

“Kokeilen, kuinka paljon on metri.”

**Pituuden mittaaminen Varga-Neményi -oppikirjoissa ja
opettajan oppaissa vuosiluokilla 1–4**

Jaana Ohra-aho

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma

Syyslukukausi 2021

Kokkolan yliopistokeskus Chydenius

Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ Ohra-aho Jaana. 2021. "Kokeilen, kuinka paljon on metri."

Pituuden mittaaminen Varga-Neményi -menetelmän oppikirjoissa ja opettajan oppaissa vuosiluokilla 1–4. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Kokkolan yliopistokeskus Chydenius. 102 sivua.

Pro gradu -tutkimuksessani tarkoituksena oli selvittää, millaisin menetelmin pituuden mittaamisen taitoja harjoitellaan ja kartutetaan Varga-Neményi -menetelmässä vuosiluokkien 1–4 Matematiikkaa -oppilaan kirjoissa ja Opettajan tienviitta -opettajan oppaissa. Lisäksi tutkittiin vielä sitä, millaisiin pedagogisiin ja didaktisiin toteutuksiin pituuden mittaamiseen opettajan oppaiden sisällöt opettajaa ohjaavat. Toinen lähestymistapa tulkitsee, millaisia pedagogisia ja didaktisia malleja Opettajan tienviitta -opettajan oppaissa on pituuden mittaamisen kohdalla.

Tutkimus alkoi keväällä 2020 ja tutkimusmenetelmänä käytettiin laadullista induktiivista sisällönanalyysia sekä hermeneuttista lähestymistapaa. Tuloksista laadittiin myös tuloksia kokoava määrällinen, prosentuaalinen koonti. Teoreettisessa viitekehyksessä tarkastellaan tämän ohella pituuden mittaamista ja sen oppimista sekä niiden taustalla olevia matemaattista osaamista, matemaattista ajattelua ja matematiikan kielentämistä sekä matematiikan oppimateriaaleja ja niihin liittyvää tutkimusta. Taustalla käsitellään lisäksi perusopetuksen opetussuunnitelman näkökulmia sekä kognitiivista oppimista ja konstruktivismia.

Tutkimustulosten mukaan tutkittavan aineiston avulla järjestettävä opetus toteuttaa perusopetussuunnitelman tavoitteet ja sisällöt sekä myös huomioi matemaattisen osaamisen ja oppimisen päämääriä. Matematiikan kielentäminen näyttäytyy läpi aineiston, joka noudattaa kognitiivisen ja konstruktivistisen oppimisen rakenteita sekä integroi pituuden mittaamisen harjoitteluun myös muita matematiikan osa-alueita.

Asiasanat: pituuden mittaaminen, Varga-Neményi -menetelmä, kielentäminen, induktiivinen oppiminen, kokemuksellinen oppiminen

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkistettu Turnitin Originality Check -ohjelmalla.

SISÄLLYS

TIIVISTELMÄ

1 JOHDANTO	4
2 VARGA-NEMENYI -MENETELMÄN TAUSTAA JA PERIAATTEITA	7
2.1 Induktiivisesta oppimisprosessista	9
2.2 Varga-Neményi -menetelmä suomalaisessa koulussa	14
3 KIELENTÄMISESTÄ JA PITUUDEN MITTAAMISESTA KOULUMATEMATIIKASSA	18
3.1 Matematiikan kielentämisestä	18
3.2 Pituuden mittaamisesta koulumatematiikassa	21
4 MATEMATIIKAN OPPIMATERIAALEISTA JA OPPIMATERIAALITUTKIMUKSESTA	29
4.1 Matematiikan oppimateriaaleista	29
4.2 Matematiikan oppimateriaalitutkimuksesta	31
5 TUTKIMUSTEHTÄVÄT	35
6 TUTKIMUSMENETELMÄ	36
6.1 Laadullinen tutkimusprosessi	36
6.2 Laadullinen sisällönanalyysi tutkimuksessani	38
6.3 Laadullisen sisällönanalyysin analyysitavat	40
6.4 Hermeneuttisesta otteesta tutkimuksessani	42
7 TUTKIMUSAINEISTO JA ANALYYSIN KULKU	46
7.1 Tutkimusaineiston esittely	46
7.2 Tutkimusaineiston analyysin eteneminen ja analyysiprosessi	47
7.3 Kategorioiden muodostaminen	49
8 TUTKIMUSTULOKSET	61
8.1 Pituuden mittaamisen opetuksessa käytettävä lähestymistapa	62
8.2 Pituuden mittaamisen näyttäytyminen muissa matematiikan osa-alueissa	74
8.3 Pituuden mittaamisen aikana harjoiteltavat taidot	77
9 TUTKIMUSTULOSTEN POHDINTAA JA JOHTOPÄÄTÖKSIÄ	81
9.1 Etiikka ja luotettavuus	84
9.2 Lopuksi - mitä tämä prosessi antoi	85
LÄHTEET	88

1 JOHDANTO

Opettajan tienviitta 2a-opettajan oppaassa (2018, 210) kuvaillaan tilannetta, jossa toisen luokan oppilas sanoo Varga-Neményi -menetelmän mukaisella oppitunnilla pituuden mittaamiseen liittyvää tehtävää tehdessään: *“Kokeilen, kuinka paljon on metri”*. Oppilaan tehtävänä on ensin leikata yhden metrin mittainen narunpätkä ja pohtia, miten sen voisi mitata. Oppilasta ohjataan myös mittaamaan, kuinka monta värisauvan mittaa kyseinen narunpätkä on. Seuraavana hän oppii, miten metri (1 m) voidaan lyhyemmin merkitä. Lopuksi lapsi saa vapaasti valiten mitata omaa pituuttaan, askeltensa tavoittavuutta tai pulpettinsa ulottuvuutta saman mittavälineen avulla. Tehtävä jatkuu yhä eteenpäin, kokemuksellisen ja toimintavälinein tapahtuvan oppimisen kautta.

Edellinen otos on avaus, johdanto siihen, miksi tutkimukseni aiheeksi valikoitui Varga–Neményi -menetelmän mukaisissa oppikirjoissa pituuden mittaamisen tehtävien analysointi ja opettajan oppaissa mittaamiseen liittyvien opetuskokonaisuuksien arviointi vuosiluokilla 1–4. Matematiikan kohdalla kerätyt kokemukset värittävät kunkin henkilökohtaista käsitystä siitä, millaisena osajana itsensä kokee. Tutkielma on oppimateriaalitutkimus, jossa keskitytään tutkimaan mittaamista ja erityisesti analysoimaan pituuden mittaamisen tehtäviä sekä oppilaan että opettajan materiaaleissa.

Lapsi oppii päivittäin leikkimällä kokien leikin kautta tapahtuvan oppimisen luonnolliseksi osaksi omaa elämää (Samuelsson & Carlson 2008, 623–626). Matematiikkaa opitaan parhaiten siten, että sen parissa toimitaan ja sen tarjoamia mahdollisuuksia käytetään aktiivisesti. Matemaattisista rakenteista ja käytänteistä harvemmin kiinnostutaan, ellei niihin voida luoda suhdetta käytännön tilanteissa. Vasta edellisen tapahduttua, lisääntyy myös struktuurien ja matemaattisten lausekkeiden kunnioitus, mikä taas edesauttaa näiden korrektaa ja hyödykästä käyttämistä. (Servais & Varga 1971, 13–14.)

Lapsi pystyy ajattelemaan analyttisesti ja luovasti sekä etsimään ratkaisuja kulloiseenkin matemaattiseen ongelmaan opittuaan ymmärtämään ja käyttämään riittävän määrän matemaattisia käsitteitä. Lapsen kyetessä hallitsemaan näitä, pystyy hän myös hyödyntämään ympäristössä olevaa informaatiota. Matematiikkaa tulee oppia riittävästi, jotta sen sisältöjä voidaan hyödykkäästi käyttää eri elämäntaitoja, ammatillisia tehtäviä ja matemaattista lukutaitoa ajatellen. Koska mittaaminen liittyy

jollakin tavalla jokaiseen päivään, tulee matematiikkaa opiskella koulussa ensimmäiseltä luokalta lähtien. Oppilaiden tulee päästä huomaamaan matematiikan ja arjen välinen vahva linkitys.

Kunakin oppilaan matematiikka-asenteesta ja kyvykkyyden tunteesta tulee pyrkiä kehittämään positiiviseksi ja matematiikkaminää kehittäväksi. Omat matematiikan koulukokemukseni voidaan kiteyttää hyvin lauseeseen "*Tämä limes ei kyllä lähene yhtään mitään milloinkaan.*" Matematiikan opiskelu oli lausekearmeijan ohimarssia, josta napattiin pakolliset asiat, jotta selvittiin tehtävistä ja kokeista riittävän hyvin. Matematiikka ei pelottanut, mutta ei liioin innostanut. Opetus tapahtui oppikirja- tai muistiinpanopohjaisesti ja ainoita välineitä olivat kirjoitus- ja piirtämisvälineet, harppi ja taskulaskin. Laskimellakin toimittiin annettujen näppäilyohjeiden avulla, usein ilman suurempaa ymmärrystä tehdyistä operaatioista. Koskisen (2016,18) mukaan oppiminen voidaan nähdä mielekkääksi silloin, kun sille pystytään osoittamaan fyysinen, sosiaalinen tai käsitteellinen viitekehys, sopiva konteksti, jota varten tai jossa opitaan. Konteksti vaikuttaa tehtävään tulkintaan, mutta sillä on myös merkitystä pohdittaessa sitä, millaiseksi oppijan motivaatio tai matematiikkakuva muodostuu. Mikäli oppimista tapahtuu tilanteissa, joihin opetettava sisältö todella kuuluu, motivoi oppijaa tarve ymmärtää oman elämänsä sisältöihin ja hallitsemiseen liittyvät asiat.

Luokanopettajakoulutukseni aikana, saadessani kokemuksia toimintavälinein toteutetuista oppimistuokioista, leikillisyydestä, vuorovaikutuksellisesta oppimisesta ja luvallisuudesta virheiden kautta oppimiseen, kiinnostuin toiminnallisesta matematiikasta. Aiemmat erityispedagogiikan alueen opinnot ja kokemukset koulumaailmasta toivat ajatuksia siitä, millaisia mahdollisuuksia tämä loisi esimerkiksi sellaisille oppilaille, joiden oppimista hyödyttäisi joko ylös- tai alaspäin eriytetty materiaali. Mittaamisen käsitteen ja pituuden mittaamisen tutkiminen on sikäli kiinnostavaa, että ne ovat mukana kouluopetuksessa heti alusta alkaen. Lisäksi näiden tutkiminen Varga-Neményi -menetelmän kontekstissa voisi luoda uusia näkökulmia opettamiseen verrattuna perinteiseen suomalaiseen tapaan. Niinpä otin yhteyttä Varga-Neményi -yhdistyksen puheenjohtajaan Anni Lampiseen kysyäkseni, saisinko tutkimustani varten oppimateriaalipaketin. Viikon kuluttua yhteydenotostani aineisto oli minulla ja pääsin tutustumaan aihepiiriin, josta minulla oli tuolloin vasta pieni kokemus ja oletuksia. Varga-Neményi -menetelmän perusajatuksena on, että oppiminen tapahtuu induktiivisesti ja abstraktion tiellä kokemuksia keräten. *Matematiikkaa 1b* -oppilaan oppikirjassa (2019, 4) myös vanhemmille tuodaan esille

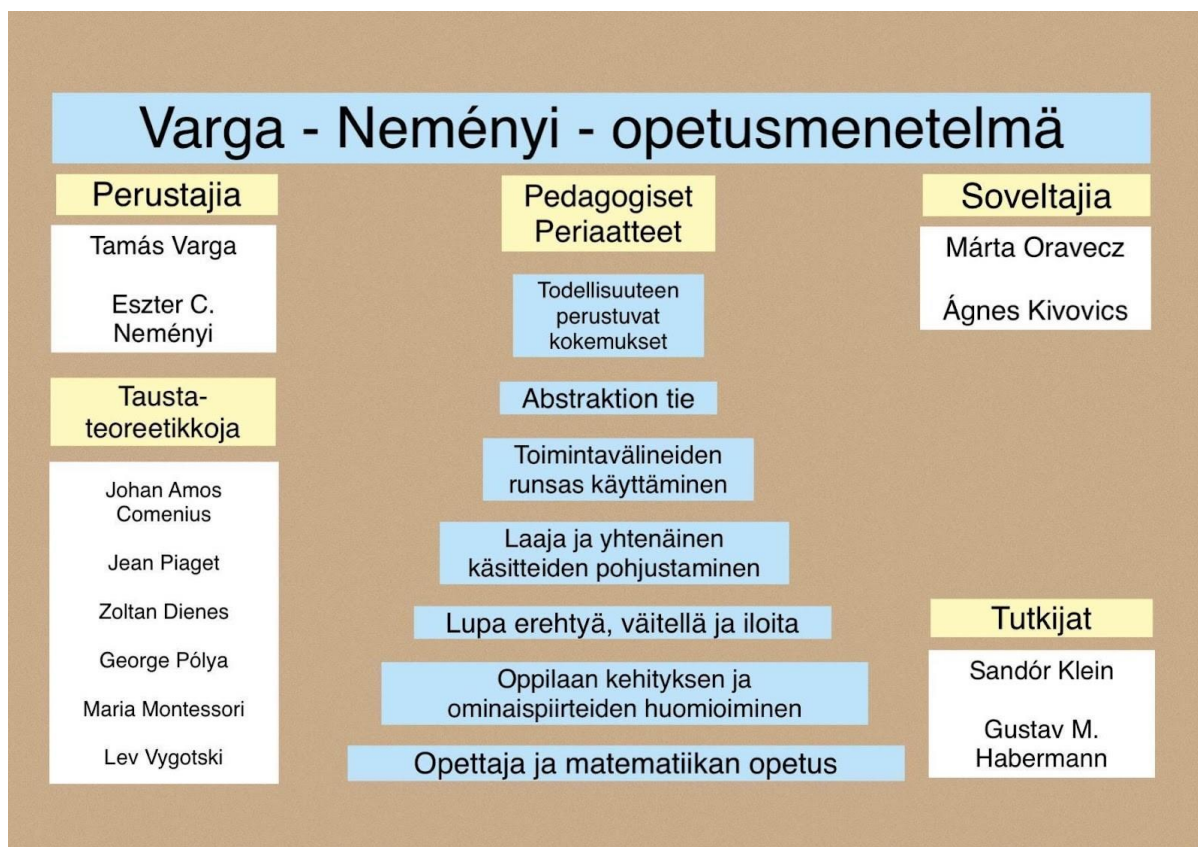
ajatuksia siitä, että kokemus ja virheiden kautta oppiminen tuovat mukanaan oppimista ja oivaltamista.

Koska oppikirjojen asema on säilynyt merkittävänä suomalaisessa peruskoulussa, myös oppikirjojen tutkiminen voidaan nähdä hyvin tarpeelliseksi. Karvonen, Tainio ja Routarinne (2017) ovat tuoneet artikkelissaan esille, että tutkimuksissa keskitytään muun muassa oppikirjoissa näkyvissä oleviin oppimiskäsityksiin ja oppikirjojen luettavuuteen ja visuaalisuuteen. Lisäksi tutkimuksen kohteina ovat oppikirjoissa olevat tehtävärakenteet, opettajien oppimiskäsitykset ja uskomukset. Eri oppikirjasarjojen vertailu, oppikirjoista löytyvät käsiterakenteet ja oppikirjojen käyttötapojen välinen vertailu on ollut tutkimusmenetelmänä usein käytetty. Myös oppikirjojen suhdetta opetussuunnitelmaan on tutkittu. Kuitenkaan vielä paljon ei ole tehty tutkimusta Varga-Neményi -menetelmän kontekstissa ja pituuden mittaamisen sisältöjen tarkastelusta ei myöskään ollut löydettävissä tutkimusta edellä mainitussa kontekstissa. Tämä tutkimus ei paneudu aiheeseen vertaillen muiden julkaisijoiden tai ns. perinteisen suomalaisen matematiikan oppikirjojen pituuden mittaamiseen liittyviä sisältöjä Varga-Neményi -menetelmän sisältöihin. Tämä saattaisi olla mielenkiintoinen uusi näkökulma tämän tutkimuksen valmistuttua, sillä tutkimi menetelmän menetelmät toteutuvat toiminnallisina, oppilaslähtöisin ja kokemuksellisin menetelmin, joiden esillä oleminen perinteisessä matematiikan opetuksessa on huomattavasti vähäisempi. Varga-Neményi -menetelmän mukaisesti oppikirjojen täyttämistä ei nähdä tarpeelliseksi tehtävä tehtävältä. Tärkeämmäksi koetaan sisältöjen oppiminen, monin erilaisin menetelmin.

2 VARGA-NEMENYI -MENETELMÄN TAUSTAA JA PERIAATTEITA

1970-luvulla unkarilainen professori ja matemaatikko Tamás Varga työryhmineen, sekä myöhemmin myös Eszter C. Neményi, näkivät, että matematiikan opetus kaipaava uudistusta. Syynä tähän oli se, että oppilaat kokivat tuolloin matematiikan olevan epäkiinnostavaa ja toistuvat epäonnistumiset ruokkivat matematiikasta vieraantumista. Laskutoimitusten tekninen osaaminen oli kohtalaisen hyvää, mutta luova ajattelu ja ongelmanratkaisutaidot eivät niinkään. (Tikkanen & Lampinen 2005, 78.) Koettiin, että oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja ja myönteistä suhtautumista matematiikkaa kohtaan tulisi pyrkiä parantamaan. Yhteistyön tuloksena matematiikan oppisisältöjä muokattiin oppilaslähtöisemmiksi, ongelmanratkaisutaitoja ja myönteistä suhtautumista matematiikkaa kohtaan edistäviksi. Oppilaille annettiin enenevässä määrin mahdollisuuksia matemaattisten käsitteiden pohjustamiseen jo aivan koulutaipaleen alussa. (Kahanpää & Kangas 2002, 4–5.) Myös Koskinen (2016, 105–109) tuo esille edellä mainitut motivationaaliset ja affektiiviset tekijät merkittäviksi matematiikan oppimisessa. Positiivinen suhtautuminen ja tunne vahvistavat sisäistä motivaatioita ja sitoutumista matematiikkaa kohtaan ja samalla ne ovat ehkäisemässä matematiikasta syrjäytymistä.

Tikkanen (2008, 66) sekä Kortessalmi ja Perkkilä (2021, 2–3) tuovat esille, että matematiikkaa opiskellaan konstruktivistisesti, askel askeleelta teoriaa rakentaen ja ongelmia luovasti ratkaisten. Opettajan rooli oppimista ohjaavana, tukevana, palautetta sekä arviointia antavana henkilönä on avainasemassa määriteltäessä sitä, sitoutuuko oppilas oppimiseen vai ei. Opettajan tulisi herättää oppijan sisäinen motivaatio matematiikan oppimiseen, jotta työskentelyn intensiteetti ja mielekkyys säilyisi. Menetelmää kutsutaan perustajiensa Vargan ja Neményin nimiyhdistelmällä (Varga-Neményi -menetelmä) ja tätä menetelmää ovat soveltaneet mm. Oravec ja Kivovics. Taustalta voidaan löytää pedagogisia ratkaisuja, jotka nojaavat mm. Piaget'n teoriaan, Montessori -pedagogiikkaan, Polyan malliin ongelmanratkaisun eri vaiheista sekä Dienesin teoriaan lapsen matematiikkaoppimisesta leikin avulla. Kuvassa 1 tuodaan esille edellä mainittujen henkilöiden lisäksi Varga-Neményi -menetelmän seitsemän pedagogista periaatetta, (Tikkanen 2008, 66; ks. myös Kortessalmi & Perkkilä 2021, 3). Menetelmä pyrkii innostamaan lasta vuorovaikutteisesta havainnoinnista, keksimisestä sekä oppimistilanteissa käytävästä keskustelusta ilon kautta.



Kuva 1. Varga-Neményi -menetelmän periaatteet ja siihen liittyviä taustateoreetikkoja, menetelmän perustajia, tutkijoita ja soveltajia (Tikkasen 2008, 66 mukaan)

Tämä opetusmenetelmä, jota myös Va-Ne -menetelmäksi kutsutaan, on lapsilähtöinen ja lapsen matemaattista oppimista jo varhaisessa vaiheessa tukeva (Lampinen & Korhonen 2010, 20–21). Keskityn tutkimuksessani siihen, millaisia erilaisia oppimista mahdollistavia keinoja oppilaat saavat kokea pituuden mittaamiseen liittyvissä tehtävissä kyseessä olevan menetelmän mukaisissa oppimateriaaleissa. Lähestyn sisältöä myös mielekkään ja oppilaan oppimista tukevan opettamisen kontekstissa. Koskisen (2016,123) mukaan opetusta tulee opetusta pyrkiä suunnittelemaan ja toteuttamaan tutkivaa tai tutkimusperäistä lähestymistapaa käyttäen. *Opettajan tienviitta 3a* -opettajan oppaassa (2018, 21) alleviivataan opetuksen monipuolisuutta. Oppilaiden erilaiset oppimistavat ja erot osaamisessa ja työskentelyssä tulee huomioida jo oppitunteja suunniteltaessa, jotta Varga-Neményi -menetelmässä käytettävät erilaiset oppimiseen liittyvät toimintatavat tulevat jatkuvasti hyödynnetyiksi.

Räty-Záborszky (2006, 74) tuo esille, että oppilaan kuunteleminen oppimisen aikana, oppilaan rinnalla kulkeminen ja oppilaan todellinen kuuleminen antavat opettajalle mahdollisuuksia seurata kunkin oppilaan edistymistä ja löytää mahdollisia kompastuskohtia. Näin opettajalle avautuu mahdollisuus tarjota kullekin sopivia keinoja edistää omaa oppimistaan. Opettajan tulee ensin selvittää se taso, jolla oppilas kulloistakin matemaattista sisältöä tai tehtävää aloittaessaan on. Tämän tietäessään opettaja pystyy laatimaan ja tarjoamaan oppilaan tehtäväksi sellaisia tehtäviä, joiden avulla oppilaan ajattelu ja osaaminen siirtyvät seuraavalle osaamisen tasolle. Oppilasta ohjataan tehtävää suorittaessaan siten, että vaikka oppilas ei vielä itse kykenisi hänelle annetusta tehtävästä suoriutumaan, suoriutuu hän siitä opettajan tai vertaistoimijan ollessa tukemassa oppimista. Tällöin toimitaan oppilaan lähikehityksen vyöhykkeellä. Hyvän opetuksen tulee kulkea kehityksen edellä. (Vygotski 1982, 184–186.) Koskisen (2016, 131–139) mukaan oppilaan tulee pystyä itse konstruoimaan merkityksiä, mutta sen rinnalla opettajan tulee ohjata opetus-oppimisprosessia erilaisin esimerkein, esitysmuotojen ja sanallistamisen avulla. On kuitenkin hyvä huomioida, että kertominen ei saa häivyttää oppilaan tekemää merkityksen muodostamista.

2.1 Induktiivisesta oppimisprosessista

Matematiikkaa tulisi opettaa ymmärtämistä varten. Koskisen (2016, 115–122) mukaan matemaattisten käsitteiden ja proseduurien semanttista, merkityksiin liittyvää analyysia ja tulkintaa voidaan tukea neljällä erilaisella lähestymistavalla:

1. *Konkreettinen lähestymistapa*: havainnollistetaan erilaisin kuvallisin tai konkreettisin välinein matematiikan abstrakteja käsitteitä, sääntöjä ja toimintamalleja.
2. *Kontekstuaalinen lähestymistapa*: todellisten reaalimaailman tilanteiden tuominen osaksi opetusta eli informaalin yhdistäminen formaaliin oppimiseen.
3. *Sosiaalinen lähestymistapa*: sosiaalinen vuorovaikutteisuus ja kommunikointi, ryhmä- ja parityöskentely, luokkakeskustelu ja yhteistoiminnallisuus (sosiokonstruktivistinen oppimiskäsitys).

4. *Tutkiva lähestymistapa*: Reaalimaailmassa tapahtuva tutkiva oppiminen, tutkiva matematiikka, tutkiva yhteistyö. Induktiivinen tiedon rakentaminen (yksittäisestä informaatiosta yleiseen informaatioon), ongelmanratkaisu, sosiaalinen vuorovaikutus.

Tikkanen (2008, 67–68) tuo myös esille edellä olevassa listauksessa olevat fyysiset arkielämän kokemukset, jotka johdattavat oppijaa kohti loogis-matemaattisia havaintoja ja ymmärrystä. *Opettajan tienviitta 1a* -opettajan oppaasta (2018, 12–19) on luettavissa, että 6–10-vuotiaiden lasten tiedot karttuvat induktiivisesti konkreettisen maailman tapahtumista ja asioista, omasta elinympäristöstään välittömiä havaintoja tehden. Kokemuksia tarvitaan, jotta sanat ja sanallinen ilmaisu olisivat mahdollisia. Edellisten avulla, kokemusten lisääntyessä, konkretiasta tulee käsitteellisyksiä, joiden välisiä yhteyksiä opitaan huomioimaan, muuntamaan osaamiseksi ja ajattelutoiminnoiksi. Loogis-matemaattisen askelluksen tavoitteena on abstrakti ajattelu.

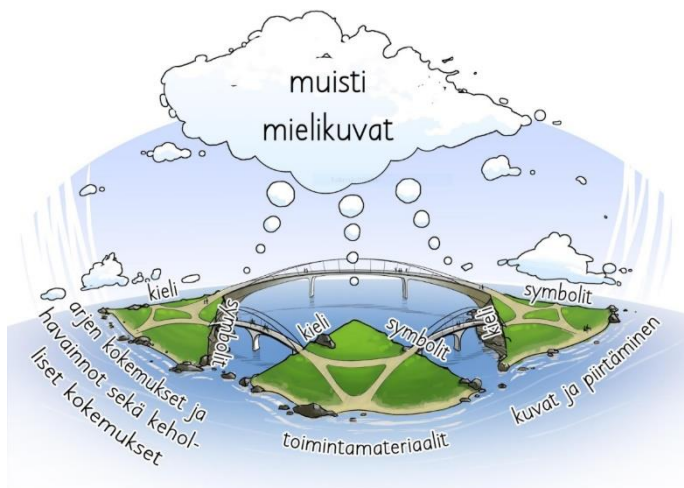
Koskisen (2016, 93, 101–102) mukaan matematiikkakuvaa tarkasteltaessa keskustellaan usein matemaattisen ajattelun ja ymmärtämisen välisestä suhteesta. Ajateltaessa oppimista, on hyödyllistä, mikäli oppilas voi osallistua matemaattisten struktuurien ja periaatteiden luomis- ja rakentamisprosesseihin opettajan rinnalla. Tämä ”teorian muodostaminen” (*organizing of mathematical into logical sequences*), sekä induktiivinen eli yksityisestä yleiseen tapahtuva päättely ovat matematiikan oleellinen osa. Matematiikan oppimisesta tulee mielekkäämpää, mikäli oppilaalla on tiedossaan kulloinkin riittävä käsitteellinen viitekehys. Oppilaalla on yleensä käytettävissään sekä formaalilla että informaalilla tavalla keräämäänsä tietoa, käsitteistöä, joiden avulla oppimisesta tulee merkityksekkäämpää ja joiden kautta ymmärrys kustakin asiasta muodostuu. Opetuksessa tulisikin huomioida, että tieteelliset käsitteet ja arkielämän käsitteet pääsisivät keskustelemaan keskenään. Kommunikoiva matematiikan opetus vahvistaa mahdollisuuksia ymmärtää matematiikkaa.

Tieteen termipankin (2018) mukaan abstraktion avulla tarkastelua tehdään johonkin ilmiöön tai objektin tiettyyn osaan tai ominaisuuteen kohdistuen. Usein abstrahoituun ominaisuuteen katsotaan vaikuttavan vuorovaikutuksen mukanaan tuomia tekijöitä. Matemaattinen kieli ilmaisuineen muodostuu abstrakteista symboleista, jotka kuvastavat matematiikan käsitteitä ja operaatioita, joiden

ymmärtäminen ei voi olla täydellistä, sillä hermeneuttisen kehän tavoin sisältöjä tutkitaan jatkuvasti. Myös matemaattisten merkitysten muodostaminen voi toisinaan on olla haasteellista. Mielekästä oppimista (*meaningful learning*) tarkastellaan merkityksellisyyden (*meaningfulness*) ja merkityksettömyyden (*meaningless*) käsitteitä vastakkain asettamalla. Mekaanisia matematiikan operaatioita voidaan käyttää juuri niitä varten tarkoitetuissa tehtävissä, mutta tällöin käsitteellinen ymmärtäminen ja looginen ajattelu eivät pääse kehittymään. Mikäli edellisiä pyritään kartuttamaan, tulee tehtäviä suoritettaessa pyrkiä soveltamaan jo opittuja käsitteitä ja operaatioita sekä sijoittamaan niitä uudenlaisiin asetelmiin ja konteksteihin. (Koskinen 2016, 15–17.)

Leinonen (2018, 22–24) kuvailee abstraktiota luvun kaksi avulla. Kaksi erillistä esinettä abstrahoidaan luvuksi kaksi, joka on ns. ajatusolio, joka voidaan kirjoittaa sitä kuvaavalla matemaattisella numeromerkillä 2. Leinosen mukaan Piaget (1896–1980) jakoi abstraktion kolmeen ryhmään, empiiriseen, pseudoempiiriseen ja reflektiiviseen abstraktioon. Näistä ensimmäinen käsittelee konkreettisia olioita, toinen operaatioita ja kolmas keskittyy ajatusobjekteihin. Leinonen (2018, 24) tuo esille Grayn ja Tallin (2001) ja Tallin (2004; 2005) Piaget'n edellistä mallia jalostavan käsitteenmuodostuksen kolmijaon. Nämä kolme mallia täydentävät toisiaan tehtävien työstämisen aikana. Käsitteellis-havainnollinen malli (*The (conceptual-) embodied world*) paneutuu arkimaailman konkreettisiin olioihin tai piirrettyihin kuvioihin, fyysikaalista havaintomaailmaa jäsentäen ja yksilön arkielämään orientaatiopohjaa tarjoten. Matematiikka on tällöin välineellisessä asemassa. Proseptuaalis-symbolisessa mallissa (*The (proceptual-) symbolic world*) toimintakäsitteet nähdään dualistisina, jolloin matematiikan symbolit käynnistävät mentaalisia toimintakaavioita, näiden aikaansaamia tuloksia ja jäsentyneitä rakenteita. Prospektikäsitteeksi (*prospect*) muotoutuu päättely, siitä syntyvä tulos ja näiden ilmaus. Esimerkkinä Leinonen (2018, 24) tuo symbolin $100/25$. Tämä voidaan liittää murtolukuun, kahden luvun suhteeseen, suoritettavaan jakolaskuun tai laskusta saatuun tulokseen neljä, jolloin symbolin merkitykset ymmärretään laaja-alaisesti. Formaalis-aksiomaattinen malli (*The formal (-axiomatic) world*) puolestaan keskittyy verbaalein, kuvallisin ja matematiikan omien symbolien avulla esitettyihin määritelmiin ja aksiomisysteemin (matemaattinen perusoletus) loogisiin johdannaisiin. Pedagogisesti aihetta tarkasteltaessa puhutaan "abstraktion tiestä", jossa fyysinen kokemus muuttuu nelivaiheisesti loogismatemaattiseksi kokemukseksi. Fyysistä kokemusta kuvataan

erilaisin välinein, piirtäen ja viimeisessä vaiheessa koettu ilmiö kuvataan symbolein. Tuota tietä kuljetaan uudelleen ja uudelleen, joiden jälkeen abstraktilla käsitteellä ilmennetään jo useiden yksittäisten tapausten yhteiseksi muotoutunutta olemusta. (Tikkanen 2008, 69–70.) Tätä kulkemista kuvataan kuvassa 2.



Kuva 2. Abstraktion tiellä kulkeminen Varga-Neményi -menetelmässä (*Opettajan tienviitta 1a* 2018, 14)

Varga-Neményi-menetelmän opettajan oppaan, *Opettajan tienviitan 1a* (2018, 15–22) mukaan oppiminen lähtee liikkeelle siis omakohtaisesta välittömästä kokemuksesta arjen tilanteissa, pelien ja ohjatun leikin kautta. Oppija on tällöin sekä opittavan asian subjekti sekä objekti. Esimerkkinä voidaan tuoda esille parillisuuteen ja parittomuuteen liittyvät tilanteet, joita koetaan useaan kertaan koulupäivien aikana. Opettaja pohjustaa oppimista kielentämällä (vrt. Joutsenlahti & Tossavainen 2018) ja muuttamalla erilaisia koulupäivän aikaisia tilanteita matemaattisemmiksi. Varga-Neményi -menetelmässä oppija nähdään aktiivisena toimijana ja opettaja ohjaajana. Matematiikan oppimista rakennetaan konkretiasta kohti abstraktiota ja päinvastoin abstraktion tietä kulkien.

Seuraava vaihe on toimintamateriaaleilla työskenteleminen, jossa aiemmin koetut tilanteet ja asiat mallinnetaan vaihtelevin materiaalein. Niillä konkretisoidaan erilaisia sisältöalueita ja houkutellaan oppilaita oivaltamiseen ja matemaattisten yhteyksien luomiseen. Oppilaat saavat loogismatemaattisten kokemusten avulla

materiaalia matemaattisen sisällön pohtimiseen. On kuitenkin hyvä huolehtia siitä, että oppilas ei kiintyisi mihinkään konkreettisista toimintavälineistä, sillä niistä luopuminen on abstraktion tavoite. Mikäli oppilaalla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, tulee huolehtia riittävän tuen antamisesta toimintavälineiden luopumistilanteissa. (*Opettajan tienviitta 1a*, 15.)

Kolmannessa vaiheessa matemaattisia ongelmia käsitellään kuvien tulkitsemisen ja niiden luomisen avulla. Tällöin oppilaat ottavat työskentelyssään huomioon enenevässä määrin myös matemaattisia merkkejä ja symboleita. (*Opettajan tienviitta 3a*, 22.) Matematiikkaa pyritään visuaalisesti mallintamaan mahdollisimman pelkistetyin ja yksinkertaisin esimerkein ja mallein. Tähän ohjataan myös niitä oppilaita, joiden mieltymys värikkääseen ja monimuotoiseen kuvittamiseen houkuttelisikin lähes kuvataiteen oppisisällön tuottamiseen. Kaikkien kolmen vaiheen mukana kulkee kieli, kielentäminen sekä puhuttuna että kirjoitettuna (*Opettajan tienviitta 3a*, 12–13).

Eri yhteyksissä, kokemuksellisuuden ja toiminnallisuuden kautta, konkreettiseen malliin yhdistetään sille kuuluva käsite. Sisäistämisen ja sisällön omaksumisen jälkeen tuo käsite voidaan abstrahoida ja irrottaa käsiteltävänä olleesta mallista. Tikkanen (2008, 94–95) tuo esille matematiikan oppimisen vaiheittaisen etenemisen. Alussa erilaisista malleista koettujen konkreettisten kokemusten avulla opitaan nämä ymmärtämään. Seuraavassa vaiheessa opittu malli yleistetään ja siihen opitaan liittämään käsite. Käsitteen abstrahoiduttua konkretiasta tulee tarpeetonta ja käsite irroitetaan mallista. Kuvatut vaiheet kulkevat usein vaiheittain (vrt. kielentäminen; Joutsenlahti & Tossavainen 2018), vaikka niiden välisiä eroja ei usein pystytä erottamaan toisistaan. Esimerkiksi konkreettisten välineiden mukana kulkemista tuetaan opiskelussa niin kauan kuin niille on tarvetta ja niiden käyttämisen tulee varata mahdollisimman paljon aikaa.

Myös Sarama ja Clements (2020, 99) alleviivaavat matematiikan opetuksessa ajatusta siitä, että matematiikka tulisi löytää ja sitä kehittää siten, että se liittyisi lasten luontaiseen aktiivisuuteen ja arjessa toimimiseen. Edelliset ovat kehittäneet geometriaan ja mittaamiseen liittyviä taitoja kehittävän Mathematical Building Blocks-tietokoneohjelmiston. Tuon heidän ajatuksensa esille, sillä löydän tästä paljon yhteneväisyyttä Varga-Neményi -menetelmästä löydettäviin ongelmanratkaisu- ja kokemuksellisuuskonsepteihin. Sarama ja Clements (2020) katsovat, että opetuksen lähtökohdana tulee olla edellä mainitun arkisidoksisuuden lisäksi lasten kiinnostuksen

kohteet, joihin liittyvin tehtävin pyritään tukemaan matemaattista aktiivisuutta. Lapsi pääsee harjoittelemaan matematiikkaan liittyviä taitojaan, kuten laskemista ja muotojen muuntelua, kognitiivisten taitojen samalla kehittyessä. Jälkimmäisiä ovat luominen ja rakenteleminen, jäljentäminen sekä muotojen ja numeroiden yhdistäminen, jolloin edetään juuri abstraktion tiellä sisältöjä kokien. Näin myös Varga-Neményi -menetelmässä toimitaan. Myös Varga-Neményi-opetusmenetelmässä koodaamiseen tutustutaan *Opettajan tienviitta 2b* -opettajan oppaan (2018, 46) erilaisia sääntöleikkejä, koneleikkejä leikkien. Koneiden toimintaa ohjaavat yksinkertaiset säännöt ja välineinä toimivat menetelmässä yleisesti käytettävät värisauvat, loogiset palat tai luvut. Leikin aikana oppilas oppii ymmärtämään, mitä kulloinkin koneelle annettu käsky saa koneessa tapahtumaan. Oppilaat kirjaavat muistiin koneiden antamat tulokset systemaattisesti. Pelin aikana oppilaat löytävät pelissä olevan säännön, jonka mukaisesti edetään.

2.2 Varga-Neményi -menetelmä suomalaisessa koulussa

Kortesalmi ja Perkkilä (2021, 3; ks. Lampinen 2009, 24–25) kirjoittavat, että Suomeen Varga-Neményi -menetelmä rantautui perinteisen suomalaisen matematiikan opetuksen rinnalle 2000-luvun alussa. Syynä kiinnostuksen heräämiseen oli mm. unkarilaisten oppilaiden hyvä menestyminen matematiikkaolympialaisissa sekä kansainvälisissä vertailuissa kuten TIMMS-tutkimuksessa 1999. Suomeen oltiin perustamassa opetuksen kehittämiskeskustoja, joihin lähdettiin etsimään Unkarista uudenlaisia malleja ja opetusmenetelmiä matematiikan opetusta varten. Vuonna 2000 Anni Lampinen sekä unkarilaisen matematiikan oppimateriaalin tekijät Márta Sz. Oravecz ja Eszter C. Neményi alkoivat tehdä materiaalin suomentamistyötä. Vuonna 2000 alkoi alkuopetuksessa toteutettu Varga-Neményi -menetelmän mukaisen opetuksen kokeilu, aluksi Jyväskylässä ja Polvijärvellä, jalkautuen myös nopeasti pääkaupunkiseudulle. Lukuvuodesta 2010–2011 alkaen päästiin opetuksessa käyttämään *Matematiikkaa* -oppimateriaalisarjan oppikirjoja. (Lampinen & Korhonen 2010, 27–28.) Vuosien 2018–2020 välillä julkaistiin *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaat kirjamuotoisina. Opetuksen perusrakenne sekä matematiikan sisällöt noudattavat sellaisenaan Perusopetussuunnitelman perusteita 2014. (*Opettajan tienviitta* 1a, 2018, 4.) Perusopetuksen opetussuunnitelmaan (2014, 99–156) on laaja-

alaisiin oppimisen tavoitteisiin kirjattu vuorovaikutustaitojen, yhteistyön ja hyvän käytöksen saavuttaminen erilaisin ja monipuolisin harjoittein. Oppilaita ohjataan myös asettumaan toisen asemaan ja tarkastelemaan asioita monen erilaisen näkökulman kautta.

Oppimista tulee mahdollistaa erilaisin, innostavin, kekseliäisyyttä, suunnittelu- ja ilmaisutaitoja sekä kädentaitoja kehittävin sisällöin, kuten Varga-Neményi -menetelmässä toimitaan. *Matematiikkaa 1a* -oppikirjassa (2019, 4) vanhemmille suunnatussa tekstissä alleviivataan ajatusta siitä, että matematiikan opetus ja oppiminen tulee mahdollistaa lapsen omasta elämänpiiristä lähtevin esimerkein, kokien, leikkien ja vuorovaikutuksellisesti toimien, abstraktion tiellä kulkien. Koskisen (2016, 131) mukaan opettajan tulee myös pyrkiä tekemään sellaisia pedagogisia ratkaisuja, joissa oppiaineen hallitsemisen lisäksi otetaan huomioon oppilaan ja oppimisen tuntemus, niin yksilö- kuin didaktisellakin tasolla. Myös Servais ja Varga (1971, 16) kirjoittavat, että erilaisin didaktisin ja pedagogisin ratkaisuin pystytään matematiikkaan liittämään vapaa leikillisuus, luova aktiivisuus sekä erilaisten ongelmien ratkaiseminen ja niiden luominen. Mikäli tilanteissa esillä olevat ja esille tulevat sisällöt ovat sidottavissa oppijalle arkipäiväisiin ja tuttuihin asioihin, oppimista tapahtuu ja opittu sisältö on sidottavissa jo aiemmin opittuun. Edellisten avulla voidaan luoda mahdollisuuksia kokemusten avulla tapahtuvaan oppimiseen. Kullekin oppijalle olisi mahdollistettava matematiikasta nauttiminen, riippumatta siitä, millaisin henkilökohtaisin matemaattisin taidoin kukin pystyy osaamistaan syventämään.

Tikkanen (2008, 104–105) kirjoittaa, että Varga-Neményi -menetelmä pohjautuu kansainvälisiin taustateoreetikoihin (ks. Kuva 1), oppilaan arkielämän huomiointiin, toiminnallisuuteen ja toimintavälineiden käyttämiseen. Yhtä lailla molemmissa edetään konkreettisesta abstraktioon, matematiikan sisältöjä oppien, myönteisessä oppimisilmapiirissä ongelmia ratkaisten. Opettajalla on selkeä rooli opetuksen suunnittelussa ja toteuttamisessa siten, että kunkin oppilaan kehitys huomioidaan.

Eroja pohdittaessa, suomalaisessa matematiikan oppikirjassa tuodaan esille ensin opeteltava käsite ja tämän jälkeen annetaan esimerkki kyseisen käsitteen käyttämisestä (vrt. Perkkilä, Joutsenlahti & Sarenius 2018, 352). Esimerkki ohjaa oppilaiden työskentelyä. Varga-Neményi -menetelmässä lähestytään sisältöjä induktiivisesti, loogismatemaattisia kokemuksia mahdollistaen, abstraktion tiellä, jolloin mekaaniset laskutavat ja drillaaminen jäävät sivuun. Varga-Neményi -

menetelmän mukainen oppilaskeskeisyys ohjaa opettajaa pohtimaan opetussisältöjä vahvemmin kuin suomalaisessa matematiikan opetuksessa. Menetelmässä oppilaita kannustetaan kokeiluun, ilman tarkkoja ja selkeitä malleja suorittavista tehtävistä. Opettajia ohjataan huomioimaan oppilaiden tekemiä suorituksia myös virheellisten suoritusten osalta. Näiden avulla opettaja pääsee näkemään oppilaan taidot sekä vielä harjoitusta vaativat sisällöt. Opettaja pystyy näiden pohjalta suunnittelemaan tulevia oppimistuokioita sekä niissä käytettäviä materiaaleja. (Tikkanen 2008, 104–105.)

Kortesalmi ja Perkkilä (2021, 2) kirjoittavat Varga-Neményi -menetelmän eroavan suomalaisesta matematiikan opetuksesta. Heidän mukaansa Varga-Neményi -menetelmää käyttäessään opettajan tulee sekä tuntee opetussuunnitelma että hallita metodiin liittyvät peruseriaatteet ja pedagogiikka. Kehityopsykologian ja matematiikan sisältötiedosta tulee myös omata riittävä osaaminen. Oppikirja on vain yksi monista opetuksessa käytettävistä materiaaleista, eikä sen tehtävänä ole määrittää oppituntien edistymistä tai valittavana olevia tehtävämalleja. Oppituntien aikana tulee pyrkiä kartuttamaan monipuolisia kokemuksellisia tilanteita, joilla voidaan edistää oppimista siten, että drillaus, mekaaniset ulkoa opetellut laskuhokemat jäävät sivuun ja mahdollistettaisiin mielekäs matematiikan oppiminen joustavia laskustrategioita käyttäen. Jopa ns. opettajajohtoisen työtavan aikana opettaja toimii enemmänkin johdattelijana ja kyselijänä, jolloin oppilaat ennustavat, oivaltavat ja keksivät käsiteltävän aihepiirin sisältöjä. (*Opettajan tienviitta 3a*, 2018, 24–28.) Toimintaa koordinoimaan vuonna 2005 perustettu Varga-Neményi -yhdistys toimii menetelmän mukaisen opetuksen järjestämiseen liittyvän materiaalin sekä koulutuksen ja seminaarien tuottajana. Menetelmän mukaista opetusta toteutetaan lähinnä vuosiluokilla 1–4. (Kortesalmi & Perkkilä 2021, 3; Varga-Neményi ry 2014.) Yleensä menetelmää opetuksessaan toteuttavat opettajat ovat osallistuneet Varga-Neményi -yhdistyksen tarjoamaan koulutukseen ja saaneet näin perehdytyksen menetelmän mukaiseen matematiikan opetukseen (Varga-Neményi ry 2014). Kurssit perehdyttävät opettajia menetelmän teoriaan sekä käytännön toteuttamisvaihtoehtoihin. Koulutukset antavat mahdollisuuden myös opettajien verkostoitumiselle.

Tiedustelin syyskuussa 2021 Varga-Neményi -yhdistyksen toiminnanjohtaja Anni Lampisen arviota siitä, kuinka paljon menetelmää käyttäviä opettajia tai kouluja

Suomessa on. Lampinen kertoi, että koulutusten alusta lähtien ns. pitkiin kursseihin osallistuneita opettajia on ollut vuosittain joitakin satoja, jolloin kouluttautuneita opettajia suomalaisissa kouluissa on kohtalaisen paljon. Tarkkaa lukumäärää on vaikea arvioida. Lampisen mukaan vuosiluokilla 1–4 Varga-Neményi -menetelmän mukaista oppilaan kirjaa käyttävien oppilaiden määrä Suomessa on vuosittain vaihdellut 2–4 % välillä kyseisen vuosiluokan oppilaista ja tämän lisäksi osa alkuopetuksen opettajista toteuttaa menetelmän mukaista opetusta ilman oppikirjoja. Osa opettajista toteuttaa menetelmän mukaista opetusta toisen julkaisijan oppimateriaalin rinnalla, joko merkittävästi tai värittääkseen muilla materiaaleilla toteuttamaansa opetusta. Edelliseen vaikuttavat kunkin koulun tekemät oppikirjalinjaukset, joiden mukaan opetuksessa tulisi käyttää muita kuin Varga-Neményi -menetelmän oppimateriaaleja.

3 KIELENTÄMISESTÄ JA PITUUDEN MITTAAMISESTA KOULUMATEMATIIKASSA

Uteliias ihminen esittää inspiroivia kysymyksiä ja luo uusia rohkeita ideoita ongelmia pohtiessaan. Oppilasta tulee rohkaista kertomaan ajatuksiaan ja kokemuksiaan sekä uskaltautua asettamaan kysymyksiä sekä itselleen että muille (Leinonen 2018, 77; ks. Lonka 2020). Walshaw'n ja Anthony'n (2017, 542) mukaan oppilas saa mahdollisuuden vahvistaa sekä omaa osaamistaan että matemaattista minäkuvaansa juuri itseilmaisujen ja toisten oppilaiden pohdintojen kunnioittavan kuuntelemisen avulla. Opettajan tuleekin siis varmistaa, että luokassa kullakin osallistujalla on sekä uskallusta että mahdollisuuksia sanoittaa omia toimintojaan.

3.1 Matematiikan kielentämisestä

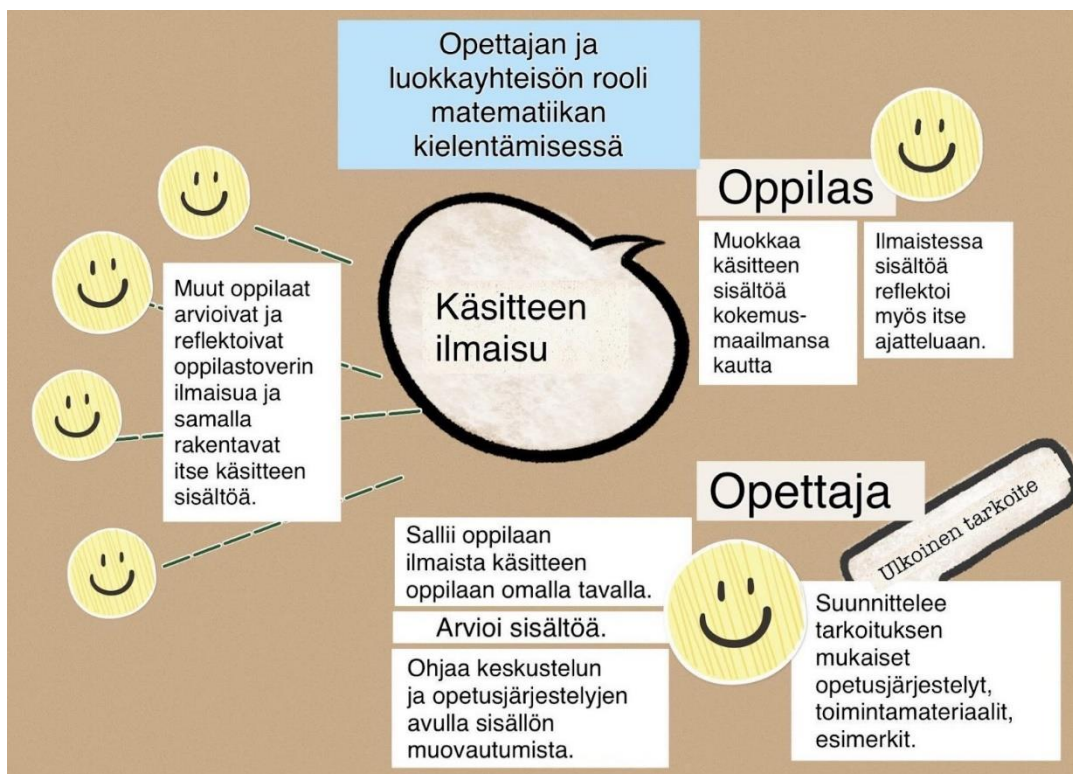
Kieli on sosiaalisen kanssakäymisen, ilmaisemisen ja ymmärtämisen väline. Sosiaalinen vuorovaikutus, yhteisesti käytetty kieli, kehittää kielitaitoa ja oppimista ajattelun, tunteiden ja toiminnan avulla (Koppinen, Lyytinen & Rasku-Puttonen 1989, 8; Vygotski 1982, 18; Piaget 1988, 170–173; Lehtinen, Kuusinen & Vauras 2007, 122–125). Erilaiset metakognitiot eli oman älyllisen toiminnan tiedostaminen, ohjaaminen ja säätely (Lonka 2020) ohjaavat matemaattista ajattelua. Tietoa prosessoidaan konseptuaalisesti, proseduraalisesti ja strategisesti. (Joutsenlahti 2005, 89; Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 416.) Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, 413–414) viittaavat Niiniluotoon (1984) kirjoittaessaan, että matematiikan kieli on suullinen ja kirjallinen ajattelua ilmaiseva sekakieli, jossa yhdistyvät matemaattinen ajattelu, jäsentely, reflektointi ja käsitteiden konstruointi. Tämä sekakieli pitää sisällään matemaattiset symbolit, lausekkeet, kuviokielen ja taktiillisen toiminnan kielen. Symbolikieli on vakiintunutta, mutta matematiikkaa ilmaistaan myös käyttäen yksilöllisiä, monimuotoisia ja kulttuuristen erojen sävyttämiä keinoja. Joutsenlahden ja Rättyän (2015, 52) mukaan matemaattinen ajattelu sekä matematiikan opiskelussa käytettävät kielet voidaan jakaa neljään eri alueeseen: luonnollinen kieli, matematiikan kieli, kuviokieli ja taktiillinen toiminnan kieli. Leiwo (1989, 106) tuo esille, että koulun

alkaessa lapsi osaa käyttää kieliopillisesti toimivia lauseita ja lapsen sanavarasto kasvaa jatkuvasti. Käytetty kieli muuttuu monipuolisemmaksi ja erilaisia merkityksiä sisältäväksi ja näin kielen käyttömahdollisuudet lisääntyvät. Ymmärtäminen tapahtuu ajattelun ja puheen muodostaessa kombinaatioita aktiivisen toiminnan avulla, johon pelkkä matemaattinen fraseologia ei kykene (Pound & Lee 2015, 46). Joutsenlahti ja Perkkilä (2019, 6) tuovat myös esille, että mikäli oppikirjat sekä oppitunnit keskittävät oppilaiden toimintaa vain laskutoimituksien suorittamiseen, oppilaat eivät pääse ilmaisemaan omaa matemaattista ajatteluaan kielen eli kielentämisen avulla.

Varga-Neményi -menetelmän konseptissa oppilasta kannustetaan toimimaan sosiaalisesti aktiivisesti, tehtäviään kielentäen ja ajatuksiaan sekä tehtävien ratkaisussa esiin tulleita pohdintojaan toisilleen kielellisesti kuvaillen (Tikkanen 2008, 66; ks. Servais & Varga 1971, 20). Ajattelu tapahtuu käyttäen sisäistä puhetta (*tiivistetty puhe itselle*), puhuttua kieltä (*puhe ulkopuolisille*) ja kirjoitettua kieltä (*eksplisiittinen ja mahdollisimman täydellinen ilmaisu*) (vrt. Galperin 1969). Menetelmä mahdollistaa Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018, 416–417) esille tuomat matemaattisen ajattelun kehittämisen, monipuolisen käsitteiden avaamisen, prosessien kuvaamisen sekä syvällisemmän ymmärtämisen.

Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, 411) tuovat esille luokkahuoneen, jonka kulttuurisidonnainen yhteisö, oppilaat ja opettaja, kommunikoivat kielen avulla. Kieli toimii tällöin välineenä opettajan, oppimateriaalin ja oppilaiden välisessä vuorovaikutuksessa. Joutsenlahti (2003, 5–6; ks. Servais & Varga 1971, 20; Aunola & Nurmi 2018, 60) nostavat esille Vygotskin (1982, 184–186) mukaisen lähikehityksen vyöhykkeellä tapahtuvan vuorovaikutuksellisen oppimisen. Oppilasta ohjataan suoriutumaan hänelle suunnitelluista tehtävistä, joista ei vielä täysin itsenäisesti selviä, joko vertaisoppijan tai opettajan toimiessa työskentelyn ohjaajana. Sanallistamisen avulla oppilas jäsentää konstruoimaansa tehtävää (Joutsenlahti 2003, 6) ja myös oppilaan ajatus jäsentyy (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 411; ks. Ikonen 2000, 21–22).

Luokkatilanteessa opettaja saa informaatiota oppilaiden oppimisesta, osaamisesta ja vielä harjoitusta vaativista sisällöistä heidän työskentelyään seuratessaan (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 419). Kuvassa 3 tuodaan esille juuri kielentämiseen liittyviä etuja kaikkien luokassa toimivien kohdalla. Kieli tehostaa ja selkeyttää puhujan omaa ajattelua.



Kuva 3. Oppilaan matemaattisen kielentämisen merkitys opettajan ja muiden oppilaiden näkökulmasta, Joutsenlahden (2003, 7) mukaan

Edellä oleva kuva 3 havainnollistaa esille tuomani koonnin siitä, millaisena oppimistilanne voidaan kokea. Oppimistilanteessa oppilas ilmaisee itseään monipuolisesti (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 417–418). Opettaja vahvistaa oppilaan tarkkaa matemaattista puhetta omien esimerkkiensä avulla (Drageset 2013, 4). Opettaja voi antaa oppilaille mahdollisuuksia matemaattisten sisältöjen kielentämiseen seuraavin keinoin:

- asian uudelleen kertominen erilaisin kuvauksin
- asian toistaminen oman ymmärryksensä pohjalta kuvaillen
- oman päättelyn vertaaminen toisen tekemään päättelytyöhön tästä sanallisesti kertomalla
- toisen kielentämän matemaattisen sisällön jatkaminen
- antamalla aikaa sisältöjen pohdintaan ja pohdinnan esille

- tuomien ajatusten esille tuomiseen (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 417–418.)

Poundin ja Leen (2015, 74) mukaan oppimateriaalien tulee olla oppilasta sitouttavia sekä vahvistaa ymmärtämistä ja osaamista.

3.2 Pituuden mittaamisesta koulumatematiikassa

Perhoniemi (2014; ks. myös Van de Walle, Karp ja Bay-Williams 2014, 397) esittää mittaamisen liittyvän ilmiöihin, olioihin ja erilaisiin ajatuksissamme käsittelemiimme ja vertailemiimme asioihin. Sekä Perhoniemi (2014), Nyblom (2020) että Robinson (2007) kuvailevat hyvin varhaisia mittaamiseen ja mittoihin liittyviä kokemuksia, joita löydetään jo Raamatusta sekä antiikin filosofien Platonin ja Aristoteleen pohdinnoista ja ohjeistuksista tai Galileo Galilein mittaustehtävistä. Koska mittaajilla oli erilaisia mittausvälineitä tai vertailukelpoisia mittaamisen määritelmiä, ei heidän mittauksiaan ollut mahdollista verrata suoraan keskenään. (Perhoniemi 2014.) Robinson (2008, 10–11) tuo esille mittaamisessa käytettyjä ilmaisuja, kuten “kuinka pitkälle keppi lentää” tai “kuinka kauas ehtii kävellen auringonnoususta auringonlaskuun”. Nyblomin (2020, 4–5; ks. Robinson 2007, 12–13; Perhoniemi 2014) mukaan mittaamisessa käytettävät lukuisat ja toisistaan eroavat yksiköt ja määritelmät aiheuttivat taloudellisia haasteita. Pituusmitta pyrittiin määrittämään tavanomaisessa mittaamisessa käytettäväksi kaikkialla.

Kymmenjakoinen SI-mittayksikköjärjestelmä (*Systeme International d’Unites*), yhtenäistää mittayksiköt, mittauskäytännöt sekä esittää matemaattisten suureiden välillä olevia yhteyksiä ja suureita (Perhoniemi 2014; Robinson 2007, 14–16). Luotu metrijärjestelmä ja metrologia, pituuden mittojen määrittelemistä ja toteutumista käsittelevä järjestelmä, luotiin käsi kädessä käytännöllisen yhteismitallisuuden kanssa. Tieteellinen metrihanke luotiin desimaaliseksi, kymmenjärjestelmää noudattavaksi, mittasuureiden universaaliksi ja yhtenäiseksi järjestelmäksi, jossa perusyksiköksi tuli metri. Metri määritellään nykyään pituudeksi, jonka valo kulkee tyhjiössä $1/299\,792\,458$ sekunnissa.

Pituuden mittaamisesta

Ennen kouluikää tulisi oppia käyttämään luonnollisia lukuja joustavasti, jolloin luvun eri merkitykset ja aspektit avautuvat sekä lukujonotaidot pääsevät kehittymään. Luvun ominaisuuksiin kuuluu määrä ja mitta. Näin lukukäsitteen yhteydessä kehitetään lukumääriin liittyviä vertailun taitoja. Vertailun taitoja harjoitellessaan lapsi oppii myös mittaamisen kannalta oleellisia asioita kuten mm. käsitteitä suurempi/pienempi, enemmän/vähemmän, pidempi/lyhyempi. Juuri edellä mainitut vertailuun liittyvät käsitteet liittyvät myös mittaamiseen. Näin mittaamisessa tarvitaan myös lukukäsitteen hallintaa. (vrt. Hannula-Sormunen, Mattinen, Räsänen & Ruusuvirta 2018, 161–166.) Pituudella tarkoitetaan matkaa pisteiden välillä. Van de Walle ym. (2014, 402) esittävät, että pituuden mittaaminen on yleensä ensimmäinen mittaamiseen liittyvä opittava taito, vaikka siihen liittyvä pidemmälle menevä oppiminen ei olekaan helppoa. Pituuden mittaamiseen liittyviä vaiheita ja sisältöjä tulisi aluksi opetella vertailun keinoin arjen tilanteissa sekä esimerkiksi pistetyöskentelyn avulla. Lapset voivat käyttää mittausvälineinään esimerkiksi narua tai keppiä. Näiden avulla päästään harjoittelemaan pituuseroon liittyviä vertailun ilmauksia kuten pidempi ja lyhyempi. Pituuden mittayksiköitä käytettäessä tarvitaan mittaamiseen tarkempia mittausvälineitä kuten esimerkiksi viivaimia ja mittanauhoja. Peruskäsitteet tulee oppia hyvin ja niiden käyttämiseen tulee saada riittävästi taitoja, jotta opittaisiin suorittamaan yhä haastavampia laskutoimituksia. Mitä automaattisemmiksi taidot kehittyvät, sitä vaativampia ongelmanratkaisutehtäviä pystytään suorittamaan. (Aunola & Nurmi 2018, 55; ks. myös Van de Walle ym. 2014, 397; McDonough & Sullivan 2011, 29.) Perkkilä (2002, 39) tuo tutkimuksessaan esille, että lapsen matemaattista kehitystä ei tule torjua, vaan kullekin lapselle tulee pystyä löytämään juuri hänen kykyihinsä soveltuvaa mielekästä sekä tehokasta opetusta, jonka avulla lapsi pystyy olemaan aktiivisena kokijana omassa arjessaan.

Mittaamisen ja mittayksiköiden opetuksen tulee toteutua alkaen konkreettisesta tekemisestä ja johtaen abstraktiin mittayksiköiden muunnosten oppimiseen ja mittajärjestelmän hahmottamiseen. Pituuden suureen mittaamiseen käytettäviksi välineiksi Ikäheimo (2021, 453) nimeää seuraavat:

- viivoitin (30 cm / 300 mm)
- mittanauha (100 cm / 1000 mm)
- uraviivain (1 m)

- kymppisauva
- ykköskuutio
- VaNe -värisauvat
- mittapyörä

Ikäheimo (2021, 448) on koonnut mittaamisen opetuksen vaiheet, oppimistavoitteet ja toimintaperiaatteet sekä niiden etenemisen, joiden pohjalta kuva 4 on laadittu.

VAIHE	OPPIMISTAVOITE	TOIMINTAPERIAATE
	Mitä opitaan?	
Mittaaminen, mittavälineet ja mittayksiköt	Mitä ominaisuuksia voidaan mitata Millaisia mittausvälineitä suureen mittaamisessa käytetään Mittausvälineen valinta	Standardisoimattomat mitat Standardisoidut mitat, oppilaan kehon ja arjen kontekstissa Mittayksiköt tukipistein opeteltuna
Mittayksiköiden suhteet tukipisteiden ja välineiden avulla	Mittausyksiköiden väliset suhteet tukipisteiden avulla Mittayksiköiden muuntaminen suuremmiksi ja pienemmiksi mittayksiköiksi tukipisteiden avulla	Tukipisteet: • oppilaan keho • oppilaan arki • välineet • mittayksikkökortit Muunnokset, kahteen suuntaan, tukipisteiden avulla
Mittayksiköiden muunnokset mitta-järjestelmässä	Mittayksiköiden muunnokset kahteen suuntaan ilman tukipisteiden apua Mittayksikkö - järjestelmän, sekä mittayksikköjärjestelmän ja kymmenjärjestelmän välisen suhteen	Suureet (pituus, massa, litratilavuus) mittayksikköjärjestelmänä, suhdeluku 10 Suureet (pinta-ala, kuutiotilavuus) mittayksikköjärjestelmänä, suhdeluvut 100, 1000

Kuva 4. Mittaamisen opetuksen vaiheet ja oppimistavoitteet ja toimintaperiaatteita Ikäheimon (2021, 448) mukaan

Ikäheimon (2021, 444–445; ks. Clements, Sarama, Van Dine, ... & Eames 2018, 23; Clements, Banse, Sarama, ... & Tatsuoka 2020, 2) mukaan ominaisuuksien mittaamista seuraa mittayksiköiden muunnosten, kymmenkertaisuuden ja

kymmenesosan ymmärtäminen. Pinta-aloja ja tilavuuksia määritellään pituusmittojen avulla. Edellisten mukana mittaamiseen liittyvät satakertainen ja sadasosa sekä tuhatkertainen ja tuhannesosa. Kymmenjärjestelmää harjoitellaan omakohtaisin konkreettisen mittaamisen keinoin, tavoitellen abstraktia mittayksiköiden muunnosten ymmärtämistä ja mittajärjestelmän hahmottamista. Clements ym. (2020, 2) valittelevat sitä, että mittaamisen taitoja määrittävä arviointi keskittyy testaamaan esimerkiksi numeron viivaimelta lukemista. Tällöin ei kuitenkaan aina ole selvää, ymmärtääkö kyseinen mittaja käsitteellisesti mittausprosessia ja sen avulla saatua tulosta. Mittavälineeltä nähtävät mitattavan kohteen ns. alku- ja loppupiste saavat merkittävän roolin, jolloin näiden pisteiden välissä olevat intervallit jäävät huomioimatta.

Mittaluku ja mittayksikkö

Pituuksia verrataan pituuden mittayksiköihin ja muita mitattavia sisältöjä taas kunkin omien mittayksiköiden avulla. Pituuden mittaamisen avulla määritetään kahden pisteen välistä etäisyyttä tai niiden väliin jäävän alueen pituutta (Clements ym. 2020, 2). Tässä tutkimuksessa tutkitaan alakoulun matematiikan kontekstissa pituuden mittaamista, joten tuon esille alakoulussa käytettävät pituuden yksiköt taulukossa 1. Pituuden perusyksikkö on metri ja mittayksiköiden välinen suhdeluku on kymmenen.

Taulukko 1. Pituuden mittayksiköt

Pituuden nimitykset, mittayksiköt ja mittasuhteet						
kilometri	hehtometri	dekametri	metri	desimetri	senttimetri	millimetri
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Edellä oleva taulukko havainnollistaa, että siirryttäessä pituuden perusyksiköstä, metristä, vasemmalle (kuvaa edestä tarkasteltaessa) seuraava pituuden yksikkö, dekametri, on kymmenkertainen metriin verrattuna. Hehtometri on kymmenkertainen dekametriin verrattuna ja satakertainen metriin verrattuna. Vastaavasti oikealle siirryttäessä metriä edeltävä mittayksikkö on kymmenesosa metristä. Tässä on

nähtävissä sama logiikka kuin kymmenjärjestelmässä, jossa perusyksikkönä ovat ykköset. Kymmenkertaisuus on yhteistä niin kymmenkantaisille mittayksiköille kuin kymmenjärjestelmälle.

Luku merkitsee sekä määrää että mittaa. Mitattavaa ominaisuutta eli suuretta (esimerkiksi pituus), mitataan juuri tätä suuretta mittaavalla tai mittaamiseen erikseen valitulla mittausvälineellä ja saatu tulos esitetään mittaustuloksena mittaluvun (numero) ja mittayksikön avulla (Ikäheimo 2021, 457). Esimerkkinä laskutehtävä, jossa oppilasta pyydetään mittaamaan kirjan leveys ja korkeus valkoisia kuutioita mittausvälineenä käyttäen. Pituus määritellään tuolloin kuutioiden särmien avulla (vrt. *Opettajan tienviitta 2a, 2018, 208*). Oppilaan tulee tuolloin ilmoittaa mittaustulos siten, että mittaluku (numero) ilmaisee valkoisten kuutioiden särmien lukumäärän mitattavassa pituudessa ja särmä-termi toimii mittayksikkönä. Kirjan leveys voidaan ilmaista esimerkiksi näin: "Kirjan leveys on 20 valkoisen kuution särmää". On tärkeää ymmärtää, että yhteen tiettyyn pituuteen mahtuu pieniä mittayksiköitä enemmän kuin suuria mittayksiköitä.

Suureita ovat mitattavissa ja laskettavissa olevien olioiden (kappaleiden, hiukkasten, aineen, kenttien) ja ilmiöiden ominaisuudet. Tuosta ominaisuudesta tulee suure silloin, kun sille voidaan määritellä mittayksikkö. Tämä yksikkö on etukäteen sovittu vertailuarvona käytettävä erityistapaus, jonka suuruus tai voimakkuus ilmaistaan suureen arvona (lukuarvon ja yksikön tulo). Suureet ilmaistaan kirjaintunnuksin. (SFS 2019, 7.)

Pituuden mittaamisen yhteyksistä muihin matematiikan osa-alueisiin

Matematiikan eri osa-alueet liittyvät toisiinsa ja niiden hallitsemista vaaditaan, jotta matemaattinen osaaminen pääsee kehittymään. Ikäheimo (2021, 444–446; ks. Clements ym. 2020, 2; Kilpatrick, Stafford & Findell 2001, 142) tuo esille, että konkreettisen mittaamisen rinnalla myös mittayksiköt ja niiden väliset suhteet hahmottuvat oppilaille ilman mekaanista ulkoa opettelemista ja sen kautta tavoiteltavaa ymmärtämistä. Jotta mittaaminen ja mittayksiköiden muunnokset voidaan oppia, tulee hallita seuraavat käsitteet: lukukäsite, lukujonot, lukujen vertailu, arviointi ja pyöristäminen, peruslaskut, kymmenjärjestelmä, luonnolliset luvut ja desimaaliluvut. Mittaamisen periaatteisiin tutustutaan aluksi standardisoimattomilla mitoilla, jonka jälkeen siirrytään standardisoituihin mittoihin. Mikäli mittaamisen ymmärtämistä ja muistamista tahdotaan vahvistaa, voidaan kutakin mittayksikköä

kuvaamaan valita oppijalle tuttuja ja arkisia tukipisteitä, joiden avulla mittayksiköitä on helpompi muistaa sekä hallita. Pituuden mittayksiköiden tukipisteitä kuvaamaan on valittu helposti ymmärrettävissä oleva kuvasarja kuvassa 5, jota käytetään myös Varga-Neményi -materiaaleissa (Ikäheimo 2021, 447).



Kuva 5. Esimerkki pituuden hahmottamisesta tukipisteiden avulla (Ikäheimo 2021, 447)

Piaget'n (1977, 97) mukaan lasten reaktiot esioperationaalisilla tasoilla keskittyvät heidän havaitsemiinsa tai kuvittelemiinsa kokemuksiin. Lapsi kokee kaksi samanmittaisiksi todettua tankoa erimittaisiksi, mikäli toinen niistä asetetaan toisen vierestä etäämmälle katsojasta. Operationaalisessa vaiheessa lapsi kykenee tekemään vertailuja objektien välillä suhteessa alkuperäiseen objektiin. Esimerkiksi jos $A < B$ ja $B < C$, niin tällöin myös $A < C$. Clements ym. (2020, 3) tuovat kuitenkin esille, että lapset ovat tutkimuksissa osoittaneet myös pituuden pysyvyyden ymmärtämistä, mutta mittaamisen konseptuaalinen ymmärtäminen saattaa jäädä toteutumatta. Harjoittelemisen tulisi aloittaa viimeistään esiopetusikäisenä, erilaisin arjen välinein ja kehon osilla suoritetuin mittauksin (Kajetski & Salminen 2018, 129).

Pituuden mittaaminen perusopetuksen opetussuunnitelmassa

Pituuden mittaaminen ja siihen liittyvät sisällöt etenevät luokilla 1–4 kuvan 6 mukaisesti, Ikäheimon (2021, 449) sekä perusopetussuunnitelman (Opetushallitus 2014, 128—234) pohjalta luotuna.

1. luokka	2. luokka	3. luokka	4. luokka
Standardisoimattomat mitat: mittaaminen <ul style="list-style-type: none"> • pituus • pinta-ala • kuutio-tilavuus 	Standardisoidut mitat: mittaaminen <ul style="list-style-type: none"> • oma keho • arki • koti • koulu 	Mittayksikkö-muunnokset <ul style="list-style-type: none"> • konkreettiset • tukipisteiden avulla saatavat • itse mitattavat suureet 	Suureen käsite: <ul style="list-style-type: none"> • Mitä voidaan mitata/mitä ei? • Mittayksiköiden itse mitattavat suureet • Mitataan itse, sanalliset tehtävät • Käsitteet: kaksinkertainen, puolet

Kuva 6. Pituuden mittaaminen ja siihen liittyvät sisällöt Ikäheimon (2021, 449) ja perusopetussuunnitelman (Opetushallitus 2014, 128–234) mukaan.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus 2014, 128–130) mukaan opetuksen tulee systemaattisesti kehittää monipuolisesti matemaattisten käsitteiden, rakenteiden ja matemaattisten proseduurien ymmärtämistä. Matematiikan hyödyllisyyden ja käyttömahdollisuuksien löytäminen eri konteksteissa konkretian ja vuorovaikutuksellisen toiminnan avulla nostetaan tavoitteiksi. Oppilaat vahvistavat taitojaan yhtäläisyyksien, erojen ja säännönmukaisuuksien huomioinnissa vertaillen, luokitellen ja järjestykseen asetellen. Vaihtoehtoja haetaan systemaattisesti, syy- ja seuraussuhteita ja matemaattisia yhteyksiä löytäen. Oppilaan taitoja ja teoriaosaamista pyritään kehittämään niin, että oppilas oppii vertaillen yhdistämään ja käyttämään mittaamisen sisältöjä osaavasti. Samalla tulee mahdollistaa mittaamisen kompleksisuuden ja mittaamisen käsitteiden ja proseduurien keskinäisen vuorovaikutuksen ymmärtäminen. Oppilaita ohjataan lukujen tarkoituksenmukaiseen käyttämiseen sekä laskutoimituksissa että lukumäärää, järjestystä ja mittaustulosta esittämissä tilanteissa. Kahden ensimmäisen vuoden aikana luodaan vahvaa pohjaa laskutaidon lisäksi lukukäsitteen ja kymmenjärjestelmän ymmärtämiselle konkreettisin mallein. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan oppilaan tulee oppia valitsemaan sopiva mittausväline sekä tekemään mittaustuloksen järjestyksen arviointi. (Opetushallitus 2014, 128–129.) Ikäheimo (2021, 445) tuo lisäksi esille, että

mittaamista tulisi harjoitella läpi lukuvuoden, jotta oppilaat voisivat saada mittaamiseen liittyviä kokemuksia mahdollisimman paljon.

4 MATEMATIIKAN OPPIMATERIAALEISTA JA OPPIMATERIAALITUTKIMUKSESTA

Tämän tutkimuksen kontekstissa oppimateriaaliksi luokitellaan oppilaan Matematiikkaa -oppikirjoissa ja Opettajan tienviitta -opettajan oppaissa oleva kirjoitetut/kuvitetut tai selkeästi oppilasta aktivoivat tehtävät. Oppilaan kirjoissa näihin lukeutuvat kirjoista löytyvät selkeät pituuden mittaamisen sekä sen avulla harjoiteltavat muiden matematiikan osa-alueiden kirjoihin painetut tehtävät. Opettajan oppaissa oppimateriaaleihin lukeutuvat samoihin sisältöihin liittyvät selkeästi, sanallisesti ja vaiheittain ilmaistut oppilaiden oppikirjatehtäviä tukevat tai kutakin sisältöä pohjustavat eri tavoin toiminnallistavat tehtävät. Lisäksi opettajan oppaissa oleva Minä mittaan -monistemateriaali luetaan tämän tutkimuksen aineistoksi.

4.1 Matematiikan oppimateriaaleista

Perkkilän, Joutsenlahden ja Sareniuksen (2018, 345–362) mukaan oppimateriaali tulisi nähdä opettajan työkaluna, jolla työskennellen oppilasta tuetaan oppimaan ja se voidaan jaotella kolmeen luokkaan:

- kirjallinen: oppikirja, tehtäväkirja, opettajan opas, lehti
- audiitiivinen tai visuaalinen: virtuaalinen oppimisympäristö, peli, äänite, elokuva, video
- muu tarkemmin määrittelemätön materiaali: esim. todellisuuden esine

Hyvä matematiikan oppimateriaali

Perkkilä ym. (2018, 361; 362) näkevät oppimateriaalin olevan opetuksessa käytettävä perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden pohjalta laadittu ja se sisältää nykyisen tiedon mukaan luotuja didaktisia ratkaisuja tarjoavia aineistoja. Matematiikan oppiaineen hierarkkinen luonne ohjaa oppimateriaalin rakennetta. Vaikka työtapoihin luetaan oppijakeskeisyys ja yhä lisääntyvässä määrin myös sähköiset materiaalit, on ajatus oppimateriaaleista kuitenkin pysyttytynyt samana. Oppimateriaaleissa olevat

esimerkit tulisi pyrkiä luomaan sellaisiksi, että niiden avulla oppilaat pystyisivät kehittämään matemaattista ajatteluaan ja malliratkaisuista tulisi löytyä vain “välttämättömimmät säännöt”, joilla ratkaisuun voitaisiin päästä. Tulevaisuuden oppikirjojen tulisi tarjota oppilaille mahdollisuuksia esittää ja perustella omia ratkaisujaan. Näiden avulla oppilaat pääsevät myös osoittamaan sekä proseduraalisen sujuvuuden että konseptuaalisen ymmärryksensä taitojaan.

Didaktisesti listausta lähestyttäessä Perkkilä ym. (2018, 362) tekivät huomion kertaustehtävien, ns. “sekalaskujen”, puuttumisesta useista tämän päivän oppimateriaaleissa. Jotta ymmärtävä matematiikka, sekä metakognitiiviset taidot pääsisivät kehittymään, tulisi oppilaille tarjota mahdollisuuksia liittää uusia käsitteitä ja proseduureja jo opittuun, sekä toisin päin, uusissa konteksteissa. Oppimateriaalin tulee tarjota erilaisille oppijoille sopivia materiaaleja siten, että kukin pystyy harjoittelemaan opeteltavaa sisältöä omalta tasoltaan. Tällöin huomioidaan niin tehtävien vaikeustaso kuin niiden mahdollisuudet lisätä kiinnostusta ja uteliaisuutta. Myös matematiikan eheyttäminen, integrointi sekä muihin oppiaineisiin kuin oppilaiden arkitilanteisiin on huomioitava ja tämä myös perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa tuodaan esille (Opetushallitus 2014, 129; 234).

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (Opetushallitus 2014, 128–130; 234–237) määrittelevät matematiikan opetuksen yhdeksi tärkeimmäksi tavoitteeksi mahdollistaa oppimisprosessi, jonka avulla kullakin oppijalla on oikeus matemaattisen ymmärtämisen kehittämiseen tasa-arvoisesti omalta tasoltaan. Tähän viittaavat myös Perkkilä ym. (2018). Edellä mainitut tutkijat tuovat esille myös Galperinin (1957) periaatteet oppimis-opetusprosessin vaiheittaisuuteen, sekä Brunerin (1966) oppimistapahtuman, joka perustuu tiedon jäsentämismalliin. Lisäksi esille tuodaan myös Vygotskin (1982) lähikehityksen vyöhykkeellä tapahtuva oppiminen. Matematiikan oppikirja saa oppimisprosessin eri vaiheissa erilaisia painotuksia. Oppilaalle tulee antaa mahdollisuus monikanavaiseseen tutkimusprosessiin oppimisen jokaisessa vaiheessa sekä oman ymmärryksensä että sosiaalisen vuorovaikutuksen kautta saatavan informaation avulla. Oppimisprosessit tapahtuvat sekä rinnakkaisina että samaan aikaan tapahtuvina. Oppimisen osa-alueiksi on eroteltu toiminnallinen, ikoninen ja symbolinen taso, joissa tapahtuvasta ajattelusta opettaja saa viestejä kielentämisen eli oppilaan puheen tai muun toiminnan avulla. (Perkkilä ym. 2018, 349–351.) Opettaja toimii ohjaajan roolissa kullakin edellä esitetyllä tasolla. Oppilaan ollessa siirtymässä abstraktion tielle, tarjoavat oppikirjat toimivia keinoja opittujen

taitojen varmistamiseen osana matematiikan monipuolista oppimisprosessia. Oppimista seuraavan ohjaajan tehtävänä on pyrkiä valitsemaan tehtäviä, jotka tukevat kunkin oppijan kulloistakin vaihetta lähikehityksen vyöhykkeellä (Vygotski 1982, 184–186) toimimisessa.

Perkkilän ym. mukaan (2018, 352) oppimista ja opetusta voidaan lähestyä määritelmälähtöisin, realistisin ja ongelmalähtöisin tavoin. Määritelmälähtöinen tapa lähestyy kutakin sisältöä teoriasta käsin, esimerkiksi käsitettä annetun mallin mukaisesti toistamalla. Seuraavaksi asiaa pyritään harjoittelemaan sanallisilla tehtävin. Tämä tapa vastaa edellä esille tuotua symbolista tasoa. Realistinen tapa pyrkii löytämään esimerkkejä, joita voidaan löytää oppilaiden omasta kokemusmaailmasta. Mitä enemmän sisällöistä opitaan ymmärtämään, sitä paremmin sekä ikoninen että symbolinen taso vahvistuvat. Oppilaat oppivat sisältöön liittyviä matemaattisia totuuksia, sekä taitoja soveltaa niitä arkielämän tilanteissaan. Tällä kohdin oppilaat liikkuvat toiminnallisella tasolla. Ongelmalähtöinen tapa mahdollistaa kokemuksen uuden tiedon tuottamisesta, arvioinnista ja soveltamisesta kahdensuuntaisesti, konkreetin ja abstraktin sekä toiminnallisen ja symbolisen tason välillä edestakaisin tapahtuvien siirtojen kautta.

4.2 Matematiikan oppimateriaalitutkimuksesta

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 asettaa selkeät raamit matematiikan opetukselle läpi peruskoulun ja ohjaa oppilaskeskeiseen, yksilölliseen itsenäiseen ja myös vuorovaikutteiseen oppimiseen (Opetushallitus 2014, 18). Mikäli oppikirja suunnitellaan pedagogisesti hyvin, mahdollistaa se omatoimista ajattelua ja johtopäätöksen tekemistä. Oppikirjan tulee olla matematiikan opiskeluun houkutteleva ja tarjota mahdollisuuksia kehittää oppilaan taitoja sekä aktiiviseen että luovaan matematiikan perustaitojen oppimiseen. Opittuja matemaattisen ajattelun taitoja tulee pystyä siirtämään oppilaan arkeen ja jokapäiväiseen elämään myös oppikirjojen tarjoamien harjoitusten ja oppimistilanteiden avulla. (Li, Chang & Ma 2009, 743.)

Oppimateriaalitutkimuksen kohteena on yhteen tai useampaan oppiaineeseen sidoksissa olevaa materiaali. Jo 1800-luvulta lähtien on tehty suomenkielisiä oppikirjoja ja alusta alkaen matematiikan oppikirjoihin kuului erikseen oppilaan ja

opettajan kirja sekä tuloskirja. Oppikirjan rakenne on myös säilynyt lähes ennallaan, sisältäen teoria-, malliesimerkki- ja harjoitusosuudet. Vuoden 1990 jälkeen oppikirjoja ei ole enää tarkastutettu ja hyväksytetty Kouluhallituksella. Tästä seuraa, että oppikirjojen sisällöstä ja niiden etenemisestä vastaavat nykyään kaupalliset kustantajat. Matematiikan oppikirjojen kohdalla erityisen tärkeää on keskeisten opetussisältöjen looginen etenemisjärjestys sekä matematiikkamotivaation lisäämiseen pyrkivän sisällön tarjoaminen. (Perkkilä ym. 2018, 345.) Wang ja Yang (2016, 8) tuovat esille, että oppikirjojen odotetaan olevan monimuotoisesti matematiikan eri oppisisältöjä esille tuovia. Niemen (2008, 85) mukaan eri kirjasarjojen välillä on kuitenkin eroavaisuuksia matematiikan sisältöalueiden esittämisjärjestyksessä ja niiden painotuksissa. Tutkimukset ovat osoittaneet, että opetuksessa käytettävällä oppikirjalla on yhteys oppimistuloksiin. Tällainen tulos saatiin myös vuonna 2000 Opetushallituksen tekemässä matematiikan oppimistulosarvioinnissa. Asiaa vahvistaa muun muassa Törnroosin väitöstutkimus (2004). Karvosen ym. (2017, 46–51) mukaan suomalainen oppimateriaalitutkimus on pyrkinyt määrittämään oppimateriaaleissa olevia puutteita ja heikkouksia. Myös niiden tarjoama arvomaailma, sekä pedagogiset ominaisuudet ovat olleet tutkimuksen kohteina. Oppimateriaalin luonne, rooli opetuksen suunnittelussa ja sen vaikutus oppimateriaalin oppisisältöjen jäsentämisessä tai oppituntien pedagogisten aktiviteettien suunnittelussa on jäänyt vaille tutkimusta.

Perkkilän ym. (2018) sekä Viholaisen, Partasen, Piironen, Asikaisen ja Hirvosen (2015) mukaan oppimateriaaleilla on vahva asema opetuksessa ja matematiikan oppimisympäristöissä on nähtävissä vahvaa oppikirjasidonnaisuutta. Perkkilä (1999) on lisensiaatintyössään tutkinut tehtävä- ja käsiterakenteita matematiikan oppikirjoissa ja opettajan oppaissa opetussuunnitelmaudistuksen nivelvaiheessa 1994. Tuossa tutkimuksessa tutkimuskohteena olivat *Laskutaito* - ja *Mieti ja laske* -sarjan oppikirjat. Mittaamisen kontekstissa tulokset osoittivat, että oppilaiden esiyymmärrystä/ennakkokäsityksiä ei oppikirjoissa kartoiteta ja mittakäsitteen määrittämiselle ja oppimiselle ei ole varattu riittävästi mahdollisuuksia. Myös mittaamisen tekniikan ja mittayksiköiden ymmärtämiselle ei ole materiaaleissa jätetty tilaa. Opetusmateriaalit eivät noudattaneet matematiikan oppimiselle ominaista konstruktivistisen oppimisen menetelmää. (Perkkilä 1999, 109–114.) Perkkilä on myös väitöskirjatutkimuksensa (2002) kvalitatiivisessa osuudessa käsitellyt matematiikan oppikirjoja ja opettajan oppaita, tarkastellen niiden käyttämistä ja merkityksellisyyttä

opetusta ohjaavana välineenä. Tarkastelun kohteena oli myös se, miten oppikirjat olisivatkin vain yhtenä työvälineenä muiden työvälineiden joukossa. Tutkimuksen tulokset osoittivat, että matematiikan oppikirja oli säilyttänyt hyvin perinteisen ja keskeisen roolin alkuopetuksessa ja ne koettiin opetussuunnitelmaa toteuttaviksi (Perkkilä 2002, 172). Tainio, Karvonen ja Routarinne (2014, 201) tuovat esille, että aineenopettaja käyttää oppikirjaa ja työkirjaa kriittisesti ja suunnittelua ei ohjaa opettajan oppaan materiaali. Luokanopettaja taas etenee oppikirjassa olevan järjestyksen mukaisesti opetusta suunnitellessaan ja toteuttaessaan.

Karvonen ym. (2017, 39–40) kirjoittavat, että jo vuodesta 1963 alkaen on tuotu esille sitä, että oppilaan omien havaintojen ja omatoimisuuden tulisi olla merkittävänä osana oppilaan oppimista ja opetusta. Edellisestä huolimatta Viholaisen ym. (2015, 174–175; ks. Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang 2002, 2–18) tutkimuksen mukaan oppikirjat koetaan opetussuunnitelman ilmentäjinä ja niiden mukaan edetään. Opettajat myös ilmensivät vahvaa sitoutumista oppikirjoihin ja käyttivät niitä ohjeistuksena pedagogisille ratkaisuilleen koskien niiden tarjoamaa sisältöä. Myös Krzywacki, Pehkonen ja Laine (2012, 8–9) ovat vahvistaneet Niemen (2004) esittämää tutkimustulosta, jonka mukaan 6. luokkien opettajat kokevat oppikirjan tarjoavan loogisuudellaan ja selkeydellään paremman pohjan oppituntien ja -materiaalien suunnittelulle kuin kulloinkin paikallinen opetussuunnitelma. Kirjojen katsotaan myös vähentävän opettajien työtaakkaa, koska ne tarjoavat valmiita ja järkeviä struktuureja oppitunteja varten sekä riittävästi tehtäviä oppilaille. Lepikin, Grevholmin ja Viholaisen (2015, 130) ja Perkkilän ym. (2018, 345–349) mukaan matematiikan oppikirjan tuleekin tarjota sellaisia materiaaleja, joilla voitaisiin syventyä erilaisia sisältöjä opettavien, selventävien, esimerkein tarkentavien tai ongelmanratkaisuihin kannustavien tehtävien avulla. Opettajan tulee määrittää, mikä kulloinkin on oppikirjan osuus kustakin oppikokonaisuudesta. Käytettäväksi voi ohjautua koko kirjan tarjoama potentiaali tai vain siitä valitut tietyt osat.

Lähestyttäessä oppimateriaaleja pedagogisina välineinä, voidaan oppimateriaaleista erottaa tietyt tekstin, kuvituksen ja tehtävien ominaisuudet, joilla pyritään tukemaan sisällön oppimista sekä edistämään syväoppimista. Tälläkin kohdin opettajan oppaat ovat jääneet valtaosin tutkimuksen ulkopuolelle. Tutkimusta kaivataan, sillä toiminnalliset, yhteistoiminnalliset ja tutkimukselliset työtavat, sekä konkreettisten apuvälineiden käyttämiseen ja oppimateriaalin soveltamiseen liittyvät ohjeet ja sisällöt löytyvät usein juuri opettajan oppaista. (Karvonen ym. 2017, 48.)

Boaler (1999, 268–270) viittaa Youngin (1993) ajatukseen siitä, että opittavilla materiaaleilla tulisi olla yhteys tai merkitys koulussa vietetyn ajan ulkopuolisiin tilanteisiin, ongelmanratkaisuihin ja tavoitteiden asetteluihin. Eron tekemisen relevantin ja irrelevantin informaation välillä on myös toivottu kehittyvän. Oppilaat kokevat kuitenkin opinnoissa läpikäydyt asiat irrallisina heidän omasta arjestaan sekä matematiikan täysin merkityksettömäksi oppiaineeksi.

Opetussuunnitelmaan liittyvää Pro gradu- tutkimusta matematiikan oppikirjojen kontekstissa on tehnyt mm. Saros (2018). Tutkimukseni tarkoituksena on tarkastella yhden matematiikan osa-alueen sisällön etenemistä. Lähestyn materiaalia sisältöjen esittämisen sekä pedagogisen ja didaktisen lähestymistavan kontekstissa. Heinosen (2005, 128) mukaan oppilaita innostava ja mihinkään yhteen tiettyyn metodiin sitomaton opetusmateriaali on sekä opettajien arvostama että erilaisia opetuksessa käytettäviä opetusmuotoja mahdollistava. Edellisiin lasketaan mukaan opettajajohtoinen, oppilaskeskeinen ja oppimaan oppimisen taitoja kehittävä opetusmenetelmä. Uusia ideoita antavan opetusmateriaalin tasokkuus, helppokäyttöisyys, materiaalirikkaus, sekä virikkeisyys katsottiin opetusta helpottaviksi.

Pohdittaessa oppimateriaalin vaikutusta opetusmenetelmiin, Heinosen (2005, 193) mukaan tutkimuksen kohteena ollut opettajaryhmä jakaantui kahteen joukkoon. Suurempaan joukkoon sijoittuvat ne opettajat, jotka ajattelivat oppimateriaalin vaikuttavan opetusmenetelmiin ja myös innostavan uusien opetusmenetelmien käyttämiseen. Loput ajattelivat, että oppimateriaalilla ei ole suurtakaan merkitystä opetusmenetelmien valinnan tai käyttöönoton kohdalla. Perkkilä (2002, 155) tuo esille huolestuttavan seikan. Hänen tutkimuksensa mukaan matematiikan oppikirja saattaa olla myös kuin kahle, johon perustuvia suorituksia ja vastauksia opettaja odottaa oppilailtaan, tiedostamatta oppilaiden vastausten oikeellisuutta muilla keinoin.

5 TUTKIMUSTEHTÄVÄT

Tämä tutkimus on oppikirjatutkimus, jolla pyritään selvittämään, millaisin tehtävin ja toteutuksin 1.–4.-luokan oppilaan harjoittelevat ja oppivat pituuden mittaamiseen liittyviä sisältöjä ja millaisiin pedagogisiin ja didaktisiin valintoihin opettajan oppaat opettajaa ohjaavat Varga–Neményi -menetelmän 1.–4.-luokan oppilaan Matematiikkaa -oppikirjoissa ja Opettajan tienviitta -opettajan oppaissa. Pysin tutkimuksellani luomaan selkeän kuvan tutkimastani sisällöstä (Tuomi & Sarajärvi 2017). Tutkittavat materiaalit on saatu Varga-Neményi -yhdistyksen puheenjohtajalta, toiminnanjohtaja Anni Lampiselta ja häneltä on myös saatu lupa käyttää kuvallista aineistoa tutkimuksen raportoinnissa.

Matematiikan osaaminen rakentuu siten, että matematiikan osa-alueiden sisällöt, pituuden mittaaminen mukaan luettuna, linkittyvät vahvasti toisiinsa. Tutkimus pyrkii myös tämän näyttäytymisen aineistossa tuomaan esille. Matematiikan ymmärtämistä ja oppimista vahvistaa sekä sisäinen että ympäristön kanssa käytävä keskustelu, matematiikan sisältöjen ja matemaattisen ajattelun kielentäminen vuorovaikutuksellisen ja kokemuksellisen oppimisen yhteydessä. Tämän esiintyminen aineistossa on tarkoituksena myös ilmentää. Tutkimuskysymykset muokkaantuivat tutkimuksen aikana ja ovat tarkentuneet kahdeksi keskeiseksi kysymykseksi.

Tutkimuskysymykset ovat:

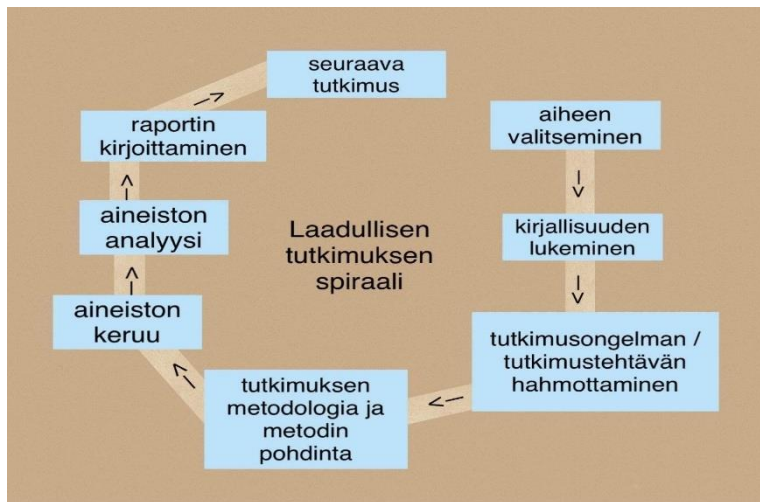
1. Millaisin lähestymistavoin (realistinen, ongelmakeskeinen, määritelmälähtöinen) pituuden mittaamista lähestytään 1.–4. -luokkien *Matematiikkaa* -sarjan oppikirjoissa ja *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaissa?
2. Millaisiin matematiikan osa-alueisiin pituuden mittaamisen osa-alueet yhdistyvät 1.–4. -luokkien *Matematiikkaa* -sarjan oppikirjoissa ja *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaissa?
3. Millaisia taitoja pituuden mittaamisen yhteydessä harjoitellaan 1.–4.-luokkien *Matematiikkaa* -sarjan oppikirjoissa ja *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaissa?

6 TUTKIMUSMENETELMÄ

Oppimateriaalitutkimuksissa on käytetty usein tutkimusmenetelmänä joko laadullista tai määrällistä sisällönanalyysia. Tutkimukseni menetelmäksi valikoitui laadullinen sisällönanalyysi. Laadullinen tutkimus kuljettaa tutkijaa eteenpäin prosessissaan siten, että luottaa omiin havaintoihinsa ja pyrkii paljastamaan aineistosta odottamattomia seikkoja. Tutkittavia tapauksia tulee käsitellä ja tulkita ainutlaatuisina ja tutkimuksen tavoitteena on ymmärtää tutkimuskohdetta. (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2007, 160–176.) Tutkimuksessani pyrinkin laadullisen sisällönanalyysin keinoin ja hermeneuttisen lähestymistavan avulla tuomaan esille ja ymmärtämään tutkimustehtävieni ohjaamana pituuden mittaamiseen liittyviä asioita Varga-Neményi -menetelmän 1.–4. -luokan oppilaan *Matematiikkaa* -oppikirjoissa ja *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaissa.

6.1 Laadullinen tutkimusprosessi

Toimivan tutkimuksen lähtökohta on jokin määritelty merkitys, joka ohjaa, antaa syyä havainnoida ja luoda tuosta havainnointityöstä koonti, raportti. Tutkimuskysymys määrittelee analysointitavan ja tutkimustyylin (Elo, Kääriäinen, Kanste, ... & Kyngäs 2014, 1). Tutkijan tulee myös huolehtia siitä, että tutkimusraportti vastaa juuri siihen, mihin tutkimustehtävä tai tutkimuskysymys on asetettu (Tuomi & Sarajärvi 2017). Seuraavassa kuvassa 7 on esitetty laadullisen tutkimuksen etenemisprosessi aiheenvalinnasta aina mahdolliseen seuraavaan tutkimukseen asti. Esittelen seuraavana tuon spiraalin etenemistä laadullisessa tutkimuksessa tutkimukseni kontekstissa.



Kuva 7. Laadullisen tutkimuksen spiraali Tuomen ja Sarajärven (2017) mukaan

Tuomen ja Sarajärven (2017) mukaan laadullinen tutkimus on kokonaisvaltaista tiedonhankintaa, jossa aineiston kerääminen ja analyysi ovat sidoksissa toisiinsa ja tähän myös yllä oleva kuva 7 viittaa. Tässä tutkimuksessa kvalitatiivista tutkimusta tehdään kielen piirteitä käsitellen sisällönanalyysin avulla, kirjoitettua sisältöä analysoiden. Tutkimuksella pyritään reflektoiden löytämään kielestä säännönmukaisuuksia ja ymmärtämään tekstin tai toiminnan merkitystä. Tuomi ja Sarajärvi (2017) tuovat esille laadullisen tutkimuksen kuvauksen, jonka mukaan tutkijan tulee päättää, mikä aineistossa kiinnostaa ja tehdä vahva päätös tutkimuksen kohteesta. Tässä tutkimuksessa kiinnostuksen kohde oli täysin selkeä, mutta sen sijaan kategorisointi oli tutkimuksen alussa täysin avoin. Tutkimuksen alkuperäiset tutkimuskysymykset sekä myös materiaaliin lähestymistapa kehittyivät tutkimuksen aikana. Edelliseen viittaavat myös Tuomi ja Sarajärvi (2017) kirjoittaessaan, että tutkimussuunnitelma saattaa laajentua ja saada uusia luokituksia tutkimuksen edetessä. Tutkimuksen runko voi olla joko strukturoitu tai jopa hyvin väljä. Olin luonut tutkimuksen alussa mahdollisia kategorioita ja luokituksia, mutta tutkimuksen aikana tekemieni havaintojen pohjalta kategoriat täsmentyivät ja jopa muuttuivat toisenlaisin painotuksin.

Kuten Tuomi ja Sarajärvi (2017) kuvailevat, tutkimus voi edetessään johtaa siihen, että tutkija kohdentaa kiinnostuksensa alkuperäisten tarkasteltaviksi valittujen kohteiden lisäksi tai sijaan muihin esille tulleisiin kiinnostuksen kohteisiin. Tutkimuksesta tulee löytää tutkimuksellisia ratkaisuja ohjaavat ideat, jotta tutkimus

pystyttäisiin rajaamaan ja toteuttamaan. Tällä kohdin on myönnettävä, että tutkimukseni rajaamisen kanssa tein kohtalaisen suuria pohdintoja. Etenkin teoriataustaa Varga-Neményi -menetelmän kontekstissa kartuttaessani huomasin, että menetelmä houkuttaisi ulottamaan tutkailua hyvin laajalle alueelle, etenkin esimerkiksi mielekkään matematiikan tai matematiikan motivaation kontekstissa. Tutkimukseni on ollut oppimisprosessi (vrt. Kiviniemi 2018), jonka aikana olen pyrkinyt mahdollisimman laajasti tutustumaan ja lisäämään tietoa tutkimuskohteestani sekä siihen liittyvistä muista sisällöistä tutkimukseni kontekstissa. Huomasin keränneeni paljon sellaista aineistoa, jolle en lopulta löytänytkaan tarvetta, mutta katson, että tuon ns. ylimääräisen materiaalin avulla itse tutkimuksen kohteena ollut sisältö tarkentui. Kokosin aineistoa tämän kokemuksen avulla ja pääsin syventämään aineistoa teorian kehittämisen suunnassa. Näin ollen tehty työ tuki tutkimustyötäni.

6.2 Laadullinen sisällönanalyysi tutkimuksessani

Olen valinnut tutkimukseni analyysimenetelmäksi laadullisen, kvalitatiivisen sisällönanalyysin, jossa korostuvat sisällölliset, laadulliset, rakenteelliset ja/tai muodolliset merkitykset (Seitamaa-Hakkarainen 2020). Tuomen ja Sarajärven (2017) mukaan tätä analyysimenetelmää voidaan käyttää laadullisen tutkimuksen kaikissa perinteissä sekä yksittäisenä metodina että väljempänä teoreettisena kehyksenä, jolloin se on liitettävissä erilaisiin analyysikokonaisuuksiin. Elo ym. (2014, 1) kirjoittavat sisällönanalyysin pyrkivän ilmiön systemaattiseen ja objektiiviseen kuvaamiseen sekä sen määrittämiseen. Tämä analyysitapa on kasvatuksen, opetuksen, psykologian, sosiologian, politiikan, kirjallisuuden ja terveydenalan tutkimuksissa käytetty metodi, joka keskittyy kielen erityispiirteisiin ja luonteenomaisuuksiin (Seitamaa-Hakkarainen 2020). Tutkimukseni tapahtuu kasvatuksen ja opetuksen kontekstissa. Pohdittaessa Varga-Neményi -menetelmän metodeja, voidaan nähdä, että sen tavoitteena matematiikan opetuksen ja oppimisen lisäksi on olla tukemassa ja kasvattamassa oppijasta itseensä ja omaan pystyvyyteensä luottavaa henkilöä.

Sisällönanalyysin ensimmäinen vaihe onkin tutkimustehtävän ja tutkimuskysymysten asettaminen, joiden jälkeen päästään valitsemaan tutkittava materiaali, joka tulee pystyä sanoittamaan tarkasti (Seitamaa-Hakkarainen 2020). Juuti ja Puusa (2020) tuovat esille, että sisällönanalyysillä tehdyissä tutkimuksissa ja

niissä käytetyissä lähestymistavoissa on kuitenkin eroja sen mukaan, minkä edellä mainitun tieteenalan tutkimusta kulloinkin tehdään. Pyrin sisällönanalyysin avulla luomaan selkeän, tiiviin, mielekkään ja yhtenäisen tietokokonaisuuden (Tuomi & Sarajärvi 2017), pyrkien jatkuvaan reflektointiin, säännönmukaisuuksien etsimiseen ja tekstin sekä toiminnan merkitysten ymmärtämiseen löytääkseni tutkimuksen teemat (Hirsjärvi ym. 1997, 161–162).

Sisällönanalyysi keskittyy tutkimaan sanankäyttöä ja siihen liittyviä sisällöllisiä merkityksiä (Hsieh & Shannon 2005, 1285), lähestyen tutkittavaa aineistoa konventionaalisesti, tarkan kohdennetusti ja systemaattisesti (Assarroudi ym. 2018, 42–43). Tutkimustehtävästä riippuen analyysiyksiköksi voidaan valita esimerkiksi sana, sanayhdistelmä, lause, lausuma, ajatuskokonaisuus, kirjain, sivujen määrä, pääotsikoiden koko, ym. Tutkittava materiaali jaetaan niissä olevan informaation mukaan auditiivisiin, visuaalisiin ja kirjallisiin dokumentteihin, joista tutkimukseni kohdistuu visuaalisiin ja kirjallisiin dokumentteihin. (Seitamaa-Hakkarainen 2020; Tuomi & Sarajärvi 2017; Elo 2014, 1; Assarroudi ym. 2018, 42–43; Hsieh & Shannon 2005, 1278.)

Lopuksi aineisto raportoidaan (Schreier 2014, 176; Seitamaa-Hakkarainen 2020). Sisällönanalyysin avulla tehtävä analyysi ja synteesi raportoidaan kuvaten käsitteellisiä, uusia tieteellisiä johtopäätöksiä sisältäviä kuvauksia ja tutkimuksen etenemistä, aineiston teoretisointia ja analyysia. (Salo 2015, 184; Tuomi & Sarajärvi 2017; Seitamaa-Hakkarainen 2020). Assarroudin ym. (2018, 48–51) mukaan jokainen tutkimusaskelma tulee raportoida. Koska tutkimustehtävät voivat muovautua tutkimuksen aikana, saatetaan niitäkin muuttaa tutkimuksen kuluessa (Tuomi & Sarajärvi 2017). Tutkimusraporttini kuvaa jokaista tutkimukseni vaihetta pohdintoineen.

Kvalitatiivinen sisällönanalyysi voidaan myös kvantifioida. Vaikka tutkimukseni eteni kvalitatiivisin keinoin, on tuloksista koottu prosenttimuotoiset koonnit tuloksia selventämään. Tuomi ja Sarajärvi (2017) ja Schreier (2014, 180) tuovat vielä esille, että pelkästään koodauskehys voi toisinaan olla riittävä tutkimuksen tulokseksi ja tällä tavalla tutkimuksen tulokset ilmaistaan kehyksessä oleva sisällön, kertovan tekstin tai tekstillisten matriisien, sitaattien tai suorien otosten avulla. Tutkimuksessani tulokset tuodaan esille myös edellisten avulla. Näin päästään joustavasti tekemään rinnastuksia ja havainnollistamisia. Tutkimuksen löydöksiä, dataa ja kategorioita on mahdollista käyttää myöhemmissä tutkimuksissa.

6.3 Laadullisen sisällönanalyysin analyysitavat

Vaikka laadullinen analyysi määritelläänkin usein tapahtuvan joko aineistolähtöisesti eli induktiivisesti (yksittäisestä yleiseen) tai teoriasidonnaisesti/teoriaohjaavasti eli deduktiivisesti (yleisestä yksittäiseen), tulee mukaan ottaa myös teorialähtöisen eli abduktiivisen päättelyn teoria. Jälkimmäisessä teoria muodostuu havaintoja tekemällä jonkin johtoajatuksen tai johtolangan pohjalta, jolloin tulokset sekä teoria muodostetaan aineistoon ja teoreettiseen viitekehykseen peilaamalla. (Tuomi & Sarajärvi 2017; Salo 2015, 171–172.) Reichertz (2014, 123) tuo lisäksi esille, että induktio, deduktio ja abduktio ovat loogista päättelyä ja observointia hyödyntäviä tutkimusmenetelmiä, joiden avulla voidaan sekä yhdistää että luoda uusia ideoita. Tutkijan tulee saada lukija luottamaan siihen, että tutkimus on uskottava ja oletuksena voitaisiin pitää ajatusta siitä, että abduktiivista, lopputuloksesta lähtevää päättelyä käytetään useammin kuin myönnetäänkään (Tuomi & Sarajärvi 2017).

Abduktiivinen sisällönanalyysi

Reichertzin (2014) mukaan deduktiivinen totuuden etsintä tarjoaa vain vähän uutta totuutta. Sitä johdattaa jo olemassa oleva teoria ja sidotaan siihen sekä jo aiemmin tehtyihin tutkimuksiin, joita uusi tutkimus kehittää. Induktiivinen sisällönanalyysi taas tekee jo aiemmin tutkittuihin materiaaleihin laajennettuja tai yleistäviä, uusia ja säännönmukaisuuteen pyrkiviä kombinaatioita. Vaikka tutkimus nojaakin jo olemassa olevaan aineistoon, aiemmat havainnot, tiedot ja tutkimukset eivät kuitenkaan määritä analyysin toteuttamistapaa tai lopputulosta. (Reichertz 2014, 128–129; Assarroudi ym. 2018, 46–48.)

Tutkimukseni toteutui teorialähtöisen eli abduktiivisen sisällönanalyysin avulla. Aineiston osittamisessa noudatetaan kielen ulkoisia piirteitä ja merkityksiä (Seitamaa-Hakkarainen 2020) ja analysoidaan sanojen ja sisällön esiintyvyyttä aineistossa. (Hsieh & Shannon 2005, 1284–1286). Tuomi ja Sarajärvi (2017) kuvailevat sisällönanalyysin alkuvaiheita siten, että aineisto jaetaan ensin osiin, jonka jälkeen se käsitteellistetään ja kootaan uudelleenlaiseksi loogiseksi kokonaisuudeksi. Aineistoni asetti minut pohtimaan esiin tulleita varsinaisen pituuden mittaamisen alueen ulkopuolella olevia matematiikan sisältöjä ja sitä, millaisen aseman aineistossa niille

antaisin. Valitun koodauksen usea testaaminen, kehyksen arvioiminen ja muokkaaminen tuli ilmeiseksi tutkimukseni aikana. Reichertz (2014, 127) esittääkin, että abduktiota tehdessään tutkija ei käytäkään esioletuksia tai valmiita teoriarakenteita, vaan odottaa aineistoa avaamaan oviaan, kutsumaan tutkijaa lähestymään aineistoa uusin ja kyseiseen tutkimukseen sopivin tulkintatavoin, joiden avulla merkityksellisiä johtopäätöksiä voidaan tehdä.

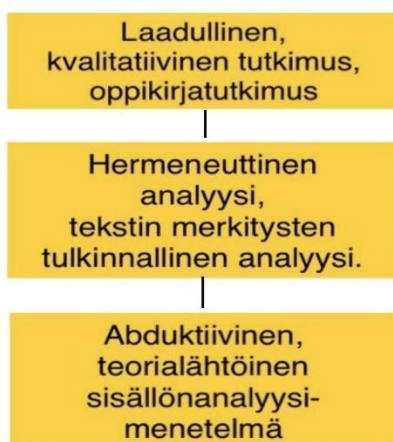
Sisältöluokkien määrittämiseen vaikuttavat tutkimuksen runko tai sen luonne ja lähtökohdat. Pilkoin tutkimusmateriaalini osiin ja määrittelin kullekin osalle omat kehyskategoriat. Kategoriointiin vaikutti myös teoria (Schreier 2014, 176; Schreier, Stamann, Janssen, Dahl & Whittal 2019, 5.) Tutkimukseni kohdalla teoreettinen viitekehys on tutkimuskysymysten pohjalla ja lisäksi myös aineisto ja sen taustalla oleva menetelmä toimii tulosten ja teorian muodostuksen runkona. Schreierin (2014, 170–171) sekä Assaroudin ym. (2018, 43) mukaisesti aineistoni abduktiivinen lähestymistapa mahdollisti joustavan, systemaattisen ja dataa tiivistävän analysointitavan, joka selkeytti tutkimuksen aikana koodausta ja kategorisointia. Edelliseen liittyen, Reichertzin (2014, 125–127) kuvaus siitä, että tutkimuksessa käytettävät älylliset rakennuspalikat houkuttelevat tutkijaa lähestymään omaa ajatusprosessiaan ja sen logiikkaa ja samalla välttämään joutumista oman neroutensa vangiksi, on houkuttava. Tutkija pyrkii ottamaan selkoa asioista, jotka eivät noudattaisikaan tuttua, jo aiemmin tutkittua kaavaa. Tällöin tutkijalle avautuu mahdollisuus olla löytämässä uusia tapoja lähestyä tutkimaansa aihetta. Reichertz (2014) pohtii myös sitä, millaisia mahdollisuuksia tutkijalla on luoda järjestystä tutkimuksen informaatioon ja miten tuo saadaan liitettyä yhteen sekä jo olemassa olevaan että vielä tuntemattomaan teoriaan.

Kuten Hsieh ja Shannon (2005, 1278–1280) ja Salo (2015, 177) kirjoittavat, jaoin Varga-Neményi -menetelmän mukaisen oppimateriaaliaineiston lukukausittaisiin isompiin yksiköihin, jotka tutkin yksitellen. Tutustumista tein useammalla lähestymis- ja tiedonkoontitavalla, jotta löytäisin relevantit kategoriat ja niiden alle kuuluvat koodit. Pääanalyysivaiheen ensimmäisenä tehtävänä kävin koko materiaalin läpi kolmeen eri kertaan, jotta edellinen toteutuisi. Katson kaikki sisällöt löytäneeni ja niiden pohjalta pystyin luomaan relevantit koodausluokat ja kategoriat (Schreier 2014, 180; Salo 2015, 177–178; Hsieh & Shannon 2005, 1279–1280; Assaroudi ym. 2018, 46; Seitamaa-Hakkarainen 2020; Tuomi & Sarajärvi 2017). Tutkimus eteni syklisesti ja palasin aineistoon usein sekä tein analyysia jo aineistoa kerätessäni (Salo 2015, 181–

182; Seitamaa-Hakkarainen 2020; Schreier 2014, 176–178) ja huomasi löytäväni uusia aihepiirejä, kuten Hsieh ja Shannon (2005, 1278–1280) sekä Salo (2015, 177) tuovat esille. Etenkin pituuden mittaamiseen integroituvien matematiikan muiden osa-alueiden lukumäärä ja muoto näyttäytyi vahvasti aineistossa. Koodattuani materiaalin, pysyttäydyin koodauskehyksessäni, sillä katsoin sen olevan riittävän luotettava ja pitävä (Schreier 2014, 179; Seitamaa-Hakkarainen 2020; Tuomi & Sarajärvi 2017). Tuomi ja Sarajärven (2017; ks. Schreier 2014, 174–176; Assarroudi ym. 2018, 47.) mukaan laadullinen tutkimus tarjoaa useita erilaisia esiin tulevia asioita, jotka kiinnostavuutensa vuoksi saattavat hämmentää aloittelevaa tutkijaa. Tutkijan tulee kuitenkin rajata ilmiö, luoda systemaattinen kuva, josta pyrkii löytämään kaiken oleellisen tuloksissaan ja johtopäätöksissään. Sekä konsepti että data ohjaavat koodausta ja kategorisointia, vaikka ajatellaan, että datan tulisi ainakin osittain määrittellä asetettavia kategorioita (Schreier 2014, 171). Tutkimusaineistoni houkutti valitsemaan sekä pää- että alakategorioita enemmän, mutta tuolloin tutkimukseni olisi laajentunut koskemaan sisältöjä, joita tämän oppikirjatutkimuksen kohdalla ei olisi aiheellista käsitellä.

6.4 Hermeneuttisesta otteesta tutkimuksessani

Seuraavassa kuvassa 8 tuon esille tutkimukseni tutkimusmenetelmät ja keskeiset tutkimukselliset käsitteet. Olen edellä kuvaillut laadullisen tutkimuksen ja sisällönanalyysin menetelmiin liittyviä sisältöjä ja seuraavana esittelen hermeneuttisen tutkimusotteen, jonka avulla pyrin tekstin tulkintaan ja merkitysten löytämiseen.

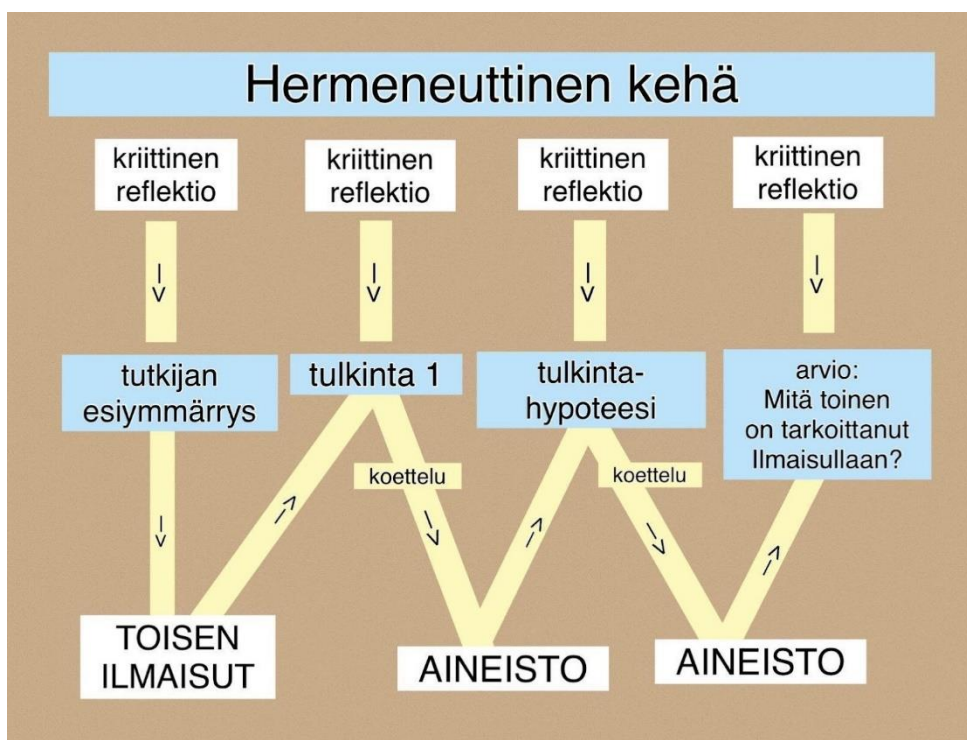


Kuva 8. Tutkimuksen strategiset valinnat ja käsitteet

Laineen (2018) mukaan hermeneuttisesta tutkimuksesta on haastava esittää tarkkaa kuvausta, sillä tutkimus muotoutuu tilannekohtaisesti. Tuomi ja Sarajärvi (2017) kertovat hermeneutiikan yhdistävän monia eri suuntauksia ja siitä on pyritty saamaan ns. yleinen hermeneutiikka, joka tarkastelisi ehtoja, joilla ymmärtäminen mahdollistuisi. Laineen (2018) näkemyksen mukaisesti, pyrin hermeneuttisen otteen avulla ymmärtämään ja tulkitsemaan aineiston sisältöä ja refleктоimaan, tematisoimaan ja käsitteellistämään sitä, peilaten sitä myös esiymmärrykseen aiheesta. Gadamerin (2004, 134) mukaan hermeneutiikka on taitoa saada jo aiemmin sanottu tai kirjoitettu puhumaan uudelleen. Ilmaisusta pyritään aineiston kanssa käytävän dialogin avulla löytämään merkityksiä, sekä niistä nousevista tulkinnoista sääntöjä, jotka mahdollistavat pohdintaa ilmaisusta luotavista vääristä tulkinnoista ja niiden merkityksistä (Laine 2018). Tutkimuksella pyritään tekemään jo tutut ja kenties itsestäänselvyyksiksi koetut sisällöt näkyviksi. Tutkimukseni kohdalla pituuden mittaamiseen, sen opetukseen ja oppimiseen liittyvä perustietämys on tutkimukseni taustalla. Samoin Varga-Neményi -menetelmän perusteet ja painotukset ohjasivat lähestymistapaani. Laineen (2018) esille tuoman mukaisesti pyrin siihen, että en tulkitsisi tarkasteltavaa sisältöä kuitenkaan omien ennakkokäsitysteni mukaisesti. Gadamer (2004, 34–35) pyytää myös huomioimaan, että tutkijan tulee keskittyä merkityksellisiin sisältöihin ja oikeiden ennakkoarvioiden vahvistamiseen. Pyrin huolehtimaan siitä, että antaisin tekstin puhua puolestaan ja tällöin hermeneuttinen tietoisuuteni pääsisi huomioimaan mahdollisen tekstin taakse jäävän informaation. Hermeneuttisen lähestymistavan valintaan vaikutti myös se, että voim näin tehdä omia tulkintojani, keskustella aineistoni kanssa sillä odotuksella, että voisin Määttäsen (1995, 228) ohjeistuksen mukaan pystyä tekemään tulkintaa ja aineiston kanssa käytävää vuoropuhelua läpi koko tutkimusprosessin.

Kajander (2013, 72) tuo esille Ricoeurin (2000) ajatuksen siitä, että tulkinnan prosessia voidaan kuvata dialektisena prosessina selittämisen ja ymmärtämisen välillä. Tutkimuskohde eli tutkimukseni kontekstissa teksti avautuu tutkijalle pieninä otteina, ehkä jopa arvauksina, joille myöhemmin on mahdollista antaa selkeitä nimityksiä ja sisältöjä tutkijan ymmärryksen lisääntyessä. Teksti tuo esille tietyn määrän tulkintoja, joiden joukosta lopulta on mahdollista löytää tulkinta, joka voidaan nähdä todennäköisemmäksi kuin joku toinen tulkinta. Tämän johdosta voidaan sanoa, että hermeneuttinen tulkinta voidaan myös tieteellisesti kumota. Tulkintojen tulee

kuitenkin olla läpinäkyviä ja tutkimusraportin tulee edetä siten, että lukijan on mahdollista seurata tehtyjen tulkintojen kehittymistä alusta alkaen. Raportin tulee ilmentää tutkimuksen etenemistä siten, että tehdyistä oletuksista alkanut prosessi kuvataan portaittain analyysiin, asetetuista hypoteeseista saavutettuihin lopputuloksiin asti. Kuten Laine (2018) kirjoittaa, aineistoni pohjalta syntyi tulkintaehdotuksia, hypoteeseja ja jokainen uusi aineistoon syventyminen koetteli aiemmin esille tulleita tulkintaehdotuksia. Tutkimuskysymykseni muovautui tutkimuksen aikana. Tutkimuksessani ei ollut löydettävissä yhtä vastausta tutkimuskysymykseeni vaan vastaus muodostui laajemmaksi kokonaisuudeksi. Pyrin saavuttamaan todennäköisimmän ja uskottavimman tavan tulkita aineistoni tekstiä. Liikuin nk. hermeneuttisella kehällä, palatessani yhä uudelleen käsittelemään jo aiemmin läpikäymääni sisältöä. Hermeneuttista kehää kuvataan kuvassa 9.



Kuva 9. Hermeneuttinen kehä Laineen (2018) mukaan

Kehällä liikutaan eri vaiheissa kriittisesti kutakin vaihetta ja sisältöä reflektoiden. Koska tutkimaani aineistoa ei ole pituuden mittaamisen kontekstissa aiemmin tutkittu, tutkimukseni toteutui oman esiymmärrykseni ohjaamana, mutta tukeutuen

teoriataustasta esille tulleisiin sisältöihin. Pysin refleктоimaan aineistosta löytyneitä sisältöjä, siihen usein palaten ja erilaisin painotuksin analysoiden. Jatkoisin tulkintaa, kunnes koin oikean tulkinnan löytyneen, sekä tutkimuskysymyksen kontekstissa että tutkimuksen lopullisen tulkinnan kohdalla. Tulkitsin aineistoa laadullisen lähestymistavan kautta, mutta lopuksi kokosin määrälliseen muotoon aineistosta tekemäni löydökset selventääkseni oppikirjojen ja opettajanoppaiden oppilaille tarjoamaa oppimista edistävää ja tukevaa materiaalia.

7 TUTKIMUSAINEISTO JA ANALYYSIN KULKU

Tutkimusaineistoni on Varga-Neményi-menetelmän 1.–4.-luokan oppilaan *Matematiikkaa* -oppikirjat (8 kpl) ja *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaat (8 kpl). Tutkin em. kirjoista millaisin menetelmin pituuden mittaamisen taitoja harjoitellaan ja kartutetaan Varga-Neményi -menetelmässä 1.–4.-luokan oppilaan *Matematiikkaa* -oppikirjojen ja *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaiden mukaisesti. Käytän tutkimusraportissani aineistostani siihen viitatessani nimityksiä *Matematiikkaa (1a–4b)* ja *Opettajan tienviitta (1a–4b)* ja lähdetietoihin kyseiset aineistot viitetietoineen on merkitty *Oppikirjamateriaalit* -osioon. Kirjat etenevät sekä oppilaan että opettajan materiaalien kohdalla alkaen 1. vuosiluokan *1a*-materiaalista ja päättyen *4b*-materiaaliin.

7.1 Tutkimusaineiston esittely

Reichertzin (2014, 126) mukaan abduktio alkaa siitä, kun henkilö kohtaa aineistossaan empiriaa, olemassa olevaa dataa ja päättyy, kun aineistosta on muodostettu ymmärrys ja siitä osataan tehdä oletuksia. Tutkimukseni pyrkii järjestämään uudelleen tunnettua ja jo olemassa olevaa informaatiota sekä käsittelemään aineistosta nousevia uusia ideoita. Kummassakin tapauksessa tulos tarkentaa tai selventää jo tunnettua sisältöä. Vaikka abduktion kohdalla löydöksille pyritään löytämään tukea olemassa olevasta teoriasta, pyritään asialle, jolla ei vielä olisi olemassa tiettyä teoriaa taustallaan, löytämään jokin ymmärtämistä ja sanoittamista tukeva teoria.

Pohdittaessa jo aiemmin esittelemiäni deduktiivista ja induktiivista analyysimuotoja tutkimukseni kontekstissa, on mainittava, että tutkimusta Varga–Neményi -menetelmästä Suomessa on jonkin verran tehty, mutta sen määrä ei vielä ole suuri. Näistä, pääosin pro gradu -tutkimuksista, on koottu luettelo Varga-Neményi -yhdistyksen (Varga-Neményi ry 2021) sivuille. Tutkimukseni sisältöön viittaavaa tutkimusta ei ole löydettävissä, vaikka geometrian (mm. Anttila & Eskelinen 2010) ja lukukäsitteen (mm. Kuokkanen 2016), kymmenjärjestelmän (mm. Hakala & Salminen 2021) tai murtolukukäsitteen (mm. Mäki & Vihelä 2019) kontekstissa tutkimusta onkin tehty. McDonoughin ja Sullivanin (2011, 27) mukaan matematiikan oppiaineen

kohdalla pituuden mittaamisen oppimiseen liittyvää tutkimusta kaivataan lisää, jotta opettajat saisivat riittävästi informaatiota siitä, millaisin menetelmin ja missäkin lapsen kehityksen vaiheessa kyseiseen kartutettavaan taitoon liittyvää opetusta tulisi suunnitella. Smith III, van den Heuvel-Panhuizen ja Teppo (2011, 619) tuovat kuitenkin esille tutkimuksia koskien pituuden mittaamista esikouluikäisten lasten taitojen ja oppimisen määrittämiseen. Tutkimuksissa on tullut ilmi, että vaikka mittaamisen tulisikin olla yksi keskeisistä pääasioista, sitä usein opetetaan kymmenjärjestelmän ja aritmetiikan ohella, mutta vähäisemmällä painotuksella. Kuitenkin pituuden mittaamisen avulla voitaisiin avata portteja tilastollisiin muutosta ja määrää ilmaiseviin rakenteisiin ja niiden oppimiseen. Myös Lampinen ym. (*Opettajan tienviitta 3a*, 2018, 207) tuovat esille mittaamisen olevan hyvä väline lukukäsitteen oppimiseen.

7.2 Tutkimusaineiston analyysin eteneminen ja analyysiprosessi

Alasuutarin (1994, 30–39) kuvailun mukaisesti lähdin tutkimusaiheen valitsemisen jälkeen tutustumaan kirjalliseen aineistoon. Olen pyrkinyt lähestymään aineistoa avoimesti ja tulkitsemaan sitä sen antamien viitteiden mukaisesti. Coffeyn (2014, 372–375) mukaisesti myös tutkimani dokumentit on suunniteltu lukijaa ja käyttäjää, oppilasta, opettajaa sekä osittain myös huoltajaa ajatellen. Kirjoista oli löydettävissä ohjeita, rakenteita ja viitteitä niiden tulkintaan ja hyödyntämiseen, mikä lienee oppikirjojen tarkoituskin. Tutkimukseni vaati sisällön ymmärtämistä ja pilkkomista toimiviin osiin.

Pohjatyötä tehdessäni tutustuin pituuden mittaamisen opetusta koskevaan tutkimukseen, mutta vaikka niissä lähes kaikissa viitataan ja peräänkuulutetaan toiminnallista ja ongelmanratkaisuun pyrkivää opetusta, sen puute todetaan ilmeiseksi. Tutkimukselleni ei löydy täysin vertaista tutkimusta ja pyrin toteuttamaan tutkimustani siten, että se voisi olla viitoittamassa jatkotutkimuksia aihetta laajentaen. Tämä saattaa toteutua luomani teorian avulla, tuomalla esille uusia mahdollisuuksia analyysiin sekä sen rajallisuuden esille tuomiseen. Sisällön- analyysiä kohtaan on suhtauduttu kriittisesti siitä syystä, että tutkimuksen katsotaan tuovan esille jo tunnettuja asioita. Koska taustatyötä tehdessäni näin, että pituuden mittaamisesta ei tutkimustyötä ole paljon tehty ja etenkin juuri Varga-Neményi - kontekstissa ei lainkaan, katson, että tutkimukseni tuo esille uutta tietoa tutkittavasta aihepiiristä.

Tutkimustyöni alkoi toukokuussa 2020, jolloin vastaanotin Lampiselta tutkittavat materiaalit. Tutkimukseni eteni luokanopettajaopintojeni aikana, jolloin osa tutkimukseeni liittyvät sisällöt valmistuivat osana eri kurssieni sisältöä. Tehtävät rytmittyivät lomittain ja työ eteni. Aluksi tutustuin Varga-Neményi-menetelmän periaatteisiin sekä pohjatietoon tutkimusten ja artikkeleiden valossa. Seuraavassa vaiheessa kävin läpi ensimmäisen kerran *Opettajan tienvitta* -opettajan oppaat. Opettajanoppaiden avulla lähdin tulkitsemaan kullekin kouluviikolle tai jaksolle tehtyjä suunnitelmaehdotuksia, sekä niihin liittyviä sisältöjä ja harjoitustehtäviä pituuden mittaamisen kontekstissa. Laadin tuolloin docs-muotoisen tekstitiedoston, johon kokosin kaiken pituuden mittaamiseen liittyvän *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaista löytyneen informaation sivu sivulta, ei ainoastaan viikkosuunnitelmista löytyvistä pituuden mittaamiselle määritetyistä kokonaisuuksista. Edellisen pohjalta lähdin kartoittamaan teoreettista taustaa varten tarpeelliseksi määrittelemääni kirjallisuutta ja aiempia tutkimuksia. Tässä vaiheessa oli jo selvää, että pituuden mittaaminen näyttäytyi kohtalaisen vahvasti varsinaisen oman osa-alueensa ulkopuolella. Tällöin ilmeni myös, että kolmesta lähestymistavasta määritelmälähtöinen olisi vahvasti paitsiossa, kun taas realistinen esillä, ongelmanratkaisun vivahteilla maustettuna.

Seuraavana tutkin *Matematiikkaa* -oppilaan kirjoista löytyneitä pituuden mittaamiseen liittyviä tehtäviä ja sisältöjä, joista esimerkkejä liitin laatimaani docs-tiedostoon. Pyrkimyksenäni oli pystyä pelkistämään aineistossa olevia pidempiäkin pituuden mittaamiseen liittyviä havaintoja, jotta pystyisin tulkitsemaan niitä tutkimuskysymysteni kontekstissa. Myös relevanttien luokkien ja kategorioiden löytäminen oli tavoitteenani. Havaintojen avulla pyrin siis löytämään koko aineistoa kuvaavia piirteitä, nimittäjiä tai säännönmukaisuuksia, jotka kuvaisivat aineistoa ja pystyisin niiden avulla vakuuttamaan tulevan tutkimukseeni tutustujan siitä, että valitsemani kategoriat olisivat perusteltuja ja löytäisin niiden avulla vastaukset tutkimuskysymyksiini (Alasuutari 1994, 30–39). Tämän vaiheen jälkeen olin saanut koottua kaikki sisällöt yhteen kokonaisuuteen. Aiempi havaintoni siitä, että vaikka opettajanoppaisiin kirjattuihin aikataulusuunnitelmiin olikin merkitty tietyt varsinaisesti pituuden mittaamiselle varatut viikot, näyttäytyi aihe kohtalaisen paljon myös muiden matematiikan aihepiirien sisällöissä ja tehtävissä.

Tässä vaiheessa myös lähestymistapani ja tutkimuskysymykseni tarkentui. Koska analysoin vain yhden julkaisijan oppimateriaalia, huomasin alkuperäisen lähestymistapani olleen sisällöltään ja painotuksiltaan oppikirjatutkimukseen liian laaja. Tarkentuneiden tutkimuskysymysteni mukaisesti tutustuin aineistoon pyrkien selvittämään, millaisin lähestymistavoin (realistinen, ongelmakeskeinen, määritelmälähtöinen) ja aineistoin pituuden mittaamista lähestytään ja mihin matematiikan osa-alueisiin pituuden mittaamisen osa-alueet yhdistyvät ja millaisia taitoja oppilaat harjoittelevat tässä kontekstissa.

7.3 Kategorioiden muodostaminen

Sekä konsepti että data ohjaavat koodausta ja kategorisointia, vaikka ajatellaan, että datan tulisi ainakin osittain määritellä asetettavia kategorioita (Schreier 2014, 171). Sisältöluokkien määrittämiseen vaikuttavat tutkimuksen runko tai sen luonne ja lähtökohdat. Tutkimusmateriaali pilkotaan osiin ja kullekin osalle määritellään oma kehyskategoria, joko sisällön tai lähteen mukaan. Katteoria voisi nojata mm. teoriaan, aiempaan tutkimukseen, ajankohtaiseen tietämykseen, logiikkaan tai käydyn keskustelun tai haastattelun avulla kerättyyn aineistoon (Schreier 2014, 176; Schreier ym. 2019, 5.) ja tutkimuksessani kategoriat saivat viitteitä pituuden mittaamiseen liittyvästä aiemmasta tietämyksestä, mutta suurimmilta osin siitä, millaisena se materiaalissa näyttäytyi. Aineisto voitaisiin jaotella isompiin yksiköihin, sekä mitata ja tarkistaa sitä monin erilaisin lähestymistavoin, jolloin aineistosta saattaa nousta koodeja, jollaisia ei ole oletettu esille tulevan. Kävin materiaaliani läpi monta kertaa, lähestyen sitä erilaisista tulokulmista, kunnes relevantit koodit löytyivät tai pystyin ne luomaan (Schreier 2014, 176; Salo 2015, 177–178; Hsieh & Shannon 2005, 1279–1280; Assaroudi ym. 2018, 46).

Katson löytäneeni relevantit koodausluokat ja kategoriat vaikkakin jouduin usein miettimään, onko koodaus luotettava. Itse pituuden mittaamisen kontekstissa on tarkasti kuvattu niitä painotuksia ja sisältöjä, joihin tuon oppimisjakson aikana tulee kiinnittää huomiota ja joiden harjoitteluun tulee antaa aikaa ja monenlaisia mahdollisuuksia. Vaikka varsinainen pituuden mittaamiseen liittyvä opintokokonaisuus kolmannella vuosiluokalla alkaa vasta viikkojen 14–17 aikana (*Opettajan tienviitta 3a 2018*, 33), sen sisältöjä harjoitellaan myös muiden aihepiirien harjoituksissa.

Tutkimuksessani lähestyin aineistoa termien *pituuden mittaaminen* sekä *pituuden mittayksiköiden esille tuleminen* avulla, mutta itse tutkimukseni pääsisältö on kuitenkin laajempi kuin sanat ja niiden avulla tehtävä segmentointi. Koottuani aineiston tarjoamat sisällöt sekä oppilaan että opettajan materiaaleista yhteiseksi docs-tiedostoksi, pystyin koodaamaan ne analyysiyksiköihin ja sijoittamaan kategorioihin, analyysiluokkiin. (Salo 2015, 169–170; Seitamaa-Hakkarainen 2020). Schreierin (2014, 176–178) mukaan kategorioita tarkastellaan, korjataan ja uusia luodaan tutkimuksen aikana jatkuvasti. Kehyksestä tulee luotettava ja pitävä silloin, kun koko materiaali on koodattu ja koodauskehystä ei enää muuteta (Schreier 2014, 179).

Tutkimuksen tässä vaiheessa yläkategorioikseni muotoutuivat tutkimuskysymysten pohjalta seuraavat asiasisällöt:

1. Pituuden mittaamisen opetuksessa käytettävä lähestymistapa
2. Pituuden mittaamisen näyttäytyminen muissa matematiikan osa-alueissa
3. Pituuden mittaamisen aikana harjoiteltavat taidot

Pituuden mittaamisen sisällöt etenivät aineistossa vastaavalla tavalla kuin Sareniuksen (2010) ja Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 (Opetushallitus 2014, 128–237) olevat sisällöt on kirjattu. Eteneminen aineistossa tapahtuu seuraavassa järjestyksessä, osittain vuorotellen:

1. Vertailu ja mittaaminen (epästandardit mittavälineet), jatkuu läpi koko aineiston
2. Omien mittojen valmistaminen ja käyttäminen
3. Mittaustuloksen esittäminen: asteittain tarkkuus, likiarvot ja pyöristäminen
4. Taulukot ja diagrammit asteittain
5. Standardi-mittojen käyttäminen, asteittain, metristä alkaen
6. Pituuden mittaamiseen liittyvät harjoitukset: lukusuora, eri laskutoimitukset (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku) ja lukujen (murtoluku, desimaaliluku)

Pituuden mittaamisen opetteluun käytetään läpi aineiston vertailua, toimintavälineitä, standardisoimattomia mittavälineitä, kielentämistä, kokemuksellisuutta ja vuorovaikutuksellista oppimista. Tällöin toteutuu realistisen lähestymistavan mukainen tapa oppia matematiikkaa. Kun ymmärtäminen kasvaa, voidaan mukaan asteittain liittää kuvallinen ja symbolinen taso ja opittua opitaan hyödyntämään myös omassa arjessa.

Aineisto on koodattu sen mukaan, millaisin erilaisin keinoin, tehtävin ja oppisisällöin oppilaita ohjataan toimimaan pituuden mittaamisen taitoja harjoitellessaan, sekä oppikirjan että opettajan toimesta. Teoreettisesta taustasta löydettävät matematiikan oppimateriaaleihin liittyvät vaateet ja matematiikan kielentäminen näyttäytyvät aineistossani juuri induktiivisen ja abstraktioiden kautta tapahtuvan oppimisen kautta. Päädyin purkamaan aineiston osiin ja luomaan koodit edellisten viitoittamana, sillä aineiston läpikäymisten jälkeen esille nousivat seuraavat sisällöt: *kokemuksellisuus, kielentäminen, piirtäminen, matematiikan kielellä kirjoittaminen, symboleilla merkitseminen, kysymysten asettaminen, toimintavälineillä työskenteleminen, ongelmien ratkaiseminen, havainnoiminen ja vertaileminen*. Muut matematiikan osa-alueet, joihin pituuden mittaamisen harjoittelu integroitui, olivat seuraavat: *yhteenlasku, vähennyslasku, lukukäsité, lukusuora, lukunaapurit, lukujono, piirin pohjustaminen, kertolasku, kymmenjärjestelmän havainnollistaminen, jakolasku, murtoluvut, käänteinen murto-osa, desimaaliluvut, käänteinen murto-osa, likiarvot, osamäärät, pinta-ala ja tilavuus*.

Alakategoriat niihin kuuluvine sisältöineen/koodeineen ovat seuraavat:

1. *Omakohmainen välitön kokemus, arjen tilanteet, pelit ja ohjatut leikit*
 - ohjattu pedagoginen leikki tai peli
 - kehollinen kokemus
 - lapsen arjen tapahtuma
 - Vuorovaikutus
2. *Toimintamateriaaleilla työskentely*
3. *Kuvat ja piirtäminen*
 - kuvien tarkastelu ja tutkiminen
 - kuvien täydentäminen
 - kuvien tuottaminen
4. *Mielikuvat, väliilliset kokemukset*
 - kielentäminen
 - puhe
 - kirjoitettu kieli
 - visualisointi
 - matematiikan kieli/symbolit
 - matematiikan eri osa-alueiden yhteen liittyminen
5. *Oppikirja*
 - konkreettinen toiminto
 - piirretty vaihe
 - suullinen vaihe
 - symbolein esitetty vaihe

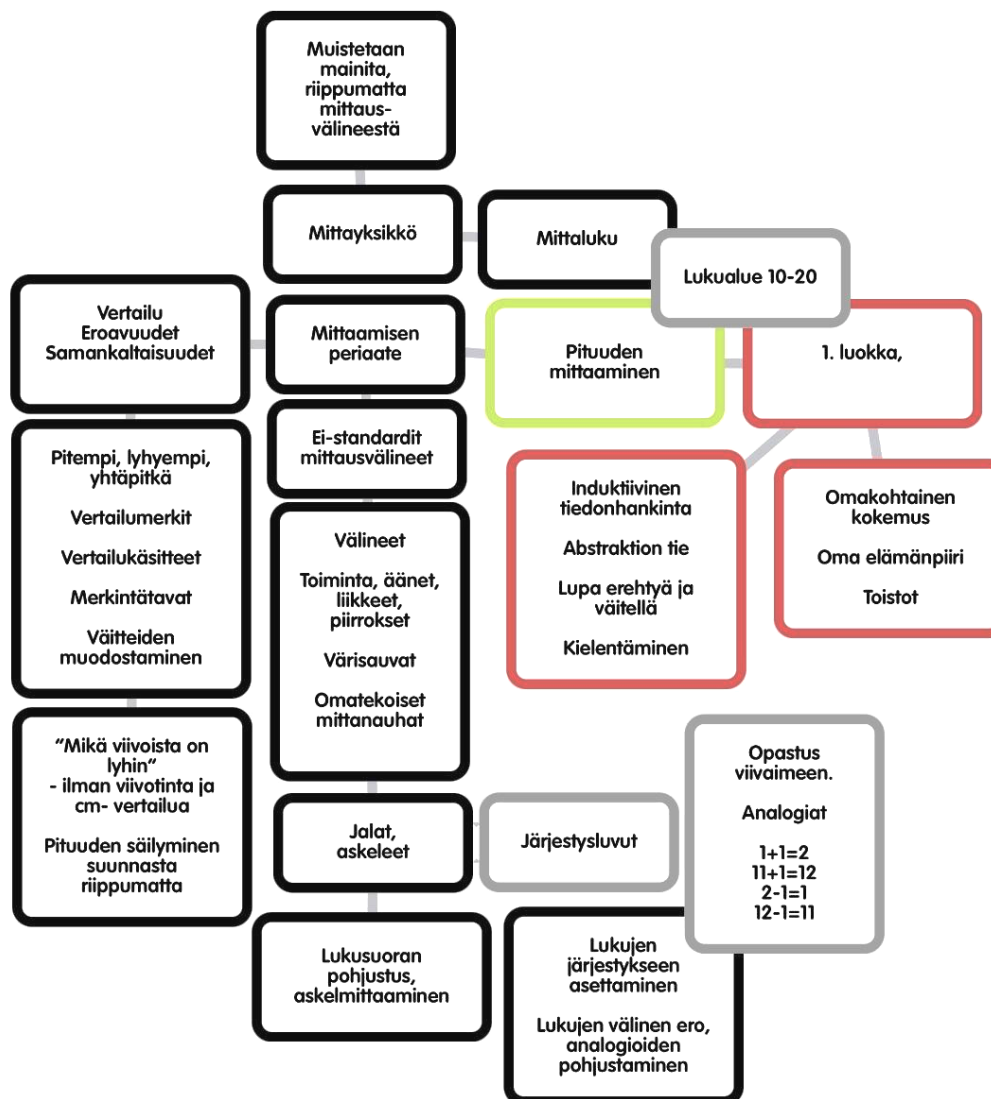
Tutkimusaineistoni toisen läpikäynnin jälkeen laadin tiivistetyn taulukkomuotoisen koonnin, josta osa on esillä seuraavassa kuvassa 11. Käytin tuolloin rinnalla myös ensimmäistä kokoamaani docs-tiedostoa viikkosuunnitelmista pyrkimyksenäni huomata mahdolliset eroavaisuudet tai painotuserot tekemistäni löydöksistä. Pyrin edellisen avulla varmistamaan sen, että koodit tulisivat Tuomen ja Sarajärven (2017) viitoittamana testattua ja tutkimuskehys arvioitua. Tutkimukseni toteutui Covid19 -pandemian aikana, jolloin opinnot ja niihin liittyvä työskentely tapahtuivat pääosin etätoteutuksin. Tästä syystä koin haasteelliseksi pyytää jotakuta toista henkilöä tarkastelemaan kohtalaisen suurta aineistoani ja antamaan siitä kommentteja ristiinkoodauksen kontekstissa. Pyrin näin toteuttamaan Reichertzin (2014, 127) esittämän ajatuksen siitä, että aineistoa on lähestytty juuri tähän tutkimukseen sopivin tulkintatavoin, jotta tutkimuksesta voidaan tehdä merkityksellisiä johtopäätöksiä.

Kuvassa 11 esille tuomassani koonnissa otsikoiksi valitsin tutkimuskysymyksiini tukeutuen seuraavat:

1. Sisältö: kunkin kirjan pituuden mittaamiseen liittyvä sisältö, myös muiden matematiikan osa-alueiden kohdalla. *(Pyrkii löytämään vastauksia tutkimuskysymykseen, jolla määritellään pituuden mittaamiseen ja siihen liittyneenä muiden matematiikan osa-alueiden sisältöjä aineistossa.)*
2. Viikkosuunnitelman mukainen eteneminen viikoittain *(Pituuden mittaamisen sisältöjen näyttäytyminen lukukausittain ja niiden eteneminen 1.–4. -vuosiluokkien aikana.)*
3. Opiskeltava sisältö, jossa tuodaan esille myös pituuden mittaamisen oppimiseen liittyviä ajatuksia tai tavoitteita, jotka opettajanoppaisiin on kirjattu. *(Pyrkii selvittämään, mitä opitaan ja mitä harjoitellaan pituuden mittaamisen kontekstissa.)*
4. Tehtävämallit ja välineet: sisältää myös esimerkkejä, joissa sijainti kirjoissa tuodaan esille merkinnöin "oppilas" - oppilaan kirja, "opettaja" - opettajan kirja. *(Pyrkii selvittämään, millaisin toimintamuodoin ja tehtävämallein pituuden mittaamista harjoitellaan.)*
5. Oppilaan toimintatavat, jotka tulevat esille kyseisiä sisältöjä harjoitellessa.

Kuvassa 10 on ote laatimastani taulukosta, joka kuvaa tapaan tulkita 1. vuosiluokan sekä opettajan että oppilaan kyseisen lukukauden oppimateriaalia.

Kolmannen läpikäymisen jälkeen kokosin kaikkien vuosiluokkien mukaisesti sisällöt vielä ajatuskartaksi *Popplet Lite*-sovelluksella lukuvuosittaisiksi koonneiksi, joista esimerkkinä tuon kuvassa 11 olevan 1. vuosiluokan materiaaleista laaditun ajatuskartan. Koonnista voidaan selkeästi nähdä pituuden mittaamisen näyttäytyminen lukualueeseen, järjestyslukuihin ja analogioihin liittyvissä sisällöissä jo ensimmäisellä vuosiluokalla. Myöhemmissä oppikirjoissa ja opettajanoppaissa nähdään pituuden mittaamisen eheytyminen kohtalaisen vahvasti muihin matematiikan osa-alueiden harjoittelutehtäviin, mikä tuli esille jo kuvassa 10 olevan taulukkomuotoisen koonnin sisällöissä. Käsitekartan avulla pyrin havainnollistamaan myös sitä, että pituuden mittaamisen harjoitteluun käytetään aineiston mukaan hyvin paljon toiminnallisuutta, kokemuksellista oppimista ja toimintavälineitä. Oppilaiden kirjoissa oli peruslaskutehtäviä, mutta niissäkin tehtävä rakentui erilaisista osioista, joissa kulloistakin sisältöä harjoiteltiin usealla erilaisella toimintamuodolla ja oppilaan omasta arjesta löytyvin esimerkein. Oppilaan kirjoissa ei ole erityisiä sisältöihin paneutuvia opetussisältöjä, vaan opettajan oppaista löytyy kuhunkin harjoiteltavaan asiaan liittyviä toiminnallisia tehtäviä, joiden suorittamisen jälkeen siirrytään vasta oppikirjoissa olevien tehtävien pariin.



Kuva 11. Ajatuskartta, ensimmäinen vuosiluokka, pituuden mittaaminen (*Matematiikkaa 1a, Matematiikkaa 1b, Opettajan tienviitta 1a & Opettajan tienviitta 1b*)

Ajatuskarttaan on merkitty punaisin laatikoin ensimmäisen vuosiluokan oppimisen sisältöjä Varga-Neményi -menetelmän metodeista. Mustat laatikot kuvaavat syyslukukauden (*Matematiikkaa 1a, Opettajan tienviitta 1a*) ja harmaat laatikot kevätlukukauden (*Matematiikkaa 1b, Opettajan tienviitta 1b*) aikana esille tulevia pituuden mittaamiseen liittyviä sisältöjä tai siihen käytettävien menetelmien tai välineiden esiintymistä.

Taulukkoon 2 on koottu aineistosta löytyneet ja eri tavoin ilmaistut pituuden mittaamiseen liittyvät opeteltavat ja harjoiteltavat käsitteet ja sisällöt lukukausittain. Taulukon 2 yläpalkkiin on kunkin lukukauden kohdalle merkitty, mille kouluviikoille

viikkosuunnitelmat virallisesti pituuden mittaamisensijoittavat *Opettajan tienviitojen 1a–4 b* mukaisesti. Taulukkoon on selvyuden vuoksi käytetty eri värejä selkeyttämään esitettyä informaatiota. Punainen väri osoittaa usein, lukukaudelta toiselle esille tulevia sisältöjä. Kursivoituina on merkitty muiden matematiikan osa-alueiden sisältöjä, jotka ovat integroituneena pituuden mittaamisen tehtävissä.

Taulukko 2. Matematiikan pituuden mittaamiseen liittyvät sisällöt oppikirjoissa lukukausittain

Oppimateriaali	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b
Opetusviikot	2-8, 13	23-2, 27-28	2-4, 12-14	22-23, 33-35	14-17		1-6, 10-12	26-28, 29
Lisämateriaali			Minä mittaan - materiaali					
Mittakäsittelyn sisällöt kunkin lukukauden aikana	mittaluku ei-standardit mittayksiköt mittaamisen periaate vertailu kielentäminen (tehtävät, tuotokset) mittaluvun numeromerkinä pituus, lukusuora/ lukukäsite	mittaluku ei-standardit mittayksiköt mittaamisen periaate, vertailu kielentäminen (tehtävät, tuotokset) pituus, lukusuora/ lukukäsite, analogiat arvioiminen	mittaluku ei-standardit mittayksiköt vertailu kielentäminen (tehtävät, tuotokset) diagrammit ja taulukot pituus, lukusuora/ lukukäsite monikerrat mittayksikkö	mittaluku ei-standardit mittayksiköt mittaamisen periaate vertailu kielentäminen (tehtävät, tuotokset) mittaluvun numeromerkinä mittaluvun merkitys pituus ja kertolasku monikerrat mittayksikkö kymmenjärjestelmä mittaustuloksen esittäminen analogiat	mittaluku ei-standardit mittayksiköt mittaamisen periaate pyöristäminen vertailu kielentäminen (tehtävät, tuotokset) mittaluvun numeromerkinä diagrammit ja taulukot pituus, lukusuora/ lukukäsite monikerrat pituus ja kertolasku mittayksikkö kymmenjärjestelmä mittaustuloksen esittäminen pituus ja jakolasku, murtolukujen pohjustus pinta-alojen pohjustus mittaustuloksen tarkkuus muutoksen ilmaiseminen pituusmittojen tukipisteet, likiarvot	mittaluku ei-standardit mittayksiköt mittayksikkö, muutoksen ilmaiseminen kielentäminen (tehtävät, tuotokset) mittaluvun numeromerkinä mittaluvun merkitys mittakaava pyöristäminen arvioiminen mittayksikkö kymmenjärjestelmä pituus ja jakolasku, murtolukujen pohjustus mittaustuloksen esittäminen pinta-alojen pohjustus mittaustuloksen tarkkuus arvioiminen	mittaluku ei-standardit mittayksiköt mittaamisen periaate kielentäminen (tehtävät, tuotokset) mittaluvun numeromerkinä mittaluvun merkitys mittakaava pyöristäminen arvioiminen mittayksikkö kymmenjärjestelmä pituus ja jakolasku, murtolukujen pohjustus mittaustuloksen esittäminen pinta-alojen pohjustus mittaustuloksen tarkkuus	mittaluku ei-standardit mittayksiköt mittaamisen periaate vertailu kielentäminen (tehtävät, tuotokset) mittaluvun numeromerkinä diagrammit ja taulukot pituus ja desimaaliluku piiri mittayksikkö muutoksen ilmaiseminen pituus ja jakolasku, murtolukujen pohjustus pinta-alojen pohjustus mittayksikön muunnokset

Taulukko 2 tuo esille, että Varga-Neményi -menetelmässä matematiikan eri osa-alueet liittyvät toisiinsa tai niiden harjoituksissa on mahdollista vahvistaa muiden osa-alueiden osaamista ja mielessä pysymistä sekä ymmärtää erilaisten sisältöjen toisiinsa liittämistä. Tällöin on myös erilaisin tehtävämuodoin mahdollista jalostaa matematiikan kokemuksia sekä konkreettisia ongelmanratkaisutaitoa arjessa käytettäväksi. *Matematiikkaa 1a* -opettajan opas (*Opettajan tienviitta 1a 2018*, 15–25)

sekä Ikäheimo (2021, 444–451) ohjaavat opettajaa huolehtimaan monipuolisista opetusmateriaaleista, oppimisen tiloista ja erilaisista oppimistilanteiden toteutusmalleista. Matematiikan sisältöjen oppimista ohjataan toteuttamaan myös tilanteissa, joissa liikutaan matematiikan kontekstin ulkopuolella. Mittaamiseen ja mittalukuun liittyvien sisältöjen rinnalla standardisoimattomat mittayksiköt, kielentäminen ja vertailu näyttävät läpi koko materiaalin 1.–4.-vuosiluokkien ajan. Alkuopetuksen osalta sisällöt ovat niputettuina yhdeksi kokonaisuudeksi, joka sallii luovuuden, mutta suunnitelmaan asetetut keskeisimmät tavoitteet ja sisällöt tulee toteutua. Huomattavaa on, että moneen varsinaisesti myöhemmin opeteltavaan asiaan viitataan jo aiemmissa tehtävissä tai toiminnoissa. Näin kyseiselle sisällölle annetaan mahdollisuus jäädä ns. “hautumaan” oppilaan mieleen. Vaikka esimerkiksi kolmannen vuosiluokan kevätlukukaudella ei ole osoitettuna pituuden mittaamiselle ns. omaa harjoitteluaikaa, löytyy siihen liittyviä tehtäviä kuitenkin materiaaleista, kuten taulukko 2 osoittaa. Taulukko 2 tuo esille myös pituuden mittaamisen aikana harjoiteltavia ja opeteltavia/opittavia taitoja, joita yhden pääkategorian mukaisesti pyrin selvittämään.

Aineiston kokoaminen kategorioiden ja koodien mukaisesti

Päädyn tekemään koko aineistoa tutkimuskysymyksiäni ja kategorioitani tarkentamaan taulukkomuotoisen yhteenvedon siten, että jätin taulukon ulkopuolelle määrittelyn lähestymistavasta. Katson, että aineisto ja siitä esille tuotavat sisällöt osoittavat, että realistisen lähestymistavan esiintyminen opetukseen ja oppimiseen käytetyissä tavoissa ja menetelmissä on poikkeuksetta mukana ja on nähtävissä kyseisen taulukon muista sisällöistä selkeästi. Ongelmanratkaisua esiintyy myös tehtävissä eri tavoin. Katson sen olevan osana realistisen lähestymistavan kautta toteutettua kokonaisuutta. Näin ongelman ratkaiseminen liittyy kokemukselliseen ja vuorovaikutukselliseen oppimiseen, jolloin realistinen lähestymistapa ei ole ainoana lähestymistapana tehtävissä.

Pyrin löytämään jokaisesta tehtävästä koodeja eli sisältöjä (240 kpl), jotka ovat muodoltaan selkeästi kuvattuina/kirjoitettuina. Jätin ulkopuolelle sellaiset opettajan oppaista löytyvät tehtävien pohjustamiseen ja ohjaukseen liittyvät toiminnot, joita ei suoranaisesti osoitettu juuri pituuden mittaamiseen liittyvään tehtävänantoon.

Taulukko tuo esille myös eri matematiikan osa-alueisiin liittyvät tehtävät, joissa tulee esille pituuden mittaamisen sisältöjä, jotta yläkategorian 2 (Pituuden mittaamisen

näyttäytyminen muissa matematiikan osa-alueissa) koodit saataisiin mukaan tähän taulukkoon.

Taulukkokoonti on tehty yksitellen kustakin lukukauden sisällöstä, lukukausi kerrallaan. Taulukossa kunkin tehtävän kohdalla tein määrittelyn sekä opettajan oppaan että oppilaan *Matematiikkaa* -oppikirjan pohjalta. Taulukko on jaettu seuraaviin sarakkeisiin:

- Tehtävän sisältö: *Mitä matematiikan sisältöasiaa harjoitellaan/opitaan.* (opittava asia sekä muihin sisältöihin integroituminen)
- Oppilaan toiminta: *Tehtävien sisältö, sekä toiminnan kuvaus.*
- *Tehtävien /harjoitusten lukumäärä kyseisessä kohdassa.*

Merkitty jakoviivan (esim: 2/6) avulla, jolla erotellaan kulloisestakin tehtäväkokonaisuudesta löydettävissä oleva lukumäärä opettajan/oppilaan materiaaleissa. Tällä kohdin opettajan materiaalien kohdalla taulukossa lukee useassa kohdassa termi "monta", joka tarkoittaa sitä, että kyseistä harjoiteltavaa sisältöä ohjataan opettajan oppaassa käsiteltäväksi usealla erilaisella tavalla/menetelmällä. Suurimmassa osassa näitä ohjaustoimintoja on haastavaa määrittellä jotakin numeraalista määrää, joten jätin kyseisen lukumäärän määrittämättä. Pääasiallinen esille tuomani aineisto muodostuu selkeään kirjoitettuun muotoon luoduista oppilaan tehtävistä, joita löydetään sekä oppilaan *Matematiikkaa* -oppikirjoista että *Opettajan tienviitta* -opettajanoppaiden monistemateriaaleista. Myös oppilaan materiaaleissa olevat opetusruudut on laskettu mukaan näihin kirjoitettuihin sisältöihin.

- *Sijaintisivu(-t)*, opettajan opas/oppilaan kirja

Kuvassa 12 (s. 65) on ote taulukkumuotoisesta yhteenvedosta *Matematiikkaa 1a* (2019, 22–42) ja *Opettajan tienviitta 1a* (2018, 48–79) oppimateriaalien sisällöistä edellä kuvattujen sisältöjen osalta.

A	B	C	D	E	F	G
Tehtävän sisältö		Oppilaan toiminta				Sij. Ope/ Opp.
					Teht./harj. kpl	
		Huom! Tehtävät oppilaan kirjoissa tavuviivoin.				1a
Vertailu: lyhin, pisin		Kyllä-ei- arvausleikki, tunnustelu, värisauvat			1/	48/
-"-		"pidempi - lyhyempi" - sanaparein etsitään ihmisiä j			monta/	50
Vertailu: pidempi, lyhyempi		wärisauvat, moniste, pohdinta, keskustelu			/1	50/, 171/
Mittaluku ja numeromerkintä		35. Kumpi viiva on pitempi? Piirrä siihen punainen			/1	/36
Mittaaminen, luvut ja numerot		3. Mittaa vaaleanpunaisella sauvalla ja yhdistä.			/1	/38
Lukumäärät, askelmittaaminen, m		5. Jani astuu näin monta askelta. Merkitse, kuinka			/1	/39
Mittaaminen vertailemalla		1. Kuva: lasten pituuksien vertailua ja hahmojen tur			monta/1	64/22
		2. Onko käärme pitempi päästä häntään vai hännä			/1	64/22
		3. Narulla mittaamista kotona (tv, radio). Naru muk			/1	64/22
		4. Etsitään narua pitempiä esineitä. Piirretään esine			/1	64/23
		5. Etsitään narua lyhyempiä esineitä ja piirretään e			/1	64/23
		6. Etsitään keskenään yhtä leveitä esineitä. Narulla			/1	64/23
Mittaaminen, vertailu, tulosten käy		Värisauvatehtäviä. Yhtäpitkä, pituusjärjestys, "niin j			monta/1 (moniste	66-67/ , 180/
-"-		7. Värisauvalla mitataan kuvissa olevia asioita. Ym			/1	67/24
-"-		8. Värisauvalla mitataan kuvissa olevia. Ympyröidä			/1	67/24
Mittaaminen		10. Mittaa punaisella sauvalla. piirrä ne sauvat, jotk			monta/1	78/40
-"-		Mitataan ensin oikeita mattoja oppilaiden askelilla.			monta/2	79/42

Kuva 12. Ote taulukkomuotoisesta yhteenvedosta *Pituuden mittaamisen näyttäytyminen tehtävissä: oppikirjat ja opettajan oppaat*

Kuvassa 12 ensimmäisen sarakkeen kohdalla oleva keltainen väri ilmoittaa, että kyseinen tehtävä/tehtäväkokonaisuus ei ole selkeästi tai pelkästään pituuden mittaamiseen liittyvä vaan siinä käsitellään muutakin/muitakin matematiikan osa-alueiden sisältöjä. Vihreä väri taulukon keskivaiheilla tuo esille lukukausittaisen oppikokonaisuuden alkamiskohdan taulukossa.

Seuraavassa kuvassa 13 on toinen ote taulukkomuotoisesta yhteenvedosta. Tämä ote sisältää seuraavia tietoja:

- *Sarkaimet, joiden avulla eritellään tiivistetyssä muodossaan alakategoriat:*
 1. *Omakohtainen välitön kokemus (H)*
 2. *Toimintamateriaalit (I)*
 3. *Kuvat ja piirtäminen (J)*
 4. *Mielikuvat, välilliset kokemukset (K)*
 5. *Oppikirja (L)*
- *Selkeät oppilaan tehtävät, lukumäärä (merkitty x- merkinnöin, jossa x = 1 kpl)*

- Selkeästi esille tuotava *opettajan toiminta ja tilanteissa tapahtuvat painotukset*

B23	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
24	Sij. Ope/ Opp.	1	2	3	4	5	selkeät	Selkeästi esille tuotava opettajan toiminta ja tilanteissa tapahtu			
25							oppilaan				
26							tehtävät, lkm				
27	1a										
28	48/	x	x	x	x		x	Ohjauskeskustelu, kielentäminen, leikinjohtajuus, "Onko se pidempi"			
29	50	x	x	x	x			kielentäminen, vertailuun ohjeistaminen, pohdintaan ohjaaminen			
30	50/, 171/	x	x	x	x		x	Moniste (2).			
31	/36					x	x				
32	/38		x			x	x				
33	/39			x	x	x	x				
34	64/22	x	x	x	x	x	x	Toiminnallisuus, ohjaaminen, pohdinta, kielentäminen			
35	64/22	x	x	x	x	x	x	-"			
36	64/22	x	x	x	x	x	x	-"			
37	64/23	x	x	x	x	x	x	-"			
38	64/23	x	x	x	x	x	x	-"			
39	64/23	x	x	x	x	x	x	-"			
40	66-67/ , 180/	x	x	x	x		x	Moniste, toiminnallisuus, ohjaaminen, kielentäminen			
41	67/24	x	x	x	x	x	x	Ohjaaminen, keskusteleminen, kielentäminen			
42	67/24	x	x	x	x	x	x	-"			
43	78/40		x	x	x	x	x	Tauluvärisauvat, pohdintaan ohjaava keskustelu, tehtävän etenemis			
44	79/42	x	x			x	xx	Toiminnallisuuteen ohjaaminen, kielentäminen			

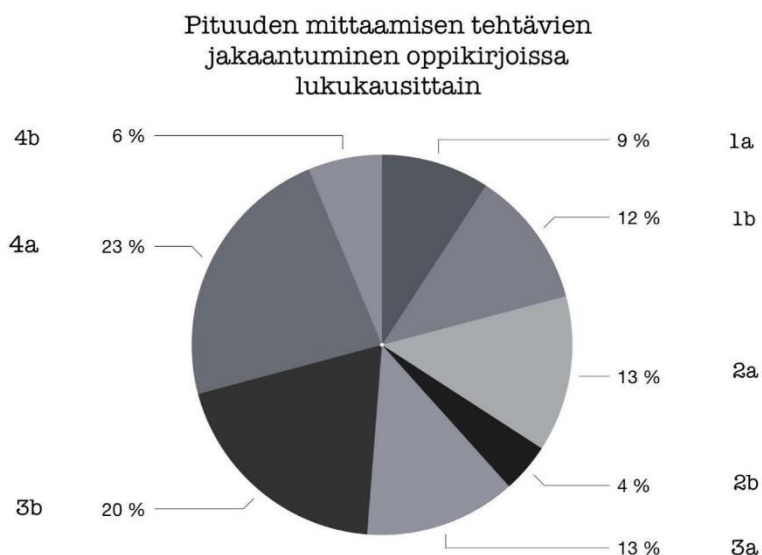
Kuva 13. Toinen ote taulukkomuotoisesta yhteenvedosta *Pituuden mittaamisen näyttäytyminen tehtävissä: oppikirjat ja opettajan oppaat*

Kuvassa 13 esitetystä otteesta taulukkoa on täydennetty luokittelun tulkinnan helpottamiseksi eri värein. Taulukossa on kohtien 1–5 (H–L) kohdalla tuotu mukaan väreillä tehtyä luokitusta, jonka avulla pystytään näkemään, kuinka monta eri alakategoriaa kukin tehtävä on analyysin mukaan toteuttanut (*sininen/5 kpl, punainen/4 kpl, keltainen/3 kpl, oranssi/2 kpl, valkoinen/1 kpl*). Alakategoria on valittu kunkin tehtävän sisällöistä ja toimintaperiaatteista tehtävää suoritettaessa ja toteutuneiden alakategorioiden määrä tehtävän kohdalla vaihtelee välillä 1–5. Tähän yhteenvedotaulukkoon, josta edellä kuvissa 12 ja 13 on otteet, on koottu kaikki se informaatio, joka on kerätty taulukkoa aiemmin tehtyjen aineiston läpikäymisten aikana luotujen koontien avulla. Taulukkovaiheessa palasin vielä sekä alkuperäiseen aineistoon että aiempiin koontihini tarkistaakseni esimerkiksi sitä, millaisin painotuksin kyseinen tehtävä näyttäytyy. Koonti on selkeä ja aineistoa läpivalaiseva ja tämän avulla toteutin lopullisen analyysin ja jonka pohjalta kokosin tutkimuksen tulokset.

8 TUTKIMUSTULOKSET

Varga-Neményi -menetelmän oppilaan *Matematiikkaa* -oppikirjoissa ja *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaissa on yhteensä 240 kappaletta selkeästi esille tuotua pituuden mittaamiseen liittyvää tehtävää. Kyseisiin tehtäviin luetaan myös ne tehtävät, joissa harjoitellaan jotakin muuta matematiikan osa-aluetta pituuden mittaamisen käsittein, välinein tai menetelmin.

Tehtävät jakautuvat prosentuaalisesti lukukausittain/oppikirjoittain seuraavasti, kuvassa 14 kuvatun mukaisesti.



KUVA 14. Pituuden mittaamisen tehtävien jakaantuminen prosentteina (N = 240) tutkimusaineistossa lukukausittain

Tuloksista voidaan nähdä, että pituuden mittaamista harjoitellaan kullakin lukukaudella. Mikäli halutaan nähdä, mikä on kunkin lukuvuoden (1.–4.) osuus, saadaan seuraava lukumääräinen jakauma: 50–42–78–70 kpl. Prosentteina lukuvuosittaiset osuudet ovat 21 %, 17 %, 33 % ja 29 %. Vaikka 2. lukuvuoden kevätlukukaudella (2b-materiaali) aiheen parissa vietetään vain kymmenen tehtävän verran, on aihetta kuitenkin käsitelty syyslukukaudella (2a-materiaali) jo 32 tehtävän aikana.

8.1 Pituuden mittaamisen opetuksessa käytettävä lähestymistapa

Ensimmäinen pääkategoria muotoutui tutkimuskysymyksen mukaisesti. Kysymys pyrkii määrittämään, millaisin lähestymistavoin pituuden mittaamista lähestytään 1–4-luokkien *Matematiikkaa* -sarjan oppikirjoissa ja *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaissa. Aineisto antaa kysymykseen hyvin selkeän vastauksen. Kunkin lukuvuoden syyslukukaudelle tarkoitetussa opettajan oppaassa on tuohon ajankohtaan kuuluvaa lapsen kasvuun, kehitykseen ja oppimiseen liittyvää tietoutta ja Varga-Neményi -menetelmän menetelmäopillisia linjauksia. Oppilaiden esiyymmärryksen kartoittaminen ja sen pohjalta ohjauksen ja toiminnan suunnittelu ja toteutus ovat tärkeässä asemassa. Tavoitekuvauksin ja käytännön ohjein on pyritty antamaan tukea ja ohjeita opetuksen suunnittelua ja toteuttamista varten. Unkarilaisessa oppilaiden oppimateriaalissa on sekä oppi- että harjoituskirja, mutta suomalaiseen materiaaliin on tehty vain yksi oppikirja. Unkarilaisesta oppilaiden oppikirjasta ulkopuolelle jääneet materiaalit on sijoitettu joko opettajan oppaaseen, *Opettajan tienviittaan*, tai oppilaiden kutakin lukuvuotta varten laadittuun oppilaankirjaan. Materiaaleista löytyy myös arviointitietoutta ja seurantalomakkeita, joiden avulla on mahdollista seurata lukuvuoden aikana oppilaiden matematiikan osaamisen kaikista keskeisimpiä taitoja ja niiden kehittymistä (*Opettajan tienviitta 1a*, 39–41). Kuvassa 15 (*Opettajan tienviitta 1a 2018*, 63) tuodaan esille 1. luokan mittaamiseen liittyvä suunnitelma koskien viikkoja 3 ja 4. Mittaamista ohjataan harjoittelemaan vertailemalla pidempiä, lyhyempiä ja yhtä pitkiä pituuksia standardisoimattomilla mittavälineillä. Suunnitelmaan on koottu tiivis kuvaus sisällöistä, havainnollistamisvälineistä ja oppilaan toimintamateriaaleista.

3. ja 4. viikko

**MITTAAMINEN VERTAILEMALLA
LUKUMÄÄRIEN VERTAILU PAREIKSI YHDISTÄMÄLLÄ
YHTÄ PALJON, YHTÄSUURI**

- Pituuden ja korkeuden mittaaminen vertailemalla: pitempien, lyhyempien ja yhtä pitkien esineiden etsiminen ei-standardisoidun mittavälineen avulla
- Massan (painon) ja tilavuuden mittaaminen vertailemalla ja ei-standardisoiduilla mittavälineillä
- Enemmän ja vähemmän, vertaileminen pareiksi yhdistämällä
- Yhtä paljon ja =
- Suhteiden merkitseminen nuolilla

HAVAINNOLLISTAMISVÄLINEET

- Erilaisia esineitä pituuden mittaamista varten
- Erilaisia ympyräpohjaisen lieriön muotoisia esineitä, esimerkiksi putkiloita ja juomalaseja
- Tasapainovaaka
- Erilaisia esineitä massan punnitsemista varten
- Pieniä keskenään samanpainoisia esineitä punnuksiksi
- Narua
- Värisauvojen tauluversio
Värisauvat voidaan valmistaa suurennetuissa koossa vastaavan värisistä paperiliuskoista.

OPPILAAN TOIMINTAMATERIAALIT

- Narua
- Värisauvat
- Tasapainovaaka
- Erilaisia esineitä massan punnitsemista varten
- Pieniä keskenään samanpainoisia esineitä punnuksiksi

Kuva 15. Varga-Neményi -menetelmän opettajan oppaan (*Opettajan tienviitta 1a 2018, 63*) viikkosuunnitelmakoonti viikoille 3–4: mittaaminen vertailemalla ja pareiksi yhdistämällä (sisällöt, havainnollistamisvälineet ja toimintamateriaalit)

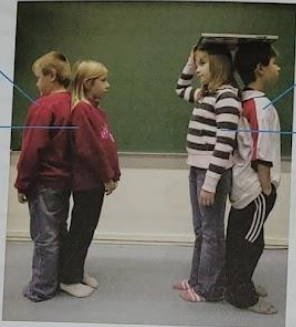
Aineisto tuo esille, että opetustuokioiden aloitetaan usein konkreettisista toiminnoista, joihin oppilaat löytävät paljon erilaisia työskentelyehdotuksia. Seuraavassa vaiheessa toteutetaan abstraktimpi piirretty, suullinen tai symbolein esitetty tulos. Opetustuokioiden painottuvat joko kokemiseen, toimintamateriaaleilla työskentelemiseen tai kirjallisesti tehtyihin tehtäviin. Näiden lisäksi vuorovaikutuksellinen toiminta tuo kokemuksellisuutta, joka tukee opitun liittämistä oppilaan omaan arkeen. Kullakin oppilaalla on omat työskentelyvälineet, joiden avulla harjoitellaan pituuden mittaamiseen liittyviä tehtäviä yksin, yhdessä sekä toisten työskentelyä seuraten. Työpistetyöskentely, jota pituuden mittaamisen kohdalla voidaan toteuttaa lukuvuoden aikana, mahdollistaa mittaamisen harjoitteiden yhdistämisen lukukäsitteen ymmärtämiseen ja taidon syventämiseen, sillä suureet, joita mittaamalla saadaan kuuluvat kiinteästi lukukäsitteeseen. Opettaja havainnollistaa toisinaan ohjaten

harjoiteltavia sisältöjä, mutta pääsääntöisesti pyritään siihen, että oppilailla säilyisi aktiivinen osallistujan rooli ja mahdollisuudet oivaltamiseen ja keksimiseen. (*Opettajan tienviitta 1a*, 2018, 12–17.)


Lähestymistapa on realistinen, johon toiminnallisissa, kokemuksellisissa ja vuorovaikutuksellisissa toiminnoissa yhdistyy myös ongelmanratkaisullisia osia. Matemaattisia ongelmia ratkaistaan oppilaille tutuissa konteksteissa, jolloin ongelmanratkaisut voivat siirtyä niin sanotusti arkikäyttöön ja matematiikan hyödyllisyys niin oppiaineena kuin jokapäiväisenä ajattelun välineenä mahdollistuu. Ongelmat ovat kuitenkin hyvin realistisia ja käsiteltäviä, jolloin oppilaan ei niitä ratkaistessaan tarvitse lähteä rakentamaan tietoa abstrakteista lähtökohdista, vaan oppiminen tapahtuu enemmänkin tilanteissa kokien ja erilaisin välinein harjoitellen. Kuvassa 16 on esimerkki 1. vuosiluokan oppilaan oppikirjassa (*Matematiikkaa 1a* 2019, 22) olevasta mittaamisen ja pareiksi yhdistämisen tehtävistä. Opettajan oppaassa (*Opettajan tienviitta 1a* 2018, 64) alleviivataan, että oppilaille tulee antaa mahdollisuuksia mittaamiseen ja vertailemiseen monenlaisilla välineillä, keinoilla ja erilaisissa tilanteissa, joissa oppilas pystyy saamaan omakohtaisen kokemuksen. Tällä tavoin he pääsevät näkemään, että suhteet pidempi, lyhyempi ja yhtä pitkä eivät muutu.

Mit-taa-mi-nen ja pa-reik-si yh-dis-tä-mi-nen


1. An-ton on pi-tem-pi kuin Lii-sa. Valt-te-ri on yh-tä pit-kä kuin Es-si. Ku-ka on ku-kin?



2. Mi-tä ar-ve-let? On-ko jät-ti-läis-käär-me pi-tem-pi pääs-tä hän-tään vai hän-näs-tä pää-hän mi-tat-tu-na?



3. Mit-taa ko-to-na na-rul-la tai lan-gal-la, kuin-ka le-ve-ä te-le-vi-si-o tai ra-di-o teil-lä on. Tuo na-ru mu-ka-na-si seu-raa-val-le tun-nil-le.



22

Kuva 16. Varga-Neményi -menetelmän oppilaan oppikirjan (*Matematiikkaa 1a* 2019, 22) tehtäväsivu, pituuden mittaaminen, vertailu ja pareiksi yhdistäminen

Kokemus mahdollistaa uuden tiedon tuottamista, arviointia ja soveltamista, jolloin oppilas liikkuu edestakaisin konkreettisesta abstraktiin ja toiminnalliselta tasolta symboliselle tasolle. Määritelmälähtöisyyttä ei aineistosta ole löydettävissä.

Opettajan tienviitta -opettajan oppaista löytyvät oppimista pohjustavat, ohjaavat tai kannustavat sisällöt ovat seuraavat:

- Induktiivisen oppimisen mahdollisuuksien luominen (omakohtainen kokemus, vuorovaikutus, eri matematiikan osa-alueiden ja muiden oppiaineiden sisältöjen yhteen liittäminen, opitun/opittavan siirtäminen oman arjen tilanteisiin/ em. integraation ymmärtäminen)

- Työskentelyn suunnitteleminen ja toteuttaminen kunkin oppilaan osaaminen huomioiden
 - Tehtävien tekemiseen ohjaaminen
 - Keskustelu
 - Kielentäminen ja siihen ohjaaminen
 - Työskentelyn ohjaaminen työskentelyn aikana
 - Toiminnallisuuden mahdollistaminen
 - Jatkuva havainnointi
 - Jo käsitellyn uudelleen avaaminen/muistutteleminen
 - Ryhmätyöskentelyn ohjaaminen
- muu materiaali: moniste- ja PowerPoint -materiaali, opettajan versio oppilaiden toimintavälineistä (mm. värisauvat, viivain)

Oppaista pystyy seuraamaan oppilaiden kirjojen tehtäväsältöä aukeama aukeamalta ja niistä löytyy myös runsaasti perusteluja ja taustatietoa niihin toteutuksiin, joihin ne ohjaavat. Oppaiden loppuosassa on oppilaille monistettavaksi tarkoitettavaa tuki- ja lisämateriaalia, joista on maininta kunkin viikkosuunnitelman aluksi, yhdessä käytettävien havainto- ja toimintamateriaalien kanssa.

Lukuun ottamatta moniste- ja PowerPoint -materiaaleja esille tuodut löytyvät jatkumona opettajan oppaista läpi materiaalin. Hyvin vähän on sellaisia oppisisältöjä, joissa opettajan osuus jäisi ns. tarkkailijan rooliin. Kutakin sisältöä opettajan oppaat ohjaavat pohjustamaan siten, että oppilaille luodaan mahdollisuus em. kokemuksiin ja niiden avulla saavutettavaan taitojen harjoitteluun ja kehittämiseen. Opettajaa ohjataan esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

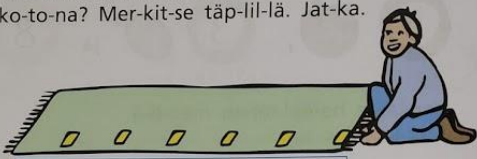
1. Passiivimuotoinen esimerkki:
Toimintamateriaalit: Mitataan esimerkiksi jonkin esineen pituus leveys vaaleanpunaisilla ja vaaleansinisillä värisauvoilla, kumpia värisauvoja tarvitaan enemmän? (*Opettajan tienviitta 1a, 87.*)
2. Lainaus:
Toiminta: "*Katin äiti talutti hänet tänä aamuna kouluun. Kumpi mahtoi astua enemmän askelia?*" Kokeillaan tätä itse luokassa. (*Opettajan tienviitta 1a, 87.*)
3. Vuorokeskusteluun ohjeistuksia, keskustelu vaiheittain.
4. Powerpoint-materiaali, esilletuonti –ohjeineen
5. Ohjeistus materiaalien valintaan ja oppilaiden toiminnan ohjaamiseen

Vuorokeskustelua, matematiikan kielentämistä, tuodaan opettajan oppaissa esimerkin tavoin esille pitkilläkin esimerkkikeskusteluilla, joiden lomaan on tuotu esimerkkejä

erilaisista toiminnallisista osuuksista työskentelyn lomassa. Edellisten avulla oppilas pääsee erilaisin keinoin kehittämään kaikkia neljää kielen osa-aluetta, luonnollista kieltä, kuviokieltä, taktiillista toiminnan kieltä ja harjoituksen edetessä matematiikan symbolikieltä (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 422–425). Näistä kirjoista löytyy myös jokaiseen oppisisältöön liittyvä pohjatieto, joka on katsottu merkitykselliseksi sekä sisältöön että oppilaan oppimisen tukemiseen nähden. Edellä esitettyjä otteita ennen *Opettajan tienviitta 1a* (2018, 87) on kerrottu mittaluvun ja mittayksikön suhteesta seuraavaa: “*Samaan pituuteen eli yhtä pitkään mahtuu enemmän pieniä yksiköitä ja vähemmän suuria yksiköitä. Oppilaan väärää ajattelua ei pidä lähteä korjaamaan selityksin, vaan tarvitaan omakohtaista kokemusta Kokeillaan siis monta kertaa, annetaan oppilaan miettiä ja kertoa asia omin sanoin.*” Opettajan tehtävänä on olla tarjoamassa mahdollisuuksia inklusiiviseen ja abstraktioiden avulla tapahtuvaan oppimiseen. Oppilaita ohjataan omatekoisten mittanauhojen tekemiseen esimerkiksi paperiliittimistä, helmistä, mehupillin pätkistä, langasta tai siimasta. Tehtävät mittaukset kielennetään ja piirretään.

Oppilaan materiaalit sisältävät kuhunkin opiskeltavaan sisältöön liittyviä selkeästi kuvitettuja tehtäviä. Sekä tehtäväsisällöt että niihin laaditut kuvat ovat sisällöltään löydettävissä oppilaiden arjesta. Tehtävistä löytyvät niissä suoritettavien toimintojen lyhyet kuvaukset sekä toisinaan vaihtoehtoisia versioita jonkin sisällön piirtämiseen, kertomiseen tai kirjoittamiseen. Kuvassa 17 (*Matematiikkaa 1a* 2019, 42) maton pituuden mittaustuloksen merkitsemistä ohjeistetaan piirroksen ja siihen liittyvän lyhyen kertomuksen avulla. Mittauksen tulos merkitään täplämerkinnöin.

13. Las-se pa-ni ma-tol-le merk-ke-jä as-ke-leen vä-lein.
 Kuin-ka mo-nen as-ke-leen mit-tai-nen mat-to on
 Las-sen ko-to-na? Mer-kit-se täp-lil-lä. Jat-ka.



14. Mit-taa, kuin-ka mo-nen as-ke-leen mit-tai-si-a mat-to-ja
 teil-lä on ko-to-na. Piir-rä täp-lil-lä.

Pyy-dä i-sää tai äi-ti-ä mit-taa-maan sa-mat
 ma-tot o-mil-la as-ke-lil-laan. Piir-rä i-som-mil-la
 täp-lil-lä.

15. Jat-ka.

<	=	>	=																	
<	=	>																		
<	=																			
<																				

42


Kuva 17. Varga-Neményi -menetelmän oppilaan oppikirjan (*Matematiikkaa 1a 2019*, 42) tehtäväsivu: askeleilla mittaaminen

Opettajan oppaassa (*Opettajan tienviitta 1a 2018*, 79) kuvassa 17 oleviin tehtäviin ohjataan paneutumaan siten, että oppilaat pääsevät aluksi konkreettisesti mittaamisen oikeita mattoja. Tällöin saadaan kokemus myös siitä, mistä mittaaminen tulee aloittaa, jotta mittaustuloksesta saadaan korrekti. Mittaamisen jälkeen pohditaan yhteisesti, onko kuvassa 17 olevassa tehtävän 13 kuvassa mittaamista suorittava Lasse aloittanut mittaamisen vasemmalta vai oikealta ja mistä tuon voi päätellä. Oppilaat voivat myös pohtia, miksi maton vasemmassa laidassa ei ole askelmerkkiä. Tehtävässä 14 sisältöä harjoitellaan myöhemmin vielä kotona konkreettisen mittaamisen avulla.

Oppikirjan ollessa vain yksi opetukseen ja oppimiseen käytettävä materiaali, käytetään opetettavan sisällön oppimiseen toiminnallisuutta ja toimintavälineitä, jotka noudattavat oppikirjaan luotua sisältöä tai jota jalostetaan eteenpäin syventävin, opettajan esille tuomin harjoittein. Oppikirjoista puuttuvat ns. opetusruudut. Niiden sijasta sisältöä harjoitellaan opettajan antamin sisältöön liittyvin tehtävin ja harjoittein, *leikillisyyttä, kokemuksellisuutta ja vuorovaikutuksellista oppimista* hyödyntäen. Oppikirjojen täyttämisen sijaan pyritään paneutumaan tehtävien suorittamisen laatuun ja tekemisen kautta oppimiseen.

Aineiston mukaan oppitunneilla kerätään induktiivisella tavalla lukuisia kokemuksia abstraktion tiellä, jolla kuljetaan useaan kertaan yhden oppitunnin aikana. Oppilaiden mielenkiinto säilyy tehtävien muotoa ja toimintaa vaihtamalla. Opetusta voidaan toteuttaa Perkkilän ym. (2018, 349–351) esille tuomin toteutuksin ja keinoin, joihin luetaan toimintaa ohjaava toiminnallinen taso, toimintaa tukeva ikoninen taso ja toimintaa abstrahoiva symbolinen taso. Läpi kaikkien edellisten toteutuu abstraktion kautta oppiminen. Kokemuksia saadaan toimintavälinein tai kirjallisin tehtävin toteutetuin kokonaisuuksin. Mikäli monipuolisiin tehtäviin liittyy mahdollisuuksia ennustamiseen, kokeilemiseen, salaisuuksien huomaamiseen ja löytämiseen ja itse tekemiseen, mahdollistetaan oppimiseen liittyvä ilo ja oppimiseen sitoutuminen. (*Opettajan tienviitta 1a*, 2018, 17–24.) Edellisestä esimerkkinä on kuvassa 18 oleva kuva tehtäväsivusta oppilaan oppikirjasta (*Matematiikkaa 3a* 2019, 11). Tehtävässä oppilasta pyydetään arvioimaan, vertailemaan ja mittaamaan pituuksia. Lisäksi tehtävänä on piirtää oppikirjaan kirjoitettuja pituuksia arvioimalla piirrettävien viivojen pituudet ilman viivainta suoritettua mittaamista.

8. Kuinka pitkä? Arvioi ja mittaa viivaimella, kuinka suuri on ero? Täydennä.



Arvio: _____
Mittaustulos: _____
Ero: _____

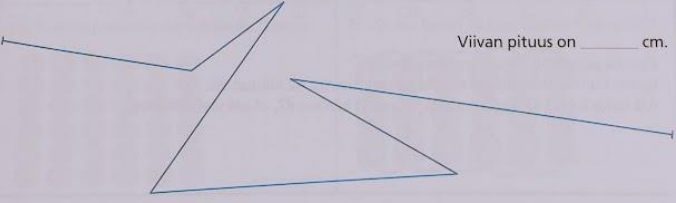
Arvio: _____
Mittaustulos: _____
Ero: _____

Arvio: _____
Mittaustulos: _____
Ero: _____

9. Piirrä viivoja ilman viivainta. Piirrä niiden pituudeksi suunnilleen:

2 cm: —
3 cm: —
6 cm: —
10 cm: —
1 dm: —
12 cm: —

10. Kuinka pitkä on viiva? Mittaa.



Viivan pituus on _____ cm.

11

Kuva 18. Varga-Neményi -menetelmän oppilaan oppikirjan (*Matematiikkaa 3a* 2019, 11) tehtäväsivu: pituuden arvioiminen, vertaaminen, piirtäminen ja mittaaminen

Materiaaleista ei ole löydettävissä tehtäviä, jotka olisivat selkeästi määritelmälähtöisiä, sillä jokaista tehtäväkokonaisuutta pohjustetaan oppilaiden arjesta löytyvin esimerkein, joista keskustellaan tai joita toiminnallisuuden avulla harjoitellaan. Opetus ja oppiminen tapahtuu hyvin vahvasti realistisen lähestymistavan mukaisesti. Varga-Neményi-menetelmän tehtävissä on avoimia ongelmia, joiden ratkaisuun tarvitaan luovuutta ja joustavaa ideoiden ja sovellusten käyttämistä, jollaisiin oppilaita myös ohjataan (Tikkanen 2008, 97). Oppilaat voivat tehtävissä käyttää itse valitsemiaan välineitä tai suoritusmalleja, joiden avulla pyrkivät selvittämään tehtävää ja löytämään sille ratkaisun.

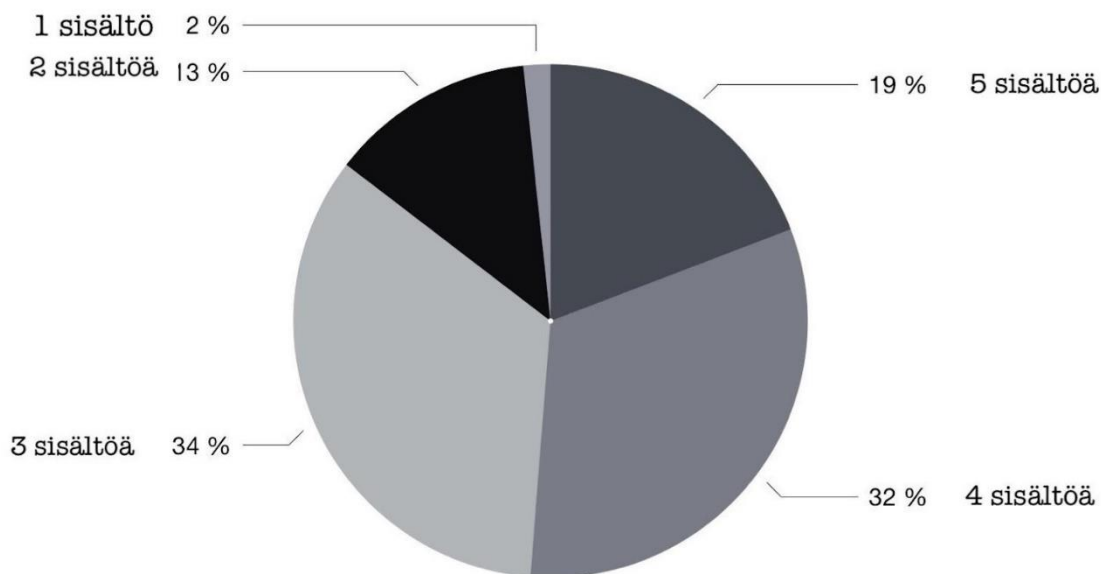
Tehtäväsisällöt

Koodien mukaisesti luokitellut tehtäväsisällöt on kuvattu kuvassa 19. Diagrammi kuvaa, kuinka monta koodia, sisältöä (1–5) kukin analysoitava tehtävä toteuttaa. Nämä sisällöt, alakategoriat sisältöineen ja koodeineen, ovat seuraavat:

1. *Omakehtainen välitön kokemus, arjen tilanteet, pelit ja ohjatut leikit* (ohjattu pedagoginen leikki tai peli, kehollinen kokemus, lapsen arjen tapahtuma ja vuorovaikutus)
2. *Toimintamateriaaleilla työskentely*
3. *Kuvat ja piirtäminen* (kuvien tarkastelu ja tutkiminen, kuvien täydentäminen ja kuvien tuottaminen)
4. *Mielikuvat, välilliset kokemukset* (kielentäminen, puhe, kirjoitettu kieli, visualisointi, matematiikan kieli/symbolit ja matematiikan eri osa-alueiden yhteen liittyminen)
5. *Oppikirja* (konkreettinen toiminto, piirretty vaihe, suullinen vaihe ja symbolein esitetty vaihe)

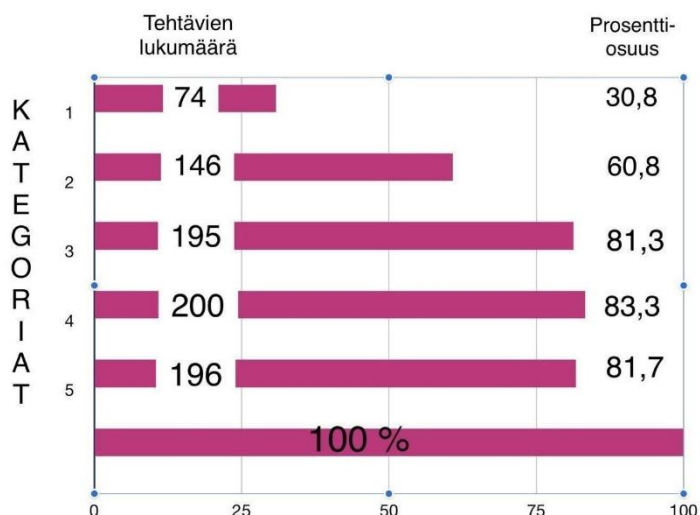
Kuvassa 19 esitetään tutkittavissa tehtävissä (240 kpl) esille tulleet edellä mainittujen alakategorioiden sisältöjen/koodien mukainen prosentuaalinen esiintyvyys aineistossa kuvattuna siten, että nähdään, kuinka monessa prosentissa tehtävistä toteutuu 1–5 sisältöä/alakategoriaa toteuttaen.

Tehtävissä toteutuneet sisällöt



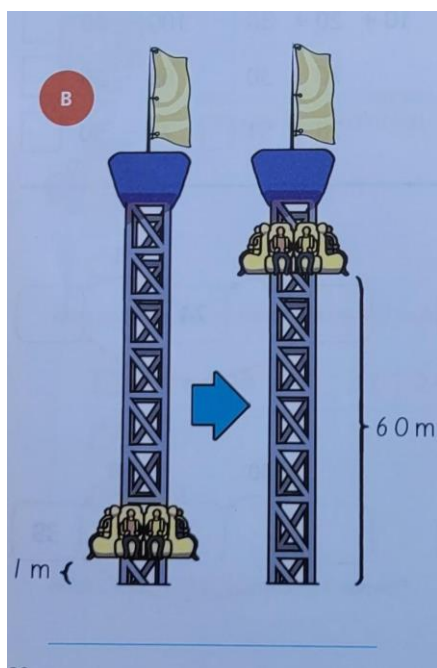
KUVA 19. Toteutuneet tehtäväsisällöt ja niihin liittyvien alakategorioiden prosenttiosuudet (N = 240)

Tutkittaessa edellä esitettyjen tehtäväsisältöjen alakategorioiden esiintymisen kohdalla sitä, kuinka monessa tehtävässä jokainen niistä eriteltynä tarkasteltaessa näyttäytyy, on tulos kuvan 20 mukainen.



KUVA 20. Kunkin alakategorian mukaisten tehtäväsisältöjen näyttäytyminen suhteessa analysoitavien tehtävien lukumäärään (N = 240)

Kuva 20 osoittaa, että selkeästi esille tuotuna vähiten tehtävissä esille tulee alakategorian 1 (*Omaehtainen välitön kokemus, arjen tilanteet, pelit ja leikit*) sisältö, mutta senkin sisältöjä on lähes kolmasosassa (30,8 %) kaikista tehtävistä. Tehtävissä eniten esille tulee alakategorian 4 (*Mielikuvat, välilliset kokemukset*) sisällöt. Tämän kohdalla matematiikan kieli ja symbolit ovat oppiaineen perusasioita, joten niiden esille tuleminen lienee selkeää. Tehtävissä kuitenkin hyvin usein oppilaita ohjataan tuottamaan kirjoitetun tehtäväsuorituksen lisäksi sekä piirretty, kirjoitettu ja myös puhekielellä tuotettu tarina tehtävän etenemisestä ja tulokseen päätyemisestä. Näin matematiikan kielentämisen osuus on suuri. Oppilaan oppikirjassa (*Matematiikkaa 3a 2019, 32*) kuvassa 21 oleva piirros on pohjana tehtävälle, jossa oppilasta pyydetään tutkimaan kuvaa ja kertomaan tarina kuvaparin pohjalta. Oppilaan tulee myös kertoa, mitä kuvassa oleva nuoli tarkoittaa sekä keksiä tarinaan kysymyksiä, joihin voi vastata matematiikan kielellä.



Kuva 21. Varga-Neményi -menetelmän oppilaan oppikirjan (*Matematiikkaa 3a 2019, 32*) tehtävä: muutos pituudessa

Lähes jokaiseen tehtävään kuuluu asioiden ääneen pohtiminen, toiminnallisuus toimintavälineiden hyödyntäminen ja toiminnan kielentäminen sekä vertaisen oppijan että opettajan kanssa.

Koska tulokset osoittavat, että aineistosta löytyi 33 % muihin matematiikan osa-alueisiin integroituneena pituuden mittaamisen sisältöjä, toteutuu tämäkin osana kategorian 4 (*Mielikuvat, välilliset kokemukset*) sisältöjä.

8.2 Pituuden mittaamisen näyttäytyminen muissa matematiikan osa-alueissa

Toinen pääkategoria, pituuden mittaamisen näyttäytyminen muissa matematiikan osa-alueissa, pyrkii osoittamaan, miten pituuden mittaaminen näyttäytyy muissa matematiikan osa-alueissa. Matematiikan eri osa-alueet ovat toisiinsa liittyviä ja oppiminen edistyy eri alueiden vahvistuessa. Opettajan oppaista löytyvät kullekin lukuvuodelle viikkosuunnitelmaehdotus, sekä luettelo ja käyttöohjeet koskien niitä materiaaleja, joita tulisi varata kuhunkin suunniteltuun oppimiskokonaisuuteen. Ohjeiden tarkoituksena on antaa opettajalle tietoa oppilaan tehtävien suunnitteluun, ohjaamiseen ja oppimisen tukemiseen. Opettajan oppaat antavat myös esimerkkejä siitä, miten opettaja voi kutakin tehtäväsisältöä käsitellä. Kuhunkin tehtäväsisältöön annetaan selkeät ohjeet ja erilaisia kielennettyjä esimerkkejä siitä, millaisin keinoin oppilaita voisi ohjata tehtävien sanalliseen pohdintaan, vuorovaikutukselliseen ja kokemukselliseen oppimiseen. Pituuden mittaamisen sisällöt etenevät ja näyttäytyvät sekä omana oppimiskokonaisuutenaan että osana muiden matematiikan osa-alueiden oppimista. Edellinen on löydettävissä selkeästi tutkimusmateriaaleissa läpi kaikkien tutkittavana olevien vuosiluokkien 1–4. Varga-Neményi -menetelmässä ohjeistetaan harjoittelemaan jokaista matematiikan opeteltavaa sisältöä myös muiden matematiikan osa-alueiden sisällöissä sekä erilaisissa arjen tilanteissa.

Pituus näyttäytyy eri osa-alueiden harjoituksissa joko suoraan tai siten, että pituuden mittaamisen avulla oppilas saa kokemuksia, jotka oppimisen hetkellä tai myöhemmin syventyvät kyseisten osa-alueiden harjoituksia tehtäessä. Edelliset on aineistossa nähtävissä seuraavissa osa-alueissa ja sisällöissä: *lukusuora, lukukäsité, lukunaapurit, yhteenlasku, vähennyslasku, kertolasku, jakolasku, murtoluvut, käänteinen murto-osa, likiarvot, kerrannaisuus, pinta-alat, tilavuus, piiri, desimaaliluvut, kymmenjärjestelmä (havainnollistaminen) ja pyöristäminen*. Pituuden mittaamisen avulla harjoitellaan myös *taulukoiden ja diagrammien lukemista ja*

työstämistä sekä monikertoja. Pituuden mittaamisen avulla opitaan ymmärtämään lukujen välisiä eroja ja saadaan kymmenkerran lisäksi kosketuksia myös käänteiseen murto-osaan, jolloin 1 millimetri on kymmenesosa senttimetristä ja yksi senttimetri taas kymmenesosa desimetristä. Kymmenjärjestelmätaitoja harjoitellaan esimerkiksi kuvan 22 (Matematiikkaa 4a 2019, 110–111) mukaisilla tehtävillä 4. vuosiluokalla.

Mitataan pituutta

1. Mittaa ja leikkaa pituudet langasta. Merkitse pituus lankaan. Laita pituudet järjestykseen, pienin ensin. Lisää ruutuun vertailumerkki < > tai =. Lue ääneen.

a) 55 cm b) 3 m c) $2 \text{ ja puoli metriä}$ d) $\text{puolitoista metriä}$
 5 cm 55 mm 35 cm 30 mm 205 cm 25 mm 150 mm 150 cm
 puoli metriä 3 dm 250 cm $1 \text{ m } 50 \text{ cm}$

a)

b)

c)

d)

2. a) Mittaa jonkin huonekalun eri mittoja senttimetrin tarkkuudella.
 b) Mitä nämä samat mitat ovat täysin desimetreinä? Täydennä taulukko.

Huonekalu:	Mittattu ominaisuus	Pituus senttimetreinä	Pituus desimetreinä
		cm	= dm
		cm	= dm
		cm	= dm
		cm	= dm

3. Venytä pituudet sata- tai tuhatkertaiseksi. Lue ääneen.

a) 10 dm 10 cm 8 mm
 b) 10 m 10 dm 10 cm 3 mm
 c) 10 dm 10 cm 16 mm
 d) 10 m 10 dm 10 cm 27 mm
 e) 10 dm 10 cm 205 mm
 f) 10 m 10 dm 10 cm 510 mm

4. Kutista pituudet sata- tai tuhannesosaan. Lisää puuttuvat mittayksiköt. Lue ääneen.


a) 6 m dm cm
 b) 15 m dm cm mm
 c) 70 m
 d) 32 m
 e) 104 m
 f) 136 m

Kuva 22. Varga-Neményi -menetelmän oppilaan oppikirjan (Matematiikkaa 4a 2019, 110–111) tehtävääukeama: pituuden mittaaminen ja kymmenjärjestelmä


Mittaamiselle tulee antaa aikaa ja konkreettisia kokemuksia. Abstraktion tiellä tapahtuva oppiminen, induktiivisesti itse kokien, mahdollistaa eri esitysmuotojen välisten yhteyksien löytämisen ja tämän avulla yleistämisen ja matemaattisen osaamisen vahvistamisen (Opettajan tienviitta 1a 2018, 12–17; Opettajan tienviitta 3a 2018, 21–22). Kuvassa 23 on oppilaan oppikirjan (Matematiikkaa 4a 2019, 148) tehtäväsivu, jossa oppilas harjoittelee pituuden mittaamisen kontekstissa myös jakolaskuun, kertolaskuun ja murtolukuun liittyviä sisältöjä.

19. Mittaa ja leikkaa langanpätkiä, joiden pituudet ovat:
 12 cm, 28 cm, 30 cm, 6 dm, 70 cm, 9 dm ja 1 m
 Taittele jokainen lanka kahteen yhtä pitkään osaan.
 Kirjoita, kuinka paljon on puolet tästä pituudesta.
 Esimerkiksi: $30\text{ cm} / 2 = 15\text{ cm}$

20. Kaksi konetta on liitetty toisiinsa:
 Ensimmäinen kone antaa ulos sen, mikä menee toiseen koneeseen sisään.
 a) Ensimmäinen kone venyttää sisään laitetun langan kymmenkertaiseksi, toinen puolittaa venytetyn langan. Kuinka pitkiä langoista tulee? Täydennä.


10 · 

□	6 cm	2 dm	7 m	13 m	9 mm	18 cm	24 m
◇	60 cm						
◇	30 cm						


12 · 

Miten nauhojen pituus muuttuu? _____

b) Entä kun koneiden järjestystä muutetaan:
 ensimmäinen kone puolittaa ja toinen kymmenkertaistaa?

12 · 

□	6 cm	2 dm	7 m	13 m	9 mm	18 cm	24 m
◇							
◇							

10 · 

Miten nauhojen pituus muuttuu? _____

21. Luettele nopeasti alla olevista luvuista peräkkäin puolikas, neljäsosa ja kahdeksasosa.

40, 24, 16, 80, 120, 48, 64, 20, 56, 72, 32, 36, 100

22. Jatka puolittamista.

a) 64 → 32 → _____ → _____ → _____ → _____

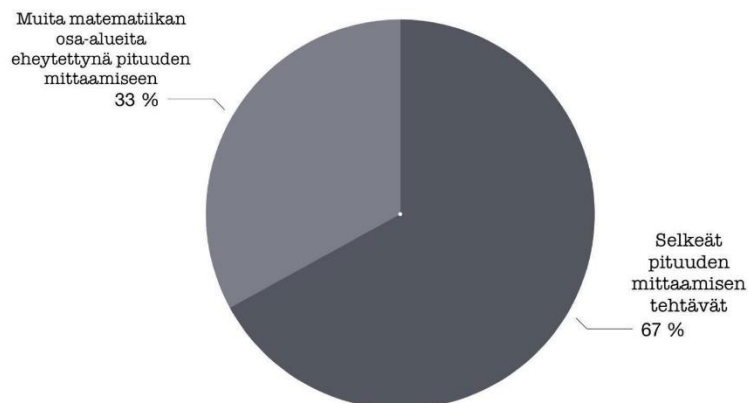
b) 96 → _____ → _____ → _____ → _____ → _____

148

Kuva 23. Varga-Neményi -menetelmän oppilaan oppikirjan (*Matematiikkaa 4a* 2019, 148) tehtävääukeama: pituuden mittaaminen, osamäärä ja monikerta

Aineiston mukaan lukumääräisesti 79 tehtävää ei ollut selkeästi ainoastaan pituuden mittaamiseen liittyviä. Kuva 24 tuo esille prosentuaalisen osuuden pituuden mittaamiseen liittyvistä matematiikan osa-alueista, jotka edellä esitin. Kuvion pohjana oleva 100 % sisältää siis pituuden mittaamisen sisältöjä, mutta tästä tehtäväkokonaisuudesta 33 % käsittelee myös muita matematiikan sisältöjä.

Pituuden mittaaminen



KUVA 24. Pituuden mittaaminen ja muut matematiikan osa-alueet siihen integroituneina (N = 240)

Eri matematiikan osa-alueiden integroituminen pyritään toteuttamaan myös muiden oppiaineiden (KS, KT, KU, LI, YM) oppitunneilla (*Opettajan tienviitta 3a, 48*).

8.3 Pituuden mittaamisen aikana harjoiteltavat taidot

Kolmannen pääkategorian alta löytyvät taidot, joita pituuden mittaamisen yhteydessä harjoitellaan. Vähäisimpänä taitona ei voida pitää vuorovaikutustaitoja tai kunkin oppijan itseluottamuksen tai minäpystyvyyden kasvumahdollisuuksia. Vaikka tutkimukseni ei suoranaisesti paneutunut tutkimaan sitä, miten oppilas reaali maailmassa pituuden mittaamista harjoitellessaan toimii, voidaan tehtävänannoista ja toimintamuodoista päätellä, että materiaali tarjoaa mahdollisuuksia mielekkääseen matematiikan oppimiseen. Ráty-Záborszky (2006, 86), Haapasalo (2004, 88) ja Tikkanen (2008, 67–68) alleviivaavat sitä, että rauhallisessa ja motivoivassa ilmapiirissä tapahtuva kokemuksellinen ja vuorovaikutuksellinen oppiminen, monipuolisten oppimistilanteiden ja erilaisten lähestymistapojen kautta, mahdollistavat oppimista, mahdollisista virheistä huolimatta. Induktiivisen oppimisen kontekstissa voidaan selkeästi nähdä, että edellä kuvattu on selkeä toisinto Varga-Neményi -menetelmässä käytetyistä metodeista.

Vaikka pituuden mittaamisen ja siinä käytettävien välineiden käyttämisen taidot lisääntyvät, tuo aineisto esille, että aihepiiriin kuuluvia sisältöjä harjoitellaan jatkuvasti edellä kuvatuin keinoin. Tehtävissä tulevat yhä esille *toiminnallisuus, toimintavälineillä työskentely, havainnointi, vertailu, arviointi, kokemuksellisuus, kielentäminen, piirtäminen, kirjoittaminen ja erilaisin mittavälinein ja mittaamisen tavoin työskenteleminen*. Opettajan osuus *kielentämisen* tukijana ja ohjaajana säilyy yhä vahvana. Opettajan oma esimerkki *havaintojen ja vertailun* tekemisen kohdalla sekä oppilaiden työskentelyn ohjaaminen heitä *tarkasteluun, pohdintaan, havaintojen jakamiseen ja luonnehtimiseen kannustaminen* näyttäytyvät opettajan oppaissa. *Lähestymistapa säilyy realistisena, mutta ongelmanratkaisullisia* tehtäviä tai tehtäväkokonaisuuksia tuodaan myös jo esille. Oppilaita ohjataan tekemään omia kysymyksiä myös matematiikan kielellä ja siten, että vastaaminen tehdään *kokonaisen lauseen avulla, kielentäen ja matematiikan kielellä esittäen, kirjoittaen ja kuvaten*. Edellisten lisäksi oppilas perehtyy mittayksikköjärjestelmään siirtyen *standardoimattomista yksiköistä asteittain kohti standardoituja mittayksiköitä*, joiden kohdalla opitaan tekemään myös mittayksikkömuunnoksia. Esille nousevat myös kehittyvät *analogiataidot*. Mittaamisen harjoittelemisen mukana kehittyvät sekä *mittaustarkkuus ja mittaustuloksen arvioiminen*. Tähän ryhmään voitaisiin hyvin liittää myös taidot, joita eri matematiikan osa-alueiden kohdalla niiden sisällöissä pituuden mittaamisen ohella harjoitellaan, sillä taidot näillä alueilla kehittyvät toisiaan tukien.

Matematiikan *kielentämisen* avulla oppilas voi pohtia ja oivaltaa oman kokemuksensa kautta omalla kielellään, jolloin hän pääsee ymmärtämään matematiikan käsitteitä ja käsitteiden välisiä yhteyksiä vahvemmin. Opettajan tulee tukea sitä, että oppilaat uskaltavat kielentää, tuoda esille myös keskeneräisiä, puutteellisia tai virheellisiä ajatuksiaan, jolloin yhdessä pohtimisen, toisten lasten argumentoinnin ja eroavien ajatusten kautta oppiminen ja oivaltaminen mahdollistuu. Oppilaan tiedonhankintataitoja, ilmaisukykyä ja ilmaisun halua tulee vahvistaa. (*Opettajan tienviitta 1a*, 2018, 12–13.) Opettajan vastuu matematiikan kielentämisen käynnistäjänä, mallintajana ja ohjaajana näyttäytyy opettajan oppaissa monimuotoisena. Edellistä ovat tuoneet esille Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, 416–418). Oppilaan *Matematiikkaa*-oppikirjoissa ei ole opeteltavaan sisältöön liittyviä opetusruutuja, lukuun ottamatta pituuden mittaamiseen liittyvää tukipiste -informaatiota. Kuvassa 25 (*Opettajan tienviitta 1a* 2018, 78) on esimerkki siitä, miten

opettaja voi ohjata oppilaiden kokemuksiin ja toiminnallisuuteen liittyvää harjoittelua sanallisesti. Opettaja antaa ohjeita työvaiheittain, liittäen puhuttuun informaatioon toimintavälinein tehtävää opastusta.

9. tehtävä: Tornit kannattaa rakentaa pöydän päällä. Näytetään ensin selkeästi ja vaiheittain, miten pohjapiirrosta käytetään rakentamishojeena. Tällaisia pohjapiirrostehtäviä tehdään jatkossa useamman kerran.

Mitataan värisauvojen pituuksia valkoisilla, vaaleanpunaisilla ja vaaleansinisillä värisauvoilla

Painotetaan vielä itse mittaamistapahtuman oppimista ja piirtämistä, ei niinkään pituuden mittaustuloksen ilmaisemista luvuilla. Tehtävänä on mittaaminen ja tuloksen merkitseminen täplillä. Mittaamisen huolellisuutta ei voi tarkistaa, mutta sen voi, että oppilaat ovat mitanneet ja piirtäneet.

Mitataan valkoisilla kuutioilla

1. "Ota esiin valkoinen, vaaleanpunainen, vaaleansininen, kirkkaanpunainen, keltainen ja violetti värisauva." Laitetaan vastaavat värisauvat taululle näkyviin, jolloin niiden löytäminen on oppilaille helpompaa.
2. "Mittaa nämä sauvat valkoisilla kuutioilla." Näytetään, miten mittaaminen tehdään värisauva kerrallaan. Valkoisia kuutioita asetetaan mitattavan värisauvan ala- tai yläpuolelle tarvittava määrä.
3. "Piirrä värisauvat vihkoon/paperille." Piirtämisessä voidaan käyttää apuna värisauvaa, jolloin saadaan helposti suoria ja oikean mittaisia kuvia värisauvoista. Riittää, että oppilaat piirtävät viivan. Piirros voidaan tehdä myös vapaalla kädellä. Väri kertoo, mistä sauvasta on kyse.
4. "Merkitse jokaisen värisauvan alle saman verran täplä kuin tarvitsit valkoisia kuutioita."

Mitataan vaaleanpunaisilla värisauvoilla

1. "Mittaa vaaleanpunaisilla värisauvoilla kirkkaanpunainen, tummanpunainen, vihreä ja oranssi värisauva.
2. Piirrä ne vihkoon/paperille ja merkitse jokaisen alle saman verran täplä eli yhtä monta täplää kuin tarvitsit vaaleanpunaisia värisauvoja sen mittamiseksi."

Mitataan vaaleansinisillä värisauvoilla

1. "Mittaa samalla tavalla kuin äsken myös vaaleansinisillä sauvoina. Etsi sellaiset sauvat, jotka ovat yhtä pitkiä kuin 1, 2, 3, ja 4 vaaleansinisistä sauvaa.
2. Piirrä ne vihkoon ja merkitse myös täplät vaaleansinisten sauvojen paikalle."

Kuva 25. Varga-Neményi -menetelmän opettajan oppaan (*Opettajan tienviitta 1a* 2018, 78) pituuden mittaamisen tehtävä, oppilaiden tehtävän pohjustaminen

Opettajaa ohjataan kertomaan sisältöön johdattelevia tai toimintaa edistäviä konkreettisiin välineisiin tai toiminnallisiin tehtäviin liittyviä kertomuksia, niiden osia tai sanallistaan matematiikan sisältöjä sellaiseen muotoon, joiden avulla oppilaat

pääsevät harjoittelemaan kutakin opeteltavaa asiaa. Oppilaita ohjataan tuomaan esille omia pohdintojaan tai huomiointojaan esimerkiksi tehtyjen vertailujen (*Opettajan tienviitta 1a*, 2018, 66) tai vastaamaan erilaisiin heille asetettuihin selkeisiin kysymyksiin. Kysymykset liittyvät aina konkreettiseen kokemukseen, jonka pohjalta oppilasta ohjataan tekemään vertailuja ja pohdintoja.

9 TUTKIMUSTULOSTEN POHDINTAA JA JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

Tutkimuksen tarkoituksena on ollut selvittää, millaisin tehtävin ja toteutuksin 1.–4.-luokan oppilaan harjoittelevat ja oppivat pituuden mittaamiseen liittyviä sisältöjä ja millaisiin pedagogisiin ja didaktisiin valintoihin opettajan oppaat opettajaa ohjaavat Varga–Neményi -menetelmän 1.–4.-luokan oppilaan *Matematiikkaa*-oppikirjoissa ja *Opettajan tienviitta* -opettajan oppaissa. Tutkittavana oli Varga-Neményi -menetelmän sekä oppilaan että opettajan oppimateriaalit. Tutkimus toteutui laadullisin menetelmin, sisällönanalyysin ja hermeneuttisen otteen avulla, mutta tuloksista laadittiin myös määrällinen koonti, josta voidaan nähdä kunkin esille tulleen kategorian osuus aineistossa. Koetin luoda aineistosta systemaattisen ja kattavan kuvauksen, josta analyysi esittäisi tulokset ja johtopäätökset. (Schreier 2014, 174–176; ks. myös Assarroudi ym. 2018, 47.)

Sisällönanalyysia voidaan kritisoida sen ongelmallisesta ja yksinkertaistavasta suhteesta analyysiin, aineiston laatuun, vuorovaikutukseen ja kieleen. Tästä huolimatta sen tekninen ja mekaaninen luonne houkuttaa tutkijaa lähestymään tutkimustaan tällä metodilla. (Seitamaa-Hakkarainen 2020.) Näen, että analyysin avulla pääsin näkemään sekä niin kutsuttua materiaalista aineistoa, mutta yhtä lailla tulkitsemaan niitä sisällöllisiä painotuksia, joita sisällöstä runsaasti löytyy. Tutkimukseni kohdalla suoraan vertailtavaa materiaalia ei ollut ja tämän koen toisaalta tutkimustyötäni vapauttavaksi, toisaalta taas sen tekemistä vaikeuttavaksi, koska tein luokittelua ilman aiemmista tutkimuksista mahdollisesti saatavia vihjeitä tai ohjausta. Salo (2015, 183) tuo esille ajatuksen, että opiskelijan tulisi pyrkiä kehittämään opinnäytetyössään käytettävälle analyysityölleen toimiva, omintakeinen ja teoretisoiva, sekä uusia, ehkä yllättäviäkin käsitteellisyyksiä esille tuova analyysimalli ja tähän tutkimukseni minua ohjasi. On tunnustettava, että materiaalistani kuoriutui pois lähes yhtä suuri määrä tekstiä kuin siihen lopulta jäi. Olen jo aiemmin tuonut esille, että Varga-Neményi -menetelmä olisi hyvin kiinnostava sisältöineen myös muunlaisin sisällöin toteutettuun tutkimukselliseen lähestymiseen.

Kategorioiden kohdalla käytin paljon aikaa siihen, olisiko ilmi tulleet sisällöt riittävän perusteltuja. Henkilöille, jotka tuntevat Varga-Neményi -menetelmän ja siinä käytettävät menetelmät ja materiaalit, aineiston tuottama tulos saattaa olla itsestäänselvyys. Tämä sai kyseenalaistamaan ja etsimään jotakin muuta, merkittävää

ja rajoja kaatavaa, jonka ei olettaisi olevan ns. ilmiselvää löydettäväksi. Ajattelen kuitenkin, että niille opetusalan henkilöille, joilla menetelmään ei vielä ole ollut aiemmin suurempaa kosketusta, voisivat tutkimukseni sisällön kautta saada uusia ajatuksia oman toiminnan suunnitteluun ja matematiikan opetuksen järjestämiseen laajemmin induktiivista oppimista hyödyntäen.

Tulokset osoittavat, että oppilaan abstraktion tien viisi osa-aluetta ovat vahvasti edustettuina suuressa osassa oppilaalle annetuissa tehtävissä. Koska tutkimuksessa analysoitiin tehtävistä niitä, joita voidaan yksinkertaistetusti nimittää tekstimuotoisiksi tai oppikirja- ja monistetehtäviksi, olisi mahdollista olettaa, että niitä työstettäessä oppilas toimii oppikirjaansa tai monistemateriaaliin keskittyen ja muunlainen työskentely jäisi vähäiseksi. Aineisto osoittaa kuitenkin, että tehtävät edellisestä poiketen tarjoavat oppilaalle mahdollisuuden oppia realistisen tavan mukaisesti, vahvasti induktiiviseen oppimiseen liittyvää ja lapsen ymmärtävää toiminnallista ja kokemuksellista aineistoa tarjoten. Tällöin oppilas löytää yhteneväisyyksiä omasta arjestaan ja pystyy kokemuksiinsa siirtämään kahdensuuntaisesti. Kuvissa tai tarinoissa olevat arjen toiminnot, herkkupiirakat tai itse valittujen esineiden mittaaminen esimerkiksi käden mitoin, tuo pituuden mittaamisen konkreettisesti osaksi lapsen omaa kokemuksestaan ja arkisia tilanteita. Näiden avulla pituuteen liittyvät käsitteet ja toiminnot kehittyvät askel askeleelta totutuiksi matemaattisiksi toiminnoiksi. Näin ollen matematiikan sisällöistä tulee osa todellisuutta (Ikonen 2000, 21). Tällöin myös pääsee toteutumaan Koskisen (2016, 115–122) esille tuomat matemaattisten käsitteiden ja proseduurien neljä erilaista lähestymistapaa: konkreettinen, kontekstuaalinen, sosiaalinen ja tutkiva. Yhtä lailla mahdollistuu mielekkään oppimisen ulottuvuuksien saavuttaminen (Koskinen 2016, 132).

Katson, että Varga-Neményi -opetusmenetelmässä käytettävä runsas ja monipuolinen välineistö, vuorovaikutuksellisen toiminnallisuuden sekä matematiikan kielentämisen kanssa, antavat oppilaalle toimivia mahdollisuuksia kehittää matemaattisten taitojen ohella myös vuorovaikutuksellisia taitojaan. Tällöin toteutuvat myös alakoulun kontekstissa Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus 2014, 99–156) tavoiteltaviksi asetetut laaja-alaiset tavoitteet (L1, L2) jo 1. vuosiluokalta alkaen. Tutkimuksen mukaan myös Perusopetuksen opetussuunnitelman (Opetushallitus 2014, 126–237) matematiikan oppiaineen tehtävä ja tavoitteet toteutuvat Varga-Neményi -menetelmässä käytettävien opetusmateriaalien ja niiden käyttämiseen annettavien ohjeistusten mukaisesti.

Kuten johdannossa kirjoitin, matematiikan oppimiseen liittyvät mielekkyyden löytämisen hidasteet ovat toisinaan vaikuttamassa siihen, että oman arjen "matematiikka" jää kokematta ja sen monimuotoiset mahdollisuudet tajuamatta. Oppikirjatutkimus, toisaalta kuivahkolta kuulostava tutkimusaihe, osoittautui mielenkiintoiseksi ja haastaa itseäni yhä enemmän etsimään ja kehittämään sellaisia toimintamalleja ja materiaaleja, joiden avulla voisin olla avaamassa ovia kullekin oppijalle matematiikan ihmeelliseen maailmaan.

Mitä jos mittanauhasta tulisikin mittaussvälineenä olemisen lisäksi keino ymmärtää murtolukuja tai kertotauluja? Mitä jos uskaltautuisimme enemmän kertomaan, kielentämään omia numeraalisia pohdintojamme, välittämättä virheistä tai oikeiden vastausten puuttumisesta? Mitä jos kaverin kanssa laskien myös vuorovaikutustaidot ja usko minäpystyvyyteen lisääntyisivät?

Mitä paremmin pystyisin opettajana vastaamaan kunkin oppilaan henkilökohtaisiin vahvuuksiin ja vielä vahvistamista vaativiin ominaisuuksiin, sitä mahdollisemmaksi tulisi olla luomassa tulevaisuuden toimijoita, jotka sekä osaisivat että uskaltautuisivat näyttämään sekä kehittämään omia taitojaan.

Tutkimukseni voisi olla pohjana uudelle tutkimukselle, joka jalkautuisi koulumaailmaan ja tekisi vertailevaa tutkimusta toiminnallisen, kokemuksiin liittyvän Varga-Neményi -menetelmän kautta toteutetun pituuden mittaamisen opetuksen ja jollakin toisella menetelmällä toteutetun vastaavan aihepiirin opetuksen välillä. Lähtökohta ja ikä tulisi olla sama, jolloin päästäisiin vertailemaan sitä, mitä ja miten oppilaan oppisivat ja käyttäisivät oppimiaan asioita erilaisissa pituuden mittaamiseen tai pituuden määrittämiseen liittyvissä tilanteissa. Ihanteellista olisi tutkia sitä, millä tavalla kukin oppija suuntautuisi käyttämään oppimaansa ns. matematiikan ulkopuolella, soveltaessaan harjoittelemaansa asioita niitä eri tilanteissa soveltaen ja kehittäen. Vaihtoehtoisesti oivallinen keino voisi olla jokin kokemuksellinen suurempi oppimiskokonaisuus, esimerkiksi liveroolipeli, jossa eheyttäisiin myös muita oppiaineita aihepiiriin ja mahdollistettaisiin luovuus ja toimeliaisuus. Tutkimusta tukisi myös Perusopetuksen opetussuunnitelman tavoitteet siitä, että opittuja asioita tulisi pystyä käyttämään myös koulun ulkopuolella, arkeen sovellettuina ja siellä käyttöön otettuina.

9.1 Etiikka ja luotettavuus

Tutkimuksen tulee Tuomen ja Sarajärven (2017) mukaan olla julkista, saavutettavaa ja puolueetonta. Tutkimus tulee toteuttaa tieteellistä menetelmää ja argumentointia käyttäen. Olen tutkimusta tehdessäni pyrkinyt saavuttamaan edellä mainitut. Olen myös pyrkinyt käyttämään tieteellistä argumentointia, sekä noudattamaan ja edistämään eettisesti vastuullista toimintatapaa ja hyvää tieteellistä käytäntöä. Jokainen tutkimuksessani käytetty taustatieto ja aikaisempi tutkimus on julkisesti tavoitettavissa ja olen viitannut kuhunkin tieteen normiston mukaisesti. (Tuomi & Sarajärvi 2017.) Olen myös pyrkinyt käyttämään useita eri aineistoja, teorioita ja eri tutkijoiden luomia sisältöjä, jolloin katson myös triangulaation toteutuvan (Eskola ja Suoranta 1998, 69). Liittämällä laadulliseen tutkimukseeni myös määrällisiä piirteitä, pyrin siihen, että tutkimastani aineistosta voitaisiin löytää kokonaisvaltaisempi ymmärrys.

Luotettavuudesta puhuttaessa laadullisen tutkimuksen kontekstissa, voidaan nähdä, että tutkimuksen luotettavuudesta on erilaisia, eikä kovin yhteneviä käsityksiä, riippuen siitä, mistä perinteestä käsin tutkimusta on tehty. Totuus ja objektiivisuus nousevat kuitenkin selkeästi esille. Tutkimus nähdään kokonaisuutena, sen sisäistä johdonmukaisuutta (koherenssia) painottaen. Lisähuomiota tulee kiinnittää objektiivisuuteen, manipuloimattomuuteen, jatkuvaan reflektointiin, sekä tarkasti tutkimuskysymykseen vastaavan datan valitsemiseen (Elo ym. 2014, 3). Salon (2015, 177–178) mukaan aineistosta saattaa jäädä huomioimatta tarpeellisia sisältöjä tai tutkija saattaa tehdä omia värittyneitä tulkintoja aineistostaan ja tällöin objektiivisuus menetetään. Olen pyrkinyt huomioimaan sekä tulkitsemaan aineistoa objektiivisesti, huolimatta siitä, että kiinnostukseni kokemukselliseen oppimiseen sekä kunkin oppijan tasa-arvoinen huomioiminen opetusta suunniteltaessa saattaisi vaikuttaa omaan tulkintaani aineistosta ja värittäisi aineiston esille tuomia opetukseen ja oppimiseen liittyviä tehtäviä ja valintoja. Pyrin välttämään tämän usealla eri lähestymistavalla. Sisällönanalyysi yhdistettynä hermeneuttisella kehällä liikkumiseen mahdollisti sen, että kategoriat tarkentuivat ja saivat perustelut valinnoilleen, sekä teoriataustaan että aineistoon pohjautuen. Kokosin aineistosta määrälliset koonnit osoittaakseni siitä esille nousseiden sisältöjen yksityiskohtaiset luonteet ja kohdistumisen eri kategorioihin.

On huomattava, että tutkijuuteni on vielä alkutaipaleellaan, joten tulkinnoissa ja tutkimuksen kuvauksissa tapahtuviin hiomattomuuksiin on mahdollisuuksia. Olen pyrkinyt siihen, että omat tulkintani ja tutkimukseen liittyvät askellukset olisivat läpinäkyviä ja niiden kautta tutkimuksen tulkitsija pystyisi seuraamaan sen kulkua ja näkemään tutkimuksen luotettavuus. Olen pyrkinyt luomaan tutkimusprosessista selkeän ja kuvailevan tutkimusraportin, jolla pyrin tuomaan ilmi sekä oman sitoumukseni tutkijana että perustelemaan sen, miksi tutkimuksellani on merkitys tutkimuskentässä.

9.2 Lopuksi - mitä tämä prosessi antoi

Olen kiinnostunut matematiikan kohdalla siitä, millaiset tekijät vaikuttavat kunkin oppijan henkilökohtaiseen kokemukseen siitä, onko oppiaineen tarkoitus merkittävä vai koetaanko se omasta arjesta irralliseksi asiaksi. Tartuin tilaisuuteen päästä tutkimaan pituuden mittaamista Varga-Neményi -menetelmän keinoin sillä ajatuksella, että löytäisinkö sieltä jotakin sellaista, joka voisi olla tukemassa oppilasta siten, että matematiikan oppiminen koettaisiin monimuotoisemmaksi kuin ulkoa opetellut kaavat ja mekaaninen laskeminen. Tutkimusaineistoni oli ns. valmis kokonaisuus, jota pyrin tulkitsemaan portaittain, odottaen sen antavan sisältöä koodaukseen sekä kategorioiden ja tuloksen luomiseen. Prosessi itsessään toi eteeni tuolloin vielä lähes tuntemattoman projektin. Mitä tutkiminen tai tutkijuus ovat? Millaisia asioita tai sisältöjä tulisi osata etsiä, valita, karsia tai kyseenalaistaa? Millaisiin rajauksiin uskaltautuisin tai kuinka paljon lisää tulisi materiaalia etsiä?

Itselleni rajauksen tekemisen vaikeus oli ilmeinen, sillä koin, että Varga-Neményi-menetelmän päivävarjon alla on hyvin paljon sellaista sisältöä ja merkityksellisiä opetukseen, minäpystyvyyteen, kunkin yksilölliseen oppimiseen ja positiivisen matematiikka-asenteeseen liittyviä sävyjä, joiden sijoittaminen osaksi tutkimusta houkutteli. Tutkimukseni on kuitenkin oppikirjatutkimus, joten edelliset sisällöt jäivät odottamaan uusia tutkimuksia. Näen kuitenkin, että tutkimukseni kautta on mahdollisuus päästä kurkistamaan myös rajauksen ulkopuolelle jääneisiin sisältöihin. Ihminen oppii ja konstruoi tietoa kussakin ikävaiheessa omilla taidoillaan, omien valmiuksiensa avulla, rakentaen samalla kuvaa sekä itsestään että ympärillä olevasta maailmasta (Rauste von Wright, Von Wright & Soini, 2018, 80). Myös

matematiikan ymmärtäminen kehittyy kokemalla, tekemällä, hioutumalla ja tietoa syventämällä. Clements ym. (2020, 2) ja Sarama ym (2021, 1) tuovat esille, että geometriset mittakäsitteet, kuten pituus, paino ja pinta-ala, luovat siltaa matemaattiselle pinta-alan ja lukumäärän määrittelylle. Näin ollen mittaamisen voidaan katsoa olevan merkittävä osa matematiikan opetuksessa. Sen varaan rakentuu arjessa tarvittavien mittaamiseen liittyvien taitojen lisäksi määrällinen päättelytaito myös aritmetiikan, lukujen välisten suhteiden, mittasuhteiden ja verrantojen sekä erilaisten muuttujien määrittämisen kohdalla. Kasvattajan tulee pyrkiä huomioimaan edellä luetellut tavoitteet ja rakentamaan sellaisia kasvamisen ja kehittymisen ympäristöjä, oppimistehtäviä- ja tuokioita, jotka sopivuudellaan ja tehokkuudellaan ruokkivat ja rikastavat tätä oppimista. Ikosen (2000, 21) mukaan uuden asian oppiminen on seurausta jostakin jo opitusta, joka taas on pohjana jollekin seuraavaksi opittavalle. Erilaisten harjoittelu-, symboli-, sääntö- ja rakentamisleikkien avulla lapsi pääsee kokemaan todellisuudessa olevia asioita lapselle sopivin ja ymmärrettävin keinoin. Matemaattiselle ymmärtämiselle tulee voida rakentaa riittävän tukeva perusta, koska matematiikassa uusi tieto rakentuu konstruktivistisesti vanhan tiedon päälle.

Perhoniemi (2014) tuo tekstissään esille tieteenfilosofian sanakirjan, *A Companion of the Philosophy of Science*, kuvauksen matematiikan osa-alueesta, mittaamisesta: *“Mittaaminen on tieteen keskeistä tiedollista toimintaa, joka yhdistää jonkin luvun ja jonkin määrän yritettäessä arvioida kyseessä olevan kvantiteetin suuruutta.”* Mitata voidaan mitä vain, kunhan mitattavien määrälliset suhteet voidaan määrittää ja ne ovat fysikaalisia tai ne voidaan palauttaa johonkin fysikaaliseen, fysiikan teorioiden määrittämään todellisuuteen. Historiallisessa ja kulttuurisessa perinteessä on pyritty tutkimaan mittojen loogisia ja teknisiä ominaisuuksia mittaamisen yhteydessä. Pidetään kuitenkin selvänä, että yhä vieläkin tulkitaan niitä mitan käsitteitä, mittayksiköitä ja mittaustekniikoita, jotka ovat periytyneet meille menneisyydestä jo tuolloin käyttöön otetuista käytänteistä ja teoretisoinneista. Vain mielekäs käyttöyhteys tuo mukanaan merkityksen kulloiseenkin tilanteeseen.

Edellä olevan tahdoin liittää osaksi ajatustani siitä, mitä tutkimukseni minulle antoi. Mitata voidaan tilanteeseen hyvin sopivalla tai löydettävissä olevalla mittausvälineellä. Tärkeää on valita siten, että kussakin mittaustilanteessa mitattavat yksiköt saavat mittaamisen jälkeen verrattavissa olevat tulokset. Mitataan sitten askelin, puukepein, luonnossa kasvavan puun asettaman varjon kuvajaisen tarjoaman

vihjeen avulla tai digitaalisella mittausvälineellä, tärkeimmäksi katsotaan kuitenkin se, että mittaustilanteessa mukana olevat kokevat mittausmenetelmän ja tuloksen ymmärretyksi ja oikein määritellyksi. Lisättäessä ymmärrykseen vielä sanoin käyty keskustelu, lukuihin liittyvät pohdinnat tai mittaustuloksen osiksi asettaminen, saadaan lisää kokemuksia siitä, mihin kaikkeen mittaaminen ulottuukaan arjessa ja matematiikan maailmassa.

LÄHTEET

- Alasuutari, P. 1994. Laadullinen tutkimus. Tampere: Vastapaino, 30–39.
- Anttila, R. & Eskelinen, J. 2010. Toiminnallista geometriaa. Opetuskokeilu 6–luokkalaisille. Jyväskylän yliopisto. Opettajainkoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma. Saatavilla: <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/23763> Luettu 15.9.2021.
- Assarroudi, A., Nabavi, F. H., Armat, M. R., Ebadi, A. & Vaismoradi, M. 2018. Directed qualitative content analysis: the description and elaboration of its underpinning methods and data analysis process. Journal of Research in Nursing 23(1), 42–55. Saatavilla: https://ju.finna.fi/PrimoRecord/pci.cdi_proquest_miscellaneous_2561921_413 Luettu 12.1.2021.
- Aunola, K. & Nurmi, J.-E. 2018. Matemaattisten taitojen kehitys kouluikässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 55–60.
- Boaler, J. 1999. Participation, knowledge and beliefs: a community perspective on mathematics learning. Educational Studies in Mathematics 40, 259–281. Saatavilla: <https://doi.org/10.1023/A:1003880012282> Luettu 27.11.2020.
- Clements, D. H., Sarama, J., Van Dine, D. W., Barrett, J. E., Cullen, G. J., Hudyma, A., Dolgin, R., Cullen, A. L. & Eames, C. L. 2018. Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children. Journal of mathematical behavior, 50 (2018) 23–41, 23. Saatavilla: <https://www.sciencedirect-com.ezproxy.jyu.fi/science/article/pii/S0732312317300858>. Luettu 12.7.2021.

- Clements, H. D., Banse, H., Sarama, J., Tatsuoka, C., Joswick, C., Hudyma, A., Van Dine, W. D. & Tatsuoka, K.K. 2020. Young children's actions on length measurement tasks: strategies and cognitive attributes, *Mathematical thinking and learning*, 2. Saatavilla: <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1843231> Luettu 26.5.2021.
- Coffey, A. 2014. Analyzing documents. Chapter 25. Teoksessa U. Flick (toim.) *SAGE Handbook of qualitative data analysis*. SAGE Publications, 372–375. Saatavilla: <https://www.doi.org/10.4135/9781446282243> Luettu 13.1.2021.
- Drageset, O. G. 2013. Redirecting, progressing, and focusing actions - a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational studies in mathematics* 85, 281–304. Saatavilla: <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9515-1> Luettu 8.12.2020.
- Elo, S., Kääriäinen, M., Kanste, O., Pölkki, T., Utriainen, K. & Kyngäs, H. 2014. Qualitative content analysis: A focus on trustworthiness. *SAGE Open*, 1–10. Saatavilla: <https://doi.org/10.1177%2F2158244014522633> Luettu 14.1.2021.
- Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. Tampere: Vastapaino, 69.
- Gadamer, H.-G. 2004. *Hermeneutiikka – ymmärtäminen tieteissä ja filosofiassa*. Tampere: Vastapaino, 34–134.
- Galperin, P. 1969. Stages in the development of mental acts. Teoksessa M. Cole & I. Marzman (toim.) *A handbook of contemporary Soviet psychology*. New York: Basic Books.
- Haapasalo, L. 2004. Ongelmanratkaisukulttuuri konstruktivismin peruselementtinä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 84–99, 88.

- Hakala, J. & Salminen, V. 2021. Kymmenjärjestelmä alakoulun matematiikan opetusmateriaaleissa. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta. Pro gradu -tutkielma. Saatavilla: <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/130317> Luettu 21.9.2021.
- Hannula-Sormunen, M., Mattinen, A., Räsänen, P. & Ruusuvirta, T. 2018. Varhaisten matemaattisten taitojen perusta: synnynnäiset valmiudet, tietoinen toiminta ja vuorovaikutus. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 161–166.
- Heinonen, J.-P. 2005. Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit. Peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Saatavilla: <https://helda.helsinki.fi/handle/10138/20002> Luettu 20.1.2021.
- Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2007. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Otava, 160–176.
- Hsieh, H.-F. & Shannon, S. E. 2005. Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research* 15 (9). 1277–1288. Saatavilla: <https://doi.org/10.1177/1049732305276687> Luettu 13.1.2021
- Ikonen, O. 2000. Oppimisvalmiudet ja opetus. Jyväskylä: PS-kustannus, 21–22.
- Ikäheimo, H. 2021. Matematiikan osaaminen vahvaksi. Iloa opetukseen ja oppimiseen. Helsinki: ELLI, 441–457.
- Joutsenlahti, J. 2003. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Tampereen yliopisto, 5–7. Saatavilla: https://www.researchgate.net/publication/331702889_Kielentaminen_matematiikan_opiskelussa Luettu 10.10.2020.

- Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisen tehtävääorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampereen yliopisto. Acta universitatis Tamperensis 411. Saatavilla: <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/67453> Luettu 7.1.2021.
- Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. 2019. Sustainability Development in Mathematics Education : A case study of what kind of meanings do prospective class teachers find for the mathematical symbol "2/3"? Sustainability, 11 (2), 6. Saatavilla: <https://doi.org/10.3390/su11020457> Luettu 9.10.2020.
- Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. 2015. Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Julkaisussa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) Rajaton tulevaisuus kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja. Ainedidaktisia tutkimuksia 8, 52.
- Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. 2018. Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 411–425.
- Juuti, P. & Puusa, A. 2020. Laadullisen tutkimuksen taustaoletukset. Teoksessa A. Puusa & P. Juuti (toim.) Laadullisen tutkimuksen näkökulmat ja menetelmät. E – kirja. Gaudeamus.
- Kahanpää, L. & Kangas, O. 2002. Taustakuvia. Matematiikkaa alkuopettajille. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 39. Jyväskylän yliopisto. opettajankoulutuslaitos, 4–5.
- Kajander, K. 2013. Mitä annettavaa filosofisella hermeneutiikalla on etnologialle? Elore 20 (2), 67–76. Saatavilla: https://jyu.finna.fi/Record/jyx.123456789_58988 Luettu 20.9.2021.

- Kajetski, T. & Salminen, M. 2018. Uusi Matikasta moneksi. Toiminnallista matematiikkaa varhaiskasvatuksesta esiopetukseen. Helsinki: Lasten keskus, 129.
- Karvonen, U., Tainio, L. & Routarinne, S. 2017. Oppia kirjoista. Systemaattinen katsaus suomalaisten perusopetuksen oppimateriaalien tutkimukseen. *Kasvatus & Aika* 11 (4), 39–51. Saatavilla: <https://journal.fi/kasvatusjaaika/article/view/68764> Luettu 10.1.2021.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (toim.) 2001. Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington D.C.: National Academy Press, 142.
- Kiviniemi, K. 2018. Laadullinen tutkimus prosessina. Teoksessa R. Valli (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. Näkökulmia aloittelevalla tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin*. Jyväskylä: PS-kustannus, 51–72.
- Koppinen, M.-L., Lyytinen, P. & Rasku-Puttonen, H. 1989. Lapsen kieli javuorovaikutustaidot. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Kortosalmi M.-K. & Perkkilä P. 2021. Kielentämisen näkökulmia kuudennen luokan oppilaiden tuottamiin sanallisten tehtävien ratkaisuihin. Vielä julkaisematon lähde, 1–3.
- Koskinen, R. 2016. Mielekäs oppiminen matematiikan opetuksen lähtökohtana. Helsingin yliopisto. *Tutkimuksia* 379, 18–139 Saatavilla: <https://helda.helsinki.fi/handle/10138/230140> Luettu 12.2.2021.
- Krzywacki, H., Pehkonen, L. & Laine, A. 2012. Promoting mathematical thinking in Finnish mathematics education. Teoksessa H. Niemi, A. Toom & A. Kallioniemi (toim.). *Miracle of education*. Rotterdam: Sense Publishers, 8–9. Saatavilla: <https://ju.finna.fi/Record/jykdok.1277164> Luettu 18.9.2021.

- Kuokkanen, P. (2016). Lukukäsitteen opettaminen 1. luokan opettajan oppaissa. Kolmen oppikirjasarjan vertailua. Helsingin yliopisto. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. Saatavilla: <https://helda.helsinki.fi/handle/10138/162926>
- Laine, T. 2018. Miten kokemusta voidaan tutkia? Fenomenologinen näkökulma. Teoksessa J. Aaltola, R. Valli (toim.). Ikkunoita tutkimusmetodeihin II. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin. E-kirja. Jyväskylä: PS- kustannus.
- Lampinen, A. 2009. Varga–Neményi -menetelmän suomalaistetut materiaalit. Teoksessa P. Tikkanen (toim.) Oppikirja opetussuunnitelman todellistajana. Varga–Neményi -kesäseminaari 2008. Varga–Neményi -yhdistys ry, 23–32. Saatavilla: <https://docplayer.fi/17687666-Oppikirja-opetussuunnitelman-todellistajana-varga-nemenyi-kesaseminaari-2008.html> Luettu 11.9.2020.
- Lampinen, A. & Korhonen, H. 2010. Matematiikkaa kaikille. Estzer Neményin haastattelu. Dimensio 1, 18–22. Saatavilla: <https://varganemenyi.fi/menetelma/tietoa-menetelmasta/unkarista-suomeen/42-unkarista-suomeen-artikkelit/151-varga-nem-nyi-menetelma-unkarissa-ja-suomessa> Luettu 10.9.2020.
- Lampinen, A. & Korhonen, H. 2010. Suomessa opitaan matematiikkaa Varga–Neményi -menetelmän mukaan. Dimensio 2/2010, 27. Saatavilla: <https://drive.google.com/file/d/1exNxhhOK28v9YCzGC7CjQs1UOn2wIUkt/view>. Luettu 10.9.2020.
- Lehtinen, E., Kuusinen, J. & Vauras, M. 2007. Kasvatuspsykologia. Helsinki: WSOY, 122–125.
- Leinonen, J. 2018. Matematiikan ymmärtämisestä. Käsitteistä käytäntöön. Lapin yliopisto. Acta electronica Universitatis Lapponiensis 238. Saatavilla: <https://lauda.ulapland.fi/handle/10024/63282> Luettu 24.5.2021.

- Leiwo, M. 1989. Lapsen kielen kehitys. Helsinki: Yliopistopaino.
- Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. 2015. Using textbooks in the mathematic classroom - the teachers view. Nordic Studies in Mathematics Education, 20(3–4), 129–156. Saatavilla: https://www.researchgate.net/publication/286232223_Using_textbooks_in_the_mathematics_classroom_-_the_teachers%27_view Luettu 8.12.2020.
- Li, Y., Zhang, J. & Ma, T. 2009. Approaches and practices in developing school mathematics textbooks in China. ZDM Mathematics Education 41. Saatavilla: [file:///C:/Users/User1/Downloads/Li2009_Article_ApproachesAndPracticesInDevelo%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/User1/Downloads/Li2009_Article_ApproachesAndPracticesInDevelo%20(1).pdf). Luettu 9.12.2020.
- Lonka, K. 2020. Oivaltava oppiminen. E-kirja. Helsinki: Otava.
- McDonough, A. & Sullivan, P. 2011. Learning to measure length in the first three years in school. SAGE Journals. Australian Journal of Early Childhood 36 (3), 27–35. Saatavilla: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1836939111103600305> Luettu 2.8.2021.
- Mäki, N. & Vihelä, E. 2019. "Kumpi on suurempi, puolet kolmasosasta vai kolmasosan puolikas?" Murtolukukäsitteen opettaminen kolmessa kolmannen luokan oppikirjassa. Jyväskylän yliopisto, Kokkolan yliopistokeskus Chydenius. Pro gradu -tutkielma. Saatavilla: <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/65509> Luettu 3.6.2021.
- Määttänen, P. 1995. Filosofia. Johdatus peruskysymyksiin. Jyväskylä: Gummerus.
- Niemi, E. K. 2008. Matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. luokalla 2007. Oppimistulosten arviointi 1/2008. Helsinki: Opetushallitus. Saatavilla:

<https://docplayer.fi/19588144-Matematiikan-oppimistulosten-kansallinen-arviointi-6-vuosiluokalla-vuonna-2007.html> Luettu 1.10.2021.

Nyblom, J. 2020. Metrin Synty. Tieteessä tapahtuu, 38(5), 1–3
<https://journal.fi/tt/article/view/99565> Luettu 18.4.2021.

Opetushallitus 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. 18–237.
Saatavilla: <https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/perusopetuksen-opetussuunnitelman-perusteet> Luettu 12.12.2020

Perhoniemi, T. 2014. Mitän muunnelmat. Miten määritämme maailmaa, ihmistä ja tietoa. E-kirja. Tampere: Vastapaino.

Perkkilä, P. 1999. Kahden alkuopetuksen matematiikan oppikirjasarjan didaktinen analyysi. Jyväskylän yliopisto. Licensiaatintyö. Saatavilla: <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/10442> Luettu 18.11.2020.

Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 195. Saatavilla: <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/42025> Luettu 20.11.2020.

Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius, V.-M. 2018. Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 345–362.

Piaget, J. 1977. Lapsi maailmansa rakentajana. Helsinki: WSOY, 97–173.

Pound, L. & Lee, T. 2015. Teaching mathematics creatively. Toinen painos. Lontoo:Routledge, 46–74. Saatavilla: <http://web.a.ebscohost.com.ezproxy.jyu.fi/ehost/ebookviewer/ebook/bmxlYmtfXzk4NTMyOV9fQU41?sid=c205240e-ce43-44ee-9a56->

[0f1b5a009057%40sdc-v-sessmgr01&vid=0&format=EB&lpid=lp_iv&rid=0](#)

Luettu 24.11.2020.

Rauste-von Wright, M., von Wright, J. & Soini, T. 2003. Oppiminen ja koulutus. Helsinki: WSOY, 80.

Reichertz, J. 2014. Induction, deduction, abduction. The SAGE handbook of qualitative data analysis. Chapter 9. Teoksessa U. Flick (toim.) The SAGE handbook of qualitative data analysis. SAGE Publications, 123–129. Saatavilla:

https://jyu.finna.fi/PrimoRecord/pci.cdi_askewsholts_vlebooks_9781473971127 Luettu 15.1.2021.

Robinson, A. 2007. Mittaamisen historia. Suomentanut V.-P. Ketola. Kiina:Multikustannus, 10–16.

Räty-Záborszky S. 2006. Suomalaisten ja unkarilaisten opettajien ja matematiikan oppikirjan tekijöiden käsityksiä geometriasta ja geometrian opetuksesta ja oppimisesta vuosiluokilla 1–6. Joensuun yliopiston kasvatustieteellisiä julkaisuja 0112. Saatavilla: <https://erepo.uef.fi/handle/123456789/8536> Luettu 4.5.2021.

Salo, U.-M. 2015. Simsalabim, sisällönanalyysi ja koodaamisen haasteet. Teoksessa S. Aaltonen & R. Högbäck (toim.), Umpikujasta oivallukseen: Refleksiivisyys empiirisessä tutkimuksessa. Nuorisotutkimusverkosto/Nuorisotutkimusseura. Julkaisuja 164, 166–190. Saatavilla: <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/99323> Luettu 26.12.2020.

Samuelsson, I. P. & Carlsson, M. A. 2008. The playing learning children: Towards a pedagogy of early childhood. Scandinavian Journal of Educational Research 52 (6), 623–626. Saatavilla: <https://doi.org/10.1080/00313830802497265> Luettu 3.5.2021.

- Sarama, J. & Clements, D.H. 2020. Building blocks for young children's mathematical development. *Journal of educational computing research*. 27 (1), 93–110. Saatavilla: <https://doi.org/10.2190%2FF85E-QQXB-UAX4-BMBJ> Luettu 28.5.2021.
- Sarama, J., Clements, D. H., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A. & Vanegas, Y. 2021. Length measurement in the early years: teaching and learning with learning trajectories. *Mathematical Thinking and Learning*, 1. Saatavilla: <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1858245> Luettu 4.6.2021.
- Sarenius, V.-M. 2010. Mittaamisen opettamisesta. Luentomateriaali OuLUMA -keskuksen Mittaamisen perusteet -koulutustilaisuudessa 12.4.2010. Saatavilla: [Mittaamisen opettamisesta](#) Luettu 19.7.2021.
- Saros, V. 2018. Matkalla muotojen mestariksi. Jyväskylän yliopisto. Kokkolan yliopistokeskus Chydenius. Pro gradu -tutkielma. Saatavilla: <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/59532> Luettu 11.2.2021.
- Schreier, M. 2014. Qualitative content analysis. *The SAGE Handbook of qualitative content analysis*. Chapter 12. Teoksessa U. Flick (toim.) *The SAGE handbook of qualitative data analysis*. SAGE Publications, 170–180. Saatavilla: <https://methods-sagepub-com.ezproxy.jyu.fi/book/the-sage-handbook-of-qualitative-data-analysis/n12.xml> Luettu 14.1.2021.
- Schreier, M., Stamann, C., Janssen, M., Dahl, T. & Whittal, A. 2019. Qualitative content analysis: conceptualizations and challenges in research practice – introduction to the FQS special issue & quot; Qualitative Content Analysis I": *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research* 20(3). Saatavilla: <https://doi.org/10.17169/fqs-20.3.3393> Luettu 2.1.2021.
- Seitamaa-Hakkarainen, P. 2020. Kvalitatiivinen sisällönanalyysi. Sivustolla **METHODIX** – Metoditietämystä kaikille. Saatavilla:

<https://metodix.fi/2014/05/19/seitamaa-hakkarainen-kvalitatiivinen-sisallon-analyysi/> Luettu 21.12.2020.

Servais, W. & Varga, T. (toim.) 1971. Teaching school mathematics. A Unesco source book. Unesco: Penguin Book, 13–20.

SFS. 2019. SI-opas: 2019. Kansainvälinen suure- ja yksikköjärjestelmä. Saatavilla: [SI-opas](#) Luettu 27.4.2021.

Smith III, J. P., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Teppo, A. R. 2011. Learning, teaching, and using measurement: introduction to the issue. ZDM Mathematics Education 43, 619. Saatavilla: <https://link-springer-com.ezproxy.jyu.fi/content/pdf/10.1007/s11858-011-0369-7.pdf>. Luettu 6.6.2021.

Tainio, L., Karvonen, U. & Routarinne, S. 2014. Käsitykset oppimateriaalin käytöstä äidinkielen opettajaidentiteetin rakentumisen välineenä. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) Rajaton tulevaisuus: Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.-14.2.2014. Helsinki: Suomen didaktinen tutkimusseura, 189–206. Saatavilla: [Tainio, Karvonen & Routarinne 2014](#) Luettu 19.11.2021.

Tieteen termipankki. 2016. Abstraktio. Saatavilla: <https://tieteentermipankki.fi/wiki/Filosofia:abstraktio> Luettu 3.5.2021.

Tikkanen, P. 2008. "Paljon haus Kempaa kuin luulin." Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 337. Saatavilla: <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/18042> Luettu 4.1.2020.

Tikkanen, P. & Lampinen, A. 2005. Unkarilainen Varga-Neményin matematiikan opetusmenetelmä Suomessa. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Matematika Magyar módra Finnországban és Magyarországon. Jyväskylä: TUOPE. 74–88.

- Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2017. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. E-kirja. Helsinki: Tammi.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W, H. & Houang, R. T. 2002. According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 2–18. Saatavilla: [According to the book](#). Luettu 8.12.2020.
- Van de Walle, J.-A. & Karp, K. S. & Bay-Williams J. M. 2014. Exploring what it means to know and do mathematics. Teoksessa J.-A. Van de Walle, K. S. Karp & J. M. Bay-Williams (toim.) Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally. Essex: Pearson education, 397–402
- Varga-Neményi ry. 2014. Suomessa opitaan matematiikkaa Varga-Neményi -menetelmän mukaan. Saatavilla: <https://drive.google.com/file/d/1exNxhhOK28v9YCzGC7CjQs1UOn2wlUkt/view> Luettu 9.10.2020.
- Varga-Neményi ry. 2015. Saatavilla: [Geometria ja mittaaminen - Varganemenyi.fi](#) Luettu 1.6.2021.
- Varga-Neményi ry. 2021. Tutkimukset. Varga-Neményi -menetelmään liittyviä oppinäytteitä. Saatavilla: [Tutkimukset - Varganemenyi.fi](#) Luettu 5.6.2021.
- Viholainen, A., Partanen, M., Piironen, J., Asikainen, M. & Hirvonen, P. E. 2015. The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics; theory, examples and exercises. Nordic Studies in Mathematics Education, 20 (3–4), 174–175. Saatavilla: [\(PDF\) The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises](#) Luettu 17.1.2021.
- Vygotski, L. 1982. Ajattelu ja kieli. Helsinki: Weilin & Göös. 18–186.

Walshaw, M. & Anthony, G. 2008. The teacher's role in classroom discourse: a review of recent research into mathematics classrooms. *Review of educational research* 78 (3), 516–551. Saatavilla: <https://doi.org/10.3102/0034654308320292> Luettu 26.11. 2020.

Wang, T. L. & Yang, D. C. 2016. A comparative study of geometry in elementary school mathematics textbooks from five countries, *European Journal of STEM Education*, 1 (3), 58. Saatavilla: <http://dx.doi.org/10.20897/lectito.201658> Luettu 20.9.2021.

Oppikirjalähteet

Matematiikkaa 1a

Neményi, E. C., Oravecz, M. Sz. & Lampinen, A. 2019a. *Matematiikkaa 1a*. Helsinki: ELLI.

Matematiikkaa 1b

Neményi, E. C., Oravecz, M. Sz. & Lampinen, A. 2019b. *Matematiikkaa 1b*. Helsinki: ELLI.

Matematiikkaa 2a

Neményi, E. C., Oravecz, M. Sz. & Lampinen, A. 2019c. *Matematiikkaa 2a*. Helsinki: ELLI.

Matematiikkaa 2b

Neményi, E. C., Oravecz, M. Sz. & Lampinen, A. 2019d. *Matematiikkaa 2b*. Helsinki: ELLI.

Matematiikkaa 3a

Neményi, E. C., Wéber, A., Oravecz, M. Sz., Lampinen, A., Puumalainen, K. & Paavola, S. 2019e. *Matematiikkaa 3a*. Helsinki: ELLI.

Matematiikkaa 3b

Neményi, E. C., Wéber, A., Lampinen, A., Paavola, S., Peltola, P. & Puumalainen, K. 2019f. Matematiikkaa 3b. Helsinki: ELLI.

Matematiikkaa 4a

Neményi, E. C., Káldi, É., Wéber, A., Lampinen, A., Kurkinen, H. & Merenvainio, L. 2019g. Matematiikkaa 4a. Helsinki: ELLI.

Matematiikkaa 4b

Neményi, E. C., Káldi, É., Wéber, A., Lampinen, A., Hakkarainen, A., Merenvainio, L., Kurkinen, H. & Nummila, M. 2019h. Matematiikkaa 4b. Helsinki: ELLI.

Opettajan tienviitta 1a

Lampinen, A., Neményi, E. C. & Oravecz, M. Sz. 2018a. Opettajan tienviitta 1a. Helsinki: ELLI.

Opettajan tienviitta 1b

Lampinen, A., Neményi, E. C. & Oravecz, M. Sz. 2018b. Opettajan tienviitta 1b. Helsinki: ELLI.

Opettajan tienviitta 2a

Lampinen, A., Neményi, E. C. & Oravecz, M. Sz. 2018c. Opettajan tienviitta 2a. Helsinki: ELLI.

Opettajan tienviitta 2b

Lampinen, A., Neményi, E. C. & Oravecz, M. Sz. 2018d. Opettajan tienviitta 2b. Helsinki: ELLI.

Opettajan tienviitta 3a

Lampinen, A., Neményi, E. C., Wéber M., Oravecz, M. Sz. & Puumalainen, K. 2018e. Opettajan tienviitta 3a. Helsinki: ELLI.

Opettajan tienviitta 3b

Lampinen, A., Neményi, E. C., Wéber, A. & Peltola, P. 2018. Opettajan tienviitta 3b. Helsinki: ELLI.

Opettajan tienviitta 4a

Lampinen, A., Neményi, E. C., Káldi, É. & Wéber, A. 2018g. Opettajan tienviitta 4a. Helsinki: ELLI. Kokeilupainos 2019.

Opettajan tienviitta 4b

Lampinen, A., Neményi, E. C. & Káldi, É. 2018h. Opettajan tienviitta 4b. Helsinki: ELLI. Kokeilupainos 2019.