\{ x : \ x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \ \alpha_k \in \{0, 2\} \right\}.$$

Olkoon $u \in [0, 2]$. Tällöin Lemman 3.1 nojalla $\frac{u}{2}$ voidaan esittää 3-järjestelmän avulla muodossa

$$\frac{u}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k}, \qquad \epsilon_k \in \{0, 1, 2\}.$$

Määritellään pari (α_k, β_k) siten, että

$$(\alpha_k, \beta_k) = \begin{cases} (0,0), & \text{jos } \epsilon_k = 0 \\ (2,0), & \text{jos } \epsilon_k = 1 \\ (2,2), & \text{jos } \epsilon_k = 2 \end{cases}.$$

Olkoon lisäksi alkiot $x, y \in C$ siten, että

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{3^k}.$$

Nyt pätee $\alpha_k + \beta_k = 2 \cdot \epsilon_k$ ja edelleen saadaan

$$x + y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k + \beta_k}{3^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k} = 2 \cdot \frac{u}{2} = u.$$

Näin ollen $u \in C + C$, joten $[0, 2] \subset C + C$.

Toisaalta koska Cantorin joukko sisältää alkioita vain väliltä $[0, 1]$, niin

$$0 = 0 + 0 \leq x + y \leq 1 + 1 = 2$$

kaikilla $x, y \in C$. Näin ollen Cantorin joukko ei sisällä muita kuin välin $[0, 2]$ alkioita, joten $C + C \subset [0, 2]$.

$\square$

Tarkastellaan seuraavaksi Cantorin joukon alkioiden erotusta. Samoin kuin summassa, myös erotus muodostaa suljetun välin.

Lause 4.3. *Olkoon C Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko. Tällöin*

$$C - C = [-1, 1].$$

Todistus. Olkoon $x, y \in C$. Tällöin Lauseen 3.7 nojalla on olemassa $z \in C$ siten, että $y = 1 - z$. Tästä seuraa tiedon $C + C = [0, 2]$ avulla yhtälö

$$C - C = \{x - y\} = \{x - (1 - z)\} = \{x + z - 1\} = C + C - 1 = [-1, 1].$$

$\square$

4.2. Aputuloksia. Cantorin joukon aritmetiikkaa voidaan käsitellä laajemminkin kuin vain summalla ja erotuksella. Tuloa ja osamäärää varten käydään ensin läpi tarvittavia apuvälineitä myöhempien tulosten ymmärtämiseksi. Aloitetaan käymällä läpi tulos, jota tarvitaan jatkon kannalta erittäin hyödyllisen Lemman 4.12 todistamiseen.

Lemma 4.4. *Olkoon $\{K_1, K_2, K_3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ perhe epätyhjiä kompakteja joukkoja siten, että $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ ja lisäksi $K = \cap K_i$.*

(1) *Jos $(x_j) \to x$, kun $j \to \infty$, $x_j \in K_j$, niin $x \in K$.*
(2) *Jos $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus, niin $F(K^m) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(K_i^m)$, missä K_i^m on karteesinen tulo $K_i^m = K_i \times K_i \times \cdots \times K_i$.*

Todistus. Kohta 1. Antiteesi: On olemassa (x_j), jolle $(x_j) \to x$, kun $j \to \infty$, $x_j \in K_j$ siten, että $x \notin K$.

Koska joukot K_i ovat sisäkkäiset, niin on olemassa K_r jollakin $r \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, jolle pätee $x \notin K_r$, eli $x \in K_r^c$. Koska joukko K_r on kompakti, on se myös suljettu. Tällöin joukon K_r komplementti K_r^c on avoin. Näin ollen on olemassa avoin väli $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ siten, että $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset K_r^c$. Edelleen joukkojen sisäkkäisyydestä seuraa $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset K_r^c \subset K_{r+1}^c \subset \cdots$.

Nyt muistetaan, että $x_j \in K_j$ ja $x \in K_r^c$. Jos $j \geq r$, niin tällöin $K_j \subset K_r$ eli pätee myös $x \in K_j^c$. Tällöin $|x_j - x| \geq \epsilon$, kun $j \geq r$. Näin ollen jono (x_j) ei lähesty alkiota x, kun $j \to \infty$, mikä on ristiriita alkuehtoon ja näin ollen lauseen ensimmäinen kohta pätee.

Kohta 2. Koska $K = \cap K_i$, tällöin $K \subset K_i$ kaikilla $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Tästä seuraa, että $K^m \subset K_i^m$ ja edelleen $F(K^m) \subset F(K_i^m)$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots$ Koska nyt joukko $F(K^m)$ on joukon $F(K_i^m)$ osajoukko kaikilla $i = 1, 2, \ldots$, niin tällöin on pädettävä $F(K^m) \subset \cap F(K_i^m)$.

Olkoon $u \in \cap F(K_i^m)$. Valitaan $x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,m}) \in K_i^m$ jokaiselle i siten, että $F(x_i) = u$. Koska K_1^m on kompakti, on se myös rajoitettu. Tällöin Bolzano-Weierstrass lauseen mukaan jonolla (x_i) on suppeneva osajono $(x_{r_j}) = (x_{r_j,1}, \ldots, x_{r_j,m})$, joka suppenee kohti alkiota $y = (y_1, \ldots, y_m)$, kun $r_j \to \infty$. Tästä seuraa, että jokainen jono $(x_{r_j,k})$ suppenee kohti alkiota y_k kaikilla $k = 1, 2 \ldots, m$. Tällöin pätee $x_{r_j,k} \in K_{r_j}$ ja Lauseen 4.4 ensimmäisen kohdan nojalla $y_k \in K$ jokaisella $k = 1, 2, \ldots, m$. Näin ollen $y \in K^m$. Nyt koska F jatkuvana kuvauksena kuvaa suppenevat jonot suppeneviksi jonoiksi, niin on pädettävä $F(y) = u$. Näin ollen $u \in F(K^m)$ ja saadaan $\cap F(K_i^m) \subset F(K^m)$.

□

Seuraavaksi esitellään apumerkintöjä. Ensimmäisenä annetaan merkintä $\ddot{I}$ kuvaamaan keskimmäisen kolmanneksen poistamista välistä.

Määritelmä 4.5. Olkoon a ja t lukuja siten, että $a, t \in \mathbb{R}$ ja $t > 0$. Merkitään $I = [a, a+3t]$ ja $\ddot{I} = [a, a+t] \cup [a+2t, a+3t]$. Tällöin Cantorin joukon konstruktiossa vaihe $n+1$ voidaan esittää muodossa

$$C_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{2^{n+1}} I_{n+1,i} = \bigcup_{i=1}^{2^n} \ddot{I}_{n,i}.$$

Toisinaan on hyödyllistä tarkastella erityisesti Cantorin joukon loppupuoliskoa. Annetaan seuraavaksi merkintä $\widetilde{C}$ kuvaamaan Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon alkioita välillä $[\frac{1}{2}, 1]$.

MÄÄRITELMÄ 4.6. Jatkossa käytetään merkintää

$$\widetilde{C} = C \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right] = C \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] \quad \text{ja} \quad \widetilde{C}_n = C_n \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right] = \bigcup_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} I_{n,i}.$$

Tällöin

$$\widetilde{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{C}_n.$$

LAUSE 4.7. *Olkoon $\widetilde{C}$ kuten Määritelmässä 4.6. Tällöin*

$$\widetilde{C} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C,$$

missä $\frac{1}{3}C = \left\{\frac{1}{3}x : x \in C\right\}$.

TODISTUS. Määritelmistä 3.5 ja 4.6 seuraa, että

$$\begin{aligned}
\widetilde{C} &= C \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
&= \left\{x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \alpha_k \in \{0, 2\}, \alpha_1 = 2\right\} \\
&= \left\{x : x = \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \alpha_k \in \{0, 2\}\right\} \\
&= \left\{x : x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \alpha_k \in \{0, 2\}\right\} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left\{x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \alpha_k \in \{0, 2\}\right\} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C.
\end{aligned}$$

□

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin joukon $\widetilde{C}$ alkioiden yhteyttä Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon alkioihin.

Lause 4.8. *Olkoon $x \in C \setminus \{0\}$. Tällöin x voidaan esittää muodossa $x = \frac{1}{3^s}\tilde{x}$, missä $\tilde{x} \in \widetilde{C}$ ja $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Todistus. Olkoon $x \in C \setminus \{0\}$. Jos $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, valitaan $s = 0$, jolloin $x = \tilde{x}$, eli $x \in \widetilde{C}$.

Jos $x \in [0, \frac{1}{3}]$, niin x voidaan kirjoittaa muodossa

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \quad \alpha_k \in \{0, 2\}.$$

Kuitenkin, koska $x \in [0, \frac{1}{3}]$, niin tässä esitysmuodossa ainakin α_1 on nolla. Valitaan nyt s siten, että jos n on ensimmäinen indeksi, jolla $\alpha_k \neq 0$, eli $\alpha_k = 2$, kun $k = n$, niin tällöin $s = n - 1$. Nyt x voidaan kirjoittaa muodossa

$$x = \frac{1}{3^s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k},$$

missä $\alpha_k \in \{0, 2\}$ ja lisäksi kun $k = 1$, niin $\alpha_k = 2$. Näin ollen summa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}$ on Cantorin joukon alkio väliltä $[\frac{2}{3}, 1]$, eli $x = \frac{1}{3^s}\tilde{x}$.

□

Huomautus 4.9. Lauseen 4.8 mukainen esitys $x = \frac{1}{3^s}\tilde{x}$ on yksikäsitteinen, koska Lemman 3.4 nojalla Cantorin joukon alkiolla x on yksikäsitteinen 3-järjestelmän avulla muodostettu desimaaliesitys. Tällöin luku s määräytyy desimaaliesityksen alussa olevien nollien mukaan. Toisaalta myös kaikkien $\tilde{x} \in \widetilde{C}$ desimaaliesitys on yksikäsitteinen, joten vain yhden luvun $\tilde{x}$ desimaaliesitys voi sopia luvun x desimaaliesityksen loppuosaksi.

Huomautus 4.10. Vastaavasti voidaan perustella, että jos $x \in [0, 1]$, niin x voidaan kirjoitaa muodossa $x = \frac{1}{3^s}v$, missä $v \in]\frac{1}{3}, 1]$ ja $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Seuraus 4.11. *Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko voidaan esittää muodossa*

$$C = \{0\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}\widetilde{C}. \tag{1}$$

Todistus. Lauseen 4.8 nojalla jokainen $x \in C \setminus \{0\}$ voidaan kirjoittaa muodossa $x = \frac{1}{3^s}\tilde{x}$, missä $\tilde{x} \in \widetilde{C}$ ja $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Toisaalta koska $\tilde{x} \in C$, niin Lauseen 3.6 nojalla

$\frac{1}{3^n}\tilde{x} \in C$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen

$$C \setminus \{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}\widetilde{C}$$

ja koko yhtälö (1) saadaan vain lisäämällä vielä nolla mukaan yhdisteeseen.

$\square$

Nyt päästään hyödylliseen aputulokseen, jota tullaan hyödyntämään useammassa tulevassa tuloksessa.

LEMMA 4.12. *Olkoon $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus. Olkoon $[a,b]$ joko väli $[0,1]$ tai $[\frac{2}{3},1]$. Oletetaan lisäksi, että jokaiselle yhtä pitkälle erilliselle tai identtiselle osavälille $I_k \subset [a,b]$ pätee*

$$F(I_1,\ldots,I_m) = F(\ddot{I}_1,\ldots,\ddot{I}_m).$$

Tällöin $F(C^m_{[a,b]}) = F([a,b]^m)$, missä $C_{[a,b]} = a+(b-a)C$, kun C on Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko.

HUOMAUTUS 4.13. Merkintä $C_{[a,b]}$ tarkoittaa käytännössä niitä Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon alkioita, jotka ovat välillä $[a,b]$. Jos $[a,b] = [0,1]$, niin selvästi $C_{[0,1]} = 0+(1-0)C = C$. Jos taas $[a,b] = [\frac{2}{3},1]$, saadaan $C_{[\frac{2}{3},1]} = \frac{2}{3} + (1-\frac{2}{3})C = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C = \widetilde{C}$, kun muistetaan $\widetilde{C}$:n Määritelmä 4.6.

Tässä työssä keskitytään Cantorin $\frac{1}{3}$-joukkoon välillä $[0,1]$, joten todistetaan tulos välille $[a,b] = [0,1]$, eli tapaus $F(C^m) = F([0,1]^m)$. Tämän lisäksi jatkossa tarvitaan tapausta $[a,b] = [\frac{2}{3},1]$, eli tapaus $F(\widetilde{C}^m) = F([\frac{2}{3},1]^m)$. Lause 4.12 voi päteä myös muille väleille, mutta keskitytään nyt vain näihin kahteen tapaukseen.

TODISTUS. Olkoon $[a,b] = [0,1]$. Olkoon lisäksi

$$C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j},$$

missä jokaisen välin $I_{k,j}$ pituus on $\frac{1}{3^k}$ ja toisaalta Cantorin joukon Määritelmän 2.1 nojalla välit $I_{k,j}$ ovat erillisiä. Tällöin

$$F(C_k^m) = F(\bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j},\ldots,\bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}) = \bigcup_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_m\le 2^k} F(I_{k,j_1},\ldots,I_{k,j_m}),$$

missä jokainen pari (I_{k,j_l}, I_{k,j'_l}) on joko identtinen tai erillinen kaikilla $j_l, j'_l \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}$. Pari on identtinen, jos $j_l = j'_l$ ja erillinen, jos $j_l \neq j'_l$. Toisaalta koska

$$F(I_1, \ldots, I_m) = F(\ddot{I}_1, \ldots, \ddot{I}_m) \quad \text{ja} \quad C_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{2^k} \ddot{I}_{k,j},$$

niin saadaan $F(C_k^m) = F(C_{k+1}^m)$. Eli jokainen Cantorin joukon konstruktion vaihe kuvautuu samoin. Erityisesti $F(C_k^m) = F(C_0^m) = F([0,1]^m)$. Koska $C_{[0,1]} = C = \cap C_i$, niin Lemman 4.4 kohdan 2 nojalla saadaan $F(C^m) = \cap F(C_i^m)$. Edelleen koska jokainen konstruktiovaihe kuvautuu samoin, niin leikkaus eri konstruktiovaiheiden kuvauksista on sama kuin minkä tahansa konstruktiovaiheen kuvaus. Tällöin

$$F(C_{[0,1]}^m) = F(C^m) = \cap F(C_i^m) = F(C_k^m) = F([0,1]^m).$$

Tarkastellaan vielä tapausta $[a, b] = [\frac{2}{3}, 1]$. Koska

$$\widetilde{C}_k = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \cap C_k = \bigcup_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} I_{k,j},$$

niin todistus on tälle tapaukselle vastaava kuin tapaukselle $[a, b] = [0, 1]$. Välejä $I_{k,j}$ on nyt vain vähemmän, mutta välien määrä ei vaikuta todistuksen kulkuun.

□

4.3. Cantorin joukon summa ja reaaliluvulla kertominen. Tarkastellaan tässä kappaleessa Cantorin joukon alkioiden summaa, jos summan toista alkiota kerrotaan reaaliluvulla. Tarkastellaan funktiota $f_\lambda(x, y) = x + \lambda y$, jossa $x, y \in C$ ja $\lambda \in [\frac{1}{3}, 3]$.

Lause 4.14 (Utz). *Olkoon $\lambda \in [\frac{1}{3}, 3]$. Tällöin jokainen $u \in [0, 1 + \lambda]$ voidaan kirjoittaa muodossa $u = x + \lambda y$, $x, y \in C$.*

Todistus. Olkoon $f_\lambda(x, y) = x + \lambda y$. Tarkastellaan joukkoa $f_\lambda(C^2)$, joka voidaan kirjoittaa muodossa $f_\lambda(C^2) = C + \lambda C = \lambda(C + \frac{1}{\lambda}C)$, missä $\frac{1}{\lambda} \in [\frac{1}{3}, 1]$, kun $\lambda \in [1, 3]$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $f_\lambda(C^2) = [0, 1 + \lambda]$, kun $\frac{1}{3} \leq \lambda \leq 1$. Kun tämä pätee, niin tilanteelle $1 < \lambda \leq 3$ pätee $\lambda(C + \frac{1}{\lambda}C) = \lambda[0, 1 + \frac{1}{\lambda}] = [0, 1 + \lambda]$. Näin ollen Lauseen 4.14 todistamiseksi riittää tarkastella tilannetta $\lambda \in [\frac{1}{3}, 1]$.

Olkoon I_1 ja I_2 suljettuja, yhtä pitkiä välejä väliltä $[0, 1]$. Näytetään, että tällöin $f_\lambda(I_1, I_2) = f_\lambda(\ddot{I}_1, \ddot{I}_2)$. Merkitään $I_1 = [r, r + 3t]$ ja $I_2 = [s, s + 3t]$, missä $r, s \in [0, 1[$ ja $t \in]0, \frac{1}{3}]$. Nyt saadaan

$$f_\lambda(I_1, I_2) = [r, r + 3t] + \lambda[s, s + 3t] = [r + \lambda s, r + \lambda s + 3t(1 + \lambda)].$$

Kun vielä merkitään $w = r + \lambda s$, saadaan yhtälö muotoon

$$f_\lambda(I_1, I_2) = [w, w + 3t(1+\lambda)].$$

Kun väleistä I_1 ja I_2 poistetaan keskimmäiset kolmannekset, saadaan $\ddot{I}_1 = [r, r+t] \cup [r+2t, r+3t]$ ja $\ddot{I}_2 = [s, s+t] \cup [s+2t, s+3t]$. Edelleen saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
f_\lambda(\ddot{I}_1, \ddot{I}_2) =& ([r, r+t] \cup [r+2t, r+3t]) + \lambda([s, s+t] \cup [s+2t, s+3t]) \\
=& ([r, r+t] \cup [r+2t, r+3t]) + ([\lambda s, \lambda(s+t)] \cup [\lambda(s+2t), \lambda(s+3t)]) \\
=& ([r+\lambda s, r+\lambda s + t(1+\lambda)] \cup [r+\lambda s + 2t, r+\lambda s + t(3+\lambda)]) \cup \\
& ([r+\lambda s + 2\lambda t, r+\lambda s + t(1+3\lambda)] \cup [r+\lambda s + 2t(1+\lambda), r+\lambda s + 3t(1+\lambda)]) \\
=& ([w, w+t(1+\lambda)] \cup [w+2t, w+t(3+\lambda)]) \cup \\
& ([w+2\lambda t, w+t(1+3\lambda)] \cup [w+2t(1+\lambda), w+3t(1+\lambda)]) \\
=& ([w, w+t(1+\lambda)] \cup [w+2\lambda t, w+t(1+3\lambda)]) \cup \\
& ([w+2t, w+t(3+\lambda)] \cup [w+2t(1+\lambda), w+3t(1+\lambda)]) \\
=& ([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]) \cup ([a_3, b_3] \cup [a_4, b_4]).
\end{aligned}$$

Koska $\frac{1}{3} \leq \lambda \leq 1$, niin $2\lambda \leq 1 + \lambda \leq 1 + 3\lambda$. Tällöin pätee $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, $a_2 \leq b_1$, $a_3 \leq a_4$, $b_3 \leq b_4$. Lisäksi

$$b_3 - a_4 = w + t(3+\lambda) - (w + 2t(1+\lambda)) = t(1-\lambda) \geq 0 \cdot 0 = 0,$$

joten $a_4 \leq b_3$. Nyt $f_\lambda(\ddot{I}_1, \ddot{I}_2)$ voidaan supistaa muotoon

$$f_\lambda(\ddot{I}_1, \ddot{I}_2) = [a_1, b_2] \cup [a_3, b_4] = [w, w+t(1+3\lambda)] \cup [w+2t, w+3t(1+\lambda)].$$

Edelleen saadaan $2 \leq 1 + 3\lambda \leq 3 + 3\lambda$, joten $a_1 \leq a_3$, $b_2 \leq b_4$ ja $a_3 \leq b_2$. Nyt

$$f_\lambda(\ddot{I}_1, \ddot{I}_2) = [a_1, b_4] = [w, w + 3t(1+\lambda)].$$

Näin ollen $f_\lambda(\ddot{I}_1, \ddot{I}_2) = f_\lambda(I_1, I_2)$. Erityisesti tämä pätee identtisille ja erillisille väleille I_1 ja I_2 väliltä $[0, 1]$ ja lisäksi funktio f_λ on jatkuva, joten Lemman 4.12 nojalla $f_\lambda([0,1]^2) = f_\lambda(C^2)$. Näin ollen saadaan

$$f_\lambda(C^2) = f_\lambda([0,1]^2) = [0,1] + \lambda[0,1] = [0, 1+\lambda],$$

kun $\frac{1}{3} \leq \lambda \leq 1$.

$\square$

Seuraavaksi todistetaan Lausetta 4.14 vastaava tilanne vähennyslaskulle, kun kertoimena on negatiivinen luku.

Lause 4.15. *Olkoon* $f_\lambda(x,y) = x + \lambda y$, $x, y \in C$. *Olkoon lisäksi* $\beta = -\lambda < 0$. *Tällöin*

$$f_\beta(C^2) = -\lambda + f_\lambda(C^2).$$

Todistus. Olkoon $\beta < 0$ ja $x, y \in C$. Lauseen 3.7 nojalla on olemassa $z \in C$ siten, että $y = 1 - z$. Tällöin

$$f_\beta(x,y) = x + \beta y = x + \beta(1-z) = x - \lambda(1-z) = -\lambda + x + \lambda z = -\lambda + f_\lambda(x,z).$$

Koska $x, y, z \in C$, niin $f_\beta(C^2) = -\lambda + f_\lambda(C^2)$.

$\square$

4.4. Kertolasku Cantorin joukon alkioilla. Käsitellään seuraavaksi tuloa, kun Cantorin joukon alkioita kerrotaan keskenään. Tarkastellaan funktiota $f(x,y) = x^2 y$, jossa $x, y \in C$. Käsitellään tätä asiaa joukon $\widetilde{C} = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$ kautta.

Lemma 4.16. *Olkoon* $f(x,y) = x^2 y$, $x, y \in C$. *Jos* $f(\widetilde{C}^2) = [\frac{8}{27}, 1]$, *niin* $f(C^2) = [0,1]$.

Todistus. Olkoon $u \in [0,1]$.

Jos $u = 0$, se saadaan arvolla $0 \in C$, sillä $u = f(0,0) = 0^2 \cdot 0$.

Jos $u > 0$, se voidaan kirjoittaa Huomautuksen 4.10 nojalla muodossa $u = \frac{1}{3^r}v$, missä $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $v \in]\frac{1}{3}, 1]$. Koska $\frac{8}{27} < \frac{1}{3}$, niin $v \in [\frac{8}{27}, 1]$, joten oletuksen $f(\widetilde{C}^2) = [\frac{8}{27}, 1]$ mukaan $v = x^2 y$, joillekin $x, y \in \widetilde{C}$. Toisaalta $\widetilde{C} \subset C$, joten pätee myös $x, y \in C$. Nyt saadaan

$$u = \frac{1}{3^r}v = \frac{1}{3^r}(x^2 y) = x^2 \left(\frac{1}{3^r}y\right).$$

Lauseen 3.6 nojalla $\frac{1}{3^r}y \in C$, joten $f(C^2) = [0,1]$.

$\square$

Seuraavaksi käydään läpi jälleen yksi tarvittava aputulos.

Lemma 4.17. *Olkoon* $f(x,y) = x^2 y$, $x, y \in C$. *Jos välit* $I = [a, a+3t]$ *ja* $J = [b, b+3t]$ *ovat välin* $[\frac{2}{3}, 1]$ *osavälejä, niin* $f(I,J) = f(\ddot{I}, \ddot{J})$.

Todistus. Määritelmien nojalla

$$f(I,J)=[a,a+3t]^2[b,b+3t]=[a^2,(a+3t)^2][b,b+3t]=[a^2b,(a+3t)^2(b+3t)].$$

Toisaalta $\ddot{I}=[a,a+t]\cup[a+2t,a+3t]$ ja $\ddot{J}=[b,b+t]\cup[b+2t,b+3t]$, joten

$$\begin{aligned}
f(\ddot{I},\ddot{J}) =&([a,a+t]\cup[a+2t,a+3t])^2([b,b+t]\cup[b+2t,b+3t])\\
=&([a^2,(a+t)^2]\cup[(a+2t)^2,(a+3t)^2])([b,b+t]\cup[b+2t,b+3t])\\
=&([a^2b,(a+t)^2(b+t)]\cup[a^2(b+2t),(a+t)^2(b+3t)])\cup\\
&([(a+2t)^2b,(a+3t)^2(b+t)]\cup[(a+2t)^2(b+2t),(a+3t)^2(b+3t)]).
\end{aligned}$$

Määritellään nyt

$$\begin{aligned}
&[a^2b,(a+t)^2(b+t)]=[u_1,v_1]\\
&[a^2(b+2t),(a+t)^2(b+3t)]=[u_2,v_2]\\
&[(a+2t)^2b,(a+3t)^2(b+t)]=[u_3,v_3]\\
&[(a+2t)^2(b+2t),(a+3t)^2(b+3t)]=[u_4,v_4],
\end{aligned}$$

jolloin $f(\ddot{I},\ddot{J})=[u_1,v_1]\cup[u_2,v_2]\cup[u_3,v_3]\cup[u_4,v_4]$ ja toisaalta $f(I,J)=[u_1,v_4]$.

Koska a,b,t ovat kaikki aidosti positiivisia lukuja, huomataan, että $u_1<u_2$, $v_1<v_2$, $u_3<u_4$ ja $v_3<v_4$. Vertaillaan seuraavaksi erotuksia v_1-u_2 ja v_3-u_4:

$$\begin{aligned}
v_1-u_2&=(a+t)^2(b+t)-a^2(b+2t)=at(2b-a)+t^2(2a+b)+t^3\\
v_3-u_4&=(a+3t)^2(b+t)-(a+2t)^2(b+2t)=at(2b-a)+t^2(5b-2a)+t^3.
\end{aligned}$$

Koska I ja J ovat välillä $[\frac{2}{3},1]$, saadaan

$$\begin{aligned}
2b-a&\geq 2\cdot\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}>0\\
5b-2a&\geq 5\cdot\frac{2}{3}-2\cdot 1=\frac{4}{3}>0.
\end{aligned}$$

Tällöin $v_1-u_2>0$ ja $v_3-u_4>0$, joten $v_1>u_2$ ja $v_3>u_4$. Näin ollen saadaan, että $[u_1,v_1]\cup[u_2,v_2]=[u_1,v_2]$ ja toisaalta $[u_3,v_3]\cup[u_4,v_4]=[u_3,v_4]$. Kun vielä jatketaan vertailua, huomataan, että $u_1<u_3$ ja $v_2<v_4$. Tarkastellaan vielä erotusta v_2-u_3:

$$v_2-u_3=(a+t)^2(b+3t)-(a+2t)^2b=at(3a-2b)+3t^2(2a-b)+3t^3,$$

missä $3a-2b\geq 3\cdot\frac{2}{3}-2\cdot 1=0$ ja $2a-b\geq 2\cdot\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}$. Tällöin $v_2-u_3>0$, eli $v_2>u_3$ ja

näin ollen $[u_1, v_2] \cup [u_3, v_4] = [u_1, v_4]$. Näin ollen saadaan $f(I, J) = [u_1, v_4] = f(\ddot{I}, \ddot{J})$.
$\square$

Lause 4.18. *Olkoon* $f(x, y) = x^2 y$, $x, y \in C$. *Tällöin* $f(\widetilde{C}^2) = [\frac{8}{27}, 1]$.

Todistus. Tarkastellaan kuvajoukkoa $f([\frac{2}{3}, 1]^2)$:

$$f\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]^2\right) = \left[\frac{2}{3}, 1\right]^2 \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \left[\frac{4}{9}, 1\right] \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \left[\frac{8}{27}, 1\right].$$

Toisaalta Lemman 4.17 nojalla väleille I_1 ja I_2 väliltä $[\frac{2}{3}, 1]$ pätee $f(I_1, I_2) = f(\ddot{I}_1, \ddot{I}_2)$. Koska f on jatkuva, niin Lemman 4.12 avulla saadaan

$$f(\widetilde{C}^2) = f\left(C^2_{[\frac{2}{3},1]}\right) = f\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]^2\right) = \left[\frac{8}{27}, 1\right].$$

$\square$

Seuraus 4.19. *Olkoon* $f(x, y) = x^2 y$, $x, y \in C$. *Tällöin* $f(C^2) = [0, 1]$.

Todistus. Lauseen 4.18 nojalla $f(\widetilde{C}^2) = [\frac{8}{27}, 1]$ pätee aina, joten myös Lemman 4.16 tulos on aina voimassa.

$\square$

4.5. Osamäärä Cantorin joukolla. Käsitellään seuraavaksi jakolaskua Cantorin joukon alkioilla. Aloitetaan tarkastelemalla Cantorin joukon loppupuoliskon alkioita, eli joukkoa $\widetilde{C}$.

Lemma 4.20. *Cantorin* $\frac{1}{3}$*-joukolle pätee*

$$\left\{\frac{u}{v} : u, v \in \widetilde{C}\right\} = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right].$$

Todistus. Olkoon Määritelmän 4.6 nojalla $\widetilde{C}_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Funktio $f(u, v) = \frac{u}{v}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan ja erityisesti välillä $[\frac{2}{3}, 1]$, joten $\{\frac{u}{v} : u, v \in \widetilde{C}_1\} = [\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$.

Olkoon I_1 ja I_2 mitkä tahansa kaksi konstruktiovaiheen $\widetilde{C}_n = \bigcup_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} I_{n,i}$ muodostavaa väliä I_i. Tällöin kyseiset välit ovat yhtä pitkiä ja voidaan merkitä $I_1 = [a, a+3t]$ ja $I_2 = [b, b+3t]$. $\widetilde{C}_n$ muodostuu 2^n kappaleesta erillisiä välejä. Tällöin välit I_1 ja I_2 ovat joko identtisiä, jos $a = b$, tai erillisiä, jos $a \neq b$.

Oletetaan, että $a \leq b$ (yhtä hyvin voisi olettaa toisin päin, koska välien I_1 ja I_2 järjestyksellä ei ole väliä), jolloin pätee joko $I_1 = I_2$ ja $a = b$ tai I_1 ja I_2 ovat erilliset, jolloin $a + 3t < b$. Osamäärät välien I_1 ja I_2 alkioista asettuvat tällöin välille

$$J_0 = \left[\frac{a}{b+3t}, \frac{a+3t}{b}\right] = [r_0, s_0].$$

Koska $\ddot{I}_1 = [a, a+t] \cup [a+2t, a+3t]$ ja $\ddot{I}_2 = [b, b+t] \cup [b+2t, b+3t]$, saadaan osamäärän avulla neljä osaväliä:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \left[\frac{a}{b+3t}, \frac{a+t}{b+2t}\right] = [r_1, s_1] \\
J_2 &= \left[\frac{a}{b+t}, \frac{a+t}{b}\right] = [r_2, s_2] \\
J_3 &= \left[\frac{a+2t}{b+3t}, \frac{a+3t}{b+2t}\right] = [r_3, s_3] \\
J_4 &= \left[\frac{a+2t}{b+t}, \frac{a+3t}{b}\right] = [r_4, s_4].
\end{aligned}
$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $J_0 = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4$. Tarkastellaan erikseen tapauksia $a = b$ ja $a < b$. Ensin kuitenkin tarkastellaan joitakin lukujen r_i ja s_j, $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, välisiä algebrallisia yhteyksiä.

Ensinnäkin huomataan, että $r_1 = r_0$ ja $s_4 = s_0$. Toisaalta $r_1 < r_2$, $s_1 < s_2$, $r_3 < r_4$ ja $s_3 < s_4$. Lisäksi saadaan

$$
\begin{aligned}
r_3 - r_2 &= \frac{a+2t}{b+3t} - \frac{a}{b+t} = \frac{2t(b-a+t)}{(b+t)(b+3t)} \\
s_3 - s_2 &= \frac{a+3t}{b+2t} - \frac{a+t}{b} = \frac{2t(b-a-t)}{b(b+2t)} \\
s_1 - r_2 &= \frac{a+t}{b+2t} - \frac{a}{b+t} = \frac{t(b-a+t)}{(b+t)(b+2t)} \\
s_2 - r_3 &= \frac{a+t}{b} - \frac{a+2t}{b+3t} = \frac{t(3a+3t-b)}{b(b+3t)} \geq \frac{t(3 \cdot \frac{2}{3} + 0 - 1)}{b(b+3t)} = \frac{t}{b(b+3t)} > 0 \\
s_3 - r_4 &= \frac{a+3t}{b+2t} - \frac{a+2t}{b+t} = \frac{t(b-a-t)}{(b+t)(b+2t)}.
\end{aligned}
$$

Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa $a < b$, jolloin pätee myös $a + 3t < b$. Tällöin saadaan, että $b - a + t > 0$. Toisaalta ehdosta $a + 3t < b$ seuraa $b - a - 3t > 0$ ja koska $t > 0$, saadaan edelleen $b - a - t > 0$. Näin ollen kaikki yllä olevat erotukset ovat positiivisia, mistä seuraa, että $r_2 < r_3$, $s_2 < s_3$, $r_2 < s_1$, $r_3 < s_2$ ja $r_4 < s_3$.

Nyt saadaan, että $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$ ja $s_1 < s_2 < s_3 < s_4$, eli välit J_i ovat järjestyksessä siten, että väli J_i alkaa aiemmasta pisteestä kuin väli J_{i+1} ja toisaalta väli J_i päättyy aiempaan pisteeseen kuin väli J_{i+1}. Lisäksi koska $r_2 < s_1$, $r_3 < s_2$ ja $r_4 < s_3$, niin $J_i \cap J_{i+1} \neq \emptyset$ kaikilla $i \in \{1, 2, 3\}$, eli välit ovat osittain päällekkäisiä. Näin ollen $J_0 = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4$.

Jos taas $a = b$, saadaan

$$r_3 - r_2 = \frac{2t(a-a+t)}{(a+t)(a+3t)} = \frac{2t^2}{(a+t)(a+3t)} > 0$$
$$s_3 - s_2 = \frac{2t(a-a-t)}{a(a+2t)} = \frac{-2t^2}{a(a+2t)} < 0.$$

Näin ollen $r_2 < r_3$ ja $s_3 < s_2$, mistä seuraa, että $J_3 \subset J_2$. Väli J_3 voidaan siis jättää tarkastelusta pois. Nyt saadaan $r_1 < r_2 < r_4$. Toisaalta

$$s_4 - s_2 = \frac{a+3t}{a} - \frac{a+t}{a} = \frac{2t}{a} > 0,$$

joten $s_2 < s_4$ ja näin ollen $s_1 < s_2 < s_4$. Lisäksi

$$s_1 - r_2 = \frac{a+t}{a+2t} - \frac{a}{a+t} = \frac{t^2}{(a+2t)(a+t)} > 0$$
$$s_2 - r_4 = \frac{a+t}{a} - \frac{a+2t}{a+t} = \frac{t^2}{a(a+t)} > 0,$$

joten $r_2 < s_1$ ja $r_4 < s_2$. Näin ollen $J_0 = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4$.

Nyt pätee $f(I_1, I_2) = J_0 = f(\ddot{I}_1, \ddot{I}_2)$ ja Lemman 4.12 nojalla saadaan

$$\left\{\frac{u}{v} : u, v \in \widetilde{C} \setminus \{0\}\right\} = f(\widetilde{C}^2) = f(C^2_{[\frac{2}{3},1]}) = f\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]^2\right) = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right].$$

□

Tarkastellaan seuraavaksi osamäärää koko Cantorin $\frac{1}{3}$-joukolla.

LAUSE 4.21. *Cantorin $\frac{1}{3}$-joukolle pätee*

$$\left\{\frac{u}{v} : u, v \in C \setminus \{0\}\right\} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{3} \cdot 3^m, \frac{3}{2} \cdot 3^m\right]. \tag{2}$$

TODISTUS. Olkoon $u, v \in C \setminus \{0\}$. Tällöin Lauseen 4.8 nojalla ne voidaan esittää muodossa $u = \frac{1}{3^s}\tilde{u}$ ja $v = \frac{1}{3^t}\tilde{v}$, missä $s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $\tilde{u}, \tilde{v} \in \widetilde{C}$. Tällöin saadaan

$$\frac{u}{v} = \frac{\frac{1}{3^s}\tilde{u}}{\frac{1}{3^t}\tilde{v}} = \frac{3^t}{3^s}\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} = 3^{t-s}\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} = 3^m\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}, \tag{3}$$

missä $m = t - s$ voi olla mikä tahansa kokonaisluku. Toisaalta koska $\tilde{u}, \tilde{v} \in \widetilde{C}$, niin

Lemman 4.20 nojalla saadaan

$$\frac{u}{v} = 3^m \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} \in \left[\frac{2}{3} \cdot 3^m, \frac{3}{2} \cdot 3^m\right] \subset \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{3} \cdot 3^m, \frac{3}{2} \cdot 3^m\right].$$

Toisaalta Lemman 4.20 nojalla saadaan

$$\bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{3} \cdot 3^m, \frac{3}{2} \cdot 3^m\right] = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} 3^m \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right] = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} 3^m \left\{\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} : \tilde{u}, \tilde{v} \in \widetilde{C}\right\}.$$

Yhtälön (3) avulla nähdään, että jokainen $3^m \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}$ voidaan esittää muodossa

$$3^m \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} = \frac{\frac{1}{3^s}}{\frac{1}{3^t}} \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}},$$

missä $s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Lauseen 3.6 nojalla $\frac{1}{3^s}\tilde{u} \in C$ ja $\frac{1}{3^t}\tilde{v} \in C$, joten

$$3^m \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} \in \left\{\frac{u}{v} : u, v \in C \setminus \{0\}\right\}$$

kaikilla $\tilde{u}, \tilde{v} \in \widetilde{C}$ ja $m \in \mathbb{Z}$. Näin ollen yhtälö (2) pätee.

□

4.6. Kahden alkion tulo ja Lebesguen ulkomitta. Aiemmin käsiteltiin funktiota $f(x, y) = x^2 y$, jossa $x, y \in C$. Tällöin havaittiin, että jokainen välin $[0, 1]$ alkio voidaan esittää funktion f avulla. Tarkastellaan seuraavaksi funktiota $g(x, y) = xy$, missä $x, y \in C$. Toisin kuin funktion f kohdalla, voidaan huomata, että funktion g kuvajoukko ei täytä koko väliä $[0, 1]$.

Esimerkki 4.22. Tarkastellaan funktiota $g(x, y) = xy$, jossa $x, y \in C$. Tällöin $x, y \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Nyt jos $x, y \in [0, \frac{1}{3}]$, niin $g(x, y) \in [0, \frac{1}{9}]$. Jos taas $x, y \in [\frac{2}{3}, 1]$, niin $g(x, y) \in [\frac{4}{9}, 1]$. Jos vielä tarkastellaan tapausta, että $x \in [0, \frac{1}{3}]$ ja $y \in [\frac{2}{3}, 1]$ (tai toisin päin), niin $g(x, y) \in [0, \frac{1}{3}]$. Näin ollen huomataan, että funktio g ei koskaan voi saada arvoja väliltä $]\frac{1}{3}, \frac{4}{9}[$.

Tutkitaan seuraavaksi kuvajoukon $g(C^2)$ ”pituutta”, eli *Lebesguen ulkomittaa.* Esimerkin 4.22 avulla saadaan eräs arvio joukon $g(C^2)$ Lebesguen ulkomitan ylärajaksi.

Lause 4.23. *Olkoon $g(x,y) = xy$, missä $x, y \in C$. Olkoon lisäksi μ Lebesguen ulkomitta, kuten Määritelmässä 3.10. Tällöin*

$$\mu(g(C^2)) \leq \frac{8}{9}.$$

Todistus. Esimerkissä 4.22 todetaan, että funktio g ei voi saada arvoja väliltä $]\frac{1}{3}, \frac{4}{9}[$. Tämän välin pituus on $\frac{1}{9}$. Lisäksi $g(C^2) \subset [0,1]$, joten

$$\mu(g(C^2)) \leq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

□

Käydään seuraavaksi läpi aputulos, jota tarvitaan myöhemmin $g(C^2)$:n Lebesguen ulkomitan alarajan arvioinnissa.

Lemma 4.24. *Olkoon $I = [a, a+3t]$ ja $J = [b, b+3t]$ identtisiä tai erillisiä välejä, missä $\frac{2}{3} \leq a \leq b \leq 1$. Olkoon lisäksi funktio $g(x,y) = xy$, missä $x, y \in C$. Tällöin*

(1) *Jos $a < b$, niin $g(\ddot{I}, \ddot{J}) = g(I, J)$.*
(2) *Jos $a = b$, niin $g(\ddot{I}, \ddot{I}) = g(I, I) \backslash](a+2t)^2 - t^2, (a+2t)^2[$.*

Todistus. Lasketaan ensin $g(I,J)$ ja $g(\ddot{I}, \ddot{J})$:

$$\begin{aligned}
g(I,J) =& g([a, a+3t], [b, b+3t]) \\
=& [ab, (a+3t)(b+3t)] \\
=& [ab, ab + 3t(a+b) + 9t^2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\ddot{I}, \ddot{J}) =& g([a, a+t] \cup [a+2t, a+3t], [b, b+t] \cup [b+2t, b+3t]) \\
=& [ab, (a+t)(b+t)] \cup [a(b+2t), (a+t)(b+3t)] \cup \\
& [(a+2t)b, (a+3t)(b+t)] \cup [(a+2t)(b+2t), (a+3t)(b+3t)] \\
=& [ab, ab + t(a+b) + t^2] \cup [ab + 2at, ab + t(3a+b) + 3t^2] \cup \\
& [ab + 2bt, ab + t(a+3b) + 3t^2] \cup [ab + 2t(a+b) + 4t^2, ab + 3t(a+b) + 9t^2] \\
=& [r_1, s_1] \cup [r_2, s_2] \cup [r_3, s_3] \cup [r_4, s_4].
\end{aligned}$$

Koska $a \leq b$, niin ensinnäkin $r_1 \leq r_2$ ja $s_1 \leq s_2$. Toisaalta saadaan myös, että $2at \leq (a+b)t$, mistä seuraa $r_2 \leq s_1$. Näin ollen $[r_1, s_1] \cup [r_2, s_2] = [r_1, s_2]$, eli saadaan

$$g(\ddot{I}, \ddot{J}) = [r_1, s_2] \cup [r_3, s_3] \cup [r_4, s_4].$$

Kohta 1: Jos $a < b$, niin $r_3 < r_4$ ja $s_3 < s_4$. Lisäksi koska $a < b$, niin Lemman 4.24 oletusten nojalla välit I ja J ovat erilliset. Näin ollen $a + t < b$. Tällöin

$$s_3 - r_4 = ab + t(a + 3b) + 3t^2 - (ab + 2t(a + b) + 4t^2) = t(b - (a + t)) > 0,$$

joten $r_4 < s_3$. Näin ollen $[r_3, s_3] \cup [r_4, s_4] = [r_3, s_4]$ ja

$$\begin{aligned} g(\ddot{I}, \ddot{J}) =& [r_1, s_2] \cup [r_3, s_4] \\ =& [ab, ab + t(3a + b) + 3t^2] \cup [ab + 2bt, ab + 3t(a + b) + 9t^2]. \end{aligned}$$

Edelleen huomataan, että $r_1 < r_3$, $s_2 < s_4$. Kun vielä muistetaan, että $\frac{2}{3} \leq a < b \leq 1$, niin

$$s_2 - r_3 = ab + t(3a + b) + 3t^2 - (ab + 2bt) = t(3a + 3t - b) \geq t(3 \cdot \frac{2}{3} + 0 - 1) = t \geq 0,$$

jolloin $r_3 < s_2$. Näin ollen $[r_1, s_2] \cup [r_3, s_4] = [r_1, s_4]$. Tällöin

$$g(\ddot{I}, \ddot{J}) = [ab, ab + 3t(a + b) + 9t^2] = g(I, J).$$

Kohta 2: Jos $a = b$, niin huomataan, että

$$[r_2, s_2] = [a^2 + 2at, a^2 + 4at + 3t^2] = [r_3, s_3],$$

jolloin

$$\begin{aligned} g(\ddot{I}, \ddot{J}) =& [r_1, s_2] \cup [r_4, s_4] \\ =& [a^2, a^2 + 4at + 3t^2] \cup [a^2 + 4at + 4t^2, a^2 + 6at + 9t^2]. \end{aligned}$$

Koska nyt $s_2 < r_4$, niin $[r_1, s_2] \cup [r_4, s_4] = [r_1, s_4] \setminus]s_2, r_4[$. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} g(\ddot{I}, \ddot{J}) =& [r_1, s_4] \setminus]s_2, r_4[\\ =& g(I, J) \setminus]a^2 + 4at + 3t^2, a^2 + 4at + 4t^2[\\ =& g(I, J) \setminus](a + 2t)^2 - t^2, (a + 2t)^2[. \end{aligned}$$

□

Nyt voidaan antaa arvio joukon $g(C^2)$ Lebesguen ulkomitalle. Kuten aiemmin mainittiin, Lebesguen ulkomitalla voidaan arvioida joukon kokoa kyseisen joukon peittävien avoimien joukkojen koon avulla, Määritelmä 3.10.

Lause 4.25. *Olkoon $g(x,y) = xy$, missä $x, y \in C$. Olkoon lisäksi μ Lebesguen ulkomitta, kuten Määritelmässä 3.10. Tällöin*

$$\mu(g(C^2)) \geq \frac{17}{21}.$$

Todistus. Koska $\widetilde{C}$ on konstruktionsa ensimmäisen vaiheen $\widetilde{C}_1$ osajoukko, eli $\widetilde{C} \subset \widetilde{C}_1$, niin

$$g(\widetilde{C}^2) \subset g(\widetilde{C}_1^2) = g\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]^2\right) = \left[\frac{4}{9}, 1\right]. \tag{4}$$

Seurauksen 4.11 nojalla

$$C = \{0\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}\widetilde{C}.$$

Tästä puolestaan seuraa, että

$$g(C^2) = \{0\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} g(\widetilde{C}^2). \tag{5}$$

Tarkastellaan joukkoja $\frac{1}{3^k} g(\widetilde{C}^2)$. Koska $g(\widetilde{C}^2) \subset [\frac{4}{9}, 1]$, niin joukkoja $\frac{1}{3^k} g(\widetilde{C}^2)$ voidaan arvioida seuraavasti: Ensinnäkin

$$\frac{1}{3^k} g(\widetilde{C}^2) \subset \frac{1}{3^k}\left[\frac{4}{9}, 1\right] = \left[\frac{4}{9 \cdot 3^k}, \frac{1}{3^k}\right] = [r_k, s_k].$$

Tästä nähdään, että $r_{k+1} < r_k$ ja $s_{k+1} < s_k$. Lisäksi

$$r_k - s_{k+1} = \frac{4}{9 \cdot 3^k} - \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{4}{3 \cdot 3^{k+1}} - \frac{3}{3 \cdot 3^{k+1}} = \frac{1}{3^{k+2}} > 0,$$

joten $s_{k+1} < r_k$. Näin ollen joukot $\frac{1}{3^k} g(\widetilde{C}^2)$ ovat erillisiä.

Nyt voidaan arvioida Lebesguen ulkomittaa siten, että kun $g(C^2)$ muodostuu erillisistä joukoista $\frac{1}{3^k} g(\widetilde{C}^2)$, niin Lebesguen ulkomitta on yhtälön (5) ja additiivisuuden, eli Lauseen 3.11 kohdan 3 nojalla

$$\mu(g(C^2)) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} g(\widetilde{C}^2)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu\left(\frac{1}{3^k} g(\widetilde{C}^2)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \mu\left(g(\widetilde{C}^2)\right).$$

Edelleen luku $\mu(g(\widetilde{C}^2))$ voidaan ottaa summan ulkopuolelle yhteiseksi tekijäksi, jolloin saadaan

$$\mu(g(C^2)) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^k\right)\mu(g(\widetilde{C}^2)) = \frac{3}{2}\mu(g(\widetilde{C}^2)). \tag{6}$$

Koska $\widetilde{C}_n$ koostuu 2^{n-1} kappaleesta $\frac{1}{3^n}$ mittaisia välejä I_i, niin Lemman 4.24 nojalla saadaan, että

$$g(\widetilde{C}^2_{n+1}) = g(\widetilde{C}^2_n),$$

jos välit I_i ovat erillisiä, tai

$$\begin{aligned}
g(\widetilde{C}^2_{n+1}) =& g(\widetilde{C}^2_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \left] \left(a_i + 2\cdot\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2, \left(a_i + 2\cdot\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 \right[\\
=& g(\widetilde{C}^2_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \left] \left(\frac{a_i\cdot 3^{n+1}+2}{3^{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2, \left(\frac{a_i\cdot 3^{n+1}+2}{3^{n+1}}\right)^2 \right[\\
=& g(\widetilde{C}^2_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \left] \frac{a_i^2\cdot 3^{2n+2} + 4a_i\cdot 3^{n+1}+3}{3^{2n+2}}, \frac{a_i^2\cdot 3^{2n+2} + 4a_i\cdot 3^{n+1}+4}{3^{2n+2}} \right[\\
=& g(\widetilde{C}^2_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} A_i,
\end{aligned}$$

jos välit I_i ovat identtisiä. Toisaalta jos väleistä I_i osa on identtisiä ja osa erillisiä, niin välejä A_i poistetaan vähemmän kuin 2^{n-1} kappaletta. Nyt huomataan, että jokaisen välin A_i pituus on

$$l(A_i) = \frac{a_i^2\cdot 3^{2n+2} + 4a_i\cdot 3^{n+1}+4}{3^{2n+2}} - \frac{a_i^2\cdot 3^{2n+2} + 4a_i\cdot 3^{n+1}+3}{3^{2n+2}} = \frac{1}{3^{2n+2}}.$$

Lisäksi muistetaan, että Lauseen 3.11 kohdan 1 nojalla $l(A_i) = \mu(A_i)$. Soveltamalla Lebesguen subadditiivisuutta, eli Lauseen 3.11 kohtaa 2 saadaan

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \mu(A_i).$$

Näin ollen

$$\mu(g(\widetilde{C}^2_{n+1})) \geq \mu\left(g(\widetilde{C}^2_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} A_i\right) \geq \mu(g(\widetilde{C}^2_n)) - \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \mu(A_i) = \mu(g(\widetilde{C}^2_n)) - \frac{2^{n-1}}{3^{2n+2}}. \tag{7}$$

Nyt päästään arvioimaan koko joukkoa $\widetilde{C}$. Yhtälön (4) nojalla $g(\widetilde{C}_1^2) = \left[\frac{4}{9}, 1\right]$ ja yhtälöä (7) soveltamalla saadaan

$$
\begin{aligned}
\mu(g(\widetilde{C}^2)) \geq& \mu(g(\widetilde{C}_1^2)) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{2n+2}} \\
=& \left(1 - \frac{4}{9}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{2n+2}} \\
=& \frac{5}{9} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^4} \left(\frac{2}{3^2}\right)^{n-1} = \frac{5}{9} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^4} \left(\frac{2}{3^2}\right)^{n} \\
=& \frac{5}{9} - \frac{\frac{1}{81}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{5}{9} - \frac{1}{63} \\
=& \frac{34}{63}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Tästä saadaan edelleen arvio koko Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon Lebesguen ulkomitalle, kun hyödynnetään yhtälöä (6):

$$\mu(g(C^2)) = \frac{3}{2}\mu(g(\widetilde{C}^2)) \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{34}{63} = \frac{17}{21}.$$

□

HUOMAUTUS 4.26. Lauseen 4.25 todistuksesta voidaan huomata, että jokaiselle konstruktiovaiheelle m pätee

$$\mu(g(\widetilde{C}_m^2)) \geq \mu(g(\widetilde{C}^2)) \geq \mu(g(\widetilde{C}_m^2)) - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{2n+2}}.$$

Ensimmäinen epäyhtälö seuraa siitä, että koska $\widetilde{C} \subset \widetilde{C}_m$ ja edelleen $g(\widetilde{C}^2) \subset g(\widetilde{C}_m^2)$, niin luonnollisesti joukon $g(\widetilde{C}^2)$ koko ei voi olla aidosti suurempi kuin joukon $g(\widetilde{C}_m^2)$ koko. Toinen epäyhtälö puolestaan seuraa Lauseen 4.25 yhtälöistä (7) ja (8).

SEURAUS 4.27. *Olkoon $g(x, y) = xy$, missä $x, y \in C$. Tällöin*

$$\frac{17}{21} \leq \mu(g(\widetilde{C}^2)) \leq \frac{8}{9}.$$

TODISTUS. Yhdistetään Lauseet 4.23 ja 4.25.

□

Huomautus 4.28. Athreya ym. [**2**] antavat artikkelissaan myös Mathematica sovelluksen avulla lasketut kahdeksan ensimmäistä desimaalia joukon $g(C^2)$ Lebesguen ulkomitalle:

$$\mu(g(\widetilde{C}^2)) = 0,80955358...$$

5. Muita sovelluksia

Tässä osiossa vilkaistaan vielä, mitä muuta aiheeseen liittyen on tutkittu, mutta varsinaiset todistukset jätetään muualta luettaviksi.

5.1. Cantorin $\frac{1}{\alpha}$-joukot. Kuten jo tutkielman alkupuolella mainittiin, Cantorin joukon muodostamiseen ei ole yksikäsitteistä tapaa. Ensinnäkin poistettavan osan pituutta voidaan vaihdella. Tarkastellaankin seuraavaksi Cantorin $\frac{1}{\alpha}$-joukkoja, joista voidaan poistaa myös muun kuin $\frac{1}{3}$ mittaisia välejä. Luku $\frac{1}{\alpha}$, jossa $\alpha > 1$, kertoo poistettavan keskiosan pituuden, kun väli jaetaan kolmeen osaan. Jäljelle jäävät reunimmaiset osavälit ovat yhtä pitkiä ja kummankin pituus on $t = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\alpha})$.

Määritelmä 5.1. Olkoot $C_0 = [0, 1]$ suljettu väli, $\alpha > 1$ ja $t = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\alpha})$. Olkoot $C_1, C_2, \dots$ välin C_0 osajoukkoja siten, että

$$
\begin{aligned}
&C_1 = [0, t] \cup [1 - t, 1] = I_{1,1} \cup I_{1,2} \\
&C_2 = [0, t^2] \cup [1 - t, 1 - t + t^2] \cup [t(1 - t), t] \cup [1 - t^2, 1] = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup I_{2,3} \cup I_{2,4} \\
&\dots \\
&C_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_{n,i}
\end{aligned}
$$

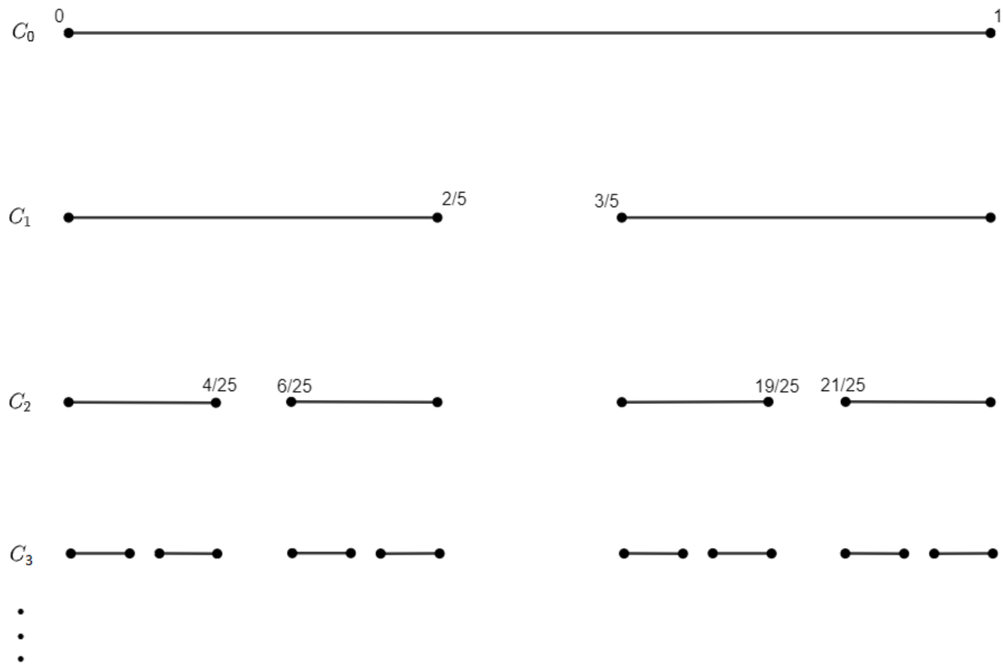
Tällöin Cantorin $\frac{1}{\alpha}$-joukko on

$$C_\alpha = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^k} I_{k,i}.$$

Huomautus 5.2. Joukot C_n saadaan muodostettua kuvausten $f_1(x) = tx$ ja $f_2(x) = tx + (1 - t)$ avulla. Kun väli I_i halutaan jakaa osaväleihin, ensimmäinen jäljelle jäävä osaväli saadaan kuvauksesta f_1 ja toinen kuvauksesta f_2, kun $x \in I_i$.

Huomautus 5.3. Valitsemalla $\alpha = 3$, vastaa Määritelmä 5.1 tutkielman alussa esiteltyä Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon Määritelmää 2.1.

Esimerkki 5.4. Tarkastellaan Cantorin $\frac{1}{5}$-joukkoa. Tällöin jokaisessa konstruktiovaiheessa jokainen osaväli I_i jaetaan kolmeen osaan siten, että keskimmäisen osavälin pituus on $\frac{1}{5}$ välin I_i pituudesta ja kaksi reunimmaista osaväliä ovat molemmat $t = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$ välin I_i pituudesta (Kuva 3.)



Kuva 3. Cantorin $\frac{1}{5}$-joukko muodostetaan poistamalla $\frac{1}{5}$ kokoisia välejä.

Cantorin joukon aritmetiikkaa voidaan tutkia paljon laajemmin kuin mitä tässä tutkielmassa on käyty läpi. Esimerkiksi Zhiqiang Wang ym. todistavat seuraavan tuloksen koskien Cantorin $\frac{1}{\alpha}$-joukkoja [**12**].

Lause 5.5. *Olkoon C_α Cantorin $\frac{1}{\alpha}$-joukko, $\alpha > 1$. Tällöin*

$$\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 : x_i \in C_\alpha\} = [0, 4], \textit{ jos ja vain jos } \alpha \geq 3$$

5.2. Waringin ongelma. Edward Waring pohti, että onko jokaiselle kokonaisluvulle $k \geq 3$ olemassa sellainen luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että jokainen luonnollinen luku voidaan esittää enintään n kappaleen luonnollisen luvun k:nnen potenssin summana. Myöhemmin David Hilbert todisti, että tällainen luku n on todellakin olemassa jokaiselle $k \geq 3$. Yinan Guo käsittelee tätä Waringin ongelmaa Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon osalta ja todistaa seuraavat tulokset [**5**].

Lause 5.6. *Olkoon C Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko. Tällöin jokaiselle $k \geq 3$ pätee*

$$[0, 1] \subset \{x_1^k + x_2^k + \cdots + x_{6^k}^k : x_i \in C\}.$$

Lauseen 5.6 mukaan jokainen luku väliltä $[0,1]$ voidaan esittää Cantorin joukon alkioiden k:nnen potenssien summana. Lisäksi tässä summan alkioiden lukumäärä n on pystytty rajaamaan siten, että $n \leq 6^k$.

Guo todistaa myös tarkempia tuloksia (Lauseet 5.7 ja 5.8) Lauseeseen 5.6 liittyen, kun luvut k ja n on valittu [**5**].

Lause 5.7. *Olkoon C Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko. Tällöin pätee*

$$\left[\frac{88}{243}, 7\right] \subset \{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_7^3 : x_i \in C\}.$$

Lause 5.8. *Olkoon C Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko. Tällöin pätee*

$$\{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_8^3 : x_i \in C\} = [0,8].$$

Huomautus 5.9. Myös Lause 5.5 soveltaa Waringin ongelmaa, kun $k = 2$ ja $n = 4$.

Lähdeluettelo

[1] Tom M. Apostol: *Mathematical Analysis.* 2nd ed. Reading, Mass. 1974.

[2] Jayadev S. Athreya, Bruce Reznick, Jeremy T. Tyson: *Cantor Set Arithmetic.* The American Mathematical Monthly, Vol. 126, No. 1, pp. 4-17, 2019.

[3] David P. Feldman: *Chaos and Fractals: An Elementary Introduction.* Oxford University Press. 2012.

[4] Julian F. Fleron: *A Note on the History of the Cantor Set and Cantor Function.* Mathematics Magazine, Vol. 67, No. 2, pp. 136-140, 1994.

[5] Yinan Guo: *Waring-Hilbert Problem on Cantor Sets.* Expositiones Mathematicae, Vol. 39, No. 2, pp. 165-181, 2021.

[6] Md. Shariful I. Khan, Md. Shahidul Islam: *An Exploration of the Generalized Cantor Set.* International Journal of Scientific & Technology Research, Vol. 2, Iss. 7, 2013.

[7] Marta Pawlowicz: *Linear Combinations of the Classic Cantor Set.* Tatra Mountains Mathematical Publications, Vol. 56, No. 1, pp. 47-60, 2014.

[8] Halsey L. Royden & Patrick Fitzpatrick: *Real Analysis.* Macmillan, 1988.

[9] Christopher Shaver: *An Exploration of the Cantor Set.* Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, Vol. 11, Iss. 1, Article 1, 2010.

[10] Terence Tao: *An Introduction to Measure Theory.* American Mathematical Society Providence. 2011.

[11] Robert W. Vallin: *The Elements of Cantor Sets: With Applications.* John Wiley & Sons. 2013.

[12] Zhiqiang Wang, Kan Jiang, Wenxia Li, Bing Zhao: *On the Sum of Squares of the Middle-third Cantor Set.* Journal of Number Theory, Vol 218, pp. 209-222, 2021.