

Iteratiiviset rekonstruktio menetelmät röntgentomografiassa

Kandidaatintutkielma, 24.5.2021

Tekijä:

TOMMI LYYTINEN

Ohjaajat:

ARTTU MIETTINEN

JANNE YLIHARJU



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIIKAN LAITOS

© 2021 Tommi Lyytinen

Julkaisu on tekijänoikeussäännösten alainen. Teosta voi lukea ja tulostaa henkilökohtaista käyttöä varten. Käyttö kaupallisiin tarkoituksiin on kielletty. This publication is copyrighted. You may download, display and print it for Your own personal use. Commercial use is prohibited.

Tiivistelmä

Lyytinen, Tommi

Iteratiiviset rekonstruktio menetelmät röntgentomografiassa

Kandidaatintutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2021, 44 sivua

Iteratiiviset rekonstruktio menetelmät ovat nousseet varteenotettaviksi vaihtoehtoiksi analyttisen rekonstruktion rinnalle röntgentomografiassa, jossa suodatettu takaisinprojektio (FBP) on ollut laajasti käytetyin rekonstruktio menetelmä viime vuosikymmenten aikana sen laskennallisen nopeutensa ansiosta. Tietokoneiden laskentatehon kasvaminen ja iteratiivisten menetelmien kehittyminen ovat konkretisoineet niiden käyttömahdollisuudet eri röntgentomografian sovelluskohteissa. Erityisesti statistiset ja mallipohjaiset menetelmät ovat osoittaneet kykyä kuvata rekonstruktio prosessia FBP-menetelmää tarkemmin, mikä on tehnyt mahdolliseksi laadukkaampien kuvien muodostamisen vähäisemmällä artefakteilla ja säteilyannoksella.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan erilaisia algebrallisia, statistisia ja mallipohjaisia iteratiivisia rekonstruktio menetelmiä kirjallisuuskatsauksen muodossa. Tutkimusaineiston ja menetelmien teoreettisen taustan pohjalta tuodaan esille, kuinka iteratiivisilla menetelmillä voidaan rekonstruoida tarkempia kuvia vähäisemmällä artefakteilla sekä pienemmällä säteilyannoksella samalla pitäen laskenta-ajan käytännöllisenä.

Avainsanat: röntgentomografia, algebrallinen rekonstruktio, statistinen rekonstruktio, mallipohjainen rekonstruktio, artefaktit.

Abstract

Lyytinen, Tommi

Iterative reconstruction methods in x-ray computed tomography

Bachelor's thesis

Department of Physics, University of Jyväskylä, 2021, 44 pages.

Iterative reconstruction methods have become viable alternatives to the analytical reconstruction in x-ray computed tomography, where filtered back projection (FBP) has been the most widely used method in the past decades because of its computational speed. Increased computational power of current workstations and improvements in iterative methods have concretized their potential use in the different applications of computed tomography. Especially statistical and model-based methods have shown their ability to describe the reconstruction process in more detail than FBP-method which has made it possible to reconstruct higher quality images with less artifacts and at a lower radiation dose.

This thesis examines various algebraic, statistical and model-based iterative reconstruction methods in the form of a literature review. Based on the research material and the theoretical background of the methods, it is presented how the iterative methods can be used to reconstruct more accurate images with less artifacts as well as at a lower radiation dose while keeping the reconstruction time practical.

Keywords: x-ray computed tomography, algebraic reconstruction, statistical reconstruction, model-based reconstruction, artifacts.

Sisällys

Tiivistelmä	3
Abstract	5
1 Johdanto	9
2 Röntgentomografia	11
2.1 Röntgensäteilyn vuorovaikutukset ja vaimeneminen	11
2.2 Röntgentomografian toimintaperiaate	12
2.3 Rekonstruktio	14
2.4 Rekonstruktion artefaktit	16
3 Iteratiiviset menetelmät	19
3.1 Algebrallinen rekonstruktio	19
3.1.1 Algebrallinen rekonstruktiotekniikka (ART)	21
3.1.2 Samanaikainen iteratiivinen rekonstruktiotekniikka (SIRT)	23
3.1.3 Samanaikainen algebrallinen rekonstruktiotekniikka (SART)	24
3.2 Statistinen rekonstruktio	25
3.2.1 Suurimman uskottavuuden estimointi (ML-EM)	26
3.2.2 Maximum a posteriori-estimointi (MAP)	28
3.3 Mallipohjainen rekonstruktio	30
4 Rekonstruktio menetelmien vertailu	33
4.1 Kohinan ja säteilyannoksen vähentäminen	33
4.2 Metalliartefaktien vähentäminen	34
4.3 Rekonstruktion kesto	36
5 Yhteenveto	39
Lähteet	41

1 Johdanto

Röntgentomografia on laajasti käytetty kuvantamismenetelmä, jota hyödynnetään esimerkiksi materiaalien tutkimuksessa, lääketieteessä ja teollisuudessa kappaleiden sisäisten rakenteiden selvittämiseen. Röntgentomografiassa tutkittavasta kappaleesta otetaan röntgenkuvia useista suunnista, joiden avulla muodostetaan kuvia kappaleen sisäisestä kolmiulotteisesta rakenteesta. Röntgentomografian tieteellinen perusta kehittyi hiljalleen 1900-luvun aikana. Kuvantamismenetelmää päästiin soveltamaan käytäntöön vasta 1970-luvun alussa, jolloin ensimmäinen röntgentomografialaitteisto kehitettiin lääketieteelliseen käyttöön Godfrey Hounsfieldin toimesta [1].

Röntgentomografian alkuvuosina rekonstruktio eli kuvan muodostaminen mitatusta datasta suoritettiin iteratiivisella algebrallisella rekonstruktiotekniikalla. Menetelmä oli kuitenkin laskennallisesti liian vaativa sen aikaisille tietokoneille, erityisesti mikäli kuvan tarkkuus oli suuri tai edes käytännön sovelluksiin riittävä. Niinpä algebrallisen rekonstruktion rinnalle kehittyi vaihtoehtoinen menetelmä, niin kutsuttu suodatettu takaisinprojektio (FBP), joka ylestyi nopeasti laskennallisesti kevyempänä menetelmänä. Kuitenkin viime vuosikymmenten aikana tietokoneiden laskentateho ja iteraatioon perustuvat menetelmät ovat kehittyneet, mikä on nostanut iteratiivisen rekonstruktion varteenotettavaksi vaihtoehdoksi röntgentomografiassa.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan monipuolisesti erilaisia iteratiivisia rekonstruktio menetelmiä lähtien liikkeelle algebrallisista rekonstruktiotekniikoista edeten kehittyneempiin statistisiin ja mallipohjaisiin menetelmiin. Tarkoituksena on tuoda esille, kuinka iteratiivisilla menetelmillä voidaan rekonstruoida tarkempia kuvia vähäisemmällä artefakteilla eli kuvien vääristymillä sekä pienemmällä säteilyannoksella samalla pitäen laskenta-ajan käytännöllisenä.

2 Röntgentomografia

Tässä luvussa käydään läpi yleisesti röntgentomografian perusteita, lähtien röntgensäteilyn fysikaalisista ominaisuuksista ja röntgentomografian toimintaperiaatteesta. Lisäksi esitellään rekonstruktioita yleisesti verraten analyttistä ja iteratiivista rekonstruktioita sekä tuodaan esille rekonstruktioon liittyviä haasteita, kuten kuvissa esiintyviä artefakteja.

2.1 Röntgensäteilyn vuorovaikutukset ja vaimeneminen

Röntgensäteily on sähkömagneettista säteilyä, jonka energia-alue on kuvantamistutkimuksissa 10–150 keV [2]. Suuren energiansa ansiosta röntgensäteily on läpikäyvä eli se pystyy kulkemaan aineen läpi. Säteilyn vaimeneminen perustuu aineen ja säteilyn vuorovaikutuksiin, jotka ovat riippuvaisia aineen rakenteesta ja säteilyn energiasta. Röntgensäteilyn energia-alueella esiintyvät vuorovaikutusilmiöt ovat valosähköinen ilmiö, Comptonin sironta ja elastinen Rayleighin sironta, joista etenkin valosähköinen ilmiö ja Comptonin sironta ovat merkittäviä röntgentomografian kannalta [2].

Valosähköisessä ilmiössä fotonin energia siirtyy elektronille hävittäen itse prosessissa. Osa fotonin energiasta kuluu elektronin irrottamiseen atomista ja jäljelle jäävä energia siirtyy elektronin kineettiseksi energiaksi. Comptonin sironnassa fotonin energia siirtyy osan energiastaan löyhästi sidotulle elektronille. Vuorovaikutuksen seurauksena fotonin energia pienenee ja sen etenemissuunta muuttuu energian ja liikemäärän säilymislain mukaisesti. Elastisessa Rayleighin sironnassa säteilyn energia siirtyy atomin elektronien värähtelyiden energiaksi. Elektronien värähtely synnyttää uutta säteilyä, jonka energia ei ole juurikaan muuttunut, ainoastaan sen suunta. Suunnanmuutoksetkin ovat yleensä hyvin pieniä ja ilmiö on todennäköinen vain matalilla röntgensäteilyn energioilla [2].

Valosähköisen ilmiön ja Comptonin sirontan vaikutuksesta röntgensäteily vaimenee eli sen intensiteetti pienenee röntgensäteilyn kulkiessa aineessa. Yleisesti sähkömagneettisen säteilyn intensiteetin pienenemistä aineessa voidaan kuvata

Beer–Lambertin lailla [1]

$$I = I_0 e^{-\int_C \mu(x) dx}, \quad (1)$$

jossa I_0 on säteilyn intensiteetti ennen ainetta, I on vaimentuneen säteilyn intensiteetti polkua C pitkin, syvyydellä x ja $\mu(x)$ on aineelle ominainen lineaarinen vaimennuskerroin.

Jo edellä todettiin, että säteilyn vuorovaikutusmekanismit riippuvat säteilyn energiasta, joten säteilyn vaimeneminen on riippuvaista energiasta ja sitä vastaavasta aallonpituudesta. Röntgentomografiassa röntgenputkella tuotettu röntgensäteilyn spektri on polykromaattinen eli se sisältää useita eri aallonpituuksia, joten eri aallonpituudet vaimenevat aineessa eri tavoin. Kuitenkin säteilyn vaimenemista kuvaavan Beer–Lambertin lain (1) lineaarisessa vaimennuskertoimessa $\mu(x)$ ei ole mukana energiariippuvuutta, joten yhtälö on kyseisessä muodossa tarkka vain monokromaattiselle säteilylle. Tavanomaisissa iteratiivisissa ja analyttisissä rekonstruktio menetelmissä energiariippuvuutta ei kuitenkaan lisätä yhtälöön, vaan yhtälön epätarkkuudesta aiheutuvia kuvien artefakteja korjataan muilla keinoilla [1]. Kuitenkin uudemmissa kaksois- ja monienergiakuvantamismenetelmissä [20] sekä statistisissa ja mallipohjaisissa menetelmissä on mahdollista soveltaa Beer–Lambertin lain polykromaattista muotoa [19][4].

2.2 Röntgentomografian toimintaperiaate

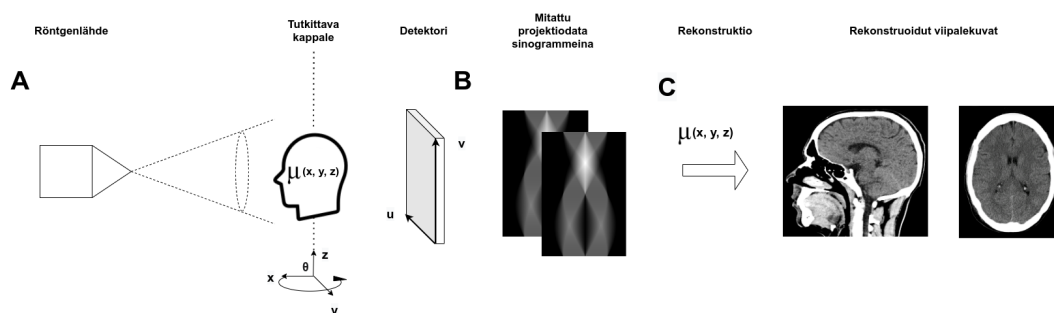
Röntgentomografiassa tutkittavaa kappaletta säteilytetään useasta suunnasta ja mitataan, kuinka röntgensäteilyn intensiteetti on pienentynyt kohtaamassaan aineessa. Eri suunnista mitattujen röntgensäteilyn intensiteettien suhteiden avulla on tarkoitus selvittää aineen sisäinen rakenne, joka on aiheuttanut mitatun vaimenemisen. Kyseessä on siis matemaattinen käänteisongelma eli inversio-ongelma, jossa tarkoituksena on ratkaista Beer–Lambertin lain (1) mitattujen intensiteettien I_0 ja I suhteen avulla vaimennuskerroin $\mu(x)$. Beer–Lambertin lain (1) ratkaistava viivaintegraali voidaan esittää yhtäpitävästi muodossa

$$p = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \int_C \mu(x) dx, \quad (2)$$

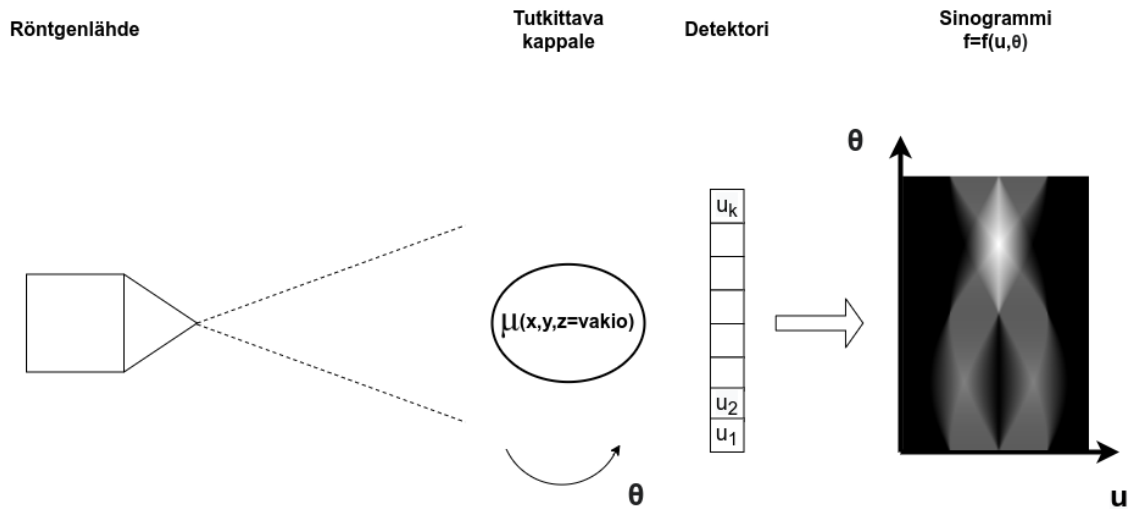
jossa mitattujen intensiteettien I_0 ja I suhteen logaritmin vastalukua nimitetään projektioksi p .

Projektioiden p arvot määräytyvät detektorin pikseleiden (u,v) -koordinaattien ja säteilykulman θ funktiona $p = p(u,v,\theta)$ (kuvio 1). Tällöin myös ratkaistavasta vaimennuskertoimesta tulee tutkittavan kappaleen tavoin kolmiulotteinen $\mu(x,y,z)$. Röntgentomografian keskeinen idea on siis ratkaista kappaleen kolmiulotteisen vaimennuskertoimen $\mu(x,y,z)$ arvot ja esittää ne kolmiulotteisena kuvana, joka voidaan koostaa esimerkiksi kaksiulotteisista kuvista $\mu(x,y)$ kullekin $z = \text{vakio}$ tasolle.

Kuviossa 1 on esitetty röntgentomografian keskeisiä vaiheita. Kuvion 1 vaiheessa A säteilyn vaimentumista mitataan eri suunnista detektorilla ja vaiheessa B mitattu projektiodata esitetään useana sinogrammilla. Kullakin sinogrammilla voidaan kuvata säteilyn vaimentumista tutkittavan kappaleen 2D-viipaleessa. Sinogrammi on funktio $f = f(u, \theta)$, joka kuvaa viipaleen projektiot harmaasävyinä detektoripikselien sijainnin sekä mittauskulman funktiona. Tarkempi havainnollistus sinogrammin muodostumisesta on esitetty kuviossa 2.



Kuvio 1. Periaatekuva röntgentomografian toiminnasta. A) Tutkittavasta kappaleesta mitataan projektioita useilla eri kulmilla θ . B) Mitattu projektiodata esitetään useana sinogrammilla $p(u, v = \text{vakio}, \theta)$. C) Sinogrammien projektiodatan avulla ratkaistaan vaimennuskertoimen $\mu(x,y,z)$ arvot ja muodostetaan lopulliset viipalekuvat tutkittavasta kappaleesta erilaisilla rekonstruktio menetelmillä. Rekonstruoidut viipalekuvat vas. Wikipedia, CT of a normal brain (CC0 1.0), oik. Wikipedia, Brain CT scan, Aaron G. Filler, MD, PhD (CC BY-SA 3.0).



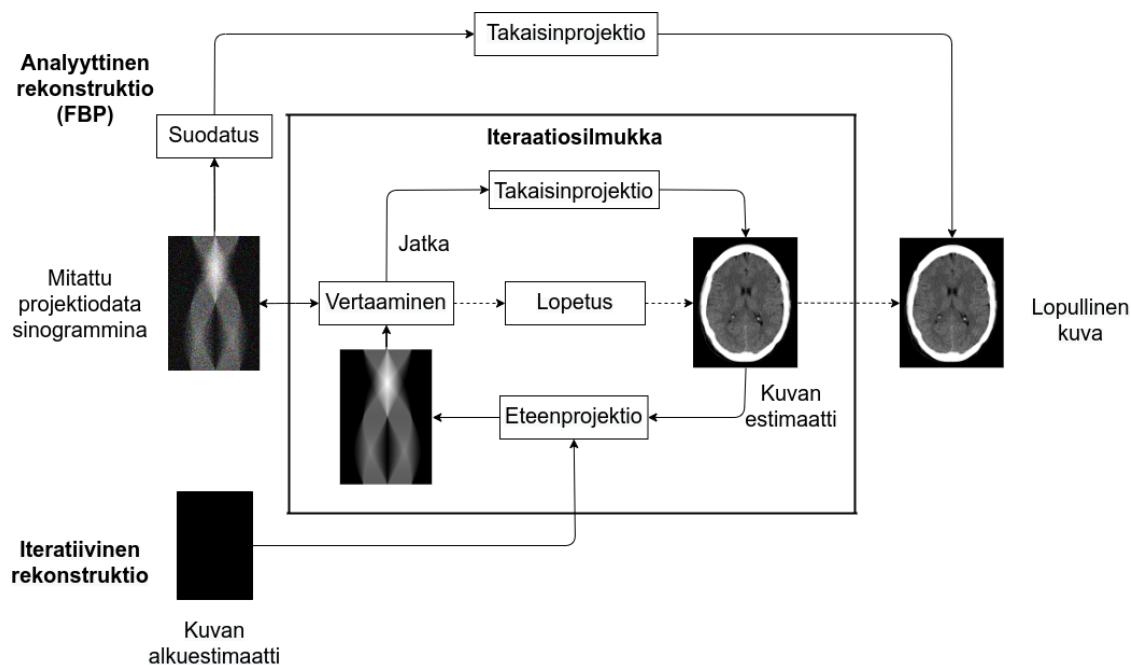
Kuvio 2. Kaaviokuva kappaleen 2D-viipaleesta xy -tasossa ($z=\text{vakio}$), missä eri kulmilla θ ja detektoripikseleiden ($u, v = \text{vakio}$) projektioiden arvoilla muodostetaan sinogrammi $f = f(u, \theta)$, jossa projektioiden arvot kuvautuvat harmaasävyinä.

2.3 Rekonstruktio

Tomografinen rekonstruktio eli kuvien muodostaminen mitatuista projektiosta voidaan suorittaa kahdella pääasiallisella tavalla, jotka ovat analyyttinen ja iteratiivinen rekonstruktio. Kyseisten menetelmien vaiheista on esitetty havainnollistus kuviossa 3. Analyyttinen rekonstruktio tapahtuu suoraan yhdellä iteraatioaskeleella takaisinprojisioimalla mitatut projektiot kuvaksi, kun taas iteratiivinen rekonstruktio tapahtuu useissa iteraatioaskelissa tyypillisesti projektiio- ja kuva-avaruuden välillä suorittaen matemaattisia korjauksia kuviin. Iteraatioaskeleiden korjaustermien avulla kuvat pyritään sovittamaan mahdollisimman tarkasti mitattuun projektiodataan, kunnes iteraation lopetuskriteeri saavutetaan.

Eteenprojektio on matemaattinen operaatio, jolla siirrytään kuva-avaruudesta (eng. image domain) projektiio-avaruuteen (eng. projection domain). Sen avulla saadaan laskettua iteratiivisessa rekonstruktiossa kuvaestimaattia vastaavat projektioiden arvot, jotka pyritään saada vastaamaan mitattuja projektioiden arvoja. Takaisinprojektio on puolestaan matemaattinen operaatio, jolla siirrytään projektiioavaruudesta takaisin kuva-avaruuteen ja määritetään käytetyn rekonstruktioimenetelmän mukainen estimaatti kuvalle.

Keskeisin analyttinen rekonstruktio menetelmä on suodatettu takaisinprojektio menetelmä (FBP, eng. filtered back projection), joka on käytetyin rekonstruktio menetelmä nykypäivän röntgentomografiassa sen laskennallisen nopeuden ja robustisuuden ansiosta [5]. FBP-menetelmässä projektiot Fourier-muunnetaan taajuus-avaruuteen (eng. frequency domain), jossa matalia taajuuksia suodatetaan ylipäästösuodattimella (esim. Ram–Lak-suodatin) [6]. Taajuus-avaruudessa matalat taajuudet vastaavat sileitä osia kuvasta ja korkeat taajuudet puolestaan teräviä reunoja ja yksityiskohtia, minä seurauksena korkeita taajuuksia korostetaan kuvan terävöittämiseksi. Suodatuksen jälkeen data muunnetaan takaisin projektio-avaruuteen Fourier-käänteismuunnoksella ja takaisinprojisoidaan kuvaksi [6].



Kuvio 3. Kaaviokuva analyttisen (FBP) ja iteratiivisen rekonstruktion vaiheista, missä menetelmiä on verrattu iteraatioiden näkökulmasta. FBP-menetelmässä rekonstruktio tapahtuu suoraan yhdellä iteraatioaskeleella takaisinprojisoidamalla mitatut projektiot kuvaksi suodatuksen kautta. Iteratiivisessa rekonstruktiossa kuvaestimaattia päivitetään iteraatio-silmukassa, kunnes jokin lopetus-kriteeri saavutetaan. Kuvion iteraatio-silmukassa eteenprojektio tarkoittaa kuvaestimaatin vaimennuskertoimien avulla laskettuja projektioiden arvoja, joita verrataan mitattuihin projektioihin. Tavoitteena on siis saada kuvaestimaatin avulla lasketut projektiot vastaamaan mitattuja projektioita mahdollisimman tarkasti. Takaisinprojektio kuvaa matemaattista operaatiota, jolla muodostetaan kuva tutkittavasta kappaleesta siirtymällä projektio-avaruudesta takaisin kuva-avaruuteen. Kuva aivoista: Wikipedia, Brain CT scan, Aaron G. Filler, MD, PhD (CC BY-SA 3.0)

2.4 Rekonstruktion artefaktit

Rekonstruktiossa esiintyy aina jotain artefakteja eli kuvien vääristymiä johtuen tomografialaitteiston epäideaalisuudesta ja rekonstruktion käänteisongelman luonteesta. Tekijät, kuten röntgensäteilyn polykromaattisuus, Beer–Lambertin lain väärät oletukset, sironta, detektorien epäideaalisuus ja tutkittavan kappaleen liikkuminen aiheuttavat artefakteja rekonstruktioon. Tässä luvussa esitellään lyhyesti rekonstruktio menetelmien kannalta keskeisiä artefakteja ja niiden syntymekanismeja.

Kohina eli satunnainen vaihtelu pikseleiden arvoissa on yksi keskeinen artefakti rekonstruoiduissa kuvissa. Sitä voi syntyä detektorin elektroniikan ja kameran epätarkkuuksista sekä statistisesta epävarmuudesta fotonien havaitsemisessa, mikä tunnetaan Poissonin kohinana. Poissonin kohinan merkitys kuvissa kasvaa, kun havaittujen fotonien lukumäärä on pieni, jolloin statistinen epävarmuus on suurta. Röntgenfotonien statistiikkaa voidaan mallintaa rekonstruktiossa Poissonin jakaumalla, minkä avulla kuvissa esiintyvää kohinaa voidaan vähentää [4].

Kuvassa esiintyvän kohinan mittarina voidaan käyttää signaali-kohinasuhdetta (SNR), joka on

$$\text{SNR} = \frac{\text{signaalin taso}}{\text{kohinan taso}} = \frac{\mu}{\sigma}, \quad (3)$$

jossa μ on signaalin odotusarvo ja σ on keskihajonta. Kun fotonien statistiikkaa mallinnetaan Poissonin jakaumalla, niin jakauman odotusarvolle ja varianssille pätee yhtäsuuruus $\mu = \sigma^2$ [6]. Merkitään odotusarvoa $\mu := n^*$, kun viitataan fotonien lukumäärän satunnaismuuttujaan \mathcal{N} , jolloin signaali-kohinasuhde saadaan muotoon

$$\text{SNR}(\mathcal{N}) = \frac{n^*}{\sqrt{n^*}} = \sqrt{n^*}, \quad (4)$$

josta nähdään, että signaali-kohinasuhde paranee, kun fotoneita havaitaan enemmän. Fotonien lukumäärä on toisaalta verrannollinen säteilyannokseen, joten signaali-kohinasuhde paranee annosta kasvattamalla

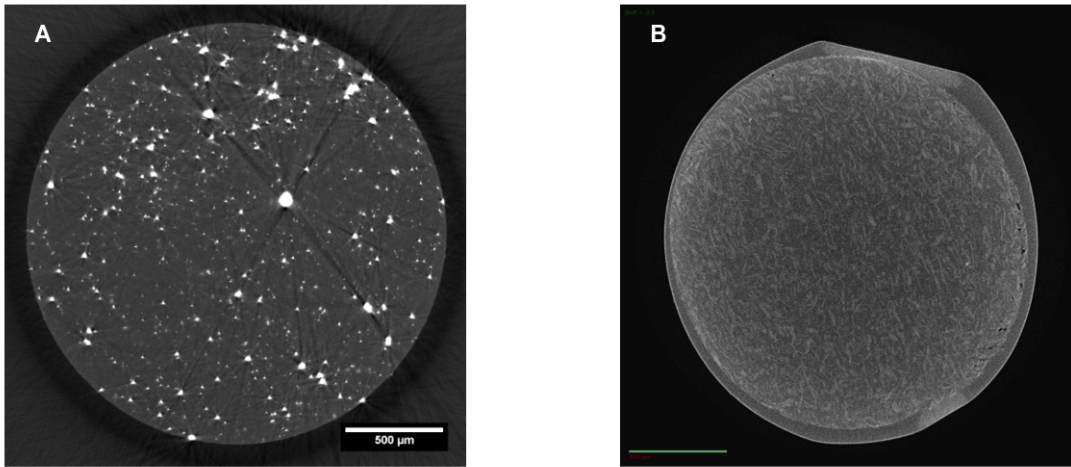
$$\text{SNR} \propto \sqrt{D}, \quad (5)$$

jossa D on säteilyannos. Toisaalta tämä tuo esille fotonien statistiikan mallintamisen edun säteilyannoksen pienentämisessä, jos rekonstruktio menetelmä pystyy pitämään kuvan kohinan pienenä. Tällöin kuvantaminen voidaan tehdä pienemällä säteilyannoksella saavuttaen silti riittävä signaali-kohinasuhde.

Säteilyn koventuminen (eng. beam hardening) on artefakteja aiheuttava ilmiö röntgentomografiassa. Se johtuu röntgenlähteen polykromaattisesta spektristä. Säteilyn vaimentuminen on riippuvaista säteilyn energiasta ja vaimentavan materiaalin järjestysluvusta $\propto Z^3/E^3$ [7]. Röntgensäteilyn kulkiessa aineen läpi matalan energian säteily vaimentuu enemmän suhteessa korkean energian säteilyyn, minkä seurauksena monokromaattinen Beer–Lambertin laki (1) ei täysin päde, mistä seuraa artefakteja rekonstruoituihin kuviin (Kuvio 4.B). Säteilyn koventumista aiheutuu myös matalan ja korkean järjestysluvun aineiden välillä erilaisen vaimentumisen johdosta, sillä korkean järjestysluvun aineet vaimentavat säteilyä voimakkaammin, jolloin vain korkeaenergiset säteet läpäisevät aineen.

Tutkittavassa kappaleessa voimakkaasti säteilyä vaimentavat kohdat voivat vaimentaa tietyistä suunnista tulleen säteilyn lähes kokonaan, jolloin detektorille ei saada kyseisistä suunnista juuri lainkaan signaalia. Tämä aiheuttaa hajontaa ja epäsäännöllisyyttä projektiodataan, minkä seurauksena voimakkaasti vaimentavien kohteiden ympärillä havaitaan juova-artefakteja (eng. streak artifact) 4.A. Fotonien katoaminen tietyistä projektiosta tunnetaan fotonien starvaationa (eng. photon starvation), josta käytetään tässä tutkielmassa termiä fotonikato.

Säteilyn siroaminen aiheuttaa myös poikkeavuutta Beer–Lambertin laista (1), missä viivaintegraali oletetaan kulkevan suoraa viivaa pitkin. Sironnassa röntgensäteiden suunta muuttuu, joten röntgensäteiden oletus suoriksi viivoiksi ei päde. Sironna vaikuttaa myös omalta osaltaan esimerkiksi juova-artefaktien syntymiseen, sillä se vääristää fotonien havaitsemista oletetulla detektorilla 4.A [7].



Kuvio 4. Kuvassa A kirkkaana näkyvät tiheät, voimakkaasti säteilyä vaimentavat kohdat saavat aikaan juova-artefakteja rekonstruoituun kuvaan säteilyn koventumisen, fotonikadon ja sironnan seurauksena. Kuvassa B säteilyn koventumisen seurauksena näytteen reunat näyttävät kirkkaammilta kuin keskikohta. Kuvat: Materiaalien Rakenne-tutkimusryhmä, Jyväskylän yliopiston Fysiikan laitos.

3 Iteratiiviset menetelmät

Iteratiiviset rekonstruktio menetelmät voidaan luokitella algebrallisiin, statistisiin ja mallipohjaisiin menetelmiin. Tässä luvussa esitellään kyseisten menetelmien teoreettista taustaa.

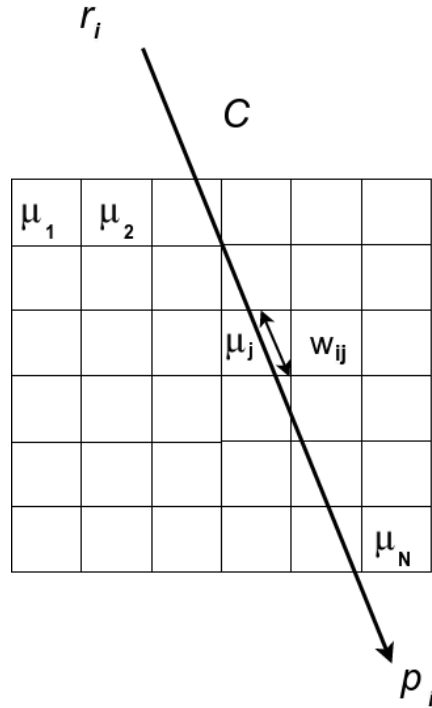
3.1 Algebrallinen rekonstruktio

Algebralliset rekonstruktio menetelmät perustuvat yksinkertaisuudessaan iteratiiviseen yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Röntgentomografisessa rekonstruktiossa suurien yhtälöryhmien ratkaiseminen käänteismatriisin avulla ei ole mahdollista, sillä yhtälöitä on yleensä eri määrä kuin tuntemattomia, jolloin yhtälöryhmää vastaava matriisi ei ole kääntyvä. Lisäksi yhtälöryhmät ovat hyvin suuria, jolloin niiden käänteismatriisien muodostamisen laskennallinen vaativuus sekä myös tietokoneelta vaadittava muisti koko yhtälöryhmän tallentamiseen ovat liian suuria. Iteratiiviset yhtälöryhmän ratkaisumenetelmät tarjoavat kuitenkin tehokkaita tapoja suurien yhtälöryhmien ratkaisemiseen, joissa yhtälöitä on eri määrä kuin tuntemattomia.

Tarkastellaan ratkaistavan yhtälöryhmän muodostamista. Oletetaan kuvion 5 mukainen tilanne, missä röntgensäde r_i kulkee kappaleen 2D-viipaleen läpi, jonka vaimennuskertoimet μ_j on jaettu N -osaan ruudukoksi, jotka vastaavat rekonstruoitavan kuvan pikseleitä. Vaimennuskertoimen arvot vaikuttavat säteen vaimentumiseen painokertoimella w_{ij} , joka on esimerkiksi verrannollinen säteen ruudukon solussa kulkemaan matkaan tai säteen pinta-alan osuuteen solun pinta-alasta. Pinta-alan painottamisessa röntgensäteelle on asetettu jokin paksuus. Säteelle r_i saadaan mitattua projektion arvo p_i detektorilla, jolloin projektiota vastaava viivaintegraali (2) saadaan kuvattua diskreetisti

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} \mu_j = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (6)$$

jossa M on säteiden lukumäärä, w_{ij} on säteen i solua j vastaava painokerroin ja μ_j on solua j vastaava vaimennuskero [3].



Kuvio 5. Havainnollistus säteen r_i kulkemisesta kappaleen läpi 2D-viipaleessa polkua C pitkin, missä jokainen vaimennuskerroin μ_j vaikuttaa säteen vaimentumiseen painokertoimen w_{ij} verran, joka on tässä havainnollistuksessa verranollinen säteen kulkemaan matkaan alueessa μ_j .

Yhtälö (6) voidaan avata ja muodostaa säteille M kappaletta yhtälöitä

$$\begin{cases} w_{11}\mu_1 + w_{12}\mu_2 + w_{13}\mu_3 + \dots + w_{1N}\mu_N = p_1 \\ w_{21}\mu_1 + w_{22}\mu_2 + w_{23}\mu_3 + \dots + w_{2N}\mu_N = p_2 \\ \vdots \\ w_{M1}\mu_1 + w_{M2}\mu_2 + w_{M3}\mu_3 + \dots + w_{MN}\mu_N = p_M. \end{cases} \quad (7)$$

Yhtälöryhmä (7) voidaan esittää yhtäpitävästi matriisiyhtälönä

$$\mathbf{W}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{p}, \quad (8)$$

jossa \mathbf{W} on $M \times N$ -matriisi, jonka alkioita ovat painokertoimet w_{ij} , $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$ on vaimennuskertoimien N -ulotteinen vektori ja $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M)^T$ on mitattujen projektioiden M -ulotteinen vektori. Kuvan rekonstruktion käänteisongelman ratkaisu $\boldsymbol{\mu}$ voidaan ajatella olevan piste N -ulotteisessa avaruudessa. Kyseisessä avaruudessa

jokainen yhtälö (7) vastaa hypertasoa, joiden leikkaus on yhtälöryhmän ratkaisu hyvin asetetussa (eng. well posed) tilanteessa $M = N$, jolloin yksikäsitteinen ratkaisu on olemassa [3]. Yleensä tilanne ei kuitenkaan ole hyvin asetettu eli $M \neq N$, jolloin yksikäsitteistä ratkaisua ei ole olemassa. Tällöin ratkaisuksi valitaan piste, joka toteuttaa kaikki yhtälöt mahdollisimman hyvin.

3.1.1 Algebrallinen rekonstruktio tekniikka (ART)

Algebrallinen rekonstruktio tekniikka (ART, eng. algebraic reconstruction technique) oli ensimmäinen menetelmä, jota Godfrey Hounsfield sovelsi kuvien rekonstruktioon röntgentomografiassa 1970-luvun alussa [6]. Menetelmän matemaattinen perusta oli kuitenkin kehitetty jo aiemmin 1937 Stefan Kaczmarzin toimesta [6]. Kaczmarzin menetelmä on iteratiivinen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisumenetelmä, jota ART-menetelmä soveltaa vaimennuskertoimien ratkaisemiseen.

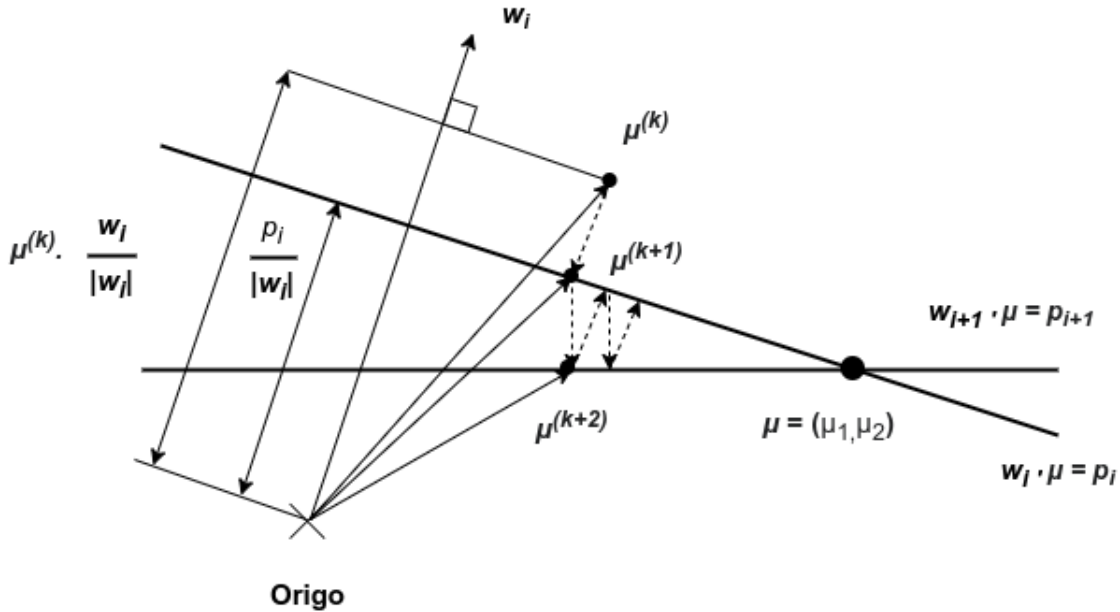
Kuviossa 6 on esitetty kaksiulotteinen havainnollistus ART-menetelmän toiminnasta, missä ratkaistavia vaimennuskertoimia (pikseleitä) ja mitattuja projektioita on molempia kaksi kappaletta. Tällöin ratkaistava yhtälöryhmä (7) on yksinkertaisesti kahden suoran yhtälön yhtälöpari, jonka yksikäsitteinen ratkaisu on suorien leikkauspiste. Iteratiivisen menetelmän tavoin ART lähtee liikkeelle kuvan alkuestimaatista $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$, joka voi olla esimerkiksi nollavektori, mikä vastaa kokonaan mustaa kuvaa. Kuviossa 6 alkuestimaattina tiedetään $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$, jonka avulla halutaan määrittää seuraava estimaatti $\boldsymbol{\mu}^{(k+1)}$. Alkuestimaattia $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ testataan eteenprojektiossa, joka vastaa tässä tapauksessa pistetuloa painokerroinvektorin \mathbf{w}_i kanssa. Eteenprojektion arvoa verrataan mitattuun projektiioon p_i , jonka avulla kuvaestimaattia korjataan siirtymällä kohtisuorasti mitatun projektion toteuttamalle suoralle (hypertasolle) (kuvio 6), jolloin saadaan iteraatiokaava seuraavalle kuvan estimaatille

$$\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} = \boldsymbol{\mu}^{(k)} - \left(\boldsymbol{\mu}^{(k)} \cdot \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|} - \frac{p_i}{\|\mathbf{w}_i\|} \right) \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

jossa $\boldsymbol{\mu}^{(k)} \cdot \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$ on vektorin $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ skalaariprojektio vektorille \mathbf{w}_i ja $\frac{p_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$ on vektorin $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ skaalariprojektio projektiosuoralle (hypertasolle), joiden erotuksena saadaan kohtisuora etäisyys pisteeseen $\boldsymbol{\mu}^{(k+1)}$ [3]. Sieventämällä yhtälöä (9) saadaan ART-menetelmälle yhtäpitävä iteraatiokaava

$$\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} = \boldsymbol{\mu}^{(k)} + \left(\frac{p_i - \boldsymbol{\mu}^{(k)} \cdot \mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|^2} \right) \mathbf{w}_i, \quad (10)$$

jossa $\boldsymbol{\mu}^{(k)} \cdot \mathbf{w}_i$ vastaa eteenprojektiota, mitä verrataan mitattuun projektiioon p_i , jonka jälkeen erotus jaetaan painokerroinvektorin normin neliöllä $\|\mathbf{w}_i\|^2$. Iteraatioaskeleen lopullinen kuvan korjaustermi saadaan kertomalla skalaariosaa painokerroinvektorilla \mathbf{w}_i , missä korjaustermi takaisinprojisoidaan kuva-avaruuteen.



Kuvio 6. Havainnollistus ART-menetelmän iteratiivisesta yhtälöparin ratkaisemisesta avaruudessa $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2$. Katkoviivoitetuilla nuolilla on havainnollistettu menetelmän (10) konvergoitumista suorien leikkauspisteeseen (μ_1, μ_2) , joka on yhtälöparin yksikäsitteinen ratkaisu, kun yhtälöitä on yhtä paljon kuin tuntemattomia. Yleisessä tilanteessa suorat vastaavat hypertasoja, jolloin ratkaisu on piste avaruudessa \mathbb{R}^N .

Kuvion 6 tilanne on kuitenkin ideaalinen rekonstruktion kannalta. Ratkaistava yhtälöryhmä (7) on yleensä ylimääritetty, jolloin yhtälöitä on enemmän kuin tuntemattomia ($M > N$). Tällöin leikkaavia suoria, yleisemmin hypertasoja on useita, jotka eivät leikkaa toisiaan yksittäisessä pisteessä. Kyseiselle yhtälöryhmälle ei siis löydy yksikäsitteistä ratkaisua. Yhtälö (10) kuitenkin konvergoituu pienimmän normin ratkaisuun, jos yhtälöryhmä on konsistentti eli yhtälöryhmällä on ainakin yksi ratkaisu [18].

ART-menetelmää (10) voidaan tehostaa laskennallisesti eri tavoin, jotta konvergoitumista voidaan nopeuttaa ja laskennallista vaativuutta pienentää. Toisaalta myös konvergoitumisen hidastaminen voi olla tarpeen kuvassa esiintyvän kohinan pienentämiseksi. Eräs hyödyllinen ratkaisu on valita iteraatioihin toisistaan poik-

keavia hypertasoja. Tällä voidaan nopeuttaa konvergoitumista, sillä hyvin identtisiä viivaintegraaleja vastaavien hypertasojen väliset kulmat ovat pieniä, jolloin konvergoituminen on hitaampaa [3]. Satunnaisia projektioita hyödyntävä menetelmä tunnetaan satunnaistettuna Kaczmarzin menetelmänä [8], jolle pätee iteraatiokaava

$$\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} = \boldsymbol{\mu}^{(k)} + \left(\frac{p_{p(i)} - \boldsymbol{\mu}_{p(i)}^{(k)} \cdot \mathbf{w}_{p(i)}}{\|\mathbf{w}_{p(i)}\|^2} \right) \mathbf{w}_{p(i)}, \quad (11)$$

missä $p(i)$ saa arvoja joukosta $\{1, \dots, M\}$, todennäköisyydellä $p(i) = \frac{\|\mathbf{w}_i\|_2^2}{\|\mathbf{W}\|_F^2}$.

Konvergoitumisen nopeuden säätäminen on usein tarpeellista iteratiivisissa menetelmissä, jolloin iteraatiokaavaan voidaan lisätä relaksaatioparametri λ_k . Tällöin iteraatioaskeleen korjaustermin vaikutusta yleensä pienennetään kertomalla termiä vakiolla $\lambda_k < 1$, mikä saa aikaan konvergoitumisen hidastumista. Konvergoitumisen hidastamisella voidaan vaikuttaa kuvissa esiintyvään kohinaan pienentävästi [3]. Yhtälö (11) on relaksaatioparametrin kanssa muotoa

$$\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} = \boldsymbol{\mu}^{(k)} + \lambda_k \left(\frac{p_{p(i)} - \boldsymbol{\mu}_{p(i)}^{(k)} \cdot \mathbf{w}_{p(i)}}{\|\mathbf{w}_{p(i)}\|^2} \right) \mathbf{w}_{p(i)}, \quad (12)$$

jossa relaksaatioparametri on $\lambda_k \in]0, 1]$, joka voi olla riippuvainen iteraatioaskeleesta k .

3.1.2 Samanaikainen iteratiivinen rekonstruktio-tekniikka (SIRT)

Samanaikainen iteratiivinen rekonstruktio-tekniikka (SIRT, eng. simultaneous iterative reconstruction technique) on hyvin analoginen ART-menetelmän kanssa, mutta siinä missä ART-menetelmän iteraatioaskeleessa kuvaa päivitetään yksittäiseen projektiioon ja sitä vastaavaan säteeseen perustuen (eng. ray by ray), niin SIRT-menetelmässä huomioidaan kaikki projektiot ja kuvaa päivitetään niiden pohjalta. Yksittäisellä projektiolla kuvaa päivitettäessä iteraatioita suoritetaan enemmän, missä painokertoimien w_{ij} epätarkkuudet voivat korostua ja saada aikaan kohinan kasvua [3]. SIRT-menetelmässä kaikkien projektioiden huomioiminen iteraatioaskeleessa saa aikaan tarkempia korjauksia kuvaan, minkä avulla kohinan voimistumista voidaan ehkäistä [3]. SIRT-menetelmälle saadaan iteraatiokaava [9], joka on muotoa

$$\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} = \boldsymbol{\mu}^{(k)} + \mathbf{C}\mathbf{W}^T\mathbf{R} \left(\mathbf{p} - \mathbf{W}\boldsymbol{\mu}^{(k)} \right), \quad (13)$$

jossa \mathbf{C} ja \mathbf{R} ovat diagonaalimatriiseja, joiden alkioina ovat sarake- ja rivisummien käänteisarvot $c_{jj} = \frac{1}{\sum_{i=1}^M w_{ij}}$ ja $r_{ii} = \frac{1}{\sum_{j=1}^N w_{ij}}$ sekä \mathbf{W}^T on painokerroinmatriisin transpoosi, mikä vastaa takaisinprojektiota.

SIRT-menetelmän vaiheet ovat siis seuraavat:

1. Verrataan projektioita painottaen rivisummien käänteisarvoilla $\mathbf{R}(\mathbf{p} - \mathbf{W}\boldsymbol{\mu}^{(k)})$
2. Tehdään takaisinprojektiio painottaen sarakesummien käänteisarvoilla $\mathbf{C}\mathbf{W}^T$
3. Päivitetään kuvan estimaattia $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ summaamalla korjaustermi

Huomioitaessa kaikki projektiot kuvaa päivittäessä iteraatioaskeleen laskennallisen vaatavuuden kasvaminen voi tehdä SIRT-menetelmän konvergoitumisesta hidasta. SIRT-menetelmän konvergoitumista voidaan nopeuttaa esimerkiksi jakamalla projektioita järjestettyihin osajoukkoihin (OS, eng. ordered subsets) $p_i \in S_k$, jolloin iteraatioaskeleessa kuvaa päivitetään samanaikaisesti osajoukon projektioilla [17]. Tällöin konvergoituminen nopeutuu osajoukkojen lukumäärän kasvaessa, jolloin yhdessä osajoukossa on vähemmän projektioita. Projektiodien järjestäminen osajoukkoihin voidaan tehdä monella tavalla, joista yksi on valita projektiot osajoukkoihin satunnaisesti. Osajoukkojen lukumäärän kasvattaminen voi vastaavasti aiheuttaa kohinan kasvamista, kun kuvan päivittäminen tehdään pienemmällä määrällä projektioita. Optimaalinen osajoukkojen lukumäärä on riippuvainen rekonstruoitavasta tilanteesta, kuten projektiodatan kohinan tasosta, joten optimaalinen lukumäärä on usein etsittävä tilannekohtaisesti kokeilemalla [17].

3.1.3 Samanaikainen algebrallinen rekonstruktio tekniikka (SART)

Samanaikaisessa algebrallisessa rekonstruktio tekniikassa (SART, eng. simultaneous algebraic reconstruction technique) sovelletaan samalla tavalla kuin SIRT-menetelmän kaikkiin projektioihin perustuvaa samanaikaista kuvan korjaamista, millä kuvissa esiintyvää kohinaa pyritään vähentämään. Menetelmässä kuitenkin mallinetaan eteenprojektiota eri tavoin kuin ART- ja SIRT-menetelmässä. SART-menetelmässä eteenprojektiota vastaavan viivaintegraalin (2) kuvaamisessa hyödynnetään bilineaarisia kantafunktioelementtejä yhtälön (6) painokertoimien sijaan. Yleisessä muodossa eteenprojektiio voidaan kuvata integraalina, jolloin projektiolle saadaan yhtälö

$$p_i = R_i \mu(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) \delta(r_i(x, y)) dx dy, \quad (14)$$

jossa R_i on projektiio-operaattori, δ on deltafunktio ja $r_i(x,y)$ on säteen yhtälö [10]. Deltafunktio poimii projektion p_i , kun säteen yhtälö vastaa suoraa $r_i(x,y) = 0$, jolloin deltafunktion argumentti on nolla.

Kuvaa vastaava funktio $\mu(x,y)$ voidaan approksimoida kantafunktioiden $b_j(x,y)$ lineaarikombinaatioina [10], jolloin kuvalle saadaan

$$\mu(x,y) \approx \hat{\mu}(x,y) = \sum_{j=1}^N g_j b_j(x,y), \quad (15)$$

jossa vakiot g_j muodostavat kuvan kannassa $b_j(x,y)$. Yhtälö (15) voidaan sijoittaa projektion lausekkeeseen (14), jolloin eteenprojektiolle saadaan uusi muoto

$$p_i = R_i \mu(x,y) \approx R_i \hat{\mu}(x,y) = \sum_{j=1}^N g_j R_i b_j(x,y) = \sum_{j=1}^N g_j a_{ij}, \quad (16)$$

jossa a_{ij} kuvaa kantafunktion $b_j(x,y)$ viivaintegraalia sädettä r_i pitkin. SART-menetelmässä kantafunktiona $b_j(x,y)$ käytetään bilineaarielementejä, jotka ovat pyramidin muotoisia [10]. Tällöin vakiot g_j muodostavat rekonstruoitavan kuvan, sillä ne vastaavat vaimennuskertoimia μ_j . SART-menetelmässä ratkaistaville g_j -arvoille saadaan iteraatiokaava [10], joka muotoa

$$g_j^{(k+1)} = g_j^{(k)} + \frac{\sum_i^M \left[a_{ij} \frac{p_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{g}^{(k)}}{\sum_{j=1}^N a_{ij}} \right]}{\sum_i^M a_{ij}}. \quad (17)$$

3.2 Statistinen rekonstruktio

Statistinen rekonstruktio on toinen lähestymistapa iteratiiviseen rekonstruktioon algebrallisen rekonstruktion ohella. Statistista rekonstruktioita voidaan suorittaa kolmessa eri alueessa, jolloin kuviossa 3 esitetty iteraatiosilmukka voi sijaita projektiio-avaruudessa, kuva-avaruudessa tai sitten kaaviokuvion tapaan eteen- ja takaisinprojektion välillä, jolloin menetelmää nimitetään täysin statistiseksi [4]. Täysin statistinen rekonstruktio perustuu röntgenfotonien statistiikan mallintamiseen todennäköisyysjakauman avulla ja mittaustulosta vastaavien todennäköisimpien vaimennuskertoimien määrittämiseen. Menetelmät projektiio- ja kuva-avaruudessa ovat lähinnä erilaisia kohinanpoistoalgoritmeja, joissa sovelletaan myös fotonien statistiikkaa. Tässä luvussa statistista rekonstruktioita käsitellään täysin statistisen suurimman uskottavuuden estimoinnin ja siitä laajennetun regularisaatiota sisältävän

MAP-menetelmän pohjalta.

Luvussa 2.4 on tuotu esille rekonstruktioon liittyviä artefakteja ja nostettu esille statistinen Poissonin kohina eli pikseleissä esiintyy satunnaista vaihtelua, sillä samantalaisella mittauksella ei havaita samanlaista fotonien lukumäärää. Tämä on seurausta fotonien havaitsemisen stokastisesta prosessista, jota statistisessa rekonstruktiossa pyritään mallintamaan, jotta rekonstruktiossa esiintyvää kuvien kohinaa voidaan vähentää.

3.2.1 Suurimman uskottavuuden estimointi (ML-EM)

Suurimman uskottavuuden estimointi (ML-EM, eng. maximum likelihood expectation maximization) on yksi ensimmäisistä röntgentomografian statistiseen rekonstruktioon sovelletuista menetelmistä [11], jonka tavoitteena on löytää optimaaliset parametrit todennäköisyysjakauman sovittamiselle mitattuun projektiodataan. Tarkoituksena on siis määrittää vaimennuskertoimille suurimman uskottavuuden estimaatti, joka saadaan muodostamalla uskottavuusfunktio ja ratkaisemalla sen maksimi.

Röntgentomografiassa suurimman uskottavuuden estimoinnissa mittausdataan sovitettavana jakaumana käytetään yleensä Poissonin jakaumaa, sillä toisistaan riippumattomia ajassa tapahtuvia fotonien laskentakokeita voidaan mallintaa stokastisena Poisson-prosessina [6]. Tällaisia ovat esimerkiksi röntgenfotonien generoituminen röntgenputkelta ja samoin niiden havaitseminen detektorilla. Tällöin pikselin todennäköisyyttä havaita n_i -kappaletta fotoneita voidaan kuvata Poissonin jakaumalla, jonka pistetodennäköisyysfunktio on

$$P(\mathcal{N} = n_i) = \frac{(n_i^*)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_i^*}, \quad (18)$$

jossa n_i on fotonien lukumäärä ja n^* on odotusarvo havaittujen fotonien lukumäärälle [6]. Havaittujen fotonien lukumäärälle pätee Beer–Lambertin laki (1), joka voidaan nyt kuvata muodossa

$$I \propto n_i^* = n_0 e^{-\sum_{j=1}^N w_{ij} \mu_j^*}, \quad (19)$$

jossa viivaintegraali on kuvattu diskreetisti, μ_j^* on vaimennuskertoimen odotusarvo ja n_0 on havaittujen fotonien odotusarvo ilman tutkittavaa kappaletta.

Huomioimalla kaikki projektiot saadaan eri suunnista havaittujen fotonien lukumäärälle todennäköisyys hyödyntämällä ehdollista todennäköisyyttä. Kun sirontaa ei huomioida, niin voidaan mitattujen projektiodien voidaan olettaa olevan riippu-

mattomia, jolloin ehdolliselle todennäköisyydelle saadaan lauseke tulona yksittäisistä pistetodennäköisyyksistä (18), joka on muotoa

$$P(\mathbf{n}|\mathbf{n}^*) = \prod_{i=1}^M \frac{(n_i^*)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_i^*}. \quad (20)$$

Sijoittamalla yhtälö (19) ehdollisen todennäköisyyden lausekkeeseen saadaan uskottavuusfunktio (eng. likelihood function), joka on muotoa

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}^*) = \prod_{i=1}^M \frac{\left(n_0 e^{-\sum_{j=1}^N w_{ij} \mu_j^*}\right)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_0 e^{-\sum_{j=1}^N w_{ij} \mu_j^*}}, \quad (21)$$

jossa n_0 on mitattu fotonien lukumäärä ilman tutkittavaa kappaletta ja n_i on kappaleen läpäisevien fotonien lukumäärä. Uskottavuusfunktion (21) maksimoinnilla saadaan ratkaistua suurimman uskottavuuden estimaatti vaimennuskertoimille $\boldsymbol{\mu}$. Tulolausekkeen sijasta voidaan maksimoida helpommin käsiteltävää summalauseketta, kun otetaan uskottavuusfunktiosta (21) logaritmi, jolloin saadaan niin kutsuttu log-uskottavuus $\ell(\boldsymbol{\mu})$ (eng. log-likelihood function), joka on muotoa

$$\ell(\boldsymbol{\mu}^*) = \sum_{i=1}^M \left(n_i \ln(n_0) - n_i \sum_{j=1}^N w_{ij} \mu_j^* - \ln(n_i!) - n_0 e^{-\sum_{j=1}^N w_{ij} \mu_j^*} \right). \quad (22)$$

Formaalisti optimointiongelman voidaan kirjoittaa seuraavasti

$$\boldsymbol{\mu}_{max}^* = \max_{\boldsymbol{\mu}^* \in \Omega} \{\ell(\boldsymbol{\mu}^*)\}, \quad (23)$$

jossa Ω on vaimennuskertoimien arvojoukko. Log-uskottavuuden $\ell(\boldsymbol{\mu}^*)$ maksimointiin voidaan soveltaa Kuhn–Tuckerin-ehtoja, sillä log-uskottavuusfunktiolla on maksimitoisista derivaatoista seuraavan konkaavisuuden nojalla [6]. Ehdot ovat siis muotoa

$$\mu_r^* \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\mu}^*)}{\partial \mu_j^*} \Big|_{\boldsymbol{\mu}_{max}^*} = 0 \quad \forall j, \mu_j^* > 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\mu}^*)}{\partial \mu_r^*} \Big|_{\boldsymbol{\mu}_{max}^*} \leq 0, \quad \forall j, \mu_j^* = 0. \quad (25)$$

Suurimman uskottavuuden menetelmälle voidaan johtaa iteraatiokaava yhtälön (24)

ehdon avulla, josta saadaan

$$\mu_r^* \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\mu}^*)}{\partial \mu_r^*} = \mu_r^* \left(n_0 \sum_{i=1}^M w_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N w_{ij} \mu_j^*} - \sum_{i=1}^M n_i w_{ir} \right) = 0 \quad (26)$$

$$\Leftrightarrow \mu_r^* = \frac{\mu_r^* n_0}{\sum_{i=1}^M n_i w_{ir}} \sum_{i=1}^M w_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N w_{ij} \mu_j^*}, \quad (27)$$

missä yhtälöä (27) voidaan iteroida esimerkiksi kiintopistemethodella, jolloin hyödyntämällä Beer–Lambertin lakia (19) saadaan iteraatiokaava

$$\mu_r^{*(n+1)} = \mu_r^{*(n)} \frac{\sum_{i=1}^M w_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N w_{ij} \mu_j^{*(n)}}}{\sum_{i=1}^M w_{ir} e^{-p_i}}. \quad (28)$$

Kiintopistemethoda on kuitenkin usein epästabiili, joten maksimoitavaan log-uskottavuusfunktioon on yleensä lisättävä regularisointitermejä [6].

Yksinkertaisimman ML-EM-metodan konvergoituminen on tyypillisesti melko hidasta, joten sitä voidaan nopeuttaa esimerkiksi jakamalla projektioita järjestettyihin osajoukkoihin (OS) $p_i \in S_k$. Tällöin saadaan OS-EM-metoda, missä yhtälön (28) iteraatioaskeleessa ei käydä läpi kaikkia M projektioita vaan osajoukon S_k projektiot, minkä seurauksena metodan konvergoituminen nopeutuu. Toisaalta tämä voi saada aikaan kohinan kasvua, mutta metodalla voidaan kuitenkin saavuttaa sama kuvan tarkkuus kuin ML-EM-metodassa jopa kymmenesosalla iteraatioita [12].

3.2.2 Maximum a posteriori-estimointi (MAP)

Suurimman uskottavuuden estimoinnissa voidaan soveltaa regularisointia lisäämällä optimointiongelmaan (23) ennakkotietoja eli a priori-tietoa. Tämän avulla voidaan määrätä niin kutsuttu MAP-estimaatti (MAP, eng. maximum a posterior), missä alkutiedon lisäämisellä stabiloidaan posteriori-estimaattia (a posteriori, suom. jälkeen). Regularisaatio on yleisesti käytetty tekniikka käänteisongelmien ratkaisemisessa, joissa yksikäsitteistä ratkaisua ei ole olemassa. Lisäämällä ongelmaan regularisointitermi voidaan epäsuotuisia ratkaisuja jättää huomiotta ja mahdollisesti nopeuttaa metodan konvergoitumista sekä tehdä käänteisongelman ratkaisusta stabiilimpi [4][6].

Rekonstruktiossa regularisointitermiin voidaan yhdistää ennakkotietoja ratkaistavista vokseleista. Yleisesti ottaen negatiivisia vaimennuskertoimia vastaavat kuvaalkiot eivät ole todenmukaisia, minkä lisäksi usein pyritään myös säätelemään vie-

rekkäisten vokseleiden välisiä eroavaisuuksia. Tavoitteena on välttää vokseleiden mielivaltaista, epäfysikaalista vaihtelua, kun yksikäsitteistä ratkaisua ei ole olemassa sekä pienentää kuvissa esiintyvää kohinaa säilyttäen samalla erotuskykyä. MAP-menetelmälle saadaan lauseke, kun log-uskottavuuden maksimoimiseen (23) lisätään regularisointitermi, jolloin optimointiongelmalla voidaan esittää formaalisti muodossa

$$\boldsymbol{\mu}_{max}^* = \max_{\boldsymbol{\mu}^* \in \Omega} \{ \ell(\boldsymbol{\mu}^*) + \ln(R(\boldsymbol{\mu}^*)) \}, \quad (29)$$

jossa $R(\boldsymbol{\mu}^*)$ on regularisointitermi [6].

MAP-menetelmässä vierekkäisten kuva-alkioiden vaihtelua voidaan kuvata Markovin satunnaiskenttänä (MRF, eng. Markov random field). Kuva-alkioiden regularisointitermin todennäköisyysjakaumaa voidaan kuvata Gibbsin jakaumalla, kun kuva-alkioiden arvot ovat riippuvaisia vain viereisistä alkioista. Gibbsin jakauma on muotoa

$$R(\boldsymbol{\mu}^*) = \frac{1}{Z} e^{-\lambda^q \sum_{c \in C} V_c(\boldsymbol{\mu}^*)}, \quad (30)$$

jossa Z on normitus, λ^q on regularisointiparametri ($1 \leq q \leq 2$), $V_c(\boldsymbol{\mu}^*)$ on paikallisten kuva-alkioiden potentiaalifunktio ja C on joukko, johon kuuluu vierekkäisten kuva-alkioiden erilaiset yhdistelmät eli klikit c (eng. cliques) [6]. Kun verrataan viereisten kuva-alkioiden eroja, voidaan regularisointitermi esittää muodossa

$$R(\boldsymbol{\mu}^*) = \frac{1}{Z} e^{-\lambda^q \sum_{k,j \in C} w_{ij} |\mu_k - \mu_j^*|^q}, \quad (31)$$

jossa w_{ij} on viereisten kuva-alkioiden välinen painokerroin (kohtisuorassa oleville $w_{ij} = 1$ ja diagonaalisille $w_{ij} = \sqrt{2}$).

MAP-estimaatille saadaan eräs iteraatiokaava [6] hyödyntämällä kiintopisteiteraatiota log-uskottavuuden ja regularisointitermin derivaattaan, jolloin iteraatiokaava on muotoa

$$\mu_r^{*(n+1)} = \mu_r^{*(n)} \frac{\sum_{i=1}^M w_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N w_{ij} \mu_j^*}}{\sum_{i=1}^M w_{ir} e^{-p_i} + \lambda^q q \sum_{c \in C} w_{kj} |\mu_k - \mu_j^*|^{q-1} \text{sign}(\mu_k - \mu_j^*)}, \quad (32)$$

jossa w_{ir} on takaisinprojektion painokerroin ja w_{kj} viereisten kuva-alkioiden klikkien painokerroin.

3.3 Mallipohjainen rekonstruktio

Mallipohjainen rekonstruktio on yleisnimitys kaikille kehittyneimmille rekonstruktio- menetelmille, jotka menevät pidemmälle röntgenfotonien statistisesta mallintamisesta [4]. Mallipohjaiset menetelmät pyrkivät kuvaamaan röntgentomografian kuvantamisprosessia mahdollisimman tarkasti huomioiden muun muassa röntgensäteilyn generointi- ja havaitsemiskohdan sekä vokseleiden äärellisen geometrian infinitesimaalisen sijaan. Lisäksi menetelmät pyrkivät mallintamaan röntgensäteen polykromaattista spektriä ja säteilyn vuorovaikutuksia sekä lisäämään ennakkotietoja (eng. prior information) ratkaistavista vokseleista, mikä toimii käänteisongelman regularisointina. Näillä keinoilla iteraatioiden eteen- ja takaisinprojektioita voidaan mallintaa tarkemmin, mikä johtaa tarkempiin korjaustermeihin ja laadukkaampiin kuviin.

Mallipohjainen rekonstruktio on keskeinen motivaattori iteratiivisen rekonstruktion kehitykselle, sillä iteratiivisen rekonstruktioon pystytään helpommin yhdistämään edistyneenpää fysikaalista ja geometrista mallinnusta kuin analyttisen suodatettuun takaisinprojektiomenetelmään [4]. Edistyneemmän mallintamisen haasteena on kuitenkin kasvava laskennallinen vaativuus, joten tällä hetkellä monimutkaiset säteilyn vuorovaikutusta kuvaavat mallit on usein jätettävä pois mallipohjaisesta toteutuksesta. Tavanomaiset mallipohjaiset implementoinnit koostuvat statistisesta mallista, systeemigeometrian mallintamisesta, johon kuuluvat esimerkiksi röntgenputken fokuksen, säteilykeilan, vokseleiden ja detektorin geometrinen mallintaminen sekä ennakkotietojen lisäämisestä eli regularisoinnista [4][21]. Kyseisissä menetelmissä keskeisenä mallipohjaisena lisänä on systeemigeometrian ja sitä vastaavan eteen- ja takaisinprojektion tarkempi mallintaminen, sillä regularisointia voidaan hyödyntää muissakin iteratiivisissa menetelmissä sekä analyttisessä rekonstruktiossa.

Statistisena mallina ja iteraation perustana voivat toimia erilaiset statistiset menetelmät. Lähteiden [4][21] toteutuksissa on hyödynnetty nopeiksi havaittuja statistisia menetelmiä, kuten OSC (eng. ordered subset convex (ML-EM)) ja ICD (eng. iterative coordinate descent). OSC-menetelmä pohjautuu oleellisesti suurimman uskottavuuden estimointiin, mutta menetelmän konvergoituminen on perinteistä ML-EM-menetelmää nopeampaa. ICD-menetelmä puolestaan pohjautuu painotettuun pienimmän neliön minimointiin, joka vastaa myös log-uskottavuuden approksimoimista toisen kertaluvun Taylorin kehitelmällä ja siitä saatavan funktion minimoimista

[6]. Lähteessä [21] minimoitavaan funktioon lisätty myös vastaavanlainen Markovin (MRF) regularisointitermi kuin MAP-menetelmässä (29). Täten painotettu pienimmän neliön minimointi voidaan esittää formaalisti muodossa

$$\boldsymbol{\mu}_{min}^* = \min_{\boldsymbol{\mu}^* \in \Omega} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{W}\boldsymbol{\mu}^*)^T \mathbf{D} (\mathbf{p} - \mathbf{W}\boldsymbol{\mu}^*) + \sum_{j,k \in C} w_{jk} V(\mu_j - \mu_k) \right\}, \quad (33)$$

jossa \mathbf{D} on diagonaalimatriisi, jonka alkiot ovat $d_{ii} = \frac{1}{n_i^*}$, V on kuva-alkioiden potentiaalifunktio, joukko C sisältää vierekkäisten kuva-alkioiden erilaiset yhdistelmät ja w_{ij} on yhdistelmän ij painokerroin.

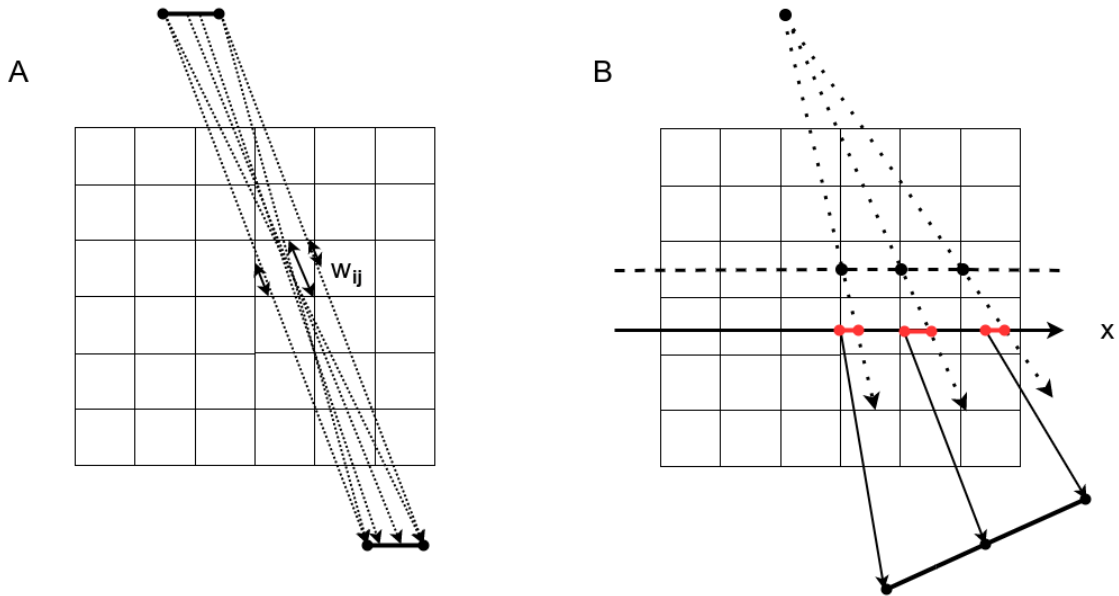
Lähteessä [21] funktion (33) minimointi suoritetaan iteratiivisesti ICD-menetelmällä, joka pohjautuu läheisesti Newton–Raphson-menetelmään [22]. Menetelmässä iteraation alkuestimaattina hyödynnetään FBP-menetelmää, jonka on todettu toimivan hyvin yhdessä ICD-menetelmän, sillä FBP-menetelmän on todettu olevan tarkka taajuus-avaruuden matalilla taajuuksilla ja vastaavasti ICD-menetelmän konvergoituminen on havaittu nopeaksi korkeilla taajuuksilla [22]. Taajuus-avaruuden korkeilla taajuuksilla projektioiden arvoissa esiintyy suurempaa vaihtelua, mikä vastaa kuvissa teräviä kohtia. Puolestaan matalilla taajuuksilla projektioiden arvoissa esiintyy pienempää vaihtelua, mikä vastaa kuvissa sileitä kohtia.

Systeemigeometrian mallintaminen koostuu painokertomien \mathbf{W} määrittämisestä, mikä on riippuvaista röntgenputken fokuksen, säteilykeilan, vokseleiden ja detektorin geometriasta. Iteratiivisessa rekonstruktiossa tarkka eteen- ja takaisinprojektion mallintaminen on tärkeää, sillä systeemigeometrian approksimoinnin virheet voivat kertaantua iteroitaessa ja aiheuttaa artefakteja kuviin. Tyypillisesti painokertoimien määrittäminen menetelmät ovat säteenjäljitysmenetelmiä, jotka perustuvat esimerkiksi säteen kuva-alkiossa kulkemaan matkan määrittämiseen. Sädettä voidaan myös kuvata äärellisen paksuisena, jolloin sädettä voidaan painottaa kuva-alkion alaan tai kolmiulotteisessa tapauksessa tilavuuteen suhteutettuna.

Lähteessä [4] on esitetty edistyneempi moninäyte-menetelmä (eng. multi-sampling) systeemigeometrian kuvaamiseen, mistä on esitetty kaksiulotteinen havainnollistus kuviossa 7. Moninäyte-menetelmässä fokusta ja detektoreja pyritään kuvaamaan todennukaisemmin äärellisen kokoisina alueina sekä vokseleita äärellisen tilavuisina. Äärellistä fokusta näytteistetään useilla mahdollisilla säteillä, jotka lähtevät hieman eri suunnissa kuva-alkioiden läpi detektoripikselille. Yksittäistä sädettä painotetaan lähteessä [4] vokselissa kulkemaan matkaan perustuen ja lopullinen viivaintegraalin

arvo määräytyy kaikkien näytekohtien säteiden keskiarvona.

Lähteessä [23] on esitetty etäisyyspohjainen (eng. distance driven) menetelmä painokertoimien määrittämiseen, mitä on sovellettu lähteen [21] mallipohjaisessa implementaatiossa. Kuviossa 7 on esitetty kaksiulotteinen havainnollistus etäisyyspohjaisesta menetelmästä, jossa kuva-alkioiden ja detektorin reunoilta lähtevät säteet projisoidaan yhteiselle akselille. Kuva-alkioiden sekä detektorien reunoilta kohdistetut säteet leikkaavat akselin eri pisteissä, missä leikkauspisteiden väliset etäisyydet toimivat painokertoimina. Kolmiulotteisessa tilanteessa painokertoimien määrittäminen tehdään myös toisen kohtisuorassa olevan akselin mukaan, jolloin molempien akselien pohjalta määritettyjen leikkauspisteiden etäisyydet kerrotaan keskenään, mistä saadaan lopulliset painokertoimien arvot.



Kuvio 7. Kuvassa A on kaksiulotteinen havainnollistus moninäyte-menetelmästä, jossa fokukselta lähtee useita säteitä eri suunnissa kuva-alkion läpi detektorille. Yksittäistä sädettä painotetaan w_{ij} kuva-alkiossa sen kulkemaan matkaan perustuen. Lopullinen painokerroin määräytyy säteiden keskiarvon pohjalta. Kuvassa B on kaksiulotteinen havainnollistus etäisyyspohjaisesta menetelmästä, jossa detektorin ja kuva-alkioiden reunoilta lähtevät säteet projisoidaan yhteiselle akselille (x -akseli), jossa painotus määräytyy detektorien ja kuva-alkioiden reunoilta projisoitujen säteiden leikkauspisteiden välisten etäisyyksien mukaan, jotka on merkattu punaisella.

4 Rekonstruktio menetelmien vertailu

4.1 Kohinan ja säteilyannoksen vähentäminen

Kohinan vertaaminen iteratiivisen ja analyttisen rekonstruktion välillä on keskeistä iteratiivisen rekonstruktion yleistymisen kannalta, sillä etenkin statistisilla ja mallipohjaisilla menetelmillä on päästy samaan erotuskykyyn selvästi pienemmällä kohinalla kuin yleisellä FBP-menetelmällä [4][7]. Tämä on tuonut myös mahdollisuuden säteilyannoksen pienentämiseen röntgentomografiassa, sillä säteilyannoksen ja signaalikohinasuhteen riippuvuuden (5) ansiosta saman erotuskyvyn kuvia voidaan rekonstruoida aiempaa pienemmällä säteilyannoksella. Säteilyannoksen pienentäminen on hyödyllistä esimerkiksi lääketieteen diagnostisessa kuvantamisessa, jossa röntgentomografia tutkimuksia suoritetaan väestöllisesti paljon. Lähteessä [16] on esitetty väestöllisen säteilyannoksen pienentämistä tukevia väitteitä, mihin voidaan vaikuttaa muun muassa vähentämällä yksittäisestä kuvantamistutkimuksesta koituvaa säteilyannosta. Lisäksi säteilyannoksen pienentämisestä voi olla hyötyä esimerkiksi materiaalitutkimuksen mikro- ja nanotomografiassa, missä näytteet voivat olla herkkiä säteilylle ja sen aikaansaamat muutokset voivat rajoittaa kuvantamista tutkimuksissa.

Iteratiivissa statistisissa ja mallipohjaisissa menetelmissä hyödynnetään fotonien statistista mallintamista kohinan pienentämiseen, missä kohinaa sisältävää projektiodataa pystytään painottamaan fotonien todennäköisyysjakauman avulla, minkä seurauksena kohinan voimistumista voidaan ehkäistä iteraatioissa. Ilman statistista mallia algebralliset ja analyttiset menetelmät olettavat kohinaa sisältävän projektiodatan tarkaksi, mikä aiheuttaa kohinaa myös rekonstruoituihin kuviin [7]. Täten statistista mallintamista hyödyntävät menetelmät pystyvät välttämään paremmin kohinan voimistumista rekonstruktiossa kuin algebralliset menetelmät sekä yleinen FBP-menetelmä.

Lähteessä [15] on vertailtu FBP-menetelmän ja statistisen OSC-menetelmän erotuskykyä ja kohinaa fantomirekonstruktioissa, minkä mukaan OSC-menetelmällä päästään samaan erotuskykyyn pienemällä kohinalla, missä signaalikohina suhde on noin kolminkertainen OSC-menetelmällä verrattuna FBP-menetelmään. Tämä tarkoittaa myös säteilyannoksen ja signaalikohinasuhteen riippuvuuden nojalla (5) sitä, että annosta voidaan pienentää parhaimmassa tapauksessa jopa yhdeksäsosaan käyttämällä OSC-menetelmää.

Statistisia ja mallipohjaisia menetelmiä on jo sovellettu laajasti lääketieteen kliinisessä kuvantamisessa [4]. Suurten laitevalmistajien tarjoista statistisista ja mallipohjaisista toteutuksista on hyvin rajallisesti julkista tietoa, mutta niillä tehdyillä tutkimuksilla on pystytty osoittamaan pienempää kohinaa matalan säteilyannoksen kuvauksissa tai pienempää kohinaa normaalilla säteilyannoksella verrattuna FBP-menetelmään. Kliinisissä potilastutkimuksissa statistisia malleja hyödyntävien menetelmien avulla on pystytty pienentämään kohinaa suhteessa FBP-menetelmään 43 % [24], $(28 \pm 13) %$ [30], $(31 \pm 7) %$ [32], 30,8 % [33] sekä säteilyannosta 35 % [31], 52 % [32], 55,5 % [33].

4.2 Metalliartefaktien vähentäminen

Tutkittavassa kappaleessa selvästi ympäröivää ainetta tiheimmät kohdat aiheuttavat artefakteja säteilyn koventumisen, fotonikadon ja sironnan seurauksena. Tyypillisesti nämä kohdat koostuvat erilaisista metalleista, joilla on korkea järjestysluku Z ympäröivään aineeseen verrattuna, kuten esimerkiksi lääketieteessä käytettävillä proteeseilla. Metalleista aiheutuvat juova-artefaktit ovat haaste röntgentomografisessa rekonstruktiossa, sillä ne voivat vääristää isoakin osaa rekonstruoidusta kuvasta ja heikentää kuvan laatua merkittävästi [7].

Iteratiivisten menetelmien on havaittu toimivan paremmin metalleista aiheutuvien artefaktien vähentämisessä kuin analyttisen FBP-menetelmän [7][13][14]. Statististen menetelmien keskeinen etu on, että ne pystyvät suoriutumaan paremmin voimakkaasti vaimentavien kohteiden aiheuttamasta epäsäännöllisestä, hajontaa sisältävän projektiodatan rekonstruoinnista kuin FBP-menetelmä, joka olettaa kyseisen projektiodatan tarkaksi. Lisäksi iteratiivisten menetelmien edistyneempi fysikaalinen ja geometrinen mallintaminen on keskeistä säteilyn koventumisesta, fotonikadosta ja sironnasta seuraavien artefaktien vähentämisessä. Tarkemmalla mallinnuksella artefakteja voidaan välttää suoraan, eikä niiden poistamiseen tarvitse kehittää erilaisia

poistoalgoritmeja ja suodattimia.

Lähteessä [13] algebrallista SIRT-menetelmää ja statistista ML-EM-menetelmää on verrattu FBP-menetelmään esimissiotomografian fantomirekonstruktiossa, missä molemmat iteratiiviset menetelmät ovat suoriutuneet paremmin metalliartefaktien vähentämisessä kuin FBP-menetelmä. Lähteessä [14] emissiotomografian ML-EM-menetelmää on sovellettu transmissiotomografian rekonstruktioon sekä ML-EM-menetelmän laskentaa on nopeutettu soveltamalla järjestettyjä osajoukkoja, jonka pohjalta on esitetty row-action OS-EM-menetelmä. Nopealla sekä hitaammalla menetelmällä on saatu tuotettua fantomikokeissa vertailukelpoisia kuvia, joissa metalliartefakteja on saatu vähennettyä suhteessa FBP-menetelmään.

Lähteessä [25] on esitetty edistyneempi polykromaattinen ML-EM-menetelmä, jolla säteilyn koventumisesta aiheutuvia metalliartefakteja on pyritty vähentämään. Kattavammalla mallintamisella on saatu vähennettyä metalliartefakteja fantomikokeissa, mutta kyseisen menetelmän laskennallinen vaatavuus on monikertainen lähteessä verrattujen FBP-menetelmän, perinteiseen ML-EM- ja IBHC-menetelmän välillä (IBHC, eng. iterative beam hardening correction) [25]. Lähteessä [26] polykromaattista ML-EM-menetelmää on sovellettu lokaalisti artefaktien kannalta kriittisempiin kohtiin ja muuten rekonstruktio on suoritettu yksinkertaisemmalla ML-EM-menetelmällä. Menetelmien välisen laskennallisen vaativuuden suhteeksi on ilmoitettu 8:3, joten menetelmien valikoivalla hyödyntämisellä on pystytty nopeuttamaan rekonstruktiota ja parantamaan menetelmän soveltuvuutta erilaisiin röntgentomografian käyttökohteisiin.

Fantomikokeiden lisäksi iteratiivisia statistisia ja mallipohjaisia menetelmiä on tutkittu metalliartefaktien vähentämisessä myös lääketieteen kliinisissä potilastutkimuksissa. GE Healtcaren mallipohjaisen menetelmän MBIR (Veo) [27] [28], joka yhdistää statistisen mallintamisen sekä systeemigeometrian mallintamisen eteen- ja takaisinprojektiossa on todettu pienentävän metalliartefaktien kokoa 82 % verrattuna FBP-menetelmään 62 metalli-implanttipotilaan tutkimuksessa [29].

4.3 Rekonstruktion kesto

Iteratiivisten menetelmien laskenallinen vaativuus ja siitä seuraava rekonstruktion kesto on ollut niiden suurin haaste laajemman yleistymisen kannalta [4]. Vaikka tietokoneiden laskentakapasiteetit ovat vuosien aikana kasvaneet, on myös iteratiivisten menetelmien kehittynyt mallintaminen lisännyt rekonstruktion laskennallista vaativuutta. Niinpä esimerkiksi sirontaa kuvaavat mallit ovat vielä laskennallisesti liian vaativia ja pitkäkestoisia sovellettavaksi tämänhetkisessä rekonstruktiossa [4].

Iteratiivisten menetelmien konvergoitumisen nopeuttaminen on usein tasapainoilua kuvanlaadun kanssa. Erilaiset iteraatioparametrit, kuten relaksaatioparametrin suuruus ja järjestettyjen osajoukkojen koko (OS) vaikuttavat konvergoitumisen nopeuteen ja kuvanlaatuun yleensä vastakkaisuuntaisesti. Lisäksi parametrien valinta voi olla hyvin tilannekohtaista, joten optimaallisten parametrien löytäminen on haastavaa, mikä voi vaikuttaa selvästi iteratiivisen rekonstruktion kestoon ja menetelmän robustisuuteen. Kuitenkin samanaikaisten menetelmien konvergoitumisen nopeuttaminen jakamalla projektioita järjestettyihin osajoukkoihin (OS) on havaittu toimivaksi useassa menetelmässä, mistä esimerkkeinä ovat OS-SIRT- [17], OS-EM- [12] ja OSC-menetelmät [34]. Kyseisissä menetelmissä sopivalla osajoukon suuruuden valinnalla voidaan päästä samaan erotuskykyyn selvästi perinteistä menetelmää nopeammin. Esimerkiksi OS-ML-menetelmällä voidaan saavuttaa sama kuvanlaatu jopa kymmenesosalla iteraatioita [12]. Konveksin suurimman uskottavuuden estimoinnin on todettu olevan nopeampi kuin tavallinen ML-EM ja konveksin OS-menetelmän (OSC) on todettu tuottavan saman erotuskyvyn ja kontrastin kuvia jopa kahta kertaluokkaa nopeammin [34].

Grafiikkaprosessoreiden (GPU, eng. graphics process unit) hyödyntäminen rekonstruktion laskennassa on mahdollistanut iteratiivisten menetelmien yleistymistä röntgentomografiassa. GPU:n rinnakkaisessa arkkitehtuurissa iso määrä transistoreja voidaan hyödyntää rinnakkain aritmeettisiin laskuoperaatioihin, mikä voi parantaa laskentatehoa jopa usealla kertaluokalla perinteiseen keskussuoritin- eli CPU-laskentaan verrattuna (CPU, eng. central process unit) [4]. GPU-avusteisen laskennan ansiosta rekonstruktiossa eteen- ja takaisinprojektioita voidaan jakaa rinnakkaisiin osiin, mikä nopeuttaa iteraatioiden suorittamista. Lähteessä [35] mallipohjaista rekonstruktioita, joka hyödyntää ICD-menetelmää on pystytty nopeuttamaan keskimäärin 4,43-kertaisesti GPU-pohjaisella toteutuksella, jossa rekonstruoitavat vokselit on

jaettu osajoukkoihin eli supervokseleihin. Sen lisäksi että useampia supervokseleita voidaan rekonstruoida yhtä aikaa, menetelmä voi rekonstruoida samanaikaisesti myös useita yksittäisiä vokseleita kussakin supervokselissa. Lisäksi yksittäisen vokselin rekonstruointi voidaan suorittaa useampaa laskentasäiettä hyväksikäyttäen.

Mallipohjaisissa totetuksissa valikoivalla vokseleiden päivittämisellä on pystytty keventämään rekonstruktion laskennallista vaativuutta. Esimerkiksi lähteen [21] epähomogeenisessä ICD-algoritmissä (NH-ICD) FBP-menetelmällä luotua alkuestimaattia päivitetään valikoivasti perustuen siihen, mitkä vokselit tarvitsevat eniten päivityksiä. Useimmissa tapauksissa suurimmat poikkeavuudet konvergoituneessa ja ei-konvergoituneessa kuvassa sijaitsevat eri rakenteiden reunamilla, terävissä kohdissa, missä ratkaistavien kuva-alkioiden arvoissa esiintyy suurempaa vaihtelua [21]. NH-ICD-menetelmässä VSC:n perusteella (VSC, eng. voxel selection criterion) valikoidaan vokselit, jotka tarvitsevat eniten päivitystä ja VSA:n (eng. voxel selection algorithm) avulla määritetään järjestys, jossa vokselit päivitetään. Menetelmässä suoritettun optimoinnin avulla rekonstruktioita pystytään nopeuttamaan noin kolminkertaisesti valikoivalla vokseleiden päivittämisellä.

Iteratiivisten menetelmien valikoiva soveltaminen on myös rekonstruktion nopeuteen vaikuttava tekijä. Rekonstruktio voidaan esimerkiksi käynnistää analyyttisellä FBP-menetelmällä, jonka jälkeen laskennallisesti vaativampia ja monimutkaisempia statistisia sekä mallipohjaisia menetelmiä voidaan soveltaa vain kriittisimpiin kohtiin artefaktien välttämiseksi. Lähteessä [26] edistyneempää polykromaattista ML-EM-menetelmää on hyödynnetty valikoivasti metalliartefaktien vähentämisen kannalta kriittisemmissä kohdissa ja muut sileämmät kohdat on rekonstruoitu 5 kertaa nopeammalla ML-EM menetelmällä.

5 Yhteenveto

Iteratiiviset menetelmät tarjoavat tarkempaa mallintamista rekonstruktion käänteisongelman ratkaisemiseen kuin analyttiset menetelmät, minkä seurauksena iteratiivisillä menetelmillä voidaan vähentää sekä ehkäistä puutteellisesta mallintamisesta ja analyttisten menetelmien oletuksista aiheutuvia artefakteja. Algebralliset menetelmät, jotka mallintavat rekonstruktioprosessia lineaarisena yhtälöryhmänä ovat hyödyllisiä suhteessa analyttiseen FBP-menetelmään, kun rekonstruoitava projektiodata on harvaa ja epäsäännöllistä, sillä FBP-menetelmässä oletetaan projektiodatan olevan säännöllisesti tasavälein jakautunutta. Algebrallisiin menetelmiin ei kuitenkaan yhdisty edistyneempää statistiikan ja systeemigeometrian mallintamista, minkä seurauksena niillä ei pystytä saamaan samanlaista hyötyä kohinan ja erilaisten vääristymien vähentämisessä kuin statistisilla ja mallipohjaisilla menetelmillä. Tämän seurauksena sekä selvästi analyttistä rekonstruktioita pidemmän laskenta-ajan takia algebralliset menetelmät eivät usein myöskään valikoidu FBP-menetelmän edelle.

Statististen menetelmien avulla kuvissa esiintyvää kohinaa pystytään vähentämään suhteessa algebrallisiin ja analyttisiin menetelmiin, sillä kohinaa sisältävää projektiodataa pystytään painottamaan rekonstruktiossa fotonien todennäköisyysjakauman avulla. Kohinan vähentäminen statistisen mallintamisen avulla mahdollistaa rekonstruoinnin pienemmällä säteilyannoksella ja vähäisemmillä projektiolla, mikä motivoi statististen menetelmien käyttöä esimerkiksi lääketieteessä. Statistiset menetelmät pystyvät myös ehkäisemään muun muassa fotonikadosta aiheutuvia juova-artefakteja tiheiden kohteiden ympärillä, missä projektioidissa voi esiintyä paljon hajontaa havaittujen fotonien osalta.

Mallipohjaiset menetelmät huomioivat fotonien statistiikan ja a priori-termien lisäksi tarkemman systeemigeometrian mallintamisen, mikä johtaa tarkempiin korjaustermeihin ja parempaan kuvanlaatuun. Mallipohjaisiin menetelmiin pystytään myös lisäämään tarkempaa fysikaalista mallinnusta, kuten röntgensäteilyn energiariippuvuutta sekä säteilyn vuorovaikutusmekanismeja, joilla useita artefakteja voidaan ehkäistä, mutta kyseisiin malleihin vaadittava laskenta on usein vielä moniin sovellutuskohteisiin liian vaativaa.

Iteratiivinen rekonstruktio on selvästi laskennallisesti vaativampaa kuin analyttinen rekonstruktio, vaikka tietokoneiden kasvanut laskentakapasiteetti, GPU-avusteinen laskenta, samanaikaisten menetelmien nopeuttaminen järjestetyillä osajoukoilla sekä valikoivat toteutukset statistisissa ja mallipohjaisissa menetelmissä ovat muuttaneet useimpien menetelmien keston tunneista minuutteihin, mikä on mahdollistanut niiden höydyntämisen monissa röntgentomografian sovelluskohteissa. Kehittyneestä laskennasta huolimatta iteratiivisten menetelmien suurempi laskennallinen vaativuus ja rekonstruktion kesto suhteessa analyttisiin menetelmiin tulee todennäköisesti säilymään iteratiivisten menetelmien entistä tarkemman kuvantamisprosessin mallintamisen ansiosta. Mallipohjaisten menetelmien käyttö on kuitenkin hyvin perusteltua useissa tilanteissa laadukkaampien, vähemmän artefakteja sisältävien kuvien tuottamisessa pienemällä säteilyannoksella.

Lähteet

- [1] Stock S.R. *MicroComputed Tomography Methodology and Applications*. 1. painos. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2009.
- [2] *Säteily- ja ydinturvallisuus, osa 3: Säteilyn käyttö*, Säteilyturvakeskus, Helsinki, 2004. URL: <https://www.stuk.fi/julkaisut/sateily-ja-ydinturvallisuus-kirjasarja> (viitattu 10.1.2021).
- [3] Kak A.C, Slaney M. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. 1. painos. IEEE Press, 1988. URL: <http://www.slaney.org/pct/pct-toc.html> (viitattu 12.1.2021).
- [4] Beister M, Kolditz D, Kalender W.A. "Iterative reconstruction in X-ray CT", *Physica Medica* **28**(2) (2012) s. 94-108. DOI: 10.1016/j.ejmp.2012.01.003.
- [5] Stiller W. "Basics of iterative reconstruction methods in computed tomography: A vendor-independent overview", *European Journal of Radiology* **109** (2018) s. 147-154. DOI: 10.1016/j.ejrad.2018.10.025.
- [6] Buzugn T.M. *Computed Tomography From Photon Statistics to Modern Cone-Beam CT*. 1. painos. Springer, 2008. DOI: 10.1007/978-3-540-39408-2.
- [7] Boas F.E, Fleischmann Dr. "CT artifacts: causes and reduction techniques", *Imaging in Medicine* **4**(2) (2012) s. 229-240. Future Medicine, USA. DOI:10.2217/iim.12.13.
- [8] Strohmer T, Vershynin. "A Randomized Kaczmarz Algorithm with Exponential Convergence", *Journal of Fourier Analysis and Applications* **15**(2) (2009) s. 262-278. DOI: 10.1007/s00041-008-9030-4.
- [9] Gregor J, Benson T. "Computational Analysis and Improvement of SIRT", *IEEE Transactions on Medical Imaging* **27**(7) (2008) s. 918-924. DOI: 10.1109/TMI.2008.923696.

- [10] Andersen A.H, Kak A.C. "Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART): A Superior Implementation of the ART Algorithm", *Ultrasonic Imaging* **6** (1984) s. 81-94. DOI: 10.1016/0161-7346(84)90008-7.
- [11] Kenneth L, Carson R. "EM Reconstruction Algorithms for Emission and Transmission Tomography", *Journal of Computer Assisted Tomography* **8**(2) (1984) s. 306-316. URL: https://www.researchgate.net/publication/279200328_EM_Reconstruction_Algorithms_for_Emission_and_Transmission_Tomography (viitattu: 30.3.2021).
- [12] Manglos S.H, Gagne G.M, Krol A, Thomas F.D, Narayanaswamy R. "Transmission maximum-likelihood reconstruction with ordered subsets for cone beam CT", *Physics in Medicine and Biology* **40**(7) (1995) s. 1225-1241. DOI: 10.1088/0031-9155/40/7/006.
- [13] Wang G, Snyder D.L, O'Sullivan J.A, Vannier M.W. "Iterative deblurring for CT metal artifact reduction", *IEEE Tran Med Imaging* **15**(5) (1996) s. 657-664. DOI: 10.1109/42.538943.
- [14] Wang G, Frei T, Vannier M.W. "Fast Iterative Algorithm for Metal Artifact Reduction in X-ray CT", *Academic Radiology* **7**(8) (1996) s. 607-614. DOI: 10.1016/s1076-6332(00)80576-0.
- [15] Ziegler A, Köhler Th, Proksa R "Noise and resolution in images reconstructed with FBP and OSC algorithms for CT", *Medical Physics* **34**(2) (2007) s. 585-598. DOI: 10.1118/1.2409481.
- [16] Brenner D.J, Hall E.J "Computed Tomography — An Increasing Source of Radiation Exposure", *The New England Journal of Medicine* **357**(22) (2007) s. 2277-2284. DOI: 10.1056/NEJMra072149.
- [17] Xu F, Xu W, Jones M, Keszthelyi B, Sedat J, Agard D, Mueller K. "On the efficiency of iterative ordered subset reconstruction algorithms for acceleration on GPUs", *Computer Methods and Programs in Biomedicine* **98**(3) (2010) s. 261-270. DOI: 10.1016/j.cmpb.2009.09.003.
- [18] Eggermont P.P.B, Herman G.T, Lent A. "Iterative algorithms for large partitioned linear systems, with applications to image reconstruction", *Linear Algebra and its Applications* **40**(1) (1981) s. 37-67. DOI:10.1016/0024-3795(81)90139-7.

- [19] Elbakri I.A, Fessler J.A. "Statistical Image Reconstruction for Polyenergetic X-Ray Computed Tomography", *IEEE Transactions on Medical Imaging* **21**(2) (2002) s. 89-99. DOI: 10.1109/42.993128.
- [20] McCollough C.H, Leng S, Yu L, Fletcher J.G. "Dual- and Multi-Energy CT: Principles, Technical Approaches, and Clinical Applications", *Radiology* **273**(3) (2015) s. 637-653. DOI: 10.1148/radiol.2015142631.
- [21] Yu Z, Thibault J.B, Bouman C.A, Sauer K.D, Hsieh J. "Fast Model-Based X-Ray CT Reconstruction Using Spatially Nonhomogeneous ICD Optimization", *IEEE Transactions on Image Processing* **20**(1) (2011) s. 161-175. DOI: 10.1109/TIP.2010.2058811.
- [22] Bouman C, Sauer K.A. "A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization", *IEEE Transactions in Image Processing* **5**(3) (1996) s. 480-492. DOI: 10.1109/83.491321.
- [23] Man D.D, Basu S. "Distance-driven projection and backprojection in three dimensions", *Physics in Medicine and Biology* **49** (2004) s. 2463-2475. DOI: 10.1088/0031-9155/49/11/024.
- [24] Leipsic J, Labounty T.M, Heilbron B, Min J.K, Mancini G.B.J et.al. "Adaptive Statistical Iterative Reconstruction: Assessment of Image Noise and Image Quality in Coronary CT Angiography" *American Journal Roentgenology* **195** (2010) s. 649-654. DOI: 10.2214/AJR.10.4285 (viitattu 26.4.2021).
- [25] Man B.D, Nuyts J, Dupont P, Marchal G, Suetens P. "An Iterative Maximum-Likelihood Polychromatic Algorithm for CT" *IEEE Transactions on Medical Imaging* **20**(10) (2001) s. 999-1008. DOI: 10.1109/42.959297.
- [26] Slambroucka K.V, Nuyts J. "Metal artifact reduction in computed tomography using local models in an image block-iterative scheme" *Medical Physics* **39**(11) (2012), s. 7080–7093. DOI: 10.1118/1.4762567.
- [27] Nelson R.C, Feuerlein S, Boll D.T. "New iterative reconstruction techniques for cardiovascular computed tomography: how do they work, and what are the advantages and disadvantages?" *Journal of Cardiovascular Computed Tomography* **5**(5) (2011) s. 286–292. DOI: 10.1016/j.jcct.2011.07.001.

- [28] Thibault J.B, Sauer K. D, Bouman C. A, Hsieh J. "A three-dimensional statistical approach to improved image quality for multislice helical CT" *Medical Physics*, **34**(11) (2007) s. 4526–4544. DOI: 10.1118/1.2789499.
- [29] Boudabbous S, Arditi D, Paulin E, Syrogiannopoulou A, Becker C, Montet X. "Model-Based Iterative Reconstruction (MBIR) for the Reduction of Metal Artifacts on CT" *American Journal of Roentgenology* **205**(2) (2015) s. 380-385. DOI: 10.2214/AJR.14.13334.
- [30] Bittencourt M.S, Schmidt B, Seltmann M, Muschiol G, Ropers D, Daniel W.G, Achenbach S. "Iterative reconstruction in image space (IRIS) in cardiac computed tomography: initial experience" *The International Journal of Cardiovascular Imaging* **27**(7) (2011) s. 1081-1087. DOI: 10.1007/s10554-010-9756-3.
- [31] Pontana F, Duhamel A, Pagniez J, Flohr T, Faivre J.B, Hachulla A.L, Remy J, Remy-Jardin M. "Chest computed tomography using iterative reconstruction vs filtered back projection (Part 2): image quality of low-dose CT examinations in 80 patients" *European Radiology* **21**(3) (2011) s. 636-43. DOI: 10.1007/s00330-010-1991-4.
- [32] Gervaise A, Osemont B, Lecocq S, Noel A, Micard E, Felblinger J, Blum A. "CT image quality improvement using Adaptive Iterative Dose Reduction with wide-volume acquisition on 320-detector CT" *European Radiology* **22**(2) (2012) s. 295-301. DOI: 10.1007/s00330-011-2271-7.
- [33] Winklehner A, Karlo C, Puippe G, Schmidt B, Flohr T, Goetti R, Pfammatter T, Frauenfelder T, Alkadhi H. "Raw data-based iterative reconstruction in body CTA: evaluation of radiation dose saving potential" *European Radiology* **21**(12) (2011) s. 2521-2426. DOI: 10.1007/s00330-011-2227-y.
- [34] Beekman F.J, Kamphuis C. "Ordered subset reconstruction for x-ray CT" *Physics in Medicine and Biology* **46**(7) (2001) s. 1835–1844. DOI: 10.1088/0031-9155/46/7/307.
- [35] Sabne A, Wang X, Kisner S, Bouman C, Raghunathan A, Midkiff S. "Model-based Iterative CT Image Reconstruction on GPUs" *PPoPP '17: Proceedings of the 22nd ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming* (2017) s. 207–220. DOI:10.1145/3018743.3018765.