Matriisin Jordanin muoto

Maryia Artemenko

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2020

Sisältö

Johdanto

Matriisi on yksi tärkeimmistä algebran käsitteistä. Ensimmäistä kertaa matriisi mainittiin muinaisessa Kiinassa nimellä ”maaginen neliö”. Aluksi matriisien pääasiallinen sovellus oli lineaaristen yhtälöiden ratkaiseminen. Erillisenä teoriana matriisiteoriaa kehitettiin aktiivisesti 1800-luvun puolivälissä irlantilaisen matemaatikon ja fyysikon William Rowan Hamiltonin ja englantilaisen matemaatikon Arthur Cayleyn teoksissa. Matriisiteorian perustulokset kuuluvat myös saksalaisille matemaatikoille Karl Weierstrassille ja Ferdinand Georg Frobeniuksille, ja ranskalaiselle matemaatikolle Marie Enmont Camille Jordanille.

Lineaarialgebrassa matriisi määritellään lineaarikuvauksen esitykseksi. Olkoon $T : V \to W$ vektoriavaruuksien välinen lineaarikuvaus ja olkoot S ja S' vektoriavaruuksien V ja W kannat. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen kuvausta T vastaava matriisi $\mathsf{A}_{SS'}$ kantojen S ja S' suhteen. Jos matriisit A ja B ovat samaan kuvaukseen liittyvät matriisit, niin ne on konjugoitu kääntyvän matriisin P avulla eli $\mathsf{B} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P}$. Matriisien samankaltaisuus jakaa koko matriisijoukon konjugaattimatriisien luokkiin, jotka eivät leikkaa toisiaan. Tämän yhteydessä nousee usein esiin vakiomuotoisen edustajan valitseminen kussakin samankaltaisien matriisien luokassa. On olemassa monta erilaista tapaa tällaisten vakiomuotoisten edustajien valitsemiseksi. Tässä työssä tarkastellaan yhtä tärkeimmistä tällaisten edustajien tyypeistä: Jordanin muotoa olevat matriisit. Pohditaan matriisin Jordanin muotoa käyttämällä pohjimmiltaan algebrallisia käsitteitä ja keinoja.

Tutkielman ensimmäinen luku sisältää lineaarialgebran peruskäsitteitä, kuten ryhmä, rengas, kunta ja vektoriavaruus sekä vektoriavaruuden kanta ja dimensio. Tässä luvussa esitellään myös polynomin käsite ja polynomien jakoalgoritmi.

Tutkielman toinen luku sisältää matriisiteorian esitietoja kuten matriisien tyyppejä ja muotoja, laskutoimituksia matriisien välillä, matriisin determinantteja ja sen sovelluksia sekä ominaisarvoteoriaa ja matriisien similaarisuutta. Luvun lopussa määritellään minimipolynomin käsite. Toisen luvun neljännessä kappaleessa tulokset esitetään ilman todistuksia. Oletetaan, että lukija tuntee determinantin käsitteen, sen ominaisuudet ja sovellukset. Lisätietoja tästä aiheesta löytyy esimerkiksi lähteestä [3] luvusta 3.

Kolmas luku on tutkielman pääosa, jossa määritellään matriisin Jordanin muoto ja Jordan hajotelman muodostaminen. Luvun alussa määritellään polynomimatriisi kunnan K suhteen. Analogisesti polynomien kanssa otetaan käyttöön polynomimatriisien jakoalgoritmi ja jäännöslause polynomimatriiseille. Polynomimatriisin invarianttien polynomien avulla rakennetaan polynomimatriisin Smithin normaalimuoto. Sitten osoitetaan, että jokaisella neliömatriisilla on olemassa ensimmäinen luonnollinen muoto. Tähän asti tarkastellaan matriisit minkä tahansa kunnan K suhteen. Lisäyrityksissä yksinkertaistaa vielä enemmän matriisin ensimmäistä normaalimuotoa kunnalla, jolla invariantit polynomit määritellään, alkaa olla tärkeä rooli, koska lisäpelkistys on mahdollista vain invarianttien polynomien täydellisen hajoamisen tapauksessa. Siksi seuraavissa luvun kohdissa tarkastelua jatketaan kompleksilukujen kunnan suhteen. Lisäksi kompleksilukujen kunnalla on tärkeä rooli sovelletuissa tehtävissä. Luvun lopussa johdetaan matriisin toinen normaali muoto ja Jordanin muoto alkeistekijoiden avulla.

Merkintöjä

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ luonnolliset luvut
- $\#(A)$ joukon A alkioiden lukumäärä
- R rengas
- $R[x]$ polynomirengas
- K kunta
- $\mathcal{M}_{mn}(K)$ K-kertoimisten kokoa $m \times n$ olevien matriisien joukko
- $\mathsf{A} \approx \mathsf{B}$ matriisit A ja B ovat similaarisia
- $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$ matriisit A ja B ovat ekvivalentteja
- p_{A} matriisin A karakteristinen polynomi
- m_{A} matriisin A minimipolynomi

1 Perusasioita

Tämän luvun tarkoituksena on esitellä käsitteitä, joita tarvitaan matriiseja tutkittaessa. Tämän luvun tärkeät käsitteet ovat polynomit ja erityisesti polynomien jaollisuus. Luvussa käsiteltävien asioiden pohjana on käytetty lähteitä [2], [3] ja [1].

1.1 Ryhmät, kunnat ja renkaat

Laskutoimituksella varustettu joukko $(G, *)$ on *ryhmä*, jos

- kaikilla $a, b, c \in (G, *)$ pätee $(a * b) * c = a * (b * c)$ (laskutoimitus $*$ on assosiatiivinen),
- on sellainen $e \in (G, *)$, että kaikille $a \in (G, *)$ pätee $a * e = e * a = a$ (laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio) ja
- kaikille $a \in (G, *)$ on sellainen $a^{-1} \in (G, *)$, että $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (jokaisella joukon $(G, *)$ alkiolla on käänteisalkio).

Lisäksi, jos ryhmän laskutoimitus on kommutatiivinen (eli $a * b = b * a$), niin ryhmää $(G, *)$ kutsutaan *kommutatiiviseksi* tai *Abelin ryhmäksi*.

Esimerkki 1.1.1. Laskutoimituksella varustetut joukot $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ovat ryhmiä. Joukon $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ainoat alkiot, joilla on käänteisalkio kertolaskun suhteen, ovat 1 ja -1, joten joukko $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ei ole ryhmä.

Olkoon R epätyhjä joukko, jolla on määritelty kaksi assosiatiivista laskutoimitusta $+$ ja $\cdot$. Kolmikko $(R, +; \cdot)$ on *rengas*, jos

- $(R, +)$ on Abelin ryhmä,
- kaikille $a, b, c \in (R, +, \cdot)$ pätee $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ ja $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ eli kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen,
- kertolaskulla on neutraalialkio $1 = 1_R \in R$.

Joukkoa A sanotaan laskutoimituksella varustetun joukon $(B, *)$ vakaaksi osajoukoksi, jos $A \subset B$, $A \neq \varnothing$ ja kaikilla $a, a' \in A$ pätee $a * a' \in A$.

Olkoot R rengas ja joukko S joukon R vakaa osajoukko yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen. Joukko S on renkaan R *alirengas*, jos

- joukon S neutraalialkio yhteenlaskun suhteen on myös renkaan R neutraalialkio yhteenlaskun suhteen (eli $1_S = 1_R$),
- joukko S varustettuna indusoiduilla laskutoimituksilla on rengas.

Lause 1.1.2. (Alirengastesti.) *Olkoot R rengas ja S joukon R vakaa osajoukko. Tällöin S on renkaan R alirengas, jos ja vain jos*

- $u + v \in S$ *ja* $u \cdot v \in S$ *kaikilla* $u, v \in S$,
- $-1_R \in S$.

Jos alkiolla $u \in R$ on käänteisalkio kertolaskun suhteen, niin u on renkaan R *yksikkö*.

Kommutatiivinen rengas $(R, +, \cdot)$, jossa on ainakin kaksi alkiota, on *kunta*, jos kaikki sen nollasta eroavat alkiot ovat yksiköitä.

Esimerkki 1.1.3. (a) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ovat kuntia.

(b) Vaikka renkaassa $\mathbb{Z}$ on äärettömän monta alkiota, sen ainoat yksiköt ovat luvut 1 ja -1. Siis rengas $\mathbb{Z}$ ei ole kunta.

Kunnan K alirengas K', joka on kunta, on kunnan K *alikunta*.

Lause 1.1.4. *Olkoon K kunta ja olkoon $K' \subset K$. Tällöin K' on kunnan K alikunta, jos ja vain jos*

- $\#K' \geq 2$,
- $u - v \in K'$ *kaikilla* $u, v \in K'$ *ja*
- $uv^{-1} \in K'$ *kaikilla* $u, v \in K'$, $v \neq 0$.

Jatkossa K on kiinnitetty kunta.

1.2 Polynomi

Olkoon R kommutatiivinen rengas, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin lauseke

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0 \tag{1}$$

on yhden muuttujan R-kertoiminen polynomi. Lukua n kutsutaan polynomin $p(x)$ *asteeksi* ja merkitään $\deg(p(x)) = n$. Jos $p(x) \equiv 0$, niin $\deg(p(x)) = -\infty$.

Polynomia $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ kutsutaan *pääpolynomiksi*, jos sen korkeimman asteen termin kerroin on 1.

Alkiota c sanotaan polynomin $p(x)$ *juureksi*, jos $p(c) = 0$.

Määritellään polynomien summa ja tulo. Olkoot $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ja $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ nollasta eroavia polynomeja. Voidaan olettaa, että $m \geq n$. Tällöin

$$p(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + \sum_{k=n+1}^{m} b_k x^k \tag{2}$$

$$p(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k \tag{3}$$

Olkoon R kommutatiivinen rengas, jossa on vähintään kaksi alkiota. Joukko

$$R[x] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k : n \in \mathbb{N}, a_k \in R \right\}$$

varustettuna polynomien yhteen- ja kertolaskulla on kommutatiivinen rengas, jotka kutsutaan *polynomirenkaaksi*.

Lause 1.2.1. (Jakoyhtälö) *Olkoon $R[x]$ polynomirengas. Olkoot $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{k} b_j x^j$ R-kertoimisia polynomeja,* $\deg(g(x)) = k \geq 0$ *ja polynomin $g(x)$ korkeimman asteen termin kerroin b_k yksikkö renkaassa R. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset polynomit $q(x)$, $r(x) \in R[x]$, joille pätee*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \ \ \textit{ja} \ \ \deg(r(x)) < \deg(g(x)). \tag{4}$$

Todistus. Osoitetaan ensin polynomien $q(x)$ ja $r(x)$ olemassaolo. Jos $g(x)$ jakaa polynomin $f(x)$, niin on olemassa sellainen $q(x)$, että $f(x) = q(x)g(x)$. Valitaan nyt $r(x) = 0$ ja polynomit $q(x)$ ja $r(x)$ siis toteuttavat yhtälön (4). Oletetaan nyt, että polynomi $f(x)$ ei ole jaollinen polynomilla $g(x)$. Merkitään

$$S = \{f(x) - s(x)g(x) : s(x) \in R[x]\}.$$

Selvästi $p(x) \neq 0$ kaikilla $p(x) \in S$. Tällöin $\{\deg(p(x)) : p(x) \in S\}$ on luonnollisten lukujen joukon epätyhjä osajoukko. Olkoon

$$m = \min\{\deg(p(x)) : p(x) \in S\}$$

ja olkoon $q(x) \in R[x]$ polynomi, jolle pätee $\deg(f(x) - q(x)g(x)) = m$. Merkitään $r(x) = f(x) - q(x)g(x) = c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0$. Tällöin polynomit $q(x)$ ja $r(x)$ toteuttavat yhtälön (4).

Osoitetaan sitten, että $m < k$. Oletuksen mukaan b_k on yksikkö. Jos olisi $m \geq k$, niin vähentämällä yhtälön $r(x) = f(x) - q(x)g(x)$ molemmilta puolilta sama termi $c_m b_k^{-1} x^{m-k} g(x)$, saadaan

$$\begin{aligned}
&r(x) - c_m b_k^{-1} x^{m-k} g(x) = f(x) - q(x)g(x) - c_m b_k^{-1} x^{m-k} g(x) \in S \\
\Rightarrow &r(x) - c_m b_k^{-1} x^{m-k} g(x) = f(x) - (q(x) + c_m b_k^{-1} x^{m-k}) g(x) \\
\Rightarrow &c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0 - c_m b_k^{-1} x^{m-k} \cdot (b_k x^k + \cdots + b_1 x + b_0) = \\
&\quad = f(x) - (q(x) + c_m b_k^{-1} x^{m-k}) g(x) \\
\Rightarrow &c_m x^m + \cdots + c_0 - c_m x^m - c_m b_k^{-1} x^{m-k} b_{k-1} x^{k-1} - \cdots - c_m b_k^{-1} x^{m-k} b_0) = \\
&\quad = f(x) - (q(x) + c_m b_k^{-1} x^{m-k}) g(x) \\
\Rightarrow &(c_{m-1} - a_m b_k^{-1} b_{k-1}) x^{m-1} + \cdots + (c_1 - c_m b_k^{-1} b_1) x + (c_0 - c_m b_k^{-1} b_0) = \\
&\quad = f(x) - (q(x) + c_m b_k^{-1} x^{m-k}) g(x),
\end{aligned}$$

missä $\deg(r(x) - c_m b_k^{-1} x^{m-k} g(x)) < m$. Tämä on mahdotonta, koska $\deg(r(x)) = \min\{\deg(p(x)) : p(x) \in S\} = m$ ja $r(x) - c_m b_k^{-1} x^{m-k} g(x) \in S$.

Osoitetaan lopuksi polynomien $q(x)$ ja $r(x)$ yksikäsitteisyys. Olkoot $\tilde{q}(x)$ ja

$\tilde{r}(x)$ polynomeja, jotka toteuttavat yhtälön (4) eli

$$f(x) = \tilde{q}(x)g(x) + \tilde{r}(x)$$

ja $\deg(\tilde{r}(x)) < k$. Saadaan

$$(q(x) - \tilde{q}(x))g(x) = \tilde{r}(x) - r(x).$$

Jos $q(x) \neq \tilde{q}(x)$, niin $\deg((q(x) - \tilde{q}(x))g(x)) \geq k$. Mutta koska $\deg(r(x)) < k$ ja $\deg(\tilde{r}(x)) < k$, niin $\deg(\tilde{r}(x) - r(x)) < k$. Siis $\tilde{q}(x) = q(x)$ ja $\tilde{r}(x) = r(x)$.□

Sanotaan, että polynomi $f(x)$ on *jaollinen polynomilla* $g(x)$ (merkitään $f(x) \mid g(x)$), jos on olemassa sellainen polynomi $q(x)$, jolle pätee

$$f(x) = q(x)g(x). \tag{5}$$

Polynomia $g(x)$ kutsutaan polynomin $f(x)$ *tekijäksi*.

Olkoon $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ($\forall a_n \neq 0$) polynomi kunnan K suhteen. Sanotaan, että $p(x)$ *hajoaa täydellisesti* kunnan K suhteen, jos se voidaan esittää muodossa

$$p(x) = a_n(x - b_n)(x - b_{n-1})\cdots(x - b_1), \tag{6}$$

missä $b_i \in K$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Esimerkki 1.2.2. Polynomilla $p(x) = x^2 + 1$ ei ole juuria reaalilukujen kunnassa ja siksi se ei hajoa tässä kunnassa. Kompleksilukujen kunnassa $\mathbb{C}$ polynomi $p(x)$ hajoaa täydellisesti: $p(x) = (x - i)(x + i)$.

Määritelmä 1.2.1. Kunta K on *algebrallisesti suljettu*, jos jokainen K-kertoiminen polynomi hajoaa täydellisesti kunnan K suhteen.

Lause 1.2.3. (Algebran peruslause) *Kunta $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu.*

Määritelmä 1.2.2. Olkoot $f(x), g(x) \in R[x]$ polynomeja. Polynomien $f(x)$ ja $g(x)$ *suurin yhteinen tekijä* $\mathrm{syt}(f(x), g(x))$ on pääpolynomi $p(x) \in R[x]$, jolle pätee

- $p(x) \mid f(x)$ ja $p(x) \mid g(x)$
- jos on olemassa pääpolynomi $r(x) \in R[x]$, jolle pätee $r(x) \mid f(x)$ ja $r(x) \mid g(x)$, niin $r(x) \mid p(x)$

1.3 Vektoriavaruus

Tyypillisesti vektoriavaruus esitetään joukona

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}, n \geq 1$$

varustettuna laskutoimituksilla

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^T, \\ a\mathbf{x} &= (ax_1, \ldots, ax_n)^T, \end{aligned}$$

missä $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, x_n)^T$, $a \in \mathbb{R}$. Merkintä $(\ldots)^T$ tarkoittaa transponointia:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Olkoot K kunta ja V epätyhjä osajoukko. Oletetaan, että joukossa V on määritelty laskutoimitus + eli binäärioperaatio

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \qquad (u, v) \to u + v, \tag{7}$$

missä u+$v \in V$ aina kun $u \in V$ ja $v \in V$ sekä laskutoimitus $\cdot$ eli binäärioperaatio

$$\cdot : K \times V \longrightarrow V, \qquad (k, v) \to k \cdot v, \tag{8}$$

missä $k \cdot v \in V$ aina kun $k \in K$ ja $v \in V$.

Määritelmä 1.3.1. Pari (K, V) on *vektoriavaruus skalaarikunnan K suhteen* (*K-vektoriavaruus*), jos laskutoimitukset toteuttavat seuraavat aksiomat:

- $u + (v + w) = (u + v) + w$ kaikilla u, v, $w \in V$.
- $u + v = v + u$ kaikilla u, $v \in V$.
- on olemassa neutraalialkio $0_V \in V$ yhteenlaskun suhteen, jolle $0_V + v = v$ kaikilla $v \in V$.
- Kaikilla $v \in V$ on olemassa vasta-alkio $-v \in V$, jolle $v + (-v) = 0_V$.
- $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ kaikilla $v \in V$, λ, $\mu \in K$.
- On olemassa neutraalialkio $1_V \in V$ kertolaskun suhteen, jolle $1_V \cdot v = v$ kaikilla $v \in V$.
- $\lambda(u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ kaikilla u, $v \in V$, $\lambda \in K$.
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ kaikilla $v \in V$, λ, $\mu \in K$.

Esimerkki 1.3.1. Olkoot K kunta. Kaikkien K-kertoimisten polynomien joukko $(K[x], +, \cdot)$,

$$K[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_rx^r \mid r \geq 0,\ a_i \in K \text{ kaikilla } i \in \{0, 1, 2, \ldots, r\}\},$$

varustettuna polynomien yhteenlaskulla ja vakiolla kertomisella on vektoriavaruus kunnan K suhteen.

Jos L on kunnan K alikunta, niin K on L-vektoriavaruus.

Olkoon K kunta ja V K-vektoriavaruus. Vektoriavaruuden V äärellinen joukko $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ on *lineaarisesti riippumaton*, jos ainoat kertoimet $a_1, a_2, ..., a_n \in K$, joille pätee $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$, ovat $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Joukko $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ on K-vektoriavaruuden V *kanta*, jos jokaiselle $\mathbf{x} \in V$ on yksikäsitteiset $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, joille pätee $\mathbf{x} = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Jos $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ on vektoriavaruuden V kanta, niin sanotaan, että V

on *äärellisulotteinen* ja sen *dimensio* on $\dim_K V = \#S = n$. Vektoriavaruuden kanta ei ole yksikäsitteinen ja vektoriavaruuden dimensio ei riipu kannan valinnasta.

2 Matriisit

Tämä luku antaa matriisin määritelmän ja käsittelee erityyppisiä matriiseja ja niiden välisiä laskutoimituksia. Kohdassa "Determinantti" tiedot esitetään ilman todistuksia. Lisätietoja näistä löytyy lähteistä [3] (luku 3) ja [5] (luku 3). Eräät luvun 3 tärkeimmistä käsitteistä ovat matriisien similaarisuus ja minimipolynomi. Vaikka tässä tutkielmassa pohditaan matriisin Jordanin muotoa algebrallisesti eli ilman ominaisarvoja ja ominaisvektoreita, ominaisarvoteorialla on kuitenkin tärkeä rooli tässä työssä. Esimerkiksi tutkielman lopussa näytetään minimipolynomin ja karakteristisen polynomin suhde ja niiden avulla osoitetaan, että Jordanin lohko ei hajoa. Tässä luvussa esitetyt asiat on poimittu pääosin lähteistä [1], [2] ja [3].

Lukutaulukkoa

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{9}$$

kutsutaan matriisiksi. Matriisi A voidaan kirjoittaa lyhyemmässä muodossa $\mathsf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ tai $\mathsf{A} = [a_{ij}]$. Matriisialkioiden esityksissä ensimmäinen indeksi tarkoittaa matriisiriviä ja toinen matriisisaraketta, joilla tämä elementti sijaitsee. K-kertoimisten kokoa $m \times n$ olevien matriisien joukolle käytetään merkintää $\mathcal{M}_{mn}(K)$. K-kertoimisten kokoa $n \times n$ neliömatriisien joukolle käytetään merkintää $\mathcal{M}_n(K)$.

2.1 Matriisien tyyppejä

Matriisi O on *nollamatriisi*, jos kaikki sen alkiot ovat nollia. Esimerkiksi

$$\mathsf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Matriisi A on *neliömatriisi*, jos sen sarakkeiden ja rivien lukumäärät ovat samat:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Alkiot $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ovat neliömatriisin *diagonaalialkioita*.

Neliömatriisi A on *diagonaalimatriisi*, jos sen kaikki alkiot, jotka eivät ole diagonaalialkiota, ovat nollia:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\left[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\right]. \tag{12}$$

Diagonaalimatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat ykkösiä, kutsutaan *yksikkö-matriisiksi*:

$$\mathsf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\left[1, 1, \ldots, 1\right]. \tag{13}$$

2.2 Matriisien laskutoimitukset

Samankokoisille matriiseille on määritelty yhteenlasku. Olkoot $\mathsf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$, $\mathsf{B} = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ matriisit. Matriisien A ja B summa on $\mathsf{A} + \mathsf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$.

Matriisien A ja B tulo on määritelty, jos ja vain jos matriisin A sarakkeiden määrä on yhtä suuri kuin matriisin B rivien määrä. Olkoot $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ ja $\mathsf{B} = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{nr}(K)$ matriisit. Tällöin matriisien A ja B tulo on $\mathsf{A} \cdot \mathsf{B} = [c_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, missä $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$.

Esimerkki 2.2.1.

$$\mathsf{A} \cdot \mathsf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{bmatrix}.$$

Neliömatriisi A on *kääntyvä*, jos on olemassa sellainen matriisi A^{-1}, että $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{I}$. Matriisia A^{-1} sanotaan matriisin A *käänteismatriisiksi*.

Neliömatriisille A on määritelty potenssilasku samalla tavalla kuin reaaliluvuille: $\mathsf{A}^0 = \mathsf{I}$, $\mathsf{A}^1 = \mathsf{A}$, $\mathsf{A}\mathsf{A}^{n-1} = \mathsf{A}^n$. Kääntyvälle matriisille on määritelty myös negatiivinen potenssi $\mathsf{A}^{-k} = (\mathsf{A}^k)^{-1} = (\mathsf{A}^{-1})^k$. Neliömatriisi A on *nilpotentti*, jos on olemassa sellainen luku k, että $\mathsf{A}^k = \mathsf{O}$.

Olkoon $\mathsf{A} = [a_{ij}]$ K-kertoiminen matriisi ja olkoon $k \in K$. Tällöin $k\mathsf{A} = [ka_{ij}]$.

K-alkioisten neliömatriisien joukko $\mathcal{M}_n(K)$ muodostaa renkaan matriisien yhteenlaskun ja matriisitulon suhteen. Renkaan ykkösalkio on yksikkömatriisi I_n.

Olkoon $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$. Matriisin A *transponoitu* matriisi on $\mathsf{A}^T = [a_{ji}] \in \mathcal{M}_{nm}(K)$. Jos matriisien A ja B tulo on määritelty, niin $(\mathsf{A}\mathsf{B})^T = \mathsf{B}^T\mathsf{A}^T$.

2.3 Matriisien lohkomuodot

Olkoon $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(K)$. Jos $m \geq 2$, niin matriisi A voidaan esittää muodossa

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} \\ \mathsf{A}_{12} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

missä A_{11} on kokoa $m_1 \times n$ oleva matriisi, A_{12} on kokoa $m_2 \times n$ oleva matriisi ja $m_1 + m_2 = m$.

Vastaavasti, jos $n \geq 2$, niin matriisi A voidaan esittää muodossa

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{21} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

missä A_{11} on kokoa $m \times n_1$ oleva matriisi, A_{12} on kokoa $m \times n_2$ oleva matriisi ja $n_1 + n_2 = n$.

Esimerkki 2.3.1.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} \\ \mathsf{A}_{21} \end{bmatrix}$$

Määritelmä 2.3.1. Matriisi $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ on *lohkomatriisi*, jos se voidaan rivejä ja sarakkeita ryhmiin jakamalla esittää muodossa

$$\mathsf{A} = [\mathsf{A}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \cdots & \mathsf{A}_{1l} \\ \vdots & \mathsf{A}_{ij} & \vdots \\ \mathsf{A}_{r1} & \cdots & \mathsf{A}_{rl} \end{bmatrix},$$

missä A_{ij} on kokoa $m_i \times n_j$ oleva osamatriisi, kun $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ ja $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, sekä $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m$ ja $n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$.

Osamatriiseja A_{ij} kutsutaan matriisin A *lohkoiksi*.

Matriisi $D \in \mathcal{M}_n(K)$ on *lohkodiagonaalinen*, jos sillä on esitys

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_n \end{bmatrix}, \tag{16}$$

missä kukin D_i $(i \in \{1, 2, ..., n\})$ on neliömatriisi ja $n \geq 2$. Tällöin voidaan merkitä $D = \operatorname{diag}(D_1, D_2, \ldots, D_n)$.

Esimerkki 2.3.2. Olkoot A, B, C ja D seuraavat matriisit:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathsf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} \text{ ja } \mathsf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} \\ \hline c_{11} & c_{12} & d_{11} \end{array}\right].$$

2.4 Determinantti

Jokaista neliömatriisia vastaa luku, jotka kutsutaan matriisin *determinanttiksi*. Determinantin avulla voidaan tarkistaa esimerkiksi onko matriisi kääntyvä vai ei.

Olkoon $\mathsf{A} = [a_{ij}]_{i,j}^n \in \mathcal{M}_n(K)$. Matriisin A *determinantti* on

$$\det(\mathsf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha} \operatorname{sign}(\alpha) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}, \tag{17}$$

missä $\alpha = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ on joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatio ja kerroin $\operatorname{sign}(\alpha) = \pm 1$ on permutaation merkki.

Determinantin ominaisuuksia ovat

- $\det(\mathsf{I}_n) = 1$.
- $\det(\mathsf{A}^T) = \det(\mathsf{A})$.
- Jos matriisissa A vaihdetaan keskenään kaksi riviä (tai saraketta), niin saadulle matriisille $\tilde{\mathsf{A}}$ pätee $\det(\tilde{\mathsf{A}}) = -\det(\mathsf{A})$.
- Jos matriisilla A on nollarivi (tai nollasarake), niin $\det(\mathsf{A}) = 0$.
- Jos kaksi matriisin A riveistä (tai sarakkeista) ovat yhtäsuuret, niin $\det(\mathsf{A}) = 0$.
- Jos matriisi $\tilde{\mathsf{A}}$ saadaan matriisista A lisäämällä johonkin riviin (tai sarakkeeseen) jokin toinen rivi (tai sarake) vakiolla k kerrottuna, niin $\det(\tilde{\mathsf{A}}) = \det(\mathsf{A})$.
- Determinantti on lineaarinen jokaisen sarakkeen suhteen erikseen, eli jos matriisin A sarake A_j on matriisin A kahden muuen sarakkeen A_l ja A_k lineaarikombinaatio $\mathsf{A}_j = \lambda \mathsf{A}_l + \mu \mathsf{A}_k$, niin $\det(\mathsf{A}) = \lambda \cdot \det(\mathsf{A}_j(\mathsf{A}_l)) + \mu \cdot \det(\mathsf{A}_j(\mathsf{A}_k))$, missä matriisit $\mathsf{A}_j(\mathsf{A}_l)$ ja $\mathsf{A}_j(\mathsf{A}_k)$ saadaan matriisista A sijoittamalla sarakkeet A_l ja A_k vastaavasti sarakkeen A_j sijaan.
- $\det(\mathsf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathsf{A})}$.
- Olkoon $D = \operatorname{diag}(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ lohkodiagonaalimatriisi. Tällöin
$$\det(D) = \det(D_1)\det(D_2)\cdots\det(D_n). \tag{18}$$

Esimerkki 2.4.1. Olkoot $\mathsf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ ja $\mathsf{B} = [b_{ij}]_{i,j=1}^{n,m}$ sekä $m \leq n$. Osoitetaan, että

$$\begin{vmatrix} \mathsf{A} & 0 \\ -I_n & \mathsf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{AB} \\ -\mathsf{I}_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Ratkaisu.

$$\tilde{\mathsf{A}} := \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 \\ -\mathsf{I}_n & \mathsf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Lisätään sarakkeeseen $(n+1)$ ensimmäinen sarake kerottuna luvulla b_{11}. Koska matriisin sarakkeen vakiolla kerrottuna lisääminen johonkin toiseen sarakkeeseen ei muuta matriisin determinanttia, niin saadaan

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 \\ -\mathsf{I}_n & \mathsf{B} \end{bmatrix}\right) = \det(\tilde{\mathsf{A}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11} \cdot b_{11} & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & a_{21} \cdot b_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & a_{m1} \cdot b_{11} & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_{1m} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{vmatrix}.$$

Lisäämällä sarakkeeseen $(n+1)$ ensimmäinen sarake kerottuna luvuilla $b_{21}, \ldots, b_{n1}$ vielä $(n-1)$ kertaa saadaan determinantti

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 \\ -\mathsf{I}_n & \mathsf{B} \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11} \cdot b_{11} + \cdots a_{11} \cdot b_{n1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & a_{m1} \cdot b_{11} + \cdots a_{m1} \cdot b_{n1} & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & b_{nm} \end{vmatrix}.$$

Tehdään samanlaiset laskut sarakkeille $(n+2),\dots,(n+m)$. Saadaan

$$\det(\tilde{\mathsf{A}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}\cdot b_{11} + \cdots a_{11}\cdot b_{n1} & \cdots & a_{11}\cdot b_{1m} + \cdots a_{1n}\cdot b_{nm} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & a_{m1}\cdot b_{11} + \cdots a_{mn}\cdot b_{n1} & \cdots & a_{m1}\cdot b_{1m} + \cdots a_{mn}\cdot b_{nm} \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{AB} \\ -\mathsf{I}_n & 0 \end{vmatrix}.$$

□

Matriisi $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ sanotaan *singulaariseksi matriisiksi*, jos $\det(\mathsf{A}) = 0$, ja *ei-singulaarisiksi matriiseksi*, jos $\det(\mathsf{A}) \neq 0$.

Lause 2.4.2. *Matriisi $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ on singulaarinen jos ja vain jos on olemassa nollasta eroava vektori $x \in K^n$, jolle pätee $\mathsf{A}x = 0$.*

Todistus. Olkoon $x \neq 0$ vektori, jolle $\mathsf{A}x = 0$. Oletetaan, että matriisi A ei ole singulaarinen eli on olemassa matriisin A käänteismatriisi A^{-1}. Saadaan

$$\begin{aligned} &\mathsf{A}x = 0 \\ \Rightarrow &\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}x = \mathsf{A}^{-1}\cdot 0 \\ \Rightarrow &\mathsf{I}x = 0 \\ \Rightarrow &x = 0, \end{aligned}$$

joka on ristiriidassa ehdon $x \neq 0$ kanssa. Siis tehty oletus on väärin ja matriisi A on singulaarinen.

Olkoon nyt A singulaarinen matriisi. Vektorin $x \neq 0$, jolle $\mathsf{A}x = 0$ olemassoolo osoitetaan lauseen, että matriisin aste on sama kuin sen sarakevektorien joukon dimensio, perusteella (voidaan katsoa lähteestä [1], s. 91-94).

2.5 Liittomatriisi

Olkoon $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$. $(n-1) \times (n-1)$-kokoista matriisia, joka jää jäljelle, kun matriisista A poistetaan rivi i ja sarake j, kutsutaan alkioon a_{ij} liittyväksi *alimatriisiksi*. Alimatriisin determinantti on matriisin A *alideterminantti* tai *minori*, joka merkitään M_{ij}.

Alkion a_{ij} *kofaktori* on

$$\mathsf{A}_{ij} := (-1)^{i+j}\mathsf{M}_{ij}. \tag{19}$$

Matriisin A *kofaktorimatriisi* on

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} & \cdots & \mathsf{A}_{1n} \\ \mathsf{A}_{21} & \mathsf{A}_{22} & \cdots & \mathsf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{n1} & \mathsf{A}_{n2} & \cdots & \mathsf{A}_{nn} \end{bmatrix} \tag{20}$$

Matriisin A *liittomatriisi* on sen kofaktorimatriisin C transpoosi: $\mathrm{adj}(\mathsf{A}) = \mathsf{C}^T$ eli

$$\mathrm{adj}(\mathsf{A}) = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} & \cdots & \mathsf{A}_{1n} \\ \mathsf{A}_{21} & \mathsf{A}_{22} & \cdots & \mathsf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{n1} & \mathsf{A}_{n2} & \cdots & \mathsf{A}_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{21} & \cdots & \mathsf{A}_{n1} \\ \mathsf{A}_{12} & \mathsf{A}_{22} & \cdots & \mathsf{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{1n} & \mathsf{A}_{n2} & \cdots & \mathsf{A}_{nn} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Olkoon A $m \times n$-kokoinen matriisi ja olkoon luku p sellainen, että $p < m$ ja $p < n$. Poistetaan matriisista A $m-p$ riviä ja $n-p$ saraketta. Saadaan $p \times p$-kokoinen alimatriisi, jonka kutsutaan *p-asteen alimatriisiksi*. Olkoot rivien ja sarakkeiden, jotka jäivät jäljelle, indeksit

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le m, \quad 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_p \le n \tag{22}$$

Tällöin matriisin A p-asteen alideterminantti voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{bmatrix} := \det\left[a_{i_k j_k}\right]_{k=1}^{p} \tag{23}$$

Lause 2.5.1. (Laplacen kehityslause) *Jos* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$*, niin kaikille* $i, j = 1, \ldots, n$ *pätee*

$$\det(\mathsf{A}) = a_{i1}\mathsf{A}_{i1} + \ldots + a_{in}\mathsf{A}_{in} \tag{24}$$

ja

$$\det(\mathsf{A}) = a_{1j}\mathsf{A}_{1j} + \ldots + a_{nj}\mathsf{A}_{nj}. \tag{25}$$

Todistus. Olkoon A neliömatriisi kunnan K suhteen

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}. \end{bmatrix}$$

Siirretään ensin rivi i ensimmäiseen paikkaan. Koska matriisin rivien permutaatio keskenään muuttaa determinantin merkkiä, saamme

$$\det(\mathsf{A}) = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Koska determinantti on lineaarinen jokaisen sarakkeen suhteen erikseen, niin

$$\det(\mathsf{A}) = (-1)^{i-1} \left(\begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right).$$

Vaihtamalla sarakkeita keskenään siirrämme nyt ensimmäisen rivin nollasta eroavat alkiot ensimmäiseen paikkaan

$$\det(\mathsf{A}) = (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i-1}(-1)^{1}\begin{vmatrix} a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{i-1}(-1)^{2}\begin{vmatrix} a_{i3} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i-1}(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{in} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1}(-1)^{1-1}a_{i1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i-1}(-1)^{2-1}a_{i2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{i-1}(-1)^{3-1}a_{i3}\begin{vmatrix} a_{i3} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i-1}(-1)^{n-1}a_{in}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_{ij}\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & & 0 & \\ \hline a_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|.$$

Käsitellään matriiseja B, joille

$$\mathsf{B} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right].$$

Lisätään riville i ensimmäinen rivi kerrottuna luvulla b_{i2}. Saadaan matriisi

$$\mathsf{B}' = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right].$$

Determinantin ominaisuuksien nojalla $\det(\mathsf{B}') = \det(\mathsf{B})$. Saadaan

$$\det(\mathsf{B}) = \det(\mathsf{B}') = \det(1) \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = A_{11},$$

missä A_{11} on alkion $b_{11} = 1$ kofaktori. Ottaen huomioon myös se, että $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$, saadaan

$$\det(A) = (1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij} \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & & 0 & \\ \hline 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

□

Esimerkki 2.5.2. Olkoon $\mathsf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{5}$ matriisi. Tällöin

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} \tag{26}$$

Määritelmä 2.5.1. Olkoon A matriisi, jonka koko on $m \times n$. Matriisin A *aste* (merkitään $\operatorname{rank}(\mathsf{A})$) on suurin nollasta eroava alideterminantin riviluku.

Matriisi $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ on *täysiasteinen*, jos $\operatorname{rank}(\mathsf{A}) = \min\{m, n\}$. Siis kokoa n oleva neliömatriisi A on täysiasteinen, jos $\operatorname{rank}(\mathsf{A}) = n$.

Esimerkki 2.5.3. Matriisin

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 9 & 6 & -6 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

aste on 1, koska ainoat nollasta eroavat alideterminanttit ovat kokoa 1×1.

Lause 2.5.4. *Olkoon* A *kokoa* n *oleva neliömatriisi. Tällöin on voimassa kaava*

$$\mathsf{A} \cdot \operatorname{adj}(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{A}) \cdot \mathsf{I}. \tag{28}$$

Todistus. Näytetään ensin, että jos $i \neq r$, niin

$$a_{i1}A_{r1} + \ldots + a_{in}A_{rn} = 0.$$

Olkoon A' matriisi, joka saadaan matriisista A korvaamalla rivi r rivillä i. Tällöin

$$a_{i1}A_{r1} + \ldots + a_{in}A_{rn} = \det(\mathsf{A}').$$

Determinantin ominaisuuksien nojalla saadaan, että $\det(\mathsf{A}') = 0$ ja siten $a_{i1}A_{r1} + \ldots + a_{in}A_{rn} = 0$.

Olkoon

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \mathsf{A} \cdot \operatorname{adj}(\mathsf{A}) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \cdots & \mathsf{A}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{1n} & \cdots & \mathsf{A}_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}\mathsf{A}_{11} + \ldots a_{1n}\mathsf{A}_{1n} & \cdots & a_{11}\mathsf{A}_{n1} + \ldots a_{1n}\mathsf{A}_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathsf{A}_{11} + \ldots a_{nn}\mathsf{A}_{1n} & \cdots & a_{n1}\mathsf{A}_{n1} + \ldots a_{nn}\mathsf{A}_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \det(\mathsf{A}) & 0 & \cdots & \\ 0 & \det(\mathsf{A}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(\mathsf{A}) \end{bmatrix} = \det(\mathsf{A}) \cdot \mathsf{I}.$$

□

Seuraus 2.5.5. *Olkoon* A *neliömatriisi. Tällöin on voimassa kaava*

$$\operatorname{adj}(\mathsf{A}) \cdot \mathsf{A} = \det(\mathsf{A}) \cdot \mathsf{I}. \tag{29}$$

Lauseesta 2.5.4, sen seurauksesta ja determinantin ominaisuuksista seuraa lause

Lause 2.5.6. *Matriisi* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ *on kääntyvä, jos ja vain jos se on ei-singulaarinen matriisi.*

2.6 Binet'n ja Cauchyn kaava

Binet'n ja Cauchyn kaava kertoo, miten lasketaan matriisien tulon determinantti.

Lause 2.6.1. ***(Binet'n ja Cauchyn kaava)*** *Olkoot* A *ja* B $m \times n$*- ja* $n \times m$*-kokoiset matriisit vastaavasti. Jos* $m < n$*, niin*

$$\det(\mathsf{AB}) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le n} \mathsf{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{bmatrix} \mathsf{B} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Eli matriisien tulon determinantti saadaan laskettua seuraavasti: Valitaan ensin m kappaleetta matriisin A rivejä ja vastaavilta paikoilta m kappaleetta matriisin B sarakkeita. Muodostetaan näistä neliömatriisit ja lasketaan niiden determinanttien tulo. Summataan tulot kaikkien mahdollisten rivien valintojen yli.

Todistus. Olkoot

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ja } \mathsf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1m} + \cdots + a_{1n}b_{nm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1m} + \cdots + a_{mn}b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Käyttämällä determinantin lineaarisuutta sarakkeen suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \det(\mathsf{AB}) &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ a_{m1}b_{11} & \cdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ a_{m2}b_{21} & \cdots \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{1n}b_{n1} & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ a_{mn}b_{n1} & \cdots \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{\alpha_1=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1}b_{\alpha_1 1} & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ a_{m\alpha_1}b_{\alpha_1 1} & \cdots \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

missä kunkin determinantin sarakkeet alkaen toisesta ovat samat kuin matriisin AB vastaavat sarakkeet.

Sovelletaan samaa determinanttin ominaisuutta jokaisen determinantin toiseen sarakkeeseen. Saadaan

$$\det(\mathsf{AB}) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1}b_{\alpha_1 1} & a_{1\alpha_2}b_{\alpha_2 2} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{m\alpha_1}b_{\alpha_1 1} & a_{m\alpha_2}b_{\alpha_2 2} & \cdots \end{vmatrix},$$

missä kunkin determinantin sarakkeet kolmannesta alkaen ovat samat kuin matriisin AB vastaavat sarakkeet.

Jatketaan samanlaisilla muunnoksilla kaikille muille determinanttien sarakkeille. Lopuksi saadaan

$$\det(\mathsf{AB}) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1}b_{\alpha_1 1} & a_{1\alpha_2}b_{\alpha_2 2} & \cdots & a_{1\alpha_m}b_{\alpha_m m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\alpha_1}b_{\alpha_1 1} & a_{m\alpha_2}b_{\alpha_2 2} & \cdots & a_{m\alpha_m}b_{\alpha_m m} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} b_{\alpha_1 1}b_{\alpha_2 2}\cdots b_{\alpha_m m} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \cdots & a_{1\alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\alpha_1} & a_{m\alpha_2} & \cdots & a_{m\alpha_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} b_{\alpha_1 1}b_{\alpha_2 2}\cdots b_{\alpha_m m} A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix},$$

missä indeksit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ saavuttavat kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ arvot toisistaan riippumatta.

Jos on olemassa luvut α_i ja α_j, joille $\alpha_i = \alpha_j$, niin kaikki nämä luvut sisältävät determinantit ovat nollia ja ne voidaan poistaa summasta.

Jaetaan kaikki nollasta eroavat determinantit ryhmiin, joiden alkiot eroavat toisistaan vain indeksien järjestyksessä. Jokaisessa ryhmässä on $m!$ alkiota. Lisäksi voidaan kirjoittaa

$$\mathsf{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} = \operatorname{sign}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \mathsf{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{bmatrix},$$

missä $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ on joukon $\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ permutaatio ja $\operatorname{sign}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = \pm 1$ on permutaation α merkki. Siis

$$\det(\mathsf{AB}) =$$

$$= \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_m} \mathsf{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{bmatrix} \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \operatorname{sign}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_m m} =$$

$$= \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_m} \mathsf{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{bmatrix} \mathsf{B} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{bmatrix}.$$

$\square$

2.7 Ominaisarvoteoriaa

Olkoon $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$. Arvoa $\lambda \in K$ kutsutaan matriisin A *ominaisarvoksi*, mikäli on olemassa sellainen vektori $x \in K^n$ $(x \neq 0)$, että

$$\lambda x = \mathsf{A}x. \tag{31}$$

Matriisin A ominaisarvoon λ_i liittyvä *ominaisavaruus* on joukko $E_{\mathsf{A}}(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(\lambda_i \mathsf{I} - \mathsf{A})$.

Polynomia

$$p_{\mathsf{A}}(\lambda) = \det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

sanotaan matriisin A *karakteristiseksi polynomiksi.*

Määritelmä 2.7.1. Matriisin $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ ominaisarvon $\lambda_j \in K$

- *algebrallinen kertaluku* on k_j, kun λ_j on karakteristisen polynomin $p_{\mathsf{A}}(\lambda)$ k_j-kertainen juuri.
- *geometrinen kertaluku* on ominaisavaruuden $E_{\mathsf{A}}(\lambda_i)$ dimensio.

Vektoria x kutsutaan ominaisarvoa λ vastaavaksi *ominaisvektoriksi.* Matriisin A kaikkien ominaisarvojen joukko $\sigma(\mathsf{A})$ on sen *spektri.*

Lause 2.7.1. *Olkoon $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$. Tällöin λ on matriisin ominaisarvo jos ja vain jos*

$$\det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) = 0. \tag{32}$$

Todistus. Olkoon $\det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) = 0$. Tällöin Lauseen 2.5.6 perusteella tiedetään, että matriisi A on singulaarinen. Siis Lauseen 2.4.2 nojalla on sellainen nollasta eroava $x \in K^n$, että $(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})x = 0$. Nyt

$$\lambda\mathsf{I}x - \mathsf{A}x = 0 \Rightarrow \lambda x - \mathsf{A}x = 0 \Rightarrow \mathsf{A}x = \lambda x$$

eli x on matriisin A ominaisarvo.

Olkoon nyt λ matriisin A ominaisarvo. Oletetaan, että $\det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) \neq 0$. Tällöin Lauseen 2.5.6 nojalla matriisilla $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ on käänteismatriisi $(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}$. Nyt

$$\begin{aligned}
&\lambda x = \mathsf{A}x \\
&\Rightarrow \lambda\mathsf{I}x = \mathsf{A}x \\
&\Rightarrow \lambda\mathsf{I}x - \mathsf{A}x = 0 \\
&\Rightarrow (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})x = 0 \\
&\Rightarrow (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})x = (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} \cdot 0 \\
&\Rightarrow \mathsf{I}x = 0 \\
&\Rightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

Saadaan, että yhtälön $\lambda x = \mathsf{A}x$ ainoa mahdollinen ratkaisu on $x = 0$, mikä on ristiriita. Siis, tehty oletus, että $\det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) \neq 0$ on väärin. □

Karakteristisen polynomin juuret ovat täsmälleen matriisin A ominaisarvot.

Olkoot $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ K-kertoiminen polynomi ja $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$. Tällöin

$$p(\mathsf{A}) = a_0\mathsf{I} + a_1\mathsf{A} + \cdots + a_k\mathsf{A}^k.$$

Lause 2.7.2. *Olkoot $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$ ja λ on matriisin A ominaisarvo. Tällöin*

$$\lambda^k x = \mathsf{A}^k x, \tag{33}$$

missä $k \in \mathbb{N}$.

Todistus. Osoitetaan lause induktioperiaatteen avulla. Väite (33) on tosi arvolla $k = 1$ ominaisarvon määritelmän nojalla. Oletetaan, että (33) on tosi jollakin arvolla $k = s \in \mathbb{N}$, siis $\lambda^s x = \mathsf{A}^s x$ (induktio-oletus). Kun $n = s + 1$, niin induktio-oletuksen nojalla

$$\lambda^{s+1}x = \lambda^s \lambda x = (\lambda^s x)\lambda = (\mathsf{A}^s x)\lambda = \mathsf{A}^s(\lambda x) = \mathsf{A}^s \mathsf{A} x = \mathsf{A}^{s+1}x.$$

Matemaattisen induktion periaatteen nojalla väite (33) pätee kaikilla arvoilla $k \in \mathbb{N}$. □

Lause 2.7.3. *Olkoot $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ K-kertoiminen polynomi ja $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ matriisi, jonka ominaisarvo on λ_0. Tällöin $p(\lambda_0)$ on matriisin $p(\mathsf{A})$ ominaisarvo.*

Todistus. Olkoon λ_0 matriisin A ominaisarvo. Tällöin on olemassa sellainen vektori x, että $\lambda_0 x = \mathsf{A}x$. Nyt $p(\lambda_0)x = (a_0 + a_1\lambda_0 + \cdots + a_k\lambda_0^k)x = a_0 x + a_1\lambda_0 x + \cdots + a_k\lambda_0^k x$. Lauseen 2.7.2 nojalla $p(\lambda_0)x = a_0\mathsf{I}x + a_1\mathsf{A}x + \cdots + a_k\mathsf{A}^k x = (a_0\mathsf{I} + a_1\mathsf{A} + \cdots + a_k\mathsf{A}^k)x = p(\mathsf{A})x$. Ominaisarvon määritelmän mukaan $p(\lambda_0)$ on matriisin $p(\mathsf{A})$ ominaisarvo. □

Lause 2.7.4. ***(Cayley ja Hamilton)*** *Olkoon $p_{\mathsf{A}}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ matriisin A karakteristinen polynomi. Tällöin $p_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = 0$.*

Todistus. Koska $p_{\mathsf{A}}(\lambda)$ on matriisin A karakteristinen polynomi, niin $p_{\mathsf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Olkoon B on matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ liittomatriisi:

$$\mathsf{B} = \operatorname{adj}(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = \begin{bmatrix} \mathsf{B}_{11} & \mathsf{B}_{21} & \cdots & \mathsf{B}_{n1} \\ \mathsf{B}_{12} & \mathsf{B}_{22} & \cdots & \mathsf{B}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{B}_{1n} & \mathsf{B}_{2n} & \cdots & \mathsf{B}_{nn} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

missä B_{ij} on matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ kofaktori, joka on $(n-1)$-asteen polynomi. Täten matriisi B voidaan esittää muodossa

$$\mathsf{B} = \mathsf{B}_{n-1}\lambda^{n-1} + \mathsf{B}_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + \mathsf{B}_1\lambda + \mathsf{B}_0,$$

missä B_i ovat K-kertoimisia matriiseja kaikilla $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Tällöin lauseen 2.5.4 nojalla

$$\operatorname{adj}(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A})(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) = (\det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}))\mathsf{I}. \tag{35}$$

Saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathsf{B}(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)\mathsf{I} \\
&\Rightarrow (\mathsf{B}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \mathsf{B}_1\lambda + \mathsf{B}_0)(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)\mathsf{I} \\
&\Rightarrow \mathsf{B}_{n-1}\lambda^n + (\mathsf{B}_{n-2} - \mathsf{B}_{n-1}\mathsf{A})\lambda^{n-1} + \cdots + (\mathsf{B}_0 - \mathsf{B}_1\mathsf{A})\lambda - \mathsf{B}_0\mathsf{A} = \\
&= \mathsf{I}\lambda^n + a_{n-1}\mathsf{I}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\mathsf{I}\lambda + a_0\mathsf{I}
\end{aligned}.$$

Vertaamalla vasemman ja oikean puolen polynomien kertoimista muodostettuja matriiseja saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases}
\mathsf{B}_{n-1} = \mathsf{I} \\
\mathsf{B}_{n-2} - \mathsf{B}_{n-1}\mathsf{A} = a_{n-1}\mathsf{I} \\
\vdots \\
\mathsf{B}_0 - \mathsf{B}_1\mathsf{A} = a_1\mathsf{I} \\
-\mathsf{B}_0\mathsf{A} = a_0\mathsf{I}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\mathsf{B}_{n-1}\mathsf{A}^n = \mathsf{I}\mathsf{A}^n \\
\mathsf{B}_{n-2}\mathsf{A}^{n-1} - \mathsf{B}_{n-1}\mathsf{A}^n = a_{n-1}\mathsf{I}\mathsf{A}^{n-1} \\
\vdots \\
\mathsf{B}_0\mathsf{A} - \mathsf{B}_1\mathsf{A}^2 = a_1\mathsf{I}\mathsf{A} \\
-\mathsf{B}_0\mathsf{A} = a_0\mathsf{I}
\end{cases}$$

Lasketaan jälkimmäiset yhtälöt yhteen. Saadaan

$$0 = \mathsf{A}^n + a_{n-1}\mathsf{A}^{n-1} \cdots + a_1\mathsf{A} + a_0 = p_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}). \tag{36}$$

□

2.8 Lineaariset kuvaukset ja matriisit

Vektoriavaruuden V ja W välillä kuvaus $\tau : V \to W$ sanotaan *lineaarikuvaukseksi*, jos

$$\tau(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\tau(\mathbf{x}) + b\tau(\mathbf{y}) \tag{37}$$

kaikilla $a, b \in K$, ja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Olkoot V vektoriavaruus, jonka dimensio on n, kunnan K suhteen, $B =$

$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ vektoriavaruuden V eräs kanta, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ja $\mathbf{X}_B = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathbf{Y}_B = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ koordinaattivektorit kannan B suhteen. Oletetaan, että vektoreiden $\mathbf{X}_B$ ja $\mathbf{Y}_B$ koordinaatit liittyvät toisiinsa seuraavasti

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12x_2+\ldots} + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22x_2+\ldots} + a_{2n}x_n, \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2x_2+\ldots} + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{38}$$

Yhtälöryhmä (38) esittää lineaarikuvausta $\tau : V \to V$, joka kuvaa minkä tahansa vektoriavaruuden vektorin $\mathbf{x}$ toiseen saman avaruuden vektoriin $\mathbf{y}$.

Kaava (38) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{Y}_B = \mathsf{M}_B(\mu)\mathbf{X}_B, \tag{39}$$

missä $\mathsf{M}_B(\mu) = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ on kuvauksen τ matriisi kannan B suhteen.

Olkoot $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ ja $B' = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_m\}$ vektoriavaruuden V kaksi eri kantaa. Lausutaan kantavektorit b'_j kantavektoreiden b_j avulla. Oletetaan, että $b'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} b_i$ kaikilla $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tällöin matriisia

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \tag{40}$$

kutsutaan *kannanvaihdon* $B \to B'$ *matriisiksi.*

Olkoot $\mathbf{x} \in V$ sekä $X_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ ja $X_{B'} = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_m)$ vektorin $\mathbf{x}$ koordinaattivektorit kantojen B ja B' suhteen. Tällöin pätee $X_B = \mathsf{P}X_{B'}$.

Olkoot $\mu : V \to V$ lineaarikuvaus, $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ vektoriavaruuden V eräs kanta ja $\mathsf{M}_B(\mu)$ kuvausten μ matriisi kannan B suhteen. Jos $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_3\}$ on vektoriavaruuden V toinen kanta ja $\mathsf{P}_{B\to C}$ kannanvaihdon matriisi, niin kuvausten μ matriisi $\mathsf{M}_B(\mu)$ kannanvaihdossa muuttuu seuraavalla tavalla:

$$\mathsf{M}_C(\mu) = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{M}_B(\mu)\mathsf{P}. \tag{41}$$

Tällaista muunnosta kutsutaan *similaarimuunnokseksi*.

Similaarisuus on tärkeä kahden matriisin ominaisuus. Similaareilla matriiseilla on paljon samoja ominaisuuksia, kuten esimerkiksi karakteristinen polynomi, determinantti jne.

Määritelmä 2.8.1. Matriisit A ja B ovat *similaariset* (merkitään $\mathsf{A} \approx \mathsf{B}$), jos on olemassa kääntyvä matriisi P, jolle $\mathsf{B} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P}$.

Similaarisit matriisit vastaavat samaa lineaarikuvausta ja niillä on siten samat ominaisarvot.

Esimerkki 2.8.1. Olkoot

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathsf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osoitetaan, että matriisit A ja I eivät ole similaarisia. Oletetaan, että on olemassa kääntyvä matriisi P, jolle $\mathsf{A} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{I}\mathsf{P}$. Saadaan $\mathsf{A} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{I}\mathsf{P} = \mathsf{P}^{-1}(\mathsf{I}\mathsf{P}) = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{P} = \mathsf{I}$. Tämä on ristiriita ja siten tehty oletus on väärin ja matriisit A ja I eivät ole similaarisia. $\square$

Edellinen esimerkki osoittaa, että vaikka matriiseilla on samat aste, determinantti ja ominaisarvot, se ei tarkoita, että ne ovat similaarisia.

Matriisi $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ on *diagonalisoituva*, jos se on similaarinen diagonaalimatriisin $\mathsf{D} = \operatorname{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n] \in \mathcal{M}_n(K)$ kanssa.

Olkoon $\tau : K^n \to K^m$ matriisia $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ vastaava lineaarikuvaus. Lineaarikuvauksen τ *ydin* ja *kuva-avaruus* ovat

$$\operatorname{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in K^n \mid A\mathbf{x} = 0\}, \tag{42}$$

$$\operatorname{Im}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in K^n\}. \tag{43}$$

Lineaarialgebran kurssilla osoitetaan *Lineaarikuvauksen dimensioyhtälö*:

$$\dim \mathrm{Ker}(\tau) + \dim \mathrm{Im}(\tau) = n. \tag{44}$$

2.9 Minimipolynomi

Määritelmä 2.9.1. Olkoon $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$. Nollasta eroavaa polynomia $f(\lambda) \in K[\lambda]$, jolle pätee $f(\mathsf{A}) = 0$, kutsutaan matriisin A *annihiloivaksi polynomiksi*. Matriisin A alimmanasteista annihiloivaa pääpolynomia kutsutaan matriisin A *minimipolynomiksi* ja merkitään $m_{\mathsf{A}}(\lambda)$.

Olkoon $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$. On voimassa seuraavat minimipolynomin määrittämisen säännöt:

(1) jos $\mathsf{A} = a\mathsf{I}$, niin $m_{\mathsf{A}}(\lambda) = \lambda - a$;

(2) jos $\mathsf{A} \neq a\mathsf{I}$ kaikilla $a \in K$, ja $\mathsf{A}^2 = b\mathsf{A} + a\mathsf{I}$, niin $m_{\mathsf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda - a$;

(3) jos $\mathsf{A}^2 \neq b\mathsf{A} + a\mathsf{I}$ kaikilla $a, b \in K$, ja $\mathsf{A}^3 = ca^2 + b\mathsf{A} + a\mathsf{I}$, niin $m_{\mathsf{A}}(\lambda) = \lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda - a$.

Esimerkki 2.9.1. Etsitään matriisin

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

minimipolynomi. On selvää, että $\mathsf{A} \neq aI$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$. On myös helppo tarkistaa, että

$$\mathsf{A}^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siten matriisin A minimipolynomi on $m_{\mathsf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$.

Lause 2.9.2. *Olkoon* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ *ja olkoon* $f(\lambda) \in K[\lambda]$ *nollasta eroava poly-*

nomi. Tällöin $f(\mathsf{A}) = 0$*, jos ja vain jos polynomi* $f(\lambda)$ *on jaollinen matriisin* A *minimipolynomilla* $m_{\mathsf{A}}(\lambda)$*.*

Todistus. Olkoon polynomi $f(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $m_{\mathsf{A}}(\lambda)$. Saadaan

$$\begin{aligned}&f(\lambda) = q(\lambda)m_{\mathsf{A}}(\lambda)\\ &\Rightarrow f(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A})m_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = q(a)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Olkoon nyt $f(\mathsf{A}) = 0$. Polynomien jakoalgoritmin nojalla $f(\lambda) = q(\lambda)m_{\mathsf{A}}(\lambda) + r(\lambda)$, missä $\deg(r(\lambda)) < \deg(m_{\mathsf{A}}(\lambda))$. Saadaan

$$\begin{aligned}&r(\lambda) = f(\lambda) - q(\lambda)m_{\mathsf{A}}(\lambda)\\ &\Rightarrow r(\mathsf{A}) = f(\mathsf{A}) - q(\mathsf{A})m_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = 0 - q(\mathsf{A})\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Jos $r(\lambda) \neq 0$, niin $r(\lambda)$ on matriisin A annihiloiva polynomi, jonka aste on matriisin A minimipolynomin astetta pienempi, mikä on mahdotonta. Saadaan, että $r(\lambda) = 0$ eli polynomi $f(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $m_{\mathsf{A}}(\lambda)$. □

Lause 2.9.3. *Matriisin minimipolynomi on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoot $m_{\mathsf{A}1}(\lambda)$ ja $m_{\mathsf{A}2}(\lambda)$ matriisin A minimipolynomeja. Tällöin lauseen 2.9.2 nojalla $m_{\mathsf{A}1}(\lambda) \mid m_{\mathsf{A}2}(\lambda)$ ja $m_{\mathsf{A}2}(\lambda) \mid m_{\mathsf{A}1}(\lambda)$, josta seuraa, että $m_{\mathsf{A}1}(\lambda) = m_{\mathsf{A}2}(\lambda)$. □

Lause 2.9.4. *Olkoot* $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathcal{M}_n(K)$*, Jos* $\mathsf{A} \approx \mathsf{B}$*, niin* $m_{\mathsf{A}}(\lambda) = m_{\mathsf{B}}(\lambda)$*.*

Todistus. Koska $\mathsf{A} \approx \mathsf{B}$, niin olemassa kääntyvä matriisi P, jolle $\mathsf{A} = \mathsf{PBP}^{-1}$. Olkoon $f(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ polynomi. Tällöin

$$\begin{aligned}f(\mathsf{A}) &= \mathsf{A}^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1\mathsf{A} + a_0\\ &= (\mathsf{PBP}^{-1})^k + a_{k-1}(\mathsf{PBP}^{-1})^{k-1} + \cdots + a_1(\mathsf{PBP}^{-1}) + a_0\\ &= \mathsf{PB}^k\mathsf{P}^{-1} + a_{k-1}\mathsf{PB}^{k-1}\mathsf{P}^{-1} + \cdots + a_1\mathsf{PBP}^{-1} + \mathsf{P}a_0\mathsf{P}^{-1}\\ &= \mathsf{P}(\mathsf{B}^k + a_{k-1}\mathsf{B}^{k-1} + \cdots + a_1\mathsf{B} + a_0)\mathsf{P}^{-1}\\ &= \mathsf{P}f(\mathsf{B})\mathsf{P}^{-1}.\end{aligned}$$

Saadaan, että $f(\mathsf{A}) = 0$, jos ja vain jos $f(\mathsf{B}) = 0$, josta seuraa lauseen väite.
□

3 Jordanin normaalimuoto

Tässä luvussa esitellään Jordanin lohkon ja Jordanin matriisin käsitteet sekä kuvataan matriisin hajotelma Jordanin muotoon. Luvun alussa määritellään polynomimatriisit ja niiden välillä laskutoimitukset ja todistetaan polynomimatriisien jäännöslause. Sitten, käyttämällä invariantteja polynomeja, tullaan yhteen matriisipolynomin normaalimuodoista - Schmidtin normaalimuotoon. Otetaan käyttöön seuralaismatriisin käsite ja sen avulla rakennetaan polynomimatriisin ensimmäinen normaali muoto ja sitten matriisin toinen normaali muoto. Yksi tärkeimmistä käsitteistä tässä luvussa on matriisin alkeistekijät. Niiden käyttöönottoa ja käyttöä varten tässä työvaiheessa on tarpeen täsmentää kuntaa, jonka suhteen matriisi on käytössä. Töitä jatketaan kompleksilukujen kunnalla. Luvun lopussa osoitetaan, että Jordanin lohko on hajoamaton eli matriisin Jordanin muoto on yksinkertaisin muoto tarkasteltaville matriiseille.

Matriisia

$$\mathsf{J}_k(c) = \begin{bmatrix} c & 1 & & & \\ & c & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c & 1 \\ & & & & c \end{bmatrix} = c\mathsf{I}_k + \mathsf{J}_k, \tag{45}$$

missä J_k on $k \times k$-kokoinen matriisi, jolle $[\mathsf{J}_k]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } j = i+1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$, kutsutaan polynomiin $(\lambda - c)^k$ liittyväksi *Jordanin lohkoksi.*

Jordanin lohko $\mathsf{J}_k(c)$ on *nilpotentti*, jos $c = 0$.

Määritelmä 3.0.1. Matriisi $J \in \mathcal{M}_n(K)$ on *Jordanin matriisi*, jos se on muotoa

$$J = \begin{bmatrix} J_{n1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{nk}(\lambda_k) \end{bmatrix}, \tag{46}$$

missä $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

3.1 Polynomimatriisit

Matriisia, jonka alkiot ovat K-kertoimisia muuttujan λ polynomeja, kutsutaan polynomimatriisiksi tai λ-matriisiksi:

$$\mathsf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{47}$$

Oletetaan, että kaikki luvun λ arvot ja polynomin $a_{ij}(\lambda)$ $(i, j \in \{1, 2, \dots, n\})$ kertoimet ovat kunnan K alkioita. Siis jokaiselle $\lambda_0 \in K$ pätee

$$\mathsf{A}(\lambda_0) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda_0) & a_{12}(\lambda_0) & \cdots & a_{1n}(\lambda_0) \\ a_{21}(\lambda_0) & a_{22}(\lambda_0) & \cdots & a_{2n}(\lambda_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\lambda_0) & a_{n2}(\lambda_0) & \cdots & a_{nn}(\lambda_0) \end{bmatrix} \in K^{n \times n}. \tag{48}$$

Kaikkien $n \times n$-kokoisten polynomimatriisien joukosta käytetään merkintää $\mathcal{M}_n(K[\lambda])$. Polynomimatriisien joukko $\mathcal{M}_n(K[\lambda])$ varustettuna matriisien summalla ja tulolla muodostaa renkaan.

Polynomimatriiseille on määritelty yhteen-, vähennys- ja polynomilla kertolaskut samalla tavalla kuin tavallisilla matriiseilla.

Polynomimatriisin *aste* on on suurin nollasta eroava alideterminantin riviluku.

Määritelmä 3.1.1. Polynomimatriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ *asteluku* on

$$\deg(\mathsf{A}(\lambda)) := \max\{\deg(a_{ij}(\lambda))\}. \tag{49}$$

Nollamatriisin asteluku on $-\infty$.

Määritelmä 3.1.2. Olkoon $\mathsf{A}(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} \lambda^i \mathsf{A}_i$ polynomimatriisi, jonka asteluku on l. Jos $\mathsf{A}_l = \mathsf{I}$, niin polynomimatriisia $\mathsf{A}(\lambda)$ kutsutaan *perusmuotoiseksi matriisiksi*.

Jos $\deg(\mathsf{A}(\lambda)) = l$, niin $\mathsf{A}(\lambda)$ voi esittää muodossa

$$\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1\lambda + \mathsf{A}_2\lambda^2 + \cdots + \mathsf{A}_l\lambda^l, \tag{50}$$

missä $\mathsf{A}_l \neq 0$.

Lause 3.1.1. *Olkoot* $\mathsf{A}(\lambda)$ *ja* $\mathsf{B}(\lambda)$ *samankokoisia polynominatriiseja ja olkoot* $\deg(\mathsf{A}(\lambda)) = l$, $\deg(\mathsf{B}(\lambda)) = m$. *Tällöin* $\deg(\mathsf{A}(\lambda) + \mathsf{B}(\lambda)) \leq \max\{l, m\}$ *ja* $\deg(\mathsf{A}(\lambda) \cdot \mathsf{B}(\lambda)) \leq l + m$.

Todistus. Määritellään $k = \max(l, m)$. Tällöin matriisit $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}(\lambda) &= \mathsf{A}_0\lambda^k + \mathsf{A}_1\lambda^{k-1} + \cdots + \mathsf{A}_k, \\
\mathsf{B}(\lambda) &= \mathsf{B}_0\lambda^k + \mathsf{B}_1\lambda^{k-1} + \cdots + \mathsf{B}_k,
\end{aligned}$$

missä $\mathsf{A}_0 \neq 0$ tai $\mathsf{B}_0 \neq 0$. Saadaan

$$\mathsf{A}(\lambda) + \mathsf{B}(\lambda) = (\mathsf{A}_0 + \mathsf{B}_0)\lambda^k + (\mathsf{A}_1 + \mathsf{B}_1)\lambda^{k-1} + \cdots + (\mathsf{A}_k + \mathsf{B}_k)$$

ja siten $\deg(\mathsf{A}(\lambda) + \mathsf{B}(\lambda)) \leq k$. Osoitetaan nyt, että $\deg(\mathsf{A}(\lambda) \cdot \mathsf{B}(\lambda)) \leq l + m$. Koska $\deg(\mathsf{A}(\lambda)) = l$ ja $\deg(\mathsf{B}(\lambda)) = m$, niin

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}(\lambda) &= \mathsf{A}_0\lambda^l + \mathsf{A}_1\lambda^{l-1} + \cdots + \mathsf{A}_l, \\
\mathsf{B}(\lambda) &= \mathsf{B}_0\lambda^m + \mathsf{B}_1\lambda^{m-1} + \cdots + \mathsf{B}_m,
\end{aligned}$$

missä $\mathsf{A}_0 \neq 0$ ja $\mathsf{B}_0 \neq 0$. Nyt

$$\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{A}_0\mathsf{B}_0\lambda^{l+m} + (\mathsf{A}_0\mathsf{B}_1 + \mathsf{A}_1\mathsf{B}_0)\lambda^{l+m-1} + \cdots + \mathsf{A}_l\mathsf{B}_m$$

ja siten $\deg \mathsf{A}(\lambda)\mathsf{B}(\lambda) \leq l + m$. □

Määritelmä 3.1.3. Jos $\det(\mathsf{A}(\lambda)) \equiv 0$, niin matriisi $\mathsf{A}(\lambda)$ on *singulaarinen.*

Määritelmä 3.1.4. Polynomimatriisi $\mathsf{A}(\lambda)$ on *unimodulaarinen* (*säännöllinen*), jos sen determinantti on nollasta eroava vakio.

Polynomimatriisi $\mathsf{A}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(K[\lambda])$ on kääntyvä, jos on olemassa sellainen polynomimatriisi $\mathsf{A}^{-1}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(K[\lambda])$, että

$$\mathsf{A}(\lambda)(\mathsf{A}(\lambda))^{-1} = (\mathsf{A}(\lambda))^{-1}\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{I}. \tag{51}$$

Lause 3.1.2. *λ-matriiisi $\mathsf{A}(\lambda)$ on kääntyvä, jos ja vain jos se on unimodulaarinen.*

Todistus. Olkoon matriisi $\mathsf{A}(\lambda)$ unimodulaarinen eli $\det(\mathsf{A}(\lambda)) = c \neq 0$. Tällöin Cramerin säännön mukaan

$$(\mathsf{A}(\lambda))^{-1} = \frac{1}{\det(\mathsf{A}(\lambda))}\mathrm{adj}(\mathsf{A}(\lambda)) = \frac{1}{c}\mathrm{adj}(\mathsf{A}(\lambda)). \tag{52}$$

Koska matriisin $\mathrm{adj}(\mathsf{A}(\lambda))$ alkiot ovat matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ kofaktorit, jotka ovat polynomeja, niin $(\mathsf{A}(\lambda))^{-1} \in \mathcal{M}_n(K[\lambda])$.

Olkoon nyt matriisi $\mathsf{A}(\lambda)$ kääntyvä. Tällön on olemassa matriisi $\mathsf{B}(\lambda)$, jolle $\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{I}$. Determinantin ominaisuuksien perusteella saadaan $\det(\mathsf{A}(\lambda)) \cdot \det(\mathsf{B}(\lambda)) = 1$. Tästä seuraa, että $\det(\mathsf{A}(\lambda))$ on nollasta eroava vakio ja siten matriisi $\mathsf{A}(\lambda)$ on unimodulaarinen. □

3.2 Polynomimatriisien jäännöslause

Lause 3.2.1. *Olkoot* $\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{A}_l\lambda^l + \cdots + \mathsf{A}_1\lambda + \mathsf{A}_0$ *ja* $\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{B}_m\lambda^m + \cdots + \mathsf{B}_1\lambda + \mathsf{B}_0$ *polynomimatriiseja, joiden asteluvut ovat l ja m vastaavasti. Jos*

B_m *on kääntyvä matriisi, niin on olemassa yksikäsitteiset matriisipolynomit* $\mathsf{Q}(\lambda), \tilde{\mathsf{Q}}(\lambda), \mathsf{R}(\lambda)$ *ja* $\tilde{\mathsf{R}}(\lambda)$*, joille*

$$\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{Q}(\lambda)\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{R}(\lambda), \tag{53}$$

missä $\deg(\mathsf{R}(\lambda)) < m$*, ja*

$$\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{B}(\lambda)\tilde{\mathsf{Q}}(\lambda) + \tilde{\mathsf{R}}(\lambda), \tag{54}$$

missä $\deg(\tilde{\mathsf{R}}(\lambda)) < m$*.*

Todistus. Osoitetaan polynomimatriisien $\mathsf{Q}(\lambda)$ ja $\mathsf{R}(\lambda)$ olemassaolo ja yksikäsitteisyys. Polynomimatriisien $\tilde{\mathsf{Q}}(\lambda)$ ja $\tilde{\mathsf{R}}(\lambda)$ osalta todistus on samanlainen.

Jos $l < m$, niin asetetaan $\mathsf{Q}(\lambda) = 0$ ja $\mathsf{R}(\lambda) = \mathsf{A}(\lambda)$.

Oletetaan, että $l \geq m$. Jaetaan ensin matriisi $\mathsf{A}(\lambda)$ polynomimatriisin $\mathsf{B}(\lambda)$ ensimmaisellä termillä $\mathsf{B}_m\lambda^m$. Koska

$$\begin{aligned}
&\mathsf{A}_l B_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{A}_l B_m^{-1}\lambda^{l-m}(\mathsf{B}_m\lambda^m + \cdots + \mathsf{B}_1\lambda + \mathsf{B}_0) = \\
&= \mathsf{A}_l B_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}_m\lambda^m + \cdots + \mathsf{A}_l B_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}_1\lambda + \mathsf{A}_l B_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}_0 = \\
&= \mathsf{A}_l\lambda^l + \cdots + \mathsf{A}_l B_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}_1\lambda + \mathsf{A}_l B_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}_0 \\
&= \mathsf{A}_l\lambda^l + \mathsf{A}_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + \mathsf{A}_1\lambda + \mathsf{A}_0 - \mathsf{A}_{l-1}\lambda^{l-1} - \cdots - \mathsf{A}_1\lambda - \mathsf{A}_0 + \\
&+ \mathsf{A}_l\mathsf{B}_m^{-1}\mathsf{B}_{m-1}\lambda^{l-1} + \cdots + \mathsf{A}_l B_m^{-1}\lambda^{l-m+1}\mathsf{B}_1\lambda + \mathsf{A}_l B_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}_0 \\
&= \mathsf{A}(\lambda) - ((\mathsf{A}_{l-1} - \mathsf{A}_l\mathsf{B}_m^{-1}\mathsf{B}_{m-1})\lambda^{l-1} + \cdots + (\mathsf{A}_{l-m} - \mathsf{A}_l B_m^{-1}\mathsf{B}_0)\lambda^{l-m} + \\
&+ \mathsf{A}_{l-m-1}\lambda^{l-m-1} + \cdots + \mathsf{A}_1\lambda + \mathsf{A}_0) \\
&= \mathsf{A}(\lambda) - \mathsf{A}^{(1)}(\lambda),
\end{aligned}$$

niin

$$\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{A}_l B_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{A}^{(1)}(\lambda),$$

missä $\mathsf{A}^{(1)}(\lambda)$ on polynomimatriisi, jonka asteluku $\deg(\mathsf{A}^{(1)}(\lambda)) = l_1 \leq l - 1$.

Tällöin $\mathsf{A}^{(1)}(\lambda)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathsf{A}^{(1)}(\lambda) = \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}\lambda^{l_1} + \cdots + \mathsf{A}^{(1)}_1\lambda + \mathsf{A}^{(1)}_0, \qquad \mathsf{A}^{(1)}_{l_1} \neq 0,\ \ l_1 < l.$$

Jos $l_1 \geq m$, niin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&\mathsf{A}^{(1)}_{l_1}B_m^{-1}\lambda^{l_1-m}\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}B_m^{-1}\lambda^{l_1 m}(\mathsf{B}_m\lambda^m + \cdots + \mathsf{B}_1\lambda + \mathsf{B}_0) = \\
&= \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}B_m^{-1}\lambda^{l_1-m}\mathsf{B}_m\lambda^m + \cdots + \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}B_m^{-1}\lambda^{l_1-m}\mathsf{B}_1\lambda + \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}B_m^{-1}\lambda^{l_1-m}\mathsf{B}_0 = \\
&= \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}\lambda^{l_1} + \cdots + \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}B_m^{-1}\lambda^{l_1-m}\mathsf{B}_1\lambda + \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}B_m^{-1}\lambda^{l_1-m}\mathsf{B}_0 \\
&= \cdots = \mathsf{A}^{(1)}(\lambda) - \mathsf{A}^{(2)}(\lambda),
\end{aligned}$$

ja siten

$$\mathsf{A}^{(1)}(\lambda) = \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}B_m^{-1}\lambda^{l_1-m}\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{A}^{(2)}(\lambda),$$

missä $\mathsf{A}^{(2)}(\lambda)$ on polynomimatriisi, jonka asteluku $\deg(\mathsf{A}^{(2)}(\lambda)) = l_2 \leq l_1 - 1$.

Jatketaan tätä prosessia kunnes saadaan polynomimatriisi $A^{(r)}(\lambda)$, jolle $\deg(A^{(r)}(\lambda)) = l_r < m$ ja $\deg(A^{(r-1)}(\lambda)) = l_{r-1} \geq m$. Nyt meillä on polynomimatriisien joukko $A(\lambda)$, $A^1(\lambda)$, $\ldots$, $A^{r-1}(\lambda)$, jolle $\deg(A(\lambda)) < \deg(A^1(\lambda)) < \cdots < \deg(A^{r-1}(\lambda))$. Merkitään $A^0(\lambda) = A(\lambda)$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\mathsf{A}^{(s-1)}(\lambda) = \mathsf{A}^{(s-1)}_{l_{s-1}}B_m^{-1}\lambda^{l_{s-1}-m}\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{A}^{(s)}(\lambda), \qquad s \in \{1, 2, \ldots, r\}.$$

Yhdistetään saadut yhtälöt:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{A}_l\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{A}^{(1)}(\lambda) \\
&= \mathsf{A}_l\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l_1-m}\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{A}^{(2)}(\lambda) \\
&= \cdots = \\
&= \mathsf{A}_l\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l-m}\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l_1-m}\mathsf{B}(\lambda) + \cdots + \mathsf{A}^{(r-1)}_{l_{r-1}}\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l_{r-1}-m}\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{A}^{(r)}(\lambda) \\
&= (\mathsf{A}_l\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l-m} + \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l_1-m} + \cdots + \mathsf{A}^{(r-1)}_{l_{r-1}}\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l_{r-1}-m})\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{A}^{(r)}(\lambda).
\end{aligned}$$

Määrittelemällä $\mathsf{A}_l\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l-m} + \mathsf{A}^{(1)}_{l_1}\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l_1-m} + \cdots + \mathsf{A}^{(r-1)}_{l_{r-1}}\mathsf{B}_m^{-1}\lambda^{l_{r-1}-m} = \mathsf{Q}(\lambda)$ ja $\mathsf{A}^r(\lambda) = \mathsf{R}(\lambda)$ saadaan haluttu tulos.

Osoitetaan nyt polynomien $\mathsf{Q}(\lambda)$ ja $\mathsf{R}(\lambda)$ yksikäsitteisyys. Oletetaan, että on olemassa polynomit $\tilde{\mathsf{Q}}(\lambda)$ ja $\tilde{\mathsf{R}}(\lambda)$, joille pätee

$$\mathsf{A}(\lambda) = \tilde{\mathsf{Q}}(\lambda)\mathsf{B}(\lambda) + \tilde{\mathsf{R}}(\lambda), \qquad \deg(\tilde{\mathsf{R}}(\lambda)) < m. \tag{55}$$

Vähennetään yhtälöstä (53) puolittain yhtälö (55):

$$\begin{aligned} &0 = \mathsf{Q}(\lambda)\mathsf{B}(\lambda) + \mathsf{R}(\lambda) - \tilde{\mathsf{Q}}(\lambda)\mathsf{B}(\lambda) - \tilde{\mathsf{R}}(\lambda) \\ &\Rightarrow 0 = (\mathsf{Q}(\lambda) - \tilde{\mathsf{Q}}(\lambda))\mathsf{B}(\lambda) - (\tilde{\mathsf{R}}(\lambda) - \mathsf{R}(\lambda)) \\ &\Rightarrow \tilde{\mathsf{R}}(\lambda) - \mathsf{R}(\lambda) = (\mathsf{Q}(\lambda) - \tilde{\mathsf{Q}}(\lambda))\mathsf{B}(\lambda). \end{aligned}$$

Jos $\mathsf{Q}(\lambda) \neq \tilde{\mathsf{Q}}(\lambda)$, niin $\deg((\mathsf{Q}(\lambda) - \tilde{\mathsf{Q}}(\lambda))\mathsf{B}(\lambda)) \geq m$. Toisaalta, koska $\deg(\tilde{\mathsf{R}}(\lambda)) < m$ ja $\deg(\mathsf{R}(\lambda)) < m$, niin $\deg(\tilde{\mathsf{R}}(\lambda) - \mathsf{R}(\lambda)) < m$, joka on mahdotonta. Tästä seuraa, että $\mathsf{Q}(\lambda) = \tilde{\mathsf{Q}}(\lambda)$ ja siten $\mathsf{R}(\lambda) \neq \tilde{\mathsf{R}}(\lambda)$. □

Matriiseja $\mathsf{Q}(\lambda)$ ja $\mathsf{R}(\lambda)$ kutsutaan jakolaskun $\mathsf{A}(\lambda) : \mathsf{B}(\lambda)$ *oikeanpuoleiseksi osamääräksi ja jakojäännökseksi* vastaavasti. Matriiseja $\tilde{\mathsf{Q}}(\lambda)$ ja $\tilde{\mathsf{R}}(\lambda)$ kutsutaan jakolaskun $\mathsf{A}(\lambda) : \mathsf{B}(\lambda)$ *vasemmanpuoleiseksi osamääräksi ja jakojäännökseksi* vastaavasti.

Olkoot $\mathsf{A}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(K[\lambda])$, $\mathsf{B} \in \mathcal{M}_n(K)$ ja $\deg(\mathsf{A}) = l$. Tällöin matriisin B sijoittaminen luvun λ tilalle kaavaan (50) antaa polynomimatriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ oikeanpuolisen arvon matriisilla B:

$$\mathsf{A}(\mathsf{B}) = \mathsf{A}_l\mathsf{B}^l + \mathsf{A}_{l-1}\mathsf{B}^{l-1} + \cdots + \mathsf{A}_1\mathsf{B} + \mathsf{A}_0 \tag{56}$$

Vastaavalla tavalla saadaan vasemmanpuoleinen polynomimatriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ arvo matriisilla B:

$$\tilde{\mathsf{A}}(\mathsf{B}) = \mathsf{B}^l\mathsf{A}_l + \mathsf{B}^{l-1}\mathsf{A}_{l-1} + \cdots + \mathsf{B}\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_0. \tag{57}$$

Lause 3.2.2. (Jäännöslause) *Olkoot* $\mathsf{A}(\lambda)$ *ja* B *kuten edellä. Tällöin on olemassa polynomimatriisit* $\mathsf{C}(\lambda)$ *ja* $\tilde{\mathsf{C}}(\lambda)$*, joille*

$$\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{C}(\lambda)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) + \mathsf{A}(\mathsf{B}) \tag{58}$$

ja

$$\mathsf{A}(\lambda) = (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B})\tilde{\mathsf{C}}(\lambda) + \tilde{\mathsf{A}}(\mathsf{B}). \tag{59}$$

Eli jakolaskun $\mathsf{A}(\lambda) : (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B})$ oikeanpuoleinen osamäärä on matriisi $\mathsf{A}(\mathsf{B})$ ja vasemmanpuoleinen vastaavasti $\tilde{\mathsf{A}}(\mathsf{B})$.

Todistus. Kaikilla $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$ pätee

$$\lambda^j\mathsf{I} - \mathsf{B}^j = (\lambda^{j-1}\mathsf{I} + \lambda^{j-2}\mathsf{B} + \cdots + \lambda\mathsf{B}^{j-2} + \mathsf{B}^{j-1})(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}).$$

Huomataan, että

$$\sum_{j=1}^{l}\mathsf{A}_j(\lambda^j\mathsf{I} - \mathsf{B}^j) = \sum_{j=1}^{l}\mathsf{A}_j\lambda^j - \sum_{j=1}^{l}\mathsf{A}_j\mathsf{B}^j = \sum_{j=0}^{l}\mathsf{A}_j\lambda^j - \sum_{j=0}^{l}\mathsf{A}_j\mathsf{B}^j = \mathsf{A}(\lambda) - \mathsf{A}(\mathsf{B}).$$

Toisaalta

$$\sum_{j=1}^{l}\mathsf{A}_j(\lambda^j\mathsf{I} - \mathbf{B}^j) = \sum_{j=1}^{l}\mathsf{A}_j(\lambda^{j-1}\mathsf{I} + \lambda^{j-2}\mathsf{B} + \cdots + \lambda\mathsf{B}^{j-2} + \mathsf{B}^{j-1})(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}).$$

Merkitään

$$\mathsf{C}(\lambda) = \sum_{j=1}^{l}\mathsf{A}_j(\lambda^{j-1}\mathsf{I} + \lambda^{j-2}\mathsf{B} + \cdots + \lambda\mathsf{B}^{j-2} + \mathsf{B}^{j-1})$$

ja saadaan, että $\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{C}(\lambda)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) + \mathsf{A}(\mathsf{B})$. Lauseen toinen kohta osoitetaan samalla tavalla. □

Seuraus 3.2.3. *Polynomimatriisi* $\mathsf{A}(\lambda)$ *on jaollinen oikealta (vasemmalta) polynomimatriisilla* $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}$*, jos ja vain jos* $\mathsf{A}(\mathsf{B}) = 0$ *(*$\tilde{\mathsf{A}}(\mathsf{B}) = 0$*).*

Jäännöslauseen avulla saadaan vaihtoehtoinen tapa osoittaa Cayleyn ja Hamiltonin lause.

Cayleyn ja Hamilton lause. Olkoon $p_{\mathsf{A}}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ matriisin A karakteristinen polynomi. Tällöin $p_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = 0$.

Todistus. Olkoon $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$. Merkitään $\mathsf{B}(\lambda) = \mathrm{adj}(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})$. Tällöin $\mathsf{B}(\lambda)$ on asteluvun $n - 1$ polynomimatriisi kunnan K suhteen. Lauseen 2.5.4 ja seurauksen 2.5.5 nojalla

$$(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{B}(\lambda)(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) = \det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{I} = p_{\mathsf{A}}(\lambda)\mathsf{I},$$

missä $p_{\mathsf{A}}(\lambda)$ on kokoa $n \times n$ oleva polynomimatriisi. Saadaan, että polynomimatriisi $p_{\mathsf{A}}(\lambda)$ on jaollinen polynomimatriisilla $\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}$. Jäännöslauseen seurauksen perusteella jakolaskun $p_{\mathsf{A}}(\lambda) : (\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A})$ jakojäännös on nolla eli $p_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = 0$. $\square$

Esimerkki 3.2.4. Olkoot

$$\mathsf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}, \ \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tällöin

$$\lambda \mathsf{I} - \mathsf{B} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix}, \ \mathsf{A}(\mathsf{B}) = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Saadaan lopuksi

$$\mathsf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 Alkeisrivioperaatiot ja ekvivalenttius

Otetaan käyttöön polynomimatriisien alkeisoperaatioiden käsitteet ja niitä vastaavat alkeismatriisit analogisesti reaalikertoimisten matriisien kanssa. Alkeisoperaatioiden avulla matriisi voidaan esittää diagonaalimuodossa tai muodossa, joka on diagonaalista lähellä. λ-matriisien alkeisoperaattorit ovat

(1) Rivin (sarakkeen) kertominen nollasta eroavalla luvulla.

(2) Kahden rivin (tai kahden sarakkeen) paikkojen vaihtaminen.

(3) Riviin (sarakkeeseen) lisääminen polynomilla $p(\lambda)$ kerrottu toinen rivi (sarake).

Nämä alkeisoperaatiot voidaan toteuttaa kertomalla yhdellä seuraavista alkeismatriiseista:

$$\mathsf{E}_i(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathsf{E}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathsf{E}_{ij}(p(\lambda)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & p(\lambda) & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Lause 3.3.1. *Jos* E *on alkeismatriisi, niin sille pätee:*

(a) sen käänteismatriisi on myös alkeismatriisi;

(b) se on unimodulaarinen.

Todistus. Kokeilemalla on helppo näyttää, että $\mathsf{E}_i(c)\mathsf{E}_i(\frac{1}{c}) = \mathsf{I}$, $\mathsf{E}_{ij}\mathsf{E}_{ji} = \mathsf{I}$ ja $\mathsf{E}_{ij}(P(\lambda))\mathsf{E}_{ji}(-p(\lambda)) = \mathsf{I}$. Tästä päätellään, että jokaisella alkeismatriisilla on käänteismatriisi, joka on myös alkeismatriisi. Tästä seuraa myös, että jokainen alkeismatriisi on kääntyvä ja siten Lauseen 3.1.2 nojalla se on unimodulaarinen. □

Määritelmä 3.3.1. Matriisit A ja B ovat *ekvivalentit* (merkitään $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$), jos on olemassa alkeispolynomimatriisit $\mathsf{E}_1(\lambda)$, $\mathsf{E}_2(\lambda)$, ..., $\mathsf{E}_k(\lambda)$, $\mathsf{E}_{k+1}(\lambda)$, ..., $\mathsf{E}_s(\lambda)$, joille

$$\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{E}_k(\lambda)\cdots\mathsf{E}_1(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{E}_{k+1}(\lambda)\cdots\mathsf{E}_s(\lambda). \tag{60}$$

Viimeinen kaava voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{P}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{Q}(\lambda), \tag{61}$$

missä $\mathsf{P}(\lambda) = \mathsf{E}_k(\lambda)\cdots\mathsf{E}_1(\lambda)$ ja $\mathsf{Q}(\lambda) = \mathsf{E}_{k+1}(\lambda)\cdots\mathsf{E}_s(\lambda)$ ovat polynomimatriiseja kunnan K suhteen.

Koska Lauseen 3.1.2 nojalla unimodulaariset matriisit ovat myös kääntyviä matriiseja, niin kukin unimodulaarinen matriisi voidaan muuntaa alkeismatriisiksi alkeisrivioperaatioilla. Toisin sanoen unimodulaarinen matriisi voidaan esittää alkeismatriisien tulona.

Lause 3.3.2. *Matriisit* A *ja* B *ovat ekvivalentit, jos ja vain jos on olemassa unimodulaariset matriisit* $\mathsf{P}(\lambda)$ *ja* $\mathsf{Q}(\lambda)$*, joille* $\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{P}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{Q}(\lambda)$.

Esimerkki 3.3.3. Polynomimatriiseille $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ pätee

(a) $\mathsf{A}(\lambda) \sim \mathsf{A}(\lambda)$: voidaan kirjoittaa esimerkiksi

$$\mathsf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ c & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ -c & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathsf{A}(\lambda) \begin{bmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ c & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ -c & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{I}\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{I};$$

(b) $\mathsf{A} \sim \mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{B} \sim \mathsf{A}$;

(c) $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$ ja $\mathsf{B} \sim \mathsf{C} \Rightarrow \mathsf{A} \sim \mathsf{C}$.

3.4 Polynomimatriisin kanoninen muoto

Tässä luvussa näytetään, että jokainen polynomimatriisi voidaan muuttaa diagonaalipolynomimatriisiksi alkeisoperaatioiden avulla.

Lause 3.4.1. *Mikä tahansa polynomimatriisi $\mathsf{A}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(K[\lambda])$ voidaan alkeisoperaatioiden avulla esittää muodossa*

$$\mathsf{A}_0(\lambda) = \operatorname{diag}[a_1(\lambda), a_2(\lambda), \ldots, a_n(\lambda)], \tag{62}$$

missä $a_1(\lambda), \ldots, a_n(\lambda)$ ovat pääpolynomeja ja $a_j(\lambda)$ jakaa polynomin $a_{j+1}(\lambda)$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Matriisi A_0 kutsutaan matriisin $A(\lambda)$ *kanoniseksi muodoksi.*

Ehdosta, että polynomi $a_{j+1}(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $a_j(\lambda)$, seuraa, että jos matriisin $\mathsf{A}_0(\lambda)$ diagonaalissa on olemassa sellaisia polynomeja $a_k(\lambda), \ldots,$ $a_s(\lambda)$, että $a_k(\lambda) = \cdots = a_s(\lambda) \equiv 0$, niin matriisin $\mathsf{A}_0(\lambda)$ muoto on

$$\mathsf{A}_0(\lambda) = \operatorname{diag}[a_1(\lambda), \ldots a_{k-1}(\lambda), 0, \ldots, 0]. \tag{63}$$

Todistus. Olkoon $A(\lambda)$ polynomimatriisi muotoa

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

Muutetaan matriisia $\mathsf{A}(\lambda)$ alkeisoperaatioiden avulla sen saamiseksi kanoniseen muotoon.

Vaihe 1. Olkoon $a_{ij}(\lambda) \neq 0$ matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ asteeltaan pienin polynomi. Tyypin (2) alkeisoperaatioiden avulla siirretään alkio a_{ij} paikalle (1,1) ja annetaan jokaiselle alkiolle indeksi uuden paikan mukaan. Polynomien jakoyhtälön nojalla saatu matriisi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathsf{A}'(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{11}(\lambda)q_{12}(\lambda) + r_{12}(\lambda) & \cdots & a_{11}(\lambda)q_{1n}(\lambda) + r_{1n}(\lambda) \\ a_{11}(\lambda)q_{21}(\lambda) + r_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{11}(\lambda)q_{n1}(\lambda) + r_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

missä $\deg(r_{ij}(\lambda)) < \deg(a_{11}(\lambda))$.

Sovelletaan nyt matriisille $\mathsf{A}'(\lambda)$ (3)-tyyppinen alkeisoperaatio: vähennetään sarakkeesta j ensimmäinen sarake kerrottuna luvulla q_{1j} ja rivistä i ensimmäinen rivi kerrottuna luvulla q_{i1} kaikille $j = 2, \dots, n$ ja $i = 2, \dots, n$. Saadaan matriisin $\mathsf{A}'(\lambda)$ kanssa ekvivalentti polynomimatriisi

$$\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & r_{12}(\lambda) & \cdots & r_{1n}(\lambda) \\ r_{21}(\lambda) & a'_{22}(\lambda) & \cdots & a'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{n1}(\lambda) & a'_{n2}(\lambda) & \cdots & a'_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

Jos kaikki jäännöstermit r_{ij} eivät häviä, niin toistetaan 1. vaihe uudestaan. Lopuksi annetaan jokaiselle alkiolle indeksi uuden paikan mukaan. Vaiheen 1 jälkeen saadaan seuraavan muotoinen matriisi

$$\tilde{\mathsf{A}}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

joka on ekvivalentti matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ kanssa.

Vaihe 2. Jos matriisilla $\tilde{\mathsf{A}}(\lambda)$ on olemassa alkio a_{ij}, jolle $\deg(a_{ij}) < \deg(a_{11})$, niin palataan vaiheeseen 1. Vaiheen 2 jälkeen saadaan matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ kanssa ekvivalentti matriisi, jonka alkioille pätee $\deg(a_{ij}) \geq \deg(a_{11})$ kaikilla $i \in$

$\{2, \ldots, n\}, j \in \{2, \ldots, n\}$.

Vaihe 3. Tässä vaiheessa tarkistetaan, onko matriisilla alkioita, jotka eivät ole jaollisia polynomilla $a_{11}(\lambda)$. Jos kaikki matriisin alkiot ovat jaollisia polynomilla $a_{11}(\lambda)$, niin siirrytään vaiheeseen 4. Oletetaan, että alkio a_{ij} ei ole jaollinen polynomilla $a_{11}(\lambda)$ eli $a_{ij}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{ij}(\lambda) + r_{ij}(\lambda)$, missä $r_{ij}(\lambda) \neq 0$. Lisätään sarake j ensimmäiselle sarakkeelle ja toistetaan vaiheet 1 ja 2 uudestaan. Saadaan

$$\mathsf{A}(\lambda) \sim \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2j}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij}(\lambda) & & a_{ij}(\lambda) & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ q_{2j}(\lambda)a_{11}(\lambda) + r_{2j}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2j}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{ij}(\lambda)a_{11}(\lambda) + r_{ij}(\lambda) & a_{i2}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda) & \cdots & a_{in}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{nj}(\lambda)a_{11}(\lambda) + r_{nj}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nj}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ r_{2j}(\lambda) & a'_{22}(\lambda) & \cdots & a'_{2j}(\lambda) & \cdots & a'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{ij}(\lambda) & a'_{i2}(\lambda) & \cdots & r_{ij}(\lambda) & \cdots & a'_{in}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{nj}(\lambda) & a'_{n2}(\lambda) & \cdots & a'_{nj}(\lambda) & \cdots & a'_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$\deg(r_{ij}(\lambda)) < \deg(a_{11}(\lambda))$. Toistetaan vaiheet 1 ja 2 uudestaan. Koska paikalla (1, 1) sijaitsevan polynomin aste vähenee, tämä prosessi voi sisältää vain äärellisen määrän askeleita. Jatketaan kunnes matriisi saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \cdots & b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2}(\lambda) & \cdots & b_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

missä $\deg(a_1) \leq \deg(b_{ij})$ ja polynomi $b_{ij}(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $a_1(\lambda)$ kaikilla $i, j \in \{2, \ldots, n\}$.

Vaihe 4. Jos kaikki alkiot b_{ij} häviävät, niin lause on todistettu. Muuten, soveltamalla askelia 1-3 voidaan matriisi $\mathsf{A}(\lambda)$ muuttaa muotoon

$$\begin{bmatrix} a_1(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(\lambda) & \cdots & c_{3n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n3}(\lambda) & \cdots & c_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

missä $\deg(a_1(\lambda)) \leq \deg(a_2(\lambda)) \leq \deg(c_{ij}(\lambda))$ kaikilla $i, j \in \{3, \ldots, n\}$ ja polynomi $a_1(\lambda)$ jakaa polynomin $a_2(\lambda)$.

Loppujen lopulta soveltamalla jokaisen vaiheen sopivaa toistonmäärää saadaan matriisi muodossa (62). □

3.5 Smithin normaalimuoto

Tässä luvussa esitellään alkeisjakajan ja matriisin invariantin polynomin käsitteet. Näitä polynomeja käyttäen rakennetaan matriisin A kanoninen muoto.

Olkoon $\mathsf{A}(\lambda)$ $n \times n$-kokoinen polynomimatriisi. $\mathsf{A}(\lambda)$ on *säännöllinen*, jos ja vain jos $\operatorname{rank}(\mathsf{A}) = n$.

Lause 3.5.1. *Polynomimatriisin aste on invariantti ekvivalenttioperaatioiden suhteen (ekvivalenttioperaatiot eivät muuta matriisin astetta).*

Todistus. Olkoot $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ ekvivalentteja matriiseja. Tällöin Lauseen 3.3.2 nojalla on olemassa unimodulaariset matriisit $\mathsf{P}(\lambda)$ ja $\mathsf{Q}(\lambda)$, joille $\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{P}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{Q}(\lambda)$. Sovelletaan yhtälölle Binet'n ja Cauchyn kaavaa. Matriisin B j-asteen alideterminantti $b_j(\lambda)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$b_j(\lambda) = \sum_s p_{js}(\lambda)a_{js}(\lambda)q_{js}(\lambda), \tag{64}$$

missä $p_{js}(\lambda)$, $a_{js}(\lambda)$ ja $q_{js}(\lambda)$ ovat matriisien $\mathsf{P}(\lambda)$, $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{Q}(\lambda)$ vastaavasti j-asteen alideterminantteja. Olkoon $\operatorname{rank}(\mathsf{B}(\lambda)) = r$.Tällöin on olemassa matriisin $\mathsf{B}(\lambda)$ nollasta eroava r-asteen alideterminantti $b_r(\lambda)$. Kaavasta (64) saadaan, että on olemassa alideterminantti $a_{rs}(\lambda) \neq 0$ ja siten $\operatorname{rank}(\mathsf{A}(\lambda)) \geq r$ eli $\operatorname{rank}(\mathsf{A}(\lambda)) \geq \operatorname{rank}(\mathsf{B}(\lambda))$. Vastaavasti, kaavasta $\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{P}^{-1}(\lambda)\mathsf{B}(\lambda)\mathsf{Q}^{-1}(\lambda)$ seuraa, että $\operatorname{rank}(\mathsf{B}(\lambda)) \geq \operatorname{rank}(\mathsf{A}(\lambda))$. Siten päätellään, että $\operatorname{rank}(\mathsf{A}(\lambda)) = \operatorname{rank}(\mathsf{B}(\lambda))$. □

3.5.1 Polynomimatriisin j-asteen alideterminanttien suurin yhteinen tekijä

Olkoon $\mathsf{A}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(K[\lambda])$ ja olkoon $\operatorname{rank}(\mathsf{A}(\lambda)) = r$. Tällölin matriisilla A on ainakin yksi nollasta eroava r-asteinen alideterminantti, ja kaikki matriisin A asteetta $r+1$ olevat alideterminantit ovat yhtä suuret kuin nolla. Merkitään $M_k = \left\{ A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} : 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n,\ 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n \right\}$ kaikkien matriisin A k-asteiden alideterminanttien joukko. Olkoon $d_k(\lambda)$ joukon M_k alkioiden suurin yhteinen tekijä. Lauseen 2.5.1. nojalla jokainen matriisin A k-asteen alideterminantti voidaan esittää matriisin A $(k-1)$-asteiden alideterminanttien lineaarikombinaationa kaikilla $k \in \{2, \ldots, r\}$. Tästä seuraa, että polynomi $d_k(\lambda)$ on jaollinen polynomilla d_{k-1} kaikilla $k \in \{2, \ldots, r\}$. Määritellään lisäksi $d_0(\lambda) \equiv 1$.

Esimerkki 3.5.2. Olkoon $\mathsf{A}_0(\lambda) = \operatorname{diag}[a_a(\lambda), a_2(\lambda), \ldots, a_r(\lambda), 0, \ldots, 0]$. Tällöin polynomit, jotka oli määritelty edellisessä kappaleessa, ovat

$$d_1(\lambda) = a_1(\lambda),\ \ d_2(\lambda) = a_1(\lambda)a_2(\lambda),\ \ \ldots,\ \ d_r(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} a_j(\lambda) \tag{65}$$

Osoitetaan, että tämä polynomien valinta on ekvivalentti alkeisoperaatioiden suhteen.

Lause 3.5.3. *Olkoot* $\mathsf{A}(\lambda)$, $\mathsf{B}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(K[\lambda])$ r*- asteisia ekvivalentteja matriiseja ja olkoot* $d_j(\lambda)$ *ja* $\delta_j(\lambda)$ *matriisien* $\mathsf{A}(\lambda)$ *ja* $\mathsf{B}(\lambda)$ j*-asteen alideterminanttien suurimmat yhteiset tekijät. Tällöin* $d_j(\lambda) = \delta_j(\lambda)$.

Todistus. Olkoot $a_j(\lambda)$ ja $b_j(\lambda)$ matriisien $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ j-asteiden alideterminantit. Koska matriisit $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ ovat ekvivalentteja, niin lauseen 3.3.2 nojalla on olemassa unimodulaariset matriisit $\mathsf{P}(\lambda)$ ja $\mathsf{Q}(\lambda)$ siten, että $\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{P}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{Q}(\lambda)$. Soveltamalla tälle yhtälölle Binet'n ja Cauchyn kaavaa saadaan

$$\begin{aligned}
b_j(\lambda) &= \mathsf{B}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_j \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_j \end{bmatrix} = \\
&= \sum_{\substack{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_j<n \\ 1\le\beta_1<\ldots<\beta_j<n}} \mathsf{P}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_j \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_j \end{bmatrix} \mathsf{A}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_j \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_j \end{bmatrix} \mathsf{Q}\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_j \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_j \end{bmatrix} \\
&= \sum_s p_{js}(\lambda) a_{js}(\lambda) q_{js}(\lambda).
\end{aligned}$$

Koska $\delta_j(\lambda)$ on kaikkien matriisin $\mathsf{B}(\lambda)$ j-asteiden alimatriisien suuri yhteinen tekijä, niin polynomi $b_j(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $\delta_j(\lambda)$ eli $b_j(\lambda) = \delta_j(\lambda)\cdot\tilde{b}_j(\lambda)$. Vastaavasti $a_j(\lambda) = d_j(\lambda)\cdot\tilde{a}_j(\lambda)$. Saadaan

$$b_j(\lambda) = \delta_j(\lambda)\cdot\tilde{b}_j(\lambda) = d_j(\lambda)\sum_s p_{js}(\lambda)\tilde{a}_{js}(\lambda)q_{js}(\lambda).$$

Tästä kaavasta seuraa, että polynomi $\delta_j(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $d_j(\lambda)$. Vastaavasti kaavasta $\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{P}^{-1}(\lambda)\mathsf{B}(\lambda)\mathsf{Q}^{-1}(\lambda)$ seuraa, että polynomi $d_j(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $\delta_j(\lambda)$. Siten $d_j(\lambda) = \delta_j(\lambda)$. $\square$

3.5.2 Invariantit polynomit. Polynomimatriisin Smithin normaalimuoto

Määritelmä 3.5.1. Olkoon $\mathsf{A}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(K[\lambda])$ ja $\operatorname{rank}(\mathsf{A}(\lambda)) = r$. Polynomeja

$$i_j(\lambda) = \frac{d_j(\lambda)}{d_{j-1}(\lambda)} \qquad (j \in \{1, 2, \ldots, r\}) \tag{66}$$

kutsutaan matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ *invarianteiksi polynomeiksi.*

Lauseesta 3.5.3 seuraa, että jos polynomimatriisit $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ ovat ekvivalentteja, niillä on samat invariantit polynomit. Sovelletaan invarianttien polynomien määritelmää polynomimatriisin kanoniseen muotoon, joka on esitetty luvussa 3.4.

Olkoon $\mathsf{A}_0(\lambda) = \operatorname{diag}[a_1(\lambda), \ldots, a_r(\lambda), 0 \ldots, 0]$ matriisin $\mathsf{A}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(K)$ kanoninen muoto. On selvää, että $d_1(\lambda) = a_1(\lambda)$, $d_2(\lambda) = a_1(\lambda)a_2(\lambda)$, $\ldots$, $d_r(\lambda) = a_1(\lambda) \ldots a_r(\lambda)$, missä $r \leq n$ on matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ aste. Tällöin

$$a_j(\lambda) = \frac{d_j(\lambda)}{d_{j-1}(\lambda)} = i_j(\lambda), \qquad j \in \{1, 2, \ldots, r\}. \tag{67}$$

Siten luvussa 3.5.3 saatu polynomimatriisin kanoninen muoto voidaan kirjoittaa uudelleen seuraavaksi

$$\operatorname{diag}[i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda), 0, \ldots, 0], \tag{68}$$

missä $i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$ ovat matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ invariantteja polynomeja. Tätä polynomimatriisia kutsutaan polynomimatriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ *Smithin normaalimuodoksi.*

Lause 3.5.4. (Polynomimatriisin Smithin normaalimuoto) *Olkoon $\mathsf{A}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(K[\lambda])$ polynomimatriisi, jonka aste on r. Jos $i_1(\lambda)$, $\ldots$, $i_r(\lambda)$ ovat polynomimatriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ invariantteja polynomeja, niin polynomimatriisit $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\operatorname{diag}[i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda), 0, \ldots 0]$ ovat ekvivalentit.*

Seuraus 3.5.5. *Kaksi polynomimatriisia ovat ekvivalenttit, jos ja vain jos niillä on samat invariantit polynomit.*

Todistus. Aiemmin osoitettiin, että ekvivalenteilla polynomimatriiseilla on samat invariantit polynomit.

Kääntäen, jos matriiseilla $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ on samat invariantit polynomit niin Lauseen 3.5.4 nojalla niillä on sama Smithin normaalimuoto. Koska matriisin ekvivalenttirelaatio on transitiivinen, niin matriisit $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ ovat ekvivalentit. □

Olkoon $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n$ polynomi kunnan K suhteen. Matriisia

$$\mathsf{L}(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{69}$$

kutsutaan polynomin $p(t)$ *seuralaismatriisiksi.*

Esimerkki 3.5.6. Etsitään matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{L}(p)$ invariantit polynomit ja Smithin normaalimuoto.

Ratkaisu.

$$\lambda I - L(p) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{70}$$

j-asteisten alideterminanttien suurin yhteinen tekijä on $d_j = 1$ kaikilla $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Koska $d_n(\lambda) = \det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{L}(p))$ niin lauseen 2.5.1 nojalla $d_n(\lambda) = a_{n1}\mathsf{A}_{n1} + a_{n2}\mathsf{A}_{n2} + \cdots + a_{nn}\mathsf{A}_{nn}$, missä a_{ni} on matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{L}(p)$ alkio ja A_{ni} on matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{L}(p)$ alideterminantti, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\mathsf{A}_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = (-1)^{2n} = 1,$$

$$\mathsf{A}_{nk} = (-1)^{n+k} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & (k) & & & \\ & \lambda & -1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \lambda & -1 & & & \\ & (k) & & & -1 & & & \\ & & & & \lambda & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \lambda & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+k}(\lambda)^{k-1}(-1)^{n-k} = \lambda^{n-k},$$

$k \in \{2, \dots, n\}$. Saadaan

$$\begin{aligned} d_n &= a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-2}\lambda^{n-2} + (\lambda + a_{n-1})\lambda^{n-1} = \\ &= a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = \\ &= p(\lambda) \end{aligned} \tag{71}$$

Joten matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{L}(p)$ invariantit polynomit ovat $i_1 = \cdots = i_{n-1} = 1$, $i_n = p(\lambda)$. Siten Lauseen 3.5.4 nojalla $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{L}(p) \sim \mathrm{diag}[1, \dots 1, p(\lambda)]$. □

Esimerkki 3.5.7. Olkoon $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$. Näytetään, että matriisin $(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})$ invarianttien polynomien astelukujen summa on n.

Ratkaisu. Lauseen 3.4.1 nojalla on olemassa unimodulaariset matriisit $\mathsf{R}(\lambda)$ ja $\mathsf{Q}(\lambda)$, joille

$$\mathsf{P}(\lambda)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{Q}(\lambda) = \mathrm{diag}[i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_n(\lambda)],$$

missä $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_n(\lambda)$ ovat matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ invariantteja polynomeja.

Siis

$$\begin{aligned}
&\det(\mathsf{P}(\lambda))\det(\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A})\det(\mathsf{Q}(\lambda)) = i_i \cdots i_n \\
&\Rightarrow \det(\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A}) = \frac{1}{\det(\mathsf{P}(\lambda))\cdot\det(\mathsf{Q}(\lambda))}\cdot i_i \cdots i_n \\
&\Rightarrow p_{\mathsf{A}}(\lambda) = \frac{1}{\det(\mathsf{P}(\lambda))\cdot\det(\mathsf{Q}(\lambda))}\cdot i_i \cdots i_n,
\end{aligned}$$

missä $p_{\mathsf{A}}(\lambda)$ on matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ karakteristinen polynomi. Koska polynomimatriisin $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A}$ aste on n, niin $\deg(p_{\mathsf{A}}(\lambda)) = n$. Koska lisäksi polynomimatriisien $\mathsf{P}(\lambda)$ ja $\mathsf{Q}(\lambda)$ determinantit ovat nollasta eroavia vakioita, niin viimeisestä kaavasta saadaan, että $\deg(i_1)+\cdots+\deg(i_n) = n$. □

Esimerkki 3.5.8. Etsitään matriisin

$$\mathsf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

invariantit polynomit.

Ratkaisu. Koska

$$\det(\mathsf{A}(\lambda)) = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^6-\lambda^5,$$

niin $d_3(\lambda) = \lambda^6-\lambda^5$. Matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ 2-asteiden alideterminantit ovat

$$A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^3 \end{vmatrix} = \lambda^5;\ A\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \lambda^2(\lambda-1);\ A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -\lambda^4;$$

$$A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -\lambda^4;\ A\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 0;\ A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \lambda^4;$$

$$A\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} = 0;\ A\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix} = \lambda^2(\lambda-1);\ A\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix} = 0.$$

Siis $d_2 = \text{syt}\,\{\lambda^5, \lambda^2(\lambda-1), -\lambda^4, -\lambda^4, 0, \lambda^4, 0, \lambda^2(\lambda-1), 0\} = \lambda^2$.

$d_1 = \text{syt}\,\{\lambda^2, \lambda, \lambda, 0, \lambda^3, 0, \lambda, \lambda, \lambda\} = \lambda$, $d_0 = 1$. Nyt polynomimatriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ invariantit polynomit ovat $i_1 = \frac{d_1}{d_0} = \frac{\lambda}{1} = \lambda$, $i_2 = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\lambda^2}{\lambda} = \lambda$, $i_3 = \frac{d_3}{d_2} = \frac{\lambda^5(\lambda-1)}{\lambda^2} = \lambda^3(\lambda-1)$. □

3.6 Polynomimatriisien similaarisuus. Ensimmäinen luonnollinen normaalimuoto

Lause 3.6.1. *Matriisit* A *ja* $\mathsf{B} \in \mathcal{M}_n(K)$ *ovat similaarisia, jos ja vain jos polynomimatriisit* $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A}$ *ja* $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{B}$ *ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Olkoot A ja B similaarisia matriiseja. Tällöin on olemassa kääntyvä matriisi S, jolle $\mathsf{A} = \mathsf{SBS}^{-1}$. Saadaan

$$\begin{aligned}\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A} &= \lambda\mathsf{I}-\mathsf{SBS}^{-1} =\\ &= \lambda\mathsf{SS}^{-1}-\mathsf{SBS}^{-1} =\\ &= \mathsf{S}\lambda\mathsf{IS}^{-1}-\mathsf{SBS}^{-1} =\\ &= \mathsf{S}(\lambda\mathsf{I}-\mathsf{B})\mathsf{S}^{-1}\end{aligned}$$

Koska matriisi S on kääntyvä, niin $\det(\mathsf{S})$ ja $\det(\mathsf{S}^{-1})$ ovat nollasta eroavia vakioita ja siten matriisit S ja S^{-1} ovat unimodulaarisia $\Rightarrow$ matriisit $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A}$ ja $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{B}$ ovat ekvivalentteja.

Olkoot nyt $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A}$ ja $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{B}$ ekvivalentteja polynomimatriiseja. Tällöin on olemassa unimodulaariset polynomimatriisit $\mathsf{P}(\lambda)$ ja $\mathsf{Q}(\lambda)$, joille

$$\lambda\mathsf{I}-\mathsf{B} = \mathsf{P}(\lambda)(\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A})\mathsf{Q}(\lambda) \Rightarrow \mathsf{P}^{-1}(\lambda)(\lambda\mathsf{I}-\mathsf{B}) = (\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A})\mathsf{Q}(\lambda). \qquad (72)$$

Jäännöslauseen nojalla

$$\mathsf{P}^{-1}(\lambda) = (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{M}(\lambda) + \mathsf{M}_0, \;\; \mathsf{Q}(\lambda) = \mathsf{R}(\lambda)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) + \mathsf{R}_0, \tag{73}$$

missä $\mathsf{M}_0 = \mathsf{P}^{-1}(\mathsf{A})$ ja $\mathsf{R}_0 = \tilde{\mathsf{Q}}(\mathsf{B})$ eivät riipu luvusta λ. Sijoitetaan yhtälöt (73) yhtälöön (72):

$$\begin{aligned}
&((\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{M}(\lambda) + \mathsf{M}_0)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) = (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})(\mathsf{R}(\lambda)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) + \mathsf{R}_0) \\
&\Rightarrow (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{M}(\lambda)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) + \mathsf{M}_0(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) = (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{R}(\lambda)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) + (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{R}_0 \\
&\Rightarrow (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})(\mathsf{M}(\lambda) - \mathsf{R}(\lambda))(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) = (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{R}_0 - \mathsf{M}_0(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}).
\end{aligned}$$

Viimeisessä kaavassa $\deg((\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{R}_0 - \mathsf{M}_0(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B})) \le 1$. Jos olisi $\mathsf{M}(\lambda) \ne \mathsf{R}(\lambda)$, niin $\deg((\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})(\mathsf{M}(\lambda) - \mathsf{R}(\lambda))(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B})) \ge 2$, joka on mahdotonta. Siis $\mathsf{M}(\lambda) = \mathsf{R}(\lambda)$. Saadaan

$$\begin{aligned}
&(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{R}_0 - \mathsf{M}_0(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) = 0 \\
&\Rightarrow (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{R}_0 = \mathsf{M}_0(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}) \\
&\Rightarrow \lambda\mathsf{I} - \mathsf{A} = \mathsf{M}_0(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B})\mathsf{R}_0^{-1} \\
&\Rightarrow \lambda\mathsf{I} - \mathsf{A} = \lambda\mathsf{M}_0\mathsf{R}_0^{-1} - \mathsf{M}_0\mathsf{B}\mathsf{R}_0^{-1} \\
&\Rightarrow \mathsf{A} = \mathsf{M}_0\mathsf{B}\mathsf{R}_0^{-1} \text{ ja } \mathsf{I} = \mathsf{M}_0\mathsf{R}_0^{-1} \\
&\Rightarrow \mathsf{A} = \mathsf{R}_0\mathsf{B}\mathsf{R}_0^{-1}.
\end{aligned}$$

Täten matriisit A ja B ovat similaarisia. □

Lause 3.6.2. (Ensimmäinen luonnollinen normaalimuoto) *Olkoon* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$*, ja olkoot* $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_n(\lambda)$ *matriisin* $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ *invariantit polynomit, joille* $\begin{cases} \deg(i_k) > 0, \text{ kun } s \le k \le n \\ \deg(i_k) = 0, \text{ kun } 1 \le k < s \end{cases}$.

Merkitään

$$\mathsf{L} = \mathrm{diag}[\mathsf{L}(i_s), \mathsf{L}(i_{s+1}), \ldots, \mathsf{L}(i_n)], \tag{74}$$

missä $\mathsf{L}(i_k)$ *on polynomin* $i_k(\lambda)$ *seuralaismatriisi kaikilla* $j \in \{s, s+1, \ldots, n\}$*. Tällöin matriisit* A *ja* L *ovat similaarisia.*

Matriisia L kutsutaan matriisin A *ensimmäiseksi luonnolliseksi normaalimuodoksi.*

Todistus. Esimerkin 3.5.7 nojalla $\deg(i_s) + \cdots + \deg(i_n) = n$. Koska $i_j(\lambda) \in K[\lambda]$ kaikilla $j \in \{s, s+1, \ldots, n\}$, niin L on kokoa n oleva polynomimatriisi kunnan K suhteen. Lauseen 3.5.4 ja esimerkin 3.5.6 nojalla polynomimatriisi $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{L}(i_k)$ on ekvivalentti diagonaalimatriisin $\mathrm{diag}[1, \ldots, 1, i_k(\lambda)]$ kanssa kaikilla $s \leq k \leq n$. Saadaan

$$\begin{aligned}
\lambda\mathsf{I} - \mathsf{L} &= \lambda\mathsf{I} - \mathrm{diag}[\mathsf{L}(i_s), \ldots, \mathsf{L}(i_n)] \\
&= \mathrm{diag}[\lambda\mathsf{I} - \mathsf{L}(i_s), \ldots, \lambda\mathsf{I} - \mathsf{L}(i_n)] \text{ (Esimerkki 3.5.6)} \\
&\sim \mathrm{diag}[1, \ldots 1, i_s, \ldots, 1, \ldots 1, i_n] \\
&\sim \mathrm{diag}[1, \ldots 1, i_s, i_{s+1}, \ldots, i_n] \text{ (Lause 3.5.4)} \\
&\sim \lambda\mathsf{I} - \mathsf{A} \text{ (Lause 3.6.1)} \\
&\Rightarrow \mathsf{A} \approx \mathsf{L}.
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.6.3. Etsitään matriisin

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ensimmäinen luonnollinen normaalimuoto.

Ratkaisu. Lasketaan matriisin

$$\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix},$$

astetta 2 ja 3 olevia alideterminantteja:

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda-3 & 1\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix} = (\lambda-3)^2-1 = (\lambda-2)(\lambda-4),$$

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} = -(\lambda-2),\ \ \mathsf{A}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \lambda-2$$

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix} = 0,\ \ \mathsf{A}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2),\ \ \mathsf{A}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \lambda-2,$$

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} = 0,\ \ \mathsf{A}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix} = \lambda-2,\ \ \mathsf{A}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2),$$

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-4).$$

Alideterminanttien suurimmaksi yhteiseksi tekijäksi saadaan luvut $d_0(\lambda) \equiv 1$, $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = \lambda-2$, $d_3(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$. Siten matriisin $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A}$ invariantit polynomit ovat $i_1(\lambda) = 1$, $i_2(\lambda) = \lambda-2$, $i_3(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-4) = \lambda^2-6\lambda+8$. Polynomien $i_2(\lambda)$ ja $i_3(\lambda)$ seuralaismatriisit ovat

$$\mathsf{L}(i_2) = \begin{bmatrix}2\end{bmatrix},\ \ \mathsf{L}(i_3) = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & 6\end{bmatrix},$$

joten matriisin A ensimmäinen luonnollinen normaalimuoto on

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -8 & 6\end{bmatrix}.$$

$\square$

3.7 Matriisin alkeistekijät

Tässä luvussa tutkitaan, miten voidaan muuttaa matriisin ensimmäinen luonnollinen normaalimuoto muotoon, joka on lähempänä diagonaalimuotoa. Tämän ongelman ratkaiseminen riippuu kunnasta, jonka suhteen polynomimatriisit ja niiden invariantit polynomit on määritelty. Koska mikä tahansa polynomi hajoaa täydellisesti kompleksilukujen kunnassa, niin jatkossa tarkastellaan kompleksikertoimisia polynomimatriiseja.

Olkoon $\mathsf{A}(\lambda) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_n[\lambda])$ r-asteen polynomimatriisi ja olkoot $i_1(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ invariantteja polynomeja. Koska matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ determinantti on kompleksikertoiminen polynomi, niin se voidaan esittää ensimmäisen asteen pääpolynomien tulona :

$$\det(\mathsf{A}(\lambda)) = k_1 \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \quad k_1 \neq 0, \quad m_j \geqslant 1, \tag{75}$$

missä $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ovat polynomin $\det(\mathsf{A}(\lambda))$ erisuuret kompleksiset nollakohdat. Lukuja $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ kutsutaan polynomimatriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ *latenteiksi juuriksi.*

Toisaalta, lauseen 3.5.4 nojalla $\mathsf{A}(\lambda) \sim \operatorname{diag}[i_1, \dots, i_r, 0, \dots, 0]$ ja siten

$$\det(\mathsf{A}(\lambda)) = k_2 \prod_{j=1}^{r} i_j(\lambda), \ \ k_2 \neq 0. \tag{76}$$

Yhtälöistä 75 ja 76 saadaan, että $k_1 = k_2$ ja

$$\prod_{j=1}^{r} i_j(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{m_k}. \tag{77}$$

Lisäksi, koska polynomi $i_j(\lambda)$ jakaa polynomin $i_{j+1}(\lambda)$ kaikilla $j = 1, 2, \dots, r-$

1, niin on olemassa kokonaisluvut α_{jk} $(1 \le j \le r$ ja $1 \le k \le s)$, joille

$$\begin{cases} i_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{11}}(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{12}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_{1s}}, \\ i_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{21}}(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{22}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_{2s}}, \\ \vdots \\ i_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{r1}}(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{r2}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_{rs}} \end{cases} \tag{78}$$

ja

$$\begin{cases} 0 \le \alpha_{1k} \le \alpha_{2k} \le \cdots \le \alpha_{rk} \le m_k \\ \sum_{j=1}^{r} \alpha_{jk} = m_k \end{cases}. \tag{79}$$

Määritelmä 3.7.1. Yhtälöissä (78) esiintyviä tekijöitä $(\lambda - \lambda_k)^{\alpha_{jk}}$ $(\alpha_{jk} > 0)$ kutsutaan polynomimatriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ *alkeistekijöiksi*. Alkeistekijä $(\lambda - \lambda_k)^{\alpha_{jk}}$ on *lineaarinen*, jos $\alpha_{jk} = 1$ (muuten *epälineaarinen*).

Alkeistekijät ovat invariantteja niiden polynomimatriisin ekvivalenttimuutoksien suhteen.

Esimerkki 3.7.1. Etsitään matriisin

$$\mathsf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

alkeistekijät.

Ratkaisu. Etsitään matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ alideterminantit ja niiden suurimmat yhteiset tekijät. Koska

$$\det(\mathsf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^7 - 2\lambda^6,$$

niin $d_3(\lambda) = \lambda^7 - \lambda^6$. Matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ astetta 2 olevat alideterminantit on esitetty taulukossa:

Rivit	Sarakkeet		
	1,2	1,3	2,3
1,2	$\lambda^6 - \lambda^5$	0	0
1,3	0	$2\lambda^2$	$2\lambda^3$
2,3	0	$2\lambda^4$	$2\lambda^5$

Siis $d_2(\lambda) = \lambda^2$ ja $d_1(\lambda) = \lambda$. Tällöin matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ invariantit polynomit ovat $i_1(\lambda) = \lambda$, $i_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = \lambda$, $i_3(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = \lambda^5 - \lambda^4 = \lambda^4(\lambda - 1)$. Saadaan, että polynomimatriisin $A(\lambda)$ alkeistekijät ovat λ, λ, λ^4 ja $\lambda - 1$. $\square$

Lause 3.7.2. *Olkoon* $\mathsf{P}(\lambda)$ *alkeismatriisien tulo ja olkoon* $\mathsf{A}(\lambda)$ *polynomimatriisi. Tällöin matriisin* $\mathsf{P}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)$ *kaikkien* s*-asteiden alideterminanttien suurin yhteinen tekijä on myös matriisin* $\mathsf{A}(\lambda)$ *kaikkien* s*-asteiden alideterminanttien suurin yhteinen tekijä.*

Todistus. Tarkistetaan, miten matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ kertominen alkeismatriisilla vaikuttaa matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ alideterminanttiin.

Olkoon $\mathsf{B}(\lambda)$ matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ ja jonkun alkeismatriisin tulo. Olkoot $\mathsf{R}(\lambda)$ matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ s-asteen alideterminantti ja $\mathsf{S}(\lambda)$ matriisin $\mathsf{B}(\lambda)$ s-asteen alideterminantti, joka otettiin samasta paikasta, kuin alideterminantti $\mathsf{R}(\lambda)$. Olkoon lisäksi matriisin $\mathsf{B}(\lambda)$ kaikkien s-asteiden alideterminanttien syt $g(\lambda)$ ja matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ kaikkien s-asteiden alideterminanttien syt $g_1(\lambda)$.

Determinantin ominnaisuuksien nojalla saadaan:

- Jos $\mathsf{P}(\lambda) = \mathsf{E}_i(k)$, niin $\mathsf{S}(\lambda) = k \cdot \mathsf{R}(\lambda)$, $k \in \mathbb{C}$.
- Jos $\mathsf{P}(\lambda) = \mathsf{E}_{ij}$, niin on kolme mahdollista tapausta:
  - alideterminantti $\mathsf{R}(\lambda)$ ei ole muuttunut. Tällöin $\mathsf{S}(\lambda) = \mathsf{R}(\lambda)$;
  - kaksi alideterminantin $\mathsf{R}(\lambda)$ riviä (saraketta) vaihdettiin keskenään. Tällöin $\mathsf{S}(\lambda) = -\mathsf{R}(\lambda)$;
  - vaihdettiin keskenään joku alideterminantin $\mathsf{R}(\lambda)$ rivi ja toinen matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ rivi, joka ei kuulu alideterminanttiin $\mathsf{R}(\lambda)$. Tällöin $\mathsf{S}(\lambda) = \mathsf{R}'(\lambda)$, missä $\mathsf{R}'(\lambda)$ on joku toinen matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ s-asteen

alideterminantti.

- Jos $\mathsf{P}(\lambda) = \mathsf{E}_{ij}(p(\lambda))$, missä $p(\lambda)$ on polynomi kunnan $\mathbb{C}$ suhteen, niin on kolme mahdollista tapausta:
  - alideterminantti $\mathsf{R}(\lambda)$ ei ole muuttunut. Tällöin $\mathsf{S}(\lambda) = \mathsf{R}(\lambda)$;
  - alideterminantin $\mathsf{R}(\lambda)$ riviin (sarakkeeseen) lisättiin polynomilla $p(\lambda)$ kerrottu toinen alideterminantin $\mathsf{R}(\lambda)$ rivi (sarake). Tällöin $\mathsf{S}(\lambda) = \mathsf{R}(\lambda)$;
  - alideterminantin $\mathsf{R}(\lambda)$ riviin (sarakkeeseen) lisättiin polynomilla $p(\lambda)$ kerrottu toinen matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ rivi (sarake), joka ei kuulu alideterminanttiin $\mathsf{R}(\lambda)$. Tällöin $\mathsf{S}(\lambda) = \mathsf{R}(\lambda) \pm p(\lambda) \cdot R'(\lambda)$, missä $R'(\lambda)$ on joku matriisin $A(\lambda)$ toinen s-asteen alideterminantti.

Saadaan, että jokainen matriisin $\mathsf{B}(\lambda)$ s-asteen alideterminantti on matriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ s-asteiden alideterminanttien lineaarikombinaatio ja siten polynomi $g(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $g_1(\lambda)$.

Kaavasta $\mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{P}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)$ seuraa $\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{P}^{-1}(\lambda)\mathsf{B}(\lambda)$. Lauseen 3.3.1 nojalla matriisi $\mathsf{P}^{-1}(\lambda)$ on myös alkeismatriisi ja tästä seuraa, että polynomi $g_1(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $g(\lambda)$. Täten päätelään, että $g_1(\lambda) = g(\lambda)$. □

Seuraus 3.7.3. *Olkoot* $\mathsf{P}(\lambda)$ *ja* $\mathsf{Q}(\lambda)$ *alkeismatriisien tuloja ja olkoon* $\mathsf{A}(\lambda)$ *polynomimatriisi. Tällöin matriisin* $\mathsf{P}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{Q}(\lambda)$ *kaikkien* s*-asteiden alideterminanttien suurin yhteinen tekijä myös matriisin* $\mathsf{A}(\lambda)$ *kaikkien* s*-asteiden alideterminanttien suurin yhteinen tekijä.*

Lause 3.7.4. *Kaksi kompleksikertoimista polynomimatriisia ovat ekvivalentit, jos ja vain jos niillä on samat alkeistekijät.*

Todistus. Olkoon $\mathsf{A}(\lambda), \mathsf{B}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[\lambda])$ ja $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$. Seurauksen 3.5.5 nojalla niillä on samat invariantit polynomit, josta seuraa, että niillä on myös samat alkeistekijät.

Oletetaan nyt, että matriiseilla $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ on samat alkeistekijät. Yhtälöistä (78) ja ehdosta, että polynomi $i_j(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $i_{j-1}(\lambda)$, seuraa, että matriiseilla $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ on samat invariantit polynomit. Seurauksen 3.5.5 perusteella $\mathsf{A}(\lambda) \sim \mathsf{B}(\lambda)$. □

Täten polynomimatriisin alkeistekijät määräävät yksikäsitteisesti niiden invariantit polynomit.

Seuraava lause johtuu Lauseista 3.6.1 ja 3.7.4.

Lause 3.7.5. *Kaksi $n \times n$ - kokoista kompleksikertoimisia matriisia* A *ja* B *ovat similaarisia, jos ja vain jos matriiseilla* $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ *ja* $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{B}$ *on samat alkeistekijät.*

Lause 3.7.6. *Olkoot* $\mathsf{A}(\lambda)$ *ja* $\mathsf{B}(\lambda)$ *kompleksikertoimisia polynomimatriiseja. Tällöin lohkodiagonaalimatriisin*

$$\mathsf{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathsf{A}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathsf{B}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{80}$$

alkeistekijät ovat polynomimatriisien $\mathsf{A}(\lambda)$ *ja* $\mathsf{B}(\lambda)$ *alkeistekijöiden joukkojen yhdiste.*

Todistus. Koska lohkodiagonaalimatriisin determinantti on lohkojen determinanttien tulo, niin

$$\det(\mathsf{C}(\lambda)) = \det(\mathsf{A}(\lambda))\det(\mathsf{B}(\lambda)).$$

Olkoon λ_0 matriisin $\mathsf{C}(\lambda)$ eräs latentti juuri. Tällöin λ_0 kuuluu matriisien $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ latenttien juurten joukkojen yhdisteeseen. Olkoot $i_1(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ polynomimatriisin $\mathsf{A}(\lambda)$ invariantteja polynomeja ja $j_1(\lambda), \dots, j_s(\lambda)$ polynomimatriisin $\mathsf{B}(\lambda)$ invariantteja polynomeja. Tällöin matriisien $\mathsf{A}(\lambda)$ ja $\mathsf{B}(\lambda)$ invariantit polynomit voidaan kirjoittaa muodoissa

$$\begin{cases} i_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\alpha_1} k_1(\lambda), \\ \vdots \\ i_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\alpha_r} k_r(\lambda) \end{cases} \text{ja} \begin{cases} j_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\beta_1} l_1(\lambda), \\ \vdots \\ j_s(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\beta_s} l_s(\lambda) \end{cases},$$

missä $k_m(\lambda)$ ja $l_n(\lambda)$ ovat nollasta eroavia polynomeja, jotka eivät ole jaollisia polynomilla $(\lambda - \lambda_0)$, kaikilla $m \in \{1, \ldots, r\}$, $n \in \{1, \ldots, s\}$. Voidaan olettaa lisäksi, että polynomi $i_m(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $i_{m-1}(\lambda)$ ja polynomi $j_n(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $j_{n-1}(\lambda)$ kaikilla $m \in \{2, \ldots, r\}$, $n \in \{2, \ldots, s\}$. Tästä seuraa, että $0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_r$ ja $0 \leq \beta_1 \leq \cdots \leq \beta_s$.

Koska lauseen 3.5.4 nojalla $\mathsf{A}(\lambda) \sim \operatorname{diag}[i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda), 0, \ldots 0]$ ja $\mathsf{B}(\lambda) \sim \operatorname{diag}[j_1(\lambda), \ldots, j_s(\lambda), 0, \ldots 0]$, niin

$$
\begin{aligned}
\mathsf{C}(\lambda) &\sim \operatorname{diag}[i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda), 0, \ldots, 0, j_1(\lambda), \ldots, j_s(\lambda), 0, \ldots, 0] \\
&\sim \operatorname{diag}[i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda), j_1(\lambda), \ldots, j_s(\lambda), 0, \ldots, 0] \\
&\sim \operatorname{diag}[i_{\gamma_1}(\lambda), \quad i_{\gamma_2}(\lambda), \ \ldots, \ i_{\gamma_{r+s}}(\lambda), 0, \ldots, 0],
\end{aligned}
$$

missä $i_{\gamma_m}(\lambda) \in \{i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda), j_1(\lambda), \ldots, j_s(\lambda)\}$ kaikilla $m \in \{1, \ldots, r+s\}$ ja $0 \leq \gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_{r+s}$. Täten

$$
\mathsf{C}(\lambda) \sim \operatorname{diag}\left[(\lambda - \lambda_0)^{\zeta_1} p_1(\lambda), \ldots, (\lambda - \lambda_0)^{\zeta_{r+s}} p_{r+s}(\lambda), 0, \ldots, 0\right] = \mathsf{C}'(\lambda),
$$

missä $p_k(\lambda)$ on nollasta eroava polynomi, joka ei ole jaollinen polynomilla $(\lambda - \lambda_0)$, kaikilla $k \in \{1, \ldots, r+s\}$.

Viimeisestä kaavasta seuraa, että matriisilla $\mathsf{C}(\lambda)$ on samat invariantit polynomit kuin matriisilla $\mathsf{C}'(\lambda)$. Lasketaan matriisin $\mathsf{C}'(\lambda)$ invariantit polynomit kaavasta $i_j(\lambda) = \frac{d_j(\lambda)}{d_{j-1}(\lambda)}$, missä $d_j(\lambda)$ on matriisin $\mathsf{C}'(\lambda)$ j-asteen alideterminanttien syt ($j \in \{1, \ldots, r+s\}$, $d_0 \equiv 0$). Koska diagonaalimatriisin ainoat nollasta eroavat alideterminantit ovat päälideterminantit, niin saadaan

$$
\begin{aligned}
&d_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\zeta_1} p_1'(\lambda), \\
&d_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\zeta_1 + \zeta_2} p_2'(\lambda), \\
&\vdots \\
&d_{r+s}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_{r+s}} p_{r+s}'(\lambda),
\end{aligned}
$$

missä polynomit $p_1'(\lambda), p_2'(\lambda), \ldots, p_{r+s}'(\lambda)$ eivät ole jaollisia polynomilla $\lambda - \lambda_0$.

Näin ollen

$$i_j(\lambda) = \frac{d_j(\lambda)}{d_{j-1}(\lambda)} = \frac{(\lambda-\lambda_0)^{\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_j} p'_j(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_{j-1}} p'_{j-1}(\lambda)} = (\lambda-\lambda_0)^{\zeta_j} \frac{p'_j(\lambda)}{p'_{j-1}(\lambda)},$$

kaikilla $j \in \{1, \ldots, r+s\}$.

Saadaan, että matriisin $\mathsf{C}'(\lambda)$ ja siten myös matriisin $\mathsf{C}(\lambda)$ lukua λ_0 vastaavat alkeistekijät ovat $(\lambda-\lambda_0)^{\zeta_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{\zeta_{r+s}}$ eli $(\lambda-\lambda_0)^{\alpha_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{\alpha_r}$, $(\lambda-\lambda_0)^{\beta_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{\beta_s}$. □

Esimerkki 3.7.7. Olkoon $\mathsf{A} = \operatorname{diag}[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ diagonaalimatriisi kunnan K suhteen. Etsitään matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ alkeistekijät.

Ratkaisu.

$$\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A} = \begin{bmatrix} \lambda - a_1 & & & \\ & \lambda - a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - a_n \end{bmatrix}.$$

Koska diagonaalimatriisin ainoat nollasta eroavat alideterminantit ovat pääalideterminantit, niin saadaan, että $d_j(\lambda) = 1$, kun $1 \le j \le n-1$ ja $d_n = \det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_n)$.

Näin ollen

$$i_j(\lambda) = \frac{d_j(\lambda)}{d_{j-1}(\lambda)} = \begin{cases} 1, \text{ jos } 1 \le j \le n-1, \\ (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_n), \text{ jos } j = n. \end{cases}$$

Siis polynomimatriisin $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A}$ alkeistekijät ovat $\lambda - a_1$, $\lambda - a_2$, $\cdots$, $\lambda - a_n$. Saadaan, että matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ Smithin kanoninen muoto on

$$\operatorname{diag}[1, \ldots, 1, (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_n)].$$

Jos oletetaan, että tässä esimerkissä $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$, niin saadaan $d_0 = 1$, $d_1 = (\lambda - a)$, $d_2 = (\lambda - a)^2$, $\ldots$, $d_n = (\lambda - a)^n$ ja siten $i_1 = i_2 = \cdots = i_n = \lambda - a$. Tässä tapauksessa matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ Smithin kanoninen muoto on

$\mathrm{diag}\,[\lambda - a, \ldots, \lambda - a]$. □

Esimerkki 3.7.8. Olkoon

$$\mathsf{J}_p = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

kokoa $p \times p$ oleva matriisi. Etsitään matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{J}_p$ alkeistekijät.

Ratkaisu.

$$\lambda\mathsf{I} - \mathsf{J}_p = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_0 & -1 & & & \\ & \lambda - \lambda_0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda - \lambda_0 & -1 \\ & & & & \lambda - \lambda_0 \end{bmatrix}$$

Koska aina löytyy matriisin J_p alimatriisi muotoa

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_0 & 1 \end{bmatrix},$$

jonka determinantti on 1, niin $d_0 = d_1 = \cdots = d_{p-1} = 1$ ja

$$d_p = \det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{J}_p) = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_0 & -1 & & & \\ & \lambda - \lambda_0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda - \lambda_0 & -1 \\ & & & & \lambda - \lambda_0 \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_0)^p.$$

Saadaan, että matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{J}_p$ invariantit polynomit ovat $i_1 = \cdots = i_{p-1} = 1$ ja $i_p = (\lambda - \lambda_0)^p$ ja siten sen ainoa alkeistekijä on $(\lambda - \lambda_0)^p$. □

3.8 Toinen luonnollinen normaalimuoto

Tässä luvussa jatketaan kompleksikertoimisten neliömatriisien käsittelyä.

Lause 3.8.1. (Toinen luonnollinen normaalimuoto) *Olkoon* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ *ja olkoot* $l_1(\lambda)$, $l_2(\lambda)$, ..., $l_p(\lambda)$ *matriisin* $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A}$ *alkeistekijät. Tällöin matriisi* A *on similaarinen lohkodiagonaalimatriisin* $\mathsf{L} = \mathrm{diag}\left[\mathsf{L}(l_1), \mathsf{L}(l_2), \ldots, \mathsf{L}(l_p)\right]$ *kanssa, missä* $\mathsf{L}(l_i)$ *on polynomin* $l_i(\lambda)$ *seuralaismatriisi (* $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$*).*

Todistus. Esimerkin 3.5.6 nojalla matriisin $\lambda I - L(l_k)$ ainoa luvusta λ riippuva alkeistekijä on $l_k(\lambda)$, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Koska nyt

$$\lambda I - L = \begin{bmatrix} \lambda I - L(l_1) & & & \\ & \lambda I - L(l_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda I - L(l_p) \end{bmatrix}, \tag{81}$$

niin Lauseen 3.7.6 nojalla matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{L}$ kaikki alkeistekijät, jotka riippuvat luvusta λ, ovat $l_1(\lambda)$, $l_2(\lambda), \ldots, l_p(\lambda)$. Koska A on kompleksikertoiminen matriisi, niin jokainen polynomi $l_i(\lambda)$ on muotoa $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Siten matriiseilla $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A}$ ja $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{L}$ on samat alkeistekijät ja Lauseen 3.7.5 nojalla matriisit A ja L ovat similaarisia. □

Esimerkki 3.8.2. Etsitään matriisin

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ensimmäinen ja toinen luonnollinen normaalimuoto.

$$\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Saadaan $d_0 = 1$, $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = 1$, $d_3(\lambda) = 1$, $d_4(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2$ ja siten $i_1(\lambda) = i_2(\lambda) = i_3(\lambda) = 1$, $i_4(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda + 4$. Koska $\mathsf{L}(i_1) = \mathsf{L}(i_2) = \mathsf{L}(i_3) = 0$, niin matriisin A 1. luonnollinen normaalimuoto on

$$\mathrm{diag}[\mathsf{L}(i_1), \mathsf{L}(i_1), \mathsf{L}(i_3), \mathsf{L}(i_4)] = \mathsf{L}(i_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriisin A alkeistekijät ovat $l_1(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$ ja $l_2(\lambda) = (\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$. Siis matriisin A toinen luonnollinen normaalimuoto on

$$\mathrm{diag}\,[\mathsf{L}(l_1), \mathsf{L}(l_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

3.9 Jordanin normaalimuoto

Korvaamalla matriisin A 2. normaalimuodon kukin lohko $\mathsf{L}(l_j)$, missä $l_j(\lambda)$ on matriisin A alkeistekijä, sopivalla samankokoisella Jordanin lohkolla, saadaan matriisin A Jordanin normaalimuoto.

Lause 3.9.1. (Jordanin normaalimuoto) *Olkoon $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ja olkoot $(\lambda - \lambda_i)^{p_i}$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ alkeistekijät. Tällöin matriisit $\mathsf{A} \approx \mathsf{J} = \mathrm{diag}\,[\mathsf{J}_{p_1}(\lambda_1), \mathsf{J}_{p_2}(\lambda_2), \dots, \mathsf{J}_{p_s}(\lambda_s)]$, missä $\mathsf{J}_{p_i}(\lambda_i)$ on kokoa $p_i \times p_i$*

oleva alkeistekijään $(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$ *liittyvä Jordanin solu:*

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \tag{82}$$

$i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Todistus. Etsitään matriisin $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{J}_{p_i}(\lambda_i)$ alkeistekijät. Tarkistetaan, että $d_1 = d_2 = \cdots = d_{p_i-1} = 1$, missä d_j on kaikkien matriisin j-asteen alideterminanttien suurin yhteinen tekijä, $j \in \{1, 2, \ldots, p_i-1\}$. Jokaisella $j \in \{1, 2, \ldots, p_i-1\}$ löytyy matriisin $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{J}_{p_i}(\lambda_i)$ j-asteen alimatriisi, jonka muoto on

$$\begin{bmatrix} -1 & & & \\ \lambda-\lambda_i & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda-\lambda_i & -1 \end{bmatrix} \tag{83}$$

ja siten tämän alimatriisin vastaava alideterminantin arvo on ± 1, josta seuraa, että $d_j = 1$. Koska d_{p_i} on matriisin $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{J}_{p_i}(\lambda_i)$ determinantti, niin $d_{p_i} = (\lambda-\lambda_i)^{p_i}$. Saadaan, että matriisin $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{J}_{p_i}(\lambda_i)$ ainoa luvusta λ riippuva alkeistekijä on $(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$. Lauseen 3.7.6 nojalla matriisin J alkeistekijät ovat $(\lambda-\lambda_1)^{p_1}$, $(\lambda-\lambda_2)^{p_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_s)^{p_s}$. Lauseen 3.7.5 nojalla saadaan, että matriisit A ja J ovat similaarisia. □

Lause 3.9.2. *Olkoot* $\mathsf{J}_1 = \operatorname{diag}[\mathsf{J}_{p1}(\lambda_{11}), \mathsf{J}_{p2}(\lambda_{12}), \ldots, \mathsf{J}_{pn}(\lambda_{1n})]$ *ja* $\mathsf{J}_2 = \operatorname{diag}[\mathsf{J}_{s1}(\lambda_{21}), \mathsf{J}_{s2}(\lambda_{22}), \ldots, \mathsf{J}_{sn}(\lambda_{2n})]$ *Jordanin matriiseja. Matriisit* J_1 *ja* J_2 *ovat similaarisia, jos ja vain jos joukot* $\{\mathsf{J}_{p1}(\lambda_{11}), \mathsf{J}_{p2}(\lambda_{12}), \ldots, \mathsf{J}_{pn}(\lambda_{1n})\}$ *ja* $\{\mathsf{J}_{s1}(\lambda_{21}), \mathsf{J}_{s2}(\lambda_{22}), \ldots, \mathsf{J}_{sn}(\lambda_{2n})\}$ *ovat samoja.*

Esimerkki 3.9.3. Matriisin

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

alkeistekijät ovat $p_1(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ ja $p_2(\lambda) = (\lambda + 1)^2$. Saadaan

$$\mathsf{J}_2(p_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathsf{J}_2(p_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Silloin matriisin A Jordanin normaalimuoto on

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ tai } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lause 3.9.4. *Olkoot* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ *ja* $\mathsf{B}(\lambda) = \mathrm{adj}(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A})$. *Olkoot* $\delta(\lambda)$ *matriisin* $\mathsf{B}(\lambda)$ *alkioiden suurin yhteinen tekijä, ja* $p_{\mathsf{A}}(\lambda)$ *ja* $m_{\mathsf{A}}(\lambda)$ *matriisin* A *karakteristinen ja minimipolynomit vastaavasti. Tällöin*

$$p_{\mathsf{A}}(\lambda) = \delta(\lambda) m_{\mathsf{A}}(\lambda). \tag{84}$$

Todistus. Tarkastellaan polynomimatriisia

$$\mathsf{C}(\lambda) = \frac{1}{\delta(\lambda)} \mathsf{B}(\lambda) \Rightarrow \delta(\lambda)\mathsf{C}(\lambda) = \mathsf{B}(\lambda).$$

Lauseen 2.5.4 nojalla saadaan, että $(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A})\mathrm{adj}(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) = \det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{I}$ eli $(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{B}(\lambda) = p_{\mathsf{A}}(\lambda)\mathsf{I}$ ja siten $\delta(\lambda)(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{C}(\lambda) = p_{\mathsf{A}}(\lambda)\mathsf{I}$. Koska matriisin $\mathsf{C}(\lambda)$

alkiot ovat keskenään jaottomia, niin polynomi $p_{\mathsf{A}}(\lambda)$ on jaollinen polynomilla $\delta(\lambda)$ eli on olemassa polynomi $\tilde{m}(\lambda)$ sellainen, että $p_{\mathsf{A}}(\lambda) = \tilde{m}(\lambda)\delta(\lambda)$. Osoitetaan, että $\tilde{m}(\lambda) = m(\lambda)$. Nyt

$$\begin{aligned}
&\delta(\lambda)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{C}(\lambda) = \tilde{m}(\lambda)\delta(\lambda)\mathsf{I} \\
&\Rightarrow \tilde{m}(\lambda)\mathsf{I} = (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{C}(\lambda).
\end{aligned}$$

Saadaan, että matriisi $\tilde{m}(\lambda)\mathsf{I}$ on jaollinen matriisilla $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$. Lauseen 3.2.2 nojalla $\tilde{m}(\mathsf{A}) = 0$ eli $\tilde{m}(\lambda)$ on matriisin A annihiloiva polynomi. Koska $m(\lambda)$ on matriisin A minimipolynomi, niin $\tilde{m}(\lambda) = q(\lambda)m(\lambda)$. Lisäksi lauseen 3.2.2 nojalla

$$\begin{aligned}
&m(\lambda)\mathsf{I} = (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\tilde{\mathsf{C}} + m(\mathsf{A})\mathsf{I} \\
&\Rightarrow m(\lambda)\mathsf{I} = (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\tilde{\mathsf{C}}(\lambda) \\
&\Rightarrow \tilde{m}(\lambda)\mathsf{I} = (\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{C}(\lambda) = q(\lambda)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\tilde{\mathsf{C}}(\lambda) \\
&\Rightarrow \mathsf{C}(\lambda) = q(\lambda)\tilde{\mathsf{C}}(\lambda).
\end{aligned}$$

Jos olisi $q(\lambda) \neq 1$, niin silloin $\mathsf{B}(\lambda) = \delta(\lambda)\mathsf{C}(\lambda) = \delta(\lambda)q(\lambda)\tilde{\mathsf{C}}(\lambda)$, joka on ristiriidassa polynomin $\delta(\lambda)$ määritelmän kanssa. Siten $\mathsf{C}(\lambda) = \tilde{\mathsf{C}}(\lambda) \Rightarrow \tilde{m}(\lambda) = m(\lambda)$. $\square$

Lause 3.9.5. *Olkoon* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$. *Tällöin* $m_{\mathsf{A}}(\lambda) = i_n(\lambda)$, *missä* $i_n(\lambda)$ *on polynomimatriisin* $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ *suuriasteisin invariantti polynomi.*

Todistus. Koska $\operatorname{rank}(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = n$, niin lauseen 3.5.4 nojalla

$$\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A} \sim \operatorname{diag}\left[i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_n(\lambda)\right]$$

ja siten $\det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = i_1(\lambda)\cdots i_n(\lambda)$. Koska $i_j(\lambda) = \frac{d_j(\lambda)}{d_{j-1}(\lambda)}$, missä $d_j(\lambda)$ on kaikkien matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ j-asteiden alideterminanttien suurin yhteinen tekijä kaikilla $j \in \{1, \ldots, n\}$, $d_0(\lambda) = 1$, niin

$$p_{\mathsf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = \frac{d_1(\lambda)}{d_0(\lambda)} \cdot \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} \cdots \cdot \frac{d_{n-1}(\lambda)}{d_{n-2}(\lambda)} i_n(\lambda) = d_{n-1}(\lambda) i_n(\lambda). \quad (85)$$

Koska $d_{n-1}(\lambda) = \delta(\lambda)$, missä $\delta(\lambda)$ on lauseesta 3.9.4, niin lauseen 3.9.4 nojalla $i_n(\lambda) = m_{\mathsf{A}}(\lambda)$. □

Seuraus 3.9.6. *Olkoon* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:*

(1) matriisi A *on diagonalisoituva;*

(2) matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ *alkeistekijät ovat lineaarisia;*

(3) matriisin A *minimipolynomin nollakohdat ovat yksinkertaisia.*

Todistus. Oletetaan, että matriisi A on diagonalisoituva. Tällöin on olemassa sellainen kääntyvä matriisi P, että $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$, missä $\mathsf{D} = \operatorname{diag}[d_1, \dots, d_n]$ on kokoa $n \times n$ oleva diagonaalimatriisi kunnan $\mathbb{C}$ suhteen. Nyt $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A} = \lambda\mathsf{I} - \mathsf{PAP}^{-1} = \mathsf{PP}^{-1}\lambda\mathsf{I} - \mathsf{PAP}^{-1} = \mathsf{P}\lambda\mathsf{IP}^{-1} - \mathsf{PAP}^{-1} = \mathsf{P}(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{P}^{-1}$, josta seuraa, että matriisit $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ ja $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{D}$ ovat similaarisia. Esimerkin 3.7.7 nojalla matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{D}$ alkeistekijät ovat lineaarisia ja siten lauseen 3.7.5 nojalla matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ alkeistekijät ovat myös lineaarisia.

Oletetaan nyt, että matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ alkeistekijät ovat lineaarisia. Tällöin matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ suuriasteisin invariantti polynomi voidaan kirjoittaa muodossa $i_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_s)$, missä $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_s$. Lauseen 3.9.5 perustella $m_A(\lambda) = i_n(\lambda)$ ja siten polynomin $m_a(\lambda)$ nollakohdat ovat yksinkertaisia.

Oletetaan, että matriisin A minimipolynomin nollakohdat ovat yksinkertaisia eli $m_{\mathsf{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_s)$, missä $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_s$. Lauseen 3.9.5 nojalla $i_n(\lambda) = m_{\mathsf{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_s)$ eli matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ alkeistekijät ovat muotoa $(\lambda - \lambda_j)$. Tästä seuraa, että matriisin A Jordanin normaalimuodon Jordanin lohkot ovat kokoa (1×1) olevia matriiseja, joten matriisi A on diagonaalisoituva. □

Seuraus 3.9.7. *Olkoot* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$, $p_{\mathsf{A}}(\lambda)$ *matriisin* A *karakteristinen polynomi ja* $m_{\mathsf{A}}(\lambda)$ *matriisin* A *minimipolynomi. Tällöin* $p_{\mathsf{A}}(\lambda) = m_{\mathsf{A}}(\lambda)$, *jos ja vain jos* $i_1(\lambda) = \cdots = i_{n-1}(\lambda) = 1$, *missä* $i_j(\lambda)$ *on matriisin* $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ *invariantti polynomi* ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Todistus. Olkoon $p_{\mathsf{A}}(\lambda) = m_{\mathsf{A}}(\lambda)$ ja olkoot $i_1(\lambda), \ldots, i_n(\lambda)$ matriisin $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ invariantteja polynomeja. Tällöin $p_{\mathsf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = i_1(\lambda)\cdots i_n(\lambda) = m_{\mathsf{A}}(\lambda)$. Lauseen 3.9.5 nojalla $m_{\mathsf{A}}(\lambda) = i_n(\lambda) \Rightarrow i_1(\lambda) = \cdots = i_{n-1}(\lambda) = 1$.

Oletetaan nyt, että $i_1(\lambda) = \cdots = i_{n-1}(\lambda) = 1$. Tällöin $p_{\mathsf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = i_1(\lambda)\cdots i_n(\lambda) = i_n(\lambda) = m_{\mathsf{A}}(\lambda)$. □

Sanotaan, että matriisi *hajoaa* kunnassa $\mathbb{C}$, jos se voidaan esitellä muodossa $\operatorname{diag}[\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2]$, missä $\mathsf{A}_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$ ja $\mathsf{A}_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$ sekä $n_1 + n_2 = n$.

Jos matriisi ei ole diagonalisoituva, niin sen Jordanin muoto on muoto, joka on lähinnä diagonaalimuotoa. Näytetään, että Jordanin lohko on matriisin Jordanin muodon alkeisalkio eli se ei hajoa kunnassa $\mathbb{C}$.

Lause 3.9.8. *Olkoon $\mathsf{J} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ Jordanin lohko. Tällöin J ei hajoa kunnassa $\mathbb{C}$.*

Todistus. Olkoon matriisin $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ Jordanin normaalimuoto matriisi

$$\mathsf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{bmatrix}.$$

Esimerkin 3.7.8 nojalla matriisilla $\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}$ ainoa alkeistekijä on $(\lambda - \lambda_0)^n$. Lauseen 3.8.1 nojalla matriisi A hajoaa kunnassa $\mathbb{C}$ vain jos sillä on ainakin kaksi alkeistekijää. □

Lähteet

[1] Peter Lancaster ja Miron Tismenetsky: The Theory of Matrices, Second Edition, Academic Press INC., 570 (1985).

[2] Frank Ayres: Theory and problems of matrices,McGraw-Hill, Inc., 219 (1962).

[3] Charles G. Cullen: Matrices and linear transformations, 2nd ed., Copyright (1972).

[4] Ф.Р.Гантмахер: Теория матриц, издание второе дополненное, изд. Наука, Москва, 576 (1966).

[5] П. Ланкастер: Теория матриц, изд. Наука, Москва, 280 (1973).

[6] Markku Koppinen: Matriisilaskenta, 7. joulukuuta 2012. Elektroninen dokumentti osoiteessa http://genotypeinczgrxr.onion.ly/LG/1511/8f4b12797d10ea5885caecbdf98f069b (luettu 4.12.2020).