Brachistochrone-ongelma

Pauliina Okkolin

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2021

Tiivistelmä: Pauliina Okkolin, *Brachistochrone-ongelma* (engl. *Brachistochrone problem*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 37s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteenlaitos, syksy 2021.

Tämä tutkielma käsittelee Brachistochrone-ongelmana tunnettavaa minimointiongelmaa. Ongelmassa on ideana löytää kahden tason pisteen A ja B välinen käyrä, joka minimoi ajan, joka massalliselta kappaleelta kuluu liukua pisteestä A pisteeseen B. Ongelma ratkaistaan tässä työssä variaatiolaskentaa hyödyntäen ja siten työ esittelee Brachistochrone-ongelman lisäksi myös tiettyjä variaatiolaskennan perusideoita. Variaatiolaskenta on matemaattisen analyysin ala, joka tarjoaa keinoja ääriarvotehtävien ratkaisemiseen, kun minimoitavat kuvaukset ovat funktioavaruuksista reaaliluvuille määriteltyjä funktionaaleja.

Tutkielmassa esitellään aluksi, kuinka sanallisesti muotoiltu ongelma saadaan johdettua matemaattiseen muotoon. Sen jälkeen perehdytään ongelman varsinaiseen ratkaisemiseen. Nykyään yleisesti tunnetaan, että Brachistochrone-ongelman ratkaiseva käyrä on sykloidi. Työssä näytetään, kuinka sykloidi variaatiolaskennan avulla lähtökohtaisesti löydetään. Keskeisin työkalu on variaatiolaskennan oleellisimpiin välineisiin kuuluva Euler-Lagrangen differentiaaliyhtälö. Työssä osoitetaan, että Brachistochrone-ongelman ratkaisun on välttämättä toteutettava Euler-Lagrangen yhtälö. Lisäksi näytetään, että jos Brachistochrone-ongelmalla on ratkaisu, se toteuttaa myös Beltrami-yhtälöksi kutsuttavan differentiaaliyhtälön. Beltrami-yhtälö ratkaisemalla saadaan näytettyä, että ongelman mahdollinen ratkaisu on sykloidi.

Työn viimeinen vaihe on todistaa Brachistochrone-ongelman ratkaisun olemassaolo ja siten näyttää, että sykloidi todella ratkaisee ongelman. Olemassaolo todistetaan erään riittävän ehdon avulla, joka kertoo, milloin Euler-Lagrangen yhtälön toteuttava funktio on variaatio-ongelman ratkaisu. Työssä esiteltävä riittävä ehto hyödyntää funktioiden konveksisuutta. Riittävä ehto ei ole suoraan sovellettavissa Brachistochrone-ongelmaan, joten työssä päädytään vielä tarkastelemaan toista minimointiongelmaa, joka ratkaisemalla myös Brachistochrone-ongelma saadaan ratkaistua.

Sisällys

Johdanto

Tämän kirjoitelman tarkoituksena on esittää yksityiskohtainen kuvaus Brachistochrone-ongelmalle ja sen ratkaisulle. Kyseinen ongelma on sveitsiläisen matemaatikon Johann Bernoullin vuonna 1696 esittämä ja Bernoulli muotoili ongelman seuraavasti [**4**]:

Kun A ja B ovat pisteitä pystysuorassa tasossa, etsi polku AMB, jota alaspäin kulkiessaan, oman painonsa vaikutuksesta, liikkuva piste M ehtii pisteestä A pisteeseen B lyhyimmässä mahdollisessa ajassa.

Brachistochrone-ongelma on siis ääriarvotehtävä, jossa etsitään sellaista käyrää kahden tason pisteen välillä, joka minimoi ajan, joka massalliselta kappaleelta kuluu liukua painovoiman vaikutuksesta pisteestä toiseen. Vastusvoimia ei oteta ongelman tunnetuimmassa versiossa huomioon. Ongelman ratkaisevaa käyrää kutsutaan brakistokroniksi. Sana tulee kreikan kielestä ja tarkoittaa lyhyintä aikaa.

Ennen Bernoullia Brachistochrone-ongelmaa oli pohtinut Galileo, mutta hän päätyi ratkaisussaan väärään lopputulokseen, sillä hän totesi brakistokronin olevan ympyrän kaari. Todellisuudessa ratkaisu ongelmalle on sykloidi. Kun Bernoulli esitti ongelman matemaattiselle yleisölle 1700-luvun vaihteessa, oikean ratkaisun ongelmalle esittivät tunnetusti ainakin Newton, Leibniz, Johann Bernoulli itse, sekä hänen veljensä Jacob Bernoulli. Ongelma on hyvin kuuluisa erityisesti siksi, että sen ratkaisemisen myötä Bernoullin veljekset kehittivät ja ratkaisivat lisää samantyyppisiä ongelmia, mistä voidaan katsoa alkaneen uuden matemaattisen alan kehittyminen. Kyseinen matematiikan ala tunnetaan nykyään variaatiolaskentana.

Variaatiolaskenta on matemaattisen analyysin ala, joka perehtyy eräänlaisten ääriarvotehtävien ratkaisemiseen. Variaatiolaskennassa tutkittavat ongelmat nousevat usein esimerkiksi geometriasta, fysiikasta, teknologiasta tai taloustieteistä. Brachistochrone-ongelman ohella muita variaatiolaskennan tunnettuja ongelmia ovat esimerkiksi *Lyhyimmän käyrän ongelma*, jossa etsitään lyhyintä mahdollista käyrää kahden tason pisteen välillä ja *Isoperimetrinen ongelma*, jossa etsitään tietyn mittaisten suljettujen käyrien joukosta käyrää, joka sulkee sisäänsä suurimman mahdollisen pinta-alan. Analyyttisesti muotoiltuna edellä kuvatut ääriarvotehtävät ovat sellaisia, missä minimoitava suure esitetään integraalina ja etsitään funktiota, joka minimoi kyseisen integraalin. Kuten tavallisten funktioiden ääriarvotehtävien kanssa työskenneltäessä, myös variaatiolaskennassa päädytään tekemisiin erilaisten välttämättömien ja riittävien ehtojen kanssa.

Tässä työssä esitettävä ratkaisu Brachistochrone-ongelmalle hyödyntää variaatiolaskennan keinoja ja on siten perinteinen tapa lähestyä ongelmaa. Työssä tuodaan esiin variaatiolaskennan perusperiaatteita ja sovelletaan niitä Brachistochrone-ongelman ratkaisemiseksi. Erityisesti työssä hyödynnetään variaatiolaskennan olennaisimpiin työkaluihin kuuluvaa Euler-Lagrangen differentiaaliyhtälöä sekä siitä johdettavaa Beltrami-yhtälöä. Lisäksi pyritään nostamaan esiin ja huomioimaan Brachistochrone-ongelman ratkaisemiseen liittyviä erityispiirteitä; työssä kiinnitetään huomiota muun muassa Brachistochrone-ongelmassa minimoitavan integraalin epäoleellisuuteen.

Työn ensimmäisessä luvussa lähdetään tutustumaan Brachistochrone-ongelmaan johtamalla se analyyttiseen muotoon. Toinen luku käsittelee työssä tarvittavia esitietoja muun muassa ääriarvotehtäviin ja funktioiden konveksisuuteen liittyen. Kolmannessa luvussa perehdytään ongelman varsinaiseen ratkaisemiseen. Ongelman ratkaisemista varten osoitetaan aluksi, että Euler-Lagrangen yhtälö on välttämätön ehto Brachistochrone-ongelman ratkaisulle. Sen jälkeen näytetään, että meitä kiinnostavassa tilanteessa Euler-Lagrangen yhtälö voidaan johtaa Beltrami-yhtälöksi, joka ratkaisemalla päästään kiinni ongelman mahdollisen ratkaisun parametriesitykseen. Saadusta parametriesityksestä nähdään, että sykloidi on Brachistochrone-ongelman ratkaisuehdokas. Lopuksi perehdytään siihen, kuinka Euler-Lagrangen yhtälön avulla johdettu ratkaisuehdokas saadaan todistettua ratkaisuksi. Tätä varten esitellään funktioiden konveksisuutta hyödyntävä riittävä ehto, jonka avulla ongelma lopulta ratkeaa.

Brachistochrone-ongelmaan voidaan perehtyä myös muilla tavoilla kuin variaatiolaskennan ideoita hyödyntäen. Esimerkiksi lähteestä [**8**] löytyy geometriaa hyödyntävä tapa todistaa, että sykloidi on brakistokroni. Kyseisessä todistuksessa käytetään eräänlaista "viipalointi" -tekniikkaa (engl. *slicing*). Brachistochrone-ongelmasta löytyy myös paljon erilaisia versioita. Yksi ilmeinen versio on, miten ongelman käsittely ja ratkaisu muuttuvat, jos tilanteessa otetaan vastusvoimat ja kitka huomioon. Kitkan huomioon ottavaa Brachistochrone-ongelman muunnosta on käsitelty lähteessä [**5**].

LUKU 1

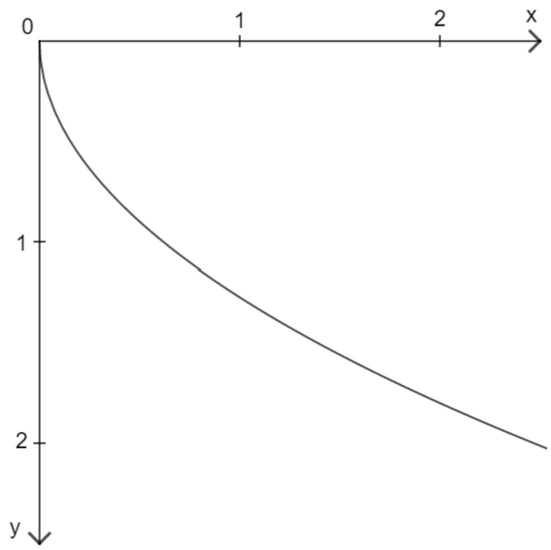
Ongelman esittely

Aloitetaan Brachistochrone-ongelmaan perehtyminen johtamalla se matemaattiseen muotoon ja tutustumalla siihen esimerkkien avulla. Tämän luvun tärkeimpänä lähteenä toimii Mike Mesterton-Gibbonsin teos *A Primer on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory* [**9**].

1.1. Ongelman johtaminen matemaattiseen muotoon

Tässä kappaleessa johdetaan Brachistochrone-ongelma sen analyyttiseen muotoon. Tutkitaan tilannetta, jossa on kaksi pistettä A ja B pystysuorassa tasossa siten, että piste B on oikeammalla ja alempana kuin piste A. Brachistochrone-ongelma kysyy, minkälaista käyrää pitkin massallinen kappale liukuu lyhyimmässä ajassa pisteestä A pisteeseen B, kun liuku tapahtuu painovoiman vaikutuksesta ja vastusvoimat oletetaan merkityksettömän pieniksi. Tarkastellaan tilannetta koordinaatistossa, jossa positiivinen x-akseli osoittaa oikealle ja positiivinen y-akseli alaspäin, kuten esitetty kuvassa 1.1. Oletetaan, että lähtöpiste on origo, jolloin tarkasteltavan tilanteen yleisyys säilyy, kunhan päätepiste B voi olla mikä tahansa molemmilta koordinaateiltaan positiivinen piste.

Olkoot siis $A = (0, 0)$ ja $B = (b, \beta)$ tason pisteitä, missä $b > 0$ ja $\beta > 0$ ovat reaalilukuja. Olkoon Γ pisteet A ja B yhdistävä käyrä, joka on jatkuvan funktion $y = y(x)$ kuvaaja. Olkoon lisäksi funktio y jatkuvasti derivoituva välillä $(0, b]$. Jos kappale lähtee liikkeelle pisteestä A ajanhetkellä $t = 0$ ja saavuttaa pisteen B ajanhetkellä



Kuva 1.1. Esimerkki käyrästä tarkasteltavassa koordinaatistossa

$t = t_f$, niin liukuun kuluva aika T saadaan integraalista

$$T = \int_0^{t_f} dt. \tag{1.1}$$

Kappaleen liukuessa pitkin käyrää Γ, sen hetkellinen nopeus kullakin ajanhetkellä t on

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}, \tag{1.2}$$

missä $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ ovat x- ja y-akselin suuntaiset yksikkövektorit ja $\boldsymbol{\tau}$ on käyrän tangentin suuntainen yksikkövektori tarkasteluhetkellä. Yhtälön (1.2) avulla saadaan

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt},$$

jolloin

$$dt = \frac{ds}{v}$$

ja toisaalta

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$$

Merkitsemällä $\frac{dy}{dx} = y'(x) = y'$ saadaan edelleen

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx.$$

Nyt integraali (1.1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$T = \int_0^{t_f} dt = \int_0^{s_f} \frac{ds}{v} = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v}dx, \tag{1.3}$$

missä s_f on kappaleen kulkema matka ajassa t_f pitkin käyrää Γ.

Koska vastusvoimat oletetaan tilanteessa merkityksettömän pieniksi, kappaleen mekaaninen energia säilyy. Kun kappale lähtee levosta ja potentiaalienergian nollatasoksi asetetaan tarkastelun loppupiste, mekaanisen energian säilymislaista saadaan

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2, \tag{1.4}$$

missä m on kappaleen massa, g on putoamiskiihtyvyys, y kappaleen korkeus potentiaalienergian nollatasoon nähden ja v on kappaleen nopeus. Yhtälöstä (1.4) saadaan ratkaistua nopeus

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Sijoittamalla saatu nopeuden lauseke integraaliin (1.3) saadaan kappaleen liukuun kuluva aika kirjoitettua muotoon

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}}dx. \tag{1.5}$$

Integraalin (1.5) arvot selvästi muuttuvat, kun funktiota y muutetaan. Voidaankin ajatella, että liukuun kuluva aika on saatu esitettyä "funktion y funktiona". Siispä integraali (1.5) on reaaliarvoinen funktioavaruudessa määritelty kuvaus. Tämänkaltaisista kuvauksista, jotka liittävät annettavaan funktioon reaaliluvun, käytetään yleisesti nimitystä *funktionaali.*

Koska Brachistochrone-ongelmassa halutaan minimoida aika, joka kappaleelta kuluu siirtyä pisteestä A pisteeseen B, tulee edellä johdetun perusteella löytää käyrä, joka minimoi integraalin (1.5). Käyrän tulee lisäksi olla sellainen, että sen määrittelee välillä $(0, b]$ jatkuvasti derivoituva funktio $y(x) \in C([0, b])$, joka toteuttaa reunaehdot $y(0) = 0$ ja $y(b) = \beta$. Huomataan, että vakiokertoimella $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ei ole merkitystä sen kannalta, mikä käyrä minimoi integraalin (1.5). Tutkitaan siis jatkossa integraalia

$$\int_0^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} dx, \tag{1.6}$$

jolloin Brachistochrone-ongelman ratkaisee käyrä, joka minimoi funktionaalin

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^b F(y(x), y'(x)) dx = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} dx.$$

HUOMAUTUS 1.1. Brachistochrone-ongelma on erikoistapaus tyypillisestä variaatiolaskennan ongelmasta. Variaatiolaskennassa pyritään usein ratkaisemaan ääriarvotehtäviä, joissa halutaan löytää sellainen käyrä kahden pisteen (a, α) ja (b, β) välillä, jonka määrittelee funktio $y = y(x)$ ja joka minimoi funktionaalin

$$\mathcal{L}(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Funktionaalin $\mathcal{L}$ määrittelevä integraali voi siis riippuaa sekä käyrän määrittelevästä funktiosta $y(x)$, sen derivaatasta $y'(x)$, että myös suoraan muuttujasta x. Brachistochrone-ongelma on siis erikoistapaus, jossa integraali ei riipu suoraan muuttujasta x.

Tutustutaan ongelmaan seuraavaksi vielä konkreettisten esimerkkien avulla.

1.2. Ongelmaan tutustuminen esimerkkien avulla

Lasketaan tässä kappaleessa, minkälaisia arvoja funktionaali $\mathcal{J}$ saa, kun muuttujana toimii erilaisia käyriä. Pyritään näin saamaan kuvaa siitä, minkälainen etsitty brakistokroni on tai vähintäänkin siitä, mitkä käyrät eivät ainakaan ole etsimämme ratkaisu. Jotta saadaan konkreettisia vertailtavia lukuarvoja, täytyy loppupisteeksi B valita jokin tason konkreetti piste. Olkoon $B = (1, 1)$. Lisäksi olkoon kappaleen lähtöpiste $A = (0, 0)$, kuten ongelman matemaattista muotoa johdettaessa.

Etsitään siis käyrää, jota pitkin massallinen kappale liukuu pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(1, 1)$ lyhimmässä mahdollisessa ajassa. Lähdetään siten tarkastelemaan, millaisia arvoja erilaiset käyrät Γ antavat integraalille

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} dx. \tag{1.7}$$

Esimerkki 1.2.

a) Olkoon käyrä Γ_0 suora pisteiden $(0,0)$ ja $(1,1)$ välillä. Tällöin käyrän Γ_0 määrittelee funktio $y_0(x) = x$. Siispä

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(y_0) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1+(y_0')^2}{y_0}}dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+1^2}{x}}dx \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{2} \approx 2,83.\end{aligned}$$

b) Olkoon käyrä Γ_1 neljäsosa ympyrän kaaresta, jonka säde on 1 ja keskipiste on $(1,0)$. Tällöin käyrä Γ_1 kulkee pisteiden $(0,0)$ ja $(1,1)$ kautta ja sen määrittelee funktio

$$y_1(x) = \sqrt{-x^2+2x}.$$

Siispä

$$y_1'(x) = \frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x}}$$

ja

$$\mathcal{J}(y_1) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+(y_1')^2}{y_1}}dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+\left(\frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x}}\right)^2}{\sqrt{-x^2+2x}}}dx \approx 2,62.$$

Esimerkin 1.2 perusteella huomataan, että ainakaan suora ei ole etsimämme brakistokroni, sillä ympyrän kaarta kuvaava funktio antaa pienemmän arvon funktionaalille $\mathcal{J}$. Herää kysymys, voisiko ympyrän kaaren osa olla etsimämme brakistokroni. Galileo on tiettävästi ensimmäinen, joka pyrki selvittämään, millaista käyrää pitkin kappale liukuu tasossa lyhyimmässä mahdollisessa ajassa pisteestä toiseen, kun liuku tapahtuu kitkatta. Hän päätteli, että kyseessä olisi ympyrän kaari, mutta kuten seuraavan esimerkin avulla nähdään, hänen päätelmänsä ei pidä paikkaansa.

Esimerkki 1.3. Olkoon käyrä Γ_2 neliöjuurifunktion kuvaaja eli funktion $y_2(x) = \sqrt{x}$, kuvaaja. Tällöin käyrä Γ_2 kulkee pisteiden $(0,0)$ ja $(1,1)$ kautta ja $y_2'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. Siispä

$$\mathcal{J}(y_2) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+(y_2')^2}{y_2}}dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})^2}{\sqrt{x}}}dx \approx 2,58. \tag{1.8}$$

Esimerkin 1.3 avulla nähdään, että neliöjuurifunktio antaa pienemmän arvon funktionaalille $\mathcal{J}$ kuin ympyrän kaarta kuvaava funktio ja siten ympyrän kaari ei ole etsimämme brakistokroni. Kokeilemalla lisää erilaisia funktioita voitaisiin näyttää edelleen, ettei neliöjuurifunktion kuvaajakaan ole etsittävä brakistokroni. Laskemalla funktionaalille $\mathcal{J}$ arvoja erilaisilla funktioilla, ei kuitenkaan Brachistochrone-ongelmaa voida ratkaista. Tarvitaan jokin toinen lähestymistapa ja hyväksi tavaksi osoittautuu erilaisten välttämättömien ja riittävien ehtojen tarkastelu, kuten tavallisten funktioiden ääriarvoja etsittäessä. Siispä kerrataan seuraavaksi, miten tavallisten funktioiden ääriarvo-ongelmia lähdetään ratkaisemaan ja nostetaan esiin myös muita tässä työssä tarvittavia esitietoja.

LUKU 2

Esitietoja

Tässä luvussa esitellään tutkielman lukemista helpottavia esitietoja. Erityisesti muistutetaan mieliin avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määriteltyjen funktioiden ääriarvotehtävien ratkaisemista. Näin saadaan ideaa myös siihen, miten Brachistochrone-ongelmaa voidaan lähteä lähestymään. Luvun pääasiallisia lähteitä ovat Tero Kilpeläisen luentomoniste *Vektorianalyysi 1* [**7**], Rodney Colemanin teos *Calculus on Normed Vector Spaces* [**3**] sekä Brechtken-Manderscheidin teos *Introduction to the Calculus of Variations* [**1**].

2.1. Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{R}^n$	$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n kpl}}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$C(\Omega)$	$\{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ on jatkuva joukossa $\Omega\}$
$C^1(\Omega)$	$\{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ on jatkuvasti derivoituva joukossa $\Omega\}$
$C^2(\Omega)$	$\{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ on kahdesti jatkuvasti derivoituva joukossa $\Omega\}$
$B(x_0, r)$	$\{x \in \mathbb{R}^n : \lvert x - x_0\rvert < r\}$ (x_0-keskinen ja r-säteinen avoin pallo)

2.2. Ääriarvoista

Kerrataan aluksi, mitä funktion ääriarvot tarkoittavat ja miten ääriarvotehtäviä voidaan ratkaista, kun käsitellään avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määriteltyjä funktioita. Tarkastellaan tämän kappaleen lopuksi myös ideaa, miten ääriarvojen löytämistä voi lähestyä suuntaisderivaatan avulla. Kyseinen idea on sovellettavissa myös funktionaalien ääriarvojen selvittämiseen ja sitä tullaan myöhemmin työssä hyödyntämään.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Piste $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ on funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *lokaali ääriarvokohta*, jos on olemassa $r > 0$, jolle joko

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{kaikilla} \quad x \in B(x_0, r) \cap \Omega \qquad \text{(lokaali maksimi)}$$

tai

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{kaikilla} \quad x \in B(x_0, r) \cap \Omega \qquad \text{(lokaali minimi).}$$

Lisäksi funktiolla f on suurin arvo eli *globaali maksimi* pisteessä $x_0 \in \Omega$, jos

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{kaikilla} \quad x \in \Omega$$

ja toisaalta pienin arvo eli *globaali minimi* pisteessä $x_0 \in \Omega$, jos

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{kaikilla} \quad x \in \Omega.$$

Kun puhutaan ääriarvotehtävistä, niin yleensä kiinnostuksen kohteena on selvittää ne tutkittavan funktion f määrittelyjoukon pisteet, joissa funktio saavuttaa lokaalin tai globaalin ääriarvon. Mikäli funktio, jonka ääriarvokohdat halutaan selvittää, on derivoituva, niin yksiulotteisessa tapauksessa ääriarvokohtia etsitään derivaatan nollakohdista. Samanlainen tulos yleistyy myös n-ulotteiseen tilanteeseen.

LAUSE 2.2. *Olkoon funktiolla* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *osittaisderivaatat pisteessä* $x_0 \in \Omega$. *Jos* x_0 *on funktion* f *lokaali maksimi- tai minimipiste, niin*

$$\nabla f(x_0) = 0. \tag{2.1}$$

TODISTUS. Käsitelty lähteessä [**7**]. □

Ehdon (2.1) toteuttavaa pistettä x_0 kutsutaan funktion f *kriittiseksi pisteeksi.* Ehto (2.1) toimii välttämättömänä ehtona derivoituvan funktion ääriarvokohdalle ja siten derivoituvan funktion ääriarvoja etsitään gradientin nollakohdista. On kuitenkin oleellista huomata, että funktion kriittiset pisteet eivät välttämättä ole funktion ääriarvokohtia.

ESIMERKKI 2.3.

a) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Tällöin $f'(0) = 0$. Kuitenkaan funktiolla f ei ole kohdassa $x = 0$ ääriarvoa vaan kyseinen piste on satulapiste.
b) Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = -x^2 + 3y^2$. Tällöin $\nabla g(x, y) = (-2x, 6y)$, joten origo on funktion g kriittinen piste, sillä $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$. Kuitenkin pystytään näyttämään, että origo ei ole funktion g ääriarvopiste, vaan satulapiste.

Jotta saadaan todennettua, että Esimerkissä 2.3 esiintyvällä funktiolla g ei ole ääriarvokohtaa origossa, tarvitaan jokin ehto, joka erittelee, onko löydetty kriittinen piste ääriarvokohta vai ei. Esitellään seuraavaksi määritelmät *Hessen matriisille* sekä matriisin definiittisyydelle, joiden avulla saadaan halutunlainen ehto muodostettua.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon $O \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja oletetaan, että funktiolla $f : O \to \mathbb{R}$ on toisen kertaluvun osittaisderivaatat olemassa. Funktion f Hessen matriisi pisteessä $\mathbf{x} \in O$ on

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f(\mathbf{x}) & \partial_2\partial_1 f(\mathbf{x}) & \dots & \partial_n\partial_1 f(\mathbf{x}) \\ \partial_1\partial_2 f(\mathbf{x}) & \partial_2\partial_2 f(\mathbf{x}) & \dots & \partial_n\partial_2 f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(\mathbf{x}) & \partial_2\partial_n f(\mathbf{x}) & \dots & \partial_n\partial_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

MÄÄRITELMÄ 2.5. Symmetriseen $n \times n$-matriisiin $A = [a_{ij}]$ liittyvä neliömuoto $Ax \cdot x$ on

a) *positiivisesti semidefiniitti*, jos $Ax \cdot x \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.
b) *positiivisesti definiitti*, jos $Ax \cdot x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
c) *negatiivisesti semidefiniitti*, jos $Ax \cdot x \leq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.
d) *negatiivisesti definiitti*, jos $Ax \cdot x < 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
e) *indefiniitti*, jos se ei ole positiivisesti semidefiniitti eikä negatiivisesti semidedifniitti, ts. jos on olemassa sellaiset $u, v \in \mathbb{R}^n$, joilla

$$Au \cdot u < 0 < Av \cdot v.$$

LAUSE 2.6. *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *avoin ja olkoon* $x_0 \in \Omega$ C^2*-funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *kriittinen piste (ts .* $\nabla f(x_0) = 0$*). Tällöin*

i) *Jos* $\nabla^2 f(x_0)$ *on positiivisesti definiitti, on* x_0 *funktion* f *lokaali minimipiste.*
ii) *Jos* $\nabla^2 f(x_0)$ *on negatiivisesti definiitti, on* x_0 *funktion* f *lokaali maksimipiste.*
iii) *Jos* $\nabla^2 f(x_0)$ *on indefiniitti, on* x_0 *funktion* f *satulapiste*

TODISTUS. Käsitelty lähteessä [**7**]. □

Lauseen 2.6 avulla on mahdollista tietyissä tilanteissa päätellä kriittisen pisteen luonne, jolloin lause toimii riittävänä ehtona todentamaan, onko kriittinen piste funktion ääriarvokohta vai satulapiste. Tarkastelemalla nyt Esimerkin 2.3 funktiota g huomataan, että sen Hessen matriisi on muotoa

$$\nabla^2 g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Valitaan $\mathbf{u} = (1, 2)$ ja $\mathbf{v} = (4, 1)$. Tällöin

$$-26 = \nabla^2 g(0,0)v \cdot v < 0 < \nabla^2 g(0,0)u \cdot u = 22.$$

Siispä $\nabla^2 g(0, 0)$ on indefiniitti ja Lauseen 2.6 perusteella piste $(0, 0)$ on funktion g satulapiste.

Lausetta 2.6 voidaan pitää yleistyksenä yksiulotteisesta tilanteesta tutulle toisen derivaatan testille:

LAUSE 2.7. *Olkoon* $I \subset \mathbb{R}$ *avoin väli. Olkoon* $x_0 \in I$ C^2*-funktion* $g : I \to \mathbb{R}$ *kriittinen piste (ts.* $g'(x_0) = 0$*). Tällöin:*

i) *Jos* $g''(x_0) > 0$*, on* x_0 *funktion* g *(aito) lokaali minimipiste.*
ii) *Jos* $g''(x_0) < 0$*, on* x_0 *funktion* g *(aito) lokaali maksimipiste.*
iii) *Jos* x_0 *on funktion* g *lokaali minimipiste, on* $g''(x_0) \geq 0$ *(vastaavasti maksimipisteessä* $g''(x_0) \leq 0$*).*

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määriteltyjä ääriarvotehtäviä voidaan siis lähestyä etsimällä ensin kriittiset pisteet, sillä jotta piste voi olla ääriarvopiste täytyy sen olla kriittinen piste. Kriittisen pisteen luonteen voi seuraavaksi tarkistaa esimerkiksi Hessen matriisin definiittisyyden avulla, mikä parhaimmillaan riittää osoittamaan, että kyseinen piste todella on ääriarvopiste. On myös paljon tilanteita, joissa ääriarvopisteitä ei voi selvittää edellä kuvatulla tavalla esimerkiksi, jos tutkittava funktio ei ole derivoituva tai edes jatkuva. Kuitenkin pääperiaate ääriarvotehtäviä ratkaistaessa on se, että ensin tarkastellaan, mitkä pisteet toteuttavat ääriarvopisteen välttämättömät ehdot ja tämän jälkeen ääriarvopisteet löydetään jonkin riittävän ehdon avulla. Päädytään siis tekemisiin erilaisten välttämättömien ja riittävien ehtojen kanssa. Tällä periaatteella lähdetään tässä työssä ratkaisemaan myös Brachistochrone-ongelmaa.

Tarkastellaan tämän kappaleen lopuksi vielä lyhyesti, millä tavalla funktioiden ja funktionaalien ääriarvoja voidaan lähestyä suuntaisderivaatan avulla. Siispä kerrataan vielä, mitä suuntaisderivaatta tarkoittaa ja esitellään yksi siihen liittyvä hyödyllinen ominaisuus, jota tarvitaan työssä myöhemmin.

MÄÄRITELMÄ 2.8. Olkoot E vektoriavaruus, f reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty joukon E avoimessa osajoukossa X ja $x \in X$. Olkoot lisäksi $v \in E$ ja $\epsilon > 0$

siten, että väli $[x - \epsilon v, x + \epsilon v]$ kuuluu joukkoon X. Jos raja-arvo

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x+tv)|_{t=0}$$

on olemassa, sitä kutsutaan funktion f suuntaisderivaataksi pisteessä x suuntaan v ja merkitään $\partial_v f(x)$.

Koska Määritelmässä 2.8 vektoriavaruus E on yleinen vektoriavaruus, kyseinen määritelmä on pätevä myös funktionaaleille. Todistetaan nyt seuraava hyödyllinen tulos:

LAUSE 2.9. *Olkoon E vektoriavaruus ja $X \subset E$. Jos x on funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ääriarvopiste (minimi tai maksimi), niin $\partial_v f(x) = 0$ kaikkiin suuntiin v, joihin suuntaisderivaatta $\partial_v f(x)$ on määritelty pisteessä x.*

TODISTUS. Olkoon $x \in X$ funktion f ääriarvopiste. Oletetaan lisäksi, että x on funktion f minimipiste. Olkoon nyt v sellainen suunta, johon suuntaisderivaatta $\partial_v f(x)$ on määritelty. Tällöin raja-arvo

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

on olemassa ja erityisesti toispuoleiset raja-arvot

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \quad \text{ja} \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

ovat samat. Kuitenkin, koska x on funktion f minimi, niin $f(x+tv) - f(x) \geq 0$, jolloin

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \leq 0$$

ja toisaalta

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \geq 0.$$

Tästä seuraa, että

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = 0.$$

Vastaava päättely saadaan tehtyä myös tilanteessa, jossa x on funktion f maksimipiste. $\square$

2.3. Konveksit joukot ja funktiot

Muistutetaan seuraavaksi mieliin, mitä tarkoittavat konveksit joukot ja funktiot.

MÄÄRITELMÄ 2.10. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan olevan *konveksi*, jos mille tahansa joukon A alkioille u ja v pätee, että kaikki alkiot, jotka sijaitsevat alkiot u ja v yhdistävällä segmentillä, kuuluvat myös joukkoon A. Toisin sanoen, joukko A on konveksi, jos kaikilla $u, v \in A$ ja kaikilla $t \in [0, 1]$ pätee

$$u + t(v - u) = tv + (1 - t)u \in A.$$

ESIMERKKI 2.11. $\mathbb{R}^n$ ja reaaliakselin välit ovat konvekseja joukkoja.

MÄÄRITELMÄ 2.12. Funktion f, joka on määritelty konveksissa joukossa A, sanotaan olevan *konveksi*, jos kaikilla $u, v \in A$ ja kaikilla $t \in (0,1)$ pätee

$$f(tv + (1-t)u) \leq tf(v) + (1-t)f(u).$$

Funktion f sanotaan olevan *aidosti konveksi*, jos kaikilla $u, v \in A$, missä $u \neq v$ ja kaikilla $t \in (0,1)$ pätee

$$f(tv + (1-t)u) < tf(v) + (1-t)f(u).$$

Suoraan määritelmän avulla voi olla hankala selvittää, onko jokin annettu funktio konveksi vai ei. Seuraavaksi esitellään kolme lausetta, joista kaksi ensimmäistä antavat ehtoja, joiden avulla funktion konveksisuus on tietyissä tilanteissa helppo todentaa. Viimeinen lause esittelee hyödyllisen funktion konveksisuuden kanssa yhtäpitävän ominaisuuden.

LAUSE 2.13. *Olkoon $f : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti differentioituva funktio. Tällöin f on konveksi jos ja vain jos kaikilla $(x, y) \in O$ pätee*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 \geq 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \geq 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \geq 0.$$

Ehdot vastaavat tilannetta, jossa funktion f Hessen matriisi on positiivisesti semidefiniitti.

TODISTUS. Käsitelty lähteessä [**1**]. □

LAUSE 2.14. *Olkoon $O \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f : O \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti differentioituva funktio. Olkoon lisäksi $X \subset O$ konveksi joukko. Tällöin f on aidosti konveksi joukossa X, jos kaikilla $(x, y) \in X$ pätee, että funktion f Hessen matriisi on positiivisesti definiitti.*

HUOMAUTUS 2.15. Lauseessa 2.14 määritellyn funktion f Hessen matriisin positiivisesti definiittisyys on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 > 0.$$

LAUSE 2.16. *Olkoon O normitetun vektoriavaruuden E avoin osajoukko ja f reaaliarvoinen differentioituva funktio, joka on määritelty joukossa O. Jos $X \subset O$ on konveksi joukko ja $x, y \in X$, niin tällöin f on konveksi joukossa X jos ja vain jos*

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x).$$

Lisäksi, jos $x \neq y$, niin f on aidosti konveksi jos ja vain jos

$$f(y) - f(x) > f'(x)(y - x).$$

Lauseiden 2.14 ja 2.16 todistukset löytyvät lähteestä [**3**].

2.4. Määritelmiä ja tuloksia

Tässä kappaleessa nostetaan esiin vielä erinäisiä käsitteitä, määritelmiä ja tuloksia, jotka on hyvä tietää tätä työtä lukiessaan.

Muistetaan, että vektorikenttä on kuvaus, joka liittää jokaiseen määrittelyalueensa pisteeseen vektorin. Esimerkiksi, jos $D \subset \mathbb{R}^n$, niin kuvaus $F : D \to \mathbb{R}^n$ on vektorikenttä.

Määritelmä 2.17. Olkoon E normitettu vektoriavaruus ja $O \subset E$. Olkoon $X : O \to E$ vektorikenttä. Jos $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja $\phi : I \to O$ derivoituva kuvaus siten, että

$$\phi'(t) = X(\phi(t))$$

kaikilla $t \in I$, sanotaan, että ϕ on vektorikentän X *integraalikäyrä*.

Huomautus 2.18. Avoimella välillä I määritellyn integraalikäyrän sanotaan olevan maksimaalinen, ts. *maksimi-integraalikäyrä*, mikäli ei löydy kyseisen integraalikäyrän laajennusta, joka olisi määritelty avoimella välillä, joka sisältää välin I. Toisin sanoen, jos $\phi : I \to O$ on maksimi-integraalikäyrä vektorikentälle $X : O \to E$, $t_0 \in I$, $x_0 \in O$ ja $\phi(t_0) = x_0$, niin jos ψ on mikä tahansa vektorikentän X toinen integraalikäyrä, jolle $\psi(t_0) = x_0$, niin ψ on funktion ϕ rajoittuma.

Seuraavaksi halutaan esitellä kaksi integraalikäyriin liittyvää hyödyllistä tulosta, mutta niitä varten täytyy ottaa vielä esiin käsitteet Banachin avaruus ja Lipschitz-jatkuvuus. *Banachin avaruus* on täydellinen normiavaruus eli normiavaruus, jonka jokainen Cauchy-jono suppenee. Esimerkiksi, jos määritellään normi vektoriavaruudessa $C([a, b])$ seuraavalla tavalla

$$||\gamma|| = \sup_{t \in [a,b]} |\gamma(t)|,$$

niin $C([a, b])$ on Banachin avaruus [**2**]. Olkoon nyt E vektoriavaruus, joka on Banachin avaruus ja $O \subset E$ avoin joukko. Voidaan todeta, että mikäli kuvaus $f \in C^1$ on joukossa O määritelty ja $x \in O$, niin f' on jatkuvana funktiona rajoitettu avoimessa x-keskisessä pallossa ja siten f on lokaalisti Lipschitz. Tässä työssä ei perehdytä tarkemmin siihen, mitä tarkoittaa, että funktio on lokaalisti Lipschitz, sillä tätä työtä varten riittää tietää, että jatkuvasti derivoituva kuvaus on lokaalisti Lipschitz. Lipschitz-jatkuvuudesta löytyy lisää tietoa esimerkiksi lähteestä [**3**] ja normiavaruudet löytyy tarkemmin esiteltynä esimerkiksi lähteestä [**6**]. Olkoon nyt $X : O \to E$ lokaalisti Lipschitz vektorikenttä ja $x_0 \in O$. Nämä oletukset pohjana voidaan todistaa seuraavat kaksi tulosta, joita hyödynnetään työssä myöhemmin:

Lause 2.19. *Olkoot ϕ ja ψ vektorikentän X integraalikäyriä, jotka on määritelty samalla avoimella välillä I. Jos $t_0 \in I$ ja $\phi(t_0) = \psi(t_0)$, niin $\phi(t) = \psi(t)$ kaikilla $t \in I$.*

Lause 2.20. *Olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in O$, missä O on vektorikentän X määrittelyjoukko. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen maksimi-integraalikäyrä ϕ siten, että $\phi(t_0) = x_0$.*

Lauseiden 2.20 ja 2.19 todistukset on käsitelty lähteessä [**3**].

Esitellään lopuksi vielä kolme hyödyllistä tulosta. Ensimmäinen tuloksista kertoo, milloin derivoinnin ja integroinnin järjestys on mahdollista vaihtaa ja kyseinen tulos tunnetaan Leibnizin integraalisääntönä. Kaksi muuta esiteltävää tulosta ovat käänteiskuvauslause sekä implisiittifunktiolause.

LAUSE 2.21. *(Leibnizin integraalisääntö) Olkoon*

$$I(\epsilon) = \int_a^b f(x, \epsilon) dx.$$

Jos f ja sen osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial \epsilon}$ ovat jatkuvia joukossa $\{(x, \epsilon) : x \in [a, b], \epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2]\}$, niin $I(\epsilon)$ on derivoituva välillä (ϵ_1, ϵ_2) ja

$$I'(\epsilon) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \epsilon}(x, \epsilon) dx.$$

TODISTUS. Löytyy esimerkiksi lähteestä [**10**]. □

LAUSE 2.22. *(Käänteiskuvauslause) Olkoon $O \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $F : O \to \mathbb{R}^2$ on jatkuvasti derivoituva kuvaus. Olkoon $(x_0, y_0) \in O$ siten, että derivaattamatriisi*

$$DF(x_0, y_0)$$

on kääntyvä. Tällöin on olemassa avoin joukko $(x_0, y_0) \in U \subset O$ ja avoin joukko $F(x_0, y_0) \in V \subset \mathbb{R}^2$ siten, että kuvaus

$$F : U \to V$$

on bijektio. Lisäksi käänteiskuvaus $F^{-1} : V \to U$ on jatkuvasti derivoituva ja jos $(u, v) \in V$ ja $(x, y) \in U$ siten, että $F(x, y) = (u, v)$, niin käänteisfunktion derivaattamatriisi pisteessä (u, v) saadaan yhtälöstä

$$DF^{-1}(u, v) = [DF(x, y)]^{-1}.$$

Lauseessa 2.22 esitetty versio käänteiskuvauslauseelle on tasoon rajoittuva erikoistapaus. Käänteiskuvauslause esitetään usein yleisemmässä muodossa, jossa $O \subset \mathbb{R}^n$ ja $F : O \to \mathbb{R}^n$. Yleiselle tapaukselle on esitetty todistus esimerkiksi lähteessä [**7**].

LAUSE 2.23. *(Implisiittifunktiolause) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, avoin, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva funktio ja $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sellainen, että*

$$f(y) = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0.$$

Tällöin on olemassa avoimet joukot $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ja $V \subset \mathbb{R}^n$ ja funktio $g : U \to \mathbb{R}$ siten, että $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in U$, $y \in V$ ja

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = y_n$$

ja

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\} =$$
$$\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})) : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U\}.$$

Toisin sanoen joukko $\{x \in V : f(x) = 0\}$ on funktion $g : U \to \mathbb{R}$ graafi. Edelleen g on differentioituva pisteessä $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ja

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(y)}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(y)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Implisiittifunktiolause on edellä muotoiltu samalla tavalla kuin lähteessä [**7**] ja kyseisestä lähteestä löytyy myös todistus lauseelle.

LUKU 3

Ongelman ratkaiseminen

Tässä luvussa ratkaistaan luvussa 1 esitelty Brachistochrone-ongelma variaatiolaskennan keinoin. Kuten etsittäessä tavallisille funktioille ääriarvoja, myös variaatiolaskennassa työskennellään välttämättömien sekä riittävien ehtojen parissa. Siispä tässä luvussa johdetaan ensin välttämätön ehto sille, että funktio voi olla funktionaalin ääriarvokohta ja sen jälkeen muodostetaan riittävä ehto. Riittävän ehdon avulla saadaan varmennettua, onko mahdollinen ääriarvokohta todella etsitty ratkaisu. Luvussa esitettävien todistusten pääasiallisena lähteenä on käytetty Rodney Colemanin artikkelia *A Detailed Analysis of the Brachistochrone Problem* [**2**].

3.1. Lyhyesti variaatio-ongelmista

Brachistochrone-ongelma on klassinen variaatiolaskennan ongelma, joten esitellään aluksi muutama tässä työssä käytettävä variaatio-ongelmiin liittyvä käsite ja merkintä. Tyypillisesti variaatiolaskennassa tarkastellaan ongelmia, joiden tavoitteena on minimoida (tai maksimoida) funktionaaleja, jotka voidaan esittää määrättyinä integraaleina seuraavalla tavalla:

$$\mathcal{L}(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx.$$

Kuten luvussa 1 havaittiin, myös Brachistochrone-ongelma on tällaista muotoa. Tämänkaltaisille integraalille saadaan laskettua arvo useilla eri funktioilla y, mutta minimointiongelmien tapauksessa kiinnostuksen kohteena ovat vain tietyt funktiot. Näitä kiinnostuksen kohteena olevia funktioita kutsutaan *sallituiksi* funktioiksi. Sallitut funktiot ovat siis sellaisia, jotka ovat määritelty välillä $[a, b]$, jotka täyttävät tutkittavan ongelman reunaehdot ja mahdolliset sileyteen liittyvät ehdot. Siispä variaatiolaskennassa usein käsiteltävät ongelmat voitaisiin muotoilla seuraavasti: *Kaikkien sallittujen funktioiden y joukosta, määritä se, jolla funktionaali $\mathcal{L}$ saavuttaa pienimmän arvonsa.* Sallittua funktioita y_0 kutsutaan variaatio-ongelman ratkaisuksi tai absoluuttiseksi minimiksi, mikäli epäyhtälö $\mathcal{L}(y_0) \leq \mathcal{L}(y)$ pätee kaikilla sallituilla funktioilla y.

Kuten luvusta 1 muistetaan, Brachistochrone-ongelmassa tarkasteltava integraali ei riipu eksplisiittisesti muuttujasta x. Siispä tarkastellaan tästä eteenpäin funktionaaleja, jotka ovat muotoa

$$\mathcal{L}(y) = \int_a^b F(y(x), y'(x))dx.$$

Merkitään jatkossa riippumatonta muuttujaa symbolilla t ja riippuvaa muuttujaa symbolilla γ, jolloin

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t))dt.$$

Lisäksi otetaan käyttöön lyhennysmerkintä $(\gamma(t), \gamma'(t)) = [\gamma(t)]$, jolloin voidaan kirjoittaa

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b F[\gamma(t)]dt.$$

Muistetaan, että Brachistochrone-ongelmassa tarkasteltava funktionaali on

$$\mathcal{J}(\gamma) = \int_0^1 F_b[\gamma(t)]dt = \int_0^1 F_b(\gamma(t), \gamma'(t))dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + \gamma'^2(t)}{\gamma(t)}}dt$$

eli

$$F_b(x, y) = \sqrt{\frac{1 + y^2}{x}}.$$

Näitä merkintöjä ja peruskäsitteitä hyödyntäen aloitetaan seuraavaksi perehtymään Brachistochrone-ongelman ratkaisemiseen.

3.2. Euler-Lagrangen yhtälö

Tässä kappaleessa näytetään, että variaatio-ongelman ratkaisu toteuttaa differentiaaliyhtälön, jota kutsutaan *Euler-Lagrangen yhtälöksi.* Tämä tarkoittaa sitä, että variaatio-ongelman, eli myös Brachistochrone-ongelman, ratkaisut löytyvät kyseisen differentiaaliyhtälön ratkaisujen joukosta. Tätä voi verrata tavallisten funktioiden ääriarvotehtävien ratkaisemiseen niin, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ääriarvopisteitä etsitään niistä pisteistä, joissa funktion gradientti on nolla ja nyt niistä funktiosta, jotka toteuttavat Euler-Lagrangen yhtälön. Euler-Lagrangen yhtälön toteuttaminen on siis välttämätön ehto sille, että funktio voi olla funktionaalin ääriarvokohta.

Johdetaan Euler-Lagrangen yhtälö aluksi hieman Brachistochrone-ongelmaa yksinkertaisemmassa tilanteessa, joten määritellään seuraavanlainen variaatio-ongelma:

Määritelmä 3.1. Olkoon $O \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $F : O \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva funktio. Olkoon lisäksi $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio ja oletetaan, että $(\gamma(t), \gamma'(t)) \in O$ kaikilla $t \in [a, b]$. Asetetaan

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b F[\gamma(t)]dt.$$

Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja merkitään sallittujen funktioiden joukkoa

$$X = \{\gamma \in C^1([a, b]) : \gamma(a) = \alpha, \gamma(b) = \beta \text{ ja } (\gamma(t), \gamma'(t)) \in O \text{ kaikilla } t \in [a, b]\}.$$

Etsi funktio $\gamma \in X$, joka minimoi funktionaalin $\mathcal{L}$.

Jotta $\gamma \in X$ voi olla edellä määritellyn variaatio-ongelman ratkaisu, täytyy sen olla funktionaalin $\mathcal{L}$ ääriarvokohta. Etsitään nyt siten välttämätöntä ehtoa, joka sallitun funktion γ täytyy toteuttaa, ollakseen funktionaalin $\mathcal{L}$ ääriarvokohta. Tarkastellaan aluksi apulausetta, joka on nimetty saksalaisen matemaatikon Paul du Bois-Reymondin mukaan. Kyseinen apulause kuuluu variaatiolaskennan perustuloksiin.

LEMMA 3.2. *(DuBois-Reymond) Jos* $f \in C([a,b])$ *ja* $\int_a^b f(t)v'(t)dt = 0$ *kaikilla funktioilla* $v \in C^1([a,b])$*, joilla* $v(a) = v(b) = 0$*, niin* f *on vakiofunktio.*

TODISTUS. Koska funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$, integraali $\int_a^b f(t)dt$ on hyvin määritelty. Olkoon nyt

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt,$$

jolloin c on jokin reaaliluku. Olkoon lisäksi

$$v(s) = \int_a^s (f(t) - c)dt.$$

Tällöin

$$v(a) = \int_a^a (f(t) - c)dt = 0$$

ja

$$v(b) = \int_a^b (f(t) - c)dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b cdt = \int_a^b f(t)dt - (b-a)c = 0.$$

Lisäksi $v \in C^1([a,b])$ ja $v'(s) = f(s) - c$. Nyt

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(t) - c)^2 dt = \int_a^b (f(t) - c)v'(t)dt &= \int_a^b f(t)v'(t)dt - c\int_a^b v'(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)v'(t)dt - cv(x)|_a^b = 0.\end{aligned}$$

Koska $f(t) - c$ on jatkuva, niin edeltä seuraa, että $f(t) - c = 0$ kaikilla $t \in [a,b]$. Siispä $f(t) = c =$ vakio. □

Du Bois-Reymondin lemman avulla saadaan osoitettua seuraava hyödyllinen tulos, jota voidaan pitää myös toisena versiona kyseisestä lemmasta.

SEURAUS 3.3. *Jos* $f, g \in C([a,b])$ *ja*

$$\int_a^b f(t)v(t) + g(t)v'(t)dt = 0$$

kaikilla funktioilla $v \in C^1([a,b])$*, joilla* $v(a) = v(b) = 0$*, niin* $g \in C^1([a,b])$ *ja* $g' = f$*.*

TODISTUS. Olkoon $F(s) = \int_a^s f(t)dt$, missä $s \in [a,b]$. Tällöin $F \in C^1([a,b])$ ja $F'(s) = f(s)$. Olkoon lisäksi $v \in C^1([a,b])$ sellainen, että $v(a) = 0$ ja $v(b) = 0$. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_a^b f(t)v(t)dt = F(t)v(t)|_a^b - \int_a^b F(t)v'(t)dy = -\int_a^b F(t)v'(t)dt. \tag{3.1}$$

Oletuksen ja yhtälön 3.1 nojalla saadaan

$$0 = \int_a^b f(t)v(t) + g(t)v'(t)dt = \int_a^b (g(t) - F(t))v'(t)dt.$$

Nyt Lemman 3.2 nojalla on olemassa vakio c siten, että $g(t) - F(t) = c$ eli $g(t) = F(t) - c$. Tällöin selvästi $g = F + c \in C^1([a,b])$ ja $g' = F' = f$. □

Hyödyntäen erityisesti Seurausta 3.3 saadaan johdettua välttämätön ehto funktionaalin $\mathcal{L}$ ääriarvokohdille. Lähdetään liikkeelle oletuksesta, että funktionaalilla $\mathcal{L}$ on ääriarvokohta joukossa X ja merkitään kyseistä funktiota γ_0. Oletetaan lisäksi, että γ_0 on funktionaalin $\mathcal{L}$ minimikohta. Lähdetään tarkastelemaan yritefunktiota

$$\gamma_\epsilon(t) = \gamma_0(t) + \epsilon\eta(t),$$

missä $\epsilon \in \mathbb{R}$ ja η on mielivaltainen, välillä $[a, b]$ jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Kun ϵ on riittävän pieni, joukon O avoimuudesta seuraa, että γ_ϵ on sallittu funktio kaikilla η eli $\gamma_\epsilon \in X$. Kun $\epsilon = 0$, niin yritefunktiosta tulee funktionaalin $\mathcal{L}$ minimoiva funktio, joten

$$\mathcal{L}(\gamma_0) \leq \mathcal{L}(\gamma_\epsilon) \tag{3.2}$$

kaikilla funktioilla η. Huomataan, että valittaessa yritefunktioon tietty η, funktionaalista $\mathcal{L}$ tulee ainoastaan muuttujan ϵ funktio. Siispä epäyhtälö (3.2) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathcal{L}(0) \leq \mathcal{L}(\epsilon),$$

missä

$$\mathcal{L}(\epsilon) = \int_a^b F((\gamma_0 + \epsilon\eta)(t), (\gamma + \epsilon\eta)'(t))dt = \int_a^b F[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]dt.$$

Koska ϵ voi olla positiivinen tai negatiivinen reaaliluku ja $\mathcal{L}(0) \leq \mathcal{L}(\epsilon)$, niin nyt $\mathcal{L}$ on tavallinen yhdenmuuttujan funktio, joka saavuttaa lokaalin minimin kohdassa $\epsilon = 0$. Siispä

$$\mathcal{L}'(0) = 0. \tag{3.3}$$

Koska η oli mielivaltainen funktio, niin yhtälö (3.3) pätee kaikille η.

Derivoinnin ketjusäännön avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{L}(\epsilon) &= \frac{d}{d\epsilon}\int_a^b F[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]dt \\
&\overset{(*)}{=} \int_a^b \frac{d}{d\epsilon}F[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \epsilon}dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]\eta + \frac{\partial F}{\partial y}[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]\eta' dt.
\end{aligned}$$

Kohta $(*)$ seuraa Leibnizin integraalisäännöstä, sillä funktio F on jatkuva sekä muuttujan ϵ suhteen, että kaikilla $t \in [a, b]$ ja myös funktio

$$\frac{dF}{d\epsilon}[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)] = \frac{\partial F}{\partial x}[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]\eta + \frac{\partial F}{\partial y}[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]\eta'$$

on jatkuva muuttujan ϵ suhteen ja kaikilla $t \in [a, b]$, sillä funktiot η, η', $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ ovat jatkuvia. Funktion $\frac{\partial F}{\partial x}[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]\eta + \frac{\partial F}{\partial y}[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]\eta'$ jatkuvuuden muuttujan

ϵ suhteen ja yhtälön (3.3) perusteella saadaan nyt

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}'(0) &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]\big|_{\epsilon=0}\eta + \frac{\partial F}{\partial y}[(\gamma_0 + \epsilon\eta)(t)]\big|_{\epsilon=0}\eta' dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma_0(t)]\eta + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma_0(t)]\eta' dt \end{aligned}$$

kaikilla $\eta \in C^1([a,b])$, joille $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Siispä Seurauksen 3.3 nojalla

$$\frac{\partial F}{\partial x}[\gamma_0(t)] = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma_0(t)] \tag{3.4}$$

kaikilla $t \in [a,b]$. Yhtälöä (3.4) kutsutaan *Euler-Lagrangen yhtälöksi.*

Huomautus 3.4. Euler-Lagrangen yhtälö on tavallinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)] - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)] = 0, \tag{3.5}$$

kun funktio F ei riipu suoraan muuttujasta t. Ketjusäännön avulla saadaan Euler-Lagrangen yhtälö tällöin kirjoitettua laajennettuun muotoon

$$\frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)] - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}[\gamma(t)]\gamma'(t) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}[\gamma(t)]\gamma''(t) = 0,$$

mistä tulee paremmin esiin differentiaaliyhtälön toinen aste. Usein on kuitenkin hyödyllisempää käyttää Euler-Lagrangen yhtälöstä muotoa (3.5).

Ennen Huomautusta 3.4 tehdystä päättelystä saadaan muotoiltua seuraavanlainen tulos:

Seuraus 3.5. *Olkoot X ja $\mathcal{L}$, kuten esitetty Määritelmässä 3.1. Mikäli $\gamma \in X$ minimoi funktionaalin $\mathcal{L}$, niin γ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön.*

On saatu näytettyä, että mikäli funktio γ on funktionaalin $\mathcal{L}$ minimoija, sen täytyy toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälö. Samaan tapaan voidaan yleisemmin todeta, että mikäli funktionaalilla $\mathcal{L}$ on minkäänlaisia ääriarvoja joukossa X, niin ääriarvokohdat toteuttavat Euler-Lagrangen yhtälön.

Kuten kappaleen alussa todettiin, Määritelmän 3.1 asettama ongelma on hieman Brachistochrone-ongelmaa yksinkertaisempi ja siten Seuraus 3.5 ei ole suoraan sovellettavissa Brachistochrone-ongelmaan. Tämä johtuu siitä, että Määritelmässä 3.1 esitetyn sallittujen funktioiden joukon X määrittelyssä vaadittiin, että pisteet $(\gamma(t), \gamma'(t))$ kuuluvat funktion F määrittelyjoukkoon O kaikilla $t \in [a,b]$. Brachistochrone-ongelmassa funktion

$$F_b[\gamma(t)] = \sqrt{\frac{1 + (\gamma'(t))^2}{\gamma(t)}}$$

määrittelyjoukko on $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Kuitenkin kun $t = 0$, niin reunaehdon mukaisesti $(\gamma(0), \gamma'(0)) = (0,0) \notin \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Siispä pisteet $(\gamma(t), \gamma'(t))$ eivät kuulu funktion F_b määrittelyjoukkoon O kaikilla $t \in [0,b]$. Näytetään seuraavaksi, että Euler-Lagrangen yhtälö on välttämätön ehto funktionaalin ääriarvokohdalle myös tilanteessa, joka on sovellettavissa Brachistochrone-ongelmaan. Määritellään uusi variaatio-ongelma, joka vastaa Brachistochrone-ongelmaa.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Olkoon $O = I \times J$, missä $I = (c, d)$ ja $J \subset \mathbb{R}$ ovat avoimia välejä, $c \in \mathbb{R}$ ja olkoon $F : O \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva funktio. Olkoon lisäksi $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka on jatkuvasti derivoituva puoliavoimella välillä $(a, b]$ ja $(\gamma(t), \gamma'(t)) \in O$ kaikilla $t \in (a, b]$. Asetetaan

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b F[\gamma(t)]dt,$$

jolloin kyseinen epäoleellinen integraali ei välttämättä ole määritelty. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, jolloin sallittujen funktioiden joukko Y koostuu funktioista γ, jotka ovat jatkuvia välillä $[a, b]$, jatkuvasti derivoituvia välillä $(a, b]$, joille $\gamma(a) = \alpha$, $\gamma(b) = \beta$, $(\gamma(t), \gamma'(t)) \in O$ kaikilla $t \in (a, b]$ ja joilla $\mathcal{L}$ on määritelty. Etsi funktio $\gamma \in Y$, joka minimoi funktionaalin $\mathcal{L}$.

HUOMAUTUS 3.7. Brachistochrone-ongelmassa $O = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ja funktio $F_b : O \to \mathbb{R}$ on

$$F_b(x, y) = \left(\frac{1 + y^2}{x}\right)^{1/2}.$$

Kyseinen funktio on jatkuvasti differentioituva, sillä osittaisderivaatat

$$\frac{\partial F_b}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1 + y^2}{x^3}\right)^{1/2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F_b}{\partial y} = \frac{y}{(x(1 + y^2))^{1/2}}$$

ovat olemassa ja jatkuvia joukossa O. Lisäksi luku $b > 0$ on kiinnitetty ja

$$\mathcal{J}(\gamma) = \int_0^b F_b[\gamma(t)]dt,$$

missä $\gamma : [0, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, joka on jatkuvasti derivoituva välillä $(0, b]$. Reuna-arvot ovat 0 ja $\beta > 0$, jolloin sallittujen funktioiden joukko Y_b koostuu niistä funktioista γ, joille integraali $\mathcal{J}$ on määritelty, $\gamma(0) = 0$ ja $\gamma(b) = \beta$ ja $(\gamma(t), \gamma'(t)) \in O$ kaikilla $t \in (0, b]$. Huomataan lisäksi, että joukko Y_b ei ole tyhjä, sillä $\gamma(t) = \frac{\beta}{b}t \in Y_b$. Siispä Brachistochrone-ongelma on samaa muotoa kuin Määritelmässä 3.6 esitetty variaatio-ongelma.

LAUSE 3.8. *Olkoot Y ja $\mathcal{L}$, kuten esitetty Määritelmässä 3.6. Jos γ on funktionaalin $\mathcal{L}$ ääriarvokohta joukossa Y, niin γ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön puoliavoimella välillä $(a, b]$.*

TODISTUS. Olkoon $v \in C^1([a, b])$ ja $v(b) = 0$. Oletetaan, että on olemassa $c \in (a, b)$ siten, että $v(t) = 0$ kaikilla $t \in [a, c]$. Joukon O avoimuudesta seuraa, että kun $s \in \mathbb{R}$ on riittävän pieni, niin kaikilla $\gamma \in Y$ myös $\gamma + sv \in Y$, jolloin $\mathcal{L}(\gamma + sv)$ on määritelty. Tällöin epäoleellinen integraali $\int_a^b F[(\gamma+sv)(t)]dt$ suppenee ja siten

$$\lim_{s\to 0}\frac{\mathcal{L}(\gamma+sv)-\mathcal{L}(\gamma)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{\int_a^b F[(\gamma+sv)(t)]dt-\int_a^b F[\gamma(t)]dt}{s}$$
$$=\lim_{s\to 0}\frac{\int_a^c F[(\gamma+sv)(t)]dt+\int_c^b F[(\gamma+sv)(t)]dt-\int_a^c F[\gamma(t)]dt-\int_c^b F[\gamma(t)]dt}{s}$$
$$\overset{(*)}{=}\lim_{s\to 0}\frac{\int_c^b F[(\gamma+sv)(t)]dt-\int_c^b F[\gamma(t)]dt}{s}$$
$$=\lim_{s\to 0}\frac{\widetilde{\mathcal{L}}(\gamma+sv)-\widetilde{\mathcal{L}}(\gamma)}{s},$$

missä $\widetilde{\mathcal{L}}(\gamma)=\int_c^b F[(\gamma)(t)]dt$. Yhtäsuuruus kohdassa $(*)$ seuraa siitä, että $v(t)=0$ kaikilla $t\in[a,c]$. Nyt suuntaisderivaatan määritelmän nojalla

$$\lim_{s\to 0}\frac{\widetilde{\mathcal{L}}(\gamma+sv)-\widetilde{\mathcal{L}}(\gamma)}{s}=\frac{d}{ds}\widetilde{\mathcal{L}}(\gamma+sv)\big|_{s=0}=\frac{d}{ds}\int_c^b F[(\gamma+sv)(t)]dt\big|_{s=0}.$$

Koska funktio F ja sen osittaisderivaatta $\frac{\partial F}{\partial s}$ ovat jatkuvia sekä muuttujan s suhteen, että kaikilla $t\in[c,b]$, niin Leibnizin integraalisäännön nojalla funktionaalin $\mathcal{L}$ suuntaisderivaatta pisteessä γ suuntaan v on olemassa kaikilla $\gamma\in Y$. Lisäksi

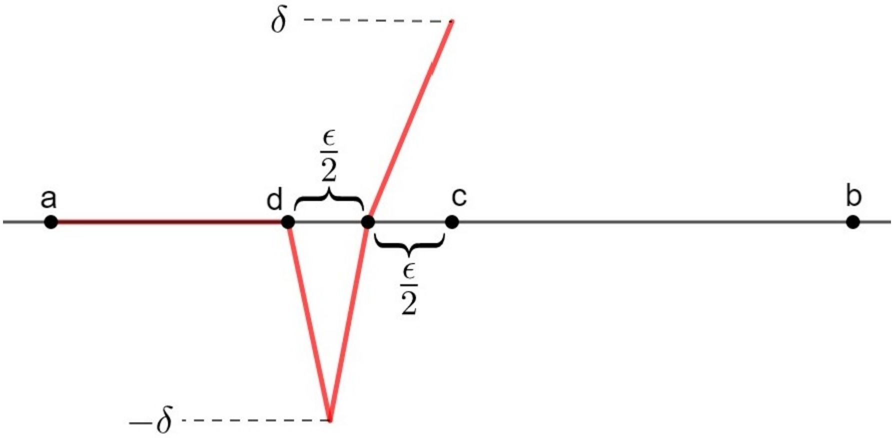
$$\begin{aligned}\partial_v\mathcal{L}(\gamma)&=\int_c^b\frac{d}{ds}F[(\gamma+sv)(t)]\big|_{s=0}dt\\&=\int_c^b\frac{\partial F}{\partial x}[(\gamma+sv)(t)]\big|_{s=0}v(t)+\frac{\partial F}{\partial y}[(\gamma+sv)(t)]\big|_{s=0}v'(t)dt\\&=\int_c^b\frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]v(t)+\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]v'(t)dt.\end{aligned}$$

Merkitään nyt u:lla funktion v rajoittumaa joukkoon $[c,b]$, jolloin $u\in C^1([c,b])$. Jos nyt γ on funktionaalin $\mathcal{L}$ ääriarvokohta, niin $\partial_v\mathcal{L}(\gamma)=0$ eli

$$\int_c^b\frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]u(t)+\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]u'(t)dt=0. \tag{3.6}$$

Haluttaisiin näyttää, että yhtälö (3.6) pätee kaikille $u\in C^1([c,b])$, joille $u(c)=u(b)=0$, jolloin voitaisiin hyödyntää Seurausta 3.3. Kuitenkaan kaikki joukon $C^1([c,b])$ alkiot u, joille $u(c)=u(b)=0$ eivät ole halutunlaisia rajoittumia. Näin on jos ja vain jos $u'(c)=0$. Joka tapauksessa yhtäsuuruus (3.6) pätee yleisesti, kuten pystytään näyttämään.

Osoitetaan kuitenkin ensin, että funktio $u\in C^1([c,b])$, jolle $u(c)=u(b)=0$, on funktion $v\in C^1([a,b])$, jolle $v(t)=0$ kaikilla $[a,c]$ ja $v(b)=0$, rajoittuma välille $[c,b]$ jos ja vain jos $u'(c)=0$. Oletetaan aluksi, että u on kuvatunlainen rajoittuma. Tällöin $u(t)=v(t)$ kaikilla $t\in[c,b]$, jolloin myös $u'(t)=v'(t)$ kaikilla $t\in[c,b]$. Erityisesti $u'(c)=v'(c)$. Koska v on vakiofunktio koko välillä $[a,c]$, niin $v'(t)=0$ kaikilla $[a,c]$. Siispä $u'(c)=v'(c)=0$. Oletetaan seuraavaksi, että funktiolle $u\in C^1([c,b])$, jolle



Kuva 3.1. Hahmotelma funktion g kuvaajasta

$u(c) = u(b) = 0$ pätee, että $u'(c) = 0$. Asetetaan

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \in [a, c] \\ u(t) & t \in [c, b] \end{cases}.$$

Tällöin v on jatkuvasti derivoituva väleillä $[a, c)$ ja $(c, b]$. Tarkstelemalla funktion v toispuoleisia derivaattoja pisteessä c huomataan, että

$$v'_-(c) = \lim_{t \to c^-} \frac{v(t) - v(c)}{t - c} = \lim_{t \to c^-} \frac{0}{t - c} = 0$$

ja

$$v'_+(c) = \lim_{t \to c^+} \frac{v(t) - v(c)}{t - c} = \lim_{t \to c^+} \frac{u(t) - u(c)}{t - c} = u'_+(c) = 0,$$

jolloin v on derivoituva myös pisteessä c ja

$$v'(t) = \begin{cases} 0 & t \in [a, c] \\ u'(t) & t \in [c, b] \end{cases},$$

eli $v \in C^1([a, b]$. Lisäksi $v(t) = 0$ kaikilla $t \in [a, c]$, $v(b) = 0$ ja selvästi funktio u on funktion v rajoittuma välille $[c, b]$.

Näytetään nyt, että yhtäsuuruus 3.6 pätee vaikka $u'(c) \neq 0$. Olkoon $u \in C^1([c, b])$, $u(c) = u(b) = 0$ ja oletetaan, että $u'(c) = \delta > 0$. Valitaan $\epsilon \in (0, 1]$ siten, että $d = c - \epsilon > a$ ja määritellään reaaliarvoinen funktio g välillä $[a, c]$ seuraavalla tavalla: funtkio g saa arvon 0 välillä $[a, d]$, funktio g rajoitettuna välille $[d, d + \frac{\epsilon}{2}]$ on käänteinen teltta-funktio, jonka korkeus on $-\delta$ ja funktio g rajoitettuna välille $[d + \frac{\epsilon}{2}, c]$ on affiini funktio arvosta 0 arvoon δ. Hahmotelma funktion g kuvaajasta on esitetty kuvassa 3.1.

Jos asetetaan

$$v(t) = \begin{cases} \int_a^t g(s)ds & t \in [a, c] \\ u(t) & t \in [c, b] \end{cases},$$

niin funktio $v \in C^1([a, b])$ on funktion u laajennus välille $[a, b]$ siten, että $v(t) = 0$ kaikilla $t \in [a, d]$. Siispä v on sallittu suunta funktionaalille $\mathcal{L}$ kohdassa γ ja mikäli γ

on funktionaalin $\mathcal{L}$ ääriarvokohta, niin

$$\partial_v \mathcal{L}(\gamma) = \int_d^b \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]v(t) + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]v'(t)dt = 0.$$

Näin ollen

$$\int_d^c \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]v(t) + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]v'(t)dt = -\int_c^b \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]u(t) + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]u'(t)dt.$$

Koska välillä $[d,c]$ $|v'(t)| \leq \delta$ ja $|v(t)| \leq \frac{\epsilon}{4}\delta \leq \delta$, niin

$$\left| \int_d^c \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]v(t) + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]v'(t)dt \right| \leq \delta \int_d^c \left| \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)] \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)] \right| dt. \tag{3.7}$$

Koska F on jatkuvasti derivoituva funktio, kun $t \in [d,c]$, niin integroitava lauseke

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)] \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)] \right|$$

on rajoitettu. Näin ollen integroimisvälin pituuden $\epsilon = c - d$ lähestyessä nollaa, myös integraali (3.7) suppenee nollaan. Tästä seuraa, että

$$\int_c^b \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]u(t) + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]u'(t)dt = 0. \tag{3.8}$$

Jos $u'(c) < 0$, toistamalla samankaltainen päättely saadaan myös tässä tapauksessa näytettyä, että yhtälö (3.8) pätee, jolloin kyseinen yhtälö pätee kaikilla $u \in C^1([c,b])$, joille $u(c) = u(b) = 0$. Näin ollen Seurauksen 3.3 avulla saadaan, että

$$\frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)] = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)].$$

Siispä funktio γ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön välillä $[c,b]$. Koska c oli mielivaltainen reaaliluku väliltä (a,b), niin γ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön välillä $(a,b]$. □

Edellä todistetun lauseen nojalla voidaan siis todeta, että mikäli Brachistochrone-ongelmalla on ratkaisu, sen täytyy toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälö. Seuraavassa kappaleessa tätä tietoa hyödynnetään Brachistochrone-ongelman ratkaisun etsimisessä.

3.3. Mahdollisen ratkaisun selvittäminen

Edellä johdettiin välttämätön ehto variaatio-ongelman ratkaisulle ja tässä kappaleessa ehtoa sovelletaan Brachistochrone-ongelmaan. Kappaleen lopussa esitetään Brachistochrone-ongelman mahdolliselle ratkaisulle parametriesitys ja huomataan, että kyseessä on geometriasta tuttu käyrä, sykloidi.

Euler-Lagrangen yhtälö on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö ja sellaisen ratkaiseminen ei ole aivan ongelmatonta. Kyseinen yhtälö saadaan kuitenkin tietyissä erikoistapauksissa muokattua helpommin ratkaistavaan muotoon. Tällaisia erikoistapauksia ovat esimerkiksi tilanteet, joissa funktionaalin $\mathcal{L}$ integrandi F ei riipu muuttujasta γ eli $\frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0$, F ei riipu suoraan muuttujasta t eli $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ tai kun F on lineaarinen muuttujan γ' suhteen eli $\frac{\partial^2 F}{\partial \gamma'^2} = 0$. Nyt ollaan erityisesti kiinnostuneita Brachistochrone-ongelmaa vastaavasta tilanteesta, jossa $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. Siispä näytetään seuraavaksi, että mikäli γ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön ja $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, niin γ toteuttaa erään ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön, jota kutsutaan *Beltrami-yhtälöksi*. Tämän osoittamiseksi tarvitaan myös oletus, että γ on kahdesti jatkuvasti derivoituva.

Oletetaan siis nyt, että funktio $\gamma \in C^2((a,b))$ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön ja $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. Tällöin kaikilla $t \in (a,b)$ pätee

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F[\gamma(t)] &= \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]\gamma'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma''(t) \\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma''(t). \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma'(t)\right),\end{aligned}$$

missä ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa derivoinnin ketjusäännöstä ja toinen yhtäsuuruus Euler-Lagrangen yhtälöstä. Kolmas yhtäsuuruus saadaan perusteltua derivoinnin tulosäännön nojalla, sillä

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma'(t)\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma'(t) + \gamma''(t)\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)].$$

Nyt yhtälöstä

$$\frac{d}{dt}F[\gamma(t)] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma'(t)\right)$$

seuraa, että on olemassa vakio c siten, että

$$F[\gamma(t)] - \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma'(t) = c \tag{3.9}$$

kaikilla $t \in (a,b)$. Yhtälöä (3.9) kutsutaan Beltrami-yhtälöksi.

Huomautus 3.9. Yhtälöä (3.9) johdettaessa oletettiin, että γ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön. Kuitenkaan yhtälön (3.9) toteuttava funktio ei välttämättä toteuta Euler-Lagrangen yhtälöä eikä siten täytä välttämätöntä ehtoa ollakseen funktionaalin $\mathcal{L}$ ääriarvokohta. Voidaan kuitenkin näyttää, että mikäli funktio γ toteuttaa Beltrami-yhtälön ja lisäksi $\gamma'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in (a,b)$, niin tällöin funktio γ toteuttaa myös Euler-Lagrangen yhtälön.

Lemma 3.10. *Olkoon γ välillä (a,b) kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio, joka toteuttaa yhtälön (3.9) ja oletetaan, että $\gamma'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in (a,b)$. Tällöin γ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön välillä (a,b).*

Todistus. Oletetaan, että γ toteuttaa yhtälön (3.9) ja $\gamma'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in (a,b)$. Yhtälöstä (3.9) seuraa derivoinnin tulosäännön nojalla, että

$$\frac{d}{dt}F[\gamma(t)] = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma''(t). \tag{3.10}$$

Toisaalta derivoinnin ketjusäännön nojalla

$$\frac{d}{dt}F[\gamma(t)] = \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]\gamma'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma''(t). \tag{3.11}$$

Merkitsemällä yhtälöiden (3.10) ja (3.11) oikeat puolet yhtäsuuriksi saadaan

$$\frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\gamma'(t).$$

Koska $\gamma'(t) \neq 0$, niin edelleen

$$\frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)] = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)].$$

□

Pystytään siis näyttämään, että Brachistochrone-ongelmaa vastaavassa tilanteessa (eli kun $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$) Euler-Lagrangen yhtälö saadaan muokattua ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi, joka on usein huomattavasti helpompi ratkaista kuin itse Euler-Lagrangen yhtälö. Tätä varten tarvitaan kuitenkin tieto siitä, että Euler-Lagrangen yhtälön toteuttava funktio γ on C^2-funktio. Todistetaan seuraavaksi tulos, joka kertoo, että mikäli funktio F on kahdesti jatkuvasti differentioituva sopivalla tavalla, niin myös Euler-Lagrangen yhtälön toteuttava funktio γ on kahdesti jatkuvasti derivoituva.

Lause 3.11. *Olkoot F, O ja Y, kuten Määritelmässä 3.6. Olkoon lisäksi funktio F kahdesti jatkuvasti differentioituva siten, että sen toisen kertaluvun osittaisderivaatta $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \neq 0$ joukossa O. Jos tällöin $\gamma \in Y$ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön, niin $\gamma \in C^2$ välillä (a, b).*

Todistus. Olkoon $t_0 \in (a, b)$ ja asetetaan $x_0 = \gamma(t_0)$ ja $y_0 = \gamma'(t_0)$. Tarkastellaan kuvausta

$$\Phi : O \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto (x, \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)).$$

Huomataan, että kuvaus Φ on jatkuvasti derivoituva. Koska oletuksen perusteella $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) \neq 0$ joukossa O, niin $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) \neq 0$, jolloin kuvauksen Φ derivaattamatriisin determinantti eroaa nollasta pisteessä (x_0, y_0). Tällöin käänteiskuvauslauseen nojalla on olemassa pisteen (x_0, y_0) avoin ympäristö U ja pisteen $\Phi(x_0, y_0) = (x_0, z_0) = (x_0, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0))$ avoin ympäristö V siten, että funktio $\Phi : U \longrightarrow V$ on bijektio ja sen käänteisfunktio $\Phi^{-1} : V \longrightarrow U$ on jatkuvasti derivoituva. Voidaan merkitä

$$\Phi^{-1}(x, z) = (x, h(x, z)),$$

missä h on jatkuvasti derivoituva kuvaus. Määritellään nyt vektorikenttä $X : V \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$X(x, z) = \left(h(x, z), \frac{\partial F}{\partial x}(x, h(x, z))\right).$$

Vektorikenttä X on jatkuvasti derivoituva, sillä sen komponenttikuvaukset ovat jatkuvasti derivoituvia. Siispä X on lokaalisti Lipschitz ja Lauseen 2.20 nojalla, on olemassa maksimi-integraalikäyrä $\phi(t) = (x(t), z(t))$, joka toteuttaa ehdon $\phi(t_0) = (x_0, z_0)$. Integraalikäyrä ϕ on jatkuvasti derivoituva, sillä vektorikenttä X on jatkuvasti derivoituva. Integraalikäyrän määritelmän nojalla

$$\phi'(t) = (x'(t), z'(t)) = X(x(t), z(t)) = \left(h(x(t), z(t)), \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), h(x(t), z(t)))\right),$$

joten $x'(t) = h(x(t), z(t))$. Siispä funktio $x'(t)$ on jatkuvasti derivoituva, mistä seuraa, että funktio $x(t)$ on kahdesti jatkuvasti derivoituva. Asetetaan nyt

$$\psi(t) = (\gamma(t), \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]),$$

missä $\gamma \in Y$ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön ja näytetään, että $\psi(t)$ on myös vektorikentän X integraalikäyrä. Tulee siis näyttää, että $\psi'(t) = X(\psi(t))$. Kun t on lähellä lukua t_0, niin

$$h\left(\gamma(t), \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\right) = \gamma'(t).$$

Lisäksi koska γ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön, niin

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\gamma(t), h\left(\gamma(t), \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\right)\right) = \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)] = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)].$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\psi'(t) = (\gamma'(t), \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]) &= \left(h\left(\gamma(t), \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\right), \frac{\partial F}{\partial x}\left(\gamma(t), h\left(\gamma(t), \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\right)\right)\right)\\ &= X\left(\gamma(t), \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]\right) = X(\psi(t)),\end{aligned}$$

jolloin ψ on vektorikentän X integraalikäyrä. Lisäksi $\psi(t_0) = (\gamma(t_0), \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t_0), \gamma'(t_0))) = (x_0, z_0)$ ja siten Lauseen 2.19 nojalla $\psi(t) = \phi(t)$ pisteen t_0 ympäristössä. Näin ollen $\gamma(t) = x(t)$ ja siten γ on kahdesti jatkuvasti derivoituva pisteen t_0 ympäristössä. Koska piste t_0 oli mielivaltainen välin (a, b) piste, niin $\gamma \in C^2$ välillä (a, b). □

Lähdetään nyt soveltamaan saatuja tuloksia Brachistochrone-ongelman ratkaisemiseksi. Huomataan, että funktiolle F_b pätee, että

$$\frac{\partial^2 F_b}{\partial x^2} = \frac{3}{4}\left(\frac{1+y^2}{x^5}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial^2 F_b}{\partial y^2} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ja

$$\frac{\partial^2 F_b}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F_b}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\frac{y}{x^{\frac{3}{2}}(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Siispä funktion F_b toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia joukossa O. Lisäksi $\frac{\partial^2 F_b}{\partial y^2} \neq 0$ kaikilla $(x, y) \in O$. Jos nyt oletetaan, että $\gamma \in Y_b$ on funktionaalin $\mathcal{J}$ minimoija, jolloin se toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön, niin Lauseen 3.11 nojalla $\gamma \in C^2$ välillä $(0, b)$. Lisäksi, koska $\frac{\partial F_b}{\partial t} = 0$, niin γ toteuttaa Beltrami-yhtälön, jolloin

$$\left(\frac{1+\gamma'^2(t)}{\gamma(t)}\right)^{1/2} - \frac{\gamma'^2(t)}{\gamma(t)^{1/2}(1+\gamma'^2(t))^{1/2}} = c \tag{3.12}$$

kaikilla $t \in (0, b)$. Laventamalla yhtälön (3.12) vasemman puolen ensimmäinen termi tekijällä $(1 + \gamma'(t)^2)^{1/2}$ saadaan

$$\frac{1}{\gamma(t)^{1/2}(1+\gamma'^2(t))^{1/2}} = c > 0,$$

joten edelleen

$$\gamma(t)(1+\gamma'^2(t)) = k, \tag{3.13}$$

missä $k = \frac{1}{c^2}$. Huomataan erityisesti, että k on positiivinen reaaliluku, sillä $c > 0$. Siispä jos Brachistochrone-ongelmalla on ratkaisu, se toteuttaa differentiaaliyhtälön (3.13), joka on mahdollista ratkaista separoimalla. Ennen kyseisen differentiaaliyhtälön ratkaisemista, todistetaan tulos, jonka avulla saadaan lisää tietoa mahdollisesta ratkaisusta γ. Huomataan, että seuraavan tuloksen todistamisessa hyödynnetään sekä Euler-Lagrangen yhtälöä, että yhtälöä (3.13).

SEURAUS 3.12. *Olkoon γ Brachistochrone-ongelman ratkaisu. Tällöin*

a) $\lim_{t\to 0} \gamma'(t) = \infty$;
b) *γ ei ole vakio millään välillä;*
c) *funktiolla γ on korkeintaan yksi kriittinen piste, joka on maksimi;*
d) *γ on joko aidosti kasvava tai yksihuippuinen;*
e) *γ' on aidosti vähenevä välillä $(0, b)$.*

TODISTUS.

a) Koska $\gamma(0) = 0$, niin $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = 0$. Siispä yhtälöstä (3.13) seuraa, että

$$\lim_{t\to 0} \gamma'(t) = \lim_{t\to 0} \sqrt{\frac{k}{\gamma(t)} - 1} = \infty.$$

b) Osittaisderivaatan $\frac{\partial F_b}{\partial y}$ lausekkeen perusteella nähdään, että on olemassa jatkuvat funktiot a ja b siten, että

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F_b}{\partial y}[\gamma(t)] = \frac{a(t)\gamma''(t) - \gamma'(t)b(t)}{\gamma(t)(1+\gamma'^2(t))}.$$

Jos γ on vakio millään välillä, niin $\frac{d}{dt}\frac{\partial F_b}{\partial y}[\gamma(t)]$ saa arvon nolla kyseisellä välillä. Kuitenkaan lauseke

$$\frac{\partial F_b}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1+\gamma'^2(t)}{\gamma(t)^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ei ole nolla millään välillä. Väite seuraa Euler-Lagrangen yhtälöstä.

c) Huomataan, että koska $\gamma(t) = \frac{k}{1+\gamma'^2(t)}$, niin funktio γ on rajoitettu arvolla k ja funktio γ saavuttaa arvon k pisteessä t_0 jos ja vain jos t_0 on kriittinen piste eli $\gamma'(t_0) = 0$. Oletetaan nyt, että on olemassa eri pisteet t_0 ja t_1, jotka ovat molemmat funktion γ kriittisiä pisteitä. Koska γ ei ole vakio välillä $[t_0, t_1]$, on olemassa piste $t \in [t_0, t_1]$ siten, että $\gamma(t) < k$. Koska γ on jatkuva suljetulla välillä $[t_0, t_1]$, niin γ saavuttaa minimin kyseisellä välillä jossain pisteessä t_2. Näin ollen $\gamma(t_2) < k$ ja $\gamma'(t_2) = 0$ ja ollaan päädytty ristiriitaan. Siten funktiolla γ voi olla korkeintaan yksi kriittinen piste, joka on selvästi maksimi.

d) Edellisen kohdan perusteella funktiolla γ on korkeintaan yksi kriittinen piste. Jos funktiolla γ ei ole yhtään kriittistä pistettä tai kriittinen piste on pisteessä b, niin funktiolla γ ei ole kriittistä pistettä välillä $(0, b)$. Olkoon $s, t \in (0, b)$ siten, että $s < t$. Jos $\gamma(s) = \gamma(t)$, niin Rollen lauseen nojalla on olemassa $r \in (s, t) \subset (0, b)$ siten, että $\gamma'(r) = 0$, mikä on ristiriita. Toisaalta jos

$\gamma(s) > \gamma(t)$, niin differentiaalilaskennan väliarvolauseesta (engl. mean value theorem) seuraa, että on olemassa $v \in (s,t)$ siten, että $\gamma'(v) < 0$. Kuitenkin koska $\gamma(0) = 0$ ja $\gamma(t) > 0$ kaikilla $t \in (0,b]$, niin on olemassa $u \in (0,v)$ siten, että $\gamma'(u) > 0$. Nyt Bolzanon lauseen nojalla on olemassa $r \in (u,v) \subset (0,b)$ siten, että $\gamma'(r) = 0$, mikä on ristiriita. Siispä on oltava $\gamma(s) < \gamma(t)$ eli γ on aidosti kasvava.

Jos funktiolla γ on kriittinen piste t' välillä $(0,b)$, niin käyttämällä vastaavia päättelyitä kuin edellä, saadaan näytettyä, että γ on aidosti kasvava välillä $[0,t']$ ja aidosti vähenevä välillä $[t',b]$. Tällöin γ on yksihuippuinen.

e) Seuraa suoraan d)-kohdasta ja differentiaaliyhtälöstä (3.13).

□

Johdetaan nyt parametriesitys Brachistochrone-ongelman mahdolliselle ratkaisulle ratkaisemalla yhtälö (3.13). Kyseinen yhtälö saadaan muokattua muotoon

$$\gamma'(t) = \sqrt{\frac{k-\gamma(t)}{\gamma(t)}}, \tag{3.14}$$

joten kyseessä on separoituva differentiaaliyhtälö. Huomataan, että differentiaaliyhtälöllä (3.14) on erikoisratkaisu $\gamma(t) = k$. Kuitenkaan tämä ei voi olla Brachistochrone-ongelmassa etsittävä ratkaisu, sillä Seurauksen 3.12 nojalla γ ei voi olla vakiofunktio. Koska $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$, niin

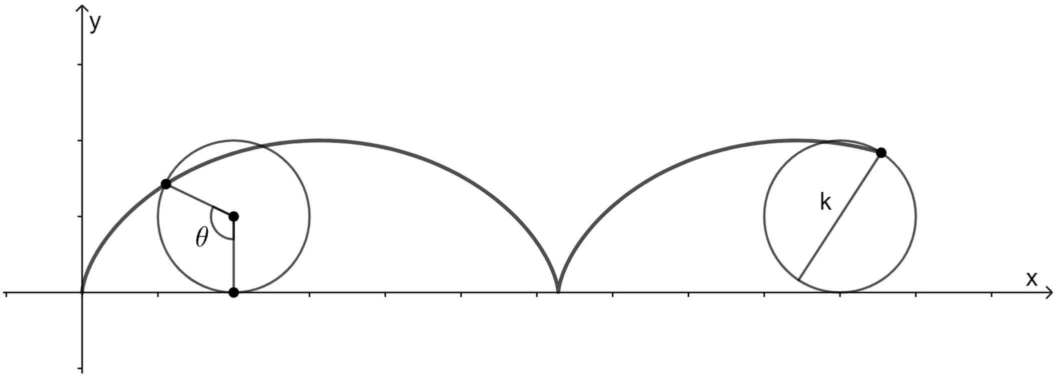
$$\frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{\frac{k-\gamma}{\gamma}}. \tag{3.15}$$

Muokkaamalla yhtälöä (3.15) ja ottamalla integraali puolittain saadaan

$$\int \sqrt{\frac{\gamma}{k-\gamma}}d\gamma = \int dt.$$

Tekemällä sijoitus $\gamma = \frac{k}{2}(1-\cos\theta)$, jolloin $d\gamma = \frac{k}{2}\sin\theta d\theta$, saadaan

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{\frac{k}{2}(1-\cos\theta)}{k-\frac{k}{2}(1-\cos\theta)}}\frac{k}{2}\sin\theta d\theta &= t + k_1 \\
\int \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\frac{k}{2}\sin\theta d\theta &= t + k_1 \\
\int \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\frac{k}{2}\sin\theta d\theta &= t + k_1 \\
\int \frac{k}{2}(1-\cos\theta)d\theta &= t + k_1 \\
\frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) &= t + k_1 \\
t &= \frac{k}{2}(\theta-\sin\theta) - k_1.
\end{aligned}$$



KUVA 3.2. Sykloidikäyrän muodostuminen ympyrän vieriessä pitkin x-akselia

Koska Brachistochrone-ongelmassa on asetettu alkuarvo $\gamma(0) = 0$, niin ratkaisemalla seuraava yhtälöpari

$$\begin{cases} t = 0 = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) - k_1 \\ \gamma(0) = 0 = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases} \tag{3.16}$$

saadaan, että $k_1 = 0$. Siispä Brachistochrone-ongelman mahdollisen ratkaisun γ kuvaajalla on parametriesitys P:

$$\begin{cases} t = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \\ \gamma(t) = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases}. \tag{3.17}$$

Kyseinen parametriesitys kuvaa funktiota, jonka kuvaaja on sykloidi. Sykloidi on käyrä, joka muodostuu ympyrän kehälle kiinnitetyn pisteen piirtämänä, kun ympyrä vierii pitkin vaakasuoraa tasoa. Esimerkki sykloidikäyrän muodostumisesta on esitetty kuvassa 3.2. Parametriesityksessä P vakio k kuvaa vierivän ympyrän halkaisijaa, jolloin $k/2$ on vierivän ympyrän säde ja parametri θ kuvaa kulmaa, joka on esitetty kuvassa 3.2. Seurauksen 3.12 perusteella Brachistochrone-ongelman ratkaiseva käyrä on joko aidosti kasvava tai yksihuippuinen. Jotta parametriesityksen P kuvaama käyrä toteuttaisi tämän ehdon, rajoitetaan parametri θ välille $[0, 2\pi]$. Siispä Brachistochrone-ongelman mahdollinen ratkaisu on sykloidin yksi kaari tai sen osa.

Merkitään jatkossa parametriesityksen P määrittelemää funktiota γ_0. Näytetään vielä, että funktio γ_0 on kahdesti jatkuvasti derivoituva, kun $\theta \in (0, 2\pi)$. Tätä tietoa tarvitaan työn viimeisessä kappaleessa. Lähdetään osoittamaan kyseinen ominaisuus näyttämällä ensin, että parametrisoitu käyrä $\gamma_0(\theta) = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta)$, missä $\theta \in (0, 2\pi)$, on jonkin funktion F tasa-arvojoukko ja hyödynnetään sitten implisiittifunktiolausetta funktioon F. Muistetaan, että kuvauksen $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tasa-arvojoukkoja ovat joukot $\{x \in \Omega : F(x) = c\}$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio. Olkoon nyt $\gamma_0(\theta) = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta), \theta \in (0, 2\pi)$ käyrä ja $G : V = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$G(\theta, z) = \gamma_0(\theta) + z = (\frac{k}{2}(\theta - \sin\theta), \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) + z)$$

kuvaus. Tällöin

$$DG(\theta, z) = \begin{bmatrix} \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) & 0 \\ \frac{k}{2}\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

ja $\det(DG(\theta, z)) = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) \neq 0$, kun $\theta \in (0, 2\pi)$. Kuvaus G on jatkuvasti derivoituva, joten käänteiskuvauslauseen nojalla on olemassa jatkuvasti derivoituva kuvaus $H = G^{-1} : W \to V, H = (H_1, H_2)$, missä $W = G(V) \subset \mathbb{R}^2$. Määritellään $F : W \to \mathbb{R}, F(x, y) = H_2(x, y)$. Huomataan, että kuvaus F on jatkuvasti derivoituva, sillä H on jatkuvasti derivoituva. Jos nyt $(x, y) = G(\theta, z)$, niin

$$F(x, y) = F(G(\theta, z)) = H_2(G(\theta, z)) = z.$$

Erityisesti $F(x, y) = 0$ jos ja vain jos $z = 0$. Siispä $F(x, y) = 0$ jos ja vain jos $(x, y) = G(\theta, 0) = \gamma_0(\theta)$, mikä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että $(x, y) \in \{\frac{k}{2}(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in (0, 2\pi)\}$. Näin ollen käyrä $\gamma_0(\theta), \theta \in (0, 2\pi)$ on tasa-arvopinta $F(x, y) = 0$.

Hyödynnetään seuraavaksi implisiittifunktiolausetta kuvaukseen F. Käänteiskuvauslauseen perusteella

$$\begin{aligned} DH(x, y) = [DG(\theta, z)]^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) & 0 \\ \frac{k}{2}\sin\theta & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{2}{k(1 - \cos\theta)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k}{2}\sin\theta & \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

missä $G(\theta, z) = (x, y)$. Siispä koska $F = H_2$, niin

$$\partial_y F(x, y) = \frac{2}{k(1 - \cos\theta)} \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) = 1 \neq 0$$

kun $\theta \in (0, 2\pi)$. Koska $\partial_y F(x, y) \neq 0$ kaikilla $\theta \in (0, 2\pi)$ ja $F(x, y) = 0$ täsmälleen silloin, kun $(x, y) \in \{\frac{k}{2}(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in (0, 2\pi)\} = A$, niin implisiittifunktiolauseen nojalla on olemassa funktio g siten, että $y = g(x)$ täsmälleen, kun $(x, y) \in A$. Lisäksi g on differentioituva pisteessä x ja

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x F(x, y)}{\partial_y F(x, y)} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}.$$

Koska $F(x, y) = 0$ jos ja vain jos pisteet (x, y) kuuluvat käyrälle γ_0, niin edellisen perusteella saadaan, että funktio γ_0 on derivoituva muuttujan t suhteen ja

$$\gamma_0'(t) = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

kun $\theta \in (0, 2\pi)$. Implisiittisesti derivoimalla saadaan edelleen

$$\gamma_0''(t) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\theta(1 - \cos\theta) - \sin^2\theta}{\frac{k}{2}(1 - \cos\theta)^3}.$$

Näin ollen funktio $\gamma_0''(t)$ on jatkuva, kun $\theta \in (0, 2\pi)$, joten funktio γ_0 on kahdesti jatkuvasti derivoituva, kun $\theta \in (0, 2\pi)$.

Nyt ollaan päästy Brachistochrone-ongelman ratkaisemisessa siihen vaiheeseen, että on löydetty funktio γ_0, joka toimii ratkaisuehdokkaana ongelmalle. On siis saatu näytettyä, että jos Brachistochrone-ongelmalla on ratkaisu, se toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön, jolloin se edelleen toteuttaa Beltrami-yhtälön ja edelleen ratkaisu on tällöin funktio γ_0. Seuraavaksi tulee pohtia, kuinka saadaan todistettua, että Brachistochrone-ongelmalle on olemassa ratkaisu. Tähän kysymykseen perehdytään seuraavassa kappaleessa.

3.4. Ratkaisun olemassaolo

Variaatiolaskennassa ei ole yksinkertaista yleistä metodia, jolla voitaisiin kaikissa tilanteissa todeta, onko variaatio-ongelman mahdollinen ratkaisu todella etsitty ratkaisu. On myös variaatio-ongemia, joille ei ole olemassa ratkaisua. Samaan tapaan kuin tavallisten funktioiden tapauksessa kriittiset pisteet voivat olla satulapisteitä, niin myös Euler-Lagrangen yhtälön toteuttavat funktiot eivät välttämättä ole ääriarvokohtia tutkittavalle funktionaalille. Tässä kappaleessa esitellään variaatio-ongelman ratkaisulle eräs riittävä ehto, jota pystytään hyödyntämään Brachistochrone-ongelman ratkaisemisessa. Kappaleen lopuksi saadaan osoitettua, että sykloidi on etsitty brakistokroni eli funktio γ_0 minimoi funktionaalin $\mathcal{J}$. Muotoillaan nyt riittävä ehto variaatio-ongelman ratkaisulle seuraavalla tavalla:

LAUSE 3.13. *Olkoot O, F, $\mathcal{L}$ ja Y, kuten Määritelmässä 3.6. Oletetaan, että funktio F on lisäksi konveksi joukossa O ja että $\gamma \in Y$ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön välillä $(a, b]$. Jos $\frac{\partial F}{\partial y}$ on rajoitettu, niin γ on funktionaalin $\mathcal{L}$ minimikohta joukossa Y.*

TODISTUS. Olkoon funktio F konveksi. Koska O on avoin joukko ja $F \in C^1(O)$, niin funktion F suuntaisderivaatta kaikkiin suuntiin $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ on määritelty ja

$$\partial_h F(\mathbf{x}) = F'(\mathbf{x})\mathbf{h} = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x})h_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x})h_2.$$

Jos nyt $\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h} \in O$ niin Lauseen 2.16 nojalla

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) \geq F'(x)\mathbf{h} \geq \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x})h_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x})h_2. \tag{3.18}$$

Oletetaan, että v on sellainen välillä $(a, b]$ jatkuvasti derivoituva funktio, että $\int_a^b F[(\gamma + v)](t)dt$ on määritelty. Tällöin erityisesti $v(a) = v(b) = 0$. Jos $c \in (a, b)$ ja $t \in [c, b]$, niin $((\gamma + v)(t), (\gamma + v)'(t)) \in O$ ja siten

$$\begin{aligned}
\int_c^b F[(\gamma + v)(t)]dt - \int_c^b F[\gamma(t)] &\geq \int_c^b \frac{\partial F}{\partial x}[\gamma(t)]v(t) + \frac{\partial F}{\partial y}v'(t)dt \\
&= \int_c^b \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]v(t) + \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]v'(t)dt \\
&= \int_c^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]v(t)\right) dt \\
&= \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(t)]v(t)|_c^b \\
&= \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(b)]v(b) - \frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(c)]v(c),
\end{aligned}$$

missä epäyhtäsuuruus ensimmäisellä rivillä seuraa epäyhtälöstä (3.18), yhtäsuuruus toisella rivillä seuraa Euler-Lagrangen yhtälöstä ja yhtäsuuruus kolmannella rivillä seuraa derivaatan tulosäännöstä. Jos nyt oletetaan, että $\frac{\partial F}{\partial y}$ on rajoitettu, niin

$$\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(b)]v(b) = 0,$$

sillä $v(b) = 0$. Lisäksi, koska $v(a) = 0$ ja integraalit $\int_a^b F[(\gamma + v)(t)]dt$ ja $\int_a^b F[\gamma(t)]dt$ ovat määritelty, niin

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\gamma + v) - \mathcal{L}(\gamma) &= \int_a^b F[(\gamma + v)(t)]dt - \int_a^b F[\gamma(t)]dt \\ &= \int_a^b F[(\gamma + v)(t)] - F[\gamma(t)]dt \\ &= \lim_{c \to a+} \int_c^b F[(\gamma + v)(t)] - F[\gamma(t)]dt \\ &\geq \lim_{c \to a+} \left(-\frac{\partial F}{\partial y}[\gamma(c)]v(c) \right) = 0.\end{aligned}$$

Siispä kaikilla $g = \gamma + v \in Y$ pätee $\mathcal{L}(g) - \mathcal{L}(\gamma) \geq 0$, joten γ minimoi funktionaalin $\mathcal{L}$ joukossa Y. Jos F on aidosti konveksi, niin vastaavalla päättelyllä saadaan, että γ on funktionaalin $\mathcal{L}$ yksikäsitteinen minimoija eli $\mathcal{L}(g) - \mathcal{L}(\gamma) > 0$ kaikilla $g \in Y$. $\square$

Edeltävän lauseen nojalla saadaan siis mahdollinen ääriarvokohta osoitettua funktionaalin minimoijaksi, mikäli funktio F on konveksi ja osittaisderivaatta $\frac{\partial F}{\partial y}$ on rajoitettu. Kuitenkin funktiolle $F_B : O \to \mathbb{R}$,

$$F_B(x, y) = \left(\frac{1 + y^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

pätee

$$\frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F_B}{\partial x \partial y} \right)^2 = \frac{1}{4(1 + y^2)} \left(\frac{3}{x^{9/2}} - \frac{y^2}{x^3} \right). \tag{3.19}$$

Lauseke (3.19) on useissa joukon O pisteissä negatiivinen (kuten pisteessä $(1, 2)$). Näin ollen Lauseen 2.13 nojalla funktio F_B ei ole konveksi. Siispä Lausetta 3.13 ei voida suoraan hyödyntää sen osoittamiseksi, että γ_0 minimoi funktionaalin $\mathcal{J}$.

Määritellään ja ratkaistaan nyt toinen minimointiongelma, johon voidaan soveltaa yllä esitettyä lausetta ja jonka avulla saadaan myös Brachistochrone-ongelma ratkaistua. Olkoon joukko O edelleen $O = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ja määritellään uusi funktio $M : O \to \mathbb{R}$,

$$M(x, y) = \left(\frac{1}{x^2} + y^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Koska

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -x^{-3}(x^{-2} + y^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = y(x^{-2} + y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

niin funktion M osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia kaikilla $(x, y) \in O$, joten $M \in C^1(O)$. Asetetaan kaikille funktioille $\delta \in C([0, b])$, jotka ovat välillä $(0, b]$ jatkuvasti derivoituvia ja joille $(\delta(t), \delta'(t)) \in O$ kaikilla $t \in (0, b]$,

$$\mathcal{M}(\delta) = \int_0^b M[\delta(t)]dt.$$

Merkitään symbolilla $Z \subset C([0, b])$ sallittujen funktioiden joukkoa, joka koostuu funktioista δ, jotka ovat jatkuvasti derivoituvia välillä $(0, b]$, joille $\delta(0) = 0$, $\delta(b) = (2\beta)^{\frac{1}{2}}$,

$(\delta(t), \delta'(t)) \in O$ kaikilla $t \in (0, b]$ ja $\mathcal{M}(\delta)$ on määritelty. Tarkastellaan nyt variaatio-ongelmaa, jossa halutaan minimoida funktionaali $\mathcal{M}$ joukossa Z. Kyseinen ongelma on vastaavaa muotoa kuin Määritelmässä 3.6 esitetty variaatio-ongelma.

Huomataan, että jos $\gamma \in Y$ ja asetetaan $\delta = (2\gamma)^{\frac{1}{2}}$, niin

$$\gamma = \frac{\delta^2}{2} \quad \text{ja} \quad \gamma' = \delta\delta'.$$

Todistetaan nyt seuraava aputulos.

Lemma 3.14. *$\delta \in Z$ jos ja vain jos $\delta = (2\gamma)^{\frac{1}{2}}$ jollekin $\gamma \in Y_b$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\delta \in Z$. Valitaan $\gamma_1 = \frac{\delta^2}{2}$, jolloin, $\delta = (2\gamma_1)^{\frac{1}{2}}$. Näytetään nyt, että $\gamma_1 \in Y_b$. Koska δ on jatkuvasti derivoituva välillä $(0, b]$, niin myös γ on jatkuvasti derivoituva kyseisellä välillä. Lisäksi

$$\gamma(0) = \frac{\delta(0)^2}{2} = 0 \quad \text{ja} \quad \gamma(b) = \frac{\delta(b)^2}{2} = \frac{((2\beta)^{\frac{1}{2}})^2}{2} = \beta,$$

joten γ_1 toteuttaa tarvittavat reunaehdot. Koska $(\delta(t), \delta'(t)) \in O = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ kaikilla $t \in (0, b]$, niin myös $(\gamma_1(t), \gamma_1'(t)) = (\frac{\delta(t)^2}{2}, \delta(t)\delta'(t)) \in O$ kaikilla $t \in (0, b]$. Lisäksi huomataan, että

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\gamma_1) &= \int_0^b \left(\frac{1 + \gamma_1'^2}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^b \left(\frac{1 + (\delta\delta')^2}{\frac{\delta^2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^b 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\delta^2} + \delta'^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = 2^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}(\delta)
\end{aligned}$$

ja koska $\mathcal{M}(\delta)$ on määritelty, niin myös $\mathcal{L}(\gamma_1)$ on määritelty. Siispä $\gamma_1 \in Y_b$.

Oletetaan seuraavaksi, että $\delta = (2\gamma)^{\frac{1}{2}}$, jollekin $\gamma \in Y_b$ ja näytetään, että tällöin $\delta \in Z$. Koska γ on jatkuvasti derivoituva välillä $(0, b]$, niin edelleen myös δ on jatkuvasti derivoituva välillä $(0, b]$. Kuten näytettiin edellä, niin myös reunaehdot pätevät selvästi. Koska $(\gamma(t), \gamma'(t)) \in O$ kaikilla $t \in (0, b]$, niin selvästi myös $(\delta(t), \delta'(t)) = ((2\gamma(t))^{\frac{1}{2}}, (2\gamma(t))^{-\frac{1}{2}}\gamma'(t)) \in O$ kaikilla $t \in (0, b]$. Lisäksi

$$\begin{aligned}
2^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}(\delta) &= \int_0^b 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\delta^2} + \delta'^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^b \left(\frac{2(1 + \delta^2\delta'^2)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^b \left(\frac{1 + \gamma'^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \mathcal{L}(\gamma).
\end{aligned}$$

Koska $\mathcal{L}(\gamma)$ on määritelty, niin myös $\mathcal{M}(\delta)$ on määrtielty ja näin ollen $\delta \in Z$. □

Edellisestä lemmasta seuraa, että $\mathcal{L}(\gamma) = 2^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}(\delta)$. Asetetaan $\delta_0 = (2\gamma_0)^{\frac{1}{2}}$, missä γ_0 on edellisessä kappaleessa johdettu Brachistochrone-ongelman mahdollinen ratkaisu ja näytetään, että δ_0 minimoi funktionaalin $\mathcal{M}$.

Lause 3.15. *δ_0 on funktionaalin $\mathcal{M}$ yksikäsitteinen minimikohta joukossa Z.*

Todistus. Funktion M toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{2 + x^2 y^2}{x^6 (x^{-2} + y^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2 (x^{-2} + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ja

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial x} = \frac{y}{x^3(x^{-2}+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

jolloin ne ovat olemassa ja jatkuvia kaikilla $(x, y) \in O$. Siten M on C^2-funktio. Lisäksi

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{2}{x^8(x^{-2}+y^2)^3} > 0 \tag{3.20}$$

kaikilla $(x, y) \in O$, joten Lauseen 2.14 perusteella funktio M on aidosti konveksi joukossa O. Huomataan myös, että

$$\left|\frac{\partial M}{\partial y}\right| = \left|\frac{y}{(x^{-2}+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right| = \frac{|y|}{(x^{-2}+y^2)^{\frac{1}{2}}} < \frac{|y|}{(0+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{|y|}{|y|} = 1,$$

joten $\frac{\partial M}{\partial y}$ on rajoitettu. Näytetään vielä, että funktio δ_0 toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön välillä $(0, b]$, jolloin osoitettava väite seuraa Lauseesta 3.13.

Muistetaan, että yhtälö (3.13) pätee funktiolle γ_0, jolloin koska $\delta_0 = (2\gamma_0)^{\frac{1}{2}}$, niin

$$\frac{\delta_0^2}{2}(1 + \delta_0^2\delta_0'^2) = k.$$

Siispä

$$\delta_0^{-1} = \frac{1}{(2k)^{\frac{1}{2}}}(1 + \delta_0^2\delta_0'^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

ja toisaalta

$$(1 + \delta_0^2\delta_0'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\delta_0}{(2k)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.22}$$

Nyt

$$\begin{aligned} M[\delta_0(t)] - \frac{\partial M}{\partial y}[\delta_0(t)]\delta_0'(t) &= (\delta_0^{-2}(t) + \delta_0'^2(t))^{\frac{1}{2}} - \delta_0'^2(t)(\delta_0^{-2}(t) + \delta_0'^2(t))^{\frac{1}{2}} \\ &= \delta_0^{-1}(t)(1 + \delta_0^2(t)\delta_0'^2(t))^{\frac{1}{2}} - \delta_0(t)\delta_0'^2(t)(1 + \delta_0^2(t)\delta_0'^2(t))^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{(2k)^{\frac{1}{2}}}(1 + \delta_0^2(t)\delta_0'^2(t)) - \frac{1}{(2k)^{\frac{1}{2}}}\delta_0^2(t)\delta_0'^2(t) \\ &= \frac{1}{(2k)^{\frac{1}{2}}} = \text{vakio}, \end{aligned}$$

missä kolmas yhtäsuuruus seuraa yhtälöistä (3.21) ja (3.22). On saatu näytettyä, että δ_0 toteuttaa Beltrami yhtälön. Siispä Lemman 3.10 nojalla niissä kohdissa, joissa $\delta_0'(t) \neq 0$, δ_0 toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön eli

$$\frac{\partial M}{\partial x}[\delta_0(t)] - \frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial y}[\delta_0(t)] = 0. \tag{3.23}$$

Kirjoitetaan Euler-Lagrangen yhtälön jälkimmäinen termi laajennettuun muotoon ja merkitään

$$L(t) = \frac{\partial M}{\partial x}[\delta_0(t)] - \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial x}[\delta_0(t)]\delta_0'(t) - \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}[\delta_0(t)]\delta''(t).$$

Funktio L on jatkuva muuttujan t suhteen koko välillä $(0, b)$, sillä funktio M on kahdesti jatkuvasti derivoituva ja δ_0 on kahdesti jatkuvasti derivoituva, sillä funktio γ_0 on kahdesti jatkuvasti derivoituva. Näin ollen $L(t)$ on jatkuva, kun $t \in (0, b)$ ja yhtälön (3.23) perusteella $L(t) = 0$ kun $\delta_0'(t) \neq 0$. Jos funktiolla δ_0 on yksittäinen kriittinen piste välillä $(0, b)$, niin $L(t) = 0$ myös kyseisessä pisteessä. Tämä johtuu siitä, että jos olisi piste $t_1 \in (0, b)$ siten, että $L(t_1) \neq 0$, niin funktion L jatkuvuuden perusteella olisi olemassa pisteen t_1 ympäristö, jossa $L(t) \neq 0$. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, jos t_1 on yksittäinen piste. Näin ollen funktio δ_0 toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön koko välillä $(0, b)$, vaikka sillä olisi yksittäisiä kriittisiä pisteitä.

Huomataan vielä, että funktion δ_0 kriittisten pisteiden joukolla ei voi olla sisäpisteitä. Tämä johtuu siitä, että $\delta_0'\delta_0 = \gamma_0'$ ja $\delta_0 \neq 0$ kun $t \in (0, b)$, joten funktioilla δ_0 ja γ_0 on samat kriittiset pisteet, kun $t \in (0, b)$. Lisäksi edellä on näytetty, että $\gamma_0'(t) = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$, joten $\gamma_0'(t) = 0$ täsmälleen silloin, kun $\sin\theta = 0$. Näin ollen funktiolla δ_0 on korkeintaan yksi kriittinen piste välillä $\theta \in (0, 2\pi)$. Edeltävistä päätelyistä seuraa, että $L(t) = 0$ kaikilla $t \in (0, b)$ ja siten edelleen δ_0 toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön koko välillä $(0, b)$. Nyt Lauseen 3.13 nojalla δ_0 on funktionaalin $\mathcal{M}$ yksikäsitteinen minimikohta joukossa Z. □

Nyt ollaan valmiita osoittamaan, että γ_0 on yksikäsitteinen ratkaisu Brachistochrone-ongelmalle eli etsitty brakistokroni on sykloidi.

LAUSE 3.16. *γ_0 on funktionaalin $\mathcal{J}$ yksikäsitteinen minimikohta joukossa Y_b.*

TODISTUS. Olkoon $\gamma \in Y_b$, $\gamma \neq \gamma_0$. Tällöin
$$\mathcal{L}(\gamma) = 2^{\frac{1}{2}}\mathcal{M}((2\delta)^{\frac{1}{2}}) > 2^{\frac{1}{2}}\mathcal{M}(\delta_0) = \mathcal{L}(\gamma_0).$$
□

Kirjallisuutta

[1] BRECHTKEN-MANDERSCHEID, U.: *Introduction to the Calculus of Variations.* Käännös: P.G. Engstrom. Chapman & Hall, 1991. Saksankielinen alkuteos: *Einführung in die Variationsrechnung.* 1983.

[2] COLEMAN, RODNEY: *A Detailed Analysis of the Brachistochrone Problem.* 2012. https://arxiv.org/abs/1001.2181

[3] COLEMAN, RODNEY: *Calculus on Normed Vector Spaces* (pdf-versio). Springer, 2012.

[4] GOLDSTINE, HERMAN H.: *A History of the calculus of variations from the 17th through the 19th century.* Springer-Verlag, 1980.

[5] HAWS, LADAWN & KISER, TERRY: *Exploring the Brachistochrone Problem.* The American Mathematical Monthly, Vol. 102, 328-336, 1995. https://www.jstor.org/stable/2974953

[6] JUUTINEN, PETRI: *Variaatiolaskenta*, luentomoniste. Jyväskylän yliopisto, 2005.

[7] KILPELÄINEN, TERO: *Vektorianalyysi 1*, luentomoniste. Jyväskylän yliopisto, 2019.

[8] LAWLOR, GARY: *A New Minimization Proof for the Brachistochrone.* The American Mathematical Monthly, Vol. 103, 242-249, 1996. https://www.jstor.org/stable/2975375

[9] MESTERTON-GIBBONS, MIKE: *A Primer on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory.* American Mathematical Society, 2009.

[10] OPREA, JOHN: *Differential Geometry and Its Applications* (e-kirja). American Mathematical Society, 1978.