

Konformikuvauksia

Sanja Kantinkoski

Pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2021

Tiivistelmä: Sanja Kantinkoski, *Konformikuvauksia* (engl. *Conformal Mappings*), matematiikan pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2021.

Tämän tutkielman tarkoituksena on käsitellä konformikuvauksia ja konformisia automorfismeja. Tutkielmassa esitellään erilaisia kuvausongelmia niin kompleksitasossa kuin Riemannin pallollakin. Konformisuus määritellään monin eri tavoin riippuen kirjallisuudesta. Tässä tutkielmassa käytämme määritelmää, jonka mukaan analyyttinen injektio on konformikuvaus kunhan määrittelyjoukko on avoin ja epätyhjä. Kuvausongelmia ratkaistaan konformikuvauksin ja havainnollistetaan kuvin.

Jotta Riemannin pallolla määritetyt kuvauksia voitaisiin käsitellä, tulee määrittellä myös Riemannin pallo. Riemannin pallo on toisin sanoen laajennettu kompleksitaso, joka koostuu kompleksitasosta ja ääretön pisteestä. Ääretön piste saadaan mukaan liittämällä kompleksitasoon pallo, jonka pohjoisnapa käyttäytyy kuten ääretön suhteessa kompleksitasoon. Kuvausongelmia tarkastellessa huomataan, että konformiset bijektiot voidaan hajottaa yksinkertaisempien konformisten bijektioiden yhdistelmäksi. Esimerkiksi eksponenttifunktion yleinen haara kuvaa konformisti sektorin alueeksi, jota rajoittaa kaksi logaritmista käyrää. Paloiteltuna, ensin sektori kuvautuu reaaliakselin suuntaiseksi kaistaleeksi. Sitten kaistale kääntyy ja lopulta eksponenttifunktio rajoittaa alueen kahdella logaritmisella käyrällä. Eksponentiaalifunktioiden lisäksi tarkastellaan rationaalifunktiota, sinifunktiota ja neliöjuurifunktiota sekä elliptisiä integraaleja.

Yksi keskeisimmistä tutkielman asioista on Möbius-kuvaukset. Ne ovat laajennetun kompleksitason eli Riemannin pallon konformikuvauksia. Tällaiset kuvaukset ovat luonteeltaan geometrisia eli ne kuvaavat ympyrät ympyröiksi tai suoriksi, jotka tulkitaan äärettömyyspisteen kautta kulkeviksi ympyröiksi. Möbius-kuvaukset ovat siis kuvauksia Riemannin pallolta itselleen. Jokainen Möbius-kuvaus on yksinkertaisempien Möbius-alleikuvauksien yhdistetty kuvaus.

Lopuksi käsitellään Möbius-kuvauksiin liittyvä sovellus Steinerin porismi. Se on matemaatikko Jakob Steinerin mukaan nimetty kuvausongelma, joka käsittelee sisäkkäisiä toisiaan leikkaamattomia erikeskisiä ympyröitä. Steinerin porismille esitetään ratkaisu, joka käyttää Möbius-kuvausten kuvausominaisuuksia.

Sisältö

Johdanto	1
Luku 1. Konformikuvaukset	5
Luku 2. Kuvausongelmien ratkaisuja	8
2.1. Riemannin kuvauslause	8
2.2. Kompleksiaffinit funktiot	8
2.3. Riemannin pallo	9
2.4. Kuvausongelmia	12
2.5. Elliptiset integraalit	19
Luku 3. Konformiset automorfismit	22
3.1. Kompleksitason automorfismit	22
3.2. Möbius-kuvaus	24
3.3. Steinerin porismi	26
Kirjallisuutta	32

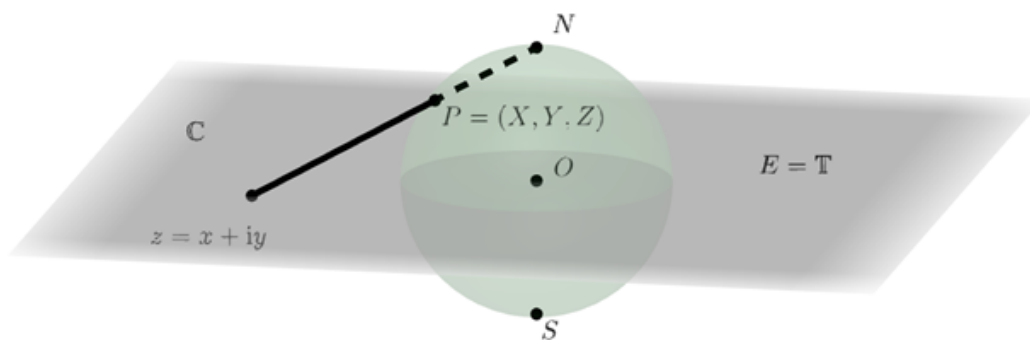
Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään konformikuvauksia. Lukijan olisi hyvä hallita kursien Kompleksianalyysi 1 ja Kompleksilaskenta sisällöt.

Luvussa 2 käsitellään konformikuvaukset ja analyyttiset kuvaukset. Konformikuvaukset ovat sellaisia kuvauksia, jotka säilyttävät kulmat. Konformisuus määritellään monin eri tavoin riippuen kirjallisuudesta. Tässä tutkielmassa käytämme määritelmää, jonka mukaan analyyttinen injektio on konformikuvaus kunhan määrittelyjoukko on avoin ja epätyhjä [1]. Konformikuvauksen perustiedot ovat lähteistä [5] ja [6]. Toisissa lähteissä injektiivisyyttä ei edellytetä.

Luvussa 3 käsitellään erilaisia kuvausongelmien ratkaisuja ja esitellään lyhyesti Riemannin kuvauslause, jonka mukaan mikä tahansa mielivaltainen määrittelyjoukko on konformisti ekvivalentti yksikkökierokkeen kanssa, kunhan avoin määrittelyjoukko ei ole koko kompleksitaso. Lisäksi, jokaiselle yhdesti yhtenäiselle avoimelle epätyhjälle joukolle on olemassa konformikuvaus yksikkökierokelta tälle joukolle. Yhdesti yhtenäiseksi kutsutaan aluetta, jonka komplementti Riemannin palloon nähden on yhtenäinen [1].

Riemannin pallo on toisin sanoen laajennettu kompleksitaso, joka koostuu kompleksitasosta ja ääretönpisteestä. Riemannin pallolla on muun muassa määritelty, että kompleksiluvun ja äärettömän osamäärä on nolla ja kompleksiluvun ja nollan osamäärä on ääretön. Riemannin palloa havainnollistetaan kuvilla, jossa on esitetty kompleksitaso, joka leikkaa palloa, jolla on etelä- ja pohjoisnapa, kuten näkyy kuvassa 1.



KUVA 1. Riemannin pallon geometrinen esitys

Stereograafinen projektio on tapa kuvata pallon pintaa tasaisella kartalla. Projektio käyttää samaa ideaa kuin Riemannin pallo. Stereograafinen projektio kuvaa ympyrät ympyröiksi. Sen ominaisuuksiin kuuluu muun muassa, että ekvaattorin pisteet ovat kiintopisteitä. Projektiossa pallon alempi puolisko kuvautuu yksikkökiekoksi ja ylempi puolisko puolestaan kiekon ulkopuoleksi. Stereograafista projektiota on käyttänyt jo Ptolemaios 150 vuotta e.a.a. [3].

Tutkielmassa esitellään myös kompleksiaffinit funktiot, jotka ovat kompleksitasolla määriteltyjä injektioita. Kaikki kompleksiaffinit funktiot ovat esitettävissä kolmen kuvauksen yhdistelmänä: siirtokuvaus, kiertokuvaus ja venytyskuvaus. Siirtokuvaus siirtää joko summalla tai erotuksella määrittelyjoukon pisteitä. Kiertokuvaus kiertää kompleksitasoa tietyn kulman verran ja venytyskuvaus venyttää kertoimella.

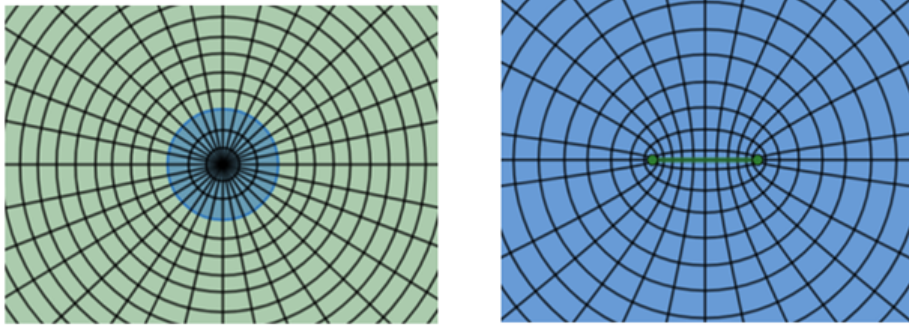
Kuvausongelmia tarkastellessamme voidaan usein huomata, että myös niissä voidaan konformiset bijektiot hajottaa yksinkertaisempien konformisten bijektioiden yhdistelmäksi. Esimerkiksi eksponenttifunktion yksi muoto kuvaa konformisti suorakulmion kulmasektoriksi. Eksponenttifunktio kuvaa myös reaali- ja imaginääriakselien kanssa erisuuntaiset viivat logaritmisiksi spiraaleiksi eli eksponentiaalikuvauksia kuvaa yleisesti suorakulmion kaartuvaksi nelisivuiseksi, jonka sivut ovat logaritmisten spiraalien osia. Eksponenttifunktion yleinen haara kuvaa konformisti sektorin alueeksi, jota rajoittaa kaksi logaritmistä käyrää. Paloiteltuna, ensin sektori kuvautuu reaaliakselin suuntaiseksi kaistaleeksi. Sitten kaistale kääntyy ja lopulta eksponenttifunktio rajoittaa alueen kahdella logaritmisella käyrällä.

Erästä rationaalisen funktion konformikuvauksista kutsutaan Joukovskin kuvaukseksi. Joukovski-kuvauksia kuvaa Riemannin pallon joukon, josta on poistettu avoin yksikkökiekko, janan $[-1, 1] \subset \mathbb{C}$ komplementiksi. Myös yhdesti yhtenäinen avoin yksikkökiekko kuvautuu Joukovski-kuvauksella täksi komplementiksi. Kuvassa 2 havainnollistetaan edeltävää tilannetta.

On olemassa myös neliöjuurifunktio, joka kuvaa konformisti ylemmän puolitason sellaiseksi puolitasoksi, josta on otettu yksi osio positiivisesta imaginääriakselista pois. Tämä konforminen bijektio muotoutuu neljästä osiosta. Ensimmäinen osio kuvaa ylemmän puolitason kokotasoksi, josta on poistettu negatiivinen reaaliakseli. Toinen osio siirtää tason yhden yksikön oikealle. Kolmas osio taittaa tason oikeanpuoleiseksi puolitasoksi ja neljäs osa kääntää koko kuvauksen myötäpäivään. Sinifunktio puolestaan kuvaa konformisti puolikkaan pystykaistaleen ylemmäksi puolitasoksi. Tämä tapahtuu hyödyntäen sinifunktion eksponenttitesitystä. Elliptiset integraalit puolestaan esimerkiksi kuvaavat ylemmän puolitason konformisti suorakulmioksi.

Luku 4 käsittelee konformisia automorfismeja, Möbius-kuvausta ja Steinerin porismia. Konformisia automorfismeja ovat sellaiset konformiset bijektiot, jotka kuvautuvat joko kompleksitasolta kompleksitasolle, Riemannin pallolta Riemannin pallolle tai yksikkökiekolta yksikkökiekolle. Tutkielmassa esitellään Cayleyn kuvaus, joka on sellainen konformikuvauksia, joka kuvaa ylemmän puolitason yksikkökiekoksi. Sen käänteiskuvaus puolestaan kuvaa yksikkökiekon ylemmäksi puolitasoksi. Cayleyn kuvaus on Möbius-kuvaus ja yksi keskeisimmistä tutkielman asioista ovat Möbius-kuvaukset. Ne ovat laajennetun kompleksitason eli Riemannin pallon konformikuvauksia. Tällaiset kuvaukset ovat luonteeltaan geometrisia eli ne kuvaavat ympyrät ympyröiksi tai suoriksi, jotka tulkitaan äärettömyyspisteen kautta kulkeviksi ympyröiksi. Möbius-kuvaukset ovat siis kuvauksia Riemannin pallolta itselleen. Jokainen Möbius-kuvaus

on yksinkertaisempien Möbius-alkaiskuvauksien yhdistetty kuvaus. Alkeiskuvauksia on neljää tyyppiä: siirtokuvaus, kiertokuvaus, venytyskuvaus ja inversio. Millä tahansa identiteetistä poikkeavalla Möbius-kuvauksella on korkeintaan kaksi kiintopistettä. [6] [5]



KUVA 2. Joukokovski-kuvaus kuvaa kuvassa vihreällä näkyvän joukon \mathbb{E} viivajoukoksi S .

Lopuksi käsitellään vielä Möbius-kuvausten sovelluksena matemaatikko Jakob Steinerin mukaan nimettyä Steinerin porismia. Porismi tarkoittaa matemaattista lausetta tai seurausta. Steinerin porismiksi kutsutaan tilannetta sisäkkäisten erikeskisten ympyröiden kanssa. Kahden sisäkkäisen ympyrän leikkauksen alueelle voidaan piirtää molempia ympyröitä sivuava ympyräketju. Nämä väliin piirretyt ympyräketjun ympyrät joko sivuavat toisiaan siististi tai viimeinen ja ensimmäinen leikkaa toisensa. Tämä riippuu alkuperäisten sisäkkäisten ympyröiden valinnasta. Voidaan valita ympyrät A ja B siten, että niiden väliin jäävälle alueelle voidaan piirtää toisensa siististi sivuavia ympyröitä siten, että viimeinen ja ensimmäinen piirretty ympyrä sivuaa toisiaan ja ympyräketju sulkeutuu. Silloin voidaan ympyröiden väliltä valita mikä tahansa ympyräketju C_1, \dots, C_n ja ympyrät sivuavat toistensa kanssa ja muodostunut ympyräketju sulkeutuu. Jos on valittu ympyrät A ja B siten, että niiden leikkaukselle piirretty ympyräketju ei sulkeudu, ei ketju sulkeudu millään ympyrän C valinnalla. Tämä tieto todistetaan hyödyntäen Möbius-kuvauksia ja tietoa, että mitkä tahansa kaksi toisiaan leikkaamatonta ei-samankeskistä ympyrää voidaan Möbius-kuvauksin kuvata samankeskisiksi. Todistuksessa käytetään tilannetta, jossa on kaksi toisiaan leikkaamatonta ei-samankeskistä sisäkkäistä ympyrää. Ympyröiden kuvaamiseksi samankeskisiksi käytetään useampaa Möbius-kuvausta, joista yksi on tässä tutkielmassa tarkemmin esitelty Cayley-kuvaus. Jakob Steiner siis alun perin selvitti, että jos ketju sulkeutuu yhdellä ensimmäisen välissä olevan ympyrän valinnalla, se sulkeutuu kaikilla, kun kyseessä ovat samat sisäkkäiset eri-keskiset ympyrät [4].

Tutkielman lähteitä ovat matemaatikon E. WEGERT teos *Visual Complex Functions: An introduction with Phase Portraits* [6] ja matemaatikon BRUCE P. PALKA teos *An introduction to complex function theory* [5] sekä matemaatikon LARS V. AHLFORS teos *Complex Analysis* [1]. Tutkielman loppuosan Steinerin porismin esittelyyn on käytetty TRISTAN NEEDHAMIN teosta *Visual Complex Analysis* [4]. Muita lähteitä EBERHARD FREITAGIN ja ROLF BUSAMIN teosta *Complex Analysis*

[2], matemaatikkojen DAVID MUMFORD, CAROLINE SERIES ja DAVID WRIGHT teosta *Indra's Pearls, The Vision of Felix Klein* [3] on käytetty sopivin osin. Tutkielman kuvat ovat joko itse käsin tai GeoGebra-ohjelmistolla piirrettyjä.

Konformikuvaukset

Puhuttaessa konformikuvauksista tarkoitetaan kompleksianalyttisiä kuvauksia, jotka säilyttävät kulmat. Seuraavat määrittelevät konformikuvauksen ja tarkentavat konformikuvauksen määrittelyjoukon. Käsitellessämme konformikuvauksia vastaan tulee käsite analyttisyys ja univalenttius, jotka määritellään alla [1].

MÄÄRITELMÄ 1. Olkoon U ei-tyhjä avoin kompleksitason osajoukko. Olkoon myös funktio f kompleksiarvoinen funktio, jonka määrittelyjoukko sisältää joukon U . Funktio f on kompleksisesti differentioituva jokaisessa joukon U pisteessä. Tällöin funktio f on analyttinen joukossa U .

MÄÄRITELMÄ 2. Injektiivinen analyttinen funktio on univalentti funktio.

Nyt voidaan määritellä konformikuvaus.

MÄÄRITELMÄ 3. Olkoot $U \subset \mathbb{C}$ ja $V \subset \mathbb{C}$ avoimia epätyhjiä joukkoja. Analyttinen injektio $f : U \rightarrow V$ on konformikuvaus.

Konformisuus määritellään eri tavoin eri kirjallisuudessa. Esimerkiksi lähteistä teos [6] ei edellytä kuvauksen injektiivisyyttä, mutta teokset [1] ja [5] edellyttävät.

LAUSE 4. *Konformikuvaukset $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ovat funktioita muotoa $f(z) = az + b$, missä a ja b ovat kompleksilukuja ja $a \neq 0$. Eryityisesti, jokaisen konformikuvauksen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kuvajoukko on koko kompleksitaso.*

Lause 4 todistetaan teoksessa [5] sivulla 388.

LAUSE 5. *Olkoon funktio f analyttinen ja ei-vakio joukossa D ja olkoon piste z_0 joukossa D . Siten f joukossa D voidaan ilmoittaa muodossa*

$$(1) \quad f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z)$$

missä m on positiivinen kokonaisluku ja $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ on analyttinen funktio, jolle $g(z_0) \neq 0$.

Lause todistetaan teoksessa [5] sivulla 302.

Seuraavaksi esittelemme diskreetin kuvausperiaatteen. Tätä varten määrittelemme diskreetin kuvauksen ja osajoukon. Olkoon U kompleksitason avoin joukko. Joukon U osajoukko E on joukon U diskreetti osajoukko, jos joukolla E ei ole sellaista kasautumispistettä, joka kuuluisi joukkoon U . Olkoon myös funktio f kompleksiarvoinen funktio, jonka määrittelyjoukko sisältää joukon U . Funktio f on diskreetti kuvaus joukosta U , jos jokaiselle kompleksiluvulle w , joukko $E_w = \{z \in U : f(z) = w\}$ on joukon U diskreetti osajoukko. Seuraavassa esitellään diskreetti kuvausperiaate.

LAUSE 6. *Jos analyttinen funktio ei ole vakiofunktio, niin se on diskreetti kuvaus.*

TODISTUS. Olkoon $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, joka ei ole vakiofunktio. Olkoon sitten piste $w \in \mathbb{C}$ ja joukko $E = E_w = \{z \in D : f(z) = w\}$. Tulee näyttää, että E on joukon D diskreetti osajoukko. Todistetaan siis, että piste z_0 on joukon E kasautumispiste. Nyt tulisi todistaa, että piste $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$. Tehdään antiteesi: piste $z_0 \in D$. Olkoon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujono joukossa $E \setminus \{z_0\}$ siten, että $z_n \rightarrow z_0$. Koska funktio f on jatkuva pisteessä z_0 , saadaan

$$f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} w = w$$

Siispä $z_0 \in E$. Seurauksen 5 mukaan voidaan ilmaista $f(z)$ kun $z \in D$ seuraavasti

$$f(z) = w + (z - z_0)^m g(z)$$

missä m on positiivinen kokonaisluku ja $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, jolle $g(z_0) \neq 0$. Funktio g on jatkuva pisteessä z_0 . Valitaan kiekko $\Delta = \Delta(z_0, r) \in D$ siten, että $g(z) \neq 0$ kaikille $z \in \Delta$. Tästä seuraa, että $f(z) \neq w$ jokaiselle $z \in \Delta^*(z_0, r)$, missä Δ^* on kiekko, jonka keskellä on reikä. Siispä $E \cap \Delta^*(z_0, r) = \emptyset$. Mutta piste z_0 on määritelty siten, että se on joukon E rajapiste, joka tarkoittaisi, että riittävän pienien kiekkojen ja joukon E leikkaus ei voisi olla tyhjä joukko. Saimme ristiriidan antiteesin kanssa, joten on oltava, että kaikki joukon E rajapisteen kuuluvat joukkoon $\mathbb{C} \setminus D$ eli joukko E on joukon D diskreetti osajoukko ja funktio f on diskreetti kuvaus määrittelyjoukostaan D . \square

Lauseen sisältö löytyy myös teoksesta [5]. Seuraavan lauseen mukaan funktion analyyttisyys ja derivaatalle löytyvä nolla-arvo tarkoittavat sitä, että funktio f ei ole injektio. Eli siis, jos funktio f olisi analyyttinen injektio, ei sen derivaatta ole koskaan nolla.

LAUSE 7. Jos $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $f'(z_0) = 0$ jollain $z_0 \in U$, niin f ei ole injektio. Jos siis f on analyyttinen injektio, niin $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in U$.

TODISTUS. Jos $f'(z_0) = 0$, niin $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^k g(z)$ jollekin $k \geq 2$ ja jollekin analyyttiselle funktiolla g , jolle pätee $g(z_0) \neq 0$. Funktiolla $\frac{g'}{g}$ on primitiivi jossain juuri pienessä z_0 -keskisessä kiekossa $B(z_0, r)$, joten funktiolla g on analyyttinen k :s juuri $\sqrt[k]{g}$ pienessä z_0 -keskisessä kiekossa. Siis $f(z) = f(z_0) + ((z - z_0)\sqrt[k]{g})^k$. Funktion $z \mapsto (z - z_0)\sqrt[k]{g(z)}$ derivaatta pisteessä z_0 ei ole 0, joten käänteiskuvalauseen (Lause 4.1.5 [6]) nojalla kuvajoukko sisältää pienen kiekon $B(0, r') \subset \mathbb{C}$ ja tässä kiekossa kuvaus $z \rightarrow z^k$ ei ole injektio eli funktio f ei myöskään ole injektio. \square

Konformisuus tarkoittaa samannuotoisuutta. Nimitys perustuu seuraavaan. Edellisen perusteella konformikuvaukselle $f : U \rightarrow V$ pätee $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in U$. Cauchy'n ja Riemannin yhtälön nojalla nähdään, että ajateltuna kahden reaaliuuttujan kuvauksena funktion f derivaattamatriisi pisteessä z on cA , missä A on ortogonaalimatriisi, jolle $\det A = 1$, ja $c > 0$. Funktion f derivaattakuvaus jokaisessa pisteessä on euklidisen kierron ja venytyksen yhdistetty kuvaus. Siis f säilyttää kulmat ja muistuttaa jokaisen pisteen pienissä ympäristöissä kierron ja venytyksen yhdistettyä kuvausta. Konformikuvauksia ovat myös univalentit analyyttiset funktiot.

LAUSE 8. Olkoon funktio $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ \mathbb{R} -differentioitua funktio avoimessa joukossa $D \subset \mathbb{C}$. Silloin funktio f on konforminen pisteessä z jos ja vain jos funktio f on kompleksisesti differentioitua pisteessä z ja $f'(z) \neq 0$.

Tämä todistetaan teoksessa [6]. Todistus pohjautuu toiseen suuntaan käänteiskuvaukslauseeseen ja toiseen suuntaan lauseeseen 7.

HUOMAUTUS 9. \mathbb{R} -lineaarille kuvaukselle

$$A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

seuraavat neljä väitettä ovat yhtäpitäviä

- i On olemassa kompleksiluku I , jolle $Az = Iz$
- ii A on \mathbb{C} -lineaarinen
- iii $A(i) = iA(1)$
- iv Lukuihin $1 = (1, 0)$ ja $i = (0, 1)$ liittyvä matriisi on muotoa

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \text{ kun } (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Tämä todistetaan teoksessa [2] sivulla 49.

Seuraavaksi esitellään avoin kuvausperiaate. Avoimen kuvausperiaatteen mukaan, jos ei-vakio funktio on määrittelyjoukossaan analyyttinen ja määrittelyjoukon osajoukko on avoin joukko, on määrittelyjoukon osajoukon kuva myös avoin joukko.

LAUSE 10. *Olkoon $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen ei-vakio funktio määrittelyjoukossa D . Jos $U \subset D$ on avoin joukko, myös $f(U)$ on avoin joukko.*

Avoin kuvausperiaate todistetaan kirjallisuudessa [6] sivulla 106.

LUKU 2

Kuvausongelmien ratkaisuja

2.1. Riemannin kuvauslause

Riemannin kuvauslauseen mukaan mikä tahansa mielivaltainen avoin yhdesti yhtenäinen D , on konformisti ekvivalentti yksikkökiekan kanssa, kunhan D ei ole koko kompleksitaso. Kuvauslause sanoo, että jos $V \subset \mathbb{C}$ on yhdesti yhtenäinen avoin epätyhjä joukko, niin on konformikuvaus $f : B(0, 1) \rightarrow V$. Alla Riemannin kuvauslause.

LAUSE 11. *Olkoon D mikä tahansa yhdesti yhtenäinen kompleksitason avoin osajoukko. Olkoon lisäksi piste siten, että $z_0 \in D$. Silloin on olemassa konformikuvaus $f(z) \in D$, jolle $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ siten, että $f(z)$ määrittelee bijektion alueelta D kiekolle $|w| < 1$ ts. $\Delta = \Delta(0, 1)$*

Todistus tehdään matemaatikon LARS V. AHLFORS kirjassa *Complex Analysis* [1] sivuilla 222-223. Yhdesti yhtenäisiksi alueiksi sanotaan alueita, joissa ei ole reikiä. LARS V. AHLFORS määrittelee teoksessaan [1] yhdesti yhtenäisyyden seuraavanlaisesti.

MÄÄRITELMÄ 12. Alue on yhdesti yhtenäinen, jos sen komplementti Riemannin palloon nähden on yhtenäinen.

Riemannin pallo eli laajennettu kompleksitaso määritellään Luvussa 2.3. Seuraavassa esitellään kompleksiaffiinit funktiot ja peruskuvaukset kompleksitasolla.

2.2. Kompleksiaffiinit funktiot

Olkoon $s, m \in \mathbb{C}$ ja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = sz + m$, kun $z \in \mathbb{C}$. Jokainen edeltävää muotoa oleva injektiivinen kompleksiaffini funktio on esitettävissä kolmen kuvauksen yhdisteenä. Nämä kolme kuvausta ovat siirtokuvaus $S(z)$, kiertokuvaus $K(z)$ ja venytyskuvaus $L(z)$.

2.2.1. Siirtokuvaus. Olkoon $j, z \in \mathbb{C}$ ja kuvaus $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $S(z) = z + j$, jolloin S on bijektio. Pisteet j ja z ovat siis muotoa $z = x_1 + iy_1$ ja $j = x_2 + iy_2$. Piste z kuvautuu siten seuraavasti

$$(2) \quad T(z) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2.2.2. Kiertokuvaus. Olkoon $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. Tällöin $K : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $K(z) = az$ on bijektio. Argumentti luvulle a on $\text{Arg}(a) = \theta$ ja kompleksilukujen napakoordinaattimuodon mukaisesti $a = \cos \theta + i \sin \theta$. Olkoon lisäksi $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$. Kuvaus $K(z)$ on siis kompleksilukujen laskusääntöjen perusteella

$$(3) \quad K(z) = r(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi))$$

Kuvapisteen pituus on $|K(z)| = r = |z|$ ja kuvauksen eräs argumentti on $\text{Arg}(K(z)) = \theta + \phi$. Kuvapiste $K(z)$ ja piste z sijaitsevat ympyrällä $B(0, |z|)$. Piste $K(z)$ saadaan

luvusta z kiertämällä sitä $|\theta|$ radiaania. Jos $\theta > 0$, kiertosuunta on positiivinen eli vastapäivään ja jos $\theta < 0$, kiertosuunta on negatiivinen eli myötäpäivään. Jos $\theta = 0$, kiertoa ei tapahdu lainkaan ja tällöin kuvauksen $K(z)$ on oltava identtinen kuvaus, jolle $K(z) = 1z = z$.

2.2.3. Venytyskuvaus. Olkoon $h > 0, h \in \mathbb{R}$. Kuvaus $L(z) = hz, L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on bijektio ja venytyskuvaus. Asetetaan, että $z = x + iy$, jolloin kuvaukselle L pätee, että

$$(4) \quad L(z) = hz = hx + ihy$$

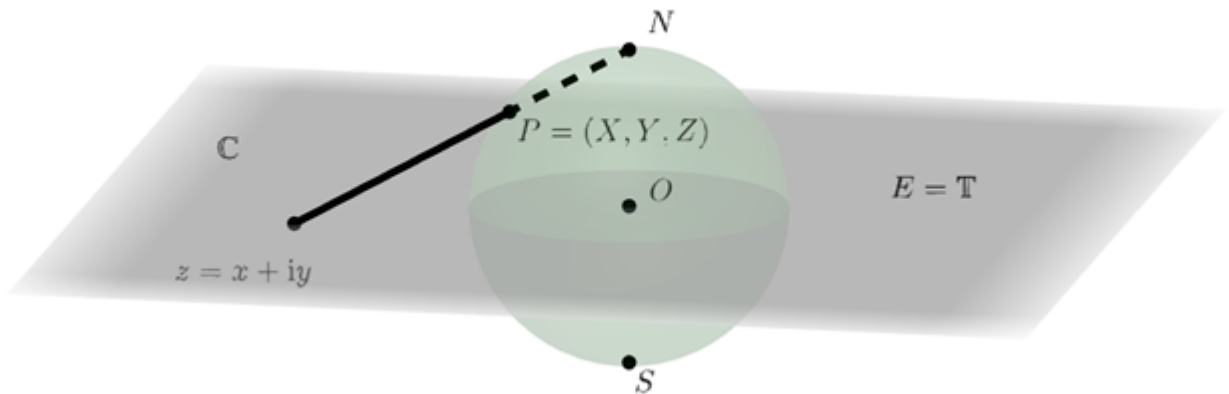
Pisteen $z = (x, y)$ kuvapiste on siis $L(z) = (hx, hy)$. Napakoordinaateille vastaavasti saadaan, että $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ja $L(z) = hz = hr(\cos \theta + i \sin \theta)$. Tällöin kuvapisteen moduli on $h|z| = hr$ ja se sijaitsee pisteen $z = (x, y)$ suuntaisella suoralla. Kuvaus $L(z)$ kuvaa origon itsekseen. Kompleksiaffiinit funktiot, eli kuvaukset $f(z) = sz + m$ voidaan hajottaa edellämäinittujen kuvausten yhdisteeksi siten, että $f = S \circ L \circ K$. Eli $f(z) = S(L(K(z)))$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Tässä siis ensin saadaan pisteen z kierto origon suhteen kulman θ verran eli saadaan kuvapiste $K(z)$. Tämän kuvapisteen venytys luvulla $|s|$ saadaan kuvauksella L ja saadaan uusi kuvapiste $L(K(z))$. Tämän jälkeen voidaan siirtää saatu kuvapiste kompleksiluvulla m kuvauksella S ja saadaan $f(z) = S(L(K(z)))$.

2.3. Riemannin pallo

Laajennetulla kompleksitasolla eli Riemannin pallolla tarkoitetaan joukkoa $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Tämä laajennettu kompleksitaso koostuu siis kompleksitasosta \mathbb{C} ja ideaalipisteestä ∞ , joka ei ole kompleksitason \mathbb{C} alkio. [5] Kompleksitason laajennuksessa pätee seuraavat

$$(5) \quad \begin{cases} \infty \pm z = z \pm \infty = \infty & \text{jos } z \in \mathbb{C} \\ \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty & \text{jos } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \\ \frac{z}{\infty} = 0 & \text{jos } z \in \mathbb{C} \\ \frac{z}{0} = \infty & \text{jos } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Laajennettu kompleksitaso on toiselta nimeltään Riemann-pallo. Tämä määritellään seuraavasti. Asetetaan, että kompleksiluvut ovat pisteitä pallolla \mathbb{S} . Tätä konstruktiota varten asetetaan, että \mathbb{C} on XY-taso kolmiulotteisessa XYZ-avaruudessa. Olkoon \mathbb{S} pallo, jonka säde on 1. Olkoon pallon \mathbb{S} keskipiste joukkojen \mathbb{C} ja \mathbb{R}^3 tavanomaisessa origossa. Kompleksitason yksikköympyrä T on pallon \mathbb{S} ekvaattori ja pallon \mathbb{S} kaukaisimmat pisteet tasosta \mathbb{C} ovat pohjoisnapa N tason \mathbb{C} yläpuolella ja etelänapa S tason \mathbb{C} alapuolella. Stereograafinen kuva z pallon \mathbb{S} pisteestä P on leikkauspiste tasosta \mathbb{C} ja suorasta pisteiden P ja pohjoisnavan N läpi. Piste z on täysin määriteltä kaikille pisteille P pallolla \mathbb{S} pois lukien pohjoisnapa N . Jos piste P lähestyy napaa N , vastaavan pisteen z etäisyys origosta kasvaa mielivaltaisen suureksi. Siispä joukon \mathbb{S} pohjoisnapa käyttäytyy kuten ääretön suhteessa kompleksitasoon. Kuvassa 3 on havainnollistettu Riemann-palloa.



KUVA 3. Riemann-pallon geometrinen esitys

Asettamalla, että pohjoisnapa N on ääretön ja siten laajentamalla stereograafinen projektio koko pallolta \mathbb{S} , saadaan bijektiivinen yhteys joukkojen \mathbb{S} ja $\hat{\mathbb{C}}$ välille. Siispä voidaan listata pallon \mathbb{S} pisteet vastaavilla kompleksiluvuilla laajennetusta kompleksitasosta $\hat{\mathbb{C}}$. Siispä saamme määritellyä Riemann-pallon, joka muodostuu pallosta \mathbb{S} ja joukosta \mathbb{C} . Riemann-pallo on siis laajennettu kompleksitaso. Pallomainen etäisyys $d(z_1, z_2)$ kahden pisteen välillä tasolla $\hat{\mathbb{C}}$ vastaa pisteitä vastaavien pisteiden euklidista etäisyyttä pallolla \mathbb{S} . Jos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ niin

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}},$$

$$d(z_1, \infty) = \frac{2}{1 + |z_1|^2}.$$

[6]

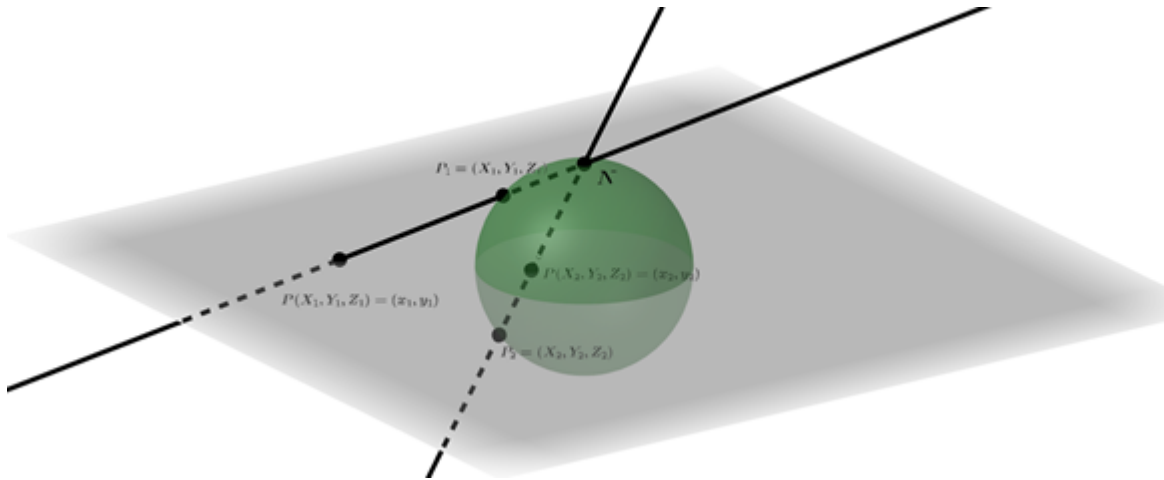
2.3.1. Stereograafinen projektio. Stereograafista projektiota on käyttänyt jo Ptolemaios 150 vuotta e.a.a. Ptolemaiosin idea oli, että stereograafisella projektioilla voidaan kuvata pisteitä pallosta tasaisella kartalla. Stereograafinen projektio säilyttää sekä ympyrät että kulmat [6]. Muuten stereograafinen projektio muuttaa suhteellisia etäisyyksiä ja alueet vääristyvät. Tähän perustuvat iso osa kartoista, joita käytämme nykypäivänä. 1900-luvulla Bernhard Riemann ehdotti, että stereograafista projektiota käytettäisiin kompleksilukujen esittämiseksi vastakkaiseen suuntaan. [3]

Stereograafinen projektio $P : S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ kuvaa ympyrät ympyröiksi. Tarkemmin sanottuna, joukon \mathbb{S} ympyrän kuva pisteen N läpi joukossa $\hat{\mathbb{C}}$ on suora - toisin sanoen se on jonkin joukon \mathbb{C} suoran ja pisteen äärettömässä yhdiste. Muut kuvat kaikista muista ympyröistä ovat varsinaisia ympyröitä.[6]

Stereograafinen projektio geometrisesti tarkoittaa sitä, että esitämme kompleksitason pisteet z karteesisin koordinaatein x, y , ja pallon \mathbb{S} pisteet P' karteesisin koordinaatein X, Y, Z kolmiulotteisessa avaruudessa. Koordinaatistosysteemit asettuvat siten, että spatiaaliset koordinaatit X ja Y vastaavat x - ja y -akseleita kompleksitasossa. Siispä pisteen $P' \in \mathbb{S} \setminus N$ koordinaattien (X, Y, Z) ja niiden stereograafisen projektion $z = x + iy$ välillä on yhteys

$$x = \frac{X}{1-Z}, y = \frac{Y}{1-Z}.$$

Kuvassa 4 näkyy pallon \mathbb{S} pisteet P_1 ja P_2 ja niiden kuvat pohjoisnavan N kautta kompleksitasolla karteesisin koordinaatein (x, y) esitettynä.



KUVA 4. Stereograafisen projektion geometrinen esitys

Pohjoisnapa $(X, Y, Z) = (0, 0, 1)$ vastaa pistettä ∞ , jota ei kuvata xy -systeemissä. Vastaavasti, jos $z = x + iy \in \mathbb{C}$, niin

$$X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

ja $(X, Y, Z) = (0, 0, 1)$ kun $z = \infty$.

Siispä, voimme ilmaista kompleksiluvun $z = x + iy$ neljällä eri tavalla:

- (i) kahden reaaliluvun pari (x, y) ,
- (ii) komponenttien x ja y muodostama vektori,
- (iii) tasossa oleva karteesinen koordinaatti x ja y ja
- (iv) Riemann-pallolla oleva piste karteesisin koordinaatein (X, Y, Z) .

Stereograafisella projektiolla on seuraavanlaiset ominaisuudet.

- (i) Ekvattorin pisteet ovat kiintopisteitä.
- (ii) Alempi puolisko kuvautuu yksikkökiekoksi \mathbb{D} .
- (iii) Ylempi puolisko kuvautuu joukoksi \mathbb{E} , kiekon ulkopuoleksi.

Kiekon ulkopuoli määritellään siten, että se sisältää pisteen ∞ [6]

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}.$$

2.4. Kuvausongelmia

Käsitlemme seuraavaksi kuvausongelmia, joissa $U, V \subset \mathbb{C}$ ovat avoimia joukkoja ja joissa löydetään konforminen bijektio $f : U \rightarrow V$. Kuvausongelmien esimerkit pohjautuvat pääosin teokseen [6]. Ensimmäiset kaksi esimerkkiä käsittelevät eksponenttifunktiota.

ESIMERKKI 13. Kun eksponenttifunktio määritellään

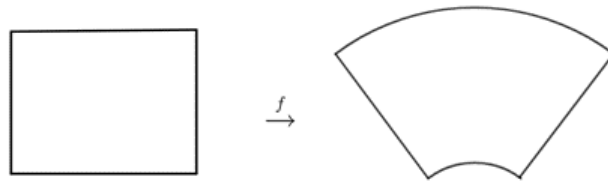
$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

kaikille $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ siten, että $a \leq b$ ja $-\pi c \leq d \leq \pi$, funktio $w = e^z$ kuvaa suorakulmion

$$R(a, b, c, d) := \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b, c < \operatorname{Im} z < d\}$$

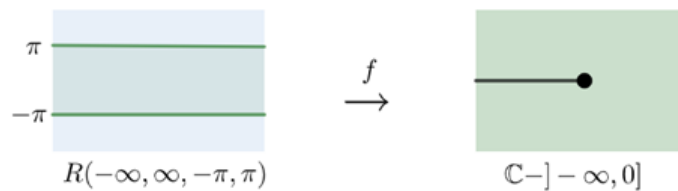
konformisti kulmasektoriksi S , kuten kuvassa 5.

$$S(a, b, c, d) := \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : e^a < |w| < e^b, c < \operatorname{Arg} w < d\}$$



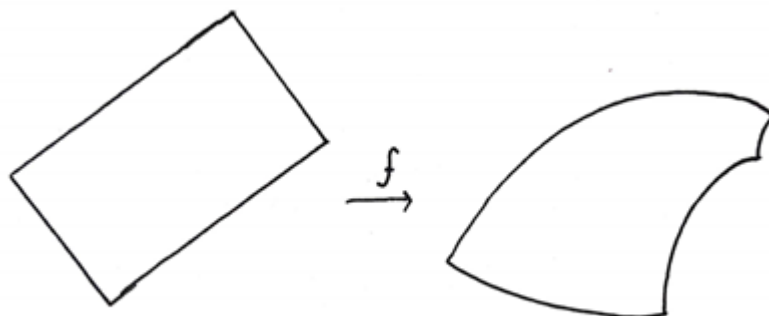
KUVA 5. Eksponentiaalifunktio f kuvaa suorakulmion kulmasektoriksi.

Ääretön alue $R(-\infty, \infty, c, d)$ voidaan myös kuvata eksponentiaalifunktiolla kulmasektoriksi $\{w \in \mathbb{C} : c < \operatorname{Arg} w < d\}$. Kaistaleen $R(-\infty, \infty, -\pi, \pi)$ kuva taas on kompleksitaso, josta on poistettu negatiivinen reaaliakseli ja 0 eli joukoksi $\mathbb{C} -]-\infty, 0]$ kuten näkyy kuvassa 6.



KUVA 6. Eksponentiaalifunktio f kuvaa kaistaleen kompleksitasoksi, josta on poistettu negatiivinen reaaliakseli ja 0.

Kun suora viiva, joka ei ole yhdensuuntainen reaali- tai imaginääriakselin suhteen kuvautuu kuvauksessa $z \rightarrow e^z$ logaritmiseksi spiraaliksi saamme kuvassa 7 näkyvän tilanteen.



KUVA 7. Eksponentiaalifunktio f kuvaa reaali- tai imaginääriakselien kanssa erisuuntaiset viivat logaritmisiksi spiraaleiksi.

Eli eksponentiaalikuvauksia kuvaa yleisesti suorakulmion kaartuvaksi nelisivuiseksi, jonka sivut ovat logaritmistien spiraalien osia kuten kuvassa 7. Tämä kuvaus on uni-valentti jos ja vain jos mikään suorakulmion leikkaus vertikaalisen suoran kanssa ei ole pidempi kuin 2π .

Seuraavassa esimerkissä käsitellään eksponenttifunktiota kompleksitasolla. Tässä eksponenttifunktion yleinen haara kuvaa sektorin alueeksi, jota rajoittaa kaksi logaritmistä käyrää. Tämä tapahtuu vaiheittain: ensin sektori kuvautuu reaaliakselin suuntaiseksi kaistaleeksi, seuraavaksi kaistale kääntyy ja lopulta eksponenttifunktio rajoittaa alueen kahdella logaritmisella käyrällä.

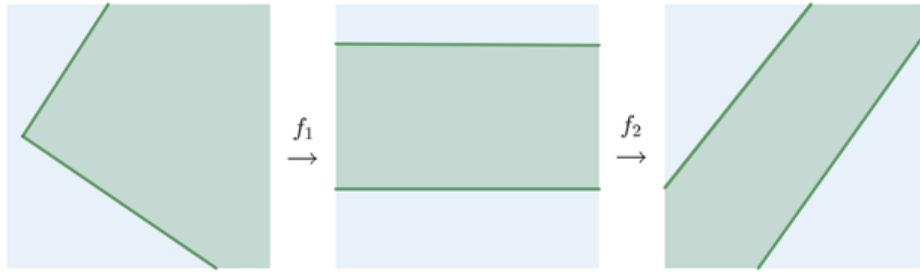
ESIMERKKI 14. Yleisen eksponenttifunktion z^α haara kompleksitasolla eksponentilla määritellään seuraavasti

$$(6) \quad f(z) = z^\alpha := \exp(a \log z)$$

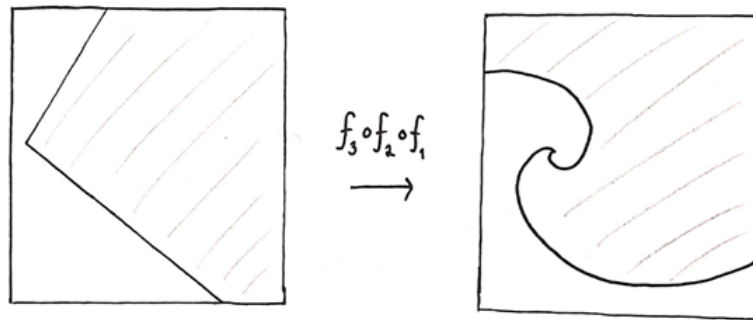
missä \log osoittaa analyyttisen logaritmihaaran. Yllä oleva voidaan hajottaa funktioiksi

- (i) $z \rightarrow w_1 := \log z$,
- (ii) $w_1 \rightarrow w_2 := a w_1$,
- (iii) $w_2 \rightarrow w := \exp w_2$.

Toisin sanoen voimme esittää funktion f kolmen funktion yhdistelmänä $f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Osiossa (i) on funktion osuus f_1 eli logaritmi kuvaa sektorin vaakasuoraksi kaistaleeksi. Siis logaritmifunktio kiertää sektorin vasemman reunan kaistaleen yläreunaksi ja alemman reunan kaistaleen alareunaksi. Sektorin sisäosio kuvautuu kahden reaaliakselin suuntaisen suoran rajoittamaksi alueeksi. Osiossa (ii) on funktion osuus f_2 ja kertoja a kiertää ja venyttää kaistaletta. Funktion osat f_1 ja f_2 havainnollistetaan kuvassa 8.



KUVA 8. Kuvauksen alkutilanne, ensimmäinen osa f_1 ja toinen osa f_2 .



KUVA 9. Kuvaus f kuvaa sektorin kahden logaritmisen käyrän rajoittamaksi alueeksi.

Lopulta osiossa (iii) on osuus f_3 ja eksponentti kuvaa suoran kaistaleen kahden logaritmisen spiraalin rajoittamaksi alueeksi kuten on havainnollistettu kuvassa 9. Jos a on positiivinen, $-\pi < \alpha < \beta < \pi$ ja $-\pi < a\alpha < a\beta < \pi$, sektori

$$\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \text{Arg } z < \beta\},$$

kuvautuu logaritmin päähaaran mukaisesti kun $z^\alpha := \exp(a \text{Log } z)$, sektoriksi

$$\{w \in \mathbb{C} : a\alpha < \text{Arg } w < a\beta\}$$

Muut haarat voitaisiin tutkia samalla tavalla.

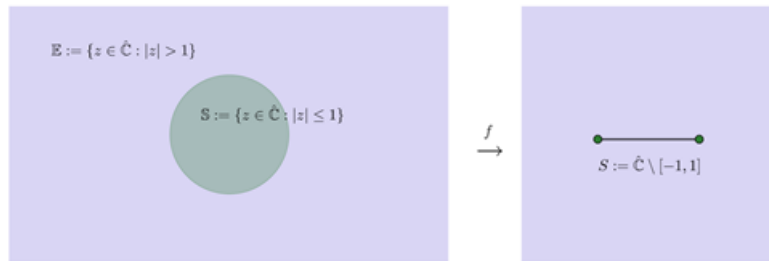
ESIMERKKI 15. Seuraavaa esimerkkiä rationaalisen funktion konformikuvauksesta kutsutaan Joukovskin kuvaukseksi. Rationaalifunktio f on määritelty Riemann-pallolla $\hat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

missä $f(\infty) := \infty$. Lisäksi funktio f kuvautuu seuraavasti Riemann-pallolla:

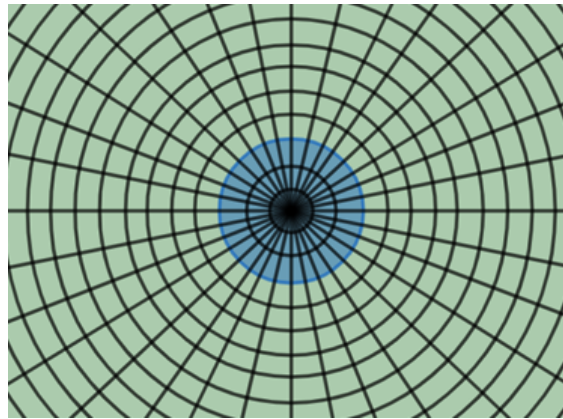
$$(7) \quad \begin{cases} f(0) & = \infty \\ f(i) & = 0 \\ f(-i) & = 0 \\ f(1) & = 1 \\ f(-1) & = -1 \end{cases}$$

Rajoittamalla funktio f joukkoon $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, voidaan joukko \mathbb{E} kuvata konformisti viivajoukoksi $S := \hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$. Funktiota f kutsutaan näillä rajoituksilla Joukovskin kuvaukseksi. Kuvassa 10 joukko \mathbb{E} näkyy vasemmalla violetilla ja avoin kiekko \mathbb{S} on vihreällä. Kuvassa oikealla näkyy viivajoukko S . Joukot \mathbb{E} ja S ovat yhdesti yhtenäisiä joukon $\hat{\mathbb{C}}$ osajoukkoja.



KUVA 10. Joukovski-kuvaus joukosta \mathbb{E} viivajoukoksi S .

Joukkoa \mathbb{E} voidaan havainnollistaa ympyröillä. Joukovskin kuvaus kuvaa nämä ympyrät ellipseiksi. Ympyrät ovat havainnollistettu kuvassa 11. Sinisellä pohjalla ja vihreällä pohjalla on omat ympyränsä.



KUVA 11. Joukko \mathbb{E} vihreällä ja avoin kiekko \mathbb{S} sinisellä.

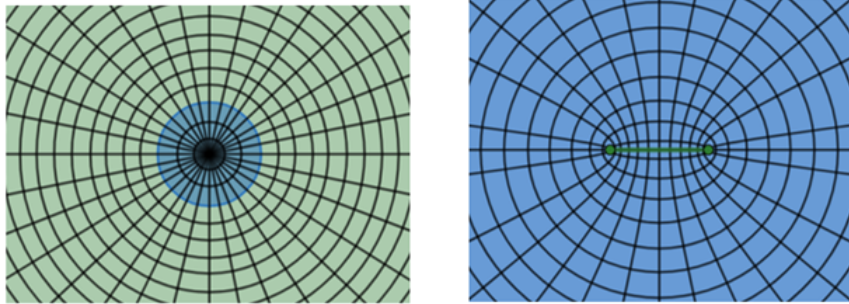
Ympyröiden kuvautuminen ellipseiksi johtuu siis siitä, että jos $z = e^w$ ja $w = x+iy$, niin

$$f(e^w) = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w}) = \cosh w = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

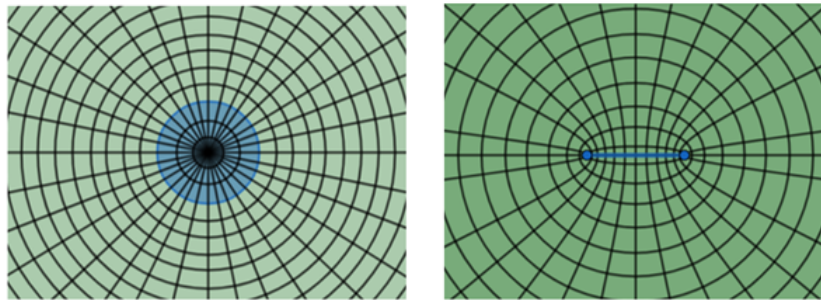
Olkoon $a = \cosh x \cos y$ ja $b = \sinh x \sin y$. Jos $x = C$ on vakio, niin $|e^w| = e^x = e^C$. Tämä vastaa sitä, että z on e^C -säteisellä origokeskeisellä ympyrällä. Lisäksi $\cosh w$ on ellipsillä

$$\left(\frac{a}{\cosh C}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sinh C}\right)^2 = 1$$

Vastaavasti, jos y on vakio, saadaan hyperbelejä. Siispä joukko S muodostuu siis ellipseistä, joiden polttopisteet ovat -1 ja 1 ja radiaaliset jaksoviivat kuvautuvat ortogonaaliseksi perheeksi hyperbelejä. Tämä havainnollistetaan kuvassa 12. Funktio f kuvaa myös avoimen kiekon \mathbb{S} konformisti joukoksi S , kuten havainnollistetaan kuvassa 13. Kuvassa vasemmalla näkyy lisäksi joukko \mathbb{E} vihreällä havainnollistettuna viivoin. Kuvauksessa ympyrät kuvautuvat hyperboleiksi ja avoin kiekko viivajoukoksi S .



KUVA 12. Kuvaus f kuvaa kuvassa vihreällä näkyvän joukon \mathbb{E} viivajoukoksi S .



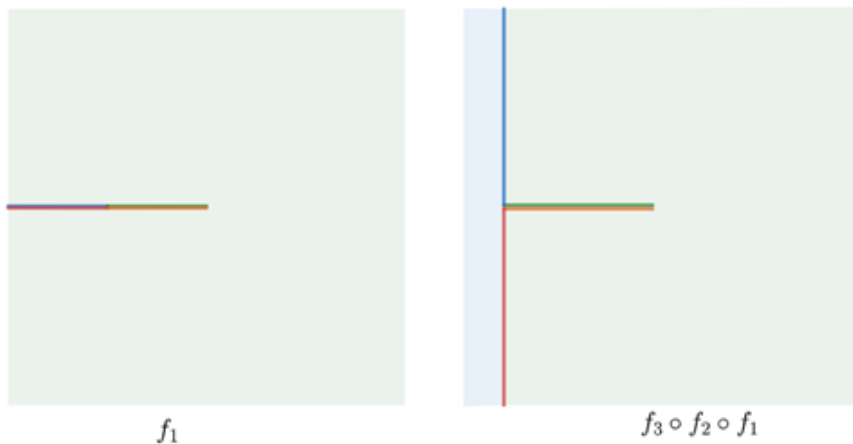
KUVA 13. Kuvaus f kuvaa kuvassa sinisellä näkyvän avoimen kiekon \mathbb{S} viivajoukoksi S .

Seuraavassa esimerkissä kuvataan sitä, miten funktio kuvaa ylemmän puolitason sellaiseksi puolitasoksi, josta on otettu jana $[0, i]$ pois.

ESIMERKKI 16. Funktio $w = f(z) := i\sqrt{1-z^2}$ kuvaa ylemmän puolitason ylemmän puolitason sellaiseksi ylemmäksi puolitasoksi, josta on otettu osa pois janaa $[0, i]$ pitkin. Tämä havainnollistetaan kuvassa 14.



KUVA 14. Kuvaus f kuvaa konformisti ylemmän puolitason viilletyksi ylemmäksi puolitasoksi.



KUVA 15. Kuvauksen $f(z) = i\sqrt{1-z^2}$ osiot f_1 ja $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ havainnollistettuna värein.

Kuvaus f on neljän funktion yhdistelmä $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, missä siis $f_1 : z \rightarrow -z^2$ kuvaa ylemmän puolitason kokotasoksi, josta on poistettu negatiivinen reaaliakseli, kuten näkyy kuvassa 15 vasemmalla. Kuvasta 14 näkee ylemmän puolitason ja reaaliakselin värityksen. Väritykset vastaavat toisiaan kuvissa. Funktion toinen osio $f_2 : z \rightarrow z + 1$ siirtää tason yhden yksikön oikealle. Tämä siirto näkyy sinisellä kuvassa 15. Kolmas osio $f_3 : z \rightarrow \sqrt{z}$ taittaa tason oikeanpuoleiseksi puolitasoksi taittaen osan väreillä hahmotetusta viivasta negatiiviselta reaaliakselilta ylös- ja alaspäin. Kuvauksen osuus $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ on havainnollistettu kuvassa 15 oikealla. Lopulta neljäs osa $f_4 : z \rightarrow iz$ kääntää koko kuvauksen kulman $\frac{\pi}{2}$ verran myötäpäivään ja lopputilanne näkyy kuvassa 14 oikealla.

Seuraavassa esimerkissä tutkitaan sinifunktion ominaisuuksia konformikuvauksena. Sinifunktiolla voidaan kuvata puolikas pystykaistale ylemmäksi puolitasoksi. Tämä tehdään hyödyntäen sinifunktion eksponenttesitystä.

ESIMERKKI 17. Sinifunktiolla voidaan kuvata puolikas kaistale

$$H := \{x + iy \in \mathbb{C} : -\pi/2 < x < \pi/2, y > 0\}$$

ylemmäksi puolitasoksi \mathbb{H} . Tätä varten esitämme sinifunktion $\sin(x + iy)$ hyödyntäen Eulerin kaavaa. Trigonometrinen funktioiden ominaisuuksien vuoksi voimme esittää seuraavasti.

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy).$$

Kosinille ja sinille pätevät seuraavat

$$\begin{cases} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin \theta \\ \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta \end{cases}$$

Sijoittamalla saadaan

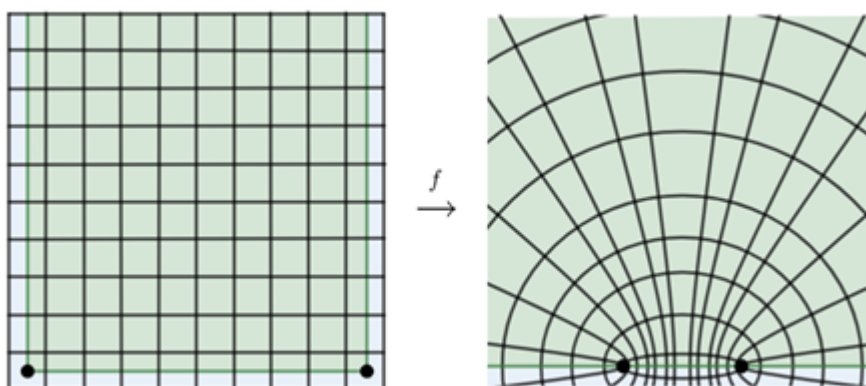
$$\begin{aligned} \sin(iy) &= \frac{e^{i \cdot iy} - e^{-i \cdot iy}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \\ &= i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(iy) &= \frac{e^{i \cdot iy} + e^{-i \cdot iy}}{2} \\ &= \frac{e^{-y} + e^y}{2} \end{aligned}$$

Siispä saadaan, että

$$\begin{aligned} \sin(x + iy) &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x \\ &= \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x. \end{aligned}$$

Tämä muoto on samankaltainen kuin esimerkissä 15, missä ellipsit kuvautuvat ympyröistä.



KUVA 16. Kuvaus f kuvaa puolikaistaleen ylemmäksi puolitasoksi.

Siis vaakasuorat segmentit, kun $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y = \text{vakio} = d > 0$, kuvautuvat semiellipseiksi, joiden polttopisteet ovat ± 1 ja joiden puoliakseleiden pituudet ovat $\frac{1}{2}(e^d + e^{-d})$, $\frac{1}{2}(e^d - e^{-d})$. Näiden semiellipsien perhe peittää ylemmän puolitason \mathbb{H} , kuten näkyy kuvassa 16. Toisin sanoen pystysuorat puolisuorat $x = \text{vakio} = c \in (-\pi/2, \pi/2)$, $y > 0$ kuvautuvat semihyperbeleiksi, jotka peittävät ylemmän puolitason. Nämä molemmat perheet näkyvät selkeästi kuvassa 16. Vasemalla kuvassa ruudukko kuvautuu hyperbolien ja ellipsien yhdistelmäksi oikealle. Kuvassa näkyvät myös pisteet jotka vasemmalla rajoittavat puolikaistaletta. Nämä pisteet kuvautuvat oikealle ylemmän puolitason reunaan.

2.5. Elliptiset integraalit

Olkoon R kahden muuttujan rationaalifunktio $R(x, y) = P(x, y)Q(x, y)$, missä P ja Q ovat muuttujista x ja y muodostuvia polynomiaaleja. Siispä epämääräiset integraalit

$$(8) \quad \int R(x, \sqrt{ax+b}) dx, \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

voidaan muokata rationaalifunktioiden integraaleiksi. Yleisesti näin ei voi tehdä polynomeille, joiden aste on suurempi kuin 2. Kuitenkin kolmannen ja neljännen asteen polynomien integraalit voidaan muodostaa joksikin seuraavista kolmesta reaalisesta elliptisestä integraalista.

$$(9) \quad \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z-k^2z^2)}} \int \frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}} dz, \int \frac{dz}{(1-hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Seuraavassa käydään läpi kompleksiset versiot ylläolevista elliptisistä integraaleista.

Olkoon $0 < k < 1$ reaaliluku. Tarkastellaan funktiota $z \rightarrow f(z; k)$, jolle

$$f(e; k) := \frac{1}{\sqrt{(a - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \quad \text{Im}z \geq 0,$$

missä valitaan sellainen jatkuva neliöjuuren haara, että $f(0; k) = 1$. Funktio $z \mapsto f(z; k)$ on analyyttinen ylemmässä puolitasossa \mathbb{H} ja toteuttaa seuraavan $f(\pm 1; k) = f(\pm 1/k; k) = \infty$. Sen primitiiviä

$$F(z; k) := \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}}, \quad \text{Im}z > 0$$

kutsutaan ensimmäisen tyyppin elliptiseksi integraaliksi, jonka modulus on k . Jokaiselle $k \in (0, 1)$ elliptinen integraali $z \rightarrow F(z; k)$ on analyyttinen ylemmässä puolitasossa \mathbb{H} ja sillä on jatkuva laajennus reaalisuoralle F . Yksinkertaistaaksemme jätämme modulusen k mainitsematta. Tarkastellessamme elliptisen integraalin F kuvausominaisuuksia, aloitamme origosta, missä integraalilla F on nolla. Kun z liikkuu positiivista reaaliakselia nollassa kohti lukua 1, funktio f on positiivinen, joten F on reaalinen ja kasvaa monotonisesti. Kun z lähenee pistettä $z = 1$, integraalin F arvo lähenee rajaa

$$(10) \quad K(k) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

jota kutsutaan kokonaiseksi ensimmäisen tyyppin elliptiseksi integraaliksi, jonka modulus on k . Kun z liikkuu pidemmälle reaaliakselilla, funktion

$$g(z) := (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$$

arvosta tulee negatiivinen. Koska valitsimme neliöjuuren sellaisen haaran, jossa f on analyyttinen ylemmässä puolitasossa, liikumme pisteen 1 ympäri vastapäivään pientä puoliympyrää pitkin ja tapahtuu seuraavaa: funktion $g(z)$ argumentti vähenee nollassa lukuun $-\pi$ siten, että funktion f argumentti kasvaa nollassa lukuun $\pi/2$. Siispä piste $f(z)$ siirtyy positiivista imaginaariakselia kohti kun $1 < z < 1/k$. Kun piste z liikkuu intervallin $(1, 1/k)$ läpi, $F(z)$ kasvu on yhtä suuri kuin iK' , missä

$$(11) \quad K'(k) := \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2 x^2)}} = K(\sqrt{1 - k^2}),$$

siten, että $F(z)$ liikkuu segmentin $[K, K + iK'$ läpi. Kun z menee pisteen $1/k$ ohi, toinen tekijä $(1 - k^2 z^2)$ vaihtaa etumerkkiään, piste $F(z)$ tekee toisen $\pi/2$ suuruisen käännöksen ja alkaa liikkumaan kohti negatiivista reaaliakselia. Jos $z > 1/k$ funktion $f(z)$ arvot ovat negatiivisia siten, että

$$F(z; k) = K + iK' - \int_{1/k}^z \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)(k^2 x^2 - 1)}}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad z \geq 1/k,$$

missä neliöjuuri ilmaisee päähaaraa. Kun $z \rightarrow +\infty$, epäoleellinen integraali suppenee ja muuttujanvaihdolla $t := 1/(kx)$ näemme, että

$$\int_{1/k}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)(k^2 x^2 - 1)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}} = K(k).$$

Tämän seurauksena, kun z aloittaa kohdasta $1/k$ ja lähenee kohti $+\infty$, piste $F(z)$ liikkuu pitkin segmenttiä $[K + iK', iK']$ pisteestä $K + iK'$ pisteeseen iK' .

Voimme tutkia samalla tavalla mitä tapahtuu, kun piste z liikkuu negatiivista reaaliakselia pitkin pisteestä 0 kohti $-\infty$: F kuvaa segmentit $[0, -1]$, $[-1, -1/k]$ ja $[-1/k, -\infty]$ segmenteiksi $[0, -K]$, $[-K, -K + iK']$ ja $[-K + iK', iK']$. Siispä, kun piste z liikkuu reaaliakselia pitkin $-\infty \rightarrow +\infty$, $F(z)$ liikkuu monotonisesti kerran suorakulmion R rajoja pitkin sen ympäri vastapäivään.

$$(12) \quad R(k) := \{z \in \mathbb{C} : -K < \operatorname{Re} z < K, 0 < \operatorname{Im} z < K'\}$$

Nyt kun tiedämme miten F käyttäytyy reunalla, ei meidän tarvitse tutkia ylemmän puolitason sisäpuolta, sillä kaiken tarvitsemamme saamme seuraavasta lauseesta.

LAUSE 18. *Olkoon $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen joukossa $B(0, 1)$ ja jatkuva joukossa $\overline{B}(0, 1)$. Jos f on injekttiivinen joukossa $\partial B(0, 1)$, niin $J := f(\partial B(0, 1))$ on Jordanin käyrä ja f kuvaa ympyrän $B(0, 1)$ konformisti joukoksi $G := \operatorname{int} J$.*

Tämä todistetaan teoksessa [6] sivulla 288.

Seuraavaksi tarkastelemme lausetta, joka käsittelee ylemmän puolitason kuvautumista suorakulmioksi.

LAUSE 19. *Elliptinen integraali $F(\cdot; k)$ kuvaa ylemmän puolitason \mathbb{H} konformisti suorakulmioksi $R(k)$ yhtälön 12 mukaan, missä vakiot K ja K' ovat määritellyt kohdissa 10 ja 11.*

Tämä todistetaan teoksessa [6] sivulla 298.

Konformiset automorfismit

Seuraavassa kuvaillaan kaikki konformiset bijektiot $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ja $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$. Tällaisia kuvauksia kutsutaan konformisiksi automorfismeiksi.

3.1. Kompleksitason automorfismit

Jos f on analyyttinen kuvaus, joka ei ole vakiofunktio, niin se kuvaa avoimen joukon avoimeksi joukoksi avoimen kuvausperiaatteen (Lause 10) mukaan. Univalentit konformit kuvaukset joukosta D joukoksi G ovat bijektiivisiä analyyttisiä funktioita $f : D \rightarrow G$.

MÄÄRITELMÄ 20. Olkoot D ja G kompleksitason avoimia joukkoja. Jos on olemassa konforminen bijektio $D \rightarrow G$, joukot D ja G ovat konformisesti ekvivalentteja. Konforminen automorfismi joukosta D on konformikuvaus joukosta D joukoksi D .

Bijektiivisen analyyttisen funktion $f : D \rightarrow G$ käänteisfunktio $f^{-1} : G \rightarrow D$ on bijektiivinen analyyttinen kuvaus. Siten konforminen ekvivalenssi on ekvivalenssirelaatio.

Seuraavaksi tarkastellaan lausetta, mikä käsittelee erilaisten alueiden konformisia automorfismeja. Käsitellään Riemann-palloa, kompleksitasoa ja yksikkökiekkoa. Riemann-pallolla eli laajennetulla kompleksitasolla konformiset automorfismit määritellään Möbius-kuvauksen avulla. Kompleksitasolla konformiset automorfismit määritellään lineaarisella funktiolla ja yksikkökiekolle ne määritellään Blaschke-kertoimella.

Seuraavaksi käsitellään konformisten automorfismien määrittelyjä.

LAUSE 21. *Olkoon D jokin seuraavista määrittelyjoukoista: Riemann-pallo, kompleksitaso tai yksikkökiekko. Tällöin konformiset automorfismit joukosta D määritellään seuraavien funktioiden avulla.*

- (i) Möbius kuvaus $\frac{az+b}{cz+d}$ missä $ad \neq bc$, jos $D = \hat{\mathbb{C}}$
- (ii) lineaarinen kompleksiaffini funktio $az + b$ missä $a \neq 0$, jos $D = \mathbb{C}$
- (iii) Blaschke kerroin $\frac{c(z-a)}{1-\bar{a}z}$ missä $|a| < 1$ ja $|c| = 1$, jos $D = \mathbb{D}$.

Tämä todistetaan teoksessa [6] luvussa 6.2. Kompleksiaffinit funktiot käsiteltiin aiemmin luvussa 2.2.

LAUSE 22. *Olkoon $z_0 \in D$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. On olemassa täsmälleen yksi konforminen automorfismi joukosta D , jolle pätee*

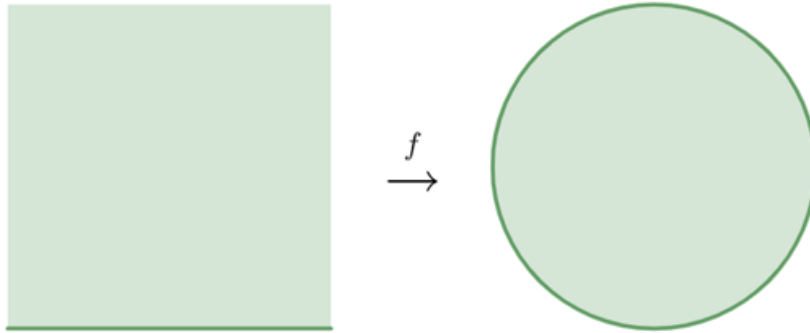
$$(13) \quad f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha$$

erityisesti $f(z) = c \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}$, missä $c := e^{i\alpha}$.

TODISTUS. Mikä tahansa automorfismi joukosta D , kun $f(z_0) = 0$, on muotoa $f(z) = c \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}$. Koska $f'(z_0) = \frac{c}{1-|z_0|^2}$ ja $|c| = 1$, ehto $\arg f'(z_0) = \alpha$ pätee jos ja vain jos $c = e^{i\alpha}$. □

Edeltävästä saadaan konformit automorfismit kiekolle, jolle automorfismit määritellään Blaschke-kertoimen mukaisesti seuraavanlaisesti.

$$f(z) = c \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, |c| = 1, |z_0| < 1$$

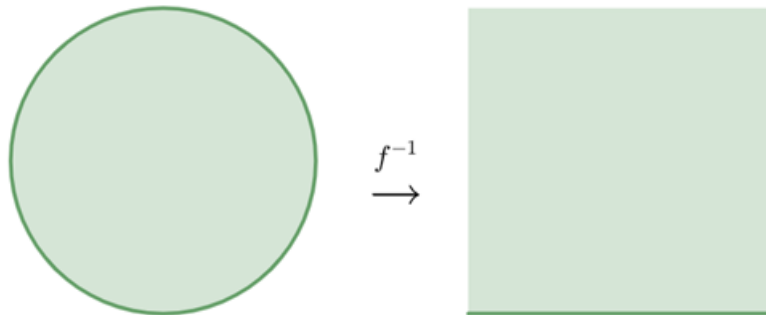


KUVA 17. Kuvaus f kuvaa ylemmän puolitason \mathbb{H} yksikkökiekoksi \mathbb{D} .

Cayleyn kuvaus on konformikuvaus ylemmältä puolitasolta \mathbb{H} yksikkökiekoksi \mathbb{D}

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

Tätä havainnollistetaan kuvassa 17.



KUVA 18. Käänteiskuvaus f^{-1} kuvaa yksikkökieken \mathbb{D} ylemmäksi puolitasoksi \mathbb{H} .

Cayleyn kuvaus kuvaa pisteen i nollassa ja toteuttaa differentiaalin $f'(i) = -\frac{i}{2}$. Lauseen 22 mukaisesti mikä tahansa konformikuvaus joukosta \mathbb{H} joukoksi \mathbb{D} on Cayleyn kuvauksen ja jonkin Blaschke-kertoimen yhdistetty kuvaus. Kuvassa 18 on havainnollistettu funktion f käänteiskuvausta f^{-1} ja yksikkökieken kuvautumista ylemmäksi puolitasoksi.

3.2. Möbius-kuvaus

Möbius-kuvaukset ovat laajennetun kompleksitason $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ konformikuvauksia $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

millä tahansa $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, joille $ad - bc \neq 0$. Nämä kuvaukset ovat luonteeltaan geometrisia. Ne kuvaavat ympyrät ympyröiksi tai suoriksi, jotka tulkitaan äärettömyyspisteen kautta kulkeviksi ympyröiksi. [5]

LAUSE 23. *Möbius-kuvaukset kuvaavat Riemannin pallon yleistetyt ympyrät yleistyiksi ympyröiksi Riemannin pallolla.*

Tulos todistetaan teoksessa [5] sivulla 398. Jokainen Möbius-kuvaus on yhdistetty kuvaus yksinkertaisempia Möbius-alkaiskuvauksia. Näitä on neljää eri tyyppiä: siirto-kuvaus T_b , kierto-kuvaus R_θ ja venytyskuvaus L_λ sekä inversio $f(z) = z^{-1}$.

$$\begin{cases} T_b(z) = z + b, \text{ kun } b \in \mathbb{C} \\ R_\theta(z) = e^{i\theta}z, \text{ kun } \theta \in \mathbb{R} \\ L_\lambda(z) = \lambda z, \text{ kun } \lambda > 0 \\ I(z) = z^{-1}, \text{ kun } z \neq 0, \infty \end{cases}$$

Kuvauksille T_b, R_θ, L_λ $\infty \rightarrow \infty$, mutta kuvaukselle I pätee $I(\infty) = 0$ ja $I(0) = \infty$. Olkoon esimerkiksi $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius-kuvaus. Jos $c = 0$, f on siirto-, kierto- ja venytyskuvauksien yhdistelmä. Jos $c \neq 0$, voimme muokata kuvausta seuraavasti asettamiemme muuttujien avulla

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{1}{c} \left(\frac{azc + ad + bc - ad}{cz + d} \right) \\ &= \frac{1}{c} \left(a + \frac{bc - ad}{zc + d} \right) \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{zc^2 + cd} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \end{aligned}$$

Nyt voimme suoraan nähdä, että kuvaus on viiden tai vähemmän alkeiskuvauksen yhdistetty kuvaus ja voimme kirjoittaa funktion f alkeiskuvausten T_b, R_θ, L_λ ja I avulla seuraavasti.

$$\begin{aligned} f(z) &= T_b(L_\lambda(I(T_b(z)))) \\ &= \lambda(z + b)^{-1} + \tilde{b} \end{aligned}$$

missä $b, \tilde{b} \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ ja $z \neq 0, \infty$.

LAUSE 24. Millä tahansa identtisestä kuvauksesta poikkeavalla Möbius-kuvauksella on korkeintaan kaksi kiintopistettä. Jos $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, missä $ad-bc = 1$, niin funktiolla f on täsmälleen yksi kiintopiste, jos $a+d = \pm 2$ ja täsmälleen kaksi kiintopistettä muuten.

TODISTUS. Oletetaan, että f on normaalistettu $ad-bc = 1$.

1. Jos $c = 0$, niin $d \neq 0$ ja $f(z) = (az+b)/d$ on lineaarifunktio. Kiintopisteen yhtälölle $f(z) = z$ ei ole ratkaisua $z \in \mathbb{C}$ jos $d = a$ ja vain ja ainoastaan yksi ratkaisu $z = b/(d-a)$ muulloin. Koska $ad-bc = 1$, $d = a$ jos ja vain jos $d = a = 1$ tai $d = a = -1$. Molemmissa tapauksissa funktiolla f on kiintopiste äärettömässä.

2. Jos $c \neq 0$, ei pisteet $z = \infty$ tai $z = -d/c$ kumpikaan ole funktion f kiintopisteitä. Muille pisteille z yhtälö $f(z) = z$ vastaa siis seuraavaa

$$\begin{aligned} f(z) &= z \\ z &= \frac{az+b}{cz+d} \\ cz^2 + dz &= az + b \\ cz^2 + dz - az - b &= 0 \\ cz^2 - (a-d)z - b &= 0 \end{aligned}$$

Jos $a+d \neq \pm 2$, toisen asteen yhtälöllä on kaksi erillistä ratkaisua toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan mukaisesti.

$$(14) \quad z_{1/2} = \frac{1}{2c}((a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}).$$

Jos taas $a+d = \pm 2$, sillä on yksi tuplaratkaisu $z_1 = (a-d)/(2c)$. □

Seuraus 25 seuraa suoraan lauseen 24 todistuksesta.

SEURAUS 25. Jos Möbius-kuvauksella f on vain yksi kiintopiste ∞ , niin $f(z) = z + b$, missä $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jos sillä on kiintopisteet 0 ja ∞ , niin $f(z) = az$, missä $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

LAUSE 26. Olkoon (z_1, z_2, z_3) järjestetty kolmikko siten, että $z_1 \neq z_2 \neq z_3$ ja $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Tällöin on olemassa Möbius kuvaus f siten, että $f(z_1) = 1$, $f(z_2) = 0$ ja $f(z_3) = \infty$

TODISTUS. Olkoon kaikki annetut kolme pistettä äärellisiä. Siispä

$$f(z) = \frac{(z_1 - z_3)(z - z_2)}{(z_1 - z_2)(z - z_3)}$$

on Möbius-kuvaus. Jos jokin pisteistä z_1, z_2 tai z_3 on ∞ , voimme määrittää funktion f siten, että annamme sen pisteen lähestyä ääretöntä. Tarkemmin sanottuna siis seuraavasti

$$\begin{cases} f(z) = \frac{z-z_2}{z-z_3}, & \text{kun } z_1 = \infty \\ f(z) = \frac{z_1-z_3}{z-z_3}, & \text{kun } z_2 = \infty \\ f(z) = \frac{z-z_2}{z_1-z_2}, & \text{kun } z_3 = \infty \end{cases}$$

Osoitetaan seuraavaksi yksikäsitteisyys. Olkoot nyt siis funktiot f ja g Möbius-kuvauksia, joilla on annetut ominaisuudet. Silloin $h = f^{-1} \circ g$ on Möbius-kuvaus, jolla on kiintopisteet z_1, z_2 ja z_3 . Lauseen 24 pohjalta tiedetään kuitenkin, että h onkin identiteettikuvaus. Tämä tarkoittaa, että $g = (f^{-1})^{-1} = f$. \square

SEURAUUS 27. *Olkoon (z_1, z_2, z_3) ja (w_1, w_2, w_3) järjestettyjä kolmikoita siten, että pisteet ovat eri pisteitä kompleksilukujoukossa. Silloin on olemassa Möbius-kuvaus f siten, että $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$ ja $f(z_3) = w_3$.*

Tämä seuraus seuraa suoraan lauseesta 26. Seuraavaksi käsitellään kaksoissuhteen käsitettä.

MÄÄRITELMÄ 28. Olkoon z_0, z_1, z_2, z_3 pisteitä pallolla $\hat{\mathbb{C}}$ ja oletetaan, että joukko $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ sisältää ainakin kolme eri pistettä. Silloin

$$(15) \quad [z_0, z_1, z_2, z_3] := \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

kutsutaan pisteiden z_0, z_1, z_2, z_3 kaksoissuhteeksi.

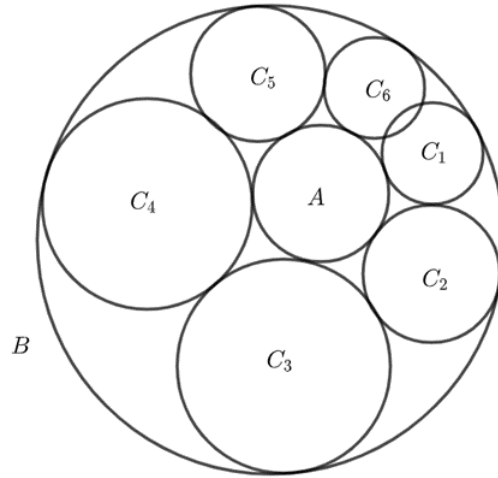
LAUSE 29. *Jos f on Möbius kuvaus, niin $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$ kaikille järjestetyille nelikoille (z_1, z_2, z_3, z_4) toisistaan eroaville kompleksilukujoukon pisteille.*

Tämä todistetaan teoksessa [5] sivulla 396. Konformiset automorfismit Riemann pallosta ovat täsmälleen Möbius-kuvauksia (Lause 21).

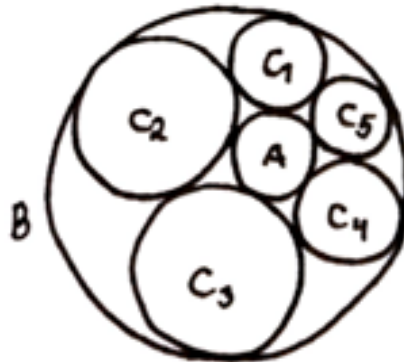
$$(16) \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0.$$

3.3. Steinerin porismi

Steinerin porismiksi kutsutaan eräänkaltaista tilannetta erikeskisten ympyröiden kanssa. Porismi tarkoittaa matemaattista lausetta tai seurausta. Steinerin porismi on nimetty matemaatikko Jakob Steinerin. Alla olevissa kuvissa 19 ja 20 esitellään kaksi erilaista tilannetta toisiaan sivuavista ympyröistä. Kuvassa 19 näkyy erikeskiset toisiaan leikkaamattomat ympyrät A ja B sekä ympyräketju C_1, C_2, \dots ympyrään C_6 asti siten, että ympyrät sivuavat toisiaan ja myös ympyröitä A ja B . Kuitenkin ympyrä C_6 menee ympyrän C_1 päälle. Kuva 20 taas esittää tilannetta, missä on valittu eri ympyrät A ja B ja saatu ympyräketju sulkeutumaan siten, että ympyrä C_n sivuaa ympyrää C_1 . Tässä esimerkissä $n = 5$. Mikä tahansa muuttujan n arvo on kuitenkin mahdollinen, kunhan valitaan oikeat ympyrät A ja B . [4]

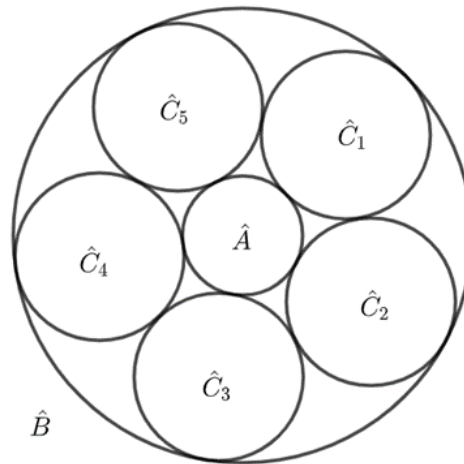


KUVA 19. Ympyräketju ei sulkeudu.

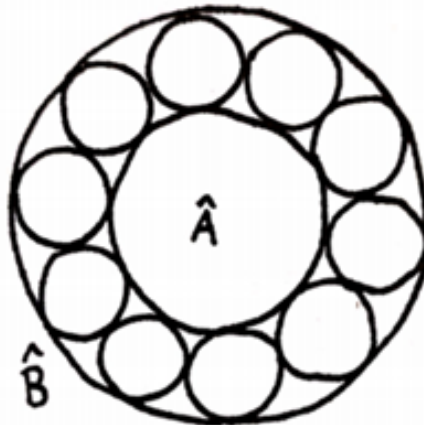


KUVA 20. Ympyräketju sulkeutuu.

Jakob Steiner selvitti, että, jos ketju sulkeutuu yhdellä ensimmäisen ympyrän valinnalla C_1 valituilla ympyröillä A ja B , se sulkeutuu kaikilla C_n . Jos A ja B ovat samankeskisiä, voimme valita kuinka monta toisiaan sivuavaa ympyrää tahdomme, kunhan valitsemme oikeat ympyrät A ja B . Mitä enemmän ympyröitä C_n tahdomme, sitä kapeampi tulee olla alueen $B \setminus A$ kuten nähdään kuvista 21 ja 22. Tarkastelemme kuvia 19 ja 20. Ympyrät A ja B ovat sisäkkäiset toisiaan leikkaamattomat ei-samankeskiset ympyrät. Toisiaan sivuavien ympyröiden ketju C_1, C_2, \dots sivuaa myös ympyröitä A ja B , mutta kuvassa 19 viimeinen ympyrä on limittäin ensimmäisen ympyrän kanssa eli ympyräketju ei sulkeudu. Ketjun sulkeutuminen riippuu ympyröiden A ja B valinnoista.

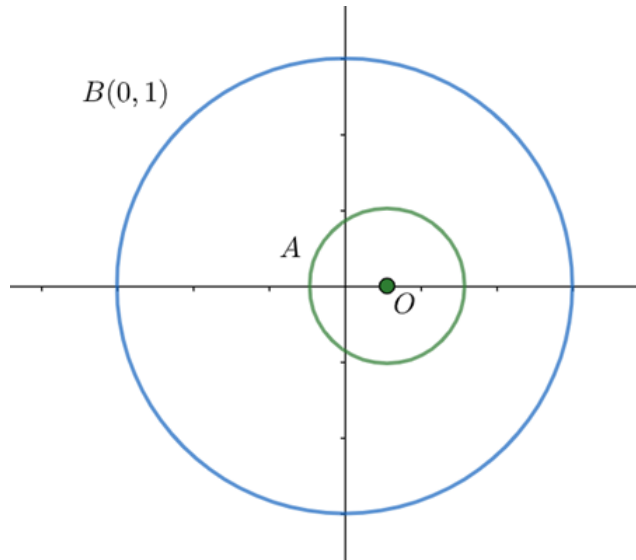


KUVA 21. Ympyrät A ja B kuvattu samankeskeisiksi ympyröiksi \hat{A} ja \hat{B} .



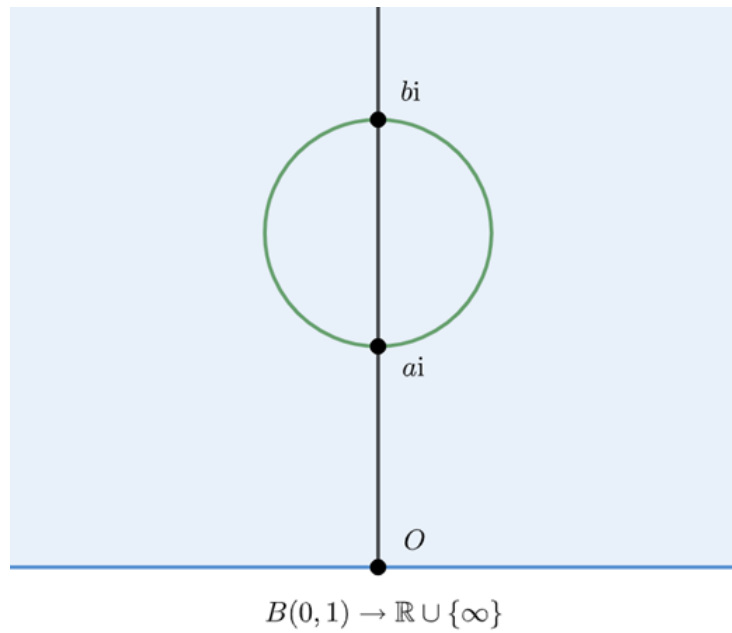
KUVA 22. Alue $B \setminus A$ on kapeampi, jos ympyröiden C_n määrää nostetaan.

Jotta voisimme selittää milloin ympyräketju sulkeutuu ja milloin ei, meidän tulee hyödyntää tietoa, että mitkä tahansa kaksi, toisiaan leikkaamatonta, ei-samankeskistä ympyrää voidaan kuvata samankeskeisiksi ympyröiksi sopivin Möbius-kuvauksin. Tämän lisäksi tarvitsemme tulosta 23, jonka mukaan Riemannin pallolla Möbius-kuvaukset kuvaavat ympyrät ympyröiksi. Olkoon ympyrät A ja B ympyröitä kompleksitasolla. Oletetaan, että ulompi ympyrä B on $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Siis ympyrä on origokeskinen yksikköympyrä. Voidaan olettaa, että sisemmän ympyrän A keskipiste on reaaliakselilla. Tilanne näkyy kuvassa 23.

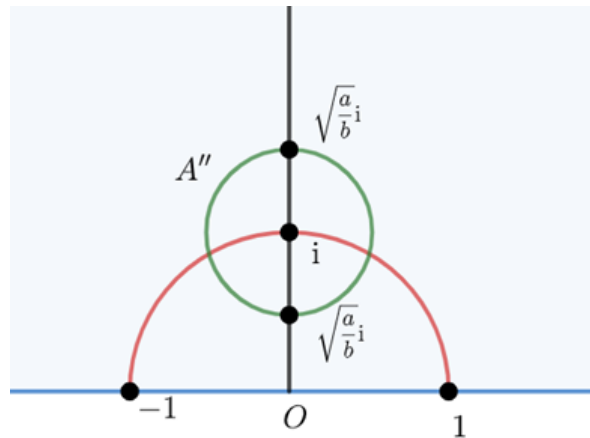


KUVA 23. Ympyrät A ja B ovat erikeskisiä kompleksitason sisäkkäisiä ympyröitä.

Cayley-kuvauksen käänteiskuvaus kuvaa ympyrän B ylemmäksi puolitasoksi eli tässä tapauksessa $B \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Tämä näkyy kuvassa 24. Koska $1 = (ra)(rb) = r^2 ab$ on $r = \frac{1}{\sqrt{ab}}$, jolloin ympyrä A voidaan kuvata kuvauksella $z \rightarrow \frac{z}{\sqrt{ab}}$ ympyräksi, joka on lähempänä reaaliakselia, kuten näkyy kuvassa 25.



KUVA 24. Ympyrä B on kuvattu ylemmäksi puolitasoksi $B \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

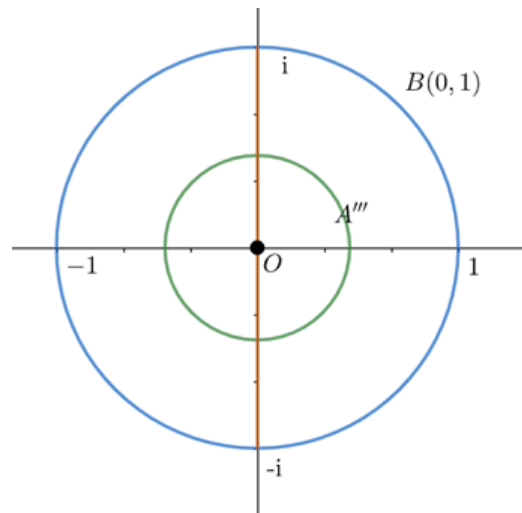


KUVA 25. Ympyrä A'' siirto- ja venytyskuvauksen jälkeen.

Koska Cayleyn kuvauksen lauseke on $z \rightarrow \frac{z-i}{z+i}$, saadaan

$$\begin{cases} i & \mapsto 0 \\ 0 & \mapsto -1 \\ \infty & \mapsto 1 \\ 1 & \mapsto -i \\ -1 & \mapsto i \end{cases}$$

Siispä ympyrät A ja B saadaan kuvattua samankeskisiksi, kuten näkyy kuvassa 26.



KUVA 26. Cayley-kuvauksella ympyrät A''' ja B saadaan kuvattua samankeskisiksi.

Kuvaamme nyt siis ympyrät A ja B kahdeksi samankeskiseksi ympyräksi \hat{A} ja \hat{B} , kuten kuvassa 21. Möbiuskuvaukset ovat konformisia ja kuvaavat ympyrät ympyröiksi. Siis kuvan 20 toisiaan ja ympyröitä A ja B sivuavat viisi ympyrää C_1, \dots, C_5 kuvautuvat viideksi toisiaan ja ympyröitä \hat{A} ja \hat{B} sivuaviksi ympyröiksi $\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_5$. Tämä näkyy kuvassa 21. Ympyrät \hat{A} ja \hat{B} ovat samankeskisinä sellaisia, että ympyrät

$\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_5$ ovat viisi samankokoista ympyrää. Nämä ympyrät muodostavat ympyräketjun, joka mahtuu täsmälleen ympyröiden \hat{A} ja \hat{B} leikkaukseen, kuten kuvassa 21. Jos valitsemmekin toisen ympyrän C'_1 ympyräketjun ensimmäiseksi ympyräksi siten, että ketju ei sulkeutuisikaan toisin kuin kuvassa 20, Möbius-kuvaus kuvaisi ympyräketjun välttämättä sellaiseksi, että se ei sulkeutuisi myöskään kuvan 21 kaltaisessa tilanteessa. Eli vaikka ympyrät A ja B kuvattaisiin samankeskisiksi sisäkkäisiksi ympyröiksi \hat{A} ja \hat{B} , nämä ympyröiden leikkaukseen kuvautuvat toisiaan ja ympyröitä \hat{A} ja \hat{B} sivuavat ympyrät $\hat{C}'_1, \dots, \hat{C}'_5$ muodostaisivat sellaisen ympyräketjun, joka ei sulkeudu. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä mikä tahansa toisiaan ja ympyröitä \hat{A} ja \hat{B} sivuavien ympyröiden \hat{C}_n valinta, johtaisi sulkeutuvaan ympyräketjuun, joka sisältää viisi ympyrää. Siispä, jos ympyräketju sulkeutuu yhdellä ympyrän C_n valinnalla, mikä tahansa ympyrän C_n valinta johtaa ympyräketjun sulkeutumiseen.

Kirjallisuutta

- [1] LARS V. AHLFORS: *Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978.
- [2] EBERHARD FREITAG AND ROLF BUSAM: *Complex Analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2009.
- [3] DAVID MUMFORD, CAROLINE SERIES, DAVID WRIGHT: *Indra's Pearls, The Vision of Felix Klein*. Cambridge University Press 2002.
- [4] TRISTAN NEEDHAM: *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press Inc., New York, 1997.
- [5] BRUCE P. PALKA: *An introduction to complex function theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] E. WEGERT: *Visual Complex Functions: An introduction with Phase Portraits*. Springer Basel, Germany, 2012.