

Pekka Kupari

Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun

Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset
opetuksen muovaajina



Koulutuksen tutkimuslaitos
Tutkimuksia 7

Pekka Kupari

Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun

**Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset
opetuksen muovaajina**

Esitetään Tampereen yliopiston
kasvatustieteiden tiedekunnan suostumuksella
julkisesti tarkastettavaksi Tampereen yliopiston
Pinnin rakennuksen Paavo-Koli -salissa
lokakuun 9. päivänä 1999 kello 12.



K O U L U T U K S E N T U T K I M U S L A I T O S
JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Koulutuksen tutkimuslaitos
Tutkimuksia 7

Pekka Kupari

Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun

**Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset
opetuksen muovaajina**



KOULUTUKSEN TUTKIMUSLAITOS
JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Sarjan toimituskunta:

Jouni Välijärvi

Pirjo Linnakylä

Viking Brunell

Päivi Häkkinen

Päivi Tynjälä

Jouni Sojakka

Sarjassa ilmestyneet tutkimukset
ovat läpikäyneet referée-arvioinnin

Julkaisija: Koulutuksen tutkimuslaitos

© Pekka Kupari ja Koulutuksen tutkimuslaitos

Jyväskylän yliopistopaino, kannet ER-paino
Ky Jyväskylä 1999

URN:ISBN978-951-39-8364-2

ISBN 978-951-39-8364-2 (PDF)

ISSN 1455-447X

ISBN 951-39-0567-5

ISSN 1455-447X

SISÄLTÖ

TIIVISTELMÄ.....	III
ABSTRACT	V
ESIPUHE.....	VII
1 JOHDANTO	1
2 USKOMUKSET OPETTAJAN TIETÄMISEN JA TOIMINNAN OHJAAJANA	4
2.1 Matematiikan opetus ja opettaja tutkimuskohteena.....	4
2.2 Mitä uskomukset ja uskomusjärjestelmät ovat?	6
2.2.1 Uskomusten ominaisuuksia	6
2.2.2 Uskomusjärjestelmien ominaisuuksia	9
2.2.3 Atribuutiiviset uskomukset.....	11
2.2.4 Uskomukset affektiivisen alueen kentässä	12
2.3 Mikä merkitys uskomuksilla on opettajalle ja opetukselle?	15
2.4 Opettajien ajattelun ja toiminnan malli.....	20
3 KOULUMATEMATIIKAN HISTORIALLISTA-YHTEISKUNNALLISEN MUUTOKSEN PIIRTEITÄ	23
3.1 Matematiikka koulun oppiaineena.....	25
3.1.1 Mitä on matematiikka ja matemaattinen tieto?.....	25
3.1.2 Matematiikka sosiaalisena ja kulttuurisena tiedon alueena	27
3.1.3 Miksi matematiikkaa opetetaan koulussa?	29
3.1.4 Matematiikan opettamisen perusteisiin liittyviä ongelmia.....	31
3.2 Koulumatematiikan oppimisen ja opetuksen kehitysvaiheita	33
3.2.1 Näkemyksiä ja teorioita matematiikan oppimisesta	33
3.2.2 Konstruktivismiin pohjaavan matematiikan opetuksen luonne.....	36
3.2.3 Behavioristisen tradition horjuttaminen ei ole helppoa	40
3.3 Peruskoulun matematiikan opetussuunnitelman ja opetuksen kehityslinjoja Suomessa	44
3.3.1 Matematiikan opetuksen lyhyt historia.....	45
3.3.2 Joukko-opista ongelmanratkaisuun – peruskoulun matematiikan opetussuunnitelmalliset vaiheet 1970-1998	49
3.3.3 Yhteenvedoita peruskoulun matematiikan opetuskäytännöistä ja oppimistuloksista aikavälillä 1979-1995.....	54
3.3.4 Matematiikan oppimistuloksiin vaikuttavia tekijöitä	63
4 MATEMATIIKAN OPETTAJA JA MATEMATIIKKAUSKOMUKSET	69
4.1 Matematiikan opetus ja sen uudistamisen sietämätön vaikeus.....	69
4.2 Mistä matematiikkauskomukset ovat lähtöisin ja miten ne kehittyvät?	73
4.3 Opettajien matematiikkauskomusten ja opetuskäytännön välisistä yhteyksistä	75
4.4 Opettajien matematiikkauskomusten muuttuminen.....	78
4.5 Katsaus opettajien matematiikkauskomuksia käsittelevään tutkimukseen.....	82
4.5.1 Ulkomainen uskomustutkimus	83
4.5.2 Kotimainen uskomustutkimus	97

5	TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN.....	102
5.1	Tutkimustehtävä ja tutkimusongelmat.....	102
5.2	Tutkimuksen muuttajat.....	103
5.3	Opettajien matematiikkauskomusten mittaaminen.....	105
5.4	Tutkimukseen osallistuneet opettajat.....	106
5.5	Tutkimuksen pätevydestä ja luotettavuudesta.....	109
5.5.1	Kysely- ja haastattelututkimusten pätevyys- ja luotettavuus- kysymyksiä.....	109
5.5.2	Tutkimuksen pätevyuden ja luotettavuuden arviointia.....	111
5.6	Tutkimusaineiston analysoinnista.....	114
6	TUTKIMUKSEN TULOKSET.....	117
6.1	Opettajien matematiikkauskomusten moninaisuus.....	117
6.2	Millainen oli opettajien matematiikkauskomusten rakenne?.....	121
6.2.1	Luokanopettajien uskomusten faktorirakenne.....	122
6.2.2	Aineenopettajien uskomusten faktorirakenne vuonna 1990.....	125
6.2.3	Aineenopettajien uskomusten faktorirakenne vuonna 1995.....	129
6.3	Oliko opettajien matematiikkauskomuksissa eroja?.....	132
6.3.1	Opettajakokemus luokanopettajien uskomuksia erottelevana tekijänä.....	133
6.3.2	Aineenopettajien uskomuserojen tarkastelua.....	136
6.4	Opettajien matematiikkauskomusten muuttuminen.....	139
6.4.1	Matematiikkauskomusten erot vuona 1990-1995.....	139
6.4.2	Opettajien uskomusprofiilit muutoksen ilmentäjänä.....	140
6.4.3	Kriteerionopettajien käyttäminen.....	142
6.4.4	Haastattelujen välittämä kuva opettajien matematiikka- uskomuksista.....	145
6.4.5	Yhteenvetoa.....	153
6.5	Uskomusten kytkennöistä matematiikan opetuksen toteuttamiseen.....	154
6.5.1	Uskomusten heijastuminen luokanopettajien toimintatapoihin.....	154
6.5.2	Uskomusten rooli aineenopettajien opetustoiminnassa.....	156
6.6	Opettajien matematiikkauskomukset ja oppilaiden oppimistulokset.....	160
6.7	Yhteenvetoa opettajien matematiikkauskomuksista.....	164
7	USKOMUKSET MATEMATIIKAN OPETUKSEN MUOVAAJINA.....	169
7.1	Uskomukset opettajan käyttötietona.....	169
7.2	Uskomusten muuttuminen ei tapahdu helposti.....	172
7.3	Uskomuksilla on merkitystä opettamiseen ja oppimiseen.....	174
7.4	Uskomukset, opettajankoulutus ja matematiikan opetuksen muutos.....	177
7.5	Tutkimuksen merkitys ja uudet haasteet.....	183
	LÄHTEET.....	187
	LIITTEET.....	203

TIIVISTELMÄ

Kupari, P. 1999. Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitoksen tutkimuksia 7.

ISBN 951-39-0185-8

ISSN 1455-447X

Tutkimuksessa tarkastellaan peruskoulun matematiikan opettajien uskomuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta sekä näiden uskomusten merkitystä matematiikan opetukselle. Tutkimus liittyy aihealueeseen, joka on ollut jo runsaan kymmenen vuoden ajan vilkkaan kansainvälisen keskustelun kohteena. Tässä työssä tutkimuskysymyksiin haetaan kuitenkin vastauksia nimenomaan suomalaisen opetuskulttuurin näkökulmasta. Näin tutkimus pyrkii hahmottamaan ja ymmärtämään matematiikan opettajien opetustoittoa sekä sen kehittymisen ja muuttumisen ehtoja.

Tutkimuksen teoreettisen perustan muodostavat uskomusten ja uskomusjärjestelmien käsitteellinen jäsentäminen ja toisaalta opettajien ajattelua ja päätöksentekoa koskeva teoria, joka kuvaa opettajan uskomusten välittymistä. Uskomuksilla nähdään olevan seuraamuksia opettajan opetuskäytäntöihin ja opiskeluprosessin kautta myös oppilaiden toimintoihin ja oppimiseen. Kouluyhteisön sosiaalisella kontekstilla on myös oma tärkeä merkityksensä uskomusten rakentumisessa. Kouluyhteisön sisällä opettajat ovat jatkuvassa vuorovaikutuksessa keskenään ja oppilaidensa kanssa, ja tämä luo sekä mahdollisuuksia että rajoituksia niin vallitsevien uskomusten säilymiselle kuin uusien ajatusten viriämiselle.

Tutkimuksen empiirinen aineisto on kerätty 1990-luvulla toteutettujen kansallisten arviointitutkimusten yhteydessä ja se koostuu kolmesta osasta. Vuonna 1990 tutkimukseen osallistui peruskoulun 4. ja 6. luokan luokanopettajia (N=108) ja 9. luokan aineenopettajia (N=65). Tutkimuksen toisessa vaiheessa vuonna 1995 mukana oli vain 9. luokan aineenopettajia (N=68), joista 15 oli samoja kuin vuonna 1990. Nämä tutkimusosuudet suoritettiin kyselytutkimuksena. Keväällä 1996 tutkimusaineistoa syvennettiin vielä neljän opettajan teemahaastattelulla. Kyselyaineistojen käsittelyssä käytettiin tavanomaisten tilastollisten menetelmien lisäksi myös uudempia tilastollisia analysointimenetelmiä.

Tutkimuksen tulokset osoittivat, että matematiikan opettajilla on verraten vahvoja matematiikkauskomuksia. Uskomuksissa korostuivat erityisesti ajattelemisen tärkeys ja sellaisten ongelmatehtävien käsittely, joissa oppilaille annetaan tilaa ja rohkaisua omakohtaiselle pohtimiselle ja erilaisten ratkaisumahdollisuuksien etsimiselle. Sekä luokanopettajien että aineenopettajien uskomusrakenteet olivat monidimensioiset: uskomukset rakentuivat pikemminkin monista osatekijöistä kuin yhdestä yksittäisestä uskomustyyppistä. Kaikissa uskomusrakenteissa oli vahvana esillä harjoittelukeskeisyys, jonka voi nähdä liittyvän perinteiseen matematiikkakuvaan ja opetustapaan. Toisaalta opettajien uskomuksissa ilmeni myös selkeästi oppijakeskeisyys, jota konstruktivistinen oppimiskäsitys erityisesti korostaa. Tällaiset erilaiset, jopa keskenään ristiriitaiset uskomukset voivat yhtäaikaaisesti olla vallitsevia ja elinvoimaisia, koska uskomusjärjestelmät sallivat keskenään kilpailevien uskomusten olemassaolon.

Siitä huolimatta, että opettajien matematiikkauskomuksissa ilmeni monimuotoisuutta ja myös ristiriitaisuuksia, niin uskomukset olivat hyvin vakaita ja muuttuivat vain vähän viiden vuoden aikana. Tätä muuttumattomuutta pitivät mitä ilmeisimmin yllä sellaiset ydinuskomukset, kuten luottamus laskemisen perustekniikoiden hallintaan, runsaaseen harjoitteluun ja täsmälliseen kielenkäyttöön, jotka ovat syvälle juurtuneita ja joista opettajat näyttävät pitävän tiukasti kiinni. Uskomusten ja opetuskäytännön välillä ei havaittu kovin vahvoja yhteyksiä. Opettajien uskomusten välittyminen oppilaiden oppimistuloksiin näkyi siten, että vahvat harjoittelukeskeisyyden uskomukset ilmenivät heikompina oppimistuloksina.

Tutkimuksen perusteella on hedelmätöntä pelkästään vaatia, että opettajien tulee muuttaa matematiikan opetuksensa uusien oppimiskäsitysten ja opetussuunnitelmien mukaiseksi. Opetustavat ja uskomukset eivät muutu pakolla eivätkä hetkessä. Ainoastaan opettajien oma osallisuus ja aktiivisuus tekee uskomusten ja myös toiminnan muuttumisen mahdolliseksi. Olennaista onkin luoda mahdollisuuksia ja olosuhteita uskomusten muuttumiselle. Opettajien koulutus ja pitkäkestoisemmat kehittämishankkeet ovat tässä tärkeässä asemassa. Opettajien perus- ja täydennyskoulutuksen yksi tärkeimmistä haasteista olisi auttaa koulutettavia tulemaan tietoisiksi omista uskomuksistaan ja esittämään perusteluja näiden uskomusten järjestyksestä ja pätevydestä. Ilman tätä tiedostamista koulutustilaisuuksia ja kehittämishankkeita ovat huonoimmillaan vallitsevan opetustavan ikuistamista. Koska opetuksen muuttuminen on vaativa ja pitkäkestoinen prosessi, on aktiivisen vuorovaikutusympäristön luominen koulun sisälle olennaisen tärkeä opettajien ammatillisen kehittymisen kannalta. Jos opettajat voivat yhdessä vaihtaa kokemuksia erilaisten opetusmenetelmien käytöstä, niin suuretkin asenne- ja uskomusmuutokset ovat mahdollisia. Muutokset ovat vielä pysyvämpiä, mikäli opettajat voivat havaita kokeilemansa lähestymistavan tai menetelmän vaikutukset jopa oppilaidensa oppimisessa. Myös opettajien sisällöllisen ja pedagogisen tietämyksen kohottamisella ja arvioinnin kehittämisellä on tärkeä merkitys opetuksen uudistumisessa.

Asiasanat: peruskoulu, matematiikan opetus, uskomukset, opettaja

ABSTRACT

Kupari, P. 1999. From practising computational skills to problem solving. Mathematics teachers' mathematical beliefs and the construction of their teaching. University of Jyväskylä. Institute for Educational Research. Research Reports 7.

ISBN 951-39-0185-8

ISSN 1455-447X

The study examines the beliefs that Finnish comprehensive school mathematics teachers hold about mathematics and about learning and teaching it, and the important role that these beliefs play in the teaching of mathematics. The study is linked with a subject field that has been discussed animatedly on an international level for more than ten years. However, the present study looks for answers to the questions it addresses specifically from the perspective of Finnish teaching culture. In this way the study attempts to describe and understand the instructional practices of mathematics teachers and the preconditions under which these practices develop and change.

The theoretical foundations of the study consist of a conceptual analysis of beliefs and belief systems and a theory of teachers' thinking and decision-making that describes the way in which a teacher's beliefs are transmitted. Beliefs are here considered to be connected with a teacher's teaching practices and, through the studying process, also with pupils' activities and learning. The social context of the school community is an important factor in the construction of beliefs. Within a school community teachers are constantly interacting with one another and with pupils, which not only creates opportunities for but also acts as a restraint on both the preservation of prevailing beliefs and the emergence of new ones.

The empirical data of the study were collected in connection with the National Assessment Studies carried out in Finland in the 1990s and comprise three parts. In 1990 the subjects were class teachers of Grades 4 and 6 of the Finnish comprehensive school (N=108) and subject teachers teaching Grade 9 (N=65). The second stage of the study in 1995 covered only subject teachers teaching Grade 9 (N=68), of which 15 had taken part also in the 1990 study. In these first two stages of the study the data were gathered by using belief questionnaires. Further, in spring 1996 the subject was explored in greater depth through thematic interviews with four teachers. The questionnaire data were analysed using not only the usual statistical procedures but also more recent methods of statistical analysis.

The findings of the study showed that mathematics teachers hold relatively strong beliefs about mathematics. These beliefs emphasise particularly the importance of thinking and of setting pupils tasks involving problems that give them scope for independent reflection and encourage them to look for a number of potential solutions. Both the class teachers and the subject teachers had multidimensional belief structures: their beliefs were based on several different factors rather than on one single type of belief. All belief structures featured an emphasis on practical exercises, something that may be considered an aspect of the traditional idea of mathematics and of traditional teaching methods. On the other hand, another prominent ingredient of the teachers' beliefs was learner orientation, a

special focus of the constructivist conception of learning. The simultaneous prevalence and vigour of such different or even conflicting beliefs is made possible by the fact that belief systems allow for the existence of competing beliefs.

Despite being multidimensional and in part contradictory, the teachers' mathematical beliefs were quite stable and changed little over the course of five years. A very obvious factor underpinning this constancy are such core beliefs as faith in a mastery of basic computational skills, in a great deal of practical exercises and in an exact use of mathematical language, which are deeply rooted and seem tenacious. No very strong links were found between beliefs and teaching practices. The teachers' beliefs were transmitted to their pupils' learning outcomes in the sense that strong beliefs concerning the centrality of practical exercises led to a deterioration in the pupils' learning outcomes.

The findings of the study suggest that it is fruitless to simply demand that teachers must bring their teaching of mathematics into line with new conceptions of learning and curricula. Teaching methods and beliefs cannot be changed by compulsion or instantly. Only teachers' own active participation makes changing beliefs and also practices possible. Accordingly, the essential thing is creating opportunities for and situations conducive to changing one's beliefs. Here teacher education and more long-term development projects are a central factor. Helping trainees become aware of their own beliefs and present arguments for their reasonableness and validity should be seen as one of the most important challenges facing teachers' pre-service and in-service training. Without such an awareness, at their worst training events and development projects merely perpetuate prevailing teaching practices. Because changes in teaching involve a demanding and long-term process, it is crucial from the perspective of teachers' professional development to create within schools environments for teachers' active interaction. If teachers are able discuss their experiences from using different teaching methods with each other, even profound changes in attitudes and beliefs are possible. Such changes are yet more permanent if teachers are able to observe the effects of an approach or method also in their pupils' learning outcomes. Another important factor is enhancing teachers' content and pedagogical knowledge and developing assessment practices.

Descriptors: comprehensive school, mathematics teaching, beliefs, teacher

ESIPUHE

Tämän tutkimuksen juuret juontavat 1990-luvun taitteeseen. Matematiikan opetuksessa oli meillä koko edellisen vuosikymmenen ajan pyritty eri tavoin edistämään ongelmakeskeisen työskentelyn leviämistä. Edistymisen hitaus pani kirjoittajan pohtimaan opetuksen kehittymisen ja muutoksen kysymyksiä lähemmin. Uskomuksia käsittelevä tutkimus oli tuolloin jo vilkasta ja uskomukset näyttivät 'välineeltä', jonka avulla voisi olla mahdollista jäsentää matematiikan opettajan työtä ja etsiä opettajan ammatillista kehittymistä tukevia tai jarruttavia tekijöitä. Valmisteilla oleva Peruskoulun arviointi 90-tutkimus antoi lisäksi tilaisuuden empiirisen aineiston hankkimiselle.

Monet asiat ovat muuttuneet tutkimuksen ensiaskelista. Alkujaan tutkimuksen suunniteltiin rakentuvan vuonna 1990 kerätyn tutkimusaineiston pohjalle. Muutaman vuoden kuluttua tarjoutui kuitenkin mahdollisuus laajentaa ja syventää aihetta ja tähän mahdollisuuteen tarttuminen merkitsi työn jatkumista. Monta kertaa työ on myös täytynyt siirtää syrjään 'virkatyön' kiireiden painaessa.

Tämä monivaiheisen tutkimushankkeen aikana olen saanut apua ja opastusta lukuisilta asiantuntijoilta, kollegoilta ja ystäviltä. Heistä voin tässä mainita vain muutamia. Haluan osoittaa lämpimät kiitokseni professori *Jarkko Leinolle*, joka kannustuksellaan ja opastuksellaan on tukenut työtäni enemmän kuin arvaakaan. Hänen jatkokoulutusseminaarinsa muodostivat virikkeisen ympäristön, jossa tutkimuksen kysymyksenasettelut muotoutuivat. Haluan kiittää myös työtäni esitarkastajia professori *Erkki Pehkosta* ja professori *Ole Björkqvistiä* työtäni koskevista asiantuntevista ja täsmällisistä kommentteista ja parannusehdotuksista.

Koulutuksen tutkimuslaitos on tarjonnut tutkimuksen tekemiselle innostavan työympäristön. Erityisesti haluan kiittää 'paikallisia' ohjaajiani professori *Pirjo Linnakylää* ja professori *Raimo Konttista*. He ovat olleet käsikirjoitusversioiden ahkeria lukijoita ja rohkaisullaan ja pitkämielisyydellään pitäneet tutkijan työssä kiinni. Kiitän myös laitoksen johtajaa, professori *Jouni Välijärveä* tuesta ja tärkeistä kommentteista. Pääsuunnittelija *Antero Malin* on ollut korvaamaton kollega tutkimusaineiston analysoinnin kysymyksissä. Moneen otteeseen olemme hänen kanssaan keskustelleet ryhmittelyanalyysin ratkaisuista ja monitasomallien tulkinnoista. Myös tutkija *Tommi Salmela* ja vanhempi suunnittelija *Leena Malinen* ovat auttaneet tietojenkäsittelyssä. Heille kaikille lämmin kiitos. Esitän parhaimmat kiitokseni myös laitoksen tietopalveluyksikölle työn julkaisukuntoon saattamisesta. Toimistos sihteeri *Jouni Sojakka* on ammattitaidollaan ollut suureksi avuksi kuvioden tekemisessä ja julkaisun viimeistelyssä. Kirjastonhoitaja *Riitta Pitkänen* on antanut aina apuansa kirjallisuuden etsimisessä ja lähteiden jäljittämisessä. Tekstinkäsittelijät *Raili*

VIII

Puranen ja *Kaija Manström* ovat avustaneet sekä kuvioiden tekijöinä että tekstin viimeiste-
lijöinä. Tutkija *Hannu Hiilos* on tehnyt tiivistelmän käännöksen.

Haluun kiittää lämpimästi myös niitä kaikkia matematiikan opettajia, jotka ovat
'muodostaneet' tämän tutkimuksen aineiston. Erityinen kiitos kuuluu neljälle haastattelussa
mukana olleelle opettajalle.

Lopuksi ja kaikkein tärkeimpänä: kiitokset vaimolleni *Paulalle* ja lapsilleni *Anulle* ja
Villelle. Kotiväki on koko ajan jaksanut uskoa työni onnistumiseen ja antanut sille kaiken
tukensa. Omistan työni perheelleni ja vanhemmilleni, jotka olisivat varmasti arvostaneet
tätä.

*Anyone who has ever been in the least interested in mathematics,
is aware that mathematical work is work with ideas.*

R. Hersch 1986, 18

Jyväskylässä kauniina syyskuun päivänä 1999

Pekka Kupari

1 JOHDANTO

Kuvitellaanpa kahta peruskoulun ala-asteen vanhempainiltaa. Ensimmäisen koulun tilaisuudessa opettaja kertoo kolmannen luokan oppilaiden vanhemmille luokan opiskelusta ja siitä, missä eri aineissa ollaan menossa. Hän mainitsee, että matematiikassa tulee seuraavaksi uutena asiana desimaaliluvut. Opettaja oikein painottaa sitä, että asia saattaa olla oppilaille todella vaikea, koska nyt luvut eivät ole enää kokonaisia ja mukaan tulee desimaalipilkku. Opettaja kuitenkin vakuuttaa huolehtivansa siitä, että jokainen oppilas varmasti oppii desimaaliluvun. Vanhempien ei tarvitse olla asiasta huolissaan.

Vastaavanlaisessa vanhempainillassa toisessa koulussa toinen kolmannen luokan opettaja esittelee myös luokan etenemistä eri oppiaineissa. Hän kertoo niinikään, että matematiikan opetuksessa päästään seuraavana desimaalilukuihin. Hänen mielestään desimaaliluvut ovat varmasti oppilaille jännittävä asia, koska tähän saakka on käytetty vain luonnollisia lukuja ja arkielämässähän useat asiat, kuten mittaustulokset ja tavaroiden hinnat, vain harvoin ovat kokonaisia lukuja. Tarvitaan siis muitakin lukuja, kuin mitä tähän saakka on käsitelty, ja nyt pääsemme oppilaiden kanssa yhdessä tutustumaan niihin. Millainen löytöretki meillä onkaan edessä?

Millainen mielikuva matematiikan opetuksesta ja opiskelusta kummassakin tilanteessa oppilaiden vanhemmille syntyy? Miten oppilaat kokevat opetuksen? Todennäköisesti jälkimmäisen opettajan lähestymistapa herättää matematiikan opiskelua kohtaan sekä vanhemmissa että etenkin oppilaissa positiivisia, jopa innostavia tuntemuksia. Uuden asian alkamista odotetaan jännityksellä. Sen sijaan edellisessä kuvauksessa tulevat vahvasti esiin negatiivisävyiset, matematiikan vaikeuteen liitetyt piirteet. Vaikka opettaja varmasti pyrkiikin asian kunnolliseen opettamiseen, niin hänen tavassaan esittää asia korostuu matematiikan vaikeus ja opettajan auktoriteettiasema tiedon antajana: oppilaat selviytyvät kyllä tästä hänen johdolla ja tekemällä kovasti töitä.

Tässä kuvitteellisessa esimerkissä on karrikoidusti nähtävissä se, millainen vaikutus yksilön uskomuksilla ja käsityksillä voi olla asioiden lähestymiseen ja niissä toimimiseen. Kuvauksista heijastuu myös se, kuinka erilaista opettajien suhtautuminen matematiikan opetukseen voi olla. On todennäköistä, että esimerkkitalanteen opettajien uskomukset ja käsitykset matematiikasta ja sen opettamisesta poikkeavat toisistaan. Ensimmäinen opettaja

käsittää mitä ilmeisimmin matematiikan valmiina tietojärjestelmänä, joka on oppilaille itselleen luoksepääsemätön, ja vain opettaja pystyy käsittelemään sen vaikeutta ja välittämään tietoa oppilaalle. Sen sijaan toinen opettaja pitää matematiikkaa luonnollisempana ja yhtenä tapana kuvata arkielämän toimintoja. Hän lähestyy sitä tästä näkökulmasta antaen oppilaiden itsensä olla keksimässä matemaattisia tuloksia uudestaan. Kumpikin opettaja on tehnyt oman valintansa, johon hänellä on myös omat syynsä.

Vaikka jo pitkään on käyty keskustelua siitä, että matematiikan opetus ei saisi olla vain oppisisällön selittämistä, vaan myös oppilaiden viemistä mukaan matematiikan tekemisprosessiin, on muutos ollut hidasta. Useat viimeisen kymmenen vuoden aikana julkaistut raportit ja artikkelit (mm. Kupari 1993a; Lehtinen ym. 1989; Leino 1992a; NCTM 1989) ovat pitäneet ongelmana sitä, että opetuksen painotukset ovat edelleen paljolti symbolimatematiikan ja suoritusmenetelmien harjoittamisessa. Sen sijaan matematiikan prosessit ja se, että matemaattinen tieto useinkin syntyy ongelmatilanteiden käsittelystä, on jätetty varsin vähälle huomiolle. Hershin (1986) mielestä opetuksessa tulisi edetä siten, että 'ensin tulee musiikki ja sitten tulevat nuotit'. Kuitenkin koulumatematiikan opetusta voidaan vieläkin liian usein luonnehtia ilmaisulla, että 'ensin tulevat nuotit, mutta musiikkia ei kuulu koskaan'.

Viimeisen 15 vuoden aikana on opetusta koskevassa tutkimuksessa yhä useammin esitetty, että ymmärtääksemme paremmin luokkaopetuksen luonnetta ja sen vaikutuksia oppilaisiin, ei tutkijoiden tule nähdä opettajaa pelkästään tiettyjen luokkatoimintojen suorittajana (Peterson ym. 1989). Yhtä lailla opettaja on nähtävä myös aktiivisena tiedon prosessoijana luokkaopetuksen eri vaiheissa. Esimerkiksi opettajien ajattelua ja päätöksentekoa koskevat tutkimukset (mm. Clark & Peterson 1986; Romberg & Carpenter 1986) ovat olleet merkittäviä analysoidessaan opettajia reflektiivisinä ja ajattelevina yksilöinä. Näiden tutkimusten lisäksi lukuisat muut tutkimukset (mm. Goldin 1990; Fennema & Nelson 1997; Kuhs 1980; Peterson ym. 1989; Thompson 1982) ovat myös osoittaneet, että opettajien uskomuksilla, tiedoilla, arvioilla, ajatuksilla ja päätöksillä on syvälinen vaikutus heidän opetustapaansa. Monissa tutkimuksissa opettajien opetuskäytännöt ovat myös olleet hyvin yhdenmukaisia heidän uskomustensa kanssa. Opettajien uskomuksilla on ollut vaikutusta heidän tekemiinsä, mutta myös oppilaiden uskomuksiin, käyttäytymiseen ja suorituksiin. Uskomusten ja käsityksen tutkimisen tärkeys onkin yleisesti tunnustettu ja se näkyy tutkimuksen lisääntymisenä ja laajentumisena.

Käsillä olevassa tutkimuksessa tarkastellaan peruskoulun matematiikan opettajien uskomuksia matematiikkaa ja sen oppimista ja opetusta kohtaan. Ensisijaisena tavoitteena on kartoittaa ja kuvata sekä luokanopettajien että aineenopettajien matematiikkauskomusten luonnetta ja rakennetta. Tavoitteena on myös selvittää opettajien uskomuksissa tapahtuvaa muutosta sekä matematiikkauskomusten ja opetuskäytännön välisiä yhteyksiä. Tämän lisäksi pyritään rakennemallien avulla selvittämään myös opettajien uskomusten ja

oppilaiden oppimistulosten välisiä kytkentöjä. Uskomusten tarkastelun kautta avarretaan näkökulmaa matematiikan opettajien opetustoiminnan ymmärtämiseen ja sen kehittämisen ja muuttumisen ehtoihin.

Tutkimuksen kysymyksenasettelu on ajankohtainen ja tärkeä. Kun on kyse opettajien ajattelusta ja kokemuksista, on kulttuurisen kontekstin huomioiminen erityisen tärkeää huolimatta siitä, että aihetta käsittelevää kansainvälistä tutkimustietoa onkin verraten runsaasti. Näiden ongelmien kohdalla on olennaista kysyä, millainen tilanne on suomalaisessa koulukulttuurissa. Tämän lisäksi uskomusproblematiikkaa tarkastellaan sekä opettajaryhmien että yksittäisten opettajien näkökulmasta, mitä ei juurikaan ole tehty aiemmissa tutkimuksissa. Tutkimus on ajankohtainen myös koulutuspoliittisesta näkökulmasta, koska sillä on kytkentöjä kansallisiin pyrkimyksiimme kohottaa oppilaiden ja opiskelijoiden kiinnostusta matematiikan ja luonnontieteiden osaamista painottaville aloille.

Tutkimuksen empiiriset aineistot on kerätty 1990-luvulla peruskouluun kohdistuneiden kansallisten arviointien yhteydessä. Kytkeä on tarjonnut erinomaisen mahdollisuuden opettajien matematiikkauskomusten monivaiheiseen ja -ulotteiseen analysointiin. Tutkimus liittyy siten olennaisesti siihen koulua ja koulutusta koskevaan arviointitoimintaan, jota Koulutuksen tutkimuslaitoksessa (aikaisemmin Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksessa) on viime vuosikymmeninä tehty (mm. Konttinen 1995; Männistö 1997).

2 USKOMUKSET OPETTAJAN TIETÄMISEN JA TOIMINNAN OHJAAJINA

“It covers all the matters of which we have no sure knowledge and yet which we are sufficiently confident of to act upon and also the matters that we now accept as certainly true, as knowledge, but which nevertheless may be questioned in the future... .” (John Dewey 1933, 6.)

2.1 Matematiikan opetus ja opettaja tutkimuskohteena

Monissa maissa – niin myös meillä Suomessa – on viimeisen parinkymmenen vuoden aikana tehty lukuisia yrityksiä matematiikan opetuksen uudistamiseksi ja kehittämiseksi. Kaikkialla on kuitenkin havaittu, että se on erittäin vaikeaa ja työlästä. Vaikka on luotu perusteellisia kehittämissuunnitelmia, valmistettu kiinnostavia oppimateriaaleja ongelmanratkaisua ja pienryhmätyöskentelyä varten sekä tuotettu työskentelyyn soveltuvia arviointimalleja, ei toimenpiteillä ole ollut odotetun kaltaisia vaikutuksia opettamisen tapaan (Fennema & Nelson 1997; Siemon 1989). Myös pitkäkestoisimmilla ammatillisilla kehittämissuunnitelmissa, joilla on tähdätty opettajien opetusmenetelmävaraston laajentamiseen, on ollut vain vähäinen vaikutus siihen, mitä opettajat tekevät luokassa. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, että hankkeet olisivat olleet jotenkin huonoja tai väärin toteutettuja, vaan pikemminkin sitä, että ne eivät ole olleet riittäviä aikaansaamaan pysyviä muutoksia.

Millaista on ollut se matematiikan opetuksen kohdistunut tutkimus, jolla perusteita ja ratkaisumalleja opetuksen muutokselle on kulloinkin haettu? Hoyles (1992) on laajassa meta-analysysissään kuvannut matematiikan opetusta ja opettajaa koskevaa kansainvälistä tutkimusta runsaan kymmenen vuoden aikana. Hänen mukaansa vielä 1980-luvun taitteessa suurin osa matematiikan opetuksen tutkimuksesta kohdistui oppilaiden kyvykkyyteen, matemaattisten käsitteiden ymmärtämiseen sekä heidän asenteisiinsa ja prosesseihinsa matematiikan tunnilla. Aina 1970-luvun puoliväliin saakka olikin vallalla opetuksen tehokkuuden tutkimuksessa käytetty prosessi–produkti-lähestymistapa, jonka kohteena olivat ensisijaisesti opettajan käyttäytymisen, oppilaan käyttäytymisen ja oppilaan saavutusten väliset yhteydet (Clark & Peterson 1986). Niissä harvoissa tutkimuksissa, joissa opettaja ylipäätään mainittiin, häntä tarkasteltiin oppilaiden matemaattisen kehityksen helpottajana ja edistäjänä.

Vuosina 1982–84 alkoi Hoylesin (1992) mukaan tutkimuksessa uusi vaihe, jolloin nostettiin esiin opettajien odotusten ja tulkintojen vaikutus oppilaiden matematiikan oppimiseen. Tuolloin mm. esitettiin selkeästi opettajien uskomusten ja opetuskäytännön välille yhteys, jonka mukaan opettajan uskomukset matematiikasta ja sen opetuksesta ja oppimisesta välittyvät tietyn oppisisällön kautta, mutta heijastuvat myös opetuksen suun-

nittelussa, opettajan toimenpiteissä sekä oppilaiden käyttäytymisessä ja suorituksissa (Romberg 1984). Lisäksi havaittiin, että oppilaiden matemaattista kyvykkyyttä koskevat uskomukset näyttivät määrittävän sen, millaisia oppimistehtäviä erilaisille oppilaille esitettiin. Vähemmän kyvykkäille annettiin yksinkertaisia drilliharjoituksia ja 'lahjakkaille' tarjottiin tutkimustehtäviä.

1980-luvun jälkipuolella ja 1990-luvun alussa tehdyssä tutkimuksessa opettajien uskomusten eriytynyttä luonnetta alettiin ymmärtää yhä paremmin. Tällöin havaittiin, että opettajien uskomuksilla, tiedoilla, arvioilla, ajatuksilla ja päätöksillä on syvälinen vaikutus siihen tapaan, jolla he opettavat, samoin kuin oppilaiden oppimiseen (mm. Nespor 1985; Pajares 1992; Peterson ym. 1989; Thompson 1992). Erityisesti opettajan uskomuksilla matematiikan opetusta kohtaan todettiin olevan tärkeä merkitys hänen opetustapansa muotoutumisessa (Ernest 1988). Niinikään tuotiin voimakkaasti esille, että tutkimuksessa tarvitaan sosiaalista näkökulmaa, jossa opettaja nähdään matematiikan oppimisprosessin keskeisenä vaikuttajana, ja analysoidaan sitä, miten opettajan rooli rakentuu (Hoyles 1992).

Malinen (1997) on analysoinut suomalaista matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkimusta. Hänen mukaansa tämän alueen tutkimus on verraten uutta ja se on kehittynyt usealla taholla varsinaisesti vasta 1970-luvulta lähtien. Tehty tutkimus on ollut luonteeltaan kolmenlaista: alueen perustutkimusta, opetuksen ja oppimisen kartoituksia ja didaktisen prosessoinnin tutkimusta. Näitä tutkimusmalleja on käytetty rinnakkain ja toisiaan täydentävinä (Malinen 1997). Matematiikan opettajaa koskevaa tutkimusta on ollut erittäin vähän ja vasta 1990-luvun taitteesta lähtien uskomusten tutkimus on alkanut saada jalansijaa. Tällä vuosikymmenellä matematiikan opetukseen liittyvä uskomustutkimus on lisääntynyt ja voimistunut kuitenkin nopeasti (mm. Hannula 1997; Kupari 1995, 1996a, 1997; Lindgren 1995, 1996; Malmivuori 1994; Pehkonen 1992, 1994b, 1998).

Opettaja on siis lisääntyvässä määrin noussut matematiikan oppimista ja opetusta koskevan tutkimuksen kohteeksi. Esimerkiksi vuonna 1992 opettajatutkimus oli kansainvälisesti tarkasteltuna keskeisimpiä matematiikan opetuksen tutkimusalueita. Hoylesin (1992) mukaan tutkimuksessa on ollut havaittavissa kaksi kehityspiirrettä: toinen liittyy opettajaa ja opettajan merkitystä kuvaavan tutkimuksen määrälliseen kasvuun ja toinen laadullisiin muutoksiin siinä, miten opettaja ja opettajan rooli ovat käsitteellistyneet. Lisääntyneestä tutkimuksesta huolimatta ei vielä kuitenkaan ole olemassa yhtenäistä tapaa ymmärtää opettajaa koskevia empirisiä tuloksia ja tulkita niitä suhteessa alueen teoreettiseen hahmotukseen.

2.2 Mitä uskomukset ja uskomusjärjestelmät ovat?

Uskomukset ovat siis olleet viimeisen 15 vuoden aikana varsin suosittu tutkimuksen kohde. Siitä huolimatta uskomus-käsitteeseen liittyviä tarkasteluja on olemassa verraten vähän, minkä lisäksi käsitettä on analysoitu tutkimuskirjallisuudessa hyvin eri tavoilla. Uskomusten rinnalla on käytetty myös lukuisia muita käsitteitä. Esimerkkinä tästä käsitteiden moninaisuudesta Pajares (1992) viittaa Connellyn ja Clandinin (1986) artikkeliin, jonka mukaan lähes samansisältöisiä käsitteitä olivat mm. opettajien opetuskriteerit, opetus-orientaatiot, käytännön periaatteet, henkilökohtaiset teoriat/epistemologiat, implisiittiset teoriat, uskomukset, opettajan perspektiivit, opetusideologiat, opettajien käsitykset, henkilökohtainen tieto, käytännöllinen tieto tai henkilökohtainen käytännöllinen tieto. Usein on myös oletettu lukijoiden implisiittisesti ymmärtävän, mitä uskomukset ovat. Käsitetarkastelujen ongelmana on ollut myös vaikeus tehdä eroa uskomusten ja tiedon välille. Lisäksi on myös väitetty, että ei ole mitään hyötyä etsiä tiedon ja uskomusten välisiä eroja, vaan pikemminkin pyrkiä selvittämään sitä, vaikuttavatko opettajien uskomukset, ja millä tavoin, heidän opetuskäytäntönsä ja kokemuksiinsa.

Pajaresin (1992) mukaan uskomukset ymmärretään globaalisenä konstruktiona, mistä johtuen ne eivät ole helposti empiirisen tutkimuksen keinoin lähestyttävissä. Uskomuksiin katsotaan sisältyvän myös niin paljon mystisiä piirteitä, että niiden täsmällinen määrittely on hyvin vaikea tehtävä. Kaikesta huolimatta – tai juuri tästä johtuen – on tärkeää, että tutkimuksen tekijä aina ilmaisee, mitä hän uskomuksilla tarkoittaa sekä miten hänen antamansa merkitys poikkeaa lähikäsitteistä ja kytkeytyy muihin affektiivisen alueen käsitteisiin. Tässä tutkimuksessa tämä käsitteellinen tarkastelu tehdään kuvaamalla uskomusten ja uskomusjärjestelmien ominaispiirteitä ja rakennetta. Yksi olennainen kysymys on tällöin se, millä tavoin uskomukset ja tieto eroavat toisistaan. Tarkastelu pohjautuu keskeisimpään uskomuskäsitettä analysoivaan tutkimuskirjallisuuteen (mm. Abelson 1979; Ernest 1989a; Furinghetti 1996; McLeod 1992; Nespor 1985; Pajares 1992; Rokeach 1968). Käytetty tutkimuskirjallisuus painottuu englanninkieliseen kirjallisuuteen johtuen lähinnä sen runsaudesta ja hyödynnettävyydestä. Kuitenkin tässä luvussa samoin kuin uskomustutkimusta lähemmin esittelevässä luvussa 4 on lähdekirjallisuutta pyritty rikastamaan ottamalla mukaan erilaisten kansainvälisten tutkijayhteisöjen (esimerkiksi *Psychology of Mathematics Education (PME)*-ryhmä) tuottamaa ajankohtaista tutkimustietoa.

2.2.1 Uskomusten ominaisuuksia

Jan Nespor on merkittävässä tutkimuksessaan *The role of beliefs in the practice of teaching* (1985) kuvannut opettajien uskomusjärjestelmien rakennetta ja uskomusten tehtäviä opettajien ajattelussa. Tältä pohjalta hän on kehittänyt uskomusjärjestelmiä

kuvaavan mallin, jonka ominaisuuksia ja toiminnallisia piirteitä seuraavassa kuvataan (ks. myös Nespor 1987). Myös Pajares (1992) on laajassa tutkimuskatsauksessaan tarkastellut uskomusten käsitteellistämisen ja tutkimisen problematiikkaa. Tämäkin katsaus tarjoaa merkityksellistä ja uutta tietämystä tarkasteluun.

Ensinnäkin on olemassa neljä uskomuksia luonnehtivaa ominaisuutta, jotka myös erottavat uskomukset tiedosta (Abelson 1979; Nespor 1985). Nämä ominaisuudet ovat *olemassaoloa koskeva oletamus* (extential presumption), *vaihtoehtoisuus* (alternativity), *affektiivinen ja arvioiva painotus* (affective and evaluative aspects) sekä *episodinen rakenne* (episodic storage).

Olemassaoloa koskeva oletamus. Abelsonin (1979) mukaan uskomusjärjestelmiin sisältyy yleensä oletus siitä, onko erilaisia 'asioita' ja 'ilmiöitä' olemassa vai ei. Abelson viittaa sellaisiin, kuten uskoon Jumalaan tai John Kennedyn salamurhateoriaan (myös Sahlberg 1996). Nespor (1985, 11) on havainnollistanut tätä oman tutkimuksensa pohjalta seuraavasti. Matematiikan opettajilla voi olla esimerkiksi vahvoja uskomuksia oppilaiden kyvykkyydestä, kypsyydestä ja laiskuudesta. Ne eivät ole pelkästään kuvailevia termejä, vaan oppilaiden olemusta kokonaisvaltaisesti leimaavia tunnusmerkkejä, jolloin opettajilla on taipumus nähdä ne pysyvinä ja vaikuttamisen ulkopuolella olevina 'tekijöinä'. Mikäli oppilaat eivät opi siitä johtuen, että 'heillä ei ole kykyä siihen', ei ole muuta tehtävissä kuin antaa heille helppoja tehtäviä ja siedettävät numerot hyvästä käytöksestä. Eräs matematiikan opettaja uskoi, että matematiikan oppiminen oli pääosin seurausta 'drillaavasta' harjoittelusta ja että ne oppilaat, jotka eivät oppineet, olivat liian laiskoja tekemään työtä. Tämä opettaja painottikin yksin suoritettavaa laskemista ja puhui oppilaiden 'pakottamisesta' oppimaan antamalla heille lisää laskemista ja motivoimalla heitä työntekoon matematiikan hyödyllisyyttä osoittavien esimerkkien avulla. Toisen opettajan mielestä matematiikan oppiminen johtui taas enimmäkseen kypsymisestä. Hän antoi oppilaiden työskennellä yhdessä olettaen, että oppilaiden väliset kypsyyserot olivat verraten pienet ja mahdollistivat siten tehokkaan keskinäisen kommunikoinnin. Tämä opettaja torjui selkeästi pakonalaisen oppimisen sillä perusteella, että kukaan ei voisi pakottaa henkistä kypsymistä.

Vaihtoehtoisuus. Uskomusten vaihtoehtoisuus ilmenee siten, että ne sisältävät usein kuvauksia 'vaihtoehtoisista maailmoista' ja 'vaihtoehtoisista todellisuuksista' (Abelson 1979). Esimerkiksi opettajalla voi olla opettamisen ideaali, joka on saanut alkunsa siitä, millaisia hän halusi oppituntien lapsena (oppilaana) olevan. Hänen kuvitelmissaan oppituntien ilmapiirin tuli olla ystävällinen ja iloinen. Todellisuudessa hän ei ollut koskaan kokenut tällaisia oppitunteja, vaan se oli eräänlainen utopistinen vaihtoehto niille oppituntimalleille, jotka olivat hänelle tuttuja. Tällaisilla uskomuksilla voi olla tärkeä merkitys opettajalle. Vääräksi osoittaminen tai kyseenalaistaminen ei horjuta näitä uskomuksia eivätkä myöskään epäonnistumiset niiden siirtämisessä todellisuudeksi millään tavoin vähennä niiden arvoa. Itse asiassa uskomukset toimivat tällöin keinona tavoitteita ja

oppimistehtäviä asetettaessa, kun taas tietorakenteet tulevat kuvaan sitten kun sekä tavoitteet ja suunnat niiden saavuttamiseksi on selkeästi määritelty. (Nespor 1985, 12-13.)

Affektiivinen ja arvioiva painotus. Uskomuksille on ominaista myös niiden arvioiva luonne ja uskomusjärjestelmien voidaan sanoa rakentuvan voimakkaammin affektiivisista ja arvioivista osatekijöistä kuin tietojärjestelmien (Abelson 1979; Pajares 1992). Myös Ernest (1989a) on kuvannut tiedon ja uskomusten välistä eroa siten, että tieto on ajattelun kognitiivinen tuotos ja uskomus puolestaan affektiivinen tuotos. Samalla hän on kuitenkin myöntänyt, että uskomuksilla on myös heikko, joskin hyvin merkityksellinen kognitiivinen komponentti. Näin ollen jotakin aluetta koskeva tieto voidaan erottaa tuohon alueeseen liittyvistä tuntemuksista. Esimerkiksi opettajan tietämys siitä, mitä tyypillisesti koulussa tapahtuu, on hyvä esimerkki kognitiivisesta tiedosta. Sen sijaan sellainen "tietäminen", että joku oppilas on 'häiriköijä' tai että 'pojat ovat parempia matematiikassa kuin tytöt', ovat esimerkkejä toisenlaisesta tiedosta eli uskomuksesta (Pajares 1992).

Opettajien asennoituminen oppiaineeseen voi siten paljonkin vaikuttaa siihen millä tavoin hän opettaa sitä. Nespor (1985, 14) viittaa esimerkkinä matematiikan opettajaan, jonka mielestä keskeinen matematiikan opetuksen ongelma oli sisällön abstraktisuus. Hän tunnisti, että oppilaiden oppiminen sujui paremmin, jos he saattoivat nähdä opiskeltavien asioiden käytännön merkityksen. Niinpä hän järjesti matematiikan opiskelua tämän tuntemuksensa pohjalta. Kaiken kaikkiaan uskomusten affektiivinen ja arvioiva painotus voi hyvinkin merkittävästi säädellä sitä, kuinka paljon voimavaroja opettajat panevat toimintaansa ja kuinka paljon energiaa he kuluttavat toimiessaan.

Episodinen rakenne. Uskomusjärjestelmät ovat rakentuneet pääosin episodisesti. Ne sisältävät aineistoa, joka on peräisin yksilön omista kokemuksista tai kulttuurisen ja institutionaalisen tiedonsiirron tuloksena syntyneitä. Hieman yleistäen voidaan todeta, että tieto on varastoitunut muistiin ensisijaisesti semanttisesti (merkityspohjaisesti). Episodinen muisti on puolestaan rakentunut henkilökohtaisten kokemusten, episodien ja tapahtumien pohjalta. Tärkeämpi tietoa ja uskomuksia erottava piirre on kuitenkin se, että uskomukset saavat useimmiten subjektiivisen voimansa, auktoriteettinsa ja virallisuutensa tietyistä episodeista tai tapahtumista. Nämä ns. *kriittiset episodit* värittävät sitten yhä edelleen myöhempien tapahtumien ymmärtämistä. (Abelson 1979; Nespor 1985.)

Eräät muutkin tutkijat ovat todenneet uskomusten episodisen luonteen (mm. Calderhead & Robson 1991; Goodman 1988). Heidän mukaansa opettajilla ja opettajaksi koulutettavilla oli varsin eläviä ja vahvoja mielikuvia aikaisemmista kokemuksista tai koulutusvaiheesta, jotka muodostivat ikään kuin 'intuitiivisen seulan', jonka lävitse uusi informaatio suodattui. Samalla nämä mielikuvat vaikuttivat voimakkaasti siihen, millä tavoin opettajat hyödynsivät tietämystään opetuksen käytäntöön.

Nesporin (1987, 320) tulosten mukaan kriittisillä episodeilla on tärkeä merkitys opettajien opetuskäytännössä. Esimerkkinä hän mainitsee matematiikan opettajan, jolla oli

taustalla maatalouskoulutusta, minkä lisäksi hän oli opettanut useita vuosia matematiikkaa metallialan opiskelijoille. Nämä kokemukset saivat hänet uskomaan, että oppilaat olisivat innokkaampia opiskelemaan matematiikkaa, jos he voisivat nähdä sillä jotain käytännön arvoa. Niinpä opettaja pyrkikin järjestämään opetuksensa tämän olettamuksen mukaisesti. Kriittisiä kokemuksia koskevat tulokset viittaavatkin vahvasti siihen, että opettajat oppivat paljon opettamisesta sinä aikana, kun he itse ovat oppilaita. On hyvin todennäköistä, että jotkut tärkeät kokemukset tai joku erityisen vaikuttava opettaja aikaansaa opiskelijalle – ja kenties tulevalle opettajalle – rikkaan episodisen muistin, joka toimii myöhemmin sekä inspiraation lähteenä ja mallina hänen omalle opetukselleen. Pajaresin (1992) mielestä kriittisten episodien merkitys tulee esiin siinä, että niiden avulla voidaan selittää opettajien uskomusrakenteen kehittymistä, mikä on puolestaan tärkeä kysymys opettajankoulutuksen kannalta.

2.2.2 Uskomusjärjestelmien ominaisuuksia

Uskomusjärjestelmällä (belief system) tarkoitetaan sellaista kokonaisuutta, jossa Rokeachia (1968, 2) siteeraten “yksilön kaikki fyysistä ja sosiaalista todellisuutta koskevat uskomukset ovat organisoituneet jollakin psykologisella mutta ei välttämättä loogisella tavalla”. Uskomusjärjestelmän käsite on siten keino tai metafora tarkastella ja kuvata sitä, kuinka yksilön uskomukset ovat jäsentyneet (Green 1971). Se on luonteeltaan dynaaminen systeemi, joka läpikäy muutoksia ja uudelleenjäsentymistä, kun yksilöt arvioivat uskomuksiaan omien kokemuksiansa pohjalta. Täten uskomusjärjestelmä voidaan ymmärtää hyvin samalla tavoin kuin jonkin käsitealueen kognitiivinen rakenne.

Greenin (1971) ja Nesporin (1985, 1987) tutkimusten mukaan on erotettavissa viisi ominaisuutta, jotka luonnehtivat uskomusten järjestelmärakennetta ja kuvaavat uskomusten kytkeytymistä toisiinsa järjestelmän sisällä.

Kiistanalaisuus. Luvussa 2.2.1 kuvatuista ominaisuuksista poiketen kiistanalaisuus on pikemminkin uskomusjärjestelmien kuin yksittäisten uskomusten ominaispiirre. Pohjimmiltaan se on kuitenkin seurausta edellä esitellyistä ominaisuuksista. Yksinkertaisesti ilmaistuna kiistanalaisuus viittaa siihen, että uskomusjärjestelmät koostuvat ilmaisuista, käsitteistä ja argumenteista, joiden paikkansapitävyys on usein kyseenalainen (non-consensuality; Nespor 1985, 16).

Uskomukset ovat luonteeltaan verraten staattisia. Tietoon verrattuna ne ovat vähemmän joustavia ja dynaamisia. Kun uskomukset muuttuvat, niin silloin on todennäköisemmin kysymys uskomusten hahmon muuntumisesta kuin argumentoinnin tai uusien todisteiden esilletuomisen aiheuttamasta muutoksesta. Voidaankin sanoa, että osa tietosysteemejä luonnehtivasta konsensuksesta on yksimielisyyttä niistä tavoista, joilla tietoa voidaan arvioida ja osoittaa päteväksi. Sitä vastoin valtaosa uskomusjärjestelmien kiistanalaisuudes-

ta on seurausta siitä, että ei ole yksimielisyyttä siitä, kuinka niitä olisi arvioitava. Uskomusjärjestelmiin sisältyy nimittäin useimmiten olettamuksia ilmiöiden olemassaolosta ja vaihtoehtoista maailmoista, affektiivisia tuntemuksia ja arviointeja sekä henkilökohtaisia kokemuksia, jotka eivät yksinkertaisesti ole ulkopuolisen arvioinnin tai kriittisen tarkastelun kohteita siinä määrin kuin tietosysteemien osaset ovat. (Hirsjärvi 1984; Nespor 1985, 17; Niiniluoto 1980.)

Sidoksettomuus. Arkikielellä ilmaistuna uskomusjärjestelmien sidoksettomuuden käsite (unboundedness) tarkoittaa sitä, että ihmiset havaitsevat uskomuspohjaisia merkityksiä tilanteissa, joissa toiset eivät tällaisia merkityksiä lainkaan näe. Uskomusjärjestelmiä voidaan siten kuvata löyhästi sidottuina järjestelminä, joilla on hyvin vaihtelevat ja väljät kytkennät tapahtumiin, tilanteisiin ja tietorakenteisiin. Toisin sanoen ei ole olemassa mitään selkeitä loogisia sääntöjä, joilla määrittää uskomusten merkitystä arkielämän tapahtumille ja tilanteille. Nämä kytkennät ja merkitysten syntyminen saattavat hyvinkin olla sidoksissa kunkin yksilön henkilökohtaisiin, episodisiin ja emotionaalisiin kokemuksiin. Tämä uskomusjärjestelmien ominaispiirre tarkoittaa sitä, että uskomuksilla on tiettyjä ”ydinsovelluksia” (esim. kriittisten episodien synnyttämiä), mutta sen lisäksi ne ovat laajennettavissa radikaalilla ja odottamattomalla tavalla hyvinkin erilaisiin ilmiöihin. Tietojärjestelmillähän sitä vastoin on yleensä verraten rajatut sovellusalueet ja niiden laajentaminen koskemaan muita ilmiöitä on mahdollista vain tiettyjen kriteerien täytyessä. (Abelson 1979, 359–360; Nespor 1985, 17–18.)

Kvasi-looginen rakenne. Kolmas uskomusjärjestelmien ominaisuus ilmentää sitä, että jokin uskomus ei ole koskaan täysin riippumaton kaikista muista uskomuksista. Osa uskomuksista liittyy toisiinsa jopa syy–seuraus-suhteen kaltaisesti (Thompson 1992). Näin ollen uskomusjärjestelmissä jotkut uskomukset ovat primäärisiä ja toiset taas näiden johdannaisia. Mitä enemmän uskomus on toiminnallisesti yhteydessä muihin uskomuksiin, sitä enemmän sillä on seurausvaikutuksia ja sitä primäärisempi uskomus on. Green (1971) selkeyttää tätä seuraavalla esimerkillä. Kun opettaja uskoo, että on tärkeää ’esittää matemaatiikkaa selkeästi oppilaille’, niin tämä on primäärinen uskomus. Kun opettaja tämän lisäksi pitää tärkeänä (i) ’valmistella oppitunnit huolellisesti varmistaakseen selkeän ja jaksottaisen esityksen’ ja (ii) ’valmistautua vastaamaan heti kaikkiin oppilaiden esittämiin kysymyksiin’, niin nämä molemmat ovat primäärisen uskomuksen johdannaisia.

Uskottavuuden aste. Neljäs ominaisuus kuvaa sitä uskottavuuden astetta, jolla uskomuksia pidetään yllä (Rokeach 1968; Thompson 1992). Uskomukset ovat siten joko keskeisiä tai periferisiä. Keskeisimpiä ydinuskomuksia ovat ne, joista vallitsee täydellinen yksimielisyys, jolloin ne ovat myös vahvimmin ylläpidettäviä ja vaikeimmin muutettavia uskomuksia. Periferiset uskomukset ovat taas kaikkein herkimpiä muutokselle tai uudelleen tarkastelulle. Keskeiset uskomukset syntyvät yleensä omakohtaisten kokemusten kautta, kun taas periferiset uskomukset opitaan muilta (Pajares 1992). Kahden viimeksi mainitun

ominaisuuden välillä vallitsee yhteys, että primäärinen uskomus on yleensä myös keskeisempi kuin johdannaisuskomus. Mutta yhteys saattaa olla myös toisenlainen. Siten edellä esitetystä esimerkistä mainittu johdannaisuskomus oppituntien huolellisesta valmistamisesta saattaa olla keskeisempi ja tärkeämpi opettajan kannalta kuin opetuksen selkeyttä korostava uskomus.

Ryvästyneisyys. Uskomusjärjestelmien viides ominaisuus on Greenin (1971) mukaan se, että uskomukset muodostavat rypäitä, jotka ovat vähemmän tai enemmän eristyneitä toisistaan. Tämä merkitsee sitä, että uskomusrypäillä ei ole juurikaan yhteyttä keskenään. Ryvästyminen ehkäisee uskomusten välisiä vastakkainasetteluja ja antaa yksilölle mahdollisuuden ylläpitää keskenään ristiriitaisia uskomuksia. Tämä ryvästyminen on tärkeä, sillä se saattaa auttaa myös selittämään eräitä opettajien uskomuksiin liittyviä epäjohdonmukaisuuksia, joita on havaittu useissa tutkimuksissa (mm. Brown 1985; Cooney 1985; Peterman 1991; Thompson 1984).

2.2.3 Attribuutiiviset uskomukset

Oman tärkeän lohkonsa opettajien uskomuksista muodostavat ne, jotka koskevat oppilaiden käyttäytymisen ja suoriutumisen syitä. Tällöin puhutaan hyvin yleisesti opettajien attribuutioista ('selityksistä') niille tekijöille, joiden vuoksi oppilaat suoriutuvat hyvin tai huonosti (mm. Clark & Peterson 1986; Weiner 1974). Opettajien attribuutiot oppilaiden menestymisestä ovat osoittautuneet tärkeiksi, kun on pyritty ymmärtää sitä, kuinka opettajien odotukset vaikuttavat oppilaiden menestymiseen (mm. Peterson & Barger 1984).

Tutkimusten perusteella yksilön attribuutioiden katsotaan riippuvan siitä, onko hän aktiivinen osallistuja tilanteessa (esim. yksi vuorovaikutuksen osapuoli) vai onko hän ulkopuolinen tarkkailija. Koska opettajat ovat aktiivisesti mukana opiskelun vuorovaikutusprosessissa, jolla on seuraamuksia oppilaiden onnistumisiin tai epäonnistumisiin, niin opettajien attribuutioihin vaikuttaa mitä ilmeisimmin heidän toiminnallinen roolinsa. Tämä opettajan aktiivinen rooli voi Clarkin ja Petersonin (1986, 282) mielestä johtaa 1) *opettajaa itseään (suosiviin) puolustaviin attribuutioihin* tai 2) *oppilaita (suosiviin) puolustaviin attribuutioihin*. Kun opettaja lukee oppilaiden menestymisen omaksi ansiokseen ja taas oppilaiden epäonnistumisen johtuvaksi heistä itsestään tai muista tekijöistä, niin hän tällä tavoin vahvistaa omaa minäänsä (itseään suosiva attribuutio). Oppilaita puolustavista attribuutioista on sitä vastoin kysymys silloin, kun opettaja antaa ansion oppilaille heidän hyvästä menestyksestään ja pitää epäonnistumisia oppimiseen luonnostaan kuuluvina.

Lisäksi on myös muita tekijöitä, jotka vaikuttavat opettajien attribuutioihin oppilaiden suoriutumisesta. Tällaisia tekijöitä ovat mm. oppilaiden sosiaalinen tausta (sosioekonominen status) ja sukupuoli (Clark & Peterson 1986). Myös oppilaiden aikaisempien suoritus-ten on havaittu muodostavan hyvin pysyvän selitystekijän opettajan attribuutioille (Peterson

& Barger 1984). Kun opettaja matematiikassa puhuu “odotetuista” tuloksista, on kysymys usein siitä, että hän uskoo oppilaiden menestymisen oppimisessa johtuvan pääasiassa suuresta kyvykkyydestä (tai lahjakkuudesta) ja hän lukee onnistumisen tästä pysyvästä kyvykkyydestä johtuvaksi. Toisaalta taas silloin, kun tulokset opettajan mielestä ovat “odottamattomat” eli vähäiset kyvyt omaava oppilas onkin onnistunut hyvin, hän selittää menestymisen satunnaisista tekijöistä kuten onnesta johtuvaksi. Eräs vakava seuraus tästä on se, että nekin oppilaat, jotka työskentelevät ahkerasti poistaakseen opettajan virhekesityksen heidän heikoista kyvyistään, eivät ehkä koskaan saa opettajalta täyttä ansiota suorituksistaan.

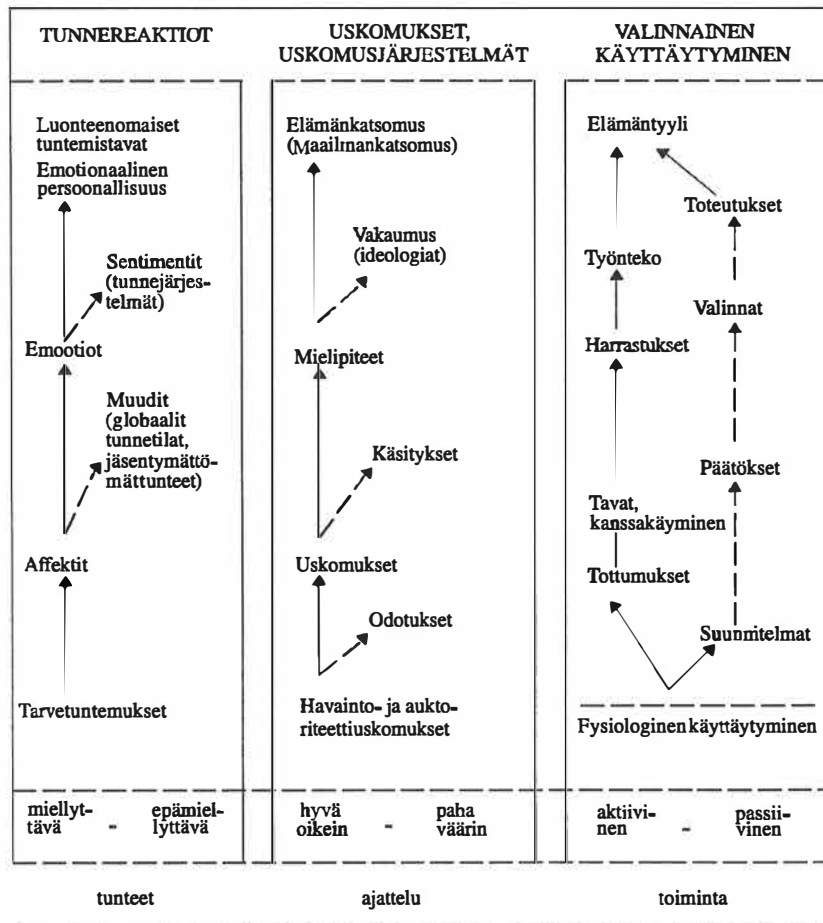
2.2.4 Uskomukset affektiivisen alueen kentässä

Affektiivisen alueen käsitteistöä ja uskomusten sijoittumista sille voidaan kuvata monilla tavoin. Saaren (1983, 29–31) esittämä jäsenyys edustaa 1980-luvun tutkimusperinnettä. Tutkimuksen alkuvaiheessa tämä jäsenyys toimi käsitteistön hahmottajana ja on edelleenkin varsin käyttökelpoinen alueen peruskuvauksena (ks. kuvio 2.1).

Uskomukset ja uskomusjärjestelmät muodostuvat siitä, miten ihminen ymmärtää itsensä ja ympäristönsä. Uskomukset rakentuvat siten tiedostamiselle, kokemukselle ja havainnoimiselle. Aistikokemusten ohella primitiivisten uskomusten lähteenä voi olla myös ulkopuolinen auktoriteetti (esim. matematiikan asiantuntijat, oppikirjat). *Havaintouskomukset* ovat perususkomuksia, jotka hyväksytään sellaisinaan.

Yksinkertaiset johtopäätökset perustuvat puolestaan havaintouskomuksille ja muodostavat oman ryhmänsä uskomuksia. Kun yksilö pitää lähtökohtana aistihavaintoja ja aistien luotettavuutta, niistä seuraava johtopäätös on *uskomus*. Toisin kuin havaintouskomusten kohdalla, henkilö on tavallisesti tietoinen uskomuksistaan, koska hän voi kuvitella vaihtoehtoisia johtopäätöksiä uskomukselleen. Sen sijaan henkilö ei tavallisesti ole tietoinen mistään päättelyprosessista, jonka tuloksena hän hankkii uskomuksensa havaintouskomuksista. Sama koskee auktoriteettiin nojaavaa uskomusta. Uskomuksen pohjana oleva 'tieto' saadaan niin selkeältä auktoriteetilta, että se itsessään on riittävä perustelu uskomuksen oikeutukselle.

Käsitykset (conceptions) ovat edellisiä korkea-asteisempia uskomuksia. Uskomukset tulevat korkea-asteisemmiksi, kun henkilön päättelyprosessi tulee tietoisemmaksi. Käsitys on yleisluontoisempi termi kuin *asenne*, koska käsitys on kognitiivista prosessointia, joka muodostaa pohjan evaluoinneille. Mitä enemmän käsityksellä on evaluatiivista konnotaatiota, sitä enemmän se alkaa lähestyä asennetta. Käsityksiä korkeamman tason uskomuksia edustavat *mielipiteet*, jotka voivat rakentua eri tavoin. Monet uskomukset ja käsitykset voivat siten johtaa samaan mielipiteeseen. Hierarkiassa korkeimmalla ovat *vakaumus* ja *elämäkatsomus*.



Kuvio 2.1 Affektiivisen alueen avainkäsitteistöä (Saari 1983, 29).

Elämäkatsomusta, *maailmankatsomusta* ja ihmiskäsitystä kasvatuksessa ovat tarkastelleet meillä mm. Hirsjärvi (1984) ja Niiniluoto (1984). Heidän mukaansa ihmisen omaksuma maailmankatsomus säätelee hänen toimintojaan ja valintojaan jokapäiväisessä elämässä. Niinpä esimerkiksi opettajan toiminta luokkahuoneessa on suurelta osin ymmärrettävissä omaksutun maailmankatsomuksen taustaa vasten. Maailmankatsomuksella tarkoitetaan ihmisen kokonaiskäsitystä todellisuuden olemuksesta ja arvosta ja se muodostuu uskomuksista, tiedosta, arvoista ja normeista. Elämäkatsomusta ja maailmankatsomusta pidetään usein synonyymeinä toisilleen.

Kouluoppimisen affektiivista aluetta kuvaavia keskeisiä käsitteitä ovat uskomukset, asenteet ja emootiot, ja niiden välisiä kytkentöjä ovat kuvanneet monet tutkijat (mm. Lester & Garofalo 1987; McLeod 1987, 1992). Opettajan näkökulmasta matematiikan opetuksen affektiivista aluetta voidaan hahmottaa McLeodia (1992) mukailien taulukon 2.1 tapaan.

Taulukko 2.1 Matematiikan opetuksen affektiivinen alue opettajan näkökulmasta (McLeod 1992).

Käsite	Esimerkki
Uskomukset	
- matematiikasta	Matematiikka perustuu sääntöihin.
- itsestä	Minulla on hyvät opettamisen taidot.
- matematiikan opetuksesta	Opettaminen on oppikirjan sisällön välittämistä.
- sosiaalisesta kontekstista	Oppiminen on kilpailullista.
Asenteet	Vastenmielisyyys funktio-opin sisältöjen opettamiseen. Ongelmanratkaisu-oppitunneista nauttiminen. Mieltyminen keksivään oppimiseen.
Emootiot	Hauskuus (tai turhautuneisuus) käsiteltäessä vaativampia ongelmia. Esteettiset näkemykset ja ilmaukset matematiikassa.

Uskomukset, asenteet ja emootiot vaihtelevat sekä kognitiivisuuden asteen että stabiilitensa suhteen (McLeod 1987, 1992). Uskomukset voidaan ymmärtää myös yksilön subjektiivisena tietona jostakin kohteesta. Ne ovat siten paljolti kognitiivisia luonteeltaan ja kehittyvät suhteellisen pitkän ajan kuluessa. Uskomukset ja tieto eroavat kuitenkin toisistaan. Emootiot ovat tyypillisesti subjektiivisia reaktioita tiettyihin tilanteisiin ja niillä voi olla joko edistävä tai haitallinen vaikutus yksilöön (Lester & Garofalo 1987). On myös osoitettu, että emootiot ja kognitiiviset toiminnot ovat tärkeässä vuorovaikutuksessa keskenään (mm. Mandler 1990). Kun asenteet ovat yksilön piirteitä, niin emootiot ovat puolestaan vahvasti tilannesidonnaisia. Esimerkiksi oppilaat, jotka sanovat inhoavansa matematiikkaa tänään, ilmaisevat todennäköisesti samanlaista asennoitumista myös huomenna. Toisaalta taas oppilas, joka on turhautunut ja kyllästynyt kun hän yrittää ratkaista vaativampaa tehtävää, saattaakin ilmaista positiivisia tuntemuksia (emootioita) sen jälkeen kun hän on onnistunut selvittämään tehtävän. Uskomukset ja asenteet ovat verraten stabiileja, mutta emootiot voivat vaihdella nopeastikin. Ne voivat myös vaihdella McLeodin (1992) ilmaisua käyttäen affektiivisuus-intensiteetin suhteen lähtien 'kylmistä' uskomuksis-

ta (esim. matematiikka on laskemista), edeten 'viileisiin' asenteisiin (esim. matematiikasta pitäminen tai ei-pitäminen) ja päätyen 'kuumiin' emotionaalisiin reaktioihin (esim. turhautumiset ratkaistaessa vaativampia ongelmia).

Edellä esitettyyn pohjaten uskomukset ymmärretään tässä tutkimuksessa sekoituksen yksilön subjektiivisia käsityksiä ja tuntemuksia jotakin asiaa, ilmiötä tai henkilöä kohtaan. Nämä käsitykset ja tuntemukset ovat kietoutuneet hyvin monimutkaisella tavalla toisiinsa ja niille ei ole objektiivisesti pätevää perustelua. Ominaisuuksiensa ansiosta uskomukset ja uskomusjärjestelmät ovat vahvasti itseään säilyttäviä ja vaikuttavat monella tavoin yksilön ajatteluun ja toimintaan. Opettajan työn kannalta uskomusten ja uskomusjärjestelmien merkitystä kuvataan seuraavassa luvussa lähemmin.

2.3 Mikä merkitys uskomuksilla on opettajalle ja opetukselle?

Tutkiessaan opettajien matematiikkatietämyksen vaikutuksia opetukseen Ernest (1989b) havaitsi, että kahdella opettajalla saattaa olla samanlainen tietämys, mutta he opettavat silti eri tavoilla. Tämän perusteella hän esitti, että uskomukset voisivat olla hyödyllisiä pyritäessä ymmärtämään ja ennustamaan sitä, kuinka opettajat toimivat ja tekevät päätöksiä.

Miksi opettajien uskomuksilla on keskeinen rooli, kun he määrittävät opetustehtäviä ja jäsentävät näihin tehtäviin kuuluvaa merkityksellistä tietoa? Miksi tutkimuspohjainen tietämys ja teoria sekä käytännön kokemus eivät yksinomaan riitä tähän tarkoitukseen? Nesporin (1987, 322) mielestä keskeinen syy on siinä, että opettajan työhön sisältyy varsin usein monimutkaisia ja jäsentymättömiä tilanteita tai aihealueita (*entangled domains*). Nämä alueet saattavat sisältää kokonaisuuksia, joiden sisällölliset piirteet menevät vain osittain päällekkäin, joiden väliset yhteydet ovat epäselvät ja joilla ei ole yhteisiä kriteereitä. Tästä johtuen uskomukset voisivat olla erityisen sopivia jäsentämään tällaisia konteksteja. Esimerkkinä tällaisesta voisi olla vaikkapa ongelmanratkaisujakso jollakin matematiikan sisältöalueella. Kun opettaja kohtaa tällaisen opetustilanteen, on hän useinkin epävarma siitä, mitä tietoa tarvitaan tai millainen toiminta on oppilaiden kannalta sopivaa. Uskomusten episodinen ydin osoittautuu tällöin tarpeelliseksi. Kun opettajalla ei ole käytettävissään sopivia tietorakenteita ja kognitiivisia strategioita, hän käyttää hyväkseen uskomuksia ja uskomusjärjestelmiä.

Kaikki tutkijat eivät kuitenkaan näe uskomusten tarjoavan tiedon sijasta laajempaa näkökulmaa opettajan toiminnan määrittämiseen. Pajares (1992) viittaa tutkimukseen, jossa uskomusten nähdään edustavan ikuisia totuuksia (Roehler ym. 1988). Tieto sitä vastoin on joustavaa ja kehittyy sitä mukaa kun uusia kokemuksia tulkitaan ja liitetään olemassa olevaan tietorakenteeseen. Uskomuksia ympäröi emotionaalinen kehä, joka sanelee oikean ja väärän, kun taas tieto on emotionaalisesti neutraalia. Uskomusten nähdään kyllä vaikuttavan siihen, mitä opettaja sanoo luokkahuoneen ulkopuolella, mutta

itse opetustoiminnassa uskomukset ovat kokemuksen suodattamia. Sen sijaan tieto toimii opetuskokemuksen välittäjänä ja näin ollen tieto – eikä uskomukset – vaikuttaa viime kädessä opettajan ajatteluun ja päätöksentekoon opiskelun vuorovaikutuksessa.

Nespor (1987) on esittänyt uskomuksille ja uskomusjärjestelmille kolme tehtäväaluetta: a) tehtävämäärittely ja kognitiivisen strategian valinta, b) muistiprosessien mieleenpalauttamisen ja uudelleenkonstruoinnin helpottaminen ja c) jäsentymättömien ongelmien käsittely.

Tehtävämäärittely. Ominaisuuksistaan johtuen uskomusjärjestelmät vaikuttavat hyvin merkittäväällä tavalla siihen, kuinka yksilöt jäsentävät ympäröivää maailmaa *tehtäväympäristöiksi* (task environments) sekä määrittävät tehtäviä ja ongelmatilanteita (Nespor 1985, 19). Kun uskomusjärjestelmät määrittävät tarkastelun kohteena olevaa tehtävää (oppimistehtävää, opetustilannetta), niin se tapahtuu eritasoisten ajatteluprosessien kautta. Tähän sisältyvän kognitiivisen toiminnan sekä tehtävän määrittelyn ja tehtävän suorittamisen väliset kytkennät ovat hyvin monimutkaiset. Yhtäältä käsiteltävän tehtävän luonne kiinnittää jo tietynlaisia prosessointitapoja tehtävän suorittamiseksi. Mutta toisaalta, kuten Nespor (1985, 19) painottaa, itse 'tehtävä' täytyy ensin määritellä. Yksilön tulee ensin käydä mielessään läpi virtuaalista 'tehtäväympäristöä' ja sen avulla tuottaa itselleen konkreettinen 'tehtäväkenttä'. Schoenfeldin (1983) mukaan tässä prosessoinnissa yksilöiden uskomusjärjestelmillä on tärkeä rooli.

Uskomusjärjestelmien ja kognitiivisten prosessien välisen suhteen ymmärtämistä selkiyttää Schoenfeldin (1983, 331–333) näkemys ajattelun laadullisista tasoista. Ensimmäisenä tasona Schoenfeld esittää ajattelun 'sisäisten prosessien' mikroskooppisen tason. Tämä taso sisältää pitkälti automatisoituja ja toiminnallisia prosesseja (kuten representaatio-rakenteita ja muistimekanismeja), jotka ohjaavat yksilön havainnointia ja tapahtuvat tiedostamattomasti. Toista ajattelun tasoa Schoenfeld nimittää 'resurssiksi' ja määrittelee ne "yksilön omaamaksi tiedoksi, jolla voi olla merkitystä tarkasteltavan ongelman kannalta". Tälle tasolle sisältyvät ainespesifi tieto, faktat, algoritmit, tehtäväkohtaiset heuristiikat jne. Kokonaisuutena ne määrittävät ajattelun välineet tai ns. taktiset resurssit. Tähän ajattelun tasoon liittyy lisäksi kaksi olennaista kysymystä: toinen koskee tiedon hallintaa ja toinen tämän tiedon käyttöön saamista. On mahdollista, että yksilöllä on halussaan se tieto, joka on välttämätöntä tehtävän ratkaisemiseksi, mutta hän ei joko tunnista tiedon käyttömahdollisuutta tai ei tiedä kuinka soveltaisi sitä kyseiseen tehtävään.

Edellisestä havainnosta seuraa ajattelun kolmannen tason välttämättömyys ja sitä Schoenfeld (1983) nimittää *metakognition* tai säätelyn tasoksi. Tämä taso viittaa 'ajatteluun ajattelusta' eli kognitiivisten resurssien nähtävissä olevaan tiedostamiseen ja käyttöön johonkin tavoitteeseen pyrittäessä (esim. matemaattisen ongelman ratkaiseminen). Jos yksilön kognitiivisten resurssien taso tulkitaan 'taktiikan' tasoksi, niin metakognitiiviset prosessit voidaan silloin ajatella 'strategian' tasona. Metakognitiivisen ajattelunsa avulla

yksilö valitsee 'työkaluja' potentiaalisten ajatteluvälineidensä valikoimasta tietyn tyyppisen ongelman ratkaisemiseksi.

Mutta kuinka yksilö tietää, minkä tyyppistä 'tehtävää' tai 'ongelmaa' käsitellään? Tässä tehtävän määrittelyssä on Nesporin (1985, 22) mukaan uskomusjärjestelmillä, jotka edustavat ajattelun neljättä tasoa, olennaisen tärkeä rooli. Tiedolliset resurssit, meta-kognitiiviset ohjausstrategiat ja uskomusjärjestelmät voidaan ajatella vaiheittain eteneviksi ajattelujärjestelmiksi. Ensiksi yksilön uskomusjärjestelmät määrittelevät tehtäväympäristön, minkä jälkeen metakognitiiviset strategiat valitsevat käytettävissä olevista kognitiivisista resursseista tietyt välineet annetun tehtävän ratkaisemiseksi. Kuvaus on tietenkin kovasti yksinkertaistettu, sillä prosessiin sisältyy aina vuorovaikutusta ja palautemekanismeja eri ajattelun tasojen kesken. Olennaisinta tässä on kuitenkin se, että ymmärtääksemme mitä opetus opettajien näkökulmasta merkitsee, on meidän ymmärrettävä niitä uskomuksia, joiden avulla he määrittävät opetustehtäviään. Mikäli emme ota tätä huomioon, on meidän kenties mahdoton ymmärtää sitä, mitä opettajat luokassa tekevät ja miksi he tekevät niin kuin tekevät.

Muistiprosessien helpottaminen. Kuten edellä todettiin, uskomukset sisältävät useimmiten tuntemuksia, emootioita ja subjektiivisia arviointeja. Nespor (1985, 23–25) katsoo, että näiden ominaispiirteiden vuoksi uskomukset ovat hyvin merkittäviä muisti-prosessien kannalta. Erityisesti asioiden ja ilmiöiden relevanssiin liittyvät emootiot näyttävät varastoituvan hyvin kestäväällä tavalla pitkäaikaismuistiin ja muodostavan sellaisia muotoja, joita voidaan käyttää hyväksi asioiden esittämisen ja muistamisen tehostamiseen. Spiro (1982) puhuu tässä yhteydessä asioiden, ilmiöiden ja sisältöjen *värittämisestä* (coloration) ja katsoo, että tällä värittämisellä on ainakin kolme merkitystä. Ensinnäkin se helpottaa mieleenpalauttamista havainnollisesti ilmaistuna siten, että kaukaa katsottuna taustaväri näkyy aina paremmin kuin tarkka sisältö. Toiseksi se lisää muistin elementtien yhteenkuuluvuutta (koheesiota) ja kolmanneksi sillä on tärkeä merkitys muistiprosessien konstruoinnissa ja uudelleenkonstruoinnissa. Kaiken kaikkiaan uskomuksiin sisältyvillä emotionaalisilla ja affektiivisilla aineksilla on siten tärkeitä seuraamuksia sille, kuinka opettajat oppivat ja käyttävät oppimaansa.

Jäsentymättömien ongelmien käsittely. Uskomusten episodinen luonne ja uskomusjärjestelmien sidoksettomuus tekee yksilöille mahdolliseksi lähestyä ja käsitellä jäsentymättömiä ongelmia (ill-structured problems, Nespor 1987). Jäsentymättömillä ongelmilla tarkoitetaan tyyppillisesti sellaisia ongelmatilanteita, jotka vaativat yksilöiltä taustamateriaalin käyttämistä tai arvausten ja oletusten tekemistä kyseisten ongelmien ratkaisemiseksi.

Uskomusten ja uskomusjärjestelmien käyttökelpoisuus tällaisten ongelmien käsittelyyn perustuu niiden ominaisuuksiin (Nespor 1987). Ensinnäkin uskomusjärjestelmät ovat varsin löyhästi sidottuja, minkä vuoksi uskomusepisodit on mahdollista 'kuvata' laajaan joukkoon uusia tapauksia ja kokemuksia. Toiseksi uskomusjärjestelmät sallivat erimieli-

syyttä ja pitävät myös sisällään ideoita vaihtoehtoisista toteutustavoista, mistä johtuen näiden episodien kuvaukset uusiin olosuhteisiin ovat verraten immuuneja kumoamisyrityksille. Kolmanneksi uskomusjärjestelmien joustavuutta kuvastaa vielä se, että olemassaolevat stabiilit ja ennakoitavat kontekstuaaliset ominaisuudet voidaan siirtää näihin uusiin ja outoihin tilanteisiin. Viime mainittu tarkoittaa esimerkiksi sitä, että matematiikan opettajien on mahdollista tulkita oppilaiden toimintoja luokasta ja kouluympäristöstä riippumatta eli opettajien ei tarvitse joka kerta kehittää uutta 'teoriaa' oppilaiden käyttäytymiselle, kun opetettava oppilasjoukko vaihtuu.

Koontana opettajien uskomuksia koskevasta mittavasta tutkimuksesta on seuraavassa Pajaresin (1992) esittämä yhteenveto. Pajaresin mukaan tuloshavainnot ovat sellaisia uskomusten luonnetta ja ominaisuuksia kuvaavia perusolettamuksia, jotka kohtuudella voidaan tehdä lähdeittäessä toteuttamaan opettajien uskomuksia koskevaa tutkimusta.

Taulukko 2.2 Opettajien uskomustutkimuksen tuloksia (Pajares 1992, 324–326).

Tuloshavainto	Esimerkkejä tutkimuksista
Uskomukset saavat muotonsa varhain ja niillä on taipumusta olla itseään säilyttäviä.	Nespor 1987; Nisbet & Ross 1980; Posner ym. 1982; Rokeach 1968
Yksilöt rakentavat uskomusjärjestelmän, joka käsittää kaikki kulttuurisen välitysprosessin aikana hankitut uskomukset.	Abelson 1979; Brown & Cooney 1982; Nisbett & Ross 1980; Van Fleet 1979.
Uskomusjärjestelmä auttaa yksilöitä määrittämään ja ymmärtämään ympäröivää maailmaa.	Abelson 1979; Nisbett & Ross 1980; Rokeach 1968
Tieto ja uskomukset ovat selvittämättömällä tavalla toisiinsa kietoutuneet, mutta uskomusten voimakas arvioiva ja episodinen luonne tekee niistä suodattimen, jonka kautta uudet ilmiöt saavat tulkintansa.	Calderhead & Robson 1991; Nespor 1987; Posner ym. 1982
Ajatteluprosessit saattavat hyvinkin olla uskomusten synnyttäjiä, mutta viime kädessä uskomusrakenteiden suodattava vaikutus valikoi, uudelleenmuotoilee ja häiritsee yksilön ajattelua ja tiedonprosessointia.	Abelson 1979; Calderhead & Robson 1991; Nespor 1987; Posner ym. 1982; Rokeach 1968
Epistemologisilla uskomuksilla on keskeinen merkitys tiedon hankinnassa ja tulkinnassa.	Nespor 1987; Nisbett & Ross 1980; Posner ym. 1982
Uskomukset ovat priorisoituja sen mukaan, millaiset ovat niiden yhteydet muihin uskomuksiin tai muihin kognitiivisiin ja affektiivisiin rakenteisiin.	Nespor 1987; Posner ym. 1982; Rokeach 1968
Jotkut uskomukset ovat luonteestaan ja alkuperästään johtuen kiistattomampia kuin toiset.	Abelson 1979; Clark 1988; Nisbett & Ross 1980; Rokeach 1968

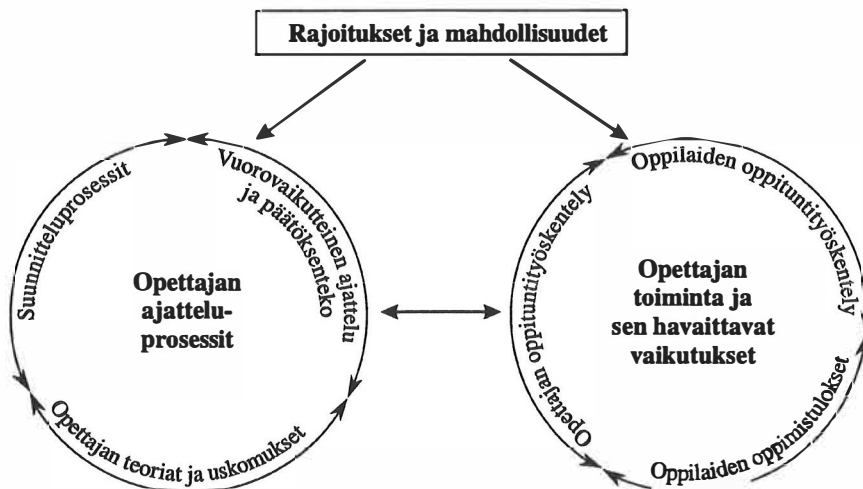
Taulukko 2.2 jatkuu

Tuloshavainto	Esimerkkejä tutkimuksista
Uskomusten osakokonaisuudet, kuten opetususkomukset, on ymmärrettävä siten, että ne eivät ole ainoastaan yhteydessä toisiinsa vaan myös muihin – ja ehkä keskeisempiin – järjestelmän uskomuksiin (vrt. asenteet, arvot).	Posner ym. 1982; Rokeach 1968
Mitä aikaisemmin uskomus on liittynyt uskomusjärjestelmään, sitä vaikeampaa sen muuttaminen on. Vastikään omaksutut uskomukset ovat kaikkein alttiimpia muutokselle.	Abelson 1979; Clark 1988; Nesper 1987; Nisbett & Ross 1980; Posner ym. 1982; Rokeach 1968
Uskomusten muuttuminen aikuisiässä on verraten harvinaista. Yksilöillä on taipumusta pitää kiinni uskomuksista, jotka perustuvat myös virheelliseen tai riittämättömään tietoon ja vaikka heille esitetään tieteellisesti pätevät selitykset.	Abelson 1979; Nesper 1987; Nisbett & Ross 1980; Posner ym. 1982; Rokeach 1968
Uskomukset ovat välineitä tilanteita määritettäessä ja valittaessa kognitiivisia välineitä näitä tilanteita koskevaan tulkintaan, suunnitteluun ja päätöksentekoon. Uskomuksilla on kriittinen merkitys käyttäytymisen määrittämisessä ja tiedon organisoinnissa.	Abelson 1979; Nesper 1987; Posner ym. 1982; Nisbett & Ross 1980; Rokeach 1968
Uskomukset vaikuttavat voimakkaasti havainnointiin, mutta ne voivat olla epäluotettavia ilmaisemaan todellisuuden luonnetta.	Abelson 1979; Nesper 1987; Nisbett & Ross 1980; Rokeach 1968
Yksilöiden uskomukset vaikuttavat voimakkaasti heidän käyttäytymiseensä.	Brown & Cooney 1982; Clark & Peterson 1986; Ernest 1989a; Goodman 1988
Uskomuksista tulee tehdä johtopäätöksiä ja tässä on otettava huomioon yksilöiden uskomusilmaisujen yhdenmukaisuus, tarkoitus käyttäytyä ennakoasenteen mukaisesti ja kyseiseen uskomukseen liittyvä käyttäytymisen.	Goodman 1988; Rokeach 1968
Opetusta koskevat uskomukset ovat muotoutuneet yleensä jo yleissivistävän koulutuksen aikana.	Abelson 1979; Clark 1988; Clark & Peterson 1986; Nesper 1987; Nisbett & Ross 1980; Rokeach 1968; Wilson 1990

Myös 1990-luvun jälkipuoliskolla opettajien uskomustutkimus on ollut vilkasta (mm. Cooney & Shealy 1997; Franke ym. 1997; Furinghetti 1996; Swan 1998). Tehdyssä tutkimuksessa on tarkasteltu mm. uskomusten teoreettisia kysymyksiä, uskomusten muuttumista sekä uskomusten ja opetuskäytännön välistä suhdetta opettajan muutosprosessin aikana.

2.4 Opettajien ajattelun ja toiminnan malli

Käsillä olevan tutkimuksen kannalta erityisen merkityksellistä on 1980-luvulla käynnistynyt opettajien ajattelua ja päätöksentekoa koskeva tutkimusperinne. Clarkin ja Petersonin (1986) opettajan ajattelua ja toimintaa kuvaava malli toimii tätä tutkimusta jäsentävänä käsitteellisenä perustana (ks. kuvio 2.2). Malli sisältää kaksi aluetta, jotka ovat merkittäviä opetusprosessin kannalta: 1) *opettajien ajatteluprosessit* ja 2) *opettajien toiminta ja sen havaittavat vaikutukset*. Lisäksi malliin sisältyy sekä opettajien ajattelua ja toimintaa rajoittavia että tiettyjä mahdollisuuksia tarjoavia tekijöitä.



Kuvio 2.2 Opettajan ajattelun ja toiminnan malli (Clark & Peterson 1986, 257).

Mallin sisältämät alueet eroavat toisistaan ainakin kahdella tärkeällä tavalla. Ensimmäinen alueet ovat erilaisia sen suhteen, missä määrin niiden sisältämät prosessit ovat suoraan havaittavissa. Opettajan ajatteluprosessit tapahtuvat 'opettajan pään sisällä' eikä niitä voida suoraan havaita. Sitä vastoin opettajan oppituntityöskentely, oppilaiden oppitunti-työskentely ja oppilaiden oppimistulokset (suorituspistemäärät) ovat havaittavia ilmiöitä. Näin ollen opettajan toimintaan sisältyviä ilmiöitä voidaan helpommin mitata empiirisin menetelmin

kuin opettajan ajattelun prosesseja. Opettajien ajattelun tutkimus asettaakin empiirisen tutkijan todella haastavien metodologisten ongelmien eteen (Clark & Peterson 1986; Pajares 1992). Toinen alueita erottava tekijä on Clarkin ja Petersonin (1986) mielestä se, että ne edustavat kahta erilaista opetuksen tutkimuksen paradigmaa. Opettajien toimintaan kohdistunut prosessi–produkti-lähestymistapa oli yleisesti käytössä opetuksen tehokkuuden tutkimuksessa 1970-luvulla. Sitä vastoin opettajan ajattelun tutkimuksen paradigmaattinen lähestymistapa on kehittynyt vasta 1980-luvun alkupuoliskolla. Seuraavassa kuvataan lähemmin opettajan ajattelun ja toiminnan mallin eräitä keskeisiä ominaispiirteitä.

Opettajien ajatteluprosessit. Opettajien ajatteluprosessit pitävät sisällään kolme pääkategoriaa (Clark & Peterson 1986, 257–258): 1) *opettajan suunnittelutyö (ennakoiva ja jälkikäteinen ajattelu)*, 2) *opettajien vuorovaikutteinen ajattelu ja päätöksenteko* sekä 3) *opettajien teorit ja uskomukset*. Kaksi ensimmäistä luokkaa edustavat ajatteluprosesseihin liittyvää ajallista eroavuutta eli sitä, tapahtuuko ajattelu opettajan ja oppilaiden vuorovaikutuksen aikana (so. vuorovaikutteinen ajattelu ja päätöksenteko) vai ennen tahi jälkeen tämän vaiheen (so. ennakoiva ja jälkikäteinen ajattelu). Tämän erottelun tekeminen on Clarkin ja Petersonin mielestä hyvin tärkeä sen vuoksi, että ajattelu, jota opettajat käyttävät opetuksellisen vuorovaikutuksen aikana näyttää olevan laadullisesti erilaista kuin se ajattelu, jota he käyttävät opetuksen muissa vaiheissa.

Kolmas kategoria eli opettajien teorit ja uskomukset on erityisen kiinnostava tämän tutkimuksen kannalta. Se edustaa Clarkin ja Petersonin (1986) mukaan juuri sitä opettajan omaamaa rikasta 'kokemuksellista tietovarastoa', joka vaikuttaa heidän suunnittelutyöhönsä ja heidän vuorovaikutteiseen ajatteluunsa ja päätöksentekoonsa. Ympyröiden kehällä olevat nuolet kuvaavat näitä vaikutuksia. Vaikutus voi tietysti olla myös toisensuuntainen eli opettajat voivat kehittää teorioita ja uskomuksia opetuksen eri vaiheissa tapahtuvan ajattelunsa tuloksena.

Ojasen (1993) mukaan opettaja ajattelee toiminnassa eli testaa opetustapojaan käytännössä niiden toimivuuden perusteella. Mutta uusiiko hän kuitenkaan ajatusmallejaan, vai johtaako toiminta rutinoitumiseen? Opettajat eivät voi tietää, edistävätkö he oppilaidensa kasvua ja oppimista, elleivät he pysähdy reflektiivisesti tutkimaan omaa opetustapaansa sekä uskomustensa ja intentioidensa suhdetta siihen. *Reflektointi* on syventymistä oman toiminnan tarkasteluun (Ojanen 1993, 125). Se auttaa arvostamaan opetuskontekstissa tapahtuvaa muutosta ja sen avulla syntyy tilanteen ymmärtämistä, jolloin opettaja voi halutessaan muuttaa esimerkiksi ristiriitaisiksi koettuja tilanteita. Reflektointi merkitsee etäisyyden ottoa käytännön tilanteista, mikä puolestaan merkitsee jatkuvaa valmiuksien kehittymistä.

Opettajien toiminta ja sen havaittavat vaikutukset. Toiminnan alue on juuri se alue, jossa luokkaopetus todella tapahtuu. Opettajat toimivat tietyillä tavoin luokkatilanteessa ja heidän toimenpiteillään on havaittavissa olevia vaikutuksia oppilaisiin. Prosessi–produkti-

tutkimuksessa on tyypillisesti oletettu, että syy–seuraus-suhde on epäsuora siten, että opettajien toimenpiteet vaikuttavat oppilaiden työskentelyyn, mikä edelleen vaikuttaa oppilaiden suorituksiin (esim. Dunkin & Biddle 1974). Sen sijaan Clarkin ja Petersonin (1986) mallissa opettajan ja oppilaiden oppituntityöskentely on vuorovaikutteista, opiskelukontekstin huomioivaa ja kaikkien osatekijöiden väliset yhteydet ovat kaksisuuntaiset.

Rajoitukset ja mahdollisuudet. Mallin mukaan on olemassa tekijöitä, jotka luovat rajoituksia tai mahdollisuuksia opettajien ajattelulle ja toiminnalle (Clark & Peterson 1986). Opettajien toimenpiteitä rajoittavat usein esimerkiksi fyysiset olosuhteet tai muut ulkoiset tekijät kuten koulu, kunta, opettajayhteisö, rehtori tai opetussuunnitelma. Päinvastaisessa tilanteessa opettajat saattavat pystyä toimimaan tietyllä tavalla yksinkertaisesti sen vuoksi, että heille on suotu tällaiset olosuhteet ja toimintamahdollisuudet. Samalla tavoin voidaan nähdä opettajien ajatteluprosesseja rajoittavia tekijöitä. Esimerkiksi opettajilla voi olla vähemmän joustavuutta suunnittelussaan johtuen koulun tai kunnan tekemistä opetussuunnitelmallisista päätöksistä. Vaihtoehtoisesti jotkut koulut tai kunnat voivat puolestaan tarjota enemmän joustavuutta ja mahdollisuuksia opettajien omalle suunnittelulle ja päätöksenteolle. Näyttääkin siltä, että se, missä määrin opettajille annetaan vastuuta ja osallistumismahdollisuuksia heitä itseään koskevaan päätöksentekoon, on tärkeä koulun tuloksellisuutta määrittävä tekijä (esim. Good & Brophy 1986).

Kaiken kaikkiaan opettajien omalla ajattelulla on tutkimusten valossa todella merkittävä rooli opetuksessa. Mielikuva opettajasta reflektiivisenä ammattilaisena on siten varsin oikeaan osunut. Opettajat suunnittelevat työtään ja myös toteuttavat näitä suunnitelmiaan hyvin monilla tavoilla. Vuorovaikutustilanteissa opettajat joutuvat ajattelemaan paljon ja tekemään jatkuvasti päätöksiä. Opettajilla on myös uskomuksia ja implisiittisiä teorioita omasta työstään ja nämä uskomusjärjestelmät vaikuttavat heidän ajatteluunsa, suunnitelmiinsa ja toimintaansa. Clarkin ja Petersonin (1986) mukaan jopa verraten homogeenisilta näyttävien opettajaryhmien sisällä on olemassa variaatioita uskomusten sisällössä ja suuntautumisessa. Niinikään opettajien opetuskäytännön periaatteita kuvaava tutkimus antaa viitteitä siitä, että opettajan implisiittinen opettamisen teoria voidaan kuvata verraten harvojen periaatteiden avulla.

Edellä kuvatun käsitteellisen mallin pohjalta keskitytään tutkimuksen seuraavissa luvuissa tarkastelemaan matematiikan opettajien uskomuksia – niiden syntyä, kehitystä ja ominaispiirteitä – sekä uskomusten ja opetuskäytännön välisiä yhteyksiä. Tarkastelun kohteina ovat sekä aikaisemmin julkaistu tutkimuskirjallisuus että suomalaista peruskouluopetusta koskevat empiiriset aineistot 1990-luvulta. Ennen sitä lukijalle annetaan mahdollisuus tutustua koulumatematiikan historiallis-yhteiskunnalliseen kehitykseen, jolta pohjalta rikas matematiikkauskomusten 'maailma' on kasvanut ja kehittynyt.

3 KOULUMATEMATIIKAN HISTORIAALLIS–YHTEISKUNNALLISEN MUUTOKSEN PIIRTEITÄ

“While the objective importance of mathematics in our societies has dramatically increased, the subjective importance of mathematics taught in schools for the individual rapidly decreases. ... Mathematics becomes implicit and invisible; an increasing mathematisation of our society is complemented by an increasing demathematisation of its individual members.” (Keitel 1993, 19–20.)

Matematiikan merkitystä yhteiskunnalle on pidetty kiistattomana. Niinpä matemaattiset apuneuvot, jotka kontrolloivat, järjestävät, ennustavat ja manipuloivat luontoa ja sosiaalista elämää, ovat tunkeutuneet arkitodellisuuteemme. Esimerkkejä on runsaasti, vaikkapa laskujen maksu automaattisella maksupäätteellä, verotusjärjestelmä tai kaupan tuotteiden viivakoodit. Maailmamme ja ympäröivä todellisuutemme on tullut yhä enemmän formaaliseksi ja matematisoitunut. Matematisointi merkitsee sitä, että matematiikan ideoita ja rakenteita käytetään eri muodoissa kuvaamaan, organisoimaan, säätelemään ja edistämään inhimillisiä toimintojamme. Matematisointi-sanan käyttäminen korostaa nimenomaan sitä, että juuri me ihmiset annamme matematiikan käytölle – tietoisesti tai tietämättämme – sen oikeutuksen ja merkityksen ja että me myös olemme näiden matematisointien vaikutusten kohteina. (Davis 1991; Keitel 1993.)

Vaikka tavallinen kansalainen onkin vakuuttunut siitä, että esimerkiksi jotain konetta ei olisi olemassa ilman matematiikkaa, vain harvat spesialisteista tietävät, mitä matemaattisia tuloksia siihen kätkeytyy. Keitel (1993, 23) toteaaakin osuvasti, että "matematiikasta itsestään on tullut eräänlaista *metateknologiaa* eli teknologian teknologiaa, jossa tietokone toimii materialisoituneen matematiikan roolissa, ajatteluvälineenä". Juuri tästä matematiikan salaisesta luonteesta – eli että matematiikan sisäiset toiminnot ovat mysteerisiä tavalliselle kansalaiselle – on seurauksena yhteiskunnallisten matematisointiprosessien luovuttaminen asiantuntijoiden joukolle.

Samalla kun matematiikan yhteiskunnallinen merkitys on valtavasti lisääntynyt, on kouluissa opetettavan 'subjektiivisen' matematiikan merkitys yksilön kannalta nopeasti vähentynyt. Yhä useammat näkyvistä matemaattisista toiminnoista, jotka aikaisemmin oli välttämätöntä suorittaa eri ammateissa ja jokapäiväisen elämän toiminnoissa, tehdään nyt nopeammin ja tarkemmin teknologisilla apuvälineillä (esim. laskimilla ja mikrotietokoneilla). Matematiikka tulee implisiittiseksi ja näkymättömäksi, jolloin yhteiskunnan kasvavasta matematisoitumisesta seuraa yksilöiden lisääntyvä 'dematematisoituminen' (Keitel 1993).

Arvioidessaan koulumatematiikan näkymiä 1990-luvulle matematiikan opetuksen kansainvälinen komissio ICMI ennusti raportissaan, että tietovallankumous tulee johtamaan suuriin muutoksiin sekä kouluissa että oppisisällöissä sitä mukaa, kun kaikkialla maailmassa

oppimiselle ja opettamiselle asetetaan uusia vaatimuksia ja annetaan uusia mahdollisuuksia (Howson & Wilson 1986). Raportin mukaan on aihetta uskoa, että teknisesti edistyneissä maissa jotkut niistä matemaattisista taidoista, joita on pidetty hyödyllisinä ja työssä tarpeellisinä eivät enää ole tällaisia. Esimerkiksi myyjän ei enää tarvitse osata laskea hintoja yhteen eikä suorittaa vähennyslaskuja vaihtorahan laskemiseksi. Rahattoman yhteiskunnan lähestyessä katoaa myös tarve laskea rahoja.

Toisaalta, kun ihmisten saavutettavissa olevan informaation tulva kasvaa, tarvitaan toisenlaista matemaattista osaamista tiedon tehokkaaseen käsittelemiseen. Erityisten taitojen, varsinkin aritmeettisten taitojen tarve vähenee, mutta kaikki tarvitsevat entistä enemmän yleisimpien matemaattisten käsitteiden ja ajatusten ymmärtämistä. On myös todennäköistä, että yhteiskunnan palveluksessa tulee olemaan matemaattinen eliitti, jonka matematiikan taidoille asetetaan yhä kasvavia ja muuttuvia vaatimuksia ja joka samalla tulee saamaan entistä enemmän valtaa laajojen kansalaisryhmien jäädessä vähäisen matemaattisen koulutuksen varaan. (Howson & Wilson 1986.)

Onko meillä käsitystä siitä suunnasta, johon suomalaisen yhteiskunnan matematisoituminen on kulkemassa? Tarvitseeko kansalaisten tietää, kuinka matematiikkaa käytetään yhteiskunnassa? Antaako matematiikan kouluopetus oppilaille todellista osaamista ja pätevyyttä? Edellä esitetyt matematiikan opetuksen tulevaisuuden visiot ja osin uhkakuvatkin saavat todella pohtimaan matematiikan kouluopetuksen perustana olevia kysymyksiä. Mitä on matematiikka ja miksi sitä opetetaan koulussa? Miten matematiikan oppimisen ja opetuksen teorit ovat historian kuluessa kehittyneet? Millainen rooli opettajalla on matematiikan opetuksessa missäkin kehitysvaiheessa ollut? Millaisia muutoksia koulumatematiikan opetuksessa ja oppimisessa on viimeisen 25 vuoden aikana tapahtunut? Mikä merkitys näillä kehityssuunnilla on ollut ja millä tavoin tämä on nähtävissä opettajien ajattelussa ja uskomuksissa matematiikkaa ja sen opetusta kohtaan?

Tämä luku on merkityksellinen matematiikkauskomusten tutkimisen kannalta, sillä edellä esitettyjen kysymysten tarkastelun kautta perehdymme matematiikkauskomusten 'juuriin'. Tällä tavoin saamme käsitystä siitä, miten kukin ajanjakso omine matematiikkapainotuksineen on tuottanut aineksia erilaisten uskomusten muodostumiselle. Sen avulla pystymme myös paremmin ymmärtämään uskomusten pysyvyyttä ja niiden muuttumisen hitautta.

3.1 Matematiikka koulun oppiaineena

3.1.1 Mitä on matematiikka ja matemaattinen tieto?

“Most of the population perceive mathematics as a fixed body of knowledge long set into final form. Its subject matter is the manipulation of numbers and the proving of geometrical deductions. It is a cold and austere discipline which provides no scope for judgement or creativity.” (Barbeau 1989, 2.)

Ihmisillä on hyvin erilaisia käsityksiä matematiikasta ja niiden luonnetta on selvitetty varsin paljon (mm. Burton 1989; Davis & Hersch 1981; Ernest 1991; Romberg 1992; Thompson 1992). Monille ihmisille matematiikka tarkoittaa sitä, mitä he itse opiskelivat koulussa eli aritmetiikkaa sekä vähän algebraa, geometriaa ja trigonometriaa. Matematiikalle on tällöin luonteenomaista täsmälliset tulokset ja ehdottoman varmat menettelytavat ja sen peruselementtejä ovat aritmeettiset operaatiot, algebralliset toimintakaavat sekä geometriset nimitykset ja teoreemat (Thompson 1984, 1992). Näille ihmisille matematiikan osaaminen merkitsee samaa kuin lasku- ja toimintasääntöjen suorittaminen ja oppiaineen peruskäsitteiden tunnistaminen. Tämän ajattelutavan mukaan käsitteet ja proseduurit esitetään selkeällä tavalla ja oppilaille tarjotaan runsaasti mahdollisuuksia harjoitella käsitteiden tunnistamista ja toimintakaavojen tarkkaa suorittamista.

Yli kahden vuosituhannen ajan matematiikkaa on pidetty erehtymättömän totuuden 'linnakkeena' ja kaukana erillään humanisuuden kysymyksistä ja arvoista. Ihmiskunnan historiassa matematiikkaa on pidetty kaikkein varminnan tiedon lähteenä. Muinaisen Kreikan platonisessa näkemyksessä matemaattiset lauseet edustivat ikuisia totuuksia, jotka olivat ehdottoman varmasti täydellisiä (Burton 1989). Aina 1800-luvun lopulle tätä pidettiin paradigmana, joka edusti 'totuutta ja varmuutta'.

Nämä näkemykset heijastavat *absoluuttista näkökulmaa* matematiikkaan. Tällaisten ahtaitten käsitysten olemassaolo on vakava ongelma sen vuoksi, että ne ovat varsin usein vaikuttamassa koulun matematiikkaa koskeviin päätöksiin koulutuksen kaikilla tasoilla. Ne voivat johtaa opetukseen, jossa korostetaan kohtuuttoman paljon operointia oppilaille merkityksettömiksi jäävillä symboleilla. Nykytiedon valossa absoluuttista näkökulmaa pidetään hyvin puutteellisenä käsityksenä siitä, mitä matematiikka todella on, kuinka sitä opitaan tai kuinka sitä käytetään myöhemmässä elämässä.

Voidaan kysyä, kuinka vakiintunut tämä käsitys matematiikasta objektiivisena, eksaktina ja konvergenttina tieteenä oikein on? Yhä lisääntyvä joukko matematiikan filosofi (mm. Davis & Hersch 1981; Ernest 1991; Lakatos 1976) on asettanut nämä käsitykset kyseenalaiseksi. Heidän mukaansa matematiikka on “erehtyväinen, muuntuva ja aivan kuten mikä tahansa tiedonala, inhimillisen kekseliäisyyden tuote (Ernest 1991, xi)”.

Burton (1989) on erottanut matematiikan luonteen käsittämisessä kolme tärkeää muutosvaihetta. Ensimmäinen vaihe kiteytyi kysymykseen, onko matematiikka ehdottoman totuudellista vai olettamuksiin pohjautuvaa. Epäeuklidisen geometrian kehittyminen 1800-luvun loppupuolella merkitsi sitä, että geometrinen systeemi ymmärrettiin tulokseksi tietyistä olettamuksista (aksiomista). Toinen muutos koski kysymystä matemaattisen järjestelmän täydellisyydestä ja kolmas matemaattisen tiedon absoluuttisuudesta. Tämän vuosisadan alkupuolella Einsteinin suhteellisuusteoria vei pohjaa absoluuttiselta näkökulmalta ja Gödelin epätäydellisyysteoreemat osoittivat, että matematiikan järjestelmä ei ole täydellinen. Edellä mainituista muutosvaiheista huolimatta matematiikan kehitys on ollut laajentumista ja kaikki aiemmin tuotettu matematiikka pitää edelleenkin paikkansa (Boyer 1994).

Tällainen filosofinen muutos on Rombergin (1992) mielestä erityisen merkityksellinen matematiikan opetukselle. Jos pidämme absoluuttista näkökulmaa opetuksen lähtökohtana, niin silloin matematiikalla ei ole mitään sosiaalista vastuuta esimerkiksi naisten tai erilaisten vähemmistöjen aliedustuksesta tällä alueella tai tieteenalan yhteydestä yhteiskunnallisiin ja poliittisiin arvoihin. Mikäli siis 1990-luvulla edelleen halutaan väittää, että matematiikka on abstrakti, objektiivinen ja riippumaton sosiaalisista, kulttuurisista ja poliittisista tekijöistä, merkitsee se tietyn 'valitun joukon' asettamista elitistiseen ja etuoikeutettuun asemaan, josta he voivat yrittää kontrolloida niin matematiikan tuotoksia kuin yhteisöön hyväksytyjä jäseniäänkin (Burton 1989). Se sosiaalinen mielikuva matematiikasta, jonka oppiaineen sisäpiiri on sille sallinut luotavan, ei ole ainoastaan turmiollinen potentiaalisten matematiikan opiskelijoiden kannalta. Burtonin (1989) mukaan sen vaikutukset säteilevät myös kaikkien kansalaisten asenteisiin ja suoriutumiseen. Tämän harhaisen mielikuvan vaikutukset ovat kuitenkin nähtävissä monilla tavoin. Vaikka matematiikkaa pidetään hyvin tärkeänä alueena, sen tärkeyttä ei pystytä tarkemmin spesifioimaan. Tieteen ja kehittyneen teknologian yhteyteen liitettyinä matematiikka nähdään useimmiten 'mustana laatikkona' ja sen hyväksikäyttöä pidetään 'magiikkana' (mm. Dörfler & McLone 1986). Tavalliselle kansalaiselle koulun matematiikka näyttäytyy myös samanlaisena: "se oli aina täyttä mystiikkaa minulle" on hyvin tavallinen vastaus.

Vaihtoehtoinen kuvaus matematiikan merkityksestä ja luonteesta syntyy matemaattisen tiedon sosiologisesta analyysistä ja se pohjautuu matemaatikkojen toimintatapaan. Tässä kuvauksessa matemaatikot ja matematiikan filosofit näkevät matematiikan henkisenä toimintana ja sosiaalisena konstruktiona ja sitä kuvataan lähemmin seuraavassa kappaleessa.

3.1.2 Matematiikka sosiaalisena ja kulttuurisena tiedon alueena

“Anyone who has ever been in the least interested in mathematics, or has even observed other people who were interested in it, is aware that mathematical work is work with ideas. Symbols are used as aids to thinking just as musical scores are used as aids to music. The music comes first, the scores come later. Moreover, the score can never be a full embodiment of the musical thoughts of the composer. Just so, we know that a set of axioms and definitions is an attempt to describe the main properties of a mathematical idea. But there may always remain an aspect of the idea which we use implicitly, which we have not formalized because we have not yet seen the counterexample that would make us aware of the possibility of doubting it.” (Hersh 1986, 18.)

Jos matematiikka hyväksytään erehtyväisenä sosiaalisena rakennelmana, niin se ymmärretään tutkimusprosessina (coming to know) ja jatkuvasti laajentuvana inhimillisen keksimisen ja luomisen kenttänä eikä valmiina tuotteena (Romberg 1992, Thompson 1992). Tällöin matematiikka sisältää oletuksia, todistuksia ja väitteiden kumoamisia. Sen tulokset ovat kohteena suurillekin muutoksille, minkä vuoksi niiden pätevyys voidaan arvioida vain suhteessa sen hetkiseen sosiaaliseen ja kulttuuriseen taustaan.

Matematiikalle on siis luonteenomaista tekeminen, luovat toiminnot tai tuottavat prosessit: *matematiikan osaaminen on matematiikan tekemistä* (Hersh 1986). Tätä matematiikan humanimpaa puolta Ernest (1991) nimittää *sosiaaliseksi konstruktivismiksi* tai *sosiokonstruktivismiksi*. Viimeisen 15 vuoden aikana sosiokonstruktivistinen ajattelu on yleistynyt matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman uudistamista koskevissa julkaisuissa. Tämän oppimisnäkömyksen mukaisesti matematiikan opetuksessa oppilaille tulee tarjota merkityksellisiä toimintamuotoja, jotka saavat alkunsa ongelmatilanteista, edellyttävät päättelyä ja luovaa ajattelua, tiedon keräämistä ja soveltamista, ideoiden selvittämistä, keksimistä ja kommunikointia sekä näiden ideoiden testaamista kriittisen pohdinnan ja argumentoinnin avulla. Opiskelussa korostetaan eläviä konteksteja, jotka ovat mielekkäitä oppilaille ja joissa käytetään hyväksi jokapäiväisen elämän tilanteita ja oppilaiden aiempia koulukokemuksia. Tällainen käsitys luo perustan monikulttuurisille ja suvaitseville matematiikan opetuksen lähestymistavoille (Romberg 1992). Samalla se on vastakkainen niille näkömyksille, joissa käsitteiden ja menetelmien hallinta on opetuksen perimmäinen tarkoitus. Sosiokonstruktivistista oppimiskäsitystä tarkastellaan yksityiskohtaisemmin luvussa 3.2.1.

Monien tutkijoiden mielestä matematiikan kulttuuriset siteet ovat ilmeiset monestakin seikasta johtuen (Bishop 1988; D’Ambrosio 1985; Keitel 1987; Romberg 1992). Ensimmäkin ihmiset ovat luoneet matematiikkaa viimeisen runsaan 6000 vuoden aikana. Tämän evoluution kestäessä matematiikkaa luotiin vastauksena yhteiskunnallisiin ongelmiin ja sillä on ollut moninaisia vaikutuksia nykyisten yhteiskuntien kehitykseen. Matematiikka on koko kehityksensä ajan ollut jatkuvassa vuorovaikutuksessa sosiokulttuurisen ympäristönsä kanssa. Se

on kasvanut ja laajentunut, kun matemaatikot ovat käyneet käsiksi yhteiskunnallisiin ongelmiin, työskennelleet näiden ongelmien ymmärtämiseksi ja nostaneet esiin myös uusia ongelmia (Keitel 1987). Matematiikalla on ollut valtava kokonaisvaikutus kulttuuriin, koska ilmiöiden kvantifointi ja matemaattinen mallintaminen ulottuvat jo kaikille yhteiskunnan sektoreille ja niiden vaikutus on yhä kasvamassa.

Tunnettu matematiikan kulttuurisen luonteen tutkija Alan Bishop (1988) esittää, että historiallisesti tarkasteltuna kaikki kulttuurit kehittävät jonkin verran matematiikkaa keskinäisen kommunikoinnin tarpeisiin. Hänen mukaansa kaikissa kulttuureissa on löydettävissä sellaisia yhteisiä matemaattisia toimintoja kuten (lukujen) luetteleminen, paikan määrääminen, mittaaminen, suunnitteleminen (designing), pelaaminen ja selittäminen. Bishop (1988, 59) väittääkin, että "nämä ovat niitä universaaleja avaintoimintoja, jotka luovat perustan oman matematiikan kulttuurin kehittymiselle". Näkökohta on tärkeä, koska se osoittaa, että matematiikka on ollut merkittävä kehitystekijä kaikissa yhteiskunnissa.

D'Ambrosio (1985) on erityisesti korostanut sitä, että vallitsevan kulttuurin sisällä on aina olemassa useita matemaattisia kulttuureja. Nykyään kouluissa suositetaan "kollegiaalisen matemaattikkoyhteisön formaalia matematiikkaa, mutta ei esimerkiksi maanviljelijöiden, kirvesmiesten tai muiden ammattiryhmien kehittämää ja käyttämää matematiikkaa" (Romberg 1992; Kansakoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö 1952). Jokainen näistä sosiaalisista ryhmistä on välttämättä kehittänyt omaa matematiikan kieltä ja omia matemaattisia menettelytapoja (esim. kirvesmiesten suoran kulman määritys). Myös oppilaat tuovat matematiikan tunneille oman matematiikkakulttuurinsa.

Matemaatikkojen työyhteisö on niinkään oma kulttuurinsa. Jotta voisi ymmärtää ja arvostaa, mitä matematiikan 'tekeminen' tarkoittaa, on tunnistettava se, että matemaatikotkin väittelevät omassa keskuudessaan siitä, millainen matematiikka on hyväksyttävää, millaisia menettelytapoja voidaan käyttää ja mitä pidetään hyväksyttävänä työnä tai suorituksena (Burton 1999; Romberg 1992). Matemaatikko tekee matematiikkaa sellaisessa yhteisössä, jonka jäsenet näkevät matemaattisen toiminnan tietyllä yhteisellä tavalla. Heidän keskinäinen diskurssinsa vahvistaa sitä, mitkä ovat parhaita toimintamuotoja ja millainen on käsitys sopivuudesta, eleganssista ja hyväksyttävistä käsitteellisistä rakenteista. Tästä perspektiivistä katsottuna matematiikan 'tekemistä' ei voida pitää mekaanisena työskentelynä, jossa yksilöt pelkästään noudattavat ennalta määrättyjä sääntöjä. Pikemminkin "matemaattiseen työskentelyyn sisältyy käsityön tai taiteen harjoittamisen elementtejä" (Romberg 1992, 753). Vaikka useimmat matematiikan opettajat saattavatkin uskoa, että koulumatematiikka ja matematiikkatiede ovat olennaisesti samoja ja että ne eroavat toisistaan ainoastaan vaikeuden tason ja määrän perusteella, niin uskomus on naiivi. Jahnken (1986) mukaan koulumatematiikka edelleenkin harjoitetussa muodossaan pohjautuu absoluuttisiin lähtökohtiin, mistä on seurauksena, että se muistuttaa vain vähän sitä, mitä matemaatikot tekevät tai miten matematiikkaa käytetään.

Jos lähtökohdaksi halutaan ottaa sellainen dynaaminen matematiikkanäkemyks, jossa matematiikka on erehtyväinen, laajentuva ja muuttuva – jotakin sellaista, jota ihmisryhmät ovat luoneet kaikissa kulttuureissa –, niin sillä on voimakkaita seuraamuksia kasvatukselle ja koululle. Rombergin (1992, 751) mielestä matematiikan opetukselle tulee silloin asettaa seuraavanlaisia päämääriä. Ensinnäkin oppijat nähdään ja tehdään kykeneviksi luomaan omaa matemaattista tietämystään. Toiseksi koulumatematiikan sisällöt muotoillaan niin, että oppilailla on paremmat mahdollisuudet käsitteiden omaksumiseen ja matematiikan merkityksen ja tehokkuuden havaitsemiseen. Ja kolmanneksi matematiikan harjoittelussa ja käyttämisessä yhteiskunnallisia konteksteja ei tietoisesti jätetä sivuun, vaan matematiikan implisiittiset arvot tuodaan rehellisesti esille.

3.1.3 Miksi matematiikkaa opetetaan koulussa?

“Yet few would argue that mathematics holds its central place in school education simply for its own sake. Its justification as usually stated is to a large extent its ‘usefulness’, in employment and the future daily lives of students as citizens.”
(Howson & Wilson 1986, 8.)

Koska matematiikkaa pidetään olennaisen tärkeänä yhteiskunnalliselta kannalta, on hyvin odotettua – jopa itsestään selvää – että eri puolilla maailmaa matematiikka kuuluu osaksi koulun opetussuunnitelmaa. Tästä universaaliudesta johtuen otsikon kysymys saattaa tuntua oudolta. Viimeisen 20 vuoden aikana matematiikan etuoikeutettu asema on kuitenkin yhä useammin asetettu kyseenalaiseksi (mm. Howson & Wilson 1986; Krygowska 1979). Tietotekniikan ja yleensä laskentavälineiden nopea kehitys on ollut osaltaan muuttamassa käsitystä matematiikan opetuksen merkityksestä ja nostanut esille kysymyksen siitä, kuinka paljon matematiikkaa on tarpeellista opettaa koko ikäluokalle. Matematiikan merkityksen epäilijöille voitaisiin tietenkin vain todeta, että ”20. vuosisadan lopun yhteiskunnassa olisi kenties mahdotonta elää ilman jonkinlaisen matematiikan käyttöä” (Dörfler & McLone 1986, 49; Mathematics counts 1982, 1), mutta monien mielestä vastaus ei ole lainkaan riittävä.

Useat tutkijat ja tutkijaryhmät ovat esittäneet erilaisia perusteluja koulujen matematiikan opetukselle (Dörfler & McLone 1986; Freudenthal 1973; Leino 1984; Mathematics counts 1982; NTCM 1989). Kenties yleisimmin esitetty perustelu matematiikan opetukselle on se, että matematiikka täyttää sekä oppilaiden että yhteiskunnan kannalta ’pitkäkestoisen toiminnallisen tarpeen’ (Romberg 1992) eli matematiikka koetaan monilla tavoilla *hyödyllisenä*. Sen hyöty nähdään niinä laskennallisina taitoina, joita käytämme (automaattisesti ja huomaamattomasti) niin kotona, työpaikoilla kuin vapaa-aikanakin. Jotkut taas näkevät hyödyntieteellisen kehityksen ja modernin teknologian perustana (esim. lentokoneteollisuus,

avaruustutkimus jne.) ja eräiden mielestä matemaattisten tekniikoiden lisääntynyt hyväksikäyttö on ratkaisevasti vaikuttanut kaupan ja teollisuuden kehittymiseen niin toimisto- kuin tehdastasollakin. Kaikissa näissä tapauksissa matematiikan hyödyllisyys perustuu siihen, että matematiikka on tehokas, taloudellinen, selkeä ja yksiselitteinen kommunikoinnin väline (Dörfler & McLone 1986). Ja kenties juuri tämä on pääasiallinen syy matematiikan opettamiselle koko ikäluokalle. Tähän matematiikan hyödyllisyys-näkökulmaan liittyy myös kysymys siitä, onko meillä nyt ja tulevaisuudessa riittävästi matemaatikkoja oman kilpailukykyämme turvaamiseksi (Komiteanmietintö 1989).

Matematiikkaa pidetään olennaisen hyödyllisenä myös lukuisille muille tieteellisen toiminnan ja yhteiskunnan aloille. Matematiikkaa käytetään yhä lisääntyvässä määrin lääketieteessä, biologiassa, maantieteessä ja kaupallisilla aloilla. Monissa tutkimuksissa ja selvityksissä on todettu (mm. Luonnontieteiden koulutuksen arviointi 1993), että luonnontieteissä ja kaikilla teknisillä aloilla sen merkitys on perustavanlaatuinen. Lisäksi lukuisten muiden ammattien matematiikan osaamisen vaatimukset ovat sellaiset, että jonkinlainen matemaattinen koulutus on tärkeää kaikille oppilaille. Myös laskennallisten apuvälineiden nopea kehittyminen on vaikuttanut asennoitumiseen koulumatematiikan yhteiskunnallista relevanssia kohtaan. Vaikka taskulaskinten yleistymisen alkuaikoina oltiin huolestuneita peruslaskutaitojen hallinnan heikkenemisestä, ei ole havaittu merkkejä siitä, että näin olisi käynyt. Esimerkiksi Englannissa 1980-luvun alussa julkaistu raportti (Mathematics counts 1982) totesi, että laskimen käyttömahdollisuus ei millään tavoin vähennä matematiikan ymmärtämisen tarvetta sitä käyttävän yksilön kannalta. Sen sijaan monissa tutkimuksissa on havaittu, että oppilaat kohensivat osaamistaan sekä laskutaidoissa, käsitteiden ymmärtämisessä että ongelmanratkaisussa laskinten käyttämisen myötä (mm. Dörfler & McLone 1986). Vastaavaa tutkimuksellista näyttöä on mikrotietokoneiden merkityksestä opetuksessa. Monet, joille koulun matematiikka on vastenmielistä ja käsittämätöntä, on mikrojen käyttö avannut uuden väylän ymmärtää opetettavia asioita (mm. Tall 1998).

Usein matematiikan opettamista perustellaan myös sillä, että se kehittää *loogista ajattelua, tarkkuutta ja avaruudellisen näkemisen taitoja*. Perustellusti voidaan kuitenkin todeta, että vaikka matematiikka voikin osaltaan edistää loogisen ajattelun taitoja, riippuu tämä huomattavasti opettamisen tavasta. Tutkimukset eivät tue väitettä, että rutiinitehtävien toistava suorittaminen, jota koulun matematiikkaan sisältyy edelleen huomattavan paljon, kehittäisi merkittävästi loogista ajattelua (Dörfler & Mc Lone 1986). Nykyään tämä näkemys heijastuu 'korkeampien' ajattelun taitojen korostamisena (mm. Resnick 1987).

Eräänä perusteena matematiikan opetukselle Romberg (1992) mainitsee *matematiikan kauneuden*. Esimerkiksi matematiikan kytkennät kuvataiteisiin ja musiikkiin tunnetaan verraten hyvin. Matematiikan todellinen merkitys ei siis suinkaan riipu sen käytännöllisyydestä. Matematiikassa itsessään on omanlaista kauneutta ja viehätystä sellaiselle henkilölle, joka on halukas näkemään sen.

Yhtenä syynä mainitaan myös se *älyllinen nautinto* ja ne *"mieluisat elämykset"* (Komiteanmietintö 1970, 140), joita matematiikan opetus voi tarjota. Hyvin yleisiä ovat esimerkiksi lehdissä erilaiset pähkinät tai pulmatehtävät, joiden ratkaiseminen voi olla sekä hauskaa että hyvinkin hyödyllistä. Tämä keksimisen ja oivaltamisen kokeminen tulisi olla mahdollista myös koulussa kaikille oppilaille.

Harvemmin esitetty peruste matematiikan opetukselle lähtee siitä, että matematiikka on *osa ihmiskunnan kulttuurista perintöä*, mistä johtuen se on myös arvokas opiskelun kohde. Freudenthal (1973, 69) on ilmaissut tämän matematiikan sosiokonstruktivistisen perusluonteen osuvasti:

"Students should learn mathematics because they need it as one aspect of their being human beings."

3.1.4 Matematiikan opettamisen perusteisiin liittyviä ongelmia

Edellä on esitetty syitä, joiden perusteella matematiikan kuulumista koulun opetussuunnitelmaan pidetään oikeutettuna. Mikään näistä ei yksin pysty antamaan yleisesti hyväksytyä syytä matematiikan opettamiselle. Yhdessä ne kuitenkin osoittavat selvästi, miksi matematiikkaa pidetään tärkeänä kouluaineena. Hyötynäkökohtia korostava funktionaalinen peruste matematiikan opiskelulle on ollut vallalla jo pitkään. Rombergin (1992) mukaan sitä koskevaa keskustelua on käyty absoluuttisen näkökulman sisällä, jolloin on keskusteltu sellaisista kysymyksistä, kuten mitä ja kuinka monia matematiikan osa-alueita oppilaiden pitäisi oppia. Tällainen tarkastelutapa on yksinkertainen eikä se huomioi matematiikan luonteeseen ja tekemiseen liittyvää filosofista muutosta.

Edellä esitettyihin perusteisiin liittyy monia ongelmia. Ensinnäkin eri perusteista on seurauksena, että hyvin erilaisia matematiikan osa-alueita tulisi sisällyttää opetussuunnitelmaan. Esimerkiksi silloin, kun matematiikan 'sisäistä' kauneutta on käytetty perusteena matematiikan opettamiselle, ovat matematiikan sovellukset jääneet huomiotta. Juuri näin kävi 1970-luvun alussa, kun peruskoulun matematiikan opetusta uudistettiin. Matematiikan sisältöä uudistettiin rakenteellisesta näkökulmasta ja lisäämällä opiskeltavia alueita (mm. joukko-oppi). Käytännössä tämä merkitsi soveltavan aineksen jäämistä vähälle huomiolle. Jo hyvin pian uudistuksen jälkeen Freudenthal (1973) näki tämän lähestymistavan ongelman siinä, että se pyrki johdattamaan oppilaat sellaiseen matematiikan järjestelmään, joka säteilee kiistattoman esteettistä viehätysvoimaa, mutta jota eivät kuitenkaan pysty tajuamaan ne, joilla ei ole syvällistä matematiikan tietämystä. Matematiikan järjestelmä voi hyvinkin olla lopullinen päämäärä tuleville matemaatikoille, mutta se ei voi koskaan olla päämäärä yleiselle matematiikan opetukselle. Oppilaat, opettajat ja vanhemmat eivät useimmiten näe sitä kauneutta, jonka matemaatikon silmä tavoittaa.

Toinen yhtä vakava ongelma on se, että samaa perustetta voidaan käyttää haettaessa tukea ja hyväksyntää kahdelle aivan erilaiselle matematiikalle. Romberg (1992) mainitsee esimerkkinä perustelun, jonka mukaan matemaattisen tiedon tulisi olla oppilaille hyödyllistä. Vaikeus on kuitenkin siinä, että ihmisillä on erilaisia näkemyksiä siitä, mitä "suora hyöty" on. USA:n matematiikan opettajajärjestön toimintaohjelmassa 1980-luvun taitteessa (NCTM 1980) lähdettiin siitä, että ongelmanratkaisua tulisi opettaa sen vuoksi, että sitä voidaan käyttää suoraan avuksi sekä työelämän ja arkipäivän tilanteissa että tieteellisissä sovelluksissa. Aivan vastaavanlainen hyödyllisyyttä koskeva väite esitettiin kuitenkin vajaa 10 vuotta aikaisemmin vaiheessa, jolloin "back to basics"-ajattelu oli voimissaan. Tällöin hyödyllisillä perustaidoilla tarkoitettiin laskutaitoja kokonaisluvuilla ja desimaaliluvuilla – ei ongelmanratkaisua.

Nämä matematiikan perustaitoja koskevat erot eivät ole pelkästään merkityseroja. Em. toimintaohjelmassa (NCTM 1980) todettiin, että tärkein syy ongelmanratkaisun korostamiseen on siinä, että sitä voidaan suoraan soveltaa reaalia maailmaan ongelmiin. Samalla järjestö luokitteli sen tärkeimmäksi kymmenestä opetuksen painoalueesta 1980-luvulle. Toisaalta on olemassa niitä, joilla on kapeampi näkemys perustaidoista ja heidän mukaansa on ensin pyrittävä parantamaan oppilaiden suorituksellisia taitoja (mm. Good 1979). Tältä pohjalta on oikeutettua sanoa: "Kyllä ongelmanratkaisu on tärkeää, mutta lasten on ensin opittava laskemaan yhteen, vähentämään, kertomaan ja jakamaan". Tietenkään ei ole mitään väärää siinä, että oppilaiden halutaan osaavan peruslaskutoimitukset luvuilla, mutta olennaisen tärkeä on kuitenkin se tapa, jolla näitä taitoja opetetaan. Jo Dewey (1933, 62–63) painotti, että todellinen vaara on olemassa silloin, kun lähestymistapa taitojen hankkimiselle yleensä – ja myös matematiikan alueella – on kapea:

"The tendency is to take the shortest cuts possible to gain the required end. This makes the ... (subject) mechanical, and thus restrictive of intellectual power. In the mastery of ... (skills), the need for economy of time and material, for neatness and accuracy, for promptness and uniformity, is so great that these things tend to become ends themselves, irrespective of their influence upon general mental attitude. Sheer imitation, dictation of steps to be taken, mechanical drill, may give results most quickly and yet strengthen traits likely to be fatal to reflective power... Practical skills, modes of effective technique, can be intelligently, non-mechanically used only when intelligence has played a part in their acquisition".

Kolmas ongelma koskee tavoitteiden ja käytännön välistä kuilua. Opettajat nimittäin voivat mukauttaa toimintatapaansa siten, että se vääristää tavoitteita olennaisesti. Tutkiesaan näitä opetuksen mukauttamisprosesseja Romberg (1992) kollegoineen löysi monia syitä sille, miksi opettajat muuttivat opetustaan. Usein opettajat perustelivat tekemiään muutoksia luokan hallintaan liittyvillä syillä ("luokassa olisi syntynyt hälinää") tai luokan kykytasolla ("minulla oli huono oppilasryhmä"). Joissakin tapauksissa opettajien tekemät

muutokset muuttivat ratkaisevasti oppituntien matemaattista tarkoitusta. Esimerkkinä tällaisesta esitetään autenttinen kuvaus yhdestä matematiikan työskentelyjaksosta (Romberg 1992, 761):

Työskentely liittyi pituuden mittaamiseen ensimmäisellä luokalla. Se oli suunniteltu siten, että oppilaat mittaavat luokassa olevia erilaisia kappaleita omilla mitoillaan kuten lyijykynillä, pahvikorteilla jne. Tämän jälkeen opettajan tuli johdatella keskustelua jakson tavoitteita kohti. Oppilaiden tuli toistaa mittauksensa muutaman kerran ja laskea mittojen määrä. Heidän tuli havaita, että jos käytetään 'lyhyttä' mittaa, niin saadaan iso mittaluku ja jos käytetään 'pitempää' mittaa, niin saadaan pieni mittaluku. Mittaustapahtuman luonne oli myös omiaan nostamaan esiin sen, että mittauksessa tehdään aina jonkinlainen virhe. Keskustelun tuli lopulta johtaa oppilaat havaitsemaan se, että tarvitaan joku yhteinen mittayksikkö.

Yksi opettaja muutti työskentelyä siten, että todellisten kappaleiden mittaamisen ja omien mittojen käyttämisen sijasta oppilaat mittasivat paperille piirrettyjä janoja käyttäen asteikolla varustettua viivainta. Tämän lisäksi janat oli piirretty vielä niin, että mittaustulokset olivat hyvin tarkkoja. Opettaja perusteli tekemiään muutoksia omalla matematiikkauskomuksellaan: 'On väärin antaa oppilaille sellainen vaikutelma, että matemaattisella tehtävällä voisi olla useita oikeita vastauksia tai että matematiikka olisi koskaan epätarkkaa'.

3.2 Koulumatematiikan oppimisen ja opetuksen kehitysvaiheita

3.2.1 Näkemyksiä ja teorioita matematiikan oppimisesta

Leder ja Gunstone (1990) ovat esittäneet neljä vaihetta matematiikan oppimisen teorioiden kehityksessä (ks. taulukko 3.1). Kolme ensimmäistä kehitysvaihetta edustavat ns. behavioristista näkökulmaa ja neljäs pohjaa kognitiiviseen oppimiskäsitykseen.

Leder ja Gunstone (1990) pitävät Thorndikea matematiikan opetuksen psykologian 'perustajana' (ks. myös Resnick & Ford 1981). Thorndiken teoriassa opettajan tehtävänä oli tunnistaa oppimisen kannalta olennaiset asiakohdat, varmistaa, että ne esitettiin sopivassa järjestyksessä, antaa positiivista palautetta oikeista vastauksista sekä järjestää oppilaille riittävästi mahdollisuuksia harjoittaa kutakin asiakohtaa. Mitä suurempi määrä tietynlaisia yhteyksiä syntyi oppilaan työskentelyn aikana, sitä korkeampaa päättelyn tasoa ja laatua häneltä voitiin odottaa. Esimerkkien ja harjoitustehtävien runsas käyttäminen matematiikan oppimiseksi ulottuu siten aina 1900-luvun alkuun saakka.

Taulukko 3.1 Matematiikan oppimisenäkemyksien kehitysvaiheita (Kroll 1989; Lindgren 1990; Rauste-von Wright & von Wright 1994).

Kehitysvaihe	Pääedustajat	Keskeinen tavoite	Tavoitteen saavuttaminen
Drilli ja harjoitus: 1920–1930	Thorndike	Laskennallinen sujuvuus	Prosessin jakaminen pieniin paloihin, ulkooppiminen
Ymmärrettävä, mielekäs matematiikka: 1930–1950	Brownell	Matemaattisten ideoiden ja periaatteiden ymmärtäminen	Satunnaisesti assosioiva oppiminen, matem. suhteiden ja yleistysten korostaminen
Hierarkkinen oppiminen, uusi matematiikka: 1960–1970	Bruner, Gagne	Tiedon esitysmuodot, oppiaineen rakenne ja oppimisen hierarkkisuus	Matematiikan rakenteiden opiskelu, toiminnallisuus, spiraaliperiaatteen soveltaminen opetussuunnitelmaan
Konstruktivismi, luova matematiikka: 1980–	Piaget, Wittrock, von Glasersfeld	Oppijan aktiivisuus tiedon konstruoijana, aikaisemman tiedon ja kokemuksen merkitys	Oppilaiden ajattelun ja toiminnan tarkkailu, käsitteiden oppiminen, ongelma-keskeinen opetus

Brownell kritisoi tutkimuksissaan Thorndiken lähestymistapaa ja esitti, että oppimiseen tulisi päästä mielekkään opetuksen avulla, eikä 'drillaavan' harjoittelun kautta. Hänen oppimismallissaan korostettiin rakenteita, periaatteita ja niiden välisiä yhteyksiä ja se käsitti neljäntyyppistä oppimista: satunnaiset assosiaatiot, käsitteet, yleistykset ja ongelmanratkaisu. Näitä voidaan havainnollistaa seuraavilla ala-asteen matematiikkaan liittyvillä esimerkeillä: a) lukujen peräkkäinen kirjoittaminen 1:stä 9:ään edustaa satunnaisesti assosioivaa oppimista, b) objektien (esim. geometrinen kuvioiden) luokittelu tietyllä perusteella edustaa käsitteenoppimista, c) yhtä suurista murtoluvuista muodostuvien joukkojen merkitseminen edustaa yleistyksen tai periaatteen oppimista ja d) laskulausekkeen kirjoittaminen sanallisesta tehtävästä edustaa ongelmanratkaisua. (Leder & Gunstone 1990.)

Lederin ja Gunstonen (1990) mukaan Brownellin näkemys matematiikan oppimisesta menee huomattavasti päällekkäin Brunerin ja Gagnen teorioiden kanssa, joskin Gagnen työt on liitetty erityisesti tehtäväanalyysiin ja oppimishierarkioihin. Bruner (1966) puolestaan perusti oman teoriansa väitteelle, että tieto voidaan esittää kolmessa muodossa: enaktiivisessa, kuvallisessa ja symbolisessa muodossa. Tältä pohjalta suositeltiin alkeismatematiikan opetuksessa edettävän siten, että ensi vaiheessa oppijat tutustutettiin käsitteisiin sopivien

konkreettisten materiaalien avulla tapahtuvalla aktiivisella työskentelyllä, jota seurasi työskentely vastaavalla kuvallisella materiaalilla ja vasta lopuksi liittäminen käsitteiden verbaalisiin tai symbolisiin esitysmuotoihin. Brunerin hierarkkinen oppimismalli siirtyi opetussuunnitelmiin ja oppikirjoihin spiraaliperiaatteen muodossa.

Aina 1970-luvun lopulta lähtien on matematiikan oppimisen tutkimuksessa korostettu voimakkaasti oppilaiden aktiivista osallistumista oppimisprosessiin oman tietämyksensä rakentajana sekä heidän aikaisempien oppimiskokemustensa hyväksikäyttämistä. On alettu puhua konstruktivistisesta oppimiskokemuksesta tai vain *konstruktivismista*. Konstruktivismilla on tosin vuosisataiset perinteet ja sen perusajatuksia ovat kannattaneet monet huomattavat filosofit ja psykologit kuten Kant, Piaget ja Baldwin, mutta "sen korostuminen taas omalla ajallamme on osoitus niistä umpikujista, joihin on jouduttu pitämällä yksilön konstruktioita ympäristöstään itsestään selvinä luonnon kopioina" (Leino 1989, 41).

Konstruktivistinen oppimiskokemus pohjautuu seuraavaan kahteen periaatteeseen (Kilpatrick 1987; von Glasersfeld 1984):

- 1) *Oppija ei ole ympäristöstä välittyvän tiedon passiivinen vastaanottaja, vaan hän itse aktiivisesti konstruoi sitä.*
- 2) *Tietäminen on adaptiivinen prosessi, jonka kautta oppijan kokemusperäinen kuva maailmasta jäsentyy. Tietäminen ei paljasta itsenäistä, oppijan mielen ulkopuolella valmiina olevaa maailmaa.*

Suuntausta, joka hyväksyy vain ensimmäisen periaatteen, sanotaan *heikoksi* konstruktivismiksi ja suuntausta, joka hyväksyy molemmat periaatteet, kutsutaan *radikaaliksi* konstruktivismiksi. Jälkimmäinen periaate merkitsee sitä, että ihminen ei voi koskaan saada ulkoisesta ympäristöstään varmaa tietoa, koska kaikkia havaintoja rajoittaa hänen aikaisempi subjektiivinen tietorakenteensa. Juuri tämän oletuksen hyväksyminen jakaa myös matematiikan kasvattajia eri leireihin (Leino 1993).

Konstruktivismissa ihminen nähdään siis aktiivisena, oman tietonsa rakentajana, ja yksilöllisyydellä on merkittävä osa oppimisessa. Tullakseen omaksutuksi tiedon on oltava sopusoinnussa niiden kokemuksellisten rajoitteiden kanssa, jotka säätelevät inhimillistä ajattelua ja toimintaa. Yksilö konstruoi oman subjektiivisen todellisuutensa, omat "teorianansa", joiden valossa hänen kokemuksensa ovat mielekkäitä eli niissä on "järkeä". Tietoa ei tarkastella sinänsä ongelmattomana, siirrettävissä olevana, vaan olennainen osa tiedosta muodostuu siihen kytkeytyvistä viitteistä ja merkityksistä. Tieto kytkeytyy siten sen merkitykseen ihmisen toiminnoissa: ilman käyttötarkoituksia tieto on hyödytöntä. Oppijan aktiivisuuden korostamiseen liittyy myös taustaoletus, että hän kontrolloi oppimistaan: älykkääseen toimintaan liittyy tietty autonomisuus, vaikkakin tätä rajoittavat esimerkiksi monet sosiaaliset normit. (Leino 1989, 1993.)

Konstruktivismi haluaa korostaa myös sitä, että yksilöt ovat ainakin osittain tietoisia näistä konstruktioista ja muovaavat niitä tietoisien reflektion avulla. Matematiikassa *reflektiivinen prosessi*, jossa konstruoitava käsite itse tulee tarkastelun kohteeksi, on aivan olennainen. Tämä johtuu siitä, että matematiikka ei rakennu 'aistidatasta', vaan inhimillisestä ajattelutoiminnasta: luettelemisesta, järjestykseen asettamisesta, luokittelemisesta, vertaamisesta jne. Matematiikka on siten inhimillisen toiminnan kieli. Tätä kieltä luodessamme meidän on reflektoitava tätä toimintaa, jotta oppisimme ammentamaan sen mielikuvituksestamme sekä nimeämään ja esittämään sitä symboleilla ja mielikuvilla. Matemaatikon kannalta katsottuna reflektointi on matemaattisen konstruktion 'objektivointia' ja se toimii eräänlaisena astinlautana, jolle hän pysähtyy vakiinnuttamaan kyseisen konstruktion ja etsimään kohtaa, josta seuraavaa konstruktioita lähdetään kehittämään. (Confrey 1990.)

Konstruktivismin merkityksestä matematiikan oppimiselle ja opetukselle on olemassa runsaasti tutkimuskirjallisuutta (Bauersfeld 1995; Björkqvist 1993, 1998; Ernest 1991; Haapasalo 1991, 1994; Keranto 1982; Lehtinen ym. 1989; Leino 1989, 1993; Neyland 1995; Paasonen ym. 1993; Steffe & Cobb 1988; Steffe & Nesher 1996; von Glasersfeld 1992, 1995). Konstruktivismissa on hyvin monenlaisia suuntauksia (radikaali konstruktivismi, heikko konstruktivismi, sosiokonstruktivismi; s. 27) ja Leinin (1993) mielestä se on ennemminkin lähestymistapa, metateoria tai paradigma, jonka järkevä soveltaminen auttaa kasvattajaa kiinnittämään huomionsa oppilaan konstruktioihin.

3.2.2 Konstruktivismiin pohjaavan matematiikan opetuksen luonne

"Teachers must ... construct a form of practice that fits with their students' ways of learning mathematics. This is the fundamental challenge that faces mathematics teacher educators. We have to reconstruct what it means to know and to do mathematics in school and thus what it means to teach mathematics." (Wood, Cobb & Yackel 1995, 408.)

Matematiikan opetuksen keskuudessa varsin yleisesti hyväksytty ja hyödylliseksi nähty suuntaus on *sosiokonstruktivismi*. Ernestin (1992) mukaan ihmistä ei voi erottaa sosiaalisesta ympäristöstään, vaan hän on jatkuvassa vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa. Matematiikka ymmärretään sosiaalisena konstruktiona ja matematiikan opetus sellaisena merkityksellisenä toimintana, jonka avulla oppilaat yhdessä rekonstruoivat aikaisempaa tietämystä uuden aikakauden tarpeisiin (Neyland 1995).

Sosiokonstruktivismissa yhdistyvät oppimisen sekä tietoteoreettiset, psykologiset että sosiologiset näkökohdat. Bauersfeld on esittänyt sosiokonstruktivismin olennaisimmat piirteet matematiikan opetukseen liittyen seuraavasti (Bauersfeld 1992; myös Haapasalo 1994, 100):

- a) *Oppiminen* ei ole arvojen, normien tai objektiivisen tiedon siirtämistä tai vastaanottamista, vaan se on oman elämän järjestämistä koskeva prosessi, jossa yksilö on jatkuvassa vuorovaikutuksessa kulttuuriin sosiaalisten siteittensä ja aktiivisen osallistumisensa kautta.
- b) *Käsitteiden ja tiedon merkitys* sisältyy enemmänkin sosiaalisessa viestinnässä käytettyihin ilmauksiin kuin pelkkiin merkintöihin tai ulkoisiin symbolisiin esitystapoihin.
- c) *Kieli* merkitsee enemmänkin sosiaalista kommunikaatioväylää, jolla yksilö voi jakaa kokemuksensa ja tietämyksensä ja orientoitua samaan kulttuuriin muiden kanssa kuin suoranaista informaation ja merkitysten välittämistapaa.
- d) *Tietäminen ja muistaminen* tarkoittaa pikemminkin hetkellistä, kokonaisvaltaista kokemusten aktivoitumista kuin yksittäisten tietoelementtien hakemista muistista.
- e) *Matematiikka* on ennemminkin sosiaalisiin ja kulttuurisiin sopimuksiin pohjautuva kommunikoinnin muoto kuin ikuisten totuuksien universaalinen kokoelma.
- f) *Tiedon sisäinen esitys* syntyy pikemminkin niiden prosessien seurauksena, joita yksilö joutuu läpikäymään konstruoidessaan sosiaalisesti elinvoimaista tietoa ja välittäessään sitä muille kuin yrityksistä muodostaa itselleen kuvaa todellisuudesta tai annetuista tiedoista.
- g) *Opettaminen* merkitsee enemmänkin yritystä tarjota oppilaille mahdollisuuksia vuorovaikutteisiin ja reflektiivisiin prosesseihin, jotka luovat ja ylläpitävät opettajan ja oppilaiden keskinäistä työskentelykulttuuria kuin objektiivisesti koostetun tiedon siirtämistä ja esittämistä.

Vaikka sosiokonstruktivismi tarjoaakin hyödyllisen teoreettisen perustan tarkastella koulun matematiikan oppimista ja voi siten merkittävästi vaikuttaa matematiikan opetuksen uudistumiseen, niin se ei anna mitään suoranaista mallia matematiikan opettamiselle. Vaikka opettajat olisivat varmasti halukkaita saamaan luettelon sellaisista käyttäytymispiirteistä ja toiminnoista, jotka osoittaisivat, että he ovat 'konstruktivistisia' opettajia, niin tällaista valmista kokoelmaa ei ole olemassa (Pirie & Kieren 1992). On kuitenkin olemassa kohtuullisen paljon tutkimuskirjallisuutta, jossa on analysoitu sitä, millaista konstruktivismin ja sosiokonstruktivismin pohjalle rakentuva matematiikan opetus on luonteeltaan (ks. Cobb ym. 1990; Björkqvist 1998; Ernest 1992; Leino 1993; Neyland 1995; Simon 1995; Steffe & Wiegel 1992).

Kun matematiikka ymmärretään tietämisen tapana ja sosiaalisena konstruktiona, niin sillä on voimakkaita vaikutuksia matematiikan opetussuunnitelman tavoitteisiin, sisältöihin, lähestymistapoihin ja arviointiin sekä ennen kaikkea matematiikan opettajien uskomuksiin ja opetuskäytäntöihin. Tällaiselle matematiikkanäkemykselle on olennaista se, että matemaatti-

nen tieto muuttuu aivan kuten empiirisissä tieteissä. Tiettyinä ajan hetkenä matematiikka on pikemminkin sisäisesti hyväksyttyä kuin objektiivinen tietorakennelma. Toinen keskeinen piirre liittyy matematiikan kulttuuriseen kontekstiin. Näkemys, että matematiikka on olemassa ihmisen jokapäiväisistä toimista irrallisena, on vailla filosofista perustaa. Se on myös vahingollinen opetuksen ja kasvatuksen kannalta, sillä matematiikalla ei ole tällöin mitään sosiaalista vastuuta. Sen sijaan, jos matematiikka ymmärretään sosiaalisena konstruktiona, niin silloin matematiikan opetuksen tavoitteisiin tulee sisältyä se, että 1) *oppijoita vahvistetaan rakentamaan omaa matemaattista tietämystään*, 2) *koulun matematiikka on muotoiltavissa sellaiseksi, jonka käsitteisiin kaikilla oppilailla on mahdollista päästä käsiksi*, 3) *matematiikan käyttämisen sosiaalisia konteksteja ei heitetä syrjään, vaan matematiikan käyttötavat ja implisiittiset arvot tuodaan rehellisesti esille* (Ernest 1992).

Lähestymistavan tulee siis heijastua koulun opetussuunnitelmassa ja sen tulee myös ilmentyä opetuksessa ongelmalähtöisenä toimintana. Neyland (1995) ja Ernest (1992) ovat varsin seikkaperäisesti kuvanneet edellä mainittuja tavoitteita toteuttavan opetuksen luonnetta. Oppilasryhmä ajatellaan noviisimaisena matemaattisena yhteisönä, joka kasvaa ja kehittyy kohti 'eksperttiyhteisöä'. Tällöin eksperttiyhteisöllä ei tarkoiteta vain akateemista matemaatikkojen yhteisöä, vaan se koostuu kaikista niistä, jotka ovat kykeneviä käyttämään matematiikkaa sen eri muodoissa. Matematiikka esitetään integroituneena tietoverkkona ja ongelmakeskeisenä, tutkivana ja kriittisenä toimintana, jonka avulla oppilaat analysoivat ja lisärakentavat olemassa olevaa osaamistaan. Matematiikkaa opiskellaan elämänläheisissä konteksteissa, jotka ovat mielekkäitä ja merkityksellisiä oppilaiden kannalta. Näissä konteksteissa ovat näkyvillä oppilaiden kieli ja kulttuuri, heidän arkitoimintonsa ja koulukokemuksensa.

Matematiikan opettajalla on vastuu tämän prosessin avustamisesta ja tukemisesta. Prosessiin sisältyy esimerkiksi eksperttiyhteisön käsitteiden, lähestymistapojen, arvojen ja toimintamuotojen oppiminen samoin kuin sen seikan tunnistaminen, että mitkään näistä asioista eivät ole uudelleentarkastelun ja korjaamisen ulkopuolella. Prosessin aikana opitaan myös se tapa, jolla matemaattisia ideoita tarkastellaan, kuten myös tiedon yleistämisen ja päteväksi osoittamisen menetelmät. Kehittyntä teknologiaa käytetään täysitehoisesti hyväksi sekä vähentämään rutiinilaskentaan tarvittavaa aikaa että matemaattisten ideoiden tutkimisen välineenä.

Steffen ja Wiegelin (1992) mukaan konstruktivistisen opettajan keskeisin tehtävä on oppia tuntemaan oppilaidensa matemaattinen tietämys sekä oppia harmonisoimaan oma opetus oppilaiden tietämyksen kanssa. Leino (1993, 6–7) ilmaisee saman hieman laveammin toteamalla, että opettajan on otettava opetuksensa pohjaksi ainakin aihepiireittäin oppilaiden aikaisemmat kokemukset, hahmoteltava niiden kautta oppilaiden todennäköinen käsitysrakennelma aiheesta ja organisoitava sen muuntamis- ja täydentämismahdollisuuksia. Hänen mukaansa sosiokonstruktivismi korostaa oppilaan sosiaalisten tekijöiden muodostamia

rajoitteita ja mahdollisuuksia kokea jokin matemaattinen asia tai toiminta mielekkäänä ja toisaalta tarvetta päästä yleisesti hyväksytyihin merkintöihin. Hyvä konstruktivistinen opettaja on paitsi hyvä kuuntelija myös hyvä toiminnan tarkkailija ja ajattelutavan arvioija.

Cobb ym. (1990) katsovat, että matematiikan opettajalla on kaksi roolia, kun hän pyrkii kehittämään oppilaidensa käsitteellistä oppimista ja helpottamaan yhteiseksi koetun tietämyksen muodostumista luokkayhteisössä. Ensinnäkin luokan matemaattista keskustelua ohjaamalla opettaja voi saada synnytettyä matemaattista tietämystä, josta kaikki pääsevät osalliseksi. Tämän rinnalla on sitten toisenlaista keskustelua, jonka kautta muotoutuu luokan kannaltasopiva ja tuloksellinen matemaattinen työskentely. Sellaisen keskustelun seurauksena muodostuvat matematiikan työskentelyn sosiaaliset normit.

Simon (1995) on myös kuvannut sellaista matematiikan opetuksen prosessia, joka auttaa opettajaa suunnittelemaan opetuksensa sisältöä, muotoa ja oppimistehtävien etenemistä. Sen ominaispiirteet ovat seuraavat (Simon 1995, 141):

1. *Oppilaiden ajattelu ja ymmärtäminen tulee ottaa vakavasti ja ne on pidettävä keskeisesti esillä opetuksen suunnittelussa ja toteutuksessa. Oppilaiden ajattelun seuraaminen on jatkuva prosessi ja edellyttää siten alituista tiedon keruuta sekä oletusten tekemistä ja varmentamista.*
2. *Opettajien tietämys lisääntyy samanaikaisesti oppilaiden tiedon kasvun kanssa. Kun oppilaat oppivat matematiikkaa, niin opettaja oppii lisää matematiikasta, oppimisesta, opetuksesta ja oppilaidensa matemaattisesta ajattelusta.*
3. *Opetuksen suunnitteluun ajatellaan sisältyvän hypoteettisen 'oppimisradan' hahmottaminen. Tällöin opettajan tulee ennen kaikkea ottaa huomioon opetukselle asettamat tavoitteensa sekä oppilaiden oppimisprosesseja koskevan tietämyksensä.*
4. *Opettajan jatkuvasti muuttuva tietämys merkitsee jatkuvaa muutosta myös hänen hahmottamalleen hypoteettiselle oppimisradalle.*

Yksi tärkeä keino auttaa opettajia kehittämään uudenlaista näkökulmaa sille, kuinka luokkahuoneessa voisi toimia, on antaa heidän nähdä ja kokea sellaisia opiskelutilanteita, joiden tarjoamat oppimiskokemukset ovat riittävän vahvoja kyseenalaistamaan hyvinkin pitkän opetustradition. Opettajien tulee henkilökohtaisesti tunnistaa, että on mahdollista saada syntymään sellaista oppimista, jota he haluaisivat saada aikaan omissa opetusryhmissään. Heille täytyy myös antaa tilaisuuksia analysoida tällaisen oppimisen sisältämiä prosesseja, matematiikkaa ja luokkahuonetoimintoja. Sellaisten opetustilanteiden kautta, jotka ovat opettajille haasteellisia heidän oman matemaattisen osaamisensa tasolla, opettajat kykenevät kasvattamaan omaa matemaattista tietämystään, ja voivat kokea oppimisen syvyyttä ja iloa. Nämä tilanteet suovat opettajille itselleen mahdollisuuden kohdata matema-

tiikkaa konstruoinnin, tutkimisen ja miettimisen kautta eikä vain yleisesti hyväksyttynä, kumuloituvana ja valmiina tiedon rakennelmana. (Schifter 1996.)

Tähän lähestymistapaan liittyy myös omat ongelmansa (mm. Neyland 1995). Se edellyttää, että opettaja on tietoinen matematiikan eksperttisyhteisön yleisistä näkemyksistä, lähestymistavoista, asenteista ja prosesseista. Se ei silti tarkoita sitä, että opettajan olisi oltava teknisesti yhtä taitava kuin aktiivimatemaatikon. Niinikään saattaa olla verraten vaikeaa soveltaa 'noviisisyhteisön' käsitettä nuoriin oppilaisiin, joilta puuttuu vielä pienoisyhteisönä toimimisen edellyttämiä sosiaalisia taitoja. Kaikesta huolimatta opettajat voivat omaksua yleisluontoisen sosiokonstruktivistisen lähestymistavan näiden oppilaiden oppimisen tarpeisiin ja tämän lähestymistavan tulisi perustua joustavampaan ja vähemmän normeja antavaan opetussuunnitelmaan.

Opettajien muuttunut rooli velvoittaa myös siihen, että he kartuttavat tietämystään matematiikasta, oppimisesta, opetusmenetelmistä sekä matematiikan merkityksestä nyky-yhteiskunnassa. Opettajat ovat nyt uudessa asemassa, jossa heidän on otettava vastuuta kaikista yhteiskunnan heille antamista tehtävistä. Aiemmin opettajat luottivat koulutusinstituution auktoriteettiin: ilmaisut "asia on oppimäärässä" tai "tätä tullaan kysymään ylioppilastutkinnossa" ovat kuvaavia. Nyt opettajien auktoriteetti lepää heidän oman tietämyksensä ja asiantuntemuksensa varassa. He tarvitsevat laajempaa tietämystä ja vankkaa asiantuntijuutta tehdäkseen valintoja tarjolla olevien vaihtoehtojen välillä. Valintoja tehdessään opettajat joutuvat toistuvasti vastaamaan seuraaviin kysymyksiin: Miksi tämä asia on tarpeen oppia? Mikä siinä on keskeistä? Miten nämä keskeiset ideat voidaan esittää? Millä järjestelyillä päästään parhaaseen oppimiseen?

3.2.3 Behavioristisen tradition horjuttaminen ei ole helppoa

"Pedagogues and general didacticians judge mathematics to be their most appropriate victim. Indeed in mathematics you can isolate and enumerate all concepts in order to have them trained systematically one by one ... as far as you want to go. It is a caricature of mathematics which is quite common. Therefore no subject is as exposed to ruin by atomism as is mathematics". (Freudenthal 1978, 97.)

Hieman kärjistäen voidaan sanoa, että behavioristinen ja konstruktivistinen traditio edustavat vielä tälläkin hetkellä matematiikan opetusajattelun kahta valtasuuntausta. Behaviorismin sijasta on sittemmin alettu puhua empiristisestä oppimiskäsityksestä (mm. Bishop 1992; von Wright 1992). Opettajien ajattelussa nämä lähestymistavat ovat useimmiten sekoittuneet toisiinsa muodostaen hyvin erilaisia yhdistelmiä. Behavioristiset lähestymistavat ovat olleet laajalti käytössä matematiikan opetuksessa edellisillä vuosikymmenillä, kun taas (socio)konstruktivismiin pohjaava lähestymistapa on tutkimuksen tukemana vähitellen

lisääntynyt. Tällä hetkellä matematiikan opettajat ovat yhä selvemmin havaitsemassa jännitteen, mikä vallitsee behavioristisen ja uuden oppimiskulttuurin välillä. Koska on todennäköistä, että opettajien uskomukset ja opetuskäytännöt alkavat tiettyssä vaiheessa heijastella vallitsevaa ideologiaa (Neyland 1995), niin tämän tutkimuksen kannalta on olennaisen tärkeää tarkastella hieman lähemmin näiden traditioiden välistä suhdetta.

Behavioristisessa katsannossa matematiikkaa tarkastellaan absoluuttisena tietorakenteena, mikä ilmenee siten, että sisältö on jaettu hallittavaksi tehtäväjonoksi ja opittaviksi faktoiksi. Kiinnostuksen kohde on siinä, mitä oppilaat osaavat tehdä, eikä niinkään siinä, mitä ymmärretään ja mikä merkitys opitulla on. Tästä seuraa monia ongelmia. Kun opetuksessa ylikorostetaan tietojen ja taitojen rutiinuituotantoa, niin ymmärtäminen kärsii väistämättä, kuten Clements ja Ellerton (Neyland 1995, 129) toteavat:

“The main agenda of many students was to try to look for words, symbols, diagrams and sequences of actions (on a calculator, for example) that would help them get right answers. Such students are not really worried if they fail to understand what the teacher is getting at – they believe that if they can get the correct answers, then they understand.”

Matematiikan objektiivisuuteen, varmuuteen ja täydellisyyteen pohjautuva käsitys matematiikasta on synnyttänyt tietynlaisen opettamisen mallin. Burtonin (1989) mukaan tätä opettamisen mallia voidaan kuvata yhdellä tai kahdella mielikuvalla. Kysymys on joko "tyhjän astian täyttämisestä" eli tiedon siirtämistä opettajalta oppilaalle tai "sipulinkuorisesta" eli aikaisemmin löydettyjen asioiden paljastamisesta oppilaalle. Monet opettajat käyttävät kuitenkin yleensä näiden yhdistelmää eli ensin pyritään 'siirtämään' tiedot ja taidot ja sitten autetaan hitaampia oppilaita uudelleen omaksuma opetetut asiat. Opetustapaan liittyy olennaisesti oikeellisuuden voimakas painottaminen sekä ratkaisun että menetelmän kohdalla.

Tällaisen opetustavan säilymistä on tukenut selkeästi määritelty opetussuunnitelma, jonka toteutumista on arvioitu sisältöpainotteisilla kokeilla ja tutkinnoilla. Opetussuunnitelmaan on ollut vaikeaa – ellei jopa mahdotonta – kirjoittaa mielekkäitä opetusprosessia kuvaavia tavoitteita, koska matemaattiset sisällöt on edellytetty ilmaistavan mitattavien käyttäytymistuotosten kielellä. Opetussuunnitelmat ovat pääosin koostuneet käyttäytymistavoitteista, jotka koskevat matematiikan opetuksen yksinkertaisia tavoitealueita – erityisesti menetelmätaitoja. Monia tärkeitä ja kiinnostavia matemaattisia tavoitteita ja sisältöjä on jätetty pois opetussuunnitelmista sen vuoksi, että ne eivät sovi yhteen tiettyjen ennakkokäsitysten kanssa siitä, kuinka matematiikkaa tulee opettaa. Ritchie ja Carr (1992) väittävät myös, että matematiikan ehdottomuutta korostavat uskomukset yhdessä perinteisten opetustekniikoiden kanssa johtavat siihen, että opettajat eivät onnistu rakentamaan opetustaan yhdelle tärkeimmistä oppimisen lähtökohdista, nimittäin oppilaan intuitiiviselle tietä-

mykselle. Kaiken kaikkiaan tällainen formaalinen opettamisympäristö korostaa yksittäisiä menetelmiä ja yksittäisiä ratkaisuja sekä vastausten oikeellisuutta (Burton 1989).

Tästä matematiikan opetuksen muodosta käytetään myös nimitystä *suora opetus* ja sitä on tutkittu varsin paljon (mm. Good & Grows 1978; Peterson ym. 1984). Se rakentuu seuraavista osista: *johdanto, uuden asian käsittely, yhteinen ohjattu harjoittelu ja yksilöllinen harjoittelu*. Opetustavan perustana ovat seuraavat olettamukset (Confrey 1990, 112):

1. *Oppilailta odotetaan verraten lyhyitä vastauksia ja tuotoksia, ei mitään prosessia kuvaavia ilmauksia. Oppilaiden kotitehtävät ja koevastaukset katsotaan riittäviksi opetuksen onnistuneisuuden arvioinnissa.*
2. *Opettajat voivat toteuttaa suunnitelmansa ja opetustoimenpiteensä sellaisenaan, kunhan vaan tarkistavat riittävän usein sen, että oppilaiden vastaukset ovat tiettyjen rajojen sisällä ja opettavat asiat uudelleen silloin, kun nuo rajat ylittyvät.*
3. *Opettajan vastuulla on määrittää se, milloin riittävä ymmärtämisen raja on saavutettu.*

Matematiikan oppitunti alkaa tavallisesti oppikirjan tehtävien tarkastamisella, mitä seuraa opettajan esitys uudesta sisältökohdasta. Tämän jälkeen oppilaat tekevät oppikirjan tehtäviä ja jatkavat samaa työskentelyä vielä kotitehtävien muodossa. Näin ollen tekstillä ja oppikirjalla on suuri auktoriteetti luokassa. Lermanin (1993) mukaan opettajat ja oppilaat eivät aseta kyseenalaisiksi niitä sosiaalisia viestejä, joita teksteihin ja kirjoihin sisältyy. Erityisesti matematiikan kohdalla tämä voi hänen mielestään johtua siitä, että yliopistomatematiikan tekstien steriili ja aksiomaattinen muoto vahvistaa oppikirjan tekstien auktoriteettia ja statusta.

Tutkimukset ovat osoittaneet, että suora opetus ei tarjoa riittävää perustaa oppilaiden matematiikan oppimiselle. Esimerkiksi virhekäsityksiä koskeva tutkimus (mm. Clement 1982; Vinner 1983) on paljastanut, että suora opetus tuottaa runsaasti eri oppilasryhmille ja eri sisältöalueisiin liittyviä virhekäsityksiä. Samalla nämä virhekäsitykset näyttävät olevan hyvin vastustuskykyisiä perinteisille matematiikan opetuksen muodoille. Suoraan opetukseen liittyvät pedagogiset prosessit kieltävät myös yksilön ja sosiaalisen kontekstin vaikutuksen ja luovat Burtonin (1989) mukaan tekaistun varmuuden, eksaktisuuden ja objektiivisuuden maailman, jossa valta ja kontrolli ovat keskeisiä tekijöitä. Hän varoittaakin, että "jos me hyväksymme oikeaksi matematiikan opetuksen mallin, joka on 'henkilöity' eli lepää tietämisen ja ekspertiyden varassa, me vahvistamme hierarkkista yhteiskunnallista ajattelua ja varmistamme sen, että suurin osa yhteiskunnan jäsenistä ei tunne mitään kiinnostusta matematiikkaa kohtaan" (Burton 1989, 18).

Koska empirististä oppimiskäsitystä vastaan on esitetty hyvinkin voimakasta kritiikkiä, niin on aiheellista kysyä, miksi se on ollut niin suosittu ja miksi se edelleenkin pyrkii menemään kokonaisvaltaisempien ja monimuotoisempien lähestymistapojen edelle? Skemp (1976) on jo 1970-luvulla esittänyt kolme ilmeistä etua, joita oppimissääntöihin pohjaavalla matematiikan opetuksella ajateltiin olevan. Analysoidessaan näitä etuja hän kuitenkin totesi, että ne olivat suurimmalta osalta illusorisia (Skemp 1976).

- 1) *Sääntöoppiminen on usein helpompaa kuin ymmärtämiseen tähtäävä oppiminen. Esimerkiksi on helpompi oppia sääntö kahden negatiivisen luvun kertolaskulle, kuin ymmärtää siihen sisältyvät käsitteet.*
- 2) *Koska sääntöoppiminen on helpompaa, niin oppilaat voivat kokea onnistumisia välittömämmin.*
- 3) *Koska säännön oppimiseen sisältyy vähemmän tietoa, niin vastaukset voidaan saada nopeammin ja luotettavammin sääntöjen avulla.*

Tulosvastuuajattelulla on varmasti ollut merkittävä vaikutus behavioristisen opetustavan sitkeään säilymiseen. Kun opettajia vaaditaan esittämään ulkopuolisille tahoille, että he opettavat opetussuunnitelman mukaiset asiat, ja että oppilaat oppivat asetettujen tavoitteiden mukaisesti, ei ole helppoa lähteä muuttamaan opetusta. Siten ei ole mikään ihme, että tällaisten vaatimusten alla opettajat turvautuvat reduktionistisiin ja behavioristisiin lähestymistapoihin ja soveltavat opetukseensa peukalosääntöä: 'ellet pysty mittaamaan asiaa, niin älä opeta sitä' (Neyland 1995). Säilymistä tukee osaltaan myös se, että monilla matematiikan opettajilla ei ole riittävän syvällistä oman aineen tuntemusta, ja että suuri osa opettajista vahvasti yliarvostaa matematiikan opetuksen hierarkkista ja kumuloituvasti rakentuvaa etenemistä.

Aivan ilmeisesti myös niillä uskomuksilla, joita opettajilla on matematiikasta ja sen oppimisesta ja opettamisesta, on oma tärkeä merkityksensä tällaisen opetustavan pysyvyydelle. Battistan (1992) mukaan kysymys ei ole siitä, että opettajat olisivat välinpitämättömiä oppilaiden matematiikan oppimisen suhteen. Opettajat toimivat tällä tavoin siksi, että heillä on kapeutuneet ja erheelliset uskomukset matematiikan luonteesta ja nämä uskomukset 'säätelävät' heidän opetustyötään. Koska opettajat haluavat varmistaa, että heidän oppilaansa osaavat suorittaa vaadittavat matemaattiset tehtävät, he helposti kapeuttavat opetussuunnitelmaa ja opetustaan. Tähän kysymykseen palataan lähemmin tutkimuksen empiirissä osassa.

Monien tutkijoiden tapaan Ernest (1991, 236) pitää tällaista opetuksen lähestymistapaa mahdottomana todetessaan, että "matematiikan oppisisältöä ei ole mahdollista esittää pelkästään molekulaaristensisältöyksiköiden joukkona, koska sellainen esittämistapa kieltää

sisältöjen väliset rakenteelliset yhteydet ja kadottaa niiden kontekstisidonnaiset merkitykset”.

3.3 Peruskoulun matematiikan opetussuunnitelman ja opetuksen kehityslinjoja Suomessa

Käsillä olevassa tutkimuksessa – aivan kuten useissa matematiikan arviointitutkimuksissa – opetussuunnitelmaa tarkastellaan kolmitasoisena (Kangasniemi 1989; Travers & Westbury 1989). Ensimmäisen tason muodostaa *kirjoitettu (tarkoitettu) opetussuunnitelma* (the written or intended curriculum), joka koskee yleensä koulutusjärjestelmän tasoa, sen päämääriä, tavoitteita ja sisällöllisiä linjauksia (vrt. Kouluhallitus 1985; Opetushallitus 1994). Kun koulut nykyisin itse laativat oman opetussuunnitelmansa, on niissä mahdollista ja tarpeellista selvittää oman koulun vahvuuksia ja sisällöllisiä painotuksia, resursseja (esim. opettajat, oppikirjat, laitevarustus jne.), toiminta- ja työskentelymuotoja ja kehittämistarpeita. Vasta tällöin varsinaisesti muotoutuu tarkoitettu opetussuunnitelma, jota koulut sitten toteuttavat edellytystensä mukaisesti (Kangasniemi 1989). Kouluyhteisön sisällä tapahtuva toiminta muodostaa *toimeenpannun opetussuunnitelman* (the implemented curriculum), joka tällä hetkellä voi saada erilaisia muotoja. Tällä tasolla on kysymys mm. opetuksen suunnittelusta ja toteutuksesta opetusryhmän olosuhteisiin sovitettuna. Opettajat rakentavat kullekin opetusryhmälle sopivan, oman opiskelusuunnitelman. Tällöin nousevat esille esimerkiksi tärkeät kysymykset opetuksen lähestymistavoista sekä tavoitteiden ja sisältöjen painotuksista. Mallin kolmas taso eli oppilaiden taso käsittää *toteutuneen opetussuunnitelman* (the attained curriculum) oppilaiden opiskelukokemuksina ja oppimistuloksina. Tämä taso voidaan myös ymmärtää kaksijakoisena, jolloin oppilaiden ’aikoma oppiminen’ muodostaa yhden tason ja taas todelliset tuotokset toisen.

Luvussa 3.2 kuvatun kansainvälisen perspektiivin täydennykseksi tässä luvussa tarkastellaan suomalaisen matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman kehityksellisiä vaihteita. Tarkastelu aloitetaan lyhyellä historiallisella katsauksella (luku 3.3.1). Tämä on tärkeää, koska monilla matematiikan opetuksen periaatteilla ja toimintamuodoilla – ja siten myös *uskomuksilla* – on lähtökohtansa peruskoulua edeltävällä aikakaudella. Tarkastelussa keskitytään kuitenkin peruskoulun olemassaolon aikaan ja opetuksen kehityspiirteitä kuvataan aina 1990-luvun puoliväliin saakka. Opetussuunnitelmalla on suomalaisessa koulutusjärjestelmässä hyvin keskeinen asema. Koska opettajat ovat viime kädessä opetussuunnitelman toimeenpanijoita, on matematiikan opetussuunnitelmallisen kehityksen ja muutoskohtien tunteminen tärkeää. Näitä käsitellään luvussa 3.3.2. Luvussa 3.3.3 esitetään yhteenvetoa peruskoulun matematiikan opetuskäytännöistä ja oppimistuloksista aikavälillä 1979–1995. Luvussa 3.3.4 tarkastellaan vielä lyhyesti matematiikan oppimistuloksiin vaikuttavia tekijöitä erityisesti rakennemalleja hyväksi käyttäen.

3.3.1 Matematiikan opetuksen lyhyt historia

Matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman historiallisesta kehityksestä Suomessa on varsin niukalti tutkimustietoa. Kirjoittaja pohjaa seuraavan lyhyen kuvauksensa aihetta käsitelleisiin teoksiin ja artikkeleihin (Junnila 1995; Malmio 1937) ja muutamaa tutkimukseen (Kiuasmaa 1982; Rinne 1984). Erityisesti Malmion perinpohjainen artikkeli ja Junnilan historiateos muodostavat perustan tälle katsaukselle. Luvun tarkoituksena on antaa lukijalle kuvaa yhtäältä suomalaisen matematiikan opetuksen historiallisesta taustasta ja toisaalta niistä toimintamuodoista ja perinteistä, jotka ovat vaikuttamassa uskomuksiimme matematiikasta ja sen opetuksesta myös tänä päivänä.

Keskiajalta autonomian kauden loppuun

Laskennon opetuksella oli 1500-luvun lopulla vielä hyvin vähäarvoinen asema maamme oppikouluissa klassisten kielten ja uskonnon pitäessä valta-asemaa oppiaineiden joukossa. Myös kansalaisten laskutaito oli niin puutteellinen, että Ruotsin kuninkaan oli pakko pyytää Saksasta laskutaitoista miestä ”opettamaan algoritmia valtion virkamiehille” (Malmio 1937, 146). Niinpä matematiikan opetuksen maamme kouluissa voidaan katsoa alkaneen vasta Turun lukion perustamisesta vuonna 1630. Matematiikan kurssissa opetettiin aritmeettiikkaa, geometriaa, algebraa, kirkollista ajanlaskua ja matemaattista maantietoa. Kurssi vastasi lähimain sitä oppimäärää, mikä luettiin esimerkiksi Saksan kouluissa. Ajan matemaattiselle ajattelutavalle oli kuvaavaa se, että kun oli kysymys algebrallisista luvuista, niin ne aina ajateltiin geometrisina suureina ja säännöt yhtälöiden ratkaisemiseen saatiin geometristen probleemojen ratkaisuksista.

Turun lukiossa käytetyn matematiikan oppikirjan sisällys oli melko runsas ja esitys hyvin kaavamainen. Ensin esitettiin laskutavan määritelmä, sitten siihen liittyvä esimerkki, joka laskettiin, ja lopuksi pari esimerkkiä ilman ohjeita. Kaavan johto tai selvitys siitä, miksi niin pitää laskea, puuttuivat kokonaan. Oppilaiden oppimistulokset olivat myös heikot, sillä oppikirjat olivat latinankielisiä ja opetus oli määrättyjen laskusääntöjen ja kaavojen sellaiseen ulkoa opettelua ilman minkäänlaisia perusteluja tai selityksiä. Sovellutukset olivat useinkin vailla käytännöllistä merkitystä sisältäen hyvinkin kummallisia määrättyllä kaavalla ratkaistavia kohtia.

1600-luvun koulujärjestykset supistivat jossain määrin matematiikan opetusta ja esimerkiksi triviaalikouluissa opetettiin käytännön laskutaitoa ainoastaan kirjuri luokalla. Isonvihan jälkeen maamme joutui kahden valtion hallintaan ja sen seurauksena kouluolot joutuivat erilaisten vaiheiden alaisiksi. Vanhassa Suomessa oli voimassa Ruotsin vuonna 1724 annettu koululaki, minkä mukaan triviaalikoulussa opetettiin luvunlaskua vain kahdella luokalla 2 tuntia viikossa. Määrä oli pieni, kun viikon työ käsitti kaikkiaan 38 tuntia. Itä-osa

Suomea, mikä joutui Venäjän vallan alle, jäi aluksi kokonaan oppikouluja vaille. Kouluolot paranivat vasta sitten, kun Viipurin lääni tuli vuonna 1803 Tarton yliopiston opetuspiiriin. Siitä lähtien ns. piirikouluissa opetettiin aritmetiikkaa jo 4 tuntia viikon 32 oppitunnista. Opetuksesta säädettiin muun muassa, että sen tuli kohottaa oppilaan laskutaito mekaanisen taidon yläpuolelle. Kaiken kaikkiaan “matematiikan opetus pyrittiin järjestämään tieteelliselle pohjalle, ja sille annettiin niinmuodoin arvo ajatusta kehittävänä oppiaineena” (Malmio 1937, 148).

Matematiikan asema oppisuunnitelmissa säilyi ennallaan aina 1840-luvulle saakka. Vasta vuosien 1841 ja 1843 koulujärjestykset merkitsivät matematiikan aseman korostumista, kun aineelle tunnustettiin oma kasvatusopillinen tehtävänsä opetuksessa (Junnila 1995). Neliluokkaisessa yläalkeiskoulussa opetettiin aritmetiikkaa ja geometriaa 4 tuntia kullakin luokalla. Myös kaksiluokkaisessa lukiossa oli matematiikkaa 4 tuntia molemmilla luokilla, mutta jo vuoden 1847 tuntijaossa otettiin ylemmältä luokalta kaksi tuntia kielten hyväksi. Tyttökoulut olivat kaksiluokkaisia ja niissä opetettiin ainoastaan neljä laskutapaa kokonais- ja murtoluvuilla sekä yksiehtoinen päätöslasku. Tuona aikana ilmestyneet oppikirjat olivat aikaisempaa yhtenäisempiä ja niissä esitettiin useinkin säännöille tieteelliset perustelut. Esimerkiksi J.J. Nervanderin oppikirja *Kurs i arithmetiken* vuodelta 1844 sisälsi sääntöjä ja lausemia, jotka todistettiin (Malmio 1937). Suomenkielisten koulujen perustamisen myötä oli saatava myös suomenkielisiä oppikirjoja, minkä lisäksi oli luotava myös suomenkielinen matemaattinen sanasto. Esimerkiksi, kun Elias Lönnrot julkaisi laskuoppinsa Mehiläisessä vuonna 1839, oli hän ensin joutunut luomaan monia matemaattisia termejä. Yhteenlaskusta Lönnrot käytti nimitystä *luotto*, vähennyslasku oli *otto* ja nolla oli *tyhjykkä* (Sorvali 1991). Ensimmäisiä suomalaisia aritmetiikan oppikirjoja olivat J.F. Wallinin *Luvunlasku eli Räkinki-Kirja Suomalaiselle Talonpojaalle* vuodelta 1835 ja A.E. Boreliuksen *Luvunlaskun oppikirja* vuodelta 1844 (Malmio 1937).

Vuosien 1873 ja 1883 lukusuunnitelmissa matematiikka sai entistäkin paremman aseman ja suuremman tuntimäärän. Esimerkiksi 5-vuotisissa reaalkouluissa (entisissä oppikouluissa) opetettiin aritmetiikkaa, algebraa ja trigonometriaa 22 tuntia ja geometriaa sekä kuvioden muoto-oppia 19 tuntia viikossa eli yhteensä 41 tuntia viikossa. Itse asiassa tuntimäärät olivat tuolloin suurimmat, mitä matematiikalla on lukusuunnitelmissa tai opetussuunnitelmissa koskaan ollut. Myös tyttöjen osalta matematiikan opetus muuttui perusteellisesti, kun tyttökoulut vuonna 1885 muuttuivat viisiluokkaisiksi. Tyttökoulun I–III luokalla opetettiin täydellinen aritmetiikan kurssi, minkä lisäksi luettiin lyhyt tasogeometrian kurssi sekä algebran alkeet. Seuraavien parinkymmenen vuoden aikana osa oppitunneista jouduttiin kuitenkin luovuttamaan venäjän kielelle ja vuoden 1916 opetussuunnitelma romahdutti jälleen matematiikan tuntimäärän (Junnila 1995). Vuosisadan alulle oli myös tyypillistä kasvatusopillinen ajattelu, joka pyrki poistamaan kouluopetuksesta ulkoluvun ja painottamaan enemmän älyn ja ajattelutoiminnan kehittämistä. Näitä periaatteita pyrki mm.

E. Elo toteuttamaan aritmetiikan oppikirjassaan vuodelta 1912. Kirjan esitystapaa on Malmio kuvannut seuraavasti:

“Siinä laskusäännöt johdetaan aikaisemmista määrättyjen peruslauseitten ja ennen kehitettyjen lausemien avulla ja nojalla. Näin saa esitys ajatusta kehittävän muodon päätyen lopulta sääntöön tai kirjaimilla esitettyyn kaavaan, joka käytännöllisessä laskutyössä, esim. korko- ja prosenttikysymyksiä ratkaistaessa nopeasti johtaa tulokseen. Paitsi käytännöllistä laskutaitoa saa oppilas näin ollen käsityksen eri laskutapojen keskinäisestä yhteydestä ja eri sääntöjen riippuvaisuudesta toisistaan kehittyen samalla tarkkaan deduktiiviseen ajatusaskarteluun”. (Malmio 1937, 159–160.)

Itsenäisyyden aika peruskoulun alkuun saakka

Matematiikan aseman heikentyminen autonomian kauden lopussa ja maan itsenäistymisen ensi vuosina johtui siitä, että osa kasvatusoppineista väheksyi aineen merkitystä ja vaati lukioon jopa linjaa, jolla matematiikkaa ei olisi ollut lainkaan (Junnila 1995). Kaikkein kriittisimmät matematiikan vastaiset äänenpainot vaimenivat kuitenkin 1920- ja 1930-lukujen taitteessa opetuksen asteittaisen uudistumisen ja yhteiskunnan teknistymisen myötä. Esimerkkinä uudistamispyrkimyksistä voidaan mainita professori S. Johanssonin vuonna 1927 valtioneuvostolle jättämä hyvin perusteellinen esitys matematiikan opetuksen uudistamisesta. Tämä esitys ei johtanut kuitenkaan toimenpiteisiin, vaikka opettajat olivat valmiita opetuksen uudistamiseen. Myönteinen asennoituminen tuotiin esille mm. opettajapäivien kannanotoissa, joissa matematiikan opetuksen tarkoituksiksi määritettiin oppilaiden harrastuneisuuden herättäminen. Muiksi tavoitteiksi todettiin loogisen ajattelun kehittäminen, täsmällisyyteen kasvattaminen, elämässä välittömästi tarvittavien tietojen ja taitojen antaminen sekä perustan luominen jatko-opintoja varten. Keinoiksi tavoitteiden saavuttamiselle esitettiin selkeää, elävää, mielenkiintoista ja havainnollistavaa opetusta. (Junnila 1995, 26–27)

Eräissä 1930-luvun kirjoituksissa pohdittiin myös matematiikan opiskelun vaikeutta suhteessa muihin oppiaineisiin ja opettajan merkitystä opiskelun edistäjänä. Junnila (1995, 25) on kuvannut tätä opettajan raskasta ja vaativaa tehtävää seuraavasti:

“Aina oppilas ei kuitenkaan luokassa kohdannut vireää, tehtävänsä tunnollisesti paneutuvaa ja aineensa kehitystä seuraavaa kasvattajaa, vaan pahimmassa tapauksessa suuren tuntimäärän uuvuttaman, oppikirjoihin ja omaksumiinsa teorioihin perin sidoksissa olevan, lukuvuodesta toiseen samoja sisältöjä konemaisesti toistavan henkilön.”

Vasta vuoden 1941 oppikoulun opetussuunnitelmassa tähdättiin koulun sisäiseen uudistamiseen ja päätaavoitteeksi asetettiin kasvatus- ja opetustyön yhtenäistäminen. Matematiikan osalta tämä merkitsi kokonaisvaltaista tavoite- ja sisältöohjelmaa, joka korosti johdonmukaista ajattelua ja suunnitelmallista työskentelyä. Myös oppisisältöjen painotuksissa tapahtui joitakin muutoksia.

Sodan jälkeen koko koululaitoksella oli edessään suuria haasteita. Käytännön sovellustensa myötä matematiikka alkoi myös saada arvoa suuren yleisön keskuudessa. Niinpä matemaattisten aineiden kohdalla oli kartoitettava ne odotukset, joita yhteiskunta ja sen eri ryhmät asettivat opetukselle. Oli huolella puntaroitava, mitä muutoksia opettajanvalmistukseen, koulujen varusteluun ja aineiden sisältöihin oli tehtävä, jotta koulut ja opettajat pystyisivät vastaamaan ajan vaatimuksiin. 1940- ja 50-lukujen matematiikan opetuksessa ja sen kehittämisessä kahdella henkilöllä oli hyvin keskeinen rooli. Jo sodan aikana kouluneuvos Niilo Kallio oli tähdentänyt koululaitoksen merkitystä yhteishengen synnyttämisessä ja matemaattisten aineiden opettajien panosta taloudellisen ajattelun levittämisessä. Kallion mielestä matemaattisten aineiden opettajilla oli asiassa suuri vastuu, sillä muissa aineissa ei kyetty yhtä tehokkaasti kehittämään oppilaiden taloudellista vaistoa, suunnitelmallisuutta ja yleensä ominaisuuksia, jotka edistäisivät säästäväisyyttä ja kansan kykyä kohottaa taloudellista tilaansa (Junnila 1995, 38). Kallio oli myös ahkera oppikirjojen tekijä ja hänen kirjansa olivat laajalti käytössä.

Yksi sotien jälkeisten vuosikymmenten merkittävimpiä matematiikan opetuksen uudistajia oli professori Kalle Väisälä. Hän otti muun muassa voimakkaasti kantaa vuoden 1941 oppiennätyksiin ja tämä herätti vilkasta keskustelua matematiikan opetuksen piirissä. Esittämänsä linjaukset ja sisällölliset painotukset hän sisällytti 1940-luvun jälkipuoliskolla julkaistuihin oppikirjoihin. Algebran oppi- ja esimerkkikirja -sarja ilmestyi vuodesta 1945 alkaen ja Geometria -oppikirjan ensimmäinen osa vuonna 1948. Nämä 'klassikkojen' maineen saaneet oppikirjat muodostivat oppikoulun matematiikan opetuksen rungon 1950- ja 60-luvuilla.

Ensimmäisen Sputnikin laukaisemisen jälkeen vuonna 1957 heräsi USA:ssa ja Länsi-Euroopassa laaja kiinnostus matematiikan opetuksen uudistamiseen. Sen seurauksena OECD järjesti vuonna 1959 Royamontissa koulumatematiikan konferenssin, josta sai alkunsa voimakas uudistusprosessi. Pohjoismaiden neuvosto asetti 1960 Pohjoismaisen matematiikan opetuksen uudistamistoimikunnan (PMOU) ja se sai tehtäväkseen määrittää matematiikan opetuksen tavoitteet ja sisällöt 12-luokkaisessa yleissivistävässä, peruskoulun ja lukion käsittävässä koulussa. Toimikunta järjesti runsaasti seminaareja ja kokeilutoimintaa. Se laaditti kokeilutekstejä sekä kartoitti poistettavat vanhentuneet sisällöt ja uusien sisältöjen aiheet. Samalla täytyi määrittää kanta niihin uusiin sisältöihin, joita muissa Pohjoismaissa suosittiin. Toimikunnan loppuraportti *Nordisk skolmatematik* valmistui vuonna 1967 ja se muodosti pohjan matematiikan opetuksen uudistamiselle kaikissa

Pohjoismaissa. Tämän raportin periaatteille rakentui peruskoulun matematiikan opetussuunnitelma, joka paremmin tunnetaan nimellä 'uusi matematiikka'.

3.3.2 Joukko-opista ongelmanratkaisuun – peruskoulun matematiikan opetussuunnitelmalliset vaiheet 1970–1998

Seuraavaan katsaukseen peruskoulun matematiikan opetussuunnitelmakehityksestä sisältyy kaksi näkökulmaa. Ensinnäkin se tarkastelee opetussuunnitelmaa erityisesti soveltamisen, ongelmanratkaisun ja mallintamisen kannalta ja pyrkii kuvaamaan tässä suhteessa tapahtuneita opetussuunnitelman muutoksia neljännesvuosisadan aikana. Tämä näkökulma korostaa opiskeltavan matematiikan käytön merkitystä ja on tällä hetkellä entistä ajankohtaisempi matematiikan opetuksen tavoitteena. Toiseksi kirjoittaja haluaa analysoinnin avulla painottaa suomalaisen ja kansainvälisen opetussuunnitelmakehityksen välistä kiinteää suhdetta. Katsaus perustuu lukuisiin alan kotimaisiin julkaisuihin (mm. Haapasalo 1985; Haapasalo & Kupari 1991; Leino 1984, 1987; Malaty 1986; Malinen 1977, 1986; Pehkonen 1985). Kirjoittaja on kuvannut aihetta perusteellisemmin englanninkielisessä julkaisussaan (Kupari 1994).

Vuodesta 1970 lähtien peruskoulun matematiikan opetussuunnitelman kehitykseen sisältyy neljä selkeää vaihetta. *Ensimmäinen vaihe* osui 1970-luvun alkuun, jolloin meillä uudistui samanaikaisesti sekä koko koulujärjestelmä että matematiikan opetus (Komiteanmietintö 1970). Amerikkalaisen esikuvansa mukaan käyttöön otettiin nimitys "*uusi matematiikka*" (New Math). Opetuksen uudistuksella tähdättiin siihen, että ymmärtämiseen pohjautuvan opettamisen kautta oppilaiden matemaattinen ajattelu kehittyisi saumattomasti ensimmäisestä luokasta alkaen. Muutos aikaisempaan näkyi mm. siinä, että koulumatematiikan kolmijako aritmetiikkaan, algebraan ja geometriaan poistettiin. Samalla useita algebrallisia ja geometrisia oppisisältöjä siirrettiin alemmille luokka-asteille. Sisällöissä painottuivat joukko-oppi, logiikan perusteet ja funktion käsittely. Geometriassa luovuttiin deduktiivisesta todistusperinteestä.

Opetussuunnitelmassa ongelmanratkaisu- ja soveltamistaitojen edistämistä pidettiin jo tuolloin tärkeinä tavoitteina. Oppilaiden kvantitatiivisen ajattelun kehittymisen kannalta ongelmanratkaisua pidettiin avainasemassa, koska siinä heijastuu lapsen kyky käsittää reaali maailman tilanne, käyttää hyväksi opittua ja soveltaa sitä. Erityisesti teknisen korkeakoulutuksen suunnasta korostettiin malliajattelun tärkeyttä koulumatematiikassa. Eräät asiantuntijat arvioivat tuolloin optimistisesti, että uuden matematiikan opetus laajentaisi oppilaiden taitoja ongelmanratkaisussa. Näihin tavoitteisiin katsottiin päästävän siten, että runsaan oppiaineuksen esittämisen sijasta painotettaisiin enemmän formaaleja tavoitteita. Käytännössä tähän ei kuitenkaan päästy.

1970-luvun alkupuoliskon koulukoetoinnin tulokset paljastivat, että matematiikan opetussuunnitelma oli liian laaja käytettävissä olevaan opetustuntimäärään nähden, mikä oli peruskouluun siirryttäessä pienentynyt aikaisemmasta. Myös 'spiraaliperiaate' välittyi opetussuunnitelmassa puutteellisessa muodossa: pelkkä oppiaineksen pilkkominen sirpaleiksi johti varsin pinnalliseen oppimiseen. Niinikään oppikirjat ja sovellustehtävät saivat voimakasta arvostelua osakseen. Arvioissa kritisoitiin etenkin tehtävien keinotekoisuutta ja oppikirjojen kaavasidonaisuutta (mm. Kuuskoski 1974; Lokki 1974; Malinen 1971). Näihin puutteisiin haettiin korjausta, kun vuosina 1975–76 määriteltiin matematiikan opetuksen perustavoitteet ja perusoppiaines (Kouluhallitus 1976). Se oli vastareaktio uudelle matematiikalle: "joukko-oppihysterian" jälkeen palattiin takaisinpäin perustaitoihin.

Tästä matematiikan opetussuunnitelmakehityksen *toisesta vaiheesta* käytettiin nimitystä "*takaisin perusteisiin*" (Back to Basics) ja sen tarpeellisuudesta oltiin meillä yleensä verraten yksimielisiä. Matematiikan opetuksen eri tahoilla (opettajat, oppimateriaalintuottajat, kouluhallinto) katsottiin, että oppilaiden oppimiselle saadaan näin luotua aikaisempaa vankempi pohja ja sitä kautta heikkoja suorituksia voidaan vähentää. Soveltamisen ja ongelmanratkaisun kannalta perustavoitteiden määrittelyllä oli kahdenlaisia seurauksia 1970-luvun jälkipuoliskolla. Yhtäältä tämä vaihe näkyi soveltamisen painottamisena ja sovellustehtävien lisääntymisenä joissakin oppikirjoissa jopa kolminkertaiseksi aikaisempaan verrattuna. Toisaalta perustavoitteiden ja perusoppiaineksen määrittelyyn liittynyt opetussuunnitelman karsiminen merkitsi opetuskäytännössä aivan vastakkaista kehitystä. Opetuksessa karsittiin joko aikaa vievää ainesta tai yritettiin nopeuttaa opetusprosessia, jolloin se kohdistui nimenomaan konkreettisiin asiayhteyksiin liittyviin tehtäviin ja sovellusten määrään. Tilanne oli hyvin ristiriitainen: vaikka sovellustehtäviä olikin oppikirjoissa runsaammin käytettävissä, ei niitä ollut kuitenkaan mahdollista käsitellä opetuksessa (esim. Leino 1984).

1970-luvun loppua kohti meillä painotettiin entistä voimakkaammin ongelma-keskeistä matematiikan opetusta, jossa aikaa tuli varata oppilaita kiinnostavien ja hyödyllisten matemaattisten tilanteiden kiireettömään tarkasteluun ja oppilaiden ratkaisuehdotusten pohdintaan. Tätä suuntausta pyrittiin myös käytännössä edistämään julkaisemalla joitakin sovellustehtäväkokoelmia peruskoulu- ja lukiokäyttöön.

Vuonna 1980 kansainväliset vaikutteet panivat alulle jälleen uuden muutosajan, kun USA:n matematiikan opettajajärjestön (NCTM) toimintaohjelma nosti ongelmanratkaisun keskeiseen asemaan koulumatematiikan opetuksessa. Tätä *kolmatta vaihetta* opetussuunnitelman kehityksessä voidaan nimittää *ongelmanratkaisun vaiheeksi* (Problem Solving). 'Ongelmanratkaisuliikkeen' nousu voidaan jälleen ymmärtää vastareaktiona perusteisiin palaamiselle. Matematiikan uutta oppimäärää laadittiin vuosina 1980–81 ongelmanratkaisua ja soveltamista korostavaksi ja tämä ilmeni vuonna 1982 julkaistun peruskoulun matematiikan oppimäärän ja oppimääräsuunnitelman (Kouluhallitus 1982) tavoitteissa. Sisällöissä

tapahtui myös aikaisempaan verrattuna joitakin helpotuksia: etumerkillisillä luvuilla laskeminen siirrettiin yläasteelle, potenssilaskennan opettamista jaettiin koko yläasteelle, polynomiin ja rationaalilausekkeiden sieventämistä kevennettiin ja vektoreiden, epäyhtälöiden ja todennäköisyyslaskennan osuudet poistettiin. Vaikutukset näkyivät etenkin oppimateriaaleissa, joissa sovellusten ja erilaisten pulmatehtävien osuudet lisääntyivät. Monet opettajat kuitenkin kokivat, että oppikirjojen ongelmatehtävät olivat liian yksipuolisia ja vaativia, jolloin ne sopivat vain osalle oppilaista. Koska oppimateriaaleissa oli puutetta heikoimmille oppilaille sopivista tehtävistä, jäi sovellutus- ja ongelmatehtävien tekeminen useinkin oppituntien loppuun ja vain paremmille oppilaille "lisätehtäväksi".

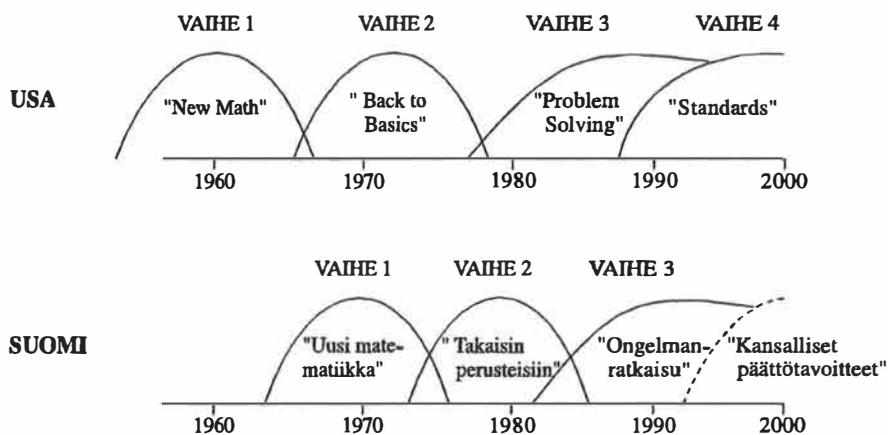
Vuoden 1983 koululaeissa opetussuunnitelman laadinnan vastuu siirtyi kunnan tasolle. Tähän liittyen kouluhallitus antoi myös uudet opetussuunnitelman perusteet (Kouluhallitus 1985). Matematiikan opetussuunnitelman kohdalla muutos vuoteen 1982 verrattuna oli enimmäkseen hallinnollinen. Opetussuunnitelman tavoitteet säilyivät ennallaan. Oppimäärä muuttui kuitenkin esitystavaltaan väljemmäksi ja lähestyi siten vuoden 1970 opetussuunnitelmaa. Yläasteen oppisisältöjä jouduttiin hieman karsimaan, koska yhdeksännen luokan tuntimäärä väheni neljästä kolmeen viikkotuntiin. Opetussuunnitelman perusteilla oli enemmänkin vaikutuksia opetuksen toteutukseen. Merkittävä muutos oli se, että yläasteelta poistuivat tasokurssit. Niiden sijasta siirryttiin opetusryhmän sisäiseen eriyttämiseen, jota tuettiin ns. tuntikehysjärjestelmällä. Yläasteen matematiikan opetukseen tämä merkitsi pienempiä opetusryhmiä (noin 16–19 oppilasta) ja tarjosi siten mahdollisuuden yksilöllisempään opetukseen. Opetuksen sopeuttaminen heterogeenisten opetusryhmien olosuhteisiin jäi kuitenkin opettajien omaksi tehtäväksi.

Syksyllä 1987 käynnistyi maamme matemaattis-luonnontieteellisen koulutuksen kannalta merkittävä komiteatyö (ns. Leikolan komitea). Komitea julkaisi välimietintönsä vuonna 1988 (Komiteanmietintö 1988) ja loppumietintönsä vuonna 1989 (Komiteanmietintö 1989). Loppumietinnössään komitea esitti mm. matemaattis-luonnontieteellisen perusviestityksen tavoitteet, nosti esille tärkeitä ongelmakohtia sekä esitti toimenpideluettelon puutteiden ja epäkohtien korjaamiseksi. Peruskoulun matematiikan opetusta koskevana kehittämistarpeina mainittiin mm. 1) opetusmenetelmien monipuolistaminen, 2) opetuksen painopisteen siirtäminen rutiinitaitojen harjoittamisesta ajattelun kehittämiseen, 3) opetuksen liittäminen käytäntöön ja opitun soveltaminen ja 4) laskinten ja tietokoneiden hyväksikäyttö opetuksessa mahdollisimman varhaisilta luokka-asteilta lähtien (Komiteanmietintö 1989, 33–34).

Leikolan komitean työn seurauksena käynnisti opetushallitus matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelmien kehittämistyön vuonna 1990. Laatimassaan raportissa ns. Matematiikan opetuksen kehittämistyöryhmä esitti opetuksen suuntaviivoja kehittämisperiaatteiden muodossa. Tammikuussa 1994 opetushallitus antoi uudet opetussuunnitelman perusteet (Opetushallitus 1994), jotka samalla merkitsivät uudenlaisen koulutus- ja opetussuunnitel-

makulttuurin alkua. Keskitetystä opetussuunnitelmajärjestelmästä siirryttiin hajautettuun järjestelmään, jossa yhtenäisen kansallisen opetussuunnitelman asemesta opetushallitus antaa opetussuunnitelman perusteet ja opetusministeriö tuntijaon, ja niiden pohjalta koulut laativat omat opetussuunnitelmansa. Tärkeää muutosta merkitsi myös se, että oppimateriaalilta ei enää edellytetty opetushallituksen hyväksyntää. Näin koulut saivat enemmän vapautta ja vastuuta opetussuunnitelmatyöhönsä, joka käynnistyi syksyllä 1994.

Tuosta ajankohdasta alkavaa matematiikan opetussuunnitelman *neljättä vaihetta* voitaisiin tällä hetkellä nimittää *koulukohtaisuuden ja standardien* vaiheeksi. Tämä vaihe koostuu nimensä mukaisesti monentyppisistä aineksista ja on sen vuoksi luonteeltaan epämääräisempi kuin aikaisemmat vaiheet. Matematiikan opetuksen kehittämistyöryhmä tavoitteli kyllä työssään selkeästi uudenlaista opetussuunnitelmallista lähestymistapaa, joka rakentui sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen pohjalle (mm. Haapasalo & Kupari 1991; Välijärvi 1991). Vuoden 1994 peruskoulun opetussuunnitelman perusteisiin matematiikan osuus kirjoitettiin kuitenkin hyvin samankaltaisena kuin vuonna 1985. Erona aikaisempaan oli lähinnä se, että uusissa perusteissa opetuksen tavoitteet ja sisällöt esitettiin tiiviissä ja yleisessä muodossa kouluasteittain kun ne edellisissä perusteissa oli esitetty yksityiskohtaisemmin ja luokka-asteittain. Näin tehtiin sen vuoksi, että perusteiden tavoitteita ja sisältöjä tulkiten ja täydentäen koulut voisivat paikallisesti laatia käytännön opetustyötä ohjaavat opetussuunnitelmansa. Tällä hetkellä matematiikan opetussuunnitelmien koulukohtaisuus on ollut nähtävissä lähinnä erilaisten valinnaiskurssien muodossa. Vasta lähivuodet tulevat näyttämään, millaisia muotoja koulukohtaiset opetussuunnitelmat tulevat saamaan.



Kuvio 3.1 Matematiikan opetussuunnitelman kehitysvaiheet Suomessa ja USA:ssa.

Kuviossa 3.1 on vielä yhteenvedona esitetty, millä tavoin opetussuunnitelmavaiheet likimain ajoittuivat ja miten ne seurasivat amerikkalaisia uudistusvirtauksia. Kuvion 'aallot' pyrkivät kuvaamaan kehitysvaiheiden luonnetta: ensin voimakas nousu ja sen jälkeen vastaavanlainen vaimeneminen uuden aallon syntyessä.

Kiinnostavaa tapahtuneessa kehityksessä on ensinnäkin opetussuunnitelmavaikutteiden välittymisen nopeus. Kuvion perusteella voidaan havaita, että Suomeen uudistukset ovat aina tulleet tietyllä viipeellä. "Uuden matematiikan" kohdalla aikaero oli noin 10 vuotta, "takaisin perusteisiin" -vaiheessa se oli noin 5 vuotta ja taas "ongelmanratkaisu" -vaiheessa ensireagointi tapahtui hyvinkin nopeasti. Toinen merkittävä piirre on myös se, etteivät uudistusvirtaukset siirtyneet suomalaiseseen opetuskäytäntöön sellaisenaan, vaan ne joko muuntuivat kulkuprosessin aikana tai niistä muokattiin meidän omaan tilanteeseemme soveltuva ratkaisu. Tällöin oli siis kysymys muustakin, kuin vain yksittäisen 'ideologian' lainaamisesta muualta. Meillä esimerkiksi perustavoite- ja perusoppiainesratkaisut olivat harkitumpia ja omaleimaisempia kuin "back to basics" -ajattelun äärimuodoissa (Bracey 1983).

Yksi selitys uudistusvirtausten nopeammalle välittymiselle voi olla siinä, millä tavoin kansainvälinen kanssakäyminen ja tiedonvälitys on lisääntynyt ja parantunut 1970-luvulta lähtien. Myös sillä välitysmekanismeilla, jonka kautta uudistusaallot ovat meille kulloinkin kulkeutuneet, on varmasti ollut vaikutuksensa siirtymisnopeuteen. Esimerkiksi "uuden matematiikan" kohdalla pitkä viive johtui todennäköisesti uudistuksen perinpohjaisuudesta ja radikaaliudesta. Se synnytti laajaa keskustelua koko Länsi- ja Keski-Euroopassa minkä lisäksi Pohjoismaat tekivät tiivistä yhteistyötä ja laativat omat yhteiset ratkaisunsa. Tämä vei oman aikansa. "Ongelmanratkaisu" -vaiheen hyvin nopeaa leviämistä voi taas osaltaan selittää se, että se syntyi vastareaktiona "takaisin perusteisiin" -vaiheelle.

Peruskoulun matematiikankoulukohtaiselle opetussuunnitelmalle on vielä mahdotonta määrittää omaa leimallista muotoaan. Näyttääkin siltä, että meillä jatkuu edelleen opetussuunnitelmavaihe, jossa matematiikan soveltamisella ja ongelmanratkaisulla on tärkeä asema. Tällä on myös tiettyjä yhtymäkohtia USA:n matematiikan opetuksen nykyvaiheeseen, jossa sekä opetussuunnitelman ja arvioinnin standardeilla että opetuksen standardeilla (vrt. NCTM 1989, 1991) on keskeinen rooli. Amerikkalaisissa standardeissa korostetaan voimakkaasti ongelmanratkaisua, kommunikointia ja päättelyn merkitystä matematiikassa sekä vahvaa minäkäsitystä, joten perusajattelultaan se voidaan nähdä jatkona 1980-luvun ongelmanratkaisukaudelle. Yhtäläisyydet amerikkalaisen ja suomalaisen opetussuunnitelmakehityksen välillä ilmenevät tällä hetkellä myös siten, että meillä ollaan parhaillaan rakentamassa omia kansallisia päättötavoitteita mm. matematiikan arviointitoiminnan tueksi (Opetusministeriö 1997).

3.3.3 Yhteenveto peruskoulun matematiikan opetuskäytännöistä ja oppimistuloksista aikavälillä 1979–1995.

Tässä luvussa luodaan tiivis katsaus peruskoulun matematiikan opiskelussa ja opettamisessa tapahtuneisiin muutoksiin ja oppimistulosten kehitykseen vuosina 1979–95. Tarkastelu pohjautuu Koulutuksen tutkimuslaitoksen mainitulla aikavälillä toteuttamiin kansallisiin arviointitutkimuksiin.

Opiskelun ja opettamisen muutosten tarkastelussa kohteeksi on valittu joukko joko matematiikan opetuksen kannalta tärkeitä pidettyjä tai muutoin kiinnostaviksi koettuja muuttujia. Tällaisia oppilaskohtaisia muuttujia ovat olleet esimerkiksi matematiikan kotitehtäviin käytetty aika, avun saaminen kotitehtävien tekemisessä, laskimen ja tietokoneen käyttö opetuksessa sekä erilaisten opetuskäytäntöjen esiintyminen. Vastaavanlaisia opettajilta kysytyjä muuttujia ovat olleet opetusryhmän koko, oppituntien valmisteluun käytetty aika, opetuksen työskentelymuodot ja kotitehtävien antaminen. Tarkastelun avulla on pyritty piirtämään matematiikan opetuskäytännön 'muutosprofiilia' niin oppilaiden kuin opettajienkin kannalta katsottuna. Aihetta on käsitelty perusteellisemmin Kuparin (1993c) sekä Saaren ja Kuparin (1996) artikkeleissa.

Peruskoululaisten matematiikka-asenteiden ja tiedollisten oppimistulosten kuvaamisella on tärkeä merkitys tämän tutkimuksen kannalta. Ensinnäkin oppimisen tuotokset antavat käsitystä yhdestä opetussuunnitelman tasosta eli toteutuneesta opetussuunnitelmasta ja ovat siten olennainen osa matematiikan kouluopetuksen kontekstin kuvausta. Toiseksi, kun opettajien uskomuksilla tiedetään olevan vaikutusta siihen, millä tavoin opettajat organisoivat opetustaan ja toteuttavat sitä käytännössä, niin sitä kautta uskomuksilla ajatellaan olevan vaikutuksensa myös oppilaiden oppimiseen. Vaikka tämä vaikutusten ja yhteyksien verkko on hyvin monimutkainen ja vaikea selvittää, halutaan tässä tutkimuksessa kuitenkin 'kurkistaa', välittyvätkö nämä vaikutukset myös oppilaiden oppimistuloksiin saakka. Kirjoittaja on esitellyt peruskoululaisten oppimistuloksia ja niiden kehittymistä yksityiskohtaisemmin useissa 1990-luvulla ilmestyneissä julkaisuissaan (mm. Kupari 1993b, 1996b, 1997b).

Tähän lukuun liittyvät taulukot on esitetty liitteessä 1.

Oppilaiden kokemuksia matematiikan opiskelusta

Matematiikka on aina ollut yksi koulun keskeisiä 'välineaineita' ja sitä on opetettu peruskoulun kaikilla luokilla 3–4 tuntia viikossa. Vuonna 1990 peruskoulun neljännen, kuudennen ja yhdeksännen luokan oppilaat olivat sitä mieltä, että matematiikkaa oli koulussa sopiva määrä. Ala-asteen luokkien oppilaista neljä viidesosaa ja yhdeksäsluokkalaisista kolme neljäsosaa oli tätä mieltä. Noin 15 prosentille oppilaista matematiikan opetusta oli liikaa ja loput 5–10 prosenttia piti opetuksen määrää liian vähäisenä. Vuonna 1995 hieman

suurempi osa yhdeksäsluokkalaisista eli neljä viidesosaa piti matematiikan opetuksen määrää sopivana.

Matematiikan opiskelussa pidetään yleensä tärkeänä oppilaiden omaa harjoittelua, josta yhden osan muodostavat kotitehtävät. Tutkituilla luokka-asteilla oppilaiden matematiikkaan – kuten myös kaikkiin kotitehtäviin – käyttämä aika oli vähentynyt vuodesta 1979, kun taas television/videoiden katseluun käytetty aika oli hieman kasvanut (ks. liite2: taulukko 1). Vuonna 1990 (ja myös vuonna 1995) oppilaat käyttivät matematiikan kotitehtäviinsä ala-asteella keskimäärin runsaat 20 minuuttia ja yhdeksännellä luokalla vajaat 20 minuuttia. Oppilaiden matematiikan kotitehtäviin käyttämä aika oli noin kolmasosa siitä ajasta, jonka he ilmoittivat käyttävänsä kaikkiin kotitehtäviin ja noin kahdeksasosa ajasta, jonka he käyttivät television/videoiden katseluun. Vuonna 1990 selvästi suurempi osa näiden luokkien oppilaista ilmoitti saaneensa myös riittävästi kotoa apua matematiikan kotitehtävien tekemisessä kuin vuonna 1979.

Laskinten ja tietokoneiden opetuskäytön kohdalla kehitys on ollut verraten hidasta oppilaiden kokemusten perusteella. Vuonna 1979 ainoastaan muutama prosentti ala-asteen oppilaista ja runsaat 10 prosenttia yhdeksäsluokkalaisista mainitsi käyttäneensä laskinta 1–2 kertaa viikossa. Vuonna 1990 laskimia käytettiin ala-asteella edelleen satunnaisesti: vajaat 10 prosenttia mainitsi laskinten käytöstä opetuksessa. Sen sijaan lähes kaksi kolmasosaa yhdeksäsluokkalaisista ilmoitti laskimia käytetyn opetuksessa verraten säännöllisesti. Vuonna 1995 vastaava osuus oli jo kolme neljäsosaa. Laskinten tulisikin nykyään olla luonnollisia apuvälineitä matematiikan opiskelussa. Myös tietokoneiden käyttäminen ala-asteen matematiikan opetuksessa oli satunnaista vuonna 1990 ja noin puolet molempien luokkien oppilaista ilmoitti, ettei koululla ollut edes laitteita. Yhdeksännellä luokalla laitepuutteita oli huomattavasti vähemmän. Yläasteella mikrojen käyttö opetuksessa on alkanut 90-luvun aikana vähitellen myös yleistyä: kun vuonna 1990 vajaat 10 prosenttia oppilaista ilmoitti mikrojen käytöstä matematiikan opetuksessa, niin vuonna 1995 luku oli jo yli kaksinkertainen.

Matematiikan opetusolosuhteet

Matematiikan opettamisen kannalta hyvin tärkeänä tekijänä opettajat pitivät opetusryhmän kokoa. Vuodesta 1979 lähtien opetusryhmän koossa oli tapahtunut sekä ala-asteella että yläasteella varsin suuria ja kiinnostavia muutoksia. Vuonna 1990 neljännellä ja kuudennella luokalla pienten opetusryhmien määrä väheni dramaattisesti ja isojen ryhmien määrä vastaavasti kasvoi. Kun vielä vuonna 1979 alle 10 oppilaan ryhmiä oli noin 60 prosenttia kaikista neljännen ja kuudennen luokan opetusryhmistä, niin vuonna 1990 tällaisia oli enää vain muutama prosentti. Sen sijaan 'suurten' opetusryhmien (oppilaita enemmän kuin 21) osuus kasvoi lähes 80 prosenttiin. Huomautettakoon, että kansainvälisesti arvioiden tämän kokoisia ryhmiä ei voi vielä pitää suurina (Travers & Westbury 1989).

Yhdeksännellä luokalla opetusryhmän koon kehitys oli tuntikehysjärjestelmään siirtymisen vuoksi aluksi toisensuuntainen kuin ala-asteella: pienempien opetusryhmien määrä kasvoi rajusti ja suurten hävisi lähes kokonaan (ks. liite 1: taulukko 2). Vuoden 1990 tutkimusaineistossa noin 90 prosentissa opetusryhmistä oli 13–20 oppilasta. Vuonna 1979 tämän kokoisia ryhmiä oli ollut noin kolmannes kaikista opetusryhmistä ja yli 21 oppilaan opetusryhmien osuus oli ollut lähes puolet. Vuoden 1995 luvuissa on sitten nähtävissä vuosikymmenen alun säästötoimenpiteiden vaikutukset, jotka kohdistuivat ankarina myös koulutukseen. Opetusryhmien koot suurentivat ja 21–25 oppilaan ryhmiä oli tuolloin jo neljännes kaikista.

Vuonna 1990 matematiikan opettajat käyttivät oppituntiansa valmisteluun vähemmän aikaa kuin 11 vuotta aikaisemmin. Kun vuonna 1979 luokanopettajat käyttivät valmisteluun keskimäärin noin neljä tuntia viikossa, niin vuonna 1990 käytetty aika oli enää 2,5–3 tuntia. Vastaavasti yhdeksännellä luokalla vähentymistä oli tapahtunut miltei 30 prosenttia: runsaasta 7 tunnista vajaan 5 tuntiin viikossa. Vuonna 1995 valmisteluun käytetty aika oli sunnilleen samansuuruinen kuin viisi vuotta aikaisemmin. Opetuksen suunnittelua samoin kuin sen toteutusta hallitsivat kaikkina ajankohtina vankasti matematiikan oppikirja ja siihen mahdollisesti liittyvä opettajan opas. Miltei kaikki opettajat ko. luokka-asteilla käyttivät näitä säännöllisesti. Varsin suuri osa opettajista ilmoitti joskus käyttävänsä muitakin lähteitä suunnittelussaan ja yleisin näistä oli jokin muu matematiikan kirja. Lähes kolmannes yhdeksännen luokan opettajista menetteli säännöllisesti tällä tavoin.

Opetuksen painotukset ja työskentelymuodot

Aina 1980-luvun alusta lähtien pidettiin soveltamista ja ongelmanratkaisua keskeisenä matematiikan opetussuunnitelmallisena painopisteenä (kuvio 3.1, s. 52). Kiinnostava kysymys olikin, millä tavoin tämä välittyi opetuksen tasolle ja näkyikö se millään tavoin opetuksen tavoitteiden painotuksissa ja opetuksen muodoissa? Arviointitutkimusten tulokset antoivat varsin ristiriitaisen kuvan opetuksessa tapahtuneesta kehityksestä. Tulosten perusteella selvää muutosta näytti tapahtuneen siinä, millä tavoin opettajat painottivat opetuksen eri tavoitealueita. Vuonna 1990 kaikilla tutkimuksen luokka-asteilla opettajat ilmoittivat korostavansa vähemmän laskutaitoja kuin vuonna 1979, mutta vähentymisestä huolimatta laskutaitojen asema ja painoarvo opetuksessa oli edelleen hyvin vahva. Aikaisempaa enemmän painoa opettajat antoivat oppilaiden matematiikan soveltamistaidoille. Kuudennella ja yhdeksännellä luokalla tämä näkyi neljättä luokkaa selvemmin.

Vuonna 1990 ongelmanratkaisu oli yhdeksännen luokan opettajilla jo selvästi mukana matematiikan opetuksessa (ks. liite 1: kuvio 1). Enimmäkseen se oli silloin tällöin tapahtuvaa toimintaa, mutta yli kolmanneksella opettajista se oli usein toistuvaa. Ongelmanratkaisun tärkeys näkyi opettajien työskentelyssä myös siten, että he antoivat aikaisempaa useammin oppilailleen tämänkaltaisia kotitehtäviä. Mielenkiintoista tuloksissa oli lisäksi se,

että vuonna 1995 ongelmanratkaisutyyppisen työskentelyn usein tapahtuva käyttö ei ollut lisääntynyt opettajien keskuudessa. Päinvastoin hieman pienempi osa opettajista ilmoitti käyttävänsä ongelmanratkaisua usein opetuksessaan kuin vuonna 1990.

Toisaalta opetuksen työskentelymuotoja kuvaavien tulosten perusteella matematiikan opetustavat olivat vuosina 1990 ja 1995 edelleen hyvin yksipuoliset ja perinteiset (ks. liite 1: taulukko 3). Opettajien ja oppilaiden arviot olivat lähes samanlaiset. Opetusta hallitsevia työskentelymuotoja sekä ala-asteella että yläasteella olivat opettajien esittämä opetus ja oppilailla tehtävien itsekseen laskeminen. Tosin runsas puolet yhdeksännen luokan opettajista ilmoitti käyttävänsä säännöllisesti opetuksessaan pari- ja pienryhmätyöskentelyä, joka soveltuu paremmin ongelmakekseiseen työskentelyyn. Sen sijaan 'askarteleminen ja pelaaminen', 'havaintojen tekeminen luokan ulkopuolella' ja 'tietojen kerääminen muista tietolähteistä' olivat perin harvoin käytettyjä opetuksen työmuotoja.

Matematiikan opetuskäytännössä kotitehtävät muodostavat hyvin olennaisen lohkon. Vuosina 1979 ja 1990 opettajat antoivat oppilailleen keskimäärin saman verran kotitehtäviä. Kuitenkin ala-asteen luokilla tehtäviä oli määrällisesti hieman enemmän yhdellä kertaa (noin 5 tehtävää) kuin yhdeksännellä luokalla (noin 4 tehtävää). Vuonna 1995 yhdeksäsluokkalaisten kotitehtävien määrä oli aivan sama kuin aikaisemmin. Luonteeltaan tehtävät olivat kuitenkin jonkin verran monipuolistuneet, ja erityisesti soveltavien tehtävien määrä oli lisääntynyt. Ristiriitaista oli kuitenkin se, että vuonna 1990 oppilaat käyttivät kotitehtävien tekemiseen vähemmän aikaa kuin vuonna 1979. Opettajat osasivat myös hyvin arvioida, kuinka paljon aikaa oppilaat tehtäviinsä tarvitsivat.

Aikavälillä 1979–90 opettajat näyttivät muuttaneen myös matematiikan opiskelun arviointiaan hieman formatiivisempaan suuntaan, joskin numeroarvostelun merkitys näkyi edelleen vahvana. Vuonna 1990 kokeita pidettiin aikaisempaa harvemmin, summatiivisia kokeita vähemmän ja suurempi osa opettajista piti 'formatiivisia kokeita' enemmänkin oppimisseurannan välineinä kuin suoraan arvosanaan vaikuttavina arvosteluina.

Matematiikan opettajat arvioivat myös yleisemmin 1980-luvulla tapahtunutta kehitystä ja sen vaikutuksia opetukseen. Luokanopettajat kokivat uudistukset pääosin siten, että niillä ei ollut suurtakaan vaikutusta matematiikan opetustyöhön. Osa opettajista tosin piti vuonna 1985 käyttöön tullutta opetusryhmien jakomahdollisuutta myönteisenä, koska se toi heidän mielestään lisää joustavuutta ja yksilöllisyyttä opetukseen. Aineenopettajien kokemukset olivat toisenlaisia. Enemmistö yhdeksännen luokan opettajista piti tehtyjä rakenteellisia muutoksia (tasokurssien poistamista, yhden oppitunnin vähentymistä) opettamisen kannalta huononnuksina, jotka heidän mielestään saivat aikaan pintapuolistumista, keskinkertaisuutta, jopa tason laskua. Nämä mielipiteet olivat hyvin ymmärrettäviä, koska esimerkiksi tasokurssien poistaminen merkitsi todella muutosta 15 vuoden aikana rakennettuun yläasteen opetuskäytäntöön. Osa yläasteen opettajista korosti myös matematiikan opetuksessa tapahtunutta myönteistä kehitystä, mikä voittopuolisesti näkyi luokan ilmapiiriin parantumi-

sena ja oppilaiden aktiivisuuden lisääntymisenä. Tämä oli tuolloin hyvin tärkeä ja rohkaiseva tulos ja kertoi siitä, että uusien rakenteellisten ratkaisujen avulla oli lähdetty etsimään niihin sopivia pedagogisia käytäntöjä.

Vuonna 1995 yhdeksännen luokan matematiikan opettajat antoivat myös varsin voimakasta palautetta taloudellisten säästöjen aikakaudesta (ks. Saari & Kupari 1996). Opettajien mielestä opetuksen olosuhteet olivat 90-luvun alkuvuosina monilla tavoin heikentyneet: opetusryhmät olivat kasvaneet, tukiopetus oli vähentynyt, oppimateriaalista oli puutetta ja opiskeluilmapiiri oli huonontunut. Noin neljä viidesosaa opettajista arvioi, että säästötoimet olivat vaikuttaneet melko paljon tai jonkin verran matematiikan opetuksen toteuttamiseen koulussa. Ongelmallista tässä suuntauksessa oli mm. se, että edellä kuvatut opetukselliset kehittämissyrkimykset mitä ilmeisimmin hidastuivat ja osin loppuivat.

Matematiikka-asenteet 1979–90 / ala-aste

Tehdyissä arvioinneissa ala-asteen oppilaat ovat arvioineet kaikkien koulun oppiaineiden miellyttävyyttä. Vuonna 1990 matematiikka kuului *neljäs- ja kuudesluokkalaisten* arviointien mukaan viiden miellyttävimpänä pidetyn oppiaineen joukkoon. Muut tähän oppiaineryhmään kuuluneet aineet olivat biologia, englanti, liikunta ja maantieto. Neljännellä luokalla oppilaat pitivät matematiikkaa jopa mieliaineenaan. Yleensäkin matematiikka koettiin vuonna 1990 miellyttävämmäksi aineeksi kuin vuonna 1979.

Sen lisäksi, että matematiikkaa kuului ala-asteen luokilla oppilaiden mieliaineiden joukkoon, pidettiin sitä myös tärkeänä eikä vielä ollenkaan vaikeana oppiaineena (ks. liite 1: taulukko 4). Neljännen luokan oppilaista 40 prosenttia ilmoitti pitävänsä matematiikasta hyvin paljon ja lähes puolet piti matematiikan opiskelua mielenkiintoisena. Niinikään runsas 40 prosenttia neljäsluokkalaisista piti mukavana 'päästä laskemaan luokan taululle' ja ainoastaan joka kymmenes koki matematiikan vastenmielisenä aineena. Kuudesluokkalaisistakin vielä lähes kolmannes piti matematiikasta hyvin paljon, mutta jo noin puolet oli vastakkaista mieltä. Vain neljännes koki taululla laskemisen mukavana ja matematiikkaa vastenmielisenä pitävien osuus oli jo kaksinkertainen (22 %) neljänteen luokkaan verrattuna. Kuitenkin puolet kuudesluokkalaisista oli sitä mieltä, että matematiikka ei ollut heille vastenmielistä.

Ainoastaan pieni osa 4. ja 6. luokan oppilaista piti matematiikan opiskelua vaikeana. Neljännellä luokalla 60 prosenttia ja kuudennella luokalla vähän yli puolet oppilaista oli sitä mieltä, ettei matematiikka ollut heistä vaikeaa. Miltei sama osuus oppilaista koki myös selviytyvänsä varsin hyvin matematiikassa. Samalla oli kuitenkin nähtävissä tietty opiskelun 'vaikeutumisen' kehitys: kun neljännellä luokalla vaikeuden kokevien osuus oli 10 prosenttia, niin kuudennella luokalla tämä osuus oli jo kaksinkertainen. Vuonna 1979 tilanne oli ollut aivan samankaltainen.

Ala-asteen oppilaat pitivät matematiikkaa ja sen opiskelua tärkeänä asiana. Kaksi kolmasosaa sekä neljäs- että kuudesluokkalaisista ilmaisi pitävänsä matematiikan osaamista tärkeänä hyvän työpaikan saamisen kannalta. Edelleen enemmistö oppilaista katsoi, että lähitulevaisuudessa vaaditaan useimmissa ammateissa hyvää matematiikan taitoa. Noin neljä viidesosaa molempien luokkien oppilaista oli myös sitä mieltä, että naiset tarvitsevat aivan yhtä paljon matematiikkaa kuin miehet. Tulosten vertailu paljasti kuitenkin sen, että vuonna 1979 oppilaat pitivät matematiikkaa tärkeämpänä kuin vuonna 1990.

Matematiikka-asenteet 1990–95 / yläaste

Yläasteelle siirryttäessä ja myös sen aikana oppilaiden asennoitumisessa koulua ja myös oppiaineita kohtaan voi tapahtua suuriakin muutoksia, minkä on nähty olevan yhteydessä nuorten kehitysprosessiin tuossa vaiheessa (ns. murrosikä). Vuonna 1990 kolmasosa yhdeksännen luokan oppilaista ilmaisi pitävänsä matematiikasta hyvin paljon ja lähes puolet piti matematiikkaa mielenkiintoisena aineena (ks. liite 1: taulukko 5). Niinkään matematiikkaa vastenmielisenä pitävien oppilaiden osuus (25 %) oli kuudenteen luokkaan verrattuna lisääntynyt vain hieman. Vuonna 1995 tilanne oli osin toisenlainen. Tuolloin enää neljäsosaa yhdeksäsluokkalaisista ilmoitti pitävänsä matematiikasta hyvin paljon ja myös hieman pienempi osuus oppilaista (41 %) koki opiskelun mielenkiintoisena. Kolmannes oppilaista oli kuitenkin molempina ajankohtina sitä mieltä, että he olivat hyviä matematiikassa.

Yläasteen lopussa jo runsas kolmannes oppilaista ilmaisi matematiikan opiskelun olevan vaikeaa ja tilanne oli samanlainen molempina tutkimusvuosina. Kun ala-asteen luokilla enemmistö oppilaista oli vielä sitä mieltä, ettei matematiikka ollut heistä vaikeaa, niin yhdeksännellä luokalla tällä tavoin ajattelevien oppilaiden osuus oli jo vähemmistönä (44%). Lähes puolet oppilaista ilmaisi myös jonkinasteista ahdistuneisuutta matematiikan kokeiden edellä. Tulosten mukaan matematiikan opiskelun vaikeana kokemiseen näyttäisi oppilaiden mielissä liittyvän se, miten vaativaa opetus on, kuinka nopeasti se etenee ja millä tavalla oppilas itse uskoo selviytyvänsä siinä.

Vaikka varsin suuri osa yhdeksäsluokkalaisista ei ole kokenutkaan matematiikan opiskelua mieluisana ja vaikka se monelle on ollut vaikeaa, niin he ovat pitäneet matematiikkaa hyvin tärkeänä oppiaineena. Jo vuonna 1979 matematiikka oli oppilaiden tärkeysarvioinneissa ensimmäisenä. Vuonna 1990 matematiikka oli englannin jälkeen toisena ja vuonna 1995 se oli englannin ja tietotekniikan ohella yksi kolmesta tärkeimmästä aineesta. Matematiikan tärkeänä kokeminen näkyi myös muulla tavoin vuosina 1990 ja 1995. Molempina vuosina 60-70 prosenttia yhdeksäsluokkalaisista oli sitä mieltä, että matematiikan osaaminen on tärkeää hyvän työpaikan saamisen kannalta ja että lähitulevaisuudessa tarvitaan useimmissa ammateissa hyvää matematiikan taitoa. Edelleen neljä viidesosaa oppilaista katsoi, että naiset tarvitsevat matematiikkaa aivan yhtä paljon kuin miehet.

Yhdeksäsluokkalaisten matematiikka-asenteita on tarkasteltu arvioinneissa myös toisella tavoin. Analysoimalla faktorianalyysin avulla arvioinneissa käytettyjä asennemittareita etsittiin oppilaiden asenteiden faktorirakenteita. Vuoden 1990 aineistossa käyttökelpoisimmaksi osoittautui neljän faktorin ratkaisu. Faktorit olivat *matematiikan vaikeus*, *matematiikan merkitys*, *matematiikan motivaatio* sekä *matematiikka ja sukupuoli* (ks. liite 1: taulukko 6; ks. Karjalainen 1982). Ensimmäiselle faktorille kuuluivat matematiikan vaikeutta ja vaatavuutta kuvaavat muuttujat sekä opiskelun yritteliäisyyteen liittyvät muuttujat. Toinen faktori sisälsi asennedimension, joka mittasi matematiikan tärkeänä pitämistä niin jokapäiväisen elämän kuin työelämänkin kannalta. Kolmannelle faktorille painottuivat matematiikasta pitämistä kuvaavat muuttujat sekä opiskeluun motivoitumista heijastavat muuttujat. Vaikka neljäs faktori sisälsi yhden ainoan muuttujan, haluttiin se silti esittää omana faktorinaan, koska sen lataus oli kaikkein korkein, eikä se tässä ratkaisussa latautunut millekään muulle faktorille. Yhteensä näiden neljän faktorin ratkaisu selitti 53 prosenttia asenteiden vaihtelusta. Vuonna 1990 yhdeksäsluokkalaisten matematiikka-asenteissa oli tilastollisesti merkitseviä eroja tyttöjen ja poikien välillä ja matematiikan suorituksiltaan eritasoisten oppilasryhmien välillä (ks. taulukko 6).

Vuoden 1995 arvioinnin asennekysely sisälsi kaikki vuoden 1990 arvioinnin muuttujat, minkä lisäksi sitä laajennettiin muuttujilla, jotka koskettelivat oppilaiden itseluottamusta ja ahdistuneisuutta matematiikan opiskelussa. Asennemittari oli siten selvästi kattavampi kuin vuonna 1990. Tähän aineistoon parhaimmin sopivaksi osoittautui kuuden faktorin ratkaisu, jonka faktorit olivat *matematiikan itseluottamus*, *matematiikan motivaatio*, *matematiikan merkitys*, *matematiikan vaikeus*, *matematiikkapelko* sekä *matematiikka ja sukupuoli* (ks. liite 1: taulukko 7). Vuonna 1995 ensimmäiselle faktorille kuuluivat matematiikan oppimiseen ja osaamiseen luottamista kuvastavat muuttujat. Tämän lisäksi faktoriin sisältyivät myös ne muuttujat, joiden mukaan matematiikka ei ole vaikeaa ja siinä voi menestyä aivan hyvin. Toisen, kolmannen ja kuudennen faktorin sisältö oli joko täsmälleen tai melkein sama kuin vastaavien faktorien sisältö vuonna 1990. Myös neljäs faktori (matematiikan vaatavuus) käsitti paljon samoja aineksia kuin vastaava faktori vuonna 1990, joskin osa matematiikan vaikeutta kuvaavista muuttujista sisältyi nyt (miinusmerkkisenä) itseluottamuksen faktorille. Viidennelle faktorille kuuluneet kolme muuttujaa kuvasivat matematiikan opiskeluun ja koetilanteisiin liittyvää pelkoa ja ahdistusta. Kaiken kaikkiaan oppilaiden matematiikka-asenteet olivat vuonna 1995 moniulotteisemmat kuin viisi vuotta aikaisemmin ja kuuden faktorin ratkaisu selitti 62 prosenttia asenteiden vaihtelusta. Asennerot tyttöjen ja poikien välillä sekä matematiikan suorituksiltaan eritasoisten oppilasryhmien välillä olivat useimmissa kohdin tilastollisesti merkitsevät (ks. taulukko 7).

Molempien ajankohtien tulokset olivat varsin yhdenmukaisia. Niiden mukaan peruskoulun päättyessä oli olemassa selviä asenne-eroja sekä tyttöjen ja poikien välillä että eri tavoin matematiikassa suoriutuvien oppilaiden välillä. Pojat luottivat selvästi tyttöjä enem-

män matematiikassa menestymiseen, kun taas tytöt kokivat matematiikan opiskelun vaikeampana ja ahdistavampana kuin pojat (vrt. Kupari 1996b). Aivan samoin matematiikassa paremmin suoriutuvat luottivat enemmän itseensä oppijoina kuin heikosti suoriutuvat. Ylemmän suoritusason oppilaat pitivät matematiikkaa myös merkityksellisempänä, motivoivampana ja helpompana kuin muut oppilaat.

Matematiikan tiedolliset oppimistulokset 1979–90 / ala-aste

Kokonaisuutena tarkastellen peruskoulun neljännen ja kuudennen luokan matematiikan oppimistulokset olivat vuonna 1990 keskimäärin samantasoiset tai hieman paremmat kuin vuonna 1979. *Neljäsluokkalaisten* suoritusaste oli noussut keskimäärin noin 7 prosenttiyksikköä (ks. liite 1: taulukko 8). Tulosten kohentumista tapahtui lähinnä kolmella sisältöalueella: lukukäsitteen kohdalla (10 prosenttiyksikköä), yhteen- ja vähennyslaskussa (10 prosenttiyksikköä) sekä soveltavan matematiikan alueella (peräti 17 prosenttiyksikköä). Tällä luokka-asteella soveltavan matematiikan tavoitteisiin sisältyvät tärkeimmät mittayksiköt ja niiden muunnokset sekä opittujen laskutoimitusten ja yksiköiden soveltaminen käytännön tilanteisiin.

Muiden sisältöalueiden kohdalla (kertolasku, jakolasku, lausekkeet & yhtälöt sekä geometria) keskimääräiset ratkaisuprosentit joko hieman paranivat tai sitten säilyivät ennallaan. Kiinnostava piirre vuoden 1990 tuloksissa oli mm. se, että laskutoimitusten suoritusjärjestystä käsittelevien tehtävien ratkaisuprosentit olivat vuoden 1979 arvioinnin tapaan hyvin alhaiset (24%–39%).

Kuudesluokkalaisten matematiikan oppimistulokset olivat vuonna 1990 keskimäärin samaa luokkaa kuin vuonna 1979 (ks. liite 1: taulukko 9). Oppilaiden saavutuksissa tapahtui hienoista parantumista yhteen- ja vähennyslaskussa, geometriassa ja soveltavassa matematiikassa. Kohentumista oli selkeimmin havaittavissa mm. prosenttikäsitteen perusteita mittaavissa tehtävissä ja omaksutun tiedon soveltamista vaativissa tehtävissä. Sen sijaan jakolaskun sekä lausekkeiden ja yhtälöiden tehtäväsuorituksissa ilmeni muutaman prosenttiyksikön heikentymistä. Suoritusten huonontuminen näkyi selvimmin yhtälötehtävissä.

Matematiikan tiedolliset oppimistulokset 1979–95 / yläaste

Vuonna 1990 peruskoulun *yhdeksäsluokkalaisten* keskimääräiset oppimistulokset matematiikassa olivat hyvin samantasoiset kuin vuonna 1979, jolloin yläasteella oli vielä käytössä tasokurssit (ks. liite 1: taulukko 10). Eri sisältöalueilla oli kuitenkin nähtävissä pienehköjä muutoksia. Geometriassa, soveltavassa matematiikassa ja peruslaskutaitojen alueella oppilaiden suoritukset paranivat, kun taas yhtälöiden, funktioiden ja (polynomi)algebran sisältöalueilla suoritukset hieman heikkenivät. Vuonna 1990 oppilaat osasivat paremmin ratkaista mm. kuvioden ja kappaleiden ominaisuuksia (kuvioden luokittelu, piiri, pinta-ala, tilavuus) käsittelevät tehtävät. Suoritusten huonontuminen puolestaan näkyi erityisen

selvästi tehtävissä, jotka käsittelivät lineaarista funktiota (kuvaajana suora). Jokapäiväistä elämää lähellä olevissa prosenttilaskutehtävissä muutosta tapahtui kumpaankin suuntaan. Esimerkiksi alennetun hinnan laskeminen osattiin vuonna 1990 huomattavasti paremmin kuin vuonna 1979, mutta sen sijaan palkankorotustehtävissä suoritukset olivat heikommat.

Aikavälin 1990–95 tulosten tarkastelu on mielenkiintoista siinä mielessä, että vuoden 1995 tutkimus oli suurelta osin vuoden 1990 tutkimuksen ‘replikointi’: otoskoulut olivat täsmälleen samat ja mittarit myös suurelta osin samat. Kokonaisuutena tulokset osoittivat, että vuonna 1995 yhdeksäsluokkalaisten keskimääräinen suoritustaso oli samaa luokkaa tai hieman parempi kuin vuonna 1990. Eri sisältöalueilla muutokset vaihtelivat ja olivat yleensä vain muutaman prosenttiyksikön luokkaa (ks. liite 1: taulukko 11).

Vuodesta 1990 oppilaiden suoritukset heikkenivät lievästi laskutoimitusten ja (polynomi)algebran kohdalla. Sen sijaan funktio-opin, yhtälöiden, geometrian ja soveltavan matematiikan sisältöalueilla tulokset paranivat hieman (enimmillään 5 prosenttiyksikköä). Oppilaat osasivat selvästi paremmin mm. funktio-opin tehtävän, joka käsitteli funktion kulun tutkimista koordinaatistossa. Yhtälöiden sisältöalueella puolestaan paremmin osattuja tehtäviä olivat sekä ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen että yhtälön muodostaminen käytännön tilanteesta. Kaikki soveltavan matematiikan tehtävät (15 kpl) yhdeksäsluokkalaiset osasivat ratkaista vuonna 1995 paremmin tai samantasoisesti kuin vuonna 1990.

Vuosina 1990 ja 1995 arvioitiin myös yhdeksäsluokkalaisten ratkaisutapoja erilaisissa matematiikan ongelmatehtävissä. Tehtävät koskettelivat mm. säännönmukaisuuden havaitsemista ja jatkamista, säännön tai toimintaperiaatteen löytämistä (yleistämistä) ja systemaattista työskentelyä. Tehtävissä oppilaiden oli annettava vastauksia ja perusteluja useisiin suoritusten etenemistä jäsentäviin kysymyksiin. Tulosten mukaan oppilaiden ratkaisutavat olivat molempina vuosina hyvin samanlaiset näissä tehtävissä (ks. Kupari 1996). Onnistumisprosentit olivat korkeita sellaisissa kysymyksissä, joissa vastaukseksi odotettiin tiettyä lukua. Sitä vastoin niissä kysymyksissä, joissa oppilailta edellytettiin perustelemista ja yleistysten tekemistä, hyväksytyjen suoritusten määrät putosivat rajusti ja vastaamatta jättäneiden oppilaiden osuudet kohosivat. Varsin suuri osa oppilaista teki yleistyksiä osittaisen tiedon perusteella ja vain harvat oppilaat pystyivät tekemään perusteltuja yleistyksiä. Vuonna 1995 yhdeksäsluokkalaiset selviytyivät näistä ongelmatehtävistä hieman paremmin kuin vuonna 1990. Oppilaat pyrkivät myös paremmin antamaan oman vastauksensa tai perustelunsa tehtävien kysymyksiin eivätkä jättäneet niihin niin helposti vastaamatta. Tältä osin kehityksen suunta näyttäisi hyvältä, sillä juuri olennaisen tiedon havaitseminen, säännönmukaisuuksien tunnistaminen ja uudenlaisten tilanteiden hallitseminen ovat tulevaisuuden yhteiskunnassa ja työelämässä tarvittavaa osaamista.

3.3.4 Matematiikan oppimistuloksiin vaikuttavia tekijöitä

Oppiminen on monivaiheinen ja kompleksinen prosessi ja tutkimusten perusteella hyvin monien tekijöiden on havaittu olevan yhteydessä myös matematiikan oppimistuloksiin (mm. Robitaille & Garden 1989; The Underachieving Curriculum 1987). Yleisimmin oppimistulosten yhteydessä tarkasteltuja taustamuuttujia ovat olleet mm. oppilaan sukupuoli, matematiikan kotitehtäviin käytetty aika, vanhempien koulutus, opettajan kokemus, opetusryhmän koko ja koulun koko (mm. Robitaille & Garden 1989). Seuraavassa tarkastellaan lyhyesti millaisia yhteyksiä on peruskoulun arviointitutkimuksissa löydetty eräiden tyypillisten taustamuuttujien ja matematiikan oppimistulosten välille. Näissä tarkasteluissa oppilaiden oppimistuloksia on kuvattu suorituspistemäärällä, joka pohjautuu kaikkiin oppilasotokselle esitettyihin koetehtäviin.

Matematiikan oppimistuloksiin yhteydessä olevia tekijöitä voidaan analysoida ensinnäkin siten, että tarkastellaan yksittäisten taustamuuttujien vaikutuksia oppimistuloksiin. Tällä tavoin analysoituja tuloksia on esitelty monissa aiemmissa julkaisuissa (mm. Kupari 1993b; Kupari 1996b). Näissä julkaisuissa on tarkasteltu mm. oppilaiden sukupuolen, koulujen maantieteellisen sijainnin, opetusryhmän koon ja oppilaiden kotitehtäviin käyttämän ajan yhteyttä oppilaiden matematiikan suorituksiin.

Vuosien 1990 ja 1995 arvioinneissa tyttöjen ja poikien matematiikan oppimistulokset olivat hyvin samantasoiset. Kokonaisuutena tarkastellen sukupuolten väliset suorituserot eivät millään luokkatasolla olleet tilastollisesti merkitsevät.

Alueellisen tasa-arvon toteutuminen on myös näkynyt varsin selvästi arviointien tuloksissa. Kaikilla luokka-asteilla oppilaiden matematiikan oppimistulokset ovat olleet hyvin samanlaiset eri puolilla maata. Tosin vuoden 1995 tulokset antoivat viitteitä siitä, että jonkinasteista alueiden ja koulujen välistä erilaistumista saattaisi olla syntymässä. Kun esimerkiksi vuonna 1990 koulujen välinen vaihtelu oli ollut noin 8 % oppimistulosten kokonaisvaihtelusta, niin vuonna 1995 se oli noin 11 %. Vaikka koulujen välinen vaihtelu onkin ollut hyvin pientä verrattuna oppilaiden väliseen vaihteluun koulujen sisällä, on kysymys erilaisuuden lisääntymisestä tärkeä ja vaatii jatkossa perusteellisempaa selvittämistä.

Eräinä mahdollisina selityksinä matematiikan suorituksissa ilmeneviin eroihin on usein pidetty opetusryhmän kokoa ja sitä aikaa, jonka oppilaat käyttävät kotitehtäviinsä. Näitä koskevat arviointitutkimusten tulokset ovat olleet kiinnostavia ja jopa yllättäviä. Vuonna 1990 peruskoulun yhdeksännellä luokalla oppilaiden kotityön määrän ja suoritusten välillä ei havaittu yhteyttä. Sen sijaan muilla luokka-asteilla ja erityisesti 4. luokalla yhteys oli selvästi nähtävissä ja se oli negatiivinen. Tämä tarkoitti sitä, että mitä paremmat olivat oppilaan matematiikan suoritukset, sitä vähemmän hän käytti aikaa kotitehtäviinsä. Erot olivat tilastollisesti merkitsevät niiden oppilasryhmien välillä, jotka käyttivät kotitehtäviin

aikaa noin 10 minuuttia ja enemmän kuin 25 minuuttia. Vaikka tulos onkin hieman hämmennävä, on se kuitenkin sopusoinnussa mm. toisen kansainvälisen matematiikkatutkimuksen tulosten kanssa (Robitaille & Garden 1989) ja verraten perustellusti tulkittavissa. Enemmistö neljäsluokkalaisista pystyy oppituntien aikana omaksumaan käsitellyt asiat ja ehtii usein jo koulussa tekemään osan heille annetuista kotitehtävistä. Näille oppilaille on riittävää käyttää noin 10–20 minuuttia loppuihin kotitehtäviin, jotka vielä yleensä ovat tunnilla käsiteltyjen kaltaisia. Sen sijaan, jos oppilas joutuu käyttämään paljon aikaa kotitehtäviinsä, on se todennäköisesti merkki jonkinasteisista vaikeuksista oppimisessa, joista selviytymiseen hän tarvitsisi tukea ja apua.

Tulosten perusteella opetusryhmän koon ja oppimistulosten välinen yhteys on varsin monisyinen. Mitään suoraa yhteyttä ei kummassakaan arvioinnissa voitu havaita. Tulos on yhdenmukainen toisen kansainvälisen matematiikkatutkimuksen kanssa, jonka mukaan useimmissa maissa luokkakoolla ei ollut yhteyttä oppilaiden suorituksiin (Robitaille & Garden 1989). Esimerkiksi vuonna 1995 peruskoulun yhdeksäsluokkalaiset ylsivät varsin hyvin suorituksiin 20–23 oppilaan opetusryhmissä verrattuna 16–18 oppilaan opetusryhmiin. Samalla on kuitenkin pidettävä mielessä, että opetusryhmän koolla on tärkeä välillinen vaikutus opetuksen järjestämiseen sekä ryhmän sosiaaliseen ja affektiiviseen käyttäytymiseen ja sitä kautta myös oppilaiden oppimiseen.

Useiden taustamuuttujien samanaikaista vaikutusta suoritusmuuttujaan analysoidaan tavallisesti erilaisten monimuuttujamenetelmien (esim. varianssianalyysi, regressioanalyysi, polkuanalyysi) avulla. Koulutusta koskevissa tutkimuksissa tilanne on yleensä kuitenkin sellainen, että monien aineiston eri tasoilla (oppilas, opettaja, koulu) olevien taustatekijöiden vaikutus on yhtäaikainen, mitä monimutkaistaa lisäksi käytetty otantamenetelmä. Tällöin yhteyksien analysoinnissa on tarpeen käyttää *tilastollisia monitasomalleja* (Goldstein 1995; Malin 1997), jotka mahdollistavat sekä aineiston ryväsvaikutuksen huomioimisen että eri tasoilla olevien muuttujien käsittelyn samassa mallissa. Koska monitasomalleja käytetään myöhemmin tämän tutkimuksen tulosten analysoinnissa, tehdään niiden tarkempi esittely vasta luvussa 5.6. Seuraavassa esitellään tuloksia, jotka on saatu analysoimalla vuosien 1990 ja 1995 aineistoja monitasomallien avulla. Analysoinnin kohteena ovat olleet neljännen ja yhdeksännen luokan aineistot.

Vuoden 1990 tulokset

Ensimmäisessä vaiheessa molempien luokka-asteiden analyyseihin valittiin aikaisemman tiedon perusteella kahdeksan taustamuuttujaa. Ensimmäistä eli oppilastasoa koskevat taustamuuttujat olivat oppilaan sukupuoli, kodin antama apu kotitehtävissä, oppilaan matematiikan kotitehtäviin käyttämä aika ja oppilaan halukkuus koulunkäynnin jatkamiseen peruskoulun jälkeen. Toiselta eli opettaja/koulutasolta valitut muuttujat olivat opettajan työkokemus, opetusryhmän koko, opettajan käyttämä matematiikan oppikirja ja opettajan

oppituntien valmisteluun käyttämä aika. Selitettävänä muuttujana oli matematiikan suorituspistemäärä, joka oli standardoitu siten, että sen keskiarvo oli 100 ja hajonta 10. Aineistoihin sovitettiin kaksitasomalleja. Tulosten mukaan kodin antamalla avulla kotitehtävissä ja oppilaan jatko-opiskeluhaluudella oli voimakkain vaikutus oppilaan matematiikan suorituksiin sekä neljännellä että yhdeksännellä luokalla. Oppilaiden kotitehtäviin käyttämä aika oli molemmilla luokilla yhteydessä suorituksiin siten, että paremmin suoriutuvat oppilaat käyttivät kotitehtäviin vähemmän aikaa. Opettajan kokemuksella oli neljännellä luokalla myös vähäinen vaikutus oppilaiden suorituksiin. Muilla tekijöillä ei ollut tilastollisesti merkittävää vaikutusta. Nämä havainnot kertovat kodin 'henkisen panostuksen' tärkeästä merkityksestä oppilaiden oppimiselle.

Seuraavassa vaiheessa malleihin lisättiin taustamuuttujia, joilla regressioanalyysin pohjalta näytti myös olevan yhteyttä oppilaiden suorituksiin. Tällaisia oppilastason muuttujia olivat mm. asennemuuttujat (asennefaktorit, liite 1: taulukot 6–7) ja yhdeksännellä luokalla lisäksi isän koulutus, oppilaan mielipide matematiikan määrästä koulussa ja oppilaan matematiikan harrastaminen. Opettajatasoa kuvaavia lisämuuttujia olivat mm. täydennyskoulutuksen määrä, opetuksen painotukset ja kotitehtävien luonne. Tulokset on esitetty taulukoissa 3.2 ja 3.3.

Taulukko 3.2 Neljännen luokan matematiikka-aineistoon sovitetun kaksitasomallin estimaatit ja niiden keskivirheet (sulkeissa) vuonna 1990.

Selittäjä	Kerroinestimaatti (keskivirhe)
Vakio	111.4 (1.725)
Kotitehtäviin käytetty aika	-0.063 (0.016)
Kodin apu kotitehtävissä	2.730 (0.681)
Jatko-opiskeluhalukkuus	2.140 (0.576)
Matematiikan koettu vaikeus	-1.175 (0.103)
Opettajakokemus	0.067 (0.042)
Kokonaisvarianssista on koulujen välistä vaihtelua	7.574 (2.299)
Kokonaisvarianssista on oppilaiden välistä vaihtelua koulujen sisällä	61.57 (3.028)

Taulukko 3.3 Yhdeksännen luokan matematiikka-aineistoon sovitetun kaksitasomallin estimaatit ja niiden keskivirheet (sulkeissa) vuonna 1990.

Selittäjä	Kerroinestimaatti (keskivirhe)
Vakio	99.82 (1.079)
Kotitehtäviin käytetty aika	-0.084 (0.023)
Kodin apu kotitehtävissä	2.276 (0.616)
Jatko-opiskeluhaluus	7.294 (0.613)
Mielipide matematiikan määrästä koulussa	-3.587 (0.601)
Matematiikan harrastaminen	3.993 (1.027)
Kokonaisvarianssista on koulujen välistä vaihtelua	6.206 (1.946)
Kokonaisvarianssista on oppilaiden välistä vaihtelua koulujen sisällä	71.56 (3.378)

Taulukoissa kuvatut mallit eivät paljoakaan poikenneet ensimmäisen vaiheen malleista. Neljännen luokan malliin tuli uutena vaikuttavana muuttujana matematiikan vaikeutta kuvastava asennefaktori. Miinusmerkki tarkoitti sitä, että mitä vaikeampana oppilaat kokivat matematiikan, sitä heikommat heidän suorituksensa olivat. Toinen muutos oli se, että opettajakokemuksen vaikutus oppilaiden suorituksiin ei tässä mallissa ollut enää tilastollisesti merkitsevä. Myöskään muilla opettajatason muuttujilla ei ollut (tilastollisesti merkitsevää) yhteyttä oppilaiden suorituksiin.

Yhdeksännen luokan malliin sisältyi kaksi uutta oppilastason muuttujaa. Toinen muuttuja koski matematiikan määrää koulussa ja toinen matematiikan harrastamista. Oppilaiden, joiden mielestä koulussa oli liikaa matematiikan tunteja, suoritukset olivat heikommat kuin niiden oppilaiden, joiden mielestä matematiikkaa oli sopivasti tai liian vähän. Muuttuja kuvasi selkeästi oppilaiden yleistä suhtautumista (asenoitumista) matematiikkaa kohtaan. Matematiikan harrastamista kuvaavan muuttujan sisältyminen malliin tuntuu hyvin ymmärrettävältä. Malliin ei sisällynyt yhtään tilastollisesti merkitsevää opettaja- tai koulutason muuttujaa.

Vuoden 1995 tulokset

Vuoden 1995 oppimistulostarkastelut koskevat vain peruskoulun yhdeksättä luokkaa. Kaksitasoiseen malliin sisällytetyt taustamuuttujat olivat tuolloin miltei täsmälleen samat kuin vuoden 1990 jälkimmäisessä mallissa. Oppilasmuuttujista asennefaktoreiden sisältö oli osittain erilainen kuin viisi vuotta aikaisemmin (ks. liite 1: taulukko 7) ja matematiikan harrastamista käsittelevä muuttuja puuttui kokonaan. Opettajamuuttujat olivat samat. Aineistoon sovittamisen tuloksena saatu ratkaisu on esitetty taulukossa 3.4.

Taulukko 3.4 Yhdeksännen luokan matematiikka-aineistoon sovitetun kaksitasomallin estimaatit ja niiden keskivirheet (sulkeissa) vuonna 1995.

Selittäjä	Kerroinestimaatti (keskivirhe)
Vakio	75.240 (1.628)
Sukupuoli (tytöt)	1.167 (0.481)
Jatko-opiskeluhaluus	5.296 (0.521)
Luottamus matematiikan oppimiseen	6.298 (0.325)
Isän koulutus	0.663 (0.341)
Matematiikan oppikirja	1.433 (0.692)
Kokonaisvarianssista on koulujen välistä vaihtelua	4.655 (1.377)
Kokonaisvarianssista on oppilaiden välistä vaihtelua koulujen sisällä	47.56 (2.204)

Taulukon 3.4 esittämä selitysmalli on varsin erilainen kuin vuonna 1990. Ainoa malleissa säilynyt yhteinen muuttuja oli jatko-opiskeluhaluus, jonka vaikutus molemmissa malleissa oli suuri. Matematiikan oppimiseen luottamista kuvaavalla asennefaktorilla oli mallissa jatko-opiskeluhaluuttaikin vahvempi yhteys oppilaiden saavutuksiin. Myös oppilaiden sukupuoli oli saavutuksiin yhteydessä siten, että tyttöjen saavutukset olivat paremmat kuin poikien. Isän koulutustason yhteys saavutuksiin oli juuri ja juuri tilastollisesti merkitsevä. Opettaja- ja koulutason muuttujista oli mallissa mukana yksi selittäjä eli matematiikan oppikirja. Yhtä tiettyä oppikirjaa käyttäneiden oppilaiden suoritukset olivat paremmat kuin muita oppikirjoja käyttäneillä.

Edellä kuvatuissa eri luokka-asteiden ja eri vuosien selitysmalleissa oli paljon yhteistä, mutta myös selviä eroavuuksia. Yhteistä kaikissa malleissa oli se, että oppilaiden omalla motivoituneisuudella ja asennoitumisella (jatko-opiskeluhaluus, asennemuuttujat) ja

toisaalta kodin tarjoamalla 'eväillä' (vanhempien koulutus, apu kotitehtävissä) oli merkittävä vaikutus oppilaiden matematiikan oppimistuloksiin. Erot malleissa voivat johtua monista tekijöistä, esimerkiksi opetuksen tavoite-eroista, opetuksessa tapahtuneista muutoksista, oppilas- ja opettajaotoksista, käytetyistä kokeista ja kyselyistä, jne. Olennaista tämän tutkimuksen kannalta on se, että nämä selitysmallit toimivat vertailupohjana, kun luvussa 6.6 arvioidaan opettajien uskomusten ja oppilaiden matematiikan oppimistulosten (sekä tiedolliset että asennetulokset) välisiä yhteyksiä.

4 MATEMATIIKAN OPETTAJA JA MATEMATIIKKAUSKOMUKSET

“Whether one is considering society’s influences on the classroom, textbooks or other teaching materials, cultural influences, curriculum change, technology or whatever, they all will be mediated through the teacher, and specifically through the teacher’s beliefs about his/her role in her students’ learning of mathematics.” (Lerman 1993, 62)

4.1 Matematiikan opetus ja sen uudistamisen sietämätön vaikeus

Tarkastellaan esimerkkinä erään opettajan työskentelyä hänen opettaessaan tilastoppiä. Oppitunnin tavoitteena oli opettaa oppilaille, miten frekvenssitaulukon muodossa esitetyille aineistolle lasketaan erilaisia keskilukuja (keskiarvo, mediaani, moodi). Tunnin aikana opettaja yritti näyttää oppilaille selkeät suoritusmenettelyt näiden tilastolukujen laskemiseksi. Koska monet oppilaista eivät pystyneet tunnistamaan edes yksittäisiä havaintoarvoja, niin ainoa tapa, jolla he saattoivat pysyä opetuksessa mukana, oli seurata rutiininomaisesti opettajan kertomaa menettelyä.

Kun oppilaat eivät ymmärtäneet opettajan esityksestä juuri mitään, he alkoivat turhautua enemmän ja enemmän. Opettaja yritti kyselemällä saada selville asian perillemenoa, mutta hän kiinnitti huomionsa ainoastaan vastausten oikeellisuuteen. Mikäli oppilaan vastaus ei ollut oikean menettelytavan mukainen, niin opettajan mielestä se oli väärin. Opettaja ei kuunnellut oppilaiden vastausten sisältöä eikä siten yrittänyt todella ymmärtää oppilaidensa ajatuksia, jotta olisi voinut ohjata heidän ajatteluaan pidemmälle. Hän yksinkertaisesti pyrki ohjaamaan oppilaansa suorittamaan oppikirjassa esitetyt menetelmät.

Analysoitaessa oppituntia jälkeensä opettaja oli turhautunut. Hän todella välitti oppilaidensa matematiikan oppimisesta, mutta hän ei ymmärtänyt miksi heillä oli vaikeuksia. Hän soimasi itseään siitä, ettei ollut opettanut riittävän hyvin ja oppilaita siitä, etteivät he olleet yrittäneet tarpeeksi. Hänen mielestään matematiikan oppiminen merkitsi sitä, että oppilaiden täytyi oppia suoritusmenettelyt – hänen omalla kohdallaan se oli ollut tehokasta. Koska opettaja uskoi matematiikan olevan tiettyjen suoritustapojen noudattamista, niin hän ei pystynyt käsittämään, miksi hänen oppilaansa eivät ymmärtäneet matematiikkaa. Itse asiassa, hyvin rajoittuneiden matematiikkauskomustensa vuoksi hän ei pystynyt ymmärtämään oppilaidensa oppimisvaikeuksien syitä.

Tämä Battistan (1992, 466) esittämä esimerkki kuvaa osuvasti sitä tilannetta, jossa matematiikan opettajat eri puolilla maailmaa toistuvasti ovat. Miksi jonkun asian opettaminen ei mennyt perille? Miksi oppilaat eivät oppineet sitä, vaikka minä sen mielestäni opetin selkeästi? Samalla tämä esimerkki antaa viitteitä niistä vaikutuksista, joita matematiikkaan liittyvillä uskomuksilla on opettajien ajatteluun ja toimintaan.

Tällä hetkellä matematiikan opettajat ovat paradigmanmuutoksen keskellä. Bishop ja Goffree (1986) puhuvat muutoksesta 'oppitunti-mallista' (lesson frame) 'sosiaalisen konstruktion malliin' (social construction frame). Edellisessä mallissa matematiikan oppitunti on rakennettu 'tapahtumaksi', jolla on määrätty alku, yksityiskohtaisesti valmisteltu opetusosuus ja määrätty loppu. Sillä on kiinteä ajallinen kesto ja tyypillisesti kaikki oppilaat paneutuvat samoihin opettajan suunnittelemiin, aloittamiin ja kontrolloimiin toimintoihin. Matematiikan opetuksen luonnetta analysoiva laaja tutkimus osoittaa matematiikan traditionaalisen opetustavan olevan yleinen yhä edelleen. 'Matematiikka menetelmänä' -ajattelun voimaperäisyyttä kuvastaa se, että joillakin opettajilla on taipumusta soveltaa sitä jopa sellaisiin sisältöihin, joilla ei ole laskennallista luonnetta (Cobb ym. 1992). Tämä on johtanut siihen, että oppilaiden tarvitsee pelkästään oppia seuraamaan opettajan ohjeita ja toimimaan mekaanisesti. Sen sijaan oppilaiden ei tarvitse käynnistää eikä luoda merkityksellisiä henkisiä prosesseja ("mindless mimicry mathematics", Battista 1992).

Jälkimmäinen lähestymistapa puolestaan tarkastelee matematiikan luokkaopetusta toimintana, jolla ohjailaan luokan organisaatiota ja dynamiikkaa siten, että päästäisiin matemaattisen merkityksen jakamiseen ja kehittämiseen (Bishop & Goffree 1986). Opetuksen kehittämisessä ja uudistamisessa – jossa opettajat ovat avainasemassa – pyrkimyksenä on ollut korvata ajastaan jälkeen jäänyt 'aritmetiikka-opetussuunnitelma' sellaisella opetussuunnitelmalla, joka aidolla tavalla ottaa käsitteellisen ymmärtämisen, päättämisen ja ongelmanratkaisun opetuksen keskeisiksi päämääriksi. Matematiikan opetuksen uudistamisen puolestapuhujat näkevät matematiikan oppitunnit sellaisina, joissa oppilaat

"hankkivat runsaasti erilaisia ja toisiinsa liittyviä oppimiskokemuksia, jotka antavat heille mahdollisuuden ratkaista ongelmia, kirjoittaa ja keskustella matematiikasta, tehdä oletuksia, muotoilla ja testata väitteitä oletusten oikeellisuudesta, arvostaa matemaattista ponnistelua, matemaattisia ajattelutapoja ja matematiikan roolia inhimillisessä toiminnassa sekä saada rohkeutta tutkia, esittää arvauksia ja tehdä myös virheitä, joiden kautta he oppivat luottamaan omaan toimintaansa" (NCTM 1989, 12).

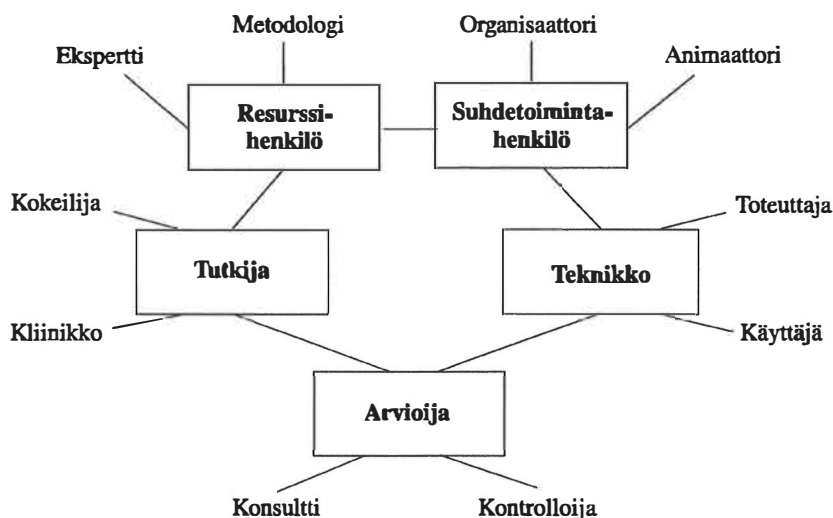
Opetustyössään jokainen matematiikan opettaja työskentelee omalla yksilöllisellä tavallaan. Ajan kuluessa on kuitenkin kehittynyt tietynlaisia opetuksen 'malleja' (vrt. Burton 1989), joiden käyttö on vähitellen yleistynyt, koska ne ovat mm. helpottaneet opetuksen käytännön järjestämistä. Kuhs & Ball (1986) ovat esittäneet neljä vallitsevaa ja toisistaan poikkeavaa näkökulmaa matematiikan opetukselle: 1) *oppijakeskeinen näkemys* (learner-focused), 2) *sisältökeskeinen, käsitteellistä ymmärtämistä korostava näkemys* (content-focused with an emphasis on conceptual understanding), 3) *sisältökeskeinen, suorituksia korostava näkemys* (content-focused with an emphasis on performance) ja 4) *luokkakeskeinen näkemys* (classroom-focused).

Oppijakeskeinen opetusnäkemys pohjautuu tyypillisesti konstruktivistiseen käsitykseen matematiikan oppimisesta (mm. Cobb & Steffe 1983; von Glasersfeld 1987). Siinä opettaja nähdään oppilaiden oppimisen auttajana ja innoittajana, joka nostaa kiinnostavia tilanteita ja kysymyksiä tutkittavaksi, houkuttelee oppilaat ajattelemaan ja auttaa heitä näkemään puutteita omassa ajattelussaan. Oppilaat itse ovat viime kädessä vastuussa omien ideoidensa sopivuuden ja riittävyyden arvioinnista. *Sisältökeskeisessä ja ymmärtämiseen tähtäävässä opetusnäkemyksessä* matemaattinen sisältö on opiskelutoiminnan kohteena ja samalla oppilaille korostetaan ideoiden ja prosessien ymmärtämistä. Kaksi ensimmäistä opetusnäkemystä eroavat mm. siinä, millä tavoin oppisisältö on järjestetty. Oppijakeskeisessä mallissa oppilaiden omat ideat ja kiinnostukset ovat pääosin tarkastelun kohteita, kun taas sisältökeskeisessä mallissa sisällöt on järjestetty matemaattisen struktuurin mukaisesti. Sisältökeskeinen ymmärtämiseen tähtäävä opetusnäkemys eroaa muista kolmesta myös sisällön ja oppijan duaalisen vaikutuksen osalta: yhtäältä sisältö on oppimisen kohteena, mutta toisaalta ymmärtäminen on oppilaiden konstruoimaa. (Kuhs & Ball 1986.)

Myös *sisältökeskeisessä ja suorituksia korostavassa opetusnäkemyksessä* on matemaattisella sisällöllä keskeinen merkitys. Opetuksen sisältö on organisoitu taitojen ja käsitteiden hierarkian mukaan, se esitetään annoksina koko luokalle, pienryhmille tai yksittäiselle oppilaalle ja siihen liittyy oppilaalle välttämättömien taitojen hallinnan ennakoarviointi. Opettajan tehtävänä on selittää ja havainnollistaa opiskeltavaa materiaalia. Vastaavasti oppilaan tehtävänä on kuunnella ja osallistua 'didaktiseen' vuorovaikutukseen (so. vastata opettajan kysymyksiin) sekä tehdä harjoituksia ja tehtäviä opettajan tai kirjan antaman mallin mukaisesti. Tätä opetuksen mallia on kritisoitu kaikkein eniten (mm. Shoenfeld 1985).

Luokkakeskeisessä matematiikan opetusnäkemyksessä on olennaista se, että luokan toiminnan tulee olla hyvin jäsennettyä ja tehokkaasti organisoitua aivan kuten tehokasta opetusta ja tehokasta opettajaa koskeva tutkimus on osoittanut. Tässä mallissa oletetaan, että koulun opetussuunnitelma määrittää oppisisällön. Edelleen lähtöoletuksena on, että oppilaat oppivat parhaiten silloin kun oppitunnit ovat selkeästi jäsennettyjä ja seuraavat tehokkaan opetuksen periaatteita. Opetuksessa opettajalla nähdään olevan aktiivinen rooli, kun hän ohjaa kaikkia luokan toimintoja, esittää selkeästi tunnin materiaalin koko luokalle tai osaryhmille sekä tarjoaa oppilaille mahdollisuuksia harjoitella itsekseen. Tehokkaat opettajat ovat niitä, jotka selittävät taitavasti, jakavat tehtäviä, tarkkailevat oppilaiden työskentelyä, antavat oppilaille palautetta ja johtavat luokkaa ehkäisemällä tai poistamalla häiriötekijät, jotka saattaisivat estää suunnitellun toiminnan sujumisen. Oppilaiden rooliin kuuluu vastaavasti kuunnella tarkkaavaisesti opettajaa ja toimia annettujen ohjeiden mukaisesti vastaamalla kysymyksiin ja suorittamalla opettajan antamat tehtävät. (Kuhs & Ball 1986.)

Matematiikan opetuksen paradigmaattinen muutos ei ole yksinkertainen ja helppo kysymys, sillä se edellyttää myös opettajan roolin ja toimenkuvan muutosta. Sitä vaikeuttaa edelleen nykyaikaisen opettajan roolien ja tehtävien moninaisuus. Tätä voidaan osuvasti kuvata de Perettin esittämällä tavalla (Tella 1994).



Kuva 4.1 Nykyaikaisen opettajan roolit (Tella 1994, 19).

Opettaja – siis myös matematiikan opettaja – on ensinnäkin *resurssihenkilönä* oman alansa pedagoginen asiantuntija. Hänellä on oltava riittävä tieteellinen pohja opetusalaan (matematiikasta), siihen liittyvistä oppimisprosesseista ja oppilaista. *Tutkijana* toimiminen tarkoittaa sitä, että hän pystyy luomaan oppimistilanteita, analysoimaan ja refleктоimaan jatkuvasti omaa työtään sekä suorittamaan pedagogista tutkimusta ja kokeiluja. *Suhdetoimintahenkilönä* toimiminen ei viittaa yksinomaan oppilaisiin, vaan yhä enemmän opettajan panosta tarvitaan koulun toiminnan (esim. tulosvastuullisuus), opetuksen (esim. opetus-suunnitelmatyö) ja yksilöllisten opiskeluohjelmien yhteissuunnittelussa. *Teknikon* roolissa työskentely viittaa paitsi käytännön opetustoimien ja opetusteknisten ratkaisujen hallitsemiseen, myös modernien viestintäteknologisten välineiden asiantuntevaan käyttöön. *Arvioijan* tehtävät tarkoittavat sekä oppimistuotosten ja opintosuoritusten arviointia että oppilaan ja vanhempien valintojen arviointia ja ohjaamista. (Haapasalo 1994, 156; Tella 1994, 18–20.)

Sahlberg (1996) on väitöskirjassaan analysoinut opetuksen, koulun ja opettajan muuttumisen problematiikkaa. Hän katsoo, että opetuksen muuttumisen ja opettajan uudistumisen virrassa opettaja saa parasta apua itseltään ja kollegoiltaan. Nähdessään itsensä osana laajempaa kokonaisuutta, opettaja voi hahmottaa myös omaan muuttumiseen-

sa välittömästi vaikuttavat sidokset, kuten koulun ihmissuhteet, normit ja valtasuhteet. Se auttaa opettajaa näkemään itsensä osana koulun työyhteisöä – ei yksinäisenä ammatilaisena, jolla on kollegoistaan riippumaton tehtävä koulussa. (Sahlberg 1996, 222–223.)

Sahlberg (1996, 97–144) on tuonut myös korostuneesti esille uskomusten merkityksen opettajana kehittymisen kannalta. Hänen mielestään opettajien uskomukset (epistemologiset orientaatiot) vaikuttavat opetuksen ja koulun kehittämisessä siihen, miten opettajat kokevat kohtaamansa uudistukset ja miten uudistusten taustalla olevat oletukset suhtautuvat opettajien uskomuksiin. Koulun kehittäjien onkin tunnettava ja tunnistettava paremmin tilanteen kannalta relevanttien uskomusten ominaisuuksia ja rakenteita. Samalla on pyrittävä ymmärtämään, millä tavalla kehittämisen kannalta ongelmallisten uskomusten muuttamista voidaan vahvistaa.

Arkisessa opetustyössä toimiessaan ja eri rooleissa esiintyessään matematiikan opettajalle muodostuu mitä moninaisimpia ennakkokäsityksiä ja uskomuksia matematiikasta ja sen opettamisesta. Nämä uskomukset syntyvät ja kehittyvät opettajan koko elinkaaren aikana ja niillä on olennaisen tärkeä merkitys hänen opetustoiminnalleen ja jatkuvalla ammatilliselle kehittämiselleen. Seuraavissa luvuissa tarkastellaan uskomusten syntyä ja kehittymistä, uskomusten yhteyksiä opettajien opetuskäytäntöön ja uskomusten muuttamista. Lopussa esitetään katsaus näitä kysymyksiä käsittelevään kotimaiseen ja ulkomaiseen tutkimuskirjallisuuteen.

4.2 Mistä matematiikkauskomukset ovat lähtöisin ja miten ne kehittyvät?

“If the collective parental and adult memory of school mathematics is in fact a largely negative one, this memory can so easily be transmitted as a negative to the next generation, thereby influencing the mathematical expectations of the children, their motivations for studying mathematics, and their predispositions for continuing, or not, to study the subject.” (Bishop 1993, 16)

Jokaisella matematiikan opettajalla on omat uskomuksensa siitä, miten matematiikka tulisi opettaa. Opettajilla on oma tapansa valikoida, jäsentää ja esittää matematiikkaa oppilailleen. Tällöin puhutaan varsin yleisesti matematiikan opetuksen “yksityisistä, käytännöllisistä tai implisiittisistä teorioista” (mm. Clark & Peterson 1986).

Opettajan tietämys ja uskomukset ovat peräisin hyvin monesta lähteestä. Yksi tärkeä lähde on opetettavan aineen eli matematiikan luonne. Luvussa 2 on kuvattu seikkaperäisesti sitä, kuinka erilaisia piirteitä ja ulottuvuuksia matematiikkaan liitetään. Toinen tärkeä uskomuksiin vaikuttava tekijä on se, millaisena matematiikan opettajan tehtävä nähdään tai voidaan nähdä.

Varsin yleisesti ollaan sitä mieltä, että uskomukset syntyvät ja kehittyvät kulttuurisen vaikutuksen seurauksena (Pajares 1992). Van Fleetin mukaan opettajat saavat opetusta

koskevan tietämyksensä ja uskomuksensa lähinnä kolmentoisiinsa kytkeytyvät osaprosessin kautta (Brown & Cooney 1982, 14):

- 1) *Kulttuuriin sopeutumisprosessi*. Oman koulunkäyntinsä aikana yksilö on tekemisissä erilaisten opettajien kanssa. Varsin monet opetukseen ja oppiaineisiin liittyvistä uskomuksista ovat peräisin tältä ajalta.
- 2) *Opetus/kasvatus -prosessi*. Käytännön opetustyö luokkahuone-todellisuudessa sekä vuorovaikutus muiden opettajien ja koulun muun henkilöstön kanssa vaikuttaa merkittävästi opettajien uskomuksiin. Opettaja oppii suoraan omista opettamiskokemuksistaan ja vuorovaikutuksesta opettajakollegojen kanssa.
- 3) *Koulutus-prosessi*. Opettajankoulutuksensa aikana opettajat 'oppivat' opetusmattiin sisältyviä toimintatapoja samoin kuin myös myyttejä ja traditioita.

Pajaresin (1992) mukaan suuri osa uskomuksista saa muotonsa jo hyvin varhaisessa vaiheessa. Kaikkein vahvimpia ja ehkä myös merkityksellisimpiä ovat ne uskomukset ja käsitykset, jotka yksilöille ovat muodostuneet omana kouluaikana ja opettajankoulutuksessa. Opettajien, vanhempien ja muiden aikuisten vaikutus lasten ja nuorten matematiikan opiskeluun välittyy nimittäin paljolti sitä kautta, millaisia heidän uskomuksensa, muistonsa ja mielikuvansa koulun matematiikasta ovat olleet (Bishop 1993). Esimerkiksi englantilaisen aikuisväestön matemaattista osaamista ja kokemuksia koskeva tutkimus (Mathematics counts 1982) paljasti, että erityisen vahvoja olivat kokemukset heikosta opetuksesta ja piittaamattomista opettajista. Lisäksi monilla oli mielikuva matematiikasta oppiaineena, jonka opiskelusta puuttui merkitys heidän henkilökohtaiseen elämäänsä. Useille aikuisille nämä negatiiviset mielikuvat matematiikasta olivat niin vahvoja, että heidän mielestään matematiikan osaamattomuus on sosiaalisesti hyväksyttävää. Olisikin ihmeellistä, ellei tällaisilla uskomuksilla ja asenteilla olisi vaikutusta niiden vaikutuspiirissä oleviin lapsiin ja nuoriin. Toisaalta yksilöiden kokemukset oman kouluaikansa matematiikan opettajista voivat olla yhtä lailla hyvin positiivisia ja innostavia, jopa niin, että niillä on ratkaiseva vaikutus lähteä opiskelemaan matematiikan opettajaksi.

Opettajankoulutusaika on varsin kriittinen vaihe matematiikan opettamista ja oppimista koskevien uskomusten kannalta. Lermanin (1993) mielestä tämä koskee erityisesti luokanopettajia, joilla matematiikan opiskelu on yleensä ollut selvästi vähäisempää kuin esimerkiksi aineenopettajilla. Tästä johtuen luokanopettajilla ei myöskään yleensä ole vahvaa luottamusta omaa matematiikan oppimistaan kohtaan. Mikäli opettajankoulutuksessa opettajakokelaille opetetaan matematiikkaa samalla tavoin, kuin millä he opiskelivat sitä koulussa, niin luottamuksen puutteeseen, alisuoriutumiseen ja epäonnistumisen tunteisiin

liittyvät 'mallit' (uskomukset) jäävät todennäköisesti heidän opettajuuteensa ja välittyvät yhä edelleen (Lerman 1993). Koska lasten ensimmäiset matematiikkakokemukset tapahtuvat vuorovaikutuksessa luokanopettajien kanssa, on kyseessä yksi matematiikan opetuksen tärkeimmistä ja useimmin esillä olleista ongelmakohdista. Yksi tärkeä askel tällaisen 'negatiivisen kehän' murtamisessa onkin se, että oppilaita opetetaan sillä tavoin kuin heidän odotetaan opettavan seuraavia sukupolvia.

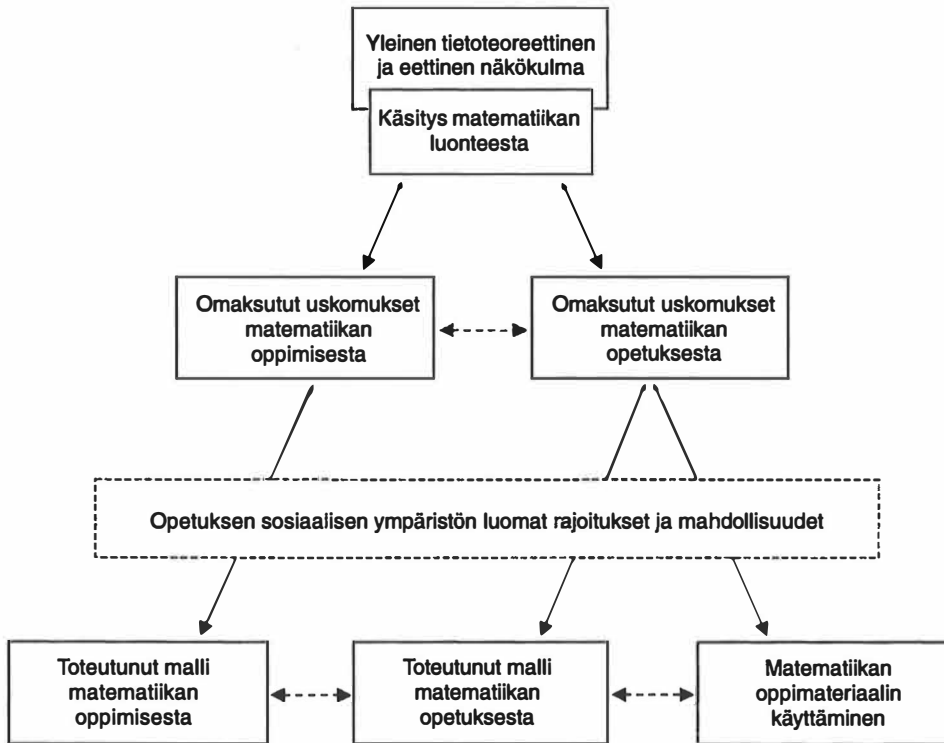
Myös oppimateriaalit heijastelevat erilaisia uskomuksia matematiikasta ja matematiikan opetuksesta (Conroy 1987). Jos opettaja on vahvasti sitoutunut käyttämään tiettyjä materiaaleja, niin silloin näiden materiaalin tekijöiden matematiikkauskomukset voivat vaikuttaa opettajan omiin uskomuksiin.

4.3 Opettajien matematiikkauskomusten ja opetuskäytännön välisistä yhteyksistä

“The social context of mathematical education leads the teacher to internalise a powerful set of constraints affecting the enactment of the models of teaching and learning mathematics. The socialization effect of the context is so powerful that despite having differing beliefs about mathematics and its teaching, teachers in the same school are often observed to adopt similar classroom practices.” (Ernest 1989b, 252–253.)

On olemassa runsaasti tutkimusta, jonka mukaan opettajan uskomuksilla matematiikasta sekä sen oppimisesta ja opettamisesta on tärkeä merkitys sille, millaisiksi opettajien opetuksellinen käytäntö muotoutuu (mm. Ernest 1989b; Nespor 1985; Thompson 1992). Lukuisissa tutkimuksissa on kuitenkin havaittu myös ristiriitaisuuksia opettajien matematiikan opetusta koskevien uskomusten ja heidän opetuskäytäntönsä välillä. Nämä epä johdonmukaisuudet osoittavat, että opettajien uskomukset matematiikan opetuksesta ja oppimisesta eivät ole yksinkertaisessa syy-seuraus-suhteessa heidän opetuksellisiin käytäntöihinsä. Pikemminkin on perusteltua olettaa, että yhteys on monimutkainen ja siihen vaikuttavat monet tekijät. Yksi merkittävä vaikutuslähde on se sosiaalinen konteksti – kaikkine rajoituksineen ja mahdollisuksineen – jossa matematiikkaa opetetaan. Tässä kontekstissa vaikuttavat oppilaiden, vanhempien, opettajakollegojen ja hallintoväen arvot, uskomukset ja odotukset, opetussuunnitelma ja sen arviointikäytänteet sekä koko koulutusjärjestelmän arvot ja filosofiset lähtökohdat (Thompson 1992).

Matematiikan opettajien uskomusten ja heidän opetuskäytäntönsä välisiä yhteyksiä voidaan hahmottaa Ernestin (1989a, 20–28; 1991, 289–291) ja Furinghettin (1996, 21–24) esittämällä tavalla (ks. kuvio 4.1).



Kuvio 4.1 Opettajien matematiikkauskomusten ja opetuksen käytännön väliset yhteydet (Ernest 1991, 290; Furinghetti 1996, 21).

Kuvio on luonnollisesti yksinkertaistettu, sillä todellisuudessa yhteydet ovat huomattavasti kompleksisempia. Kuvio osoittaa kuitenkin, kuinka opettajien 'henkilökohtainen' teoria tai filosofia matematiikan luonteesta luo perustan opettajien *omaksuille uskomuksille* matematiikan opetuksesta ja oppimisesta. Ernestin (1989a) mukaan nämä uskomukset ovat 'ajatusrakennelmia' ja jopa tietynlaisia malleja, jotka muovaavat opettajan käyttäytymistä. Uskomusten vaikutus välittyy sellaisten oppituntityöskentelyn yksityiskohtien kautta kuten opiskelutehtävien valinta, oppilaiden virheiden käsittely, oppilaiden omien ajatusten hyväksyminen ja oppikirjan esitystavan seuraamisen tarkkuus.

Opettajan omaksumat uskomukset matematiikan opetuksesta määrittävät hyvin merkittäväällä tavalla sitä, millä tavoin matematiikkaa opetetaan kouluyhteisön tarjoamissa olosuhteissa. Niillä on kytöksensä uskomuksiin matematiikkatieteestä ja matematiikan oppimisesta kuvion osoittamalla tavalla ja ne rakentuvat opettajan hankkimasta oppisisältötiedosta, pedagogisesta sisältötiedosta ja kokemusaineistosta. Furinghettin (1996) mukaan matematiikan oppisisältötiedolla on voimakas vaikutus opetusta koskeviin uskomuksiin,

koska opettaja ratkaisee opetuksen lähestymistapansa (mm. sisältöjen valinnan, opiskelun syvyyden, teorian ja käytännön työskentelyn välisen suhteen) pääasiallisesti sisältötietämyksensä pohjalta. Osa opettajan omaksumista uskomuksista on tietoisia ja osa tiedostamattomia. Furinghetti (1996) nimittää tiedostamattomia uskomuksia *haamuiksi* (ghosts) ja katsoo, että myös ne ovat oppitunneilla läsnä aiheuttaen epäsointuja ja ristiriitaisuutta matematiikan opetukseen.

Opettajan omaksumat uskomukset opetuksesta ja oppimisesta välittyvät sitten *koulutyön sosiaalisen kontekstin* (kouluyhteisön toimintatavat, säädökset, rajoitukset, mahdollisuudet, fyysiset olosuhteet jne.) läpi, jolloin ne muuntuvat opetuskäytännöiksi. Niistä tulee opettajan käyttötietoa, jonka avulla hän toteuttaa jokapäiväistä opetustyötään. Tätä välittymisen jälkeistä tilannetta on kuviossa kuvattu matematiikan oppimisen ja opetuksen *toteutuneilla malleilla* sekä *oppimateriaalin käytöllä*. Erottelu o maksuttujen ja toteutuneiden mallien välillä on välttämätön, koska tapaustutkimukset ovat osoittaneet näiden välillä voivan olla suuriakin eroja. Oppimateriaalin esittäminen omana vaikuttavana tekijänä on perusteltua, koska sillä, kuinka tarkkaan niiden esitystapaa ja -järjestystä noudatetaan, on havaittu olevan olennaisen tärkeä merkitys opetussuunnitelman tavoitteiden toteutumiselle (mm. Cooney 1988).

On olemassa useita syitä sille, että opettajien uskomusten ja opetuskäytännön välillä on epäsuhtaa (Ernest 1989a, 1989b; Furinghetti 1996). Ensiksikin tärkeä tekijä on se, kuinka 'syvällä' uskomukset ovat eli missä määrin ne ovat kiinnittyneet muihin tietoihin ja uskomuksiin. Jos uskomukset ovat löyhästi kiinnittyneitä ja ilman rikkaita kytkeitä, ei ole lainkaan yllättävää, että uskomukset ja käytäntö eivät vastaa toisiaan.

Toinen merkittävä tekijä on opettajan tietoisuuden taso omista uskomuksistaan ja se, kuinka paljon opettaja reflektoi omaa opetuskäytäntöään. Missä määrin opettajien uskomukset ovat johdonmukaisia heidän opetuskäytäntönsä kanssa, riippuu Thompsonin (1984) mukaan opettajien taipumuksesta reflektoida omaa toimintaansa – pohtia omia tekemisistään suhteessa omiin uskomuksiin, oppilaisiin, oppiainekseen ja opetustilanteisiin. Reflektoimalla omia käsityksiään ja toimintojaan opettajat tulevat tietoisiksi äänettömistä olettamuksistaan, uskomuksistaan ja näkemyksistään sekä siitä, kuinka ne liittyvät heidän käytännön ratkaisuihinsa. Reflektion avulla opettajat kehittävät yhtenäisen, perustellun perustan näkemyksilleen, olettamuksilleen ja toiminnoilleen ja tulevat tietoisiksi käyttökelpoisista vaihtoehdoista. Myös Ernest (1989a,b) ja Furinghetti (1996) ovat korostaneet reflektoinnin keskeistä merkitystä opetukselle. Kun opettajat reflektoivat omien toimenpiteidensä vaikutuksia oppilaisiin, he kehittävät ns. kontekstiherkkyttä, jonka avulla he pystyvät valitsemaan ja toteuttamaan tilannekohtaisesti sopivaa opetusta noudattaen omia uskomuksiaan ja mallejaan.

Kolmanneksi koulun sosiaalisella kontekstilla on voimakas vaikutus. Tämä välittyy esimerkiksi kouluyhteisön eri intressiryhmien (oppilaat, vanhemmat, opettajakollegat,

rehtori) erilaisina odotuksina. Myös opetussuunnitelmalla (oppisisällöt, oppimateriaalit, arviointiohjeet, opetusjärjestelyt, koulutusjärjestelmän rakenne jne.) on oma merkittävä roolinsa opetustyössä. Näiden välitysmekanismien kautta opettajaan kohdistuu samanaikaisesti voimakkaita ja usein erisuuntaisia paineita, jotka vaikuttavat omien opetus- ja oppimiskuskomusten hyväksymiseen. Sosiaalistamiseksi voimakkuutta kuvastaa hyvin se, että vaikka saman koulun opettajilla olisikin erilaiset uskomukset matematiikasta ja sen opettamisesta, niin silti he noudattavat varsin samanlaisia opetuskäytäntöjä (Ernest 1989a). Kouluyhteisöllä sosiaalisena ympäristönä on siten hyvin tärkeä merkitys uskomusten muotoutumisessa siksi, että opettajan omaksumat uskomukset suodattuvat sen kautta ja voivat toteutuvassa muodossaan olla jopa ristiriitaisia omaksuttujen kanssa.

On havaittu, että osa opettajista ei koe minkäänlaista ristiriitaa uskomustensa ja opetustapansa kesken ja toiset taas oppivat elämään ratkaisemattomien ristiriitatilanteiden kanssa. Kuitenkin jotkut opettajat näyttävät uudelleen organisoivan uskomuksiaan niiden paineiden vaikutuksesta, joita he työssään ja opetuksessaan kohtaavat (mm. Franke ym. 1997).

4.4 Opettajien matematiikkauskomusten muuttuminen

“The earlier a belief is incorporated into a belief structure, the more difficult it is to alter, for these beliefs subsequently affect perception and strongly influence the processing of new information. It is for this reason that newly acquired beliefs are most vulnerable. With time and use, they become robust, and individuals hold on to beliefs based on incorrect or incomplete knowledge even after scientifically correct explanations are presented to them.” (Pajares 1992, 317.)

Tietämys opettajien uskomusten ja käsitysten tärkeästä merkityksestä matematiikan opetukselle on nostanut esiin kysymyksen siitä, millä tavoin opettajien uskomuksiin matematiikasta ja sen opetuksesta ja oppimisesta voidaan vaikuttaa ja miten niitä voidaan rikastaa. Nesporin (1987) tapaan voitaisiin myös kysyä, onko siihen tarvetta, onko se mahdollista tai onko se edes suotavaa? Seuraavassa näitä kysymyksiä pohditaan sen tutkimustiedon pohjalta, jota viimeisen kymmenen vuoden aikana on tuotettu varsin runsaasti (mm. Kaplan 1991; Pajares 1992; Pehkonen & Törner 1994; Posner ym. 1982; Shaw ym. 1991; Thompson 1991).

Pajares (1992) on Posneriin ym. (1982) pohjaten analysoinut uskomusten ja käsitysten muuttumisen mahdollisuuksia ja todennut niiden muuttumisen etenkin aikuisiällä hyvin harvinaiseksi. Jotta uskomukset voisivat muuttua, on yksilöiden oltava tyytymättömiä olemassaoleviin uskomuksiinsa, minkä lisäksi uusien uskomusten on oltava ymmärrettäviä ja vakuuttavia. Tämän lisäksi uusien uskomusten on oltava yhdenmukaisia järjestelmän

muiden uskomusten kanssa. Uskomusten korvautuminen on siten epätodennäköistä, elleivät ne osoittaudu tarpeettomiksi, mikä voi puolestaan tapahtua vain silloin, kun yksilö asettaa ne kyseenalaisiksi eikä pysty enää sulauttamaan niitä uskomusjärjestelmäänsä. Mikäli tällainen tilanne syntyy, on uskomuksen muuttuminen kuitenkin viimeinen vaihtoehto. Posner ym. (1982) nimittäin havaitsivat tutkimuksessaan, että opiskelijat mitätöivät uuden informaation ja pitivät sitä asiaankuulumattomana ja lopulta jopa pakottivat sen 'sopimaan' omiin uskomuksiinsa, ennen kuin edes harkitsivat uskomustensa muuttamista.

Nisbett ja Ross (1980) ovat kuvanneet tätä uskomusten kestävyysilmiötä ja sen ominaispiirteitä lähemmin. Ensinnäkin yksilöillä on taipumusta kääntää jo olemassa oleville uskomuksille vastakkainen todistusaineisto niiden tueksi käyttämällä uskomusten emotionaalisten piirteiden ohella hyväksi myös erilaisia kognitiivisia 'temppeja'. Yksilöt käyttävät koodausta ja uudelleenkoodausta vahvistamaan alkuperäisten 'teorioidensa' paikkansapitävyyttä, kun he valikoivasti palauttavat asioita muististaan. Uskomukset eivät tällöin ainoastaan 'väritä' sitä ainesta, jonka yksilöt palauttavat mieleensä, vaan myös sen palautustavan. Sen jälkeen kun uskomukset ovat saaneet muotonsa, yksilöt pyrkivät rakentamaan uskomusten ympärille kausaaliselityksiä, jotka voivat olla joko oikeita ja täsmällisiä tai sitten täysin keksittyjä. Loppujen lopuksi uskomusten suojausmekanismit muodostavat itseään toteuttavan systeemin: uskomukset vaikuttavat käsityksiin ja nämä puolestaan vaikuttavat toimintamuotoihin, jotka ovat sopusoinnussa alkuperäisten uskomusten kanssa ja siten vahvistavat niitä. Tämä ei kuitenkaan merkitse sitä, että uskomukset eivät muuttuisi missään olosuhteissa, vaan lähinnä sitä, että uskomukset eivät yleensä muutu silloinkaan, kun niiden olisi loogista tai välttämätöntä muuttua. (Nisbet & Ross 1980.)

Nämä havainnot sopivat hyvin yhteen niiden Guskeyn (1986) tulosten kanssa, joiden mukaan koulutuspäivät ovat kovin tehottomia asenne- tai uskomusmuutosten kannalta. Vasta sitten, kun opettajat voivat keskustella kokemuksistaan jonkun menetelmän käytöstä ja havaita sen parantavan oppilaiden oppimista, niin suuriakin asenne- ja uskomusmuutoksia voi tapahtua. Tällainen muutos ei ole kuitenkaan pysyvä, ellei sen käyttö näy oppilaiden suoritusten paranemisena. Tästä Guskey (1986) päätteli, että uskomusten muuttuminen on seurausta toiminnan muuttumisesta eikä päinvastoin.

Uskomuksiin vaikuttamista ja uskomusten muuttumisen ehtoja analysoidessaan Pehkonen (1994b) on painottanut sitä, että ei pidä tyytyä vain pintatason muutoksiin, vaan on pyrittävä vaikuttamaan syvätasolla opettajien uskomuksiin (myös Kaplan 1991). Hän on kuvannut muutosprosessin keskeisiä elementtejä Shawn ym. (1991) viitekehykseen pohjaten. Jotta saataisiin aikaan onnistunut ja positiivinen muutos, opettajan tulee kokea ristiriitainen tilanne (häiriö) omassa ajattelussaan ja toiminnassaan ja hänen pitää olla valmis tekemään jotakin tälle sisäiselle ristiriidalleen. Lisäksi opettajalla on oltava näkemys siitä, mitä hän haluaisi tapahtuvan luokassaan ja hänen on kehitettävä suunnitelma tämän näkemyksen toteuttamiseksi.

Vaikka jokaisella opettajalla on jossain määrin erilainen toimintaympäristö, niin niissä on joitakin yhteisiä muutosprosessiin vaikuttavia tekijöitä. Tällaisia ovat yleensä muiden opettajien antama tuki, aika, raha, muut resurssit, tabut, tottumukset ja yleiset uskomukset. Opettajan ajattelun ja toiminnan muuttumista virittävinä 'häiriölähteinä' voivat toimia esimerkiksi oppilaat, kollegat, oppilaiden vanhemmat, opettajankouluttajat, kirjat, artikkelit tai oma reflektointi. Jotta opettajat voisivat muuttua, heidän on henkilökohtaisesti sitouduttava toteuttamaan näkemyksensä siitä, millaista matematiikan oppimisen ja opetuksen pitäisi olla. Edellä olevasta seuraa myös, että opettajien on saatava olla aktiivisesti mukana innovaation suunnittelussa, jotta toivottu muutos voidaan saada aikaan. (Pehkonen 1994b, 61–62.)

Työskenneltyään 12 opettajan kanssa viiden vuoden ajan Thompson (1991) kehitti ehdotuksen teoreettiseksi malliksi, joka kuvaa matematiikan opettajien opetuskäsitysten vaiheittaista kehittymistä. Sivun 81 taulukko 4.1 on muokattu Pehkosen (1994b) esittämän mallin pohjalta. Matematiikkakäsitysten kehitystä kuvaavassa mallissa on kolme tasoa ja jokaista tasoa on kuvailtu kuuden tekijän suhteen: 1. Mitä on matematiikka?, 2. Mitä on matematiikan oppiminen?, 3. Mitä on matematiikan opettaminen?, 4. Mitä on ongelmanratkaisu?, 5. Mitkä ovat opettajan ja oppilaiden roolit? ja 6. Mitkä ovat suoritusten hyväksytävyyden kriteerit?

Thompsonin (1991) tutkimuksen lähtötilanteessa kaikki uudet opettajat (7) ja 3 kokenempaa opettajaa olivat matematiikkakäsitystensä puolesta tasolla 1 ja vain kaksi kokenutta opettajaa voitiin sijoittaa tasolle 2. Työskentelyjakson aikana kaikki 1-tasolta lähteneet opettajat kehittyivät tasolle 2 ja myös joitakin puolia 3-tason käsityksistä oli nähtävissä osalla opettajista. Tasolta 2 lähteneet opettajat kehittyivät myös tasolle 3. Muutoksen helppous tasolta 1 tasolle 2 on Thompsonin (1991) mielestä selitettävissä sillä, että se voi tapahtua ilman opettajan käsitysten merkittävää uudelleen strukturoitumista. Tason 2 ideat voidaan sulauttaa rakenteisiin, jotka muodostuvat tason 1 käsityksistä niitä pelkästään laajentamalla, mutta tarvetta näiden uudelleen jäsentämiseen ei ole. Sitä vastoin käsitysten kehittyminen tasolle 3 edellyttää niiden uudelleen jäsentymistä. Tällöin on välttämätöntä, että opettaja saa kokemusta lukuisista sellaisista tilanteista, joissa hän tulee tietoiseksi omista syvään juurtuneista olettamuksistaan ja uskomuksistaan siitä, mitä merkitsee osata, oppia ja opettaa matematiikkaa. Tämän lisäksi näiden tilanteiden tulee tapahtua sellaisessa ympäristössä, jossa opettaja voi löytää vaihtoehtoja omille matematiikan opetusta koskeville ennakkokäsityksilleen ja niistä seuranneille opetustavoille. Tämä uudelleen jäsentäminen vaatii yhteistä ja pitkäaikaista ponnistelua. Thompsonin (1991) mielestä hänen tuloksensa ja kokemuksensa varoittavat aliarvioimasta opettajien käsitysten ja uskomusten ennallaan pysymisen sitkeyttä.

Taulukko 4.1 Opettajien matematiikkakäsitysten vaiheittainen kehitys (Pehkonen 1994b; Thompson 1991).

	Mitä on matematiikka?	Mitä on matematiikan oppiminen?	Mitä on matematiikan opettaminen?	Mitä on ongelmanratkaisu?	Mitkä ovat opettajan ja oppilaiden roolit?	Mitkä ovat suoritusten hyväksyttävyyden kriteerit?
TASO1	<ul style="list-style-type: none"> - aritmeettisten taitojen käyttöä arkipäivän tilanteissa - matemaattinen tieto tarkoittaa faktatietoja ja menettelytapoja 	<ul style="list-style-type: none"> - faktojen, sääntöjen, kaavojen ja menettelytapojen muistiinpainamista - jokaista sisältöä pidetään yhtä tärkeänä ja aina edellytyksenä seuraavan oppimiselle 	<ul style="list-style-type: none"> - oppikirjassa eriteltyjen sisältöjen ja taitojen läpikäymistä 	<ul style="list-style-type: none"> - vastausten löytämistä sanallisiin tehtäviin - oppilaita autetaan löytämään oikea menettelytapa ("nyrkkisäännöt" ja "avainsanat") 	<ul style="list-style-type: none"> - opettaja on hyväksi havaittujen menettelytapojen esittäjä - oppilaat jäljittelevät (ja harjoittelevat) 	<ul style="list-style-type: none"> - päämääränä ovat tarkat vastaukset - opettaja tai oppikirja on auktoriteetti; auktoriteetti oppijan ulkopuolella
TASO2	<ul style="list-style-type: none"> - säännöt hallitsevat edelleen kaikkea työkentelyä - arvostetaan sääntöjen takana olevien käsitteiden ja periaatteiden ymmärtämistä 	<ul style="list-style-type: none"> - aletaan nähdä eroa 'merkityksen' ja 'taidon' välillä - heräävää tietoisuutta opetuksellisten esitysmuotojen (konkreettinen, kuvallinen) hyväksikäytöstä - aletaan ymmärtää sisältöjen monimutkaisuutta 	<ul style="list-style-type: none"> - opettajalla oltava erityisiä opetustekniikoita eri tilanteita varten (ei yleistymistä) - manipulatiivisen materiaalin käyttö tärkeää etenkin "matikka on hauskaa" - asenteen edistämiseksi - opetuksellisten esitysmuotojen käytön kapea-alaisuus; yhteyksien löytäminen oppilaiden vastuulla 	<ul style="list-style-type: none"> - nähdään omana opetussuunnitelman osana, jota opetetaan 'perinteisesti' sisällöstä erillään - tutkitaan ongelmia, joilla ei ole mitään tekemistä opiskeltavien matematiikan sisältöjen kanssa - opetetaan "jotain ongelmanratkaisusta" 	<ul style="list-style-type: none"> - opettaja toimii paljolti samoin kuin edellä - opettaja panee painoa sääntöjen perusteluille - oppilaat ymmärtävät jonkin verran standardimenettelyjen perusteluja 	<ul style="list-style-type: none"> - ekspertit ovat edelleen oikeellisuuden auktoriteetteja
TASO3	<ul style="list-style-type: none"> - matematiikka ymmärretään erilaisten yhteennivoutuneiden käsitteiden, menettelytapojen ja esitysmuotojen systeiminä 	<ul style="list-style-type: none"> - ymmärtäminen saa alkunsa matematiikan tekemisestä - arveleminen, perusteleminen ja ymmärtäminen ovat oppimisen ja opetuksen olennaisia prosesseja - oppimisen mielekkäys ja merkityksellisyys oppilaiden kannalta 	<ul style="list-style-type: none"> - oppilaiden annetaan tutkia ja tehdä matematiikkaa - oppilaita ohjataan havaitsemaan, että samat tai samankaltaiset matemaattiset ideat saavat alkunsa 'ulkoisesti' hyvinkin erilaisista tilanteista 	<ul style="list-style-type: none"> - ongelmanratkaisua käytetään opetusmenetelmänä - opetetaan ongelmanratkaisun avulla 	<ul style="list-style-type: none"> - opettaja ohjaa oppilaiden ajattelua hedelmällisillä tavoilla - opettaja kuuntelee ja tarkkailee oppilaiden kommunikointia - oppilaita kannustetaan ilmaisemaan omia ideoitaan 	<ul style="list-style-type: none"> - opetuksen päämääränä on matematiikan tekeminen - suoritusten oikeellisuutta arvioidaan monipuolisesti ja myös oppilaat osallistuvat siihen

Koska koulussa tapahtuva opetuksen muuttuminen on vaativa ja pitkäkestoinen prosessi, on opettajien ja heidän uskomustensa kehittämisessä pyrittävä ottamaan samanlaisesti huomioon monia tekijöitä. Kokemukset ovat osoittaneet, että kouluuyhteisön tuki on oleellinen edellytys opettajien ammatillisen kehittymisen kannalta. Opettajille on tärkeätä saada vierailta toistensa luokissa ja keskustella kokemuksistaan kollegojensa kanssa, jotta uskomusten muuttamisessa päästäisiin opetuskäytännön tasolle. Tärkeätä on myös luoda mahdollisuuksia sellaisille tilanteille, joissa opettajat voivat reflektoida ajatteluaan ja toimintatapojaan.

4.5 Katsaus opettajien matematiikkauskomuksia käsittelevään tutkimukseen

“Since 1980, however, many studies in mathematics education have focused on teachers’ beliefs about mathematics and mathematics teaching and learning. For the most part, these researchers have worked for the premise that to understand teaching from teachers’ perspectives we have to understand the beliefs with which they define their work.” (Thompson 1992, 129.)

Tutkimusjulkaisuja matematiikan opettajien matematiikkauskomuksista on erittäin runsaasti (mm. Calderhead 1996; Cooney & Shealy 1997; Ernest 1991; Kupari 1995; Lindgren 1995; Middleton ym. 1990; Nespor 1987; Pajares 1992; Pehkonen 1993; Thompson 1992). Viimeisen 15 vuoden aikana tutkimus on ollut vilkasta ja erityisesti kansainvälisen tutkijaryhmän Psychology of Mathematics Education (PME) kongresseissa tema on ollut keskeinen jo pitempään. Myös meillä Suomessa aluetta kohtaan on 1980-luvun lopulta lähtien tunnettu yhä kasvavaa kiinnostusta. Tutkimus on suurelta osin kohdistunut uskomuksiin matematiikasta (tieteenä) sekä uskomuksiin matematiikan opetuksesta ja oppimisesta. Lisäksi on runsaasti tutkimuksia, joissa on tarkasteltu opettajien uskomusten ja heidän opetuskäytäntöjensä välisiä yhteyksiä sekä uskomusten muuttumista.

Tutkimuksen piiriin sisältyy sekä empiirisiä että käsitteellisiä tutkimuksia. Empiirisen tutkimustiedon keruussa on käytetty monia tekniikoita kuten kyselylomakkeita, haastatteluja, luokkahuonehavainnointia, opettajan puheen diskurssianalyysejä jne. Useimmissa tutkimuksissa on hyödynnetty useita tekniikoita. Myös tutkimusasetelmat ovat vaihdelleet tapaus tutkimuksista (mm. Cooney 1985; Thompson 1982) uskomus inventaarioiden käyttämiseen (mm. Peterson ym. 1989; Zimmermann 1991). Kaiken kaikkiaan tutkijoiden erilainen kulttuuritausta sekä heidän käyttämiensä tavoitteiden, menetelmien, tutkimusasetelmien ja teoreettisten lähtökohtien kirjavuus on tuonut suurta vaihtelua siihen, millä tavoin opettajien uskomuksia on kuvattu ja millaisia tuloksia tutkimuksissa on saatu.

Seuraavassa luodaan katsaus opettajien matematiikkauskomuksia käsittelevään tutkimuskirjallisuuteen. Ensin tarkastellaan ulkomaista tutkimusta ja sen jälkeen kotimaista tutkimusta.

4.5.1 Ulkomainen uskomustutkimus

Opettajien matematiikkauskomuksia käsittelevä laaja ulkomainen tutkimus voidaan luokitella kolmeen kategoriaan: 1) uskomuksiin matematiikasta tieteenä ja oppiaineena, 2) uskomuksiin matematiikan oppimisesta ja 3) uskomuksiin matematiikan opettamisesta.

Uskomukset matematiikasta tieteenä ja oppiaineena

Matematiikan opettajien uskomuksia ja käsityksiä koskevassa synteessissään Thompson (1992) esittelee merkittävimpiä alueen tutkimuksia aina 1970-luvulta lähtien. Vanhimpana tutkimuksena Thompson mainitsee Skempin (1978) teoreettisluontoisen tarkastelun. Skempin mukaan on olemassa kaksi erilaista matematiikkakäsitystä, joista seuraa suuria eroja opetuksen lähestymistapoihin ja painotuksiin. Hän erottaa *välineellisen matematiikan* (instrumental mathematics) ja *suhdematematiikan* (relational mathematics) ja ero on peräisin siitä tiedon luonteesta, joka kummallekin 'matematiikalle' on luonteenomaista (vrt. proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto, Hiebert & Lefevre 1986). Välineellinen matemaattinen tieto muodostaa joukon ennalta määrättyjä ohjeita matemaattisten tehtävien suorittamiseksi. Näille ohjeille on tyypillistä, että ne kuvaavat vaiheittaisen toimintaketjun, jota seurataan annetun tehtävän suorittamisessa ja jossa jokainen vaihe määrittää aina seuraavan. Sitä vastoin matematiikan suhdetiedolle on luonteenomaista se, että se sisältää käsite rakenteita, joiden avulla on mahdollista konstruoida erilaisia polkuja tehtävän suorittamiseksi. Suhdematematiikkaa oppiessaan oppilas hankkii tietoa periaatteista, jotka sopivalla tavalla mukautuvat suureen joukkoon tilanteita ja tehtäviä. Skemp (1978) on kiteyttänyt näiden kahden matematiikkanäkemyksen eron toteamalla:

"We are not talking about better and worse teaching of the same kind of mathematics. ... I now believe that there are two effectively different subjects being taught under the same name 'mathematics'". (Skemp 1978, 11.)

Lerman (1983) on esittänyt myös kaksi vaihtoehtoista matematiikkanäkemyistä. Toista hän nimittää *absoluuttiseksi näkemykseksi* ja toista *erehtymisen hyväksyväksi (fallibilistiseksi) näkemykseksi*. Absoluuttisesta näkökulmasta tarkasteltuna kaikki matematiikka perustuu universaaleihin, ehdottomiin perusteisiin ja matematiikka sellaisenaan on varman, absoluuttisen, arvovapaan ja abstraktin tiedon paradigma, jonka yhteydet reaali maailmaan ovat kenties platonisia luonteeltaan. Erehtymisen hyväksyvän näkökulman mukaan matematiikka kehittyy arvausten, todistusten ja kumoamisten kautta ja epävarmuus hyväksytään oppiaineelle luontaisena.

Useissa tutkimuksissa opettajien uskomukset matematiikasta tieteenä ja oppiaineena on jaettu kolmeen kategoriaan (mm. Dionne 1984, 1987; Ernest 1989b; Thompson 1984; Underhill 1988). Dionne (1984) luokitteli tutkimuksessaan opettajien uskomukset *traditionaalisiin, formalistisiin ja konstruktivistisiin* uskomuksiin. Traditionaalisessa näkemyksessä matematiikka ymmärretään taitojen joukkona – matematiikka on laskutoimitusten suorittamista sekä sääntöjen, menetelmien ja kaavojenkäyttämistä. Formalistinen näkemys tulkitsee matematiikan loogisena ja ankarana muodollisena tiedon strukturina, jolloin matematiikka on aukottomien todistusten kirjoittamista ja tarkan ja täsmällisen kielen sekä yksiselitteisten käsitteiden käyttämistä. Konstruktivistisessa ajattelussa matematiikka nähdään prosessina. Tällöin matematiikka on ajatteluprosessien kehittämistä, arkikokemuksista lähtevää sääntöjen ja kaavojen rakentamista sekä yhteyksien etsimistä. Dionne (1984) keräsi kyseistä tyypittelyä hyväksi käyttäen empiirisen tutkimusaineiston, jonka perusteella hän havaitsi, että alkeiskoulujen opettajien uskomukset matematiikasta sisälsivät 31 % traditionaalisia, 26 % formalistisia ja 43 % konstruktivistisia piirteitä.

Ernest (1989b) on käyttänyt uskomustyypeistä nimityksiä *instrumentaalinen* näkemys (the instrumentalist view), *platoninen* näkemys (the Platonist view) ja *ongelmakeskeinen* näkemys (the problem-solving view). Hänen mukaansa uskomukset matematiikan luonteesta eivät ole opettajien tietoisesti ylläpitämiä, vaan pikemminkin ne saattavat olla implisiittisesti vaikuttavia 'filosofioita' (Ernest 1989b, 250). Instrumentaalisen näkemyksen mukaan matematiikka ymmärretään kokoelmana erillisiä faktoja, sääntöjä ja taitoja, joilla nähdään olevan ulkoista hyötyä.

Opettaja J:n toiminnasta heijastui uskomus, että matematiikka on johdonmukainen, toisiinsa liittyvien käsitteiden ja menettelytapojen kokoelma, johon ei sisälly moniselitteisyyttä ja mielivaltaisuutta. Hän käsitti koulumatematiikan sisällön ennalta määrätynä ja kiinnitetynä, ja hänen mielestään se oli tavallaan 'lopullinen tuote' omaksuttavaksi. Hän painotti käsitteiden opettamisessa yhteyksiä muihin käsitteisiin (esimerkiksi prosentit murtolukuina) sekä korosti matematiikan suoritustapojen taustalla olevien periaatteiden ja logiikan merkitystä. Missään keskusteluissa opettaja J ei viitannut matematiikan prosessien suuntaan. Hänen mielestään matematiikan opiskelulla oli arvoa matematiikan itsensä vuoksi riippumatta sen hyödyllisyydestä. Vaikka hän oli tietoinen matematiikan hyödyllisyydestä, se ei näkynyt mitenkään hänen matematiikasta pitämisessään ja opetuksessaan. Opettamisen ohella matematiikalla oli vain vähän merkitystä hänen elämäänsä.
(Thompson 1984, 109–112.)

Platoninen näkemys pohjaa puolestaan siihen, että matematiikka on keksitty, eikä sitä ole vähitellen luotu (Ernest 1989b). Sen mukaisesti matematiikka on staattinen tietorakenne, jolle on tunnusomaista muodollisuus, eksaktisuus ja yksiselitteisyys. Kolmas eli ongelma-keskeinen näkemys lähtee siitä, että matematiikka on dynaaminen ja jatkuvasti laajentuva, ihmisen luoma kulttuurinen tuote. Matematiikka on tällöin tutkimusprosessi, jonka tulokset ovat jatkuvasti avoimina uudelleentarkastelulle.

Opettaja P:n mielestä matematiikan päätehtävä oli toimia 'työkaluna' luonnontieteille ja muille inhimillisen toiminnan alueille. Tästä johtuen matematiikan sisällöt olivat hänen mielestään peräisin luonnontieteiden tarpeista ja muista käytännön tarpeista sekä matematiikasta itsestään. Hän näki matematiikan haastavana, eksaktina ja abstraktina oppiaineena, jonka opiskelu edistää yksilön kykyä päätellä loogisesti. Hänen mielestään matematiikassa oli kiehtovaa sen tehtävien haastavuus ja onnistumisen kokemukset niiden ratkaisemisessa. Se, että opettaja P nautti matematiikasta, oli lähtöisin osin siitä, että hän itse piti kovasti vaikeidenkin ongelmien ratkaisemisesta. Tällaisessa 'matematiikan tekemisessä' häntä kiinnosti enemmänkin henkinen toiminta kuin itse sisältö. (Thompson 1984, 112–116).

Ernest (1989b) on korostanut lisäksi sitä, että opettajien uskomukset matematiikan luonteesta luovat perustan opettajien 'malleille' matematiikan opetuksesta ja oppimisesta. Näin ollen esimerkiksi instrumentaalisiin uskomuksiin matematiikasta liittyy opettajan ohjaava malli opetuksessa ja tarkka oppikirjan noudattaminen. Tällaiset uskomukset ovat yhteydessä todennäköisesti myös oppilaan mukautuvaan käyttäytymiseen ja taitojen hallintaa painottavaan oppimismalliin.

Edellä esitettyjen tarkastelujen pohjalta voidaan havaita ilmeinen vastaavuus Skempin (1978) välineellisen näkökulman ja Ernestin (1989b) instrumentaalisen matematiikkanäkemyksen välillä. Aivan samoin suhdematematiikkaa voidaan pitää analogisena platonisen matematiikkanäkemyksen kanssa, joskaan se ei ole välttämättä ristiriidassa myöskään Ernestin esittämälle ongelmakeskeiselle näkemykselle. Niinkään Dionnen (1984) käyttämät uskomustyypit ovat analogisia Ernestin esittämän luokittelun kanssa. Myös Ernestin kaksi jälkimmäistä näkemystä ovat varsin yhdenmukaiset Lermanin (1983) esittämien absoluuttisen ja fallibilistisen matematiikkanäkemyksen kanssa.

Selvittäessään opettajien matematiikkaan liittämiä uskomuksia Middleton ym. (1990) käyttivät tutkimuksessaan erilaisia luonnehdintoja tai metaforia matematiikasta. Tutkimuksessa oli lähtökohtana, että kun opettajat arvioivat näitä luonnehdintoja, niin se heijastaa heidän henkilökohtaisia uskomuksiaan matematiikan luonteesta. Tutkijoiden käyttämät viisi luonnehdintaa olivat seuraavat (Middleton ym. 1990, 10–12):

- **Matematiikka on työelämässä tarvittavien taitojen kokoelma.** Tulkinta edustaa maatalous- ja teollisuusyhteiskunnan näkemystä matematiikasta. Tällä tavoin ajattelevat opettajat laativat 'opetussuunnitelmakäsikirjoituksia' niistä taidoista ja käsitteistä, joita edellytettiin opetettavaksi. Kuitenkaan näitä sinällään välttämättömiä perustaitoja ei enää pidetä riittävinä sille, että yksilö voisi itsenäisesti ja täysipainoisesti toimia informaatioyhteiskunnassa (Romberg 1988).
- **Matematiikka on kieli.** Usein matematiikan opiskelua on verrattu vieraan kielen opiskeluun: kieliopin ja sanaston oppiminen sekä niiden käsittely puhujalle ja yleisölle ymmärrettävällä (merkityksellisellä) tavalla (mm. Pimm 1987). Kielimetaforaa voidaan laajentaa siten, että matematiikka ymmärretään 'loogisen diskurssin' välinee-

nä, jota matematiikan 'natiivit' pystyvät ymmärtämään ja käyttämään paremmin kuin muut. Ne opettajat, jotka käsittävät matematiikan kielenä, rohkaisevat todennäköisesti oppilaitaan keskustelemaan asioista ja selittämään matemaattisia käsitteitä oppitunneillaan.

- **Matematiikka on soveltamista.** Tämä luonnehdinta eroaa ensimmäisestä (ns. "työ-elämätaidoista") siinä, että soveltavat matemaatikot arvostavat kykyä löytää uusia, elegantimpia tai tehokkaampia ratkaisutapoja työssään, kun taas taitokokoelma -käsityksessä matematiikka merkitsee työkalua, joka kelpaa sellaisenaan ennalta tiedettyjen tehtävien ratkaisemiseen.
- **Matematiikka on ajattelutapa.** Tällöin matematiikka on esteettinen ja looginen tapa kehittää syvempää ymmärtämystä. Matematiikka itsessään antaa runsaasti sisäistä iloa ja tyydytystä ja tämä antaa puolestaan intoa ja kestävyyttä opiskella lisää (vrt. Dörfler & McLone 1986). Tämä on kenties klassisin käsitys matematiikasta ja sen voidaan ajatella olevan peräisin kreikankielisestä sanasta *mathema*, joka tarkoittaa kirjaimellisesti "tietämistä".
- **Matematiikka on dynaaminen järjestelmä.** Matematiikan muuttuva luonne on nähtävissä monilla uudemmissa osa-alueilla. Esimerkiksi tietokonevallankumous on laajentanut tilastotiedettä valtavasti (mm. matemaattinen mallintaminen, testiteoria, trendianalyysi). Tällaiset uudet matematiikkatieteen innovaatiot ovat vahvistaneet näkemystä, että matematiikka on dynaaminen järjestelmä syntyen eri alojen tiedoista ja innovaatioista aina kun uusia ongelmatilanteita nousee esiin.

Middletonin ym. (1990) tutkimuksen empiiristen tulosten mukaan opettajat (N = 490) uskoivat vahvasti, että matematiikka on loogista, tieteellistä ajattelua, jota käytetään ymmärtämisen kehittämiseen. Opettajien keskuudessa tämä luonnehdinta sai voimakkaimman hyväksynnän ja hajonta oli myös kaikkein pienintä. Vähiten kannatusta sai näkemys, jonka mukaan matematiikka on faktojen, taitojen ja sääntöjen oppimista ja niiden soveltamista työelämässä ja jatko-opinnoissa. Suurin osa opettajista arvioi, että luonnehdinnat '*matematiikka on ajattelua*' ja '*matematiikka on dynaaminen järjestelmä*' vastasivat parhaiten heidän uskomuksiaan matematiikasta. Niinikään opettajat arvioivat useimmin, että luonnehdinta '*matematiikka on työelämässä tarvittavien taitojen kokoelma*' vastasi kaikkein heikoimmin heidän matematiikkauskomuksiaan. Ylimalkaan kaikkein pienin osa opettajista arvioi, että luonnehdinta '*matematiikka on työelämässä tarvittavien taitojen kokoelma*' kuvasi osuvimmin heidän uskomuksiaan matematiikasta.

Middleton ym. (1990, 31–33) analysoivat opettajien vastauksia lisäksi klusterianalyysin avulla, jolloin löydettiin neljä uskomusprofiilia. Ensimmäisen ryhmän (klusterin) opettajat (N=73) näyttivät samaistuvan tieteelliseen, loogiseen ja tietopohjaiseen matematiikkanäkemykseen, mutta eivät hyväksyneet näkemystä matematiikasta oppiaineena, joka muuttuu uusien tilanteiden syntyessä. Näkemys oli yhteensopiva sen uskomuksen kanssa,

että matematiikka on täsmällisesti määrätty tietokokoelma, joka opitaan kurinalaisella ponnistelulla. Toisen ryhmän opettajat (N=101) omaksuivat vahvasti dynaamisen matematiikkakäsityksen ja painottivat myös paljon matematiikan tieteellistä ja kielellistä luonnetta. Nämä opettajat eivät lainkaan hyväksyneet näkemystä, että matematiikka on pelkästään tietoja, taitoja ja sääntöjä, joita sovelletaan tehtäviä ratkaistaessa.

Ryhmän 3 opettajat (N=109) olivat uskomuksiltaan kokonaisvaltaisempia. Opettajat eivät nähneet eroa eri matematiikkanäkemyksen kesken, vaan hyväksyivät ne kaikki varsin yksimielisesti. Tutkijat eivät kuitenkaan ottaneet kantaa siihen, ilmensikö tämä profiili opettajien ajattelun joustavuutta vai mittarin 'kattoefektiä'. Neljännen ryhmän (N=195) muodostama profiili olisamankaltainen kuin ryhmän 2, mutta opettajat hyväksyivät 'helpommin' myös toisenlaisia käsityksiä. Profiili kuvasti käsitystä, että matematiikka on pääasiassa tieteellisen ja pohtivan ajattelun väline, näiden ajatusten tehokkaan kommunikoinnin väline sekä muuttumisen väline kun uutta tietoa syntyy. Vaikka tässä käsityksessä ei kielletäkään, että matematiikka on tietojen, taitojen ja käsitteiden kokoelma, niin tämän puolen tärkeyttä ei painoteta verrattuna em. dynaamisiin aspekteihin. Tämä näkemys on yhdenmukainen heuristisen ja tutkivan matematiikkakäsityksen kanssa, jonka mukaan matematiikka on pääasiassa ajattelutapa, mutta samalla myös kehittynyt tietorakennelma, joka on hyödyllinen reaali maailman ymmärtämisen kannalta. (Middleton ym. 1990, 31–33.)

Äärimmäisissä muodoissaan matematiikkauskomukset voivat olla 'myyttisiä', jolloin niillä on hyvinkin haitallinen vaikutus sille, millaisena matematiikan oppiminen ja opettaminen ymmärretään. Tällaisilla uskomuksilla ja niiden välittymisellä voi olla vaikutusta mm. matematiikka-ahdistuneisuuteen ja matematiikan opiskelun välttämiseen. Frank (1990) analysoi 131 opettajaksi koulutettavan opiskelijan uskomuksia matematiikasta ja havaitsi, että näiden tulevien opettajien uskomuksiin sisältyi hyvin vahvasti myyttisiä aineksia. Uskomusten luonnetta kuvaavat hyvin seuraavat väittämät, joiden perässä olevat prosenttiluvut tarkoittavat samaa mieltä olleiden opiskelijoiden osuutta (Frank 1990, 11):

Joillakin ihmisillä on matikkapä ja joillakin ei. (63%)

Matematiikka vaatii logiikkaa, ei intuitiota. (53%)

Matematiikka vaatii hyvää muistia. (44%)

Miehet ovat matematiikassa parempia kuin naiset. (22%)

On aina tärkeää saada täsmälleen oikea vastaus. (18%)

Matematiikan oppimiseen on olemassa maaginen avain. (15%)

Uskomukset matematiikan oppimisesta

Opettajan uskomukset matematiikan oppimisen luonteesta pitävät sisällään käsityksiä matematiikan oppimisprosessin luonteesta eli millaista käyttäytymistä ja millaisia henkisiä toimintoja oppijalta odotetaan ja myös siitä, millaiseen ajatteluun käytettävät oppimistoinnot perustuvat (Ernest 1989b). Kun matematiikka ymmärretään hierarkkisenä oppiaineena, niin siihen yhdistyy Lermanin (1993) mielestä luontevasti ajatus, että matematiikan oppiminen on myös hierarkkista, lähtien yksi–yksi-vastaavuuden perusteista ja päätyen esimerkiksi differentiaali- ja integraalilaskennan abstraktimmalle tasolle. Lisäksi usein vielä oletetaan – kylläkin implisiittisesti – että kaikki saavuttavat tiettyjen asioiden kohdalla saman ymmärtämisen tason johtuen näiden asioiden absoluuttisesta luonteesta, olipa sitten kyseessä fyysinen objekti kuten pöytä tai mentaalinen objekti kuten ympyrä tai kolme.

Ymmärtäminen nähdään tällöin prosessina, jonka yksilö läpikäy: se on eräänlainen siirtymä siitä, että ei ymmärrä jotain käsitettä, siihen, että ymmärtää sen. Tässä siirtymäprosessissa ei-ymmärtämisen tilasta ymmärtämisen tilaan on kaksi elementtiä, yksilö ja opittava käsite. Kouluympäristössä käsite (esimerkiksi ympyrä) nähdään yleensä ulkoisena kohteena, jonka ajatellaan olevan jollain tavoin ”opettajan hallussa”. Opettaja toimii välittäjän roolissa esitellen käsitteen, yrittäen helpottaa sen siirtymistä oppilaalle ja mitaten sitten tuloksen eli sen, onko ymmärtämisen (oppimisen) tila saavutettu. Prosessin toinen elementti eli yksilö on opettajalle suurimmaksi osaksi suljettu yksikkö, mikä tekee siirtymisen toteutumisen arvioinnin hyvin vaikeaksi. Tämän alueen tutkimus onkin kohdistunut joko tulkitsemaan käyttäytymistä, joka voisi osoittaa käsitteen hallintaa kuvaavien prosessien esiintymisen tai sitten niihin olosuhteisiin, jotka saavat aikaan ymmärtämistä. (Lerman 1993, 76.)

On kuitenkin verraten paljon tutkimusta, jotka osoittaa, että oppilaiden rajoittunut ja suuntautumaton ajattelu ei seuraa oletettua hierarkkia (esim. Lave 1988). Vaihtoehtoinen näkökulma ymmärtämiseen ja oppimiseen on Lermanin (1993, 78) kuvaamana sellainen, jossa prosessi nähdään pikemminkin sosiaalisena (ks. sosiokonstruktivismi, s. 27). Tämä tarkoittaa sitä, että oppilas, ei käy läpi jotain muutosta ymmärtämisen alkutilasta sen lopputilaan eristyneenä ja saavuta annettua hyvin muotoiltua käsitettä jollain kätkeyllä tavalla. Sen sijaan on väistämättä kysymys vuorovaikutuksesta lapsen ja hänellä jo hallussa olevien aiempien merkitysten kanssa, ja tämä vuorovaikutus tapahtuu kielen avulla. Se on myös lapsen ja muiden ihmisten välistä vuorovaikutusta, samoin vuorovaikutusta lapsen ja hänen kokemustensa välillä. Tämä vuorovaikutusprosessi saattaa olla suurelta osin hiljainen – muutos, joka tapahtuu ilman äänestä puhetta – mutta sen ei tarvitse olla yksityinen. Koska varsin usein oppilaat ymmärtävät asioita eri tavoilla ja myös eri tavoin kuin opettaja, niin silloin yhteiset keskustelut sekä niissä tehdyt ehdotukset ja väitteiden perustellut hyväksymiset tai kumoamiset saavat aikaan kehittymisen ja kasvun jatkumisen.

Tärkeinä opetuksen tuloksina opettaja P piti oppilaiden päättelytaitojen ja kyselevän asenteen kehittymistä, opettettujen sisältöjen ymmärtävää hallintaa sekä positiivisen asennoitumisen syntymistä matematiikkaa kohtaan. Hänen mielestään matematiikan ymmärtämistä ilmensi se, että oppilaat pystyivät ilmaisemaan käsitteiden olennaiset tunnusmerkit, käsittivät sääntöjen, kaavojen tai menetelmien merkityksen ja loogisuuden sekä kykenivät yhdistämään nämä yleisimmiksi toiminnoiksi (prosesseiksi) ongelmia ratkaistessaan. (Thompson 1984, 116).

Myös Bishopin (1993, 20–21) mukaan on olemassa lukuisia perustavanlaatuisia ja merkityksellisiä uskomuksia siitä kuinka matematiikkaa opitaan. Sen ohella, että matematiikan uskotaan olevan varmaa faktatietoa, on olemassa laajalle levinnyt uskomus, että matematiikan menettelytapoja on harjoitettava ahkerasti ja yliopittava, jotta niistä tulee rutiinia. Tämän tulisi tapahtua samanaikaisesti sen kanssa, että oppija muistaa erilaiset käsitteelliset ideat ja niiden esitysmuodot. Niinikään hyvin yleinen uskomus on, että ymmärtämisellä tarkoitetaan "kaikki tai ei mitään" -kokemusta enemmän kuin käsitteiden, merkitysten ja konstruoitujen yhteyksien asteittaista lisääntymistä. Edelleen, koska matematiikalla on vaikean oppiaineen maine, niin ajatellaan myös, että ainoastaan jotkut "kyvykkäät" pystyvät edistymään siinä. Näin ollen monet nuoret kokevat, että heillä itsellään joko on tai ei ole tätä matemaattista kyvykkyyttä (lahjakkuutta). Tähän kytkeytyy olennaisesti yleinen uskomus siitä, että matematiikka on vaikeampaa tytöille kuin pojille ja että siinä menestyminen vaatii tyteiltä enemmän ponnisteluja (esim. Fox ym. 1980). Tämä uskomus on väistämättä omiaan muovaamaan sitä monissa yhteiskunnissa yleisesti vallitsevaa ilmapiiriä, että matematiikka ei ole tyttöjen ja naisten opinnoissa tärkeä ainealue. Muutosta tässä suhteessa on onneksi saatu aikaan ja monilla tahoilla työskennellään ahkerasti tällaisen mielikuvan häivyttämiseksi (esim. Fennema & Leder 1990; Lindberg & Grevholm 1998).

Uskomukset matematiikan opettamisesta

Opettajan uskomukset matematiikan opetuksesta ja opettamisesta muodostuvat Thompsonin (1992) mukaan monista osista: siitä mitä hän pitää opetuksensa toivottavina tavoitteina, omasta roolistaan opetuksessa, oppilaiden roolista, sopivista luokkatoiminnoista, toivottavista opetuksellisista lähestymistavoista ja painotuksista, sallittavista matemaattisista menettelytavoista ja hyväksyttävistä opetuksen tuloksista. Useissa tutkimuksissa on todettu opettajien matematiikkaa koskevien uskomusten olevan yhteydessä niihin uskomuksiin, joita heillä on matematiikan opetuksesta (mm. Lerman 1983; Thompson 1984). Lisäksi opettajien uskomusten matematiikan opetuksesta on myös katsottu heijastelevan heidän uskomuksiaan oppilaiden matemaattisesta tiedosta ja siitä, kuinka oppilaat oppivat matematiikkaa (Carpenter ym. 1988).

Edellä esitetyt luokittelut ovat hyödyllisiä tarkasteltaessa opettajien uskomusten rakennetta ja kuvattaessa myös niitä eroja, joita vallitsevissa uskomuksissa matematiikasta

ja sen opetuksesta esiintyy. Tutkimustulosten perusteella voidaan todeta, että yksittäisen opettajan uskomukset matematiikan opetuksesta eivät täsmälleen sovi minkään yksittäisen uskomustyyppin kuvaukseen, vaan sisältävät yleensä osia useista eri näkemyksistä.

Jos esimerkiksi luokanopettajilla on uskomuksia, että matematiikka on vaikea oppiaine, että he itse eivät ole hyviä 'matematiikkoja' ja että matematiikalla on vain vähän käyttöä, niin heidän opetuksensa myös heijastaa näitä uskomuksia. Tätä kautta jokainen uusi oppijoiden sukupolvi kiinnitetään samoihin uskomuksiin ja negatiivisiin asenteisiin (Southwell & Khamis 1992). Ball (1988) on listannut joukon sellaisia uskomuksia, joita tulevat opettajat usein liittävät matematiikan opettamiseen ja oppimiseen (ks. myös Mathematics counts 1982; Schoenfeld 1989; Thompson 1984):

- *Matematiikalla on vain vähän yhteyksiä reaali maailmaan ja useimpia matemaattisia ideoita ei voi esittää muutoin kuin abstraktisti symbolien avulla.*
- *Rakkaus lapsiin – eikä niinkään sisältöaineksen tietämys – on ala-asteen opetuksen perusta.*
- *Opettamaan oppimisessa on pääasiassa kysymys tekniikoiden hankkimisesta.*
- *Ala-asteen matematiikan opetuksessa ei tarvita paljon matemaattista tietämystä - jokainen, joka osaa laskea yhteen, vähentää, kertoo ja jakaa, osaa tarpeeksi matematiikkaa pienten lasten opettamiseksi.*
- *Opettajat kysyvät kysymyksiä saadakseen oikeita vastauksia; jos opettaja epäilee vastaustasi, niin se tarkoittaa, että teit virheen.*
- *Matematiikan opettaminen on sitä, että kerrotaan ja näytetään oppilaille, kuinka erilaisia tehtäviä suoritetaan.*
- *Matematiikan osaaminen tarkoittaa sitä, että 'tietää miten tehdään'.*
- *Hyvät opettajat esittävät matematiikan hauskaasti oppilailleen.*
- *Matematiikan oppiminen on pelottavaa.*
- *Lapset ovat innokkaita oppimaan ja luottavaisia, mutta he eivät ole kykeneviä ajattelemaan vaikeampia matemaattisia asioita eivätkä ratkaisemaan todellisia ongelmia.*

Ernest (1989b) on kuvannut matematiikan opettamista koskevia uskomuksia kolmen opettajatyypin avulla, joissa määrittävinä kriteereinä ovat opettajan rooli ja tavoiteltu opetuksen tuotos. Ensimmäisessä tyyppissä opettaja nähdään 'ohjaajana', joka tähtää matematiikan taitojen hallintaan oikeiden suoritusten kautta. Tällaisen 'perinteisen' opettajan toimintaa voitaisiin luonnehtia Thompsonin (1984) tapaustutkimuksen pohjalta seuraavasti:

Opettaja J ymmärsi matematiikan "opetussuunnitelman matematiikkana". Hänen uskomuksiaan opetuksesta voidaan luonnehtia sillä, millaisena hän näki oman roolinsa opetuksessa ja vastaavasti oppilaan roolin oppimisessa. Hän kiinnitti paljon huomiota tunnin kulun ja edistymisen kontrollointiin sekä pyrki välttämään poikkeamista ennalta laaditusta tuntisuunnitelmasta. Kontrollin merkitys ilmeni myös siten, että suurimman osan opetukses-

ta hän toteutti luokan edestä. Hän huolestui selvästi odottamattomista tilanteista tunnin kuluksessa, mistä oli seurauksena, että opetuksesta ei löytynyt lähestymistapoja, jotka olisivat olleet avoimempia ja sisältäneet ennustamattomia tilanteita (mm. ongelmanratkaisu). Opettaja J:n oppisisältöjen esitystapa oli formaalinen: asioiden kuvaamisen perusaineksina olivat matematiikan symbolit ja rakenneominaisuudet. Harvemmin hän kiinnitti huomiota oppilaiden intuitiivisiin havaintoihin tai oppisisällön käytännön merkitykseen. Tyypillinen oppilaiden osallistumismuoto oli lyhyiden ja yksinkertaisten vastausten antaminen. Silmiinpistävin ristiriita hänen uskomustensa ja opetuksensa välillä liittyi oppilaiden aktivointiin. Vaikka hän oli sitä mieltä, että opettajan on rohkaistava oppilaiden osallistumista luokassa, oltava altis oppilaiden omille huomioille ja pyrittävä muovaamaan oppitunnit oppilaiden tarpeista lähtien, ei tuntien aikana kuitenkaan ilmennyt minkäänlaisia pyrkimystä keskustelun aikaansaamiseen oppilaiden kesken tai oppilaiden ja opettajan välillä. (Thompson 1984, 109–112.)

Ernestin (1989b) toinen opettajatyyppejä on 'selittäjä', jonka opetuksen tavoitteena on matematiikan yhtenäisen tietorakennelman käsitteellinen ymmärtäminen. Kolmannessa tyypissä opettajalla on 'helpottajan' rooli, jolloin hän pyrkii luomaan turvallisen opiskeluympäristön ongelmien etsimiselle, muotoilemiselle ja ratkaisemiselle. Näiden kahden opettajatyypin yhdistelmää (selkeämmin helpottaja -tyyppi, jonka matematiikkauskomukset olivat paljolti luonteeltaan konstruktivistisia) voidaan kuvata Thompsonin (1984) tapaan seuraavasti:

Innostuneisuus matematiikkaa kohtaan näkyi selkeästi opettaja P:n opetuksessa. Hän puhui toistuvasti oppilaille siitä tyytyväisyydestä, joka syntyy käsiteltäessä haastavia tehtäviä ja pystyttäessä ratkaisemaan ne. Aina kun oppilaat esittivät teräviä kommentteja käsiteltävistä sisällöistä tai onnistuivat keksimään jotakin omaa, hän rohkaisi heitä tällaiseen aktiivisuuteen. Opettaja P:n uskomukset matematiikasta olivat sopusoinnussa hänen opetustyöskentelynsä kanssa. Toistuvasti hän rohkaisi oppilaita esittämään arvailuja ja otaksunmia sekä päätelemään asioita itsekseen selvittäen samalla heille näiden toimintojen tärkeyttä matemaattisen tiedon hankkimisessa. Oppilaiden intuitiivisten huomioiden hyväksikäyttöä hän perusteli sillä, että opetettava aines on tehtävä oppilaille mielekkääksi. Ylipäätään opettaja P luotti vankasti matematiikan taitoihinsa ja kykyynsä opettaa. Opettaja P painotti lisäksi oppilaiden positiivisen asenteen tärkeyttä ja uskoi, että opettaja pystyy välittämään oman innostuksensa oppilaisiin. Hänen mielestään ei ollut olemassa mitään yhtä ja kaikkein tehokkainta menetelmää opettaa matematiikkaa. Hänen näkemyksensä oli, että tietyn menetelmän sopivuus oli paljolti riippuvainen olosuhteista eikä siten yleensä ennustettavissa. Omassa opetuksessaan hän tarkkaili huolellisesti mikä vaikutus hänen toimillaan oli oppilaisiin ja näin hänen käsityksensä erilaisten opetuksellisten lähestymistapojen ja käytänteiden tehokkuudesta parani. (Thompson 1984, 112–116.)

Matematiikan opettajilla on yleensä hyvin vahvoja uskomuksia siitä, millaista on heidän mielestään hyvä matematiikan opetus. Tämä on hyvin tärkeä puoli opettajankoulutusvaiheessa ja opettajan työssä kehittämisessä. Hyvään ja tehokkaaseen opetukseen liitetään yleensä myös oppiaineen tietämyksen laajuus. Borkon ym. (1992) tutkimus on hyvä esimerkki näihin kysymyksiin liittyvistä uskomuksista.

Borkon ym. (1992) tutkimuksessa lähdettiin noviisi-ekspertti-asetelman näkökulmasta ja pyrittiin kuvailemaan noviisi-opettajien matematiikan opetukseen liittämiä tietoja, uskomuksia, ajattelua ja toimintoja sekä ymmärtämään opettamisen osatekijöiden keskinäistä vuorovaikutusta. Lähemmän analysoinnin kohteena oli opettaja K, joka matemaattiselta taustaltaan oli kaikkein vahvin koulutukseen osallistuneista opetusharjoittelijoista. Hän oli opiskellut yliopistossa kolme vuotta matematiikkaa pääaineena ja siksi hän luokanopettajakoulutuksessa halusi erikoistua matematiikkaan. Erityisen tarkastelun kohteena oli kuudennen luokan oppitunti, jolla oli tarkoitus harjoitella jakolaskualgoritmia. Borkon ym. (1992) esittämä tapausesimerkki on kirjoittajan mielestä niin tärkeä ja puhutteleva, että se on esitetty kokonaisuudessaan tutkijoiden kuvaamana liitteessä 2.

Borkon ym. (1992) tutkimus nosti ensinnäkin kärjistetysti esille sisällöllisen tietämyksen ja pedagogisen tietämyksen merkityksen opetuksessa. Jotta opettaja pystyisi antamaan oppilaiden kannalta ymmärrettäviä vastauksia heidän esittämiinsä kysymyksiin, niin hänellä on *oppisisältötiedon* lisäksi ja rinnalla oltava myös *pedagogista sisältötietoa*. Oppisisältötietohan käsittää sekä matemaattista tietoa (faktoja, käsitteitä, periaatteita ja oppiaineen selitysmalleja) että tietoa matematiikasta (tietoa matematiikan luonteesta ja diskurssista sekä siitä, mitä tarkoittaa matematiikan osaaminen ja tekeminen) (Ball 1991). Grossmanin ym. (1989) mukaan oppiainetta koskevat uskomukset sisältyvät myös oppisisältötietoon. Pedagogisella sisältötiedolla tiedolla tarkoitetaan puolestaan sellaista tietämystä, jonka avulla sisällöllinen aines esitetään niin, että se 'sopii' oppijoiden erilaisiin kykyihin ja kiinnostuksiin. Pedagoginen sisältötieto sisältää siten Shulmaniin (1986) pohjaten oppisisältöjen hyödyllisimmät esitysmuodot, tehokkaimmat analogiat, havainnollistukset, esimerkit, selitykset ja demonstroinnit, ts. sellaiset sisällön esitystavat, jotka tekevät sen ymmärrettäväksi muille. Se pitää sisällään myös sen ymmärtämisen, miksi tiettyjen sisältöjen oppiminen on helppoa tai vaikeaa ja ne ennakkokäsitykset, joita eri ikäiset ja taustaltaan erilaiset oppilaat tuovat mukanaan oppimiseen.

Tutkimuksensa pohjalta Borko ym. (1992, 219–221) tekivät useita johtopäätöksiä koskien noviisi-opettajien matematiikan oppiainetietämyksen, opetustaitojen ja heidän opetukseen liittämiensä uskomusten välistä suhdetta. Ensinnäkin tutkijat painottivat sitä, että opettajiksi opiskelevien oppisisältötietämystä tulisi vahvistaa. Pelkästään yliopistokursien lukumäärän lisääminen koulutukseen ei kuitenkaan takaa sitä, että opettajiksi opiskelevat saavat tarvitsevansa oppisisältötiedot. Itse asiassa on olemassa yhä enemmän tutkimuksellista evidenssiä sille, että matematiikan kursseilla opiskelijat saavuttavat opetustyön kannalta tyydyttävät tavoitteet pääsemättä kuitenkaan sisältöaineeseen käsitteelliseen ymmärtämiseen. Jotta opettajat voisivat tarjota oppilailleen merkityksellisiä ja mielekkäitä oppimistilanteita, heillä itsellään täytyisi olla mahdollisuus omassa koulutuksessaan tehdä matematiikkaa: tutkia, analysoida, rakentaa malleja, kerätä ja esittää tietoa, perustella asioita ja ratkaista ongelmia.

Toiseksi opettajakoulutuksen tulisi tarjota opettajakokelaille mahdollisuus vahvistaa heidän pedagogista sisältötietämystään (Borko ym. 1992). Opettajakokelailla tulisi olla koulutuksessaan aikaa ja kannustimia sellaiseen harjoitteluun ja reflektointiin, joka on välttämätöntä heidän ammatillisen tietoperustansa kehittämiseksi. Ei riitä pelkästään se, että näitä mahdollisuuksia tarjotaan opettajakokelaille vain pedagogisen koulutuksen aikana. Tämä johtuu siitä, että tuolloin opettajakokelaat eivät näe relevanssia kaikelle sille tiedolle, joka heille opetetaan ja ilman välitöntä tiedon tarvetta he eivät paneudu siihen riittävän hyvin.

Kolmanneksi tutkijat korostivat, että on tärkeää löytää tapoja asettaa kyseenalaiseksi opettajiksi koulutettavien perustavaa laatua olevat uskomukset oppimisesta, opetuksesta ja opettamaan oppimisesta. Vaikkakin monet esimerkkiopettajan uskomuksista koskien matematiikan oppimista ja opettamisesta (esimerkiksi 'on tärkeää oppia matematiikkaa ymmärtäen' tai 'sovelluksilla ja visualisoinnilla on keskeinen rooli opetuksessa') sopivat yhteen matematiikan opetuksen uudistushengen kanssa, niin hänen matemaattinen ja pedagoginen tietämyksensä ei antanut niille tukea. Tämän lisäksi opettajan uskomukset oman matematiikan tietämyksen riittävydestä ja toisaalta käytännön kokemuksen keskeisestä merkityksestä opettamaan oppimisessa olivat todennäköisesti ehkäisseet muita tietoperustan kohentamisyhteyksiä. (Borko ym. 1992, 220.)

Uskomukset matematiikan sisältö- tai tavoitealueiden opettamisesta

Matematiikan opettajien uskomuksia käsittelevässä tutkimuksessa ei ole kovin paljon kosketeltu matematiikan opetussuunnitelman erillisiä tavoitealueita tai oppisisältöjä (Peterson ym. 1989). Suurin osa uskomustutkimuksesta on käsitellyt opettajien uskomuksia matematiikasta sekä matematiikan oppimisesta ja opetuksesta (ks. Hoyles 1992, Thompson 1992). Näissä ei ole analysoitu opettajien uskomuksia spesifisti jotain tiettyä sisältöaluetta tai luokka-astetta koskien. Esimerkiksi 1980-luvun puolivälissä oli vielä verraten vähän tutkimustietoa opettajan roolista oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen kehittämisessä, koska tutkimus oli vielä pääosin keskittynyt oppilaisiin ja siihen kuinka oppilaat ratkaisevat ongelmia (Ford 1988).

Se, milloin ja millä tavoin ongelmanratkaisua opetetaan ja opiskellaan, on eräs niitä matematiikan opetuksen kysymyksistä, joihin opettajan uskomuksilla matematiikan ja sen oppimisprosessin luonteesta on merkitystä (Lerman 1993). Mikäli opettaja näkee matematiikan ajattelutapoina ja ympäröivän maailman tarkastelun prosesseina, niin silloin matematiikkaa tulisi lähestyä ongelmanratkaisun avulla. Jos taas matematiikka ajatellaan tietorakennelmana ja tiedon määränä, joka oppilaiden tulee savuttaa ja vasta sen jälkeen soveltaa ongelmanratkaisutilanteisiin, niin silloin opettajan on löydettävä jostain aikaa ongelmanratkaisun opettamiseen.

Kun Grows ym. (1990) tutkivat opettajien uskomuksia matemaattisesta ongelmanratkaisusta ja kuinka opettaa sitä, he löysivät neljä merkityskategoriaa: 1) ongelmanratkaisu on sanallisia tehtäviä, 2) ongelmanratkaisu on ratkaisujen löytämistä ongelmatehtäviin, 3) ongelmanratkaisu on käytännön ongelmien ratkaisemista ja 4) ongelmanratkaisu on ajattelutehtävien (thinking problems) ratkaisemista. Tutkimuksessa mukana olleista 25 opettajasta 6 voitiin sijoittaa ensimmäiseen kategoriaan, 10 opettajaa toiseen, 3 opettajaa kolmanteen ja 6 opettajaa neljänteen kategoriaan. Kuitenkaan opettajien oppituntitavoitteet ja niihin liittyvät opetusmenetelmät samoin kuin oppituntien luonne eivät liittyneet heidän antamiinsa määritelmiin. Perusteluksi opettajat mainitsivat sen, ettei heillä ollut riittävästi aikaa ongelmanratkaisun opettamiseen. Kategorioiden 1 ja 2 kaltaista ja vieläkin hyvin yleistä lähestymistapaa voidaan havainnollistaa Thompsonin (1984, 112) tapaustutkimuksen kuvauksella.

Yhden kerran neljän viikon aikana opettaja J antoi oppilaille ongelmanratkaisuun liittyvän tehtävämonisteen. Monisteessa oli 12 sanallista tehtävää prosenttilaskusta, joista 11 ensimmäisessä oli ratkaistava prosenttiarvo, kun tunnettiin perusarvo ja prosenttiluku. Viimeisessä tehtävässä oli annettu prosenttiarvo ja perusarvo ja kysyttiin prosenttilukua. Ennen monisteiden jakoa opettaja käsitteli vielä yhden näistä tehtävistä taululla ja painotti yhtälön muodostamista. Oppilaat työskentelivät monisteen parissa luokassa ja jatkoivat vielä kotona. Seuraavana päivänä opettaja antoi tehtäviin vastaukset ja kehotti oppilaita samanaikaisesti korjaamaan omat paperinsa. Havaittiin, että useimmat oppilaat eivät olleet osanneet ratkaista viimeistä tehtävää. Opettajan mukaan viimeisen tehtävän vaikeus johtui siitä, että se oli erilainen kuin edelliset. Hän oli pannut tehtävän monisteeseen siksi, että se oli johdattelua seuraavan tunnin aiheeseen. Ja koska hän ei ollut esittänyt sopivaa yhtälöä tämänkaltaisen tehtävän ratkaisemiseen, ei hän odottanutkaan, että oppilaat pystyisivät ratkaisemaan sen. Neljän viikon havainnointijakson aikana opettaja J sivuutti oppikirjasta muutamia sivuja, jotka sisälsivät sanallisia tehtäviä. Syyksi tälle hän esitti, että oppilaat eivät pidä näiden tehtävien parissa työskentelystä ja että tällaiset tehtävät antavat oppilaille vain runsaasti turhautumisen kokemuksia.

Grows ym. (1990) painottavat, että on huolellisesti kuvattava se, mitä opettajat tarkoittavat, kun he pitävät ensiarvoisen tärkeänä ongelmanratkaisua ja sen opettamista oppilailleen. He myös varoittavat siitä, että opettajilla on taipumusta vastata tietyillä 'muotikielen' sanoilla ja ongelmanratkaisuhan on ollut matematiikan opetuksen päävirtauksia 1980-luvun alkupuolelta saakka.

Ford (1988) puolestaan selvitti haastattelututkimuksessaan, millaiset olivat luokanopettajien (5. luokka) uskomukset matemaattisesta ongelmanratkaisusta. Aineiston analysoinnin pohjalta tutkija päätyi seuraavanlaisiin yleisiin johtopäätöksiin. Ensinnäkin viidennen luokan opettajat uskoivat, että matemaattinen ongelmanratkaisu on pääasiassa laskutaitojen soveltamista jokapäiväisen elämän tilanteisiin. Oppilaiden uskomukset olivat

myös hyvin samankaltaisia opettajien uskomusten kanssa. Toiseksi opettajat katsoivat, että heidän arvionsa ongelmanratkaisussa onnistumisesta perustuivat oikeisiin vastauksiin. Kolmanneksi opettajat ilmaisivat, että merkittäviä syitä oppilaiden onnistumiseen tai epäonnistumiseen ongelmanratkaisussa olivat erot heidän kyvykkyydessään – esimerkiksi laskemiskyvyssä, lukemiskyvyssä ja päättelykyvyssä. Vastaavasti taas avuttomuuden ja turhautumisen tunne, jota opettajat ilmaisivat ongelmanratkaisun opettamiseen liittyen, olivat heidän mielestään myös yleisiä oppilaiden suorituksiin vaikuttavia syitä. Tällöin ne samalla tukivat sitä uskomusta, että kyvykkyys vaikutti selvimmin oppilaiden suorituksiin ongelmanratkaisussa. Neljänneksi opettajien ongelmanratkaisun opettamisessa käyttämät menetelmät ja materiaalit eivät näyttäneet poikkeavan niistä, joita he käyttivät muilla matematiikan tunneilla. Viidennen luokan ongelmanratkaisussa korostuivat laskemistaidot, mikä todennäköisesti johtui siitä, että kaikki opettajat käyttivät lähinnä oppikirjaa ongelmanratkaisutuntien suunnittelun ja toteutuksen lähdeaineistona. Viidenneksi opettajat näyttivät yliarvioivan oppilaiden mahdollisuuksia ratkaista laskemista sisältäviä ongelmia ja taas aliarvioivan oppilaiden mahdollisuuksia ratkaista päättelytehtäviä. Opettajien arviot olivat kenties seurausta ongelmanratkaisun laskennallisten aspektien ylikorostumisesta ja päättelyongelmien aliedustuksesta viidennen luokan opetuksessa. Opettajat uskoivat, että monet heidän oppilaistaan eivät osaisi ratkaista päättelyongelmia. Tämä kuvastaa Fordin (1988) mukaan tärkeällä tavalla niitä mahdollisuuksia, joita oppilailla on ongelmanratkaisun opiskeluun. Näyttäisikin siltä, että oppilaille ei tarjoudu riittävästi mahdollisuuksia kehittää päättelyongelmien ratkaisutaitoja ja että nämä heikommat oppimismahdollisuudet johtuvat opettajien uskomuksista.

Uskomusten ja opetuskäytännön välinen yhteys sekä uskomusten muuttuminen

Uskomusten roolia matematiikan opetuskäytännön muotoutumisessa tai uskomusten muuntumista ei ole tutkittu niin paljon kuin esimerkiksi opettajien matematiikkauskomusten luonnetta ja rakennetta. Kuitenkin näiltäkin alueilta on olemassa useita kiinnostavia tutkimuksia. Niissä kaikissa on korostuneesti näkyvillä se sosiaalinen konteksti, jossa opettajat työskentelevät ja jonka merkitys opetuskäytännön ja sen kehittämisen kannalta on ensiarvoisen tärkeä (mm. Ernest 1991; Popkewitz 1988).

Useissa tutkimuksissa on havaittu selviä yhteyksiä opettajien uskomusten ja heidän käytännön opetuksensa välillä (mm. Bishop & Nickson 1983; Cooney & Shealy 1997; Kuhs 1980; Thompson 1982, 1984). On kuitenkin myös tutkimuksia, joissa on havaittu, että opettajien uskomukset ja heidän opetuskäytäntönsä ovat enemmän tai vähemmän ristiriidassa keskenään. Esimerkiksi Deforgesin ja Cockburnin (1987) tutkimuksessa esiintynyt epäsuhta uskomusten, pyrkimysten ja käytännön välillä johtui heidän mielestään niistä rajoittavista tekijöistä, joita opetuksen lähestymistavoissa ei otettu huomioon. Kuitenkaan näitä rajoittavia tekijöitä ei sen kummemmin analysoitu. Cobbin ym. (1990)

tutkimus on puolestaan erinomainen esimerkki kehittämishankkeesta, jossa opettajat pystyivät muuttamaan opetuskäytäntöään (ja uskomuksiaankin) työskentelyn rajoituksista huolimatta.

Nolder (1990) on tarkastellut tutkimuksessaan matematiikan opettajien toimintaa tilanteessa, jossa heidän odotettiin muuttavan opetuskäytäntöjään opetussuunnitelmanmuutoksen seurauksena. Pyrkimyksenä oli saada opettajat käyttämään avoimempaa ja tutkivampaa lähestymistapaa matematiikan opiskelussa. Tutkimusprojektin aikana havaittiin, että muutoksen aikaansaaminen on erittäin vaikeaa monista rajoituksista ja paineista johtuen. Opettajien mielestä tärkeimpiä rajoittavia tekijöitä olivat *aika*, *vanhempien odotukset* ja *julkiset tutkinnot*. Tämän lisäksi myös omia rajoituksiaan loivat opettajien mielestä tulostavuuajattelu ja heidän omat uskomuksensa ja käsityksensä perinteisestä opetuksesta. Ensinnäkin vanhempien käsitykset siitä, mikä on oikeaa matematiikkaa, voivat olla hyvinkin vastakkaisia uusille opetustavoille. Opettajat joutuivatkin vaikeaan tilanteeseen harkitessaan, pysyttävätkö he koetelluissa ja vanhempien hyväksymissä opetusmenetelmissä vai kokeilevatko he 'testaamattomia' menetelmiä, jotka aiheuttivat helposti valituksia oppilaiden kotoa. Kummassakin tapauksessa oli olemassa riski, että oppilaiden suoritukset saattoivat heiketä, sillä vanhat opetustavat olivat todennäköisesti sopimattomia uusiin arviointimenettelyihin ja toisaalta taas opettajilla ei ollut riittävää koulutusta uudenaikaiseen opetukseen. Opettajien mielestä uudenlaiset lähestymistavat vaativat myös lisää aikaa sekä opetustilanteessa että opetuksen valmistelussa ja arvioinnissa. Tästä oli seurauksena ajan tasapainottamisen ongelma: kuinka paljon voi käyttää aikaa valmisteluun ja arviointiin tai miten jakaa aikaa 'tiedon välittämisen' ja 'asioiden keksimisen' välillä oppitunnin aikana. (Nolder 1990, 170–172.)

Ernestin (1991) esittämän uskomusten välittymismallin mukaisesti opettajien opetusprosessien muuttuminen ja heidän uskomustensa mukautuminen kulkevat rinnakkain. Tästä johtuen oli Nolderin (1990) mukaan selvää, että opettajien matematiikan opetukseen liittämien uskomusten ja uuden opetussuunnitelman esittämän oppimisajattelun välillä oli ristiriitaisuutta. Opettajille oli todella vaikeaa käsittää sitä, että oppilaat oppivat matematiikkaa 'tyhjästä', niin kuin he asian ilmaisivat. Tästä oli seurauksena, että monissa kohdin opettajat toimivat opetuksessaan omaksumallaan perinteisellä tavalla. Brown ja Cooney (1991) ovat myös havainneet tämän opetuskäytännön dualistisen luonteen: kun on kysymys uudenlaisen menettelyn kokeilemisesta tai luokan kontrolloinnin säilyttämisestä, niin jälkimmäisen on saatava etusija, koska opettajien on pystyttävä hallitsemaan ja ennustamaan luokan tapahtumia.

4.5.2 Kotimainen uskomustutkimus

Suomalaista tutkimusta matematiikan opettajien uskomuksista on olemassa vielä verraten vähän, mutta tällä vuosikymmenellä sen määrä on alkanut lisääntyä (mm. Kupari 1995; Lindgren 1995, 1996; Pehkonen 1992, 1998; Pehkonen & Törner 1995). Lisäksi tutkimusta on tehty tai tekeillä oppilaiden matematiikkauskomuksista (mm. Hannula 1997; Hoskonen 1996; Malmivuori 1994).

Erkki Pehkonen on ollut 1980-luvun loppupuolella käynnistämässä kansallista matematiikkauskomusten tutkimusta ja tutkinut niin oppilaiden, opettajien, opettajankouluttajien kuin professorienkin uskomuksia ja käsityksiä matematiikan opetuksesta (esim. Pehkonen 1991, 1993, 1994b, 1994c, 1998). Tämän lisäksi hän on ollut myös johtamassa tutkimusta, jossa on vertailtu eri maiden opettajien ja oppilaiden matematiikkakäsityksiä (mm. Pehkonen & Lepmann 1993, 1994).

'Avoimet tehtävät matematiikanopetuksessa' -projektissaan Pehkonen (1991) selvitti, mitä opettajankouluttajat ajattelivat matematiikan probleemanratkaisusta ja sen opettamisesta. Opettajankouluttajien käsityksiä kartoitettiin kahdessa vaiheessa: ensin vapaamuotoisella kyselyllä ja sen jälkeen edellisen vaiheen vastausten pohjalta laaditulla kyselyllä. Kysely koostui 35 väitteestä, joilla pyrittiin vastamaan viiteen tutkimusongelmaan: 1) Miksi probleemanratkaisu on tärkeää?, 2) Miten probleemanratkaisua on opetettava?, 3) Mitä edellytyksiä on probleemanratkaisun opettamiselle?, 4) Mitä edellytyksiä probleemanratkaisun opettaminen asettaa opettajalle? ja 5) Miten opettajankouluttajat ovat toteuttaneet ongelmanratkaisua omassa opetuksessaan?

Pehkosen (1991) mukaan opettajankouluttajat pitivät probleemanratkaisua tärkeänä, koska sen avulla voidaan kehittää oppilaiden kognitiivisia valmiuksia ja auttaa oppilaita hallitsemaan oppimaansa matematiikkaa. Probleemanratkaisun opettamisen tavoissa korostui matematiikan osuus: opettajankouluttajat pitivät kaikkein tärkeimpänä keinona sopivien tehtävien antamista. Heidän mielestään probleemanratkaisua tuli opettaa luovasti, joustavasti ja hyväksyvästi, minkä lisäksi avoimet keskustelut olivat myös välttämättömiä. Lisäksi oppilaat on saatava mukaan opetukseen antamalla heidän ratkoa itse laatimiaan probleemoita sekä käsittelemällä oppilaiden ympäristön tuttuja ongelmia. Opettajankouluttajat pitivätkin probleemanratkaisun opettamisen tärkeimpänä edellytyksenä oppilaiden valmiuksia tällaiseen opiskeluun. He odottivat mm. luokan myönteistä ilmapiiriä, oppilaiden motivoituneisuutta, peruslaskutaitojen hallintaa sekä sopivia tehtäviä käyttöönsä. Ajan riittävyttä ei pidetty suurena ongelmana. Opettajankouluttajien käsitysten mukaan probleemanratkaisun opettaminen oli synnynnäinen taito, jossa opittavat asiat eivät näyttele niin tärkeitä roolia. Tärkeinä persoonallisuuspiirteinä tuotiin esille mm. uskallus kohdata uutta, olla oma itsensä, toimia epätavanomaisesti, avoimuus, innostus, joustavuus ja itsevarmuus. Lisäksi opettajan tuli olla perehtynyt probleemanratkaisuun sekä teoriassa että käytännössä,

jaksaa yrittää uutta ja omistaa riittävästi aikaa opetuksensa valmisteluun. Omassa opetuksessaan opettajankouluttajat olivat toteuttaneet probleemanratkaisua yllättävän vähän ja näissä tilanteissa he olivat toteuttaneet sitä omasta mielestään oppilaiden tarpeista lähtien. (Pehkonen 1991.)

Pehkonen ja Törner (1994) selvittivät tutkimuksessaan matematiikan opettajien käsityksiä niistä muutoskohdista, jotka olivat olleet opettajille erityisen merkityksellisiä. Tutkittavina oli 13 saksalaista opettajaa eri kouluasteilta ja tutkimusmenetelmänä he käyttivät kyselyä sekä opettajien haastattelua. Kysely lähetettiin opettajille etukäteen ja sen tehtävänä oli orientoida ja aktivoita opettajia haastattelua varten. Teemahaastattelun avulla tutkijat pyrkivät paljastamaan opettajien käsityksiä opettajuuden ja opettamisen muutoskohdista. Menetelmään liittyen tutkijat pitivät hyvänä kahden menetelmän käyttämistä, mutta toivat myös esille omien matematiikkakäsitystensä asettamat rajoitukset tulosten tulkinnassa.

Kyselytulosten perusteella opettajilla näytti olleen verraten yhtenäinen kuva matematiikan opetuksesta. Haastattelut kuitenkin paljastivat suuren vaihtelun opettajien matematiikkakäsityksissä. Niiden tuloksena opettajat mainitsivat kaikkiaan 49 muutosta koskevaa ilmaisua, jotka voitiin tiivistää neljään kategoriaan sisältyviksi muutosfaktoreiksi. Kolmessa neljäsosassa näistä ilmaisuista tutkittavat puhuivat itsestään 'opettajina', jolloin kokemukset oppilaiden tai oppilaiden vanhempien kanssa tulivat korostuneesti esille. Neljäsosassa ilmaisuista opettajat puhuivat itsestään 'oppijoina', ja tällöin ne liittyivät yleensä koulutuksellisiin kokemuksiin. Tutkijoiden mielestä yllättävä havainto oli se, että opettajat olivat varsin tyytymättömiä omaan opettajankoulutukseensa. (Pehkonen & Törner 1994.)

Pehkonen ja Lepman (1994, 1995) tarkastelivat kyselytutkimuksessaan suomalaisten ja eestiläisten matematiikan opettajien matematiikkakäsitysten eroja ja selvittivät erityisesti käsityksissä ilmeneviä eroja. Tutkimuksen kyselylomake koostui 54 väittämästä (Pehkonen & Zimmermann 1990), joiden luokittelussa he käyttivät Dionnen (1984) esittämää käsitysten jaottelua: traditionaaliset, formalistiset ja konstruktivistiset. Vertailun tulokset paljastivat matematiikkakäsitysten samankaltaisen rakenteen sekä Eestissä että Suomessa. Käsitysdimensioiden lähemmässä tarkastelussa löytyi kuitenkin myös eroja. Opettajien traditionaaliset matematiikkakäsitykset olivat kokonaisuutena hyvin samanlaiset molemmissa maissa. Kuitenkin suomalaiset opettajat painottivat enemmän rutiiniharjoittelua ja eestiläiset opettajat puolestaan matemaattista sisältöä. Sitä vastoin formalististen käsitysten osalta erot olivat varsin selkeät siten, että eestiläisten opettajien käsitykset olivat formalistisemmat kuin suomalaisilla. Eestiläisten mielestä oli tietojen ja yleisten laskutekniikoiden välittäminen, symbolien oikea käyttäminen, täsmällinen todistaminen, oppilaan yksilöllinen työskentely ja selkeästä ihmiskuvasta lähteminen oleellisesti tärkeämpää kuin suomalaisten mielestä. Eestiläisten ja suomalaisten opettajien konstruktivistiset käsitykset

olivat jälleen miltei identtiset. Ainoa suurempi ero koski konkreettisen materiaalin käyttämistä ja eestiläiset opettajat olivat ahkerampia käyttäjiä.

Pehkonen on haastattelututkimuksessaan (Pehkonen 1998) selvittänyt myös suomalaisten matematiikan professorien käsityksiä matematiikan luonteesta ja peruskoulun yläasteen matematiikan opetuksesta. Seitsemää professoria koskeneen haastatteluaineiston tulkinnaissa Pehkonen käytti matematiikkakäsitysten kolmidimensionaalista luokitusta: 'työkalupakki', systeemi ja prosessi (ks. Mura 1995; Törner & Grigutsch 1994). 'Työkalupakki'-aspektissa matematiikka on kokoelma laskusääntöjä ja -rutiineja, joita sovelletaan tilaisuuden mukaan. Systeemi-aspektin mukaan matematiikka on formaali systeemi, jossa toimitaan ankan loogisesti, tarkasti ja täsmällisesti. Prosessi-aspekti ilmentää puolestaan sitä, että matematiikka on dynaaminen prosessi, jossa jokainen luo matematiikkansa tarpeidensa ja kykyjensä mukaisesti.

Tulokset osoittivat, että useimpien professorien antamissa matematiikka-määritelmissä painottui formaalinen systeemi ja matematiikka nähtiin valmiina abstraktina rakennelmana, jossa keskeistä on päättelyn loogisuus. Ainoastaan yksi professorien antamista kuvailuista voitiin katsoa prosessiaspektiin kuuluvaksi. Kun eri matematiikkakäsitysten suhteellista esiintymistä tarkasteltiin kouluasteittain (ala-aste, yläaste ja lukio), oli professorien käsityksissä runsaasti vaihtelua, joskin tendenssi oli nähtävissä. Ala-asteella korostui 'työkalupakki'-aspekti ja sen osuus väheni ylemmille luokille siirryttäessä. Systeemi-aspektin osuus puolestaan lisääntyi jonkin verran lukioon päin mentäessä. Prosessiaspektin osuus lisääntyi niinkään ylemmissä koulumuodoissa ja yläasteella se oli hieman korkeampi kuin lukiossa. Pehkonen (1998) varovaisen tulkinna mukaan matematiikan professorien matematiikkakäsitteet keskittyvät formalismin ja sovellutusten ympärille, mutta he eivät myöskään väheksy matematiikan prosessiaspektin merkitystä.

Lindgren (1994) on vertailut japanilaisten ja suomalaisten ala-asteen opettajien matematiikkauskomuksia. Vertailututkimuksessaan hän halusi selvittää, millaisia dimensioita japanilaisten ala-asteen opettajien matematiikkauskomukset sisältävät, onko toisen ja viidennen luokan opettajien uskomuksissa eroja ja onko opettajien sukupuolella, matematiikan koulutuksen pituudella tai opetuskokemuksella yhteyttä uskomuksiin. Toiseksi tutkija pyrki selvittämään, onko japanilaisten ja suomalaisten opettajien matematiikkauskomuksissa eroja ja jos on, niin minkä tyyppisiä nämä eroavuudet ovat. Vertailtaviksi valittiin japanilaiset viidennen luokan opettajat ja suomalaiset kuudennen luokan opettajat. Opettajaryhmät olivat tutkijan mukaan vertailukelpoisia sen vuoksi, että Japanissa matematiikan opetussuunnitelma kulkee vuoden tai kaksi vuotta useimpia eurooppalaisia opetussuunnitelmia edellä. Tutkimus toteutettiin kyselytutkimuksena ja kyselylomake oli sama kuin se, jota tämän tutkimuksen tekijä on käyttänyt tutkimuksen ensimmäisessä vaiheessa vuonna 1990. Tokiossa tutkimukseen osallistui syksyllä 1991 kaikkiaan 101 opettajaa, joista 52 oli viidennen luokan opettajia.

Japanilaisesta aineistosta Lindgren (1994) löysi neljä matematiikan opetusta kuvaavaa faktoria. Hän nimesi faktorit "avoimen lähestymistavan metodiksi" (kärkimuuttujat: Oppilaan tulisi saada kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla., Suoritusten arvioinnissa on otettava huomioon käytetyt ratkaisutavat, "ahkeran työskentelyn metodiksi" (kärkimuuttujat: Olisi opetettava ennen kaikkea matemaattista tietoutta., Matematiikan opetuksessa on ennen kaikkea harjoiteltava runsaasti.), "reflektiivis-analyttiseksi ajatteluksi" (kärkimuuttujat: Tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä., Opetuksessa olisi erityisesti harjoiteltava matemaattisten symbolien käyttämistä) ja "formaaliksi matematiikan opetuksiksi" (kärkimuuttujat: Opetuksessa olisi erityisesti otettava huomioon lahjakkaiden oppilaiden tarpeet., Olisi mietittävä, missä matematiikan opetuksen tilanteissa voisi tietokoneen ottaa käyttöön.). Tulosten perusteella japanilaisten toisen ja viidennen luokan opettajien uskomuksissa ei esiintynyt merkitseviä eroja. Kuitenkin voitiin havaita, että toisen luokan opettajat suosivat enemmän "ahkeran työskentelyn"-metodia ja viidennen luokan opettajat puolestaan kolmea muuta tyyppiä. Naisopettajat pitivät hieman miesopettajia enemmän "avoimen lähestymistavan -metodista" ja kokeneemmat opettajat suosivat nuoria enemmän "ahkeran työskentelyn -metodia" ja "formaalia opetusta". Lindgren (1994) tarkasteli tässä julkaisussa suomalaisten ja japanilaisten ala-asteen opettajien matematiikkauskomusten eroja ainoastaan väittämien tasolla. Japanilaiset opettajat olivat yleensä voimakkaammin samaa mieltä uskomusväittämien kanssa kuin suomalaisopettajat. Esimerkiksi japanilaiset opettajat olivat selvästi vahvemmin sitä mieltä, että "olisi käsiteltävä mieluummin vähemmän oppisisältöjä perusteellisesti kuin paljon sisältöjä pinnallisesti" ja että "tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä".

Toisessa opettajien uskomuksia koskevassa tutkimuksessaan Lindgren (1995) on jatkanut ja osittain replikoinut edellisen tutkimuksensa teemaa. Vuonna 1993 hän keräsi uuden aineiston käyttäen kyselylomaketta, joka oli laajempi kuin edellisessä tutkimuksessa, mutta käsitti myös edellisen lomakkeen osiot. Tutkimusjoukkona olivat pääosin luokanopettajakoulutuksensa aloittavat opiskelijat (72), mutta aineistoa kerättiin myös varhaiskasvatukseen erikoistuvilta opiskelijoilta (17) ja matematiikan opetuksen erikoistuvilta opiskelijoilta (16). Tutkimuksessaan Lindgren vertaili näiden tulevien opettajien ja japanilaisten luokanopettajien matematiikkauskomuksia ja niiden rakenteita keskenään. Lisäksi hän tarkasteli myös opettajaksi koulutettavien uskomusten muuttumista koulutuksen aikana ja tässä hän käytti hyväksi Thompsonin (1991) kolmitasoista mallia opettajien matematiikkäsitusten kehittämisestä.

Tulosten perusteella suomalaisten opettajakokelaiden uskomusrakenne poikkesi jonkin verran edellisen tutkimuksen rakenteesta. Lindgren löysi uskomuksista nyt viisi faktoria, joiden nimet ja sisällöt kuvataan seuraavassa samalla tavoin kuin edellä: 1. "Avoin lähestymistapa" (kärkimuuttujat: Oppilaan tulisi saada kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla., Oppilaita olisi rohkaistava etsimään tehtäviin erilaisia ratkaisuteitä ja

niistä olisi opetuksessa keskusteltava.), 2. "Keskusteleminen ja pelaaminen" (Opettajan pitäisi ennen kaikkea pyrkiä vilkkaaseen opetuskeskusteluun., Matematiikan opetuksessa olisi käytettävä runsaasti oppimislejää), 3. "Säännöt ja rutiinit" (Oppilaiden pitäisi tehtäviä ratkaistaessa saada ennen kaikkea oikea tulos. Olisi opetettava ennen kaikkea matemaattista tietoutta.), 4. "Sisältölähtöinen lähestymistapa" (Oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan ennen kaikkea laskemisen perustekniikat., Suoritusten arvioinnissa on otettava huomioon käytetyt ratkaisutavat.) ja 5. "Oppilaslähtöinen lähestymistapa" (Opetuksessa pitäisi ottaa erityisesti huomioon heikosti menestyvien oppilaiden tarpeet., Opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon lahjakkaiden oppilaiden tarpeet). Nämä viisi faktoria selittivät 50 % suomalaisen aineiston varianssista ja 58 % japanilaisen aineiston varianssista. Japanilaisten opettajien uskomusrakenne oli monilta osin samankaltainen kuin suomalaisopettajilla, mutta eroavuuksia myös ilmeni. Esimerkiksi japanilaiset opettajat korostivat suomalaisia voimakkaammin sellaista oppilaiden työskentelyä, jonka tuloksena matemaattiset säännöt ja ideat ikään kuin 'keksitään' uudelleen. Japanilaiset opettajat myös enemmän huomiota siihen, että oppilaat itse arvioivat omia suorituksiaan ja menetelmiään. Kaiken kaikkiaan uskomusten eroavuudet Lindgren tulkitse kulttuurisen ympäristön (myös opetuskulttuurin) erilaisuudesta johtuviksi. Lindgren (1995) havaitsi myös kehittymistä opettajakokelaiden matemaattikauskuksissa. Ensimmäisen koulutusvuoden jälkeen luokanopettajiksi opiskelevien uskomukset näyttivät olevan enemmän 'avoimen lähestymistavan' mukaisia kuin koulutukseen tullessa. Hänen mielestään kuitenkin vasta seuranta tutkimuksen avulla voidaan saada täsmällisempää tietoa muutoksen luonteesta ja koulutuksen vaikutuksista.

5 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

5.1 Tutkimustehtävä ja tutkimusongelmat

Tämän tutkimuksen peruslähtökohtana on, että opettajien uskomukset matematiikasta sekä sen oppimisesta ja opetuksesta ovat hyödyllisiä ja tärkeitä pyrittäessä ymmärtämään matematiikan opettajien toimintaa ja ajattelua. Tutkimuksessa pyritään kuvaamaan opettajien matematiikkauskomusten luonnetta ja rakennetta, uskomusten muuttumista ajan mukana, uskomusten ja opetuskäytännön keskinäisiä yhteyksiä sekä opettajien uskomusten ja oppilaiden oppimistulosten välisiä kytkentöjä.

Uskomusten ja uskomusjärjestelmien käsitteellisen hahmottamisen perusteet ovat lähtöisin usealta tutkijalta (Abelson 1979; Ernest 1989a; Green 1971; Nespor 1985; Pajares 1992; Rokeach 1968). Luvussa 2 on kuvattu uskomusten ja uskomusjärjestelmien ominaispiirteitä varsin seikkaperäisesti. Tutkimuksen teoreettisen perustan muodostavat luvuissa 2 ja 4 esitellyt viitekehykset (Clark & Peterson 1986; Ernest 1989a, 1989b; Furinghetti 1996), jotka kuvaavat opettajan uskomusten välittymistä ja uskomusten vaikutuksia opettajan ajatteluun ja sitä kautta päätöksiin ja valintoihin. Uskomuksilla nähdään olevan seuraamuksia opettajan opetustoimenpiteisiin ja opiskeluprosessin kautta myös oppilaiden toimintoihin ja oppimiseen. Nämä vaikutusyhteydet ovat hyvin kompleksiset. Kouluyhteisön sosiaalisella kontekstilla on myös oma tärkeä merkityksensä, sillä se sekä tarjoaa mahdollisuuksia että aiheuttaa rajoituksia tälle vuorovaikutusten prosessille.

Matematiikkauskomusten rakenteen ja uskomusten muutosten kuvaamisessa tukeudutaan erityisesti Ernestin (1989a, 1991), Kuhs & Ballin (1986), Thompsonin (1984, 1991) ja Franken ym. (1998) tutkimuksiin. Matematiikkauskomusten luokittelua on esitelty luvussa 4.5.

Tutkimuksessa etsitään vastauksia seuraaviin ongelmiin:

1. Millaisia ovat matematiikan opettajien uskomukset matematiikan opetuksesta ja oppimisesta?
 - 1.1. Millaisia uskomukset ovat luonteeltaan? Miten uskomuksia voidaan kuvaila?
 - 1.2. Millainen rakenne uskomuksilla on ja millaisia osatekijöitä uskomuksiin sisältyy?
2. Onko opettajien matematiikkauskomuksissa eroja?
 - 2.1. Onko opettajia kuvaavilla taustatekijöillä (esim. sukupuoli, opettajakokemus) yhteyttä heidän matematiikkauskomuksiinsa?
 - 2.2. Millaisia uskomusten suhteen erilaisia osaryhmiä opettajien keskuudessa on?

3. Millaisia muutoksia opettajien uskomuksissa on tapahtunut tietyn ajanjakson aikana?
4. Millä tavoin opettajien uskomukset ovat yhteydessä heidän opetustoimintaansa?
5. Millaisia yhteyksiä opettajien uskomuksilla on oppilaiden oppimistuloksiin?

Tutkimuksen ongelmanasettelun avulla halutaan kuvata tilannetta nimenomaan suomalaisten matematiikan opettajien näkökulmasta. Monista tutkimuksista poiketen kysymyksiä tarkastellaan monitasoisesti: kokonaisuutena, eri opettajaryhmissä ja myös yksittäisten opettajien kannalta.

5.2 Tutkimuksen muuttujat

Tutkimuksen empiirinen aineisto on kerätty kolmessa vaiheessa. Koulutuksen tutkimuslaitos toteutti vuosina 1990 ja 1995 kaksi laaja-alaista peruskoulua koskevaa arviointia. Niihin sisältyneissä matematiikan arviointiosuoksissa selvitettiin matematiikan opetuksen ja oppimisen tilaa varsin monipuolisesti (ks. Kupari 1993b, 1993c, 1996b). Keväällä 1990 arviointi kohdistui sekä ala-asteeseen (4. ja 6. luokka, luokanopettajat) että yläasteeseen (9. luokka, aineenopettajat). Vuonna 1995 arvioinnin kohteena oli vain 9. luokka (aineenopettajat). Molemmissa vaiheissa kerättiin tietoa matematiikan opettamisesta ja opettajista ja tällöin selvitettiin myös opettajien uskomuksia matematiikan opetuksesta ja oppimisesta. Huhtikuussa 1995 kerättyä aineenopettajien uskomusaineistoa syvennettiin vielä keväällä 1996 haastattelemalla muutamia opettajia.

Tässä tutkimuksessa keskityttiin tarkastelemaan taulukossa 5.1 lueteltuja matematiikan opettamista, opiskelua ja oppimista kuvaavia tekijöitä ja niitä edustavia muuttujia. Muuttujat on luokiteltu kolmeen ryhmään: opettajien matematiikkauskomuksia kuvaaviin muuttujiin, opettaja- ja opetusmuuttujiin sekä oppilasmuuttujiin (ks. taulukko 5.1).

Kaikkein keskeisimpiä muuttujia olivat opettajien *matematiikkauskomuksia kuvaavat muuttujat*. Taulukossa niistä on annettu joitakin esimerkinomaisia luonnehdintoja. Opettajien uskomusten kuvailu ja niiden rakenteiden selvittäminen olivat ensisijaisia tehtäviä tässä tutkimuksessa, jota varten näistä mitatuista muuttujista muodostettiin faktorianalyysin avulla latentteja muuttujia. Koska lisäksi tarkasteltiin opettajien uskomusten ja heidän opetuskäytäntöjensä välisiä yhteyksiä sekä uskomusten ja oppilaiden oppimistulosten välisiä kytkeitä, voitiin nämä latentit muuttujat myös ymmärtää 4. ja 5. ongelman osalta selittävinä muuttujina.

Opettajamuuttujista tarkasteltiin sekä opettajien taustaa että opetustoimintaa koskevia muuttujia. Taustamuuttujia olivat opettajan sukupuoli, opettajakokemus, täyden-

nyskoulutuksen määrä, asuinympäristö ja koulun maantieteellinen sijainti. Opetusympäristöä kuvaavat muuttujat liittyivät opetuksen painotuksiin (laskutaito / soveltaminen / ongelmanratkaisu) ja opetuksen työskentelymuotoihin.

Oppilasmuuttujien ryhmää käytettiin vain viidennen tutkimusongelman yhteydessä ja siinä mielessä näiden muuttujien merkitys oli vähäisempi. Analysoinnin kohteeksi otettiin vain sellaiset tausta- ja opiskelumuuttujat, joilla arviointitutkimusten aineistojen pohjalta näytti olevan merkitystä oppilaiden oppimistulosten kannalta. Oppimistuloksia tarkasteltiin sekä tiedollisten tulosten että asenteiden osalta.

Taulukko 5.1 Tutkimuksen keskeiset muuttujat ja muuttujaryhmät.

Opettaja, opetusympäristö ja opetus	Opettajan uskomukset	Oppilaan tausta ja oppimistulokset
<i>Tausta</i> Opettajan sukupuoli Opettajakokemus Opettajan täydennyskoulutus Asuinympäristö Koulun alueellinen sijainti	<i>Uskomukset matematiikasta</i> Matematiikka osa kulttuuria Matematiikka laskemisen 'tekniikoita'	<i>Tausta</i> Oppilaan sukupuoli Isän koulutus Kodin apu kotitehtävissä Koulunkäynnin jatko-suunnitelmat
<i>Matematiikan opetustoiminta</i> Opetusryhmän koko Opetuksen valmistelu Oppikirjan ja kokeiden käyttö Opetuksen painotukset Opetuksen työskentelymuodot Kotitehtävien määrä ja luonne	<i>Uskomukset matematiikan opetuksesta</i> Symbolien käyttö Kielenkäytön eksaktisuus Harjoittelun määrä Opetuksen konkreettisuus Erilaiset ratkaisutavat Oppimispelien merkitys Tietokoneen käyttö	<i>Matematiikan opiskelu</i> Ajankäyttö matematiikan kotitehtäviin Laskimen käyttö opetuksessa
	<i>Uskomukset matematiikan oppimisesta</i> Oikean tuloksen saaminen Ajattelun korostaminen	<i>Matematiikan oppimistulokset</i> Tiedolliset tulokset Matematiikka-asenteet

5.3 Opettajien matematiikkauskomusten mittaaminen

Kuten luvussa 4 todettiin, matematiikan opettajien uskomuksia koskevan tutkimuksen kohteet ovat olleet varsin erilaisia (Ernest 1991; Hoyles 1992). Uskomusten mittaamisessa ja tiedonkeruussa on käytetty monenlaisia menetelmiä ja tekniikoita. Useimmin käytettyjä menetelmiä ovat olleet uskomuskyselyt, haastattelut ja opetuksen havainnointit joko erillisinä tai erilaisina yhdistelminä (Pehkonen 1994a). 1990-luvun aikana erilaisten kvalitatiivisten menetelmien käyttö (mm. Beijaard & Verloop 1996) on myös yleistynyt.

Tässä tutkimuksessa arvioinnin kohteena olivat ensisijaisesti opettajien uskomukset matematiikan opetusta kohtaan. Tällöin oltiin kiinnostuneita sellaisista seikoista kuten, mihin peruskoulun matematiikan opetuksessa pitäisi suuntautua, mitä tavoitealueita olisi painotettava, millaisia opetusmuotoja olisi käytettävä ja mitä opiskelun tuloksena oppilaiden tulisi oppia. Kuitenkin samalla, kun arviointi kohdistettiin opetusta koskeviin uskomuksiin, tulivat arvioinnin kohteiksi (osittain implisiittisesti) myös matematiikan oppimista ja matematiikkatiedettä koskevat uskomukset. Molemmissa tiedonkeruuvaiheissa uskomuksia mitattiin kyselyjen avulla, minkä lisäksi vuoden 1995 aineistoa täydennettiin vielä opettaja-haastatteluilla. Taulukossa 5.2 on esitetty uskomuskyselyjen väittämien määrät eri tutkimusvaiheissa.

Taulukko 5.2 Uskomuskyselyjen väittämien lukumäärät peruskoulun ala- ja yläasteella vuosina 1990 ja 1995.

Vuosi	Väittämien lukumäärä		
	Ala-aste	Yläaste	Yhteisiä
1990	27	29	27
Ajankohdille yhteisiä väittämiä 23			
1995	-	30	-

Vuonna 1990 uskomuskyselyn laadinnan perustana käytettiin Zimmermannin ja Pehkosen kyselylomaketta (Pehkonen & Zimmermann 1990). Tätä supistamalla ja muokkaamalla päädyttiin kyselyyn, joka käsitti ala-asteella 27 ja yläasteella 29 väittämää. Opettajiä pyydettiin vastaamaan väittämiin 5-portaista Likert-asteikkoa käyttäen (1 = täysin eri mieltä, ... , 5 = täysin samaa mieltä). Luokanopettajien ja aineenopettajien uskomuskyselyt olivat kahta väittämää lukuun ottamatta samanlaiset.

Vuoden 1990 aineiston analysointi paljasti joitakin puutteita yläasteen uskomuskyselyssä. Jotkut väittämät eivät olleet riittävän yksiselitteisiä ilmaisultaan tai eivät muutoin toimineet tässä kokonaisuudessa. Niinpä vuoden 1995 arviointia varten kyselyä muokattiin siten, että uusi kysely sisälsi kaikkiaan 30 osiota, joista 23 oli samoja kuin vuonna 1990. Uskomuskyselyyn opettajat vastasivat osana opettajakyselyä. Molempien vuosien uskomuskyselyt on esitetty liitteessä 4.

Viiden vuoden aikavälillä (1990 ja 1995) kerätyt uskomusaineistot tarjosivat kiinnostavan mahdollisuuden myös uskomusten kehittymisen ja muuttumisen selvittämiseen (tutkimusongelma 3), koska molemmissa vaiheissa oli ollut mukana samoja opettajia. Syntynyttä tilannetta haluttiin hyödyntää vielä enemmän ja sen vuoksi muutamilta opettajilta kerättiin myös haastatteluaineistoa. Haastattelujen avulla oli mahdollista saada rikkaampaa tietoa uskomusten kehittymisen tarkastelua varten ja myös yleisemmin matematiikan opetuksen muutoksen kuvaamiseksi. Keväällä 1996 tehdyissä neljän opettajan haastatteluisa menetelmänä käytettiin *teemahaastattelua*, johon aihealueet saatiin vuoden 1995 kyselylomakkeesta (ks. liite 3). Kunkin opettajan haastattelu oli pituudeltaan noin puolitoista tuntia. Haastattelut nauhoitettiin, minkä jälkeen ne litteroitiin analysointia varten.

5.4 Tutkimukseen osallistuneet opettajat

Tässä tutkimuksessa kiinnostuksen kohteina olevat opettajajoukot muodostuivat automaattisesti niistä opettajista, jotka vuosien 1990 ja 1995 arvioinneissa olivat oppilasotoksiin valittujen opetusryhmien opettajina. Opettajien määrät käyvät ilmi taulukosta 5.3.

Taulukko 5.3 Opettajien ja oppilaiden määrät peruskoulun matematiikan opetuksen arvioinneissa vuosina 1990 ja 1995.

Tutkimus	Luokka	Opettajia	Oppilaita
Peruskoulun arviointi 90	4.	56	1030
	6.	52	1071
	9.	65	1164
Peruskoulun arviointi 95	9.	68	1199

Tutkimuksessa mukana olleet opettajajoukot eivät olleet *otoksia* luokanopettajista ja yläasteen matematiikan opettajista, vaan kyseessä olivat *opettajanäytteet*. Koska arviointitutkimusten koulujen otannassa käytettiin ositteina koulujen maantieteellistä sijaintia

(läänit) ja taajama-astetta (kaupunki vs. maaseutu), niin voidaan olettaa, että ko. opettajanäytteillä on myös tietynlaista edustavuutta. Käytännössä tutkimuksen tulokset eivät siten ainoastaan koske näitä opettajajoukkoja, vaan tuloksilla on myös laajempaa yleistettävyyttä. Kuitenkin tulosten yleistämisessä perusjoukkoihin on oltava varovaisia. Seuraavassa tutkimukseen osallistuneita opettajajoukkoja kuvataan tiettyjen peruspiirteiden kannalta (ks. taulukko 5.4).

Taulukko 5.4 Tutkimukseen osallistuneita opettajia kuvaavia ominaispiirteitä vuosina 1990 ja 1995.

Opettajaa luonnehtiva ominaisuus	4. lk/90 N = 56	6. lk/90 N = 52	9. lk/90 N = 65	9. lk/95 N = 68
Sukupuoli				
mies	65%	75%	46%	56%
nainen	35%	25%	54%	44%
Asuinympäristö				
maaseutu	40%	40%	42%	43%
kaupunki	60%	60%	58%	57%
Opettajakokemus				
alle 5 vuotta	32%	15%	9%	6%
6-15 vuotta	25%	27%	49%	34%
16-20 vuotta	11%	19%	23%	31%
21-25 vuotta	11%	14%	13%	18%
yli 25 vuotta	21%	25%	6%	12%
Muodollinen pätevyys				
on	86%	94%	91%	-
ei ole	14%	6%	9%	-
Täydennyskoulutus				
ei lainkaan	82%	79%	29%	22%
1-2 kertaa	13%	17%	26%	28%
3-6 kertaa	5%	4%	34%	40%
yli 6 kertaa	0%	0%	11%	10%

Luokanopettajat

Vuoden 1990 luokanopettajajoukot olivat hyvin miesvaltaisia. Neljännellä luokalla miesopettajien osuus oli 65 prosenttia, mutta kuudennella luokalla vieläkin suurempi eli 75 prosenttia. Tältä osin opettajajoukot poikkesivat huomattavasti luokanopettajien yleisestä sukupuolijakaumasta, jossa naisten osuus on ollut noin kaksi kolmasosaa ja miesten osuus yksi kolmasosa. Molemmilla luokka-asteilla enemmistö (60%) opettajista oli kaupunkikouluista.

Opettajakokemuksensa puolesta neljännen luokan opettajajoukkoon kuului noin kolmannes nuoria opettajia (kokemusta alle 5 vuotta). Kuudennen luokan opettajissa tällaisia oli 15 prosenttia. Muutoin opettajajoukkojen kokemusjakautuma oli hyvin samankaltainen. Yli 25 vuotta opettajan työssä olleita luokanopettajia oli opettajissa noin neljäsosa. Neljännen luokan opettajien keskimääräinen kokemus oli noin 15 vuotta ja kuudennen luokan opettajien noin 18 vuotta.

Molemmilla luokka-asteilla muodollisesti pätevien opettajien osuus oli erittäin korkea (86–94 %), mutta matematiikkaan erikoistuneita opettajia oli vain vajaat 10 prosenttia. Täydennyskoulutuksella tarkoitettiin tässä yhteydessä luokanopettajaliiton tai matemaattisten aineiden opettajien liiton (MAOL) antamaa koulutusta viimeisen 5 vuoden aikana. Luvut kertovat, että ainoastaan viidesosa tutkimuksen opettajista oli osallistunut tällaiseen koulutukseen.

Aineenopettajat

Koska vuosien 1990 ja 1995 tutkimusvaiheisiin osallistuivat peruskoulun yhdeksänneltä luokalta täsmälleen samat koulut ja koska opettajista myös noin neljäsosa oli samoja, ovat taulukon 5.4 luvut osin hyvin samanlaisia. Joitakin muutoksia on kuitenkin myös nähtävissä.

Opettajien sukupuolijakautumassa oli viiden vuoden aikana tapahtunut muutosta: vuonna 1990 opettajissa oli enemmistö (54%) naisia, mutta vuonna 1995 tilanne oli toisin päin (miehiä 56%). Luokanopettajajoukkojen tapaan myös aineenopettajien enemmistö oli kaupunkikouluista.

Kokemusjakautumaltaan yhdeksännen luokan aineenopettajajoukko oli verraten 'normaalinen' molempina ajankohtina. Kuitenkin eroa oli siinä, että kun vuonna 1990 puolella opettajista oli kokemusta 6–15 vuotta, niin vuonna 1995 tähän luokkaan kuuluvia opettajia oli enää kolmannes ja enemmän opettajia sijoittui jakautuman kokeneempaan päähän. Vuonna 1990 opettajilla oli kokemusta keskimäärin 14 vuotta ja vuonna 1995 keskiarvo oli 17 vuotta.

Aineenopettajien joukossa oli molempina vuosina täydennyskoulutusaktiivisuutensa puolesta erilaisia ryhmiä. Noin neljäsosa opettajista ei ollut osallistunut MAOL:n järjestä-

mään täydennyskoulutukseen viimeisen viiden vuoden aikana lainkaan. Kuitenkin runsas kolmannes opettajista oli osallistunut 3–6 kertaa ja 10 prosenttia opettajista oli osallistunut yli 6 kertaa.

5.5 Tutkimuksen pätevydestä ja luotettavuudesta

Jokaisessa tutkimuksessa tavoitteena tulisi olla tulosten ja todellisuuden mahdollisimman hyvä vastaavuus. Keskeisimpiä tieteelliselle menetelmälle asetettavia vaatimuksia ovat sen pätevyys ja luotettavuus. Validius- ja luotettavuuskysymysten merkityksellisyyden ja jatkuvan ajankohtaisuuden vuoksi niitä on tarkasteltu myös 1990-luvulla varsin runsaasti (mm. House 1995; Kangasniemi 1996; Linn & Gronlund 1995; Lundberg & Linnakylä 1993; Moss 1994).

5.5.1 Kysely- ja haastattelututkimusten pätevyys- ja luotettavuuskysymyksiä

Perinteisen määritelmän mukaan arviointi (koe, kysely) on siinä määrin validia kuin se mittaa sitä, mitä sen on tarkoitettu mittaavan. Tältä pohjalta on määritelty useita erilaisia validiteetteja ja eri tapoja arvioida validiteettia. Kolme validiteettityyppiä ovat olleet keskeisiä: *käsitemvaliditeetti*, *sisällön validiteetti* ja *seurausvaliditeetti*. Käsitemvaliditeetti (construct validity) vastaa kysymykseen, mitä piirrettä tai ominaisuutta koe mittaa. Sisällön validiteettiin liittyy puolestaan kysymys, ovatko koetehtävät edustava näyte sisältöalueesta, tehtäväjoukosta tai suoritusavaruudesta, jota kokeella arvioidaan. Seurausvaliditeetti liittyy kysymyksen, miten hyvin koetulos ennustaa tiettyä (kokeen ulkopuolista) suoritusta, käyttäytymistä tai menestymistä. Viimeaikaiset keskustelut validiteetin luonteesta osoittavat, että vaikka käsitemvaliditeettia pidetään yhä arvioinnin perusvaatimuksena, sen ohessa painotetaan entistä enemmän arvioinnin johtopäätöksiä, seuraamuksia ja tulosten tulkintaa tähdentävää seurausvaliditeettia (Linnakylä & Kupari 1996).

Tutkimuksen validiutta pyritään yleensä parantamaan käyttämällä monia erilaisia tiedonhankintatapoja ja -menetelmiä. Housen (1995) mukaan triangulointi eli usea erilainen operationaalistaminen ja useiden eri menetelmien käyttö ovat hyödyllisiä, mutta eivät välttämättä johda yhtenäiseen tulkintaan. Hänen mielestään useiden metodien hyväksikäyttö ei takaa validiutta, koska niiden tuottama yhdenmukainen tulkinta tai sen puuttuminen ei ole lopullinen näyttö. Menetelmät tuottavat aineistoa, jotka täytyy liittää käsitteisiin, uskomuksiin, arkijärkeen ja tilanteen tuntemukseen, minkä jälkeen päätelmiä voidaan vasta paremmin tehdä (House 1995).

Yksilöiden uskomusten tutkiminen ja mittaaminen on vaativaa ja ongelmallista, mistä johtuen tutkimusasetelmalliset ja metodologiset kysymykset ovat olennaisen tärkeitä. Opettajien uskomusten tutkimista koskeva tärkeä metodologinen havainto painottaa sitä,

että ei tulisi pelkästään rajoittua opettajakyselyjen käyttöön ja opettajien julkituomien näkemysten analysointiin (Pajares 1992; Thompson 1994). Perinteisistä mittausmenetelmistä onkin pyritty siirtymään menetelmiin, jotka paremmin tavoittaisivat opetuksen laaja-alaisuuden (Beijaard & Verloop 1996). Kuitenkin on syytä todeta, että vielä 1990-luvulla varsin suuressa osassa matematiikan opetuksen uskomustutkimusta keskeisenä tiedonkeuruun välineenä käytettiin erilaisia uskomuskyselyjä ja -inventaarioita.

Conroy (1987) mukaan kyselyjen ja inventaarioiden käyttöön matematiikkauskomusten ja -käsitusten arvioinnissa liittyy seuraavia erityisiä ongelmia: 1) *osioiden valinnan ja validoinnin on oltava sellainen, että ne edustavat yleisesti hyväksyttyä käsitystä matematiikan luonteesta*, 2) *asteikot on kehiteltävä siten, että ne ottavat huomioon matematiikan moniulotteisen luonteen* ja 3) *arvioinnin on sallittava vaihtoehtoisten matematiikkauskomusten esilletulo*. Lisäksi kyselymetodin käyttämiseen opettajien uskomusten ja opetuskäytännön arvioinnissa sisältyy myös muita rajoituksia. Eräs puute liittyy uskomusten operationaalistamisvaiheeseen ja tällöin etenkin siihen, minkä merkityksen opettaja antaa lomakkeessa esitetyille kysymyksille. Tulkinnat saattavat tällöin poiketa paljonkin toisistaan. Lisäksi monissa kysymyksissä, ja erityisesti opetuksen painotuksia ja opetusmenettelyjä koskevissa kysymyksissä, on olemassa ilmeinen riski sille, että opettajat antavat *sosiaalisesti suotavia* vastauksia (ns. compliance effect, Lundberg & Linnakylä 1993). Lundbergin ja Linnakylän (emt.) mukaan monilla opettajilla on suuri halu osoittaa olevansa edistyksellisempiä kuin mitä he todellisuudessa ovat siinä opetustyössään, jossa he suorittavat päivittäisiä tehtäviään kiireen ja paineen alaisina. Toinen puute on Pajaresin (1992) mukaan se, että uskomuskyselyt eivät pysty ottamaan huomioon uskomusten kontekstuaalista luonnetta eivätkä siten tarjoa riittävästi tietoa tulkintojen ja johtopäätösten tekemiseen.

Uskomusten tutkimuksessa tarkastelun kohteena tulisi olla koko opetuksellinen ympäristö, opettajalle tyypillinen opetuskäytäntö sekä opettajan esittämien näkemysten ja todellisen käytännön välinen suhde. Jo Scheffler painotti tätä aikoinaan todetessaan, “ettei ole koskaan järkevää pitää uskomusta pelkästään verbaalisena vastauksena: uskomus on pikemminkin teoreettinen tila, joka luonnehtii kekseliään tavoin yksilön orientoitumista ympäröivään maailmaan” (Thompson 1994, 134). Niinpä uskomuskyselyjen rinnalla tarvitaan muunlaista tietoa, jota voidaan hankkia esimerkiksi haastatteluilla ja opetuksen havainnoinnilla. Lisäksi tulosten tarkastelu ja tulkinta tulisi tehdä sosiaalista kontekstia kuvaavan informaation valossa.

Haastattelua voidaan pitää tyypillisimpänä tapana koota laadullista tietoa, mutta vain harvoin sitä käytetään ainoana tiedonhankintakeinona. Haastattelu on sosiaalinen vuorovaiikutustilanne, jossa nähdään väläys tai saadaan epätäydellinen kuva jostakin. Se on ennen kaikkea käsitteisiin, merkitykseen ja kieleen perustuvaa toimintaa, johon haastattelun osapuolet tuovat aiemmat kokemuksensa. Haastatteluun osallistuvat ihmiset pyrkivät

käsitteellisesti välittämään omaa mielellistä suhdettaan maailmaan. Tutkittavat eivät ole esineellistettyjä objekteja, vaan tuntevia, toimivia ja osallistuvia subjekteja. Myös tutkija on mukana hankkeessa omine subjektiivisine kokemuksineen. Teemahaastattelu on osoittautunut menetelmäksi, joka sallii tutkimuksen kohteeksi valittujen henkilöiden mahdollisimman luontevan ja vapaan reagoinnin. Se on menetelmä, joka hyvin toteutettuna ottaa huomioon ihmisen sekä ajattelevana että toimivana olentona. (Hirsjärvi & Hurme 1982; Syrjälä & Numminen 1988.)

Haastattelun luotettavuutta arvioitaessa on pohdittava, mitkä seikat tutkimuksen eri vaiheissa vaikuttavat luotettavuuteen. Itse haastattelemista ei voida pitää irrallisena vaiheena, vaan luotettavuustarkastelu koskee koko tutkimusprosessia. Hirsjärvi ja Hurme (1982, 129–130) nostavat esille useita haastattelun luotettavuuteen (sekä validiuteen että reliiabiiliuteen) vaikuttavia tekijöitä.

Haastattelun riittävä käsitevalidius voidaan parhaiten taata perehtymällä huolellisesti aikaisempaan tutkimukseen ja alueen käsitteistöön sekä tutustumalla haastateltavaan ryhmään ja kielenkäyttöön. Hyvästä ennakkovalmistautumisesta huolimatta voimme kuitenkin epäonnistua laatiessamme teemaluetteloa tai teema-alueita koskevia alustavia kysymyksiä. Varautumalla tarpeeksi moniin teema-aiheisiin ja riittäviin lisäkysymyksiin kultakin teema-alueelta voimme varmistaa haastattelun sisältövalidiuden.

Teemahaastattelussa voi ilmetä myös haastatteliijoista johtuvia virheitä tai haastateltavien valintaan liittyviä ongelmia. Vaikka opettajien työn tunteminen auttaa näkemään oleellisia seikkoja juuri opettajan työn näkökulmasta saattaa tällainen 'läheisyys' muodostua myös ongelmaksi havaintojen teossa ja tulkintojen rakentamisessa (Syrjäläinen 1992).

Haastatteluaineiston pohjalta tekemämme johtopäätökset voivat myös olla virheellisiä. Eri osavaiheissa olisikin kiinnitettävä huomiota sanojen mahdollisiin merkityseroihin. Keskeinen kysymys on, miten tulkintoja ja johtopäätöksiä tehtäessä tullaan vakuuttuneiksi siitä, että on ymmärretty oikein sanojen ja ilmaisujen merkitykset (Hirsjärvi & Hurme 1984). Koska merkityksiä tulee tulkita aina tietyissä yhteyksissä ilmentyvinä, niin ongelma syntyy useinkin siitä, että osapuolten viitekehykset ovat erilaisia.

Kaiken kaikkiaan tulosten ja todellisuuden mahdollisimman hyvä vastaavuus tulisi olla tavoitteena jokaisessa tutkimuksessa. Sahlbergiin (1996) viitaten voisi todeta, että viime kädessä tutkimuksen luotettavuus havaitaan lukijoiden ja tutkimuksen käyttäjien reaktioista.

5.5.2 Tutkimuksen pätevyyden ja luotettavuuden arviointia

Tutkimuksessa pyrittiin tutustumaan huolellisesti uskomuskäsitteistöön yleisesti ja matematiikan opettajien uskomuksiin erityisesti sekä kuvaamaan mahdollisimman yksityiskohtaisesti tutkittavan ilmiön kontekstit ja rakenteet. Pääasiallisimpana tiedonhankinnan keinona käytettiin opettajille esitettyjä uskomuskyselyjä. Keskeisin syy kyselyaineiston hallitsevaan

rooliin johtuu tutkimuksen sijoittumisesta laajempien arviointitutkimusten yhteyteen. Kun empiirinen aineisto kerättiin vuosina 1990 ja 1995, oli rajallisten resurssien vuoksi mahdollista käyttää vain kyselymenetelmää.

Vuoden 1990 uskomuskysely pohjautui jo valmiina olevaan kyselylomakkeeseen (Pehkonen & Zimmermann 1990). Kyselyn laadinnassa ja väittämien valinnassa lähdettiin siitä, että sen avulla olisi mahdollista arvioida ensisijaisesti matematiikan opetukseen liittyviä keskeisiä uskomuksia. Kyselyn pätevyuden ja toimivuuden varmentamiseksi se esitettiin noin 10 opettajan (sekä luokanopettajia että aineenopettajia) kanssa. Opettajien palautteen avulla väittämiä muotoiltiin sellaisiksi, että ne kohdistuivat olennaisiin kysymyksiin ja olivat mahdollisimman selkeitä ja yksikäsitteisiä vastattaviksi. Vuoden 1995 arvioinnin uskomuskysely rakentui edellisen kyselyn pohjalle lähinnä siitä syystä, että oltiin kiinnostuneita opettajien uskomuksissa tapahtuneesta kehityksestä. Kyselyyn lisättiin kuitenkin muutamia uusia väittämiä ja joitakin väittämiä korjattiin paremmin toimiviksi.

Uskomuskyselyjen sisällön validiteettia olisi tuki voitu parantaa. Koska uskomuskyselyt muodostivat vain yhden osan opettajakyselyjä, niin ne jäivät mitoitukseltaan verraten suppeiksi. Kyselyt eivät myöskään tavoittaneet riittävän hyvin matematiikkauskomusten 'innovatiivista päätä' ja osioiden lisääminen tälle dimensiolle olisi parantanut tutkimuksen käsitteellistä validiteettia. Jatkotutkimuksissa tähän onkin syytä kiinnittää huomiota.

Sanojen ja ilmaisujen merkityksen ongelma nousi myös esille. Kun uskomuskyselyssä kysyttiin opettajien kantaa esimerkiksi oppilaiden yksilöllisen työskentelyn tärkeyteen matematiikan opiskelussa, havaittiin, että opettajat ymmärsivät tämän kahdella eri tavalla. Osalle opettajista yksilöllinen työskentely matematiikassa oli samaa kuin matematiikan tehtävien yksinään tekeminen ja taas osalle se tarkoitti oppilaiden tai oppilasryhmien työskentelyä heille osoitettujen oppimistehtävien parissa. Tästä muuttujan epätarkasta operationaalistamisesta oli seurauksena, että muuttuja sijoittui eri aineistoissa sisällöltään erilaisille uskomusfaktoreille.

Tutkimuksen käsitteellistä ja sisällöllistä validiteettia voidaan pitää kuitenkin kohtuullisen hyvänä. Uskomuskyselyt pystyivät molempina ajankohtina tavoittamaan varsin hyvin opettajien matematiikkaan liittämät ydinuskomukset. Faktoriratkaisujen tulokset – niiden yhtenevyys tiettyjen perusulottuvuuksin osalta ja osittain samankaltaisuus eri tutkimuksen ajankohtina – osoittivat sen, että kyselyjen avulla pystyttiin vastaamaan tutkimuksen ongelmanasettelussa asetettuihin kysymyksiin. Esimerkiksi luokanopettajien faktoriratkaisulla oli varsin paljon yhteistä Lindgrenin (1995) tutkimuksen faktoriratkaisun kanssa, vaikka tutkittavina olivatkin erilaiset luokanopettajaryhmät.

Keväällä 1996 hankitulla 'kohdennetulla' haastatteluaineistolla haluttiin parantaa tutkimuksen validiutta ja luotettavuutta. Haastattelujen avulla haluttiin saada autenttisempaa ja syvällisempää tietoa opettajilta siitä, millaisia uskomuksia ja 'implisiittisiä teorioita' heillä on matematiikan opettamiseen ja oppimiseen liittyen.

Tutkimuksessa käytetty teemahaastattelun runko on esitetty liitteessä 4. Haastattelu-teemat valittiin aineenopettajien uskomuskyselyn pohjalta ja ne toimivat haastattelutilanteessa keskustelua ohjaavana karttana. Tutkija oli ennen haastattelutilannetta puhelimitse yhteydessä opettajiin, selvitti keskustelun luonteen ja varmisti, että he halusivat osallistua haastatteluun. Haastateltavat olivat kyselyaineiston perusteella kahden matematiikkauskomuksiltaan erilaisen uskomustyyppin 'aidoimpia' edustajia. Kunkin opettajan haastattelut tehtiin koululla vapaatuntien aikana tai välittömästi kouluajan jälkeen. Jokainen haastattelu kesti 1,5–2 tuntia.

Mahdollisimman aidon ja kiinnostusta osoittavan vuorovaikutussuhteen luomiseksi (Syrjälä & Numminen 1988) tutkija aloitti teemalla, joka oli koulun ja opetustyön kannalta varsin ajankohtainen. Opetussuunnitelmien laadintatyö kouluissa oli käynnistynyt runsas vuosi aikaisemmin ja sen tilanteen pohtiminen tarjosi luontevan lähtökohdan haastattelulle. Haastattelujen aikana vallitsi varsin aito ja luottamuksellinen ilmapiiri.

Koska tutkija oli erityisesti kiinnostunut opettajien matematiikan opetukseen ja oppimiseen liittämistä merkityksistä, niin haastatteluissa oli mielipide- ja arvokysymysten osuus varsin suuri. Haastatteluissa käytettiin myös keskustelua selventäviä ja syventäviä kysymyksiä, joiden avulla pyrittiin paljastaman asioiden yhteyksiä tai tarkentamaan esiin nousseita asioita. Matematiikan opettajan työn ja kouluelämän hyvä tuntemus auttoi löytämään tutkimuksen kannalta oleellisia kysymyksiä erityisesti opettaja työn näkökulmasta. Toisaalta pitkäaikainen tutkijan työssä toimiminen auttoi puolestaan tarkastelemaan opetuksen ilmiöitä monipuolisemmin ja avoimemmin. Kuitenkin myöhemmin tulosten tarkastelun yhteydessä tutkija huomasi, että joitakin aiheeseen liittyviä kysymyksiä ei haastatteluissa ollut osannut kysyä.

Opetuksen havainnoinnin avulla olisi varmasti voitu parantaa opettajien uskomusten ja heidän opetuskäytäntönsä välisen yhteyden selvittämistä. Nyt jouduttiin tyytymään opettajien kyselyvastauksiin ja heidän kuvauksiinsa opetuksesta, minkä vuoksi tutkimuksessa puhutaankin opetustoimenpiteistä eikä opetuksen käytännöstä.

Uskomuskyselyjen sisäistä yhdenmukaisuutta (konsistenssia) tarkasteltiin mittareiden reliabiliteettien avulla. Kyselyjen rakenneosien (faktoreiden) reliabiliteettikertoimet on koottu taulukkoon 5.5.

Kokonaisuudessaan uskomuskyselyjen sisäistä konsistenssia voitaneen pitää riittävänä. Reliabiliteettikertoimet olivat jokseenkin samaa suuruusluokkaa kuin Lindgrenin (1995) tutkimuksissa. Useiden uskomusfaktoreiden sisäinen yhdenmukaisuus näyttää kertoimien valossa kohtuulliselta, mutta joidenkin faktoreiden (yleensä faktorit 5–7) sisäistä konsistenssia voidaan pitää heikohkona. Näihin faktoreihin sisältyi tavallisesti ainoastaan 2–3 muuttujaa, jotka latautuivat myös toisille faktoreille.

Taulukko 5.5 Luokanopettajien ja aineenopettajien uskomuskyselyjen reliabiliteettikertoimet (Cronbachin alfa) faktoreittain vuosina 1990 ja 1995.

Uskomusfaktori	Luokanopettajat 1990	Aineenopettajat 1990	Aineenopettajat 1995
Faktori 1	.74	.62	.71
Faktori 2	.62	.58	.66
Faktori 3	.58	.64	.61
Faktori 4	.56	.61	.61
Faktori 5	.56	.50	.38
Faktori 6	.44	.57	.56
Faktori 7	-	-	.48

5.6 Tutkimusaineiston analysoinnista

Tutkimuksen aineisto koostui kolmesta kyselyaineistosta sekä lisäksi yhdeksännen luokan aineenopettajien haastatteluaineistosta. Kyselyaineistojen käsittelyssä käytettiin yhtäältä tavanomaisia tilastollisia menetelmiä, mutta hyödynnettiin toisaalta myös uudempiä aineistojen analysointimahdollisuuksia. Opettajien matematiikka-uskomusten rakenteiden tarkastelu suoritettiin faktorianalyysin avulla. Uskomusten ja opetuskäytäntöjen sekä oppilaiden oppimistulosten yhteyksien selvittämisessä käytettiin puolestaan hyväksi ristiintaulukoiteja sekä varianssi- ja regressioanalyseja.

Tutkimuksen yhtenä tehtävänä oli etsiä uskomusprofileiltaan sisäisesti mahdollisimman samankaltaisia, mutta toisistaan mahdollisimman paljon poikkeavia opettajaryhmiä. Tätä selvitettiin hierarkkisen ryhmittelyanalyysin avulla (mm. Chatfield & Collins 1989; Linnakylä & Malin 1997). Analyysipyrkii osittamaan heterogeenisen kohdejoukon pienempään määrään mahdollisimman homogeenisia osajoukkoja ja tämä osittaminen tehdään sillä perusteella, kuinka samankaltaisia ryhmän jäsenet ovat jonkin mitan suhteen. Lähtökohtana on se, että aineistossa on yhtä monta ryhmää kuin tapauksiakin. Ryhmittely etenee niin, että kaksi toisiaan lähinnä olevaa ryhmää yhdistetään aina uudeksi ryhmäksi. Ryhmittely on hierarkkisesti etenevä ja sitä jatketaan niin kauan, että jäljelle jää vain yksi ryhmä. Hyväksyttävä ratkaisu löytyy yleensä silloin, kun kahden peräkkäisen ryhmittelyn etäisyydessä tapahtuu selvä harppaus. Ryhmittelyanalyysissa käytetään usein Wardin menetelmää ja etäisyysmittana euklidisen etäisyyden neliötä.

Matematiikkauskomuksiltaan erilaisten opettajaryhmien joidenkin taustatekijöiden ja opetuskäytäntöjen eroja ja niiden tilastollisia merkitsevyyksiä selvitettiin ristiintaulukoinnilla. Analyysiä jatkettiin etsimällä osaryhmiä, joiden välillä oli tilastollisesti merkitseviä eroja taustamuuttujissa tai opetuskäytäntöjä kuvaavissa muuttujissa. Tähän käytettiin CHAID (Chi squared automatic interaction detection) -menetelmää (Linnakylä & Malin 1997). Menetelmä etsii luokittelu- ja järjestelyasteikollisten muuttujien välisiä tilastollisesti merkitseviä yhteyksiä ja jakaa aineiston sen perusteella osaryhmiin. Kuitenkin sekä luokanopettajien että aineenopettajien kohdalla ongelmaksi muodostui opettajamäärien pienuus. Ryhmien jakaminen yhä uudelleen ja uudelleen merkitsi sitä, että pian osaryhmiin kuului vain muutama opettaja ja tällaisten ryhmien tilastollisten erojen etsimisellä ei ollut enää merkitystä.

Tutkimuksen aineistoja analysoitiin myös tilastollisilla malleilla. Koulututkimusaineistoilla on eräitä tyypillisiä piirteitä, joiden merkitys tulee erityisen korostuneesti esille mallitarkastelujen yhteydessä. Ensinnäkin aineisto on yleensä ryvästyntä (opetusryhmä) ja havaintoyksiköiden (oppilaat) välillä on riippuvuutta, mikä ilmenee aineiston positiivisena sisäkorreloituneisuutena. Tällöin samaan ryhmään kuuluvat havaintoyksiköt ovat keskenään homogeenisempia kuin havaintoyksiköt koko aineistossa. Sen vuoksi sellaiset tilastolliset mallit, joiden oletuksena on havaintojen riippumattomuus, eivät aina kelpaa aineistojen analysointiin (Malin 1997). Toiseksi havaintoaineisto sisältää tavallisesti muuttujia 'koulusysteemin' eri tasoilta eli on oppilaita, opettajia ja koulua kuvaavia muuttujia. Nämä eri tasoilla olevat muuttujat aiheuttavat myös ongelmia tilastollisiin analyysiin. Eräs tapa nivota yksilön ja hänen sosiaalisen ympäristönsä vuorovaikutus tilastolliseksi malleiksi on käyttää *tilastollisia monitasomalleja* (mm. Goldstein 1995; Malin 1997).

Monitasomallien käyttö mahdollistaa sekä ryväsvaikutuksen huomioon ottamisen osana tilastollista mallia että eri tasoilla olevien muuttujien käsittelyn samassa mallissa. Tällöin voidaan tutkia ryhmätason tekijöiden yhteyksiä yksilötason muuttujiin ja testata niihin liittyviä hypoteeseja. Malinin (1997) mukaan aidot ryhmätason muuttujat (esimerkiksi koulun koko) ovat tärkeitä ja kiinnostavia muuttujia. Jos ne vaikuttavat yksilötason suorituksiin, voidaan niitä vaihtelemalla saada aikaan muutoksia kaikkien oppilaiden yksilötason suorituksissa. Tärkeää on myös huomata, että ryhmätason ja yksilötason muuttujilla voi olla yhdysvaikutusta: yksilötason muuttujan vaikutus saattaa olla erilainen kun ryhmätason muuttujan arvot vaihtelevat.

Tämän tutkimuksen aineistot ovat juuri edellä kuvatun kaltaisia, minkä vuoksi tilastollisia monitasomalleja on käytetty selvitetessä opettajien matematiikkauskomusten ja oppilaiden oppimistulosten välisiä yhteyksiä (tutkimusongelma 5, ks. luku 3.3.4.).

Teemahaastattelun avulla kerättyä laadullista aineistoa voidaan analysoida monilla tavoin. Hirsjärvi ja Hurme (1982) toteavat, että silloin kun tapauksia on vain muutama, on järkevää käsitellä aineistoa tapauskohtaisemmin. Tällöin sivuutetaan eksplisiittinen muuttu-

jien muodostus ja koodaus ja pyritään löytämään kuvaustapoja, jotka mahdollistaisivat yleistämisen, mutta säilyttäisivät mahdollisimman paljon puheen merkityksiä ja yksilöllisiä ajatuskulkuja. Tässä tutkimuksessa neljää opettajaa koskevan haastatteluaineiston analysoinnissa sovellettiin tätä ns. impressionistista käsittelytapaa.

6 TUTKIMUKSEN TULOKSET

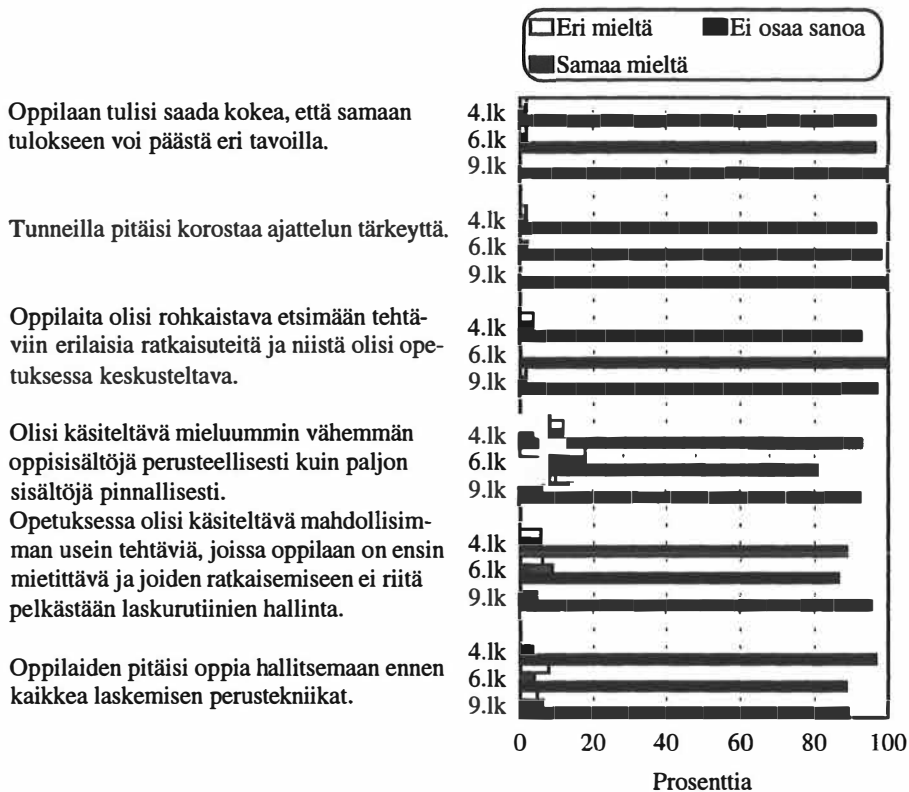
Tässä luvussa esitellään ja analysoidaan matematiikan opettajien matematiikkauskomuksia koskevia tuloksia. Ensimmäiseksi tarkastellaan opettajien uskomusten luonnetta sekä niiden samankaltaisuutta ja erilaisuutta eri opettajaryhmissä (luokanopettajat vs. aineenopettajat). Tämä tehdään analysoimalla uskomusväittämien jakautumia ja selvittämällä, missä kohdin esiintyi eniten samanlaisuutta ja missä oli puolestaan runsaimmin vaihtelua. Toiseksi tarkastellaan opettajien uskomusten rakennetta. Uskomusmuuttujista muodostetaan faktorianalyysin avulla latentteja muuttujia (faktoreita), jolloin nähdään, minkälaisista dimensioista matematiikan opettajien uskomukset rakentuvat. Samalla selvitetään, missä määrin opettajien taustatekijät ovat yhteydessä heidän matematiikkauskomuksiinsa. Onko olemassa eroja luokanopettajien ja aineenopettajien uskomuksissa, nais- ja miesopettajien uskomuksissa tai nuorten ja kokeneiden opettajien uskomuksissa? Kolmanneksi tarkastellaan sitä, muuttuvatko uskomukset ajan myötä ja mikäli muuttuvat, niin millaisia nämä muutokset ovat. Neljänneksi selvitetään opettajien matematiikkauskomusten ja heidän opetustoimintojensa välisiä yhteyksiä. Tällöin analysoidaan sitä, millä tavoin opettajien uskomukset matematiikan oppimisesta ja opetuksesta ilmentyvät niissä toimintatavoissa, joita he käyttävät opettaessaan matematiikkaa. Viimeiseksi tarkastellaan vielä kysymystä opettajien uskomusten ja oppilaiden matematiikan oppimistulosten yhteyksistä. Monitasomallien avulla analysoidaan, näkyvätkö opettajien uskomusten vaikutukset myös oppilaiden tiedollisissa oppimistuloksissa. Lisäksi pyritään arvioimaan myös sitä, kuinka merkittävä opettajien uskomusten vaikutus oppimiselle on.

6.1 Opettajien matematiikkauskomusten moninaisuus

Tutkimuksen ensimmäisessä vaiheessa vuonna 1990 peruskoulun neljännen ja kuudennen luokan opettajille esitettiin 27 väittämää sisältänyt kysely ja vastaavasti yhdeksännen luokan aineenopettajille 29 väittämää käsittänyt uskomuskysely. Kyselyjen väittämät sekä niiden keskiarvot ja hajonnat eri luokka-asteilla on esitetty liitteessä 4. Kuvioissa 6.1 ja 6.2 on esitetty sellaisten eri luokka-asteille yhteisten uskomusväittämien jakautumat, joissa opettajien vastaukset olivat kaikkein yksimielisimmät vuonna 1990.

Kuvioissa esitettyjen yhdentoista väittämän antama kuva matematiikan opettajien uskomuksista on valaiseva. Kuvion 6.1 väittämässä opettajien yksimielisyys oli miltei täydellinen. Erot luokanopettajien ja aineenopettajien käsityksissä olivat niissä myös vähäiset. Opettajien mielestä matematiikan opetuksessa ja opiskelussa 1) *oppilaiden tulisi kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla*, 2) *pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä*, 3) *oppilaita tulisi rohkaista etsimään tehtäviin erilaisia ratkaisuteitä*, 4) *olisi käsiteltä-*

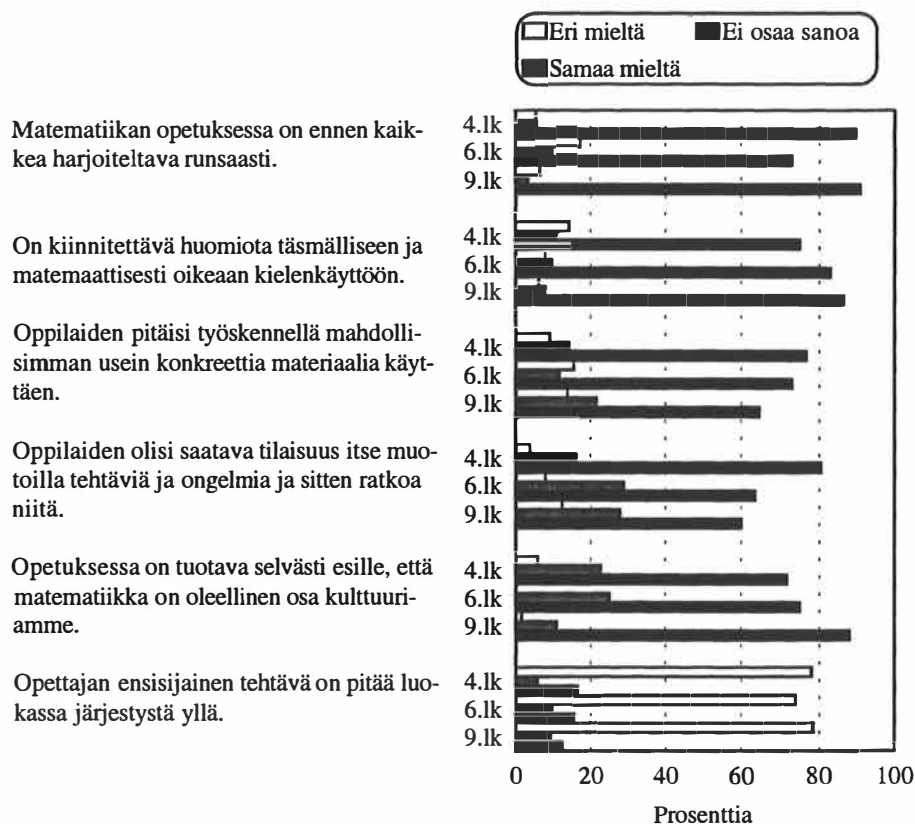
vä mieluummin vähemmän oppisisältöjä perusteellisesti kuin paljon pinnallisesti, 5) olisi käsiteltävä tehtäviä, joissa oppilaan on ensin mietittävä ja joiden ratkaisemiseen ei riitä pelkästään laskurutiinien hallinta sekä 6) oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan laskemisen perustekniikat.



Kuvio 6.1 Niiden uskomusväittämien jakautumat, joissa matematiikan opettajat olivat lähes täysin yksimielisiä vuonna 1990.

Kuvion 6.2 tulokset osoittavat, että matematiikan opettajat olivat yhtä mieltä monista matematiikan opiskelun periaatteista ja työskentelytavoista. Noin 90 prosenttia opettajista oli sitä mieltä, että 'matematiikan opetuksessa on harjoiteltava runsaasti'. Tosin 6. luokan opettajien osuus oli jonkin verran pienempi (75 %). Lähes yhtä suuri osa opettajista (75–85%) ilmaisi, että opetuksessa 'on kiinnitettävä huomiota täsmälliseen ja matemaattisesti oikeaan kielenkäyttöön'. Tässä kohdin oli havaittavissa eroja luokanopettajien ja aineenopettajien kesken siten, että luokanopettajat eivät pitäneet matemaattista 'täsmällisyyttä' aivan niin tärkeänä kuin aineenopettajat. Eroja oli myös havaittavissa siinä, miten opettajat näkivät konkreettisuuden roolin ja merkityksen matematiikan opetuksessa. Kun luokanopettajista kolme neljäsosaa katsoi, että 'oppilaiden tulisi työskennellä mahdollisim-

man usein konkreettista materiaalia käyttäen', niin aineenopettajista näin ajatteli enää kaksi kolmasosaa. Viidesosalla aineenopettajista ei ollut selkeää käsitystä konkreettisen materiaalin käytöstä yläasteen opetuksessa.

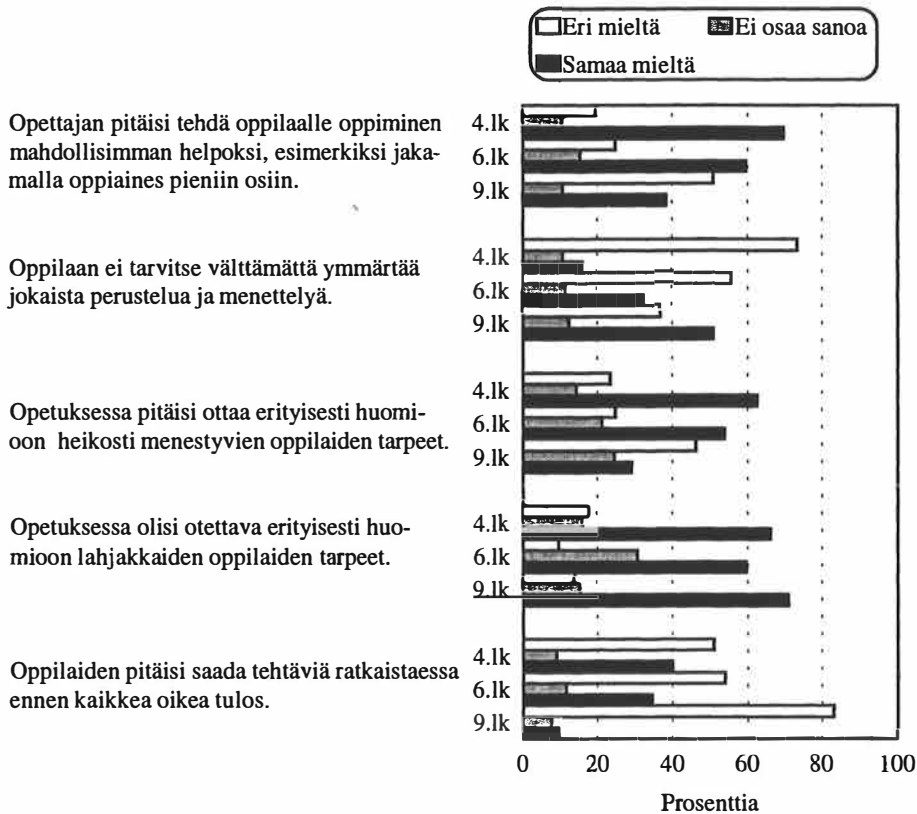


Kuvio 6.2 Niiden uskomusväittämien jakaumat, joissa matematiikan opettajat olivat vahvasti yksimielisiä vuonna 1990.

Kahden seuraavankin väittämän kohdalla ilmeni joitakin eroja opettajaryhmien välillä. Kun 80 prosenttia neljännen luokan opettajista oli sitä mieltä, että 'oppilaiden olisi saatava tilaisuus itse muotoilla tehtäviä ja ongelmia ja sitten ratkoa niitä', niin kuudennen ja yhdeksännen luokan opettajista enää 60 prosenttia oli tällä kannalla. Uskomusten erilaisuuden raja ei tässä kohdin kulkenutkaan luokanopettajien ja aineenopettajien välillä, vaan muuttumista näytti tapahtuneen tiettyssä koulunkäynnin vaiheessa. Matematiikan näkeminen kulttuurin osana tuli vahvemmin esille aineenopettajilla kuin luokanopettajilla. Aineenopettajat katsoivat hyvin yksimielisesti (90%), että 'opetuksessa on tuotava selvästi esille matematiikka kulttuurin osana'. Luokanopettajista noin kolme neljäsosaa oli tätä mieltä.

Matematiikan opettajat olivat myös yksimielisiä (80%) siitä, että opettajan tärkeimpänä tehtävänä luokassa ei ole järjestyksen ylläpitäminen eikä pelkästään oppilaiden laskemisrauhan turvaaminen.

Kuviossa 6.3 on esitetty muutamien sellaisten uskomusväittämien jakautumat, joissa opettajien käsitykset vaihtelivat varsin paljon.



Kuvio 6.3 Niiden uskomusväittämien jakaumat, joissa opettajien vastaukset vaihtelivat selvimmin.

Matematiikan oppimisen luonnetta koskevilla väittämillä ilmeni eroja sekä luokanopettajien että aineenopettajien välillä, mutta myös kunkin luokka-asteen opettajaryhmän sisällä. Luokanopettajista 60–70 prosenttia katsoi, että 'oppiminen pitäisi tehdä mahdollisimman helpoksi oppilaille jakamalla oppiaines pieniin osiin'. Sen sijaan vain vajaat 40 prosenttia aineenopettajista oli samalla kannalla ja yli puolet opettajista oli asiasta eri mieltä. Luokanopettajista enemmistö (ja neljännen luokan opettajista 75 %) ilmaisi, että oppilaan tarvitsee ehdottomasti ymmärtää kaikki opetuksen menettelyt ja esitetyt perustelut.

Aineenopettajista hieman vajaat 40 prosenttia piti myös ymmärtämistä välttämättömänä, mutta puolet aineenopettajista oli toista mieltä ja katsoi, että 'oppilaan ei tarvitse ymmärtää jokaista perustelua ja menettelyä'. Yli 60 prosenttia sekä luokanopettajista että aineenopettajista katsoi, että 'opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon lahjakkaiden oppilaiden tarpeet'. Tämän rinnalla luokanopettajista yli puolet oli sitä mieltä, että yhtä 'erityisesti tulisi ottaa huomioon myös heikosti menestyvät oppilaat'. Sitä vastoin aineenopettajista ainoastaan kolmannes oli heikompien oppilaiden erityisen huomioimisen kannalla.

Luokanopettajien ja aineenopettajien uskomukset poikkesivat selvästi myös siinä, miten oppilaiden tulisi matematiikan opiskelussa onnistumisensa näyttää. Eli kuinka tärkeää on oikean lopputuloksen saaminen tehtävästä. Luokanopettajien joukko jakaantui tämän väittämän kohdalla kahtia. Lähes 40 prosenttia luokanopettajista ilmaisi, että 'oppilaiden pitäisi saada tehtäviä ratkaistaessa ennen kaikkea oikea tulos', mutta noin puolet opettajista oli eri mieltä. Aineenopettajista yli 80 prosenttia ei pitänyt oikean lopputuloksen saamista oppilaiden onnistumisen tärkeimpänä kriteerinä.

Yhteenvetona voidaan todeta, että luokanopettajien ja aineenopettajien uskomukset matematiikan opetuksesta ja oppimisesta olivat monessa suhteessa samankaltaiset. Opettajilla oli koko joukko uskomuksia, joista he olivat miltei täysin yksimielisiä. Nämä uskomukset korostivat ajattelun tärkeyttä ja sellaisten ongelmatehtävien käsittelyä opetuksessa, joissa oppilaita rohkaistaan omakohtaiseen miettimiseen ja erilaisten ratkaisuteiden etsimiseen. Lisäksi näissä uskomuksissa painottui vähempien oppisisältöjen perusteellinen käsittely opetuksessa ja matemaattisen täsmällinen kielenkäyttö sekä oppilaiden osalta laskemisen perustekniikkojen hallinta ja ahkera harjoittelu.

Uskomuksissa ilmeni mielenkiintoista vaihtelua sekä opettajaryhmien kesken että niiden sisällä. Eroja ilmeni sellaisissa kysymyksissä kuten, millaisista sisältökokonaisuuksista opetuksen tulisi rakentua, miten heikosti menestyvät oppilaat olisi huomioitava ja mikä merkitys oikeiden tulosten saamisella tulisi matematiikan opiskelussa olla.

6.2 Millainen oli opettajien matematiikkauskomusten rakenne?

Opettajien matematiikkauskomusten luonnetta ja rakennetta haluttiin selvittää lähemmin etsimällä uskomusmuuttujien joukosta sisäisesti korreloituneita osaryhmiä. Tähän käytettiin faktorianalyysia. Koska luokanopettajien ja aineenopettajien uskomuksissa ilmeni väittämien tarkastelun perusteella erilaisuutta, niin luokanopettajia ja aineenopettajia tarkasteltiin omina ryhminään. Muutoinkin jaottelu näihin opettajaryhmiin oli luonteva ja kiinnostava. Neljännen ja kuudennen luokan opettajia tarkasteltiin kuitenkin yhtenä luokanopettajien ryhmänä.

Tilastollisesti hyviä ja tulkinnallisesti mahdollisimman selkeitä faktoriratkaisuja etsittiin monilla tavoilla. Aineistoja analysoitiin käyttämällä erilaisia faktorointimenetelmiä

(mm. pääkomponentti- ja pääakselimenetelmä), erilaisia rotatointimenetelmiä (suorakulmainen ja vinokulmainen rotaatio) ja näiden yhteydessä vielä useita faktorilukuja (3–7 faktoria). Analysointityön tuloksia ei tässä tarkemmin kuvata. Näihin opettaja-aineistoihin tilastollisesti parhaiten sopivat ja tulkinnallisesti mielekkäät ratkaisut saatiin käyttämällä pääkomponenttimenetelmää ja suorakulmaista rotaatiota (VARIMAX). Faktorien lukumäärän valinnassa käytettiin rajana ominaisarvoa 1.3.

Luokanopettajien uskomusmuuttujista karsittiin vuonna 1990 pois muuttujat 1,3,7,14 ja 21 ja aineenopettajien kohdalla muuttujat 3, 14, 18 ja 29. Syynä poisjättämiseen olivat sekä muuttujien alhaiset kommunaliteetit että osittain myös väittämien tulkinnanvaraisuus. Kaikkein sopivimmaksi osoittautuivat molempien opettaja-aineistojen kohdalla *kuuden faktorin* ratkaisut. Vuonna 1995 aineenopettajien uskomusmuuttujista jätettiin alhaisen kommunaliteetin vuoksi pois muuttujat 6, 13 ja 27. Parhaiten opettajien uskomusten rakennetta kuvasi tuolloin *seitsemän faktorin* ratkaisu. Faktoriratkaisujen rotatoidut matriisit on esitetty liitteessä 5. Uskomusten rakenteita tarkastellaan seuraavassa siten, että ensin esitellään luokanopettajien ja aineenopettajien faktorirakenteita vuonna 1990, minkä jälkeen kuvataan aineenopettajien faktorirakennetta vuonna 1995. Faktoreiden kuvailussa esitetään aina suluissa niiden muuttujien numerot, jotka latautuivat ko. faktorille. Faktoreiden tulkinnassa on pyritty aikaisempaa tutkimusta hyväksi käyttäen löytämään faktorien sisältämille muuttujille 'yhteinen nimittäjä'.

6.2.1 Luokanopettajien uskomusten faktorirakenne

Taulukossa 6.4 on esitetty luokanopettajien uskomusmuuttujien faktoriratkaisu latauksineen ja kommunaliteetteineen. Luokanopettajien ensimmäinen faktori sisälsi neljä muuttujaa (20, 10, 19 ja 22). Yhteisenä piirteenä näissä väittämässä tuli voimakkaasti esille matematiikan opetuksen oppilaskeskeisyys: oppilaiden rohkaiseminen, monipuolisten kokemusten ja tilaisuuksien tarjoaminen oppilaille ja oppilaiden ajattelun korostaminen. Sen vuoksi tämä faktori nimettiin *oppijakeskeisyydeksi*.

Toiselle faktorille latautuivat uskomusmuuttujat 5, 4 ja 16. Väittämässä korostuivat selvästi matematiikkaan ja sen opetukseen liitetyt 'perinteiset' ominaispiirteet eli harjoittelun runsaus hyvän 'rutiinin' saavuttamiseksi ja laskemisen perustekniikkojen hallinta. Tästä johtuen faktorille annettiin nimi *harjoittelukeskeisyys*.

Kolmannelle faktorille painoutuivat väittämät, jotka kuvaavat yhdessä tapahtuvaa toimintaa opetuksessa (26, 13, 9 ja 6). Niiden mukaan matematiikan opetukseen tulisi sisältyä runsaasti keskustelua, ryhmissä työskentelyä ja oppimispelien käyttöä. Oppilaiden yksilöllistä työskentelyä korostavan väittämän negatiivinen lataus on ymmärrettävissä niin, että yksinään laskemisen sijasta opettajat painottivat ryhmissä tapahtuvaa ja keskustelevaa työskentelyä. Näin ollen tätä faktoria kutsuttiin *yhteistoiminnallisuudeksi*.

Taulukko 6.1 Luokanopettajien matematiikkauskomusten faktorit ja niihin kuuluvat väittämät vuonna 1990 (N = 108).

	Faktorit ja väittämät	Lataus	Kommu- naliteetti
I.	<i>Oppijakeskeisyys</i>		
20.	Oppilaita olisi rohkaistava etsimään tehtäviin erilaisia ratkaisuteitä ja niistä olisi opetuksessa keskusteltava.	.79	.68
10.	Oppilaan tulisi saada kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla.	.79	.68
19.	Tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä.	.73	.60
22.	Oppilaiden olisi saatava tilaisuus itse muotoilla tehtäviä ja ongelmia ja sitten ratkoa niitä.	.42	.52
II.	<i>Harjoittelukeskeisyys</i>		
5.	Matematiikan opetuksessa on ennen kaikkea harjoiteltava runsaasti.	.79	.67
4.	Oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan ennen kaikkea laskemisen perustekniikat.	.76	.60
16.	Opetuksessa olisi laskettava mahdollisimman usein sellaisia rutiinitehtäviä, joissa tunnetun menetelmän oikea käyttäminen johtaa varmasti tulokseen.	.53	.52
III.	<i>Yhteistoiminnallisuus</i>		
26.	Matematiikan tunneilla on korostettava yksilöllistä työskentelyä.	-.73	.73
13.	Opettajan pitäisi ennen kaikkea pyrkiä vilkkaaseen opetuskeskusteluun.	.61	.45
9.	Opetuksessa olisi edistettävä sosiaalista oppimista (mm. ryhmissä työskentelyä).	.56	.63
6.	Matematiikan opetuksessa olisi käytettävä runsaasti oppimisperlejä.	.53	.55

Taulukko 6.1 jatkuu

	Faktorit ja väittämät	Lataus	Kommu- naliteetti
IV.	<i>Oppituntikeskeisyys</i>		
12.	Oppilaiden pitäisi tehtäviä ratkaistaessa saada ennen kaikkea oikea tulos.	.76	.63
11.	Opettajan ensisijainen tehtävä on pitää luokassa järjestystä yllä.	.71	.60
15.	Opetuksessa pitäisi ottaa erityisesti huomioon heikosti menestyvien oppilaiden tarpeet.	.51	.46
V.	<i>Esitystavat</i>		
2.	On kiinnitettävä huomiota täsmälliseen ja maattisesti oikeaan kielenkäyttöön.	.69	.54
27.	Matematiikan opetuksessa on tuotava selvästi esille, että matematiikka on oleellinen osa kulttuuriamme.	.67	.63
8.	Opetuksessa olisi erityisesti harjoitettava maattisten symbolien käyttämistä.	.63	.49
17.	Matematiikan opetuksessa pitäisi käsitellä ennen kaikkea sovelluksia.	.46	.55
VI.	<i>Ajattelun kehittäminen</i>		
25.	Opetuksessa olisi käsiteltävä mahdollisimman usein tehtäviä, joissa oppilaan on ensin mietittävä ja joiden ratkaisemiseen ei riitä pelkästään laskurutiinien hallinta.	.73	.64
24.	Olisi mietittävä, missä matematiikan opetuksen tilanteissa voisi tietokoneen ottaa käyttöön.	.53	.47
23.	Opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon lahjakkaiden oppilaiden tarpeet.	.53	.47

Neljänteen faktoriin sisältyi kolme muuttujaa (12, 11 ja 15). Yhteisenä piirteenä näissä väittämässä oli matematiikan oppituntien sujuvuuden varmistaminen. Heikommin menestyviä oppilaita ajatellen oppitunneilla tulisi olla hyvä laskemisrauha ja edistymisen tärkeänä kriteerinä tulisi pitää tulosten oikeellisuutta. Käytännössä tämä voi tarkoittaa sitä, että

oppilaat laskevat 'sivu-urakoita' kirjasta ja itse tarkistavat tehtävien vastaukset erityisissä tarkistuspisteissä. Näin ollen faktori nimettiin *oppituntikeskeisydeksi*.

Viidennelle faktorille painottuivat väittämät, jotka käsittelivät matemaattista ilmaisua ja esitystapaa. Väittämissä 2 ja 8 korostui täsmällinen ja matemaattisesti korrekki kielenkäyttö ja matemaattisilla symboleilla operointi. Näiden voidaan katsoa olevan kiinteästi yhteydessä matematiikan kulttuuriseen aspektiin (27). Matematiikan soveltamisen (17) voisi katsoa sisältyvän tähän kokonaisuuteen siinä mielessä, että sovellukset voidaan ymmärtää myös matematiikan käyttö- ja esitysmuotoina. Näillä perusteilla faktorille annettiin nimi *esitystavat*.

Kuudennelle faktorille latautuivat väittämät, joissa pantiin painoa ajattelua vaativien ongelmatehtävien käytölle (25), tietokoneiden käyttömahdollisuuksien etsimiselle (24) sekä lahjakkaiden oppilaiden huomioimiselle (23). Näitä yhdistävänä tekijänä voi pitää matematiikan opetuksen ajattelua kehittävää luonnetta. Tästä johtuen faktori nimettiin *ajattelun kehittämiseksi*.

Luokanopettajien kuuden faktorin rakenne selitti yhteensä 58 prosenttia uskomusmuuttujien varianssista. Kokonaisuutena luokanopettajien uskomusten faktorirakenne oli varsin selkeä. Kuuden faktorin ratkaisu oli tilastollisesti perusteltavissa ja luontevasti tulkittavissa. Luokanopettajien uskomuksista nousi vahvasti esille kaksi tekijää: oppijakeskeisyys ja harjoittelukeskeisyys. Myös matemaattisuutta ja ajattelun kehittämistä korostavat uskomukset tulivat omina tekijöinä esille.

6.2.2 Aineenopettajien uskomusten faktorirakenne vuonna 1990

Aineenopettajien uskomusmuuttujien faktorirakenne on esitetty taulukossa 6.2. Ensimmäinen uskomusfaktori sisälsi sellaiset muuttujat (4, 5, 23 ja 8), jotka kuvastavat matematiikan opetukseen yleisesti liitettäviä piirteitä. Faktorin kaksi kärkimuuttujaa: laskemisen perustekniikkojen hallinta ja harjoittelun runsaus olivat samat kuin luokanopettajilla. Tämän lisäksi faktorille latautuivat väittämät, joissa painottuivat symbolimatematiikan harjoittelu ja lahjakkaiden oppilaiden tarpeet. Joka tapauksessa faktorin ydinsisältö oli samankaltainen kuin luokanopettajilla, mistä johtuen faktoria voitiin kutsua *harjoittelukeskeisydeksi*.

Toiselle faktorille latautuivat matematiikan opetuksen ongelmalähtöisyyttä ja useiden ratkaisutapojen mahdollisuutta kuvastavat väittämät (20, 25, 10) sekä oppilaiden ajattelua ja opettajan ja oppilaiden välistä vuorovaikutusta korostavat väittämät (19,13). Kolme näistä muuttujista oli samoja (20, 10 ja 19) kuin luokanopettajien ensimmäisellä faktorilla, joten yhteisenä piirteenä tälle faktorille voitiin perustellusti pitää opetuksen oppilaskeskeisyyttä. Niinpä faktori nimettiin *oppijakeskeisydeksi*.

Taulukko 6.2 Aineenopettajien matematiikkauskomusten faktorit ja niihin kuuluvat väittämät vuonna 1990 (N = 64).

	Faktorit ja väittämät	Lataus	Kommu- naliteetti
I.	<i>Harjoittelukeskeisyys</i>		
4.	Oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan ennen kaikkea laske- misen perustekniikat.	.73	.63
5.	Matematiikan opetuksessa on ennen kaikkea harjoiteltava runsaasti.	.64	.52
23.	Opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon lahjakkai- den oppilaiden tarpeet.	.62	.61
8.	Opetuksessa olisi erityisesti harjoiteltava matemaattisten symbolien käyttämistä.	.57	.65
II.	<i>Oppijakeskeisyys</i>		
20.	Oppilaita olisi rohkaistava etsimään tehtäviin erilaisia ratkaisuteitä ja niistä olisi opetuksessa keskusteltava.	.73	.55
25.	Opetuksessa olisi käsiteltävä mahdollisimman usein tehtä- viä, joissa oppilaan on ensin mietittävä ja joiden ratkaisemi- seen ei riitä pelkästään laskurutiinien hallinta.	.59	.41
10.	Oppilaan tulisi saada kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla.	.58	.42
19.	Tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä.	.57	.55
13.	Opettajan pitäisi ennen kaikkea pyrkiä vilkkaaseen opetuskeskusteluun.	.45	.40
III.	<i>Käytännönläheisyys</i>		
1.	Opettajan pitäisi tehdä oppilaalle oppiminen mahdolisim- man helpoksi, esimerkiksi jakamalla oppiaines pieniin osiin.	.69	.65
7.	Oppilaiden pitäisi työskennellä mahdollisimman usein konkreettia materiaalia käyttäen.	.61	.58
9.	Opetuksessa olisi edistettävä sosiaalista oppimista (mm. ryhmissä työskentelyä).	.60	.43
17.	Matematiikan opetuksessa pitäisi käsitellä ennen kaikkea sovelluksia.	.59	.76
28.	Opetuksessa olisi käytettävä mahdollisimman usein projektityöskentelyä.	.51	.58

Taulukko 6.2 jatkuu

Faktorit ja väittämät	Lataus	Kommu- naliteetti
<i>IV. Suorituskeskeisyys</i>		
11. Opettajan ensisijainen tehtävä on pitää luokassa järjestystä yllä.	.67	.63
12. Oppilaiden pitäisi tehtäviä ratkaistaessa saada ennen kaikkea oikea tulos.	.65	.48
21. Olisi käsiteltävä mieluummin vähemmän oppisisältöjä perusteellisesti kuin paljon sisältöjä pinnallisesti.	-.65	.51
16. Opetuksessa olisi laskettava mahdollisimman usein sellaisia rutiinitehtäviä, joissa tunnetun menetelmän oikea käyttäminen johtaa varmasti tulokseen.	-.52	.51
6. Matematiikan opetuksessa olisi käytettävä runsaasti oppimispelejä.	.48	.56
<i>V. Oppimisen ongelmat</i>		
2. On kiinnitettävä huomiota täsmälliseen ja matemaattisesti oikeaan kielenkäyttöön.	-.76	.60
15. Opetuksessa pitäisi ottaa erityisesti huomioon heikosti menestyvien oppilaiden tarpeet.	.64	.66
24. Olisi mietittävä, missä matematiikan opetuksen tilanteissa voisi tietokoneen ottaa käyttöön.	.53	.36
27. Matematiikan opetuksessa on tuotava selvästi esille, että matematiikka on oleellinen osa kulttuuriamme.	.36	.35
<i>VI. Yksilöllisyys</i>		
26. Matematiikan tunneilla on korostettava yksilöllistä työskentelyä.	.85	.73
22. Oppilaiden olisi saatava tilaisuus itse muotoilla tehtäviä ja ongelmia ja sitten ratkoa niitä.	.51	.65

Kolmannelle faktorille latautui kahdenlaisia väittämiä. Väittämässä 1 ja 7 nousee esille matematiikan oppimisen helpottaminen käyttämällä hyväksi oppiaineen jakamista osiin ja konkreettista materiaalia. Väittämässä 17 ja 28 painottuu puolestaan sovellusten opettamisen ja projektityöskentelyn tärkeys. Näihin voidaan katsoa kiinteästi liittyvän myös oppilai-

den yhdessä työskentelyn (sosiaalisuuden) korostaminen (17). Keskeisenä yhdistävänä tekijänä tässä faktorissa voitiin siten pitää matematiikan opetuksen käytännönläheisyyttä ja sen vuoksi faktori nimettiin *käytännönläheisyydeksi*. Faktorilla ei ollut juuri mitään yhteistä luokanopettajien minkään faktorin kanssa, vaan se oli pelkästään aineenopettajille ominainen.

Neljännelle faktorille painottuivat matematiikan tehtävien suorittamista, oikeiden vastausten saamista ja opetuksen etenemistä kuvaavat väittämät (12, 21, 16). Väittämän 11 katsotaan myös läheisesti liittyvän samaan kokonaisuuteen siten, että hyvän työrauhan turvaamisen voi katsoa edistävän suorituksiin keskittymistä. Koska muuttujien 21 ja 16 lataukset olivat miinusmerkkisiä, on väittämät ymmärrettävä niin, että opetuksessa olisi käsiteltävä runsaasti sisältöjä, mutta kuitenkin tehtävät eivät saisi olla vain samoja menettelyjä toistavia rutiinitehtäviä. Oppimispelien käytön tärkeys (6) sisältyi niinkään tähän faktoriin. Koska faktori oli kahden kärkimuuttujansa osalta samankaltainen kuin luokanopettajien neljäs faktori, niin se nimettiin myös *oppituntikeskeisyydeksi*. Aineenopettajien faktori oli kuitenkin sisällöllisesti laajempi kuin luokanopettajien vastaava faktori.

Viidennelle faktorille latautuivat vahvimmin väittämät, joissa korostuivat heikosti suoriutuvien oppilaiden huomioiminen (15) ja 'ei-matemaattinen' kielenkäyttö opetuksessa (2). Myös tietokoneen opetuksellisten käyttötilanteiden etsiminen (24) painottui verraten vahvasti faktorille. Matematiikan kulttuurisuus-näkökulma (27) sisältyi niinkään faktoriin, joskin heikohkolla latauksella. Näin ollen faktori sisälsi erilaisia aineksia ja oli tulkinnallisesti verraten sekava. Kaikkien näiden osioiden voitiin kuitenkin katsoa liittyvän omalla tavallaan matematiikan oppimisen vaikeuksiin ja niiden voittamiseen erilaisin keinoin ja siksi faktorille annettiin nimi *oppimisen ongelmat*. Vaikkakin tällä faktorilla ja luokanopettajien esitystavat-faktorilla oli kaksi yhteistä muuttujaa, niin kokonaisuutena ne olivat tulkinnallisesti erilaiset.

Viimeinen eli kuudes faktori sisälsi ainoastaan kaksi muuttujaa. Erityisen voimakkaasti faktorille latautui oppilaiden yksilöllistä työskentelyä korostava väittämä (26) ja hieman heikommin oppilaiden omien tehtävien muotoilemisen ja ratkaisemisen mahdollisuuksia painottava väittämä (22). Faktori nimettiin *yksilöllisyydeksi* huolimatta siitä, että yksilöllisyys -termin tulkintaan liittyikin moniselitteisyyttä.

Kokonaisuutena aineenopettajien kuuden faktorin rakenne selitti 55 prosenttia uskomusmuuttujien varianssista. Uskomusten faktorirakenne oli tilastollisesti kohtuullisen hyvä, mutta tulkinnallisesti ongelmallisempi. Faktoreista ainoastaan kaksi ensimmäistä (harjoittelukeskeisyys ja oppijakeskeisyys) ja viimeinen (yksilöllisyys) olivat sisällöllisesti hyvin tulkittavia. Harjoittelukeskeisyys- ja oppijakeskeisyys-faktorit olivat sisällöltään samat kuin luokanopettajilla. Kolmen muun faktorin sisältö oli sitten hajanaisempi.

6.2.3 Aineenopettajien uskomusten faktorirakenne vuonna 1995

Vuonna 1995 yhdeksännen luokan opettajille esitettiin vastaavanlainen uskomuskysely kuin vuonna 1990. Tämä tarjosi mahdollisuuden sekä uskomusrakenteiden vertailuun että matematiikkauskomusten muutosten tarkasteluun. Kysely rakentui aiemman kyselyn pohjalle, mutta sitä oli parannettu korvaamalla heikosti toimivat väittämät uusilla väittämillä. Yhteisiä väittämiä vuosien 1990 ja 1995 kyselyissä oli kaikkiaan 23 kappaletta. Aineenopettajien uskomusten faktorirakenne vuonna 1995 on esitetty taulukossa 6.3.

Vuoden 1990 tilanteesta poiketen parhaimmaksi faktoriratkaisuksi vuonna 1995 osoittautui seitsemän faktorin ratkaisu, mistä johtuen faktoreiden sisältö oli myös monilta osin erilainen kuin viisi vuotta aikaisemmin. Vuonna 1995 ensimmäinen faktori sisälsi matematiikan opetuksen oppijakeskeisyyttä korostavat muuttujat (taulukko 6.3). Kaksi muuttujista (12 ja 22) oli samoja kuin vuoden 1990 vastaavassa faktorissa, mutta kolme muuta (4, 14 ja 23) olivat uusia, samansisältöisiä muuttujia. Faktorin nimeäminen *oppijakeskeisyydeksi* oli sen vuoksi hyvin perusteltua.

Toiselle faktorille latautuivat sellaiset väittämät, joita yhdistävänä piirteenä voi pitää kunnollista matematiikan oppimista. Väittämissä korostuivat sovellus- ja ongelmatehtävien säännöllinen käsittely (28 ja 21) ja ajan käyttäminen vähempien sisältöjen perusteellisempaan käsittelyyn (24). Viimeksi mainittu asia nousi esille myös toisessa negatiivisesti latautuneessa muuttujassa (1). Plus-merkiseksi tulkittuna väittämä korosti suurempien sisällöllisten kokonaisuuksien käsittelyn tarpeellisuutta. Väittämässä 15 painottui puolestaan ratkaisutavan valinnan ja sen onnistuneen läpiviennin merkitys tehtäviä ratkaistaessa. Näillä perusteilla faktorille annettiin nimi *hyvä oppiminen*.

Kolmanteen faktoriin sisältyi kolme muuttujaa (8, 25 ja 9). Väittämät korostivat oppimispelien, konkreettisen materiaalin ja oppilaiden itse laatimien tehtävien käytön merkitystä matematiikan opiskelussa. Kaikkiin näihin väittämiin sisältyi konkreettisuutta ja oppilaiden omakohtaista osallistumista, mistä johtuen faktori nimettiin *konkreettisuudeksi*.

Vuoden 1995 neljäs faktori oli samankaltainen kuin vuoden 1990 ensimmäinen faktori. Faktorille latautui nyt kolme muuttujaa, joista kaksi oli samoja (5 ja 7) kuin vuonna 1990. Kolmas väittämä (20) painotti rutiinitehtävien harjoittelun tärkeyttä, joten se sopi sisällöllisesti erittäin hyvin tälle faktorille. Faktori nimettiin *harjoittelukeskeisyydeksi*.

Viidennelle faktorille latautuivat ajattelun ja ymmärtämisen tärkeyttä painottavat väittämät (19 ja 18) sekä matematiikan kulttuurista luonnetta korostava väittämä (30). Matematiikan kulttuurisuuden ja opetuksen ajattelukeskeisyyden yhteys on varsin luonnollinen, kun kulttuurisuus ymmärretään matematiikan yhteiskunnallisena merkityksenä. Eli yhteiskunnassa toimimisen kannalta yksilölle on matematiikasta eniten hyötyä juuri matemaattisen ajattelutavan kautta. Faktorille annettiin siten nimi *ajattelun kehittäminen*.

Taulukko 6.3 Aineenopettajien matematiikkauskomusten faktorit ja niihin kuuluvat väittämät vuonna 1995 (N = 68). (Huomattakoon, että osioiden numerointi on erilainen kuin vuonna 1990.)

	Faktorit ja väittämät	Lataus	Kommu- naliteetti
I.	<i>Oppijakeskeisyys</i>		
4.	Matematiikkaa oppii parhaiten keksimällä itse sen säännöt.	.68	.57
14.	On liian aikaa vievää antaa oppilaiden kertoilla omia kokemuksiaan laskutehtävistä.	-.62	.54
12.	Oppilaan tulisi saada kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla.	.61	.55
22.	Oppilaita olisi rohkaistava etsimään tehtäviin erilaisia ratkaisuteitä ja niistä olisi opetuksessa keskusteltava.	.55	.58
23.	Matemaattiset prosessit ja ideat ovat tärkeämpiä kuin säännöt ja tosiasiat.	.51	.53
II.	<i>Hyvä oppiminen</i>		
1.	Opettajan pitäisi tehdä oppilaalle oppiminen mahdollisimman helpoksi, esimerkiksi jakamalla oppiaines pieniin osiin.	-.71	.70
28.	Opetuksessa olisi käsiteltävä mahdollisimman usein tehtäviä, joissa oppilaan on ensin mietittävä ja joiden ratkaisemiseen ei pelkästään riitä laskurutiinien hallinta.	.63	.54
21.	Matematiikan opetuksessa pitäisi mahdollisimman usein käsitellä sovelluksia.	.63	.61
15.	Oppilaiden pitäisi tehtäviä ratkaistessaan saada ennen kaikkea oikea tulos.	-.59	.58
24.	Oli käsiteltävä mieluummin vähemmän oppisisältöjä perusteellisesti kuin paljon sisältöjä pinnallisesti.	.55	.45
III.	<i>Konkreettisuus</i>		
8.	Matematiikan opetuksessa olisi käytettävä oppimispelejä.	.69	.50
25.	Oppilailla tulisi olla tilaisuuksia itse muotoilla tehtäviä ja ongelmia ja sitten ratkoa niitä.	.67	.66
9.	Oppilaiden pitäisi työskennellä mahdollisimman usein konkreettia materiaalia käyttäen.	.54	.65

Taulukko 6.3 jatkuu

Faktorit ja väittämät		Lataus	Kommu- naliteetti
<i>IV. Harjoittelukeskeisyys</i>			
5.	Oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan ennen kaikkea laske- misen perustekniikat.	.81	.75
20.	Opetuksessa olisi laskettava mahdollisimman usein sellai- sia rutiinitehtäviä, joissa tunnetun menetelmän oikea käyttäminen johtaa varmasti tulokseen.	.66	.65
7.	Matematiikan opetuksessa on ennen kaikkea harjoiteltava runsaasti.	.59	.57
<i>V. Ajattelun kehittäminen</i>			
30.	Opetuksessa on tuotava selvästi esille, että matematiikka on oleellinen osa kulttuuriamme.	.68	.56
19.	Matematiikan tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä.	.60	.57
18.	Oppilaan ei tarvitse ymmärtää jokaista perustelua ja me- nettelyä.	-.48	.47
<i>VI. Yksilöllisyys</i>			
26.	Opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon lahjakkai- den oppilaiden tarpeet.	.65	.68
16.	Opetuksessa pitäisi erityisesti ottaa huomioon heikosti menestyvien oppilaiden tarpeet.	.64	.63
29.	Matematiikan tunneilla tulee korostaa oppilaiden yksinään työskentelyä.	.62	.50
11.	Ei ole järkevää käyttää matematiikan tunnilla usein ryhmä- työtä.	.57	.50
<i>VII. Esitys- ja menettelytavat</i>			
3.	Suoritusten arvioinnissa on otettava huomioon käytetyt ratkaisutavat.	-.69	.60
10.	Opetuksessa olisi erityisesti harjoiteltava matemaattisten symbolien käyttämistä.	.66	.57
17.	Matematiikan opiskelu perustuu sääntöjen opettelemiseen.	.49	.54
2.	On kiinnitettävä huomiota täsmälliseen ja matemaattisesti oikeaan kielenkäyttöön.	.47	.68

Kuudes faktori sisälsi neljä muuttujaa, jotka kaikki latautuivat faktorille miltei samansuuruisella painolla. Väittämässä nousivat esille erilaisten oppilaiden yksilöllisten tarpeiden huomioiminen (26 ja 16) sekä matematiikan opiskelun erilaiset työtavat (29 ja 11). Näillä perusteilla faktori nimettiin *yksilöllisyydeksi*.

Viimeiselle eli seitsemännelle faktorille latautuivat väittämät, jotka painottivat yhtäältä matemaattista esitystapaa (10 ja 2) ja toisaalta matematiikan opetuksen menettelytapoja kuten tehtävien oikeellisuuteen pohjautuvaa arviointia (3) ja sääntöjen opettelemista (17). Kyseinen faktori nimettiin tämän vuoksi *esitys- ja menettelytavoiksi*. Faktorilla oli sisällöllistä yhteneväisyyttä luokanopettajien vuoden 1990 vastaavan faktorin kanssa.

Tämä seitsemän uskomusfaktorin rakenne selitti 58 prosenttia uskomusmuuttujien vaihtelusta. Kokonaisuutena aineenopettajien uskomusten faktorirakenne oli vuonna 1995 selkeämpi kuin vuonna 1990. Rakenne sisälsi nyt seitsemän faktoria, joiden sisällöllinen tulkittavuus oli erityisesti aikaisempaa parempi. Opettajien uskomuksissa olivat nyt vahvemmin näkyvissä ne osatekijät, jotka ilmensivät opetuksen oppijakeskeisyyttä ja hyvää oppimista. Harjoittelukeskeisyys oli edelleen omana faktorinaan, mutta nyt sen painoarvo oli heikompi kuin vuoden 1990 faktorirakenteessa. Merkittävää oli lisäksi se, että tällä faktorirakenteella ja luokanopettajien faktorirakenteella oli kolme samansisältöistä faktoria: oppijakeskeisyys, harjoittelukeskeisyys sekä esitys- ja menettelytavat.

6.3 Oliko opettajien matematiikkauskomuksissa eroja?

Seuraavassa tarkastellaan sitä, löytyikö tarkastelun kohteina olleista opettajajoukoista sellaisia osaryhmiä, joiden matematiikkauskomukset olivat keskenään erilaisia. Toinen kiinnostava kysymys oli, millaisia nämä uskomuksiltaan erilaiset ryhmät olivat tiettyjen opettajia kuvaavien taustamuuttujien suhteen eli poikkesivatko esimerkiksi nais- ja miesopettajien uskomukset toisistaan tai oliko kokeneilla opettajilla erilaiset uskomukset kuin heidän nuoremmilla kollegoillaan?

Erojen tarkastelussa käytettiin hyväksi edellä kuvattuja matematiikkauskomusten faktorirakenteita. Luokanopettajille ja aineenopettajille laskettiin faktorikohtaiset summapistemäärät, joiden perusteella vertailuja tehtiin. Uskomusfaktoreiden keskiarvot ja hajonnat eri opettajaryhmien osalta on esitetty liitteessä 6. Taustamuuttujina käytettiin *opettajan sukupuolta, opettajakokemuksen määrää, täydennyskoulutuksen määrää, asuinympäristöä ja koulun alueellista sijaintia*. Luokanopettajien kohdalla yhtenä vertailukriteerinä käytettiin lisäksi *matematiikkaan erikoistumista*.

Koulun alueellisen sijainnin suhteen koulut luokiteltiin uudelleen. Ositusperusteeksi alunperin valitun läänijaon sijasta käytettiin nyt laajempia aluekokonaisuuksia, jolloin näille sijoittuvien koulujen ja opettajien määrä kasvoisuuremmaksi. Luokitusperusteena käytettiin kehitysaluejakoa, jonka mukaisesti maa oli jaettu neljään alueeseen (ks. Linnakylä 1995,

60). Alla olevasta taulukosta käyvät ilmi tämän luokittelun mukaiset opettajien määrät.

Taulukko 6.4 Opettajien määrät kehitysaluejaon mukaisilla alueilla vuosina 1990 ja 1995.

Kehitysalue	Luokanopettajia		Aineenopettajia	
	1990	1995	1990	1995
Pohjois-Suomi	22	12	12	12
Väli-Suomi	30	22	22	25
Etelä-Suomi	42	20	20	20
Suur-Helsinki	14	11	11	11
Yhteensä	108	65	65	68

Opettajakokemuksen perusteella opettajat jaettiin kolmeen luokkaan. Useamman luokan käyttämistä ei katsottu mielekkääksi opettajaryhmien verraten pienen kokonaiskoon vuoksi. Luokanopettajilla käytetyt kokemusluokat olivat: 1 = 1–8 vuotta, 2 = 9–21 vuotta ja 3 = 22–38 vuotta. Vastaavasti aineenopettajilla kokemusluokat olivat vuonna 1990: 1 = 1–10 v., 2 = 11–17 v. ja 3 = 18–32 v. sekä vuonna 1995: 1 = 1–13 v., 2 = 14–20 v. ja 3 = 21–34 v. Opettajien täydennyskoulutuksen määrää viimeisen viiden vuoden aikana kuvattiin niinkään kolmeluokkaisena: 1 = ei yhtään osallistumiskertaa, 2 = 1–2 kertaa ja 3 = 3 kertaa tai enemmän.

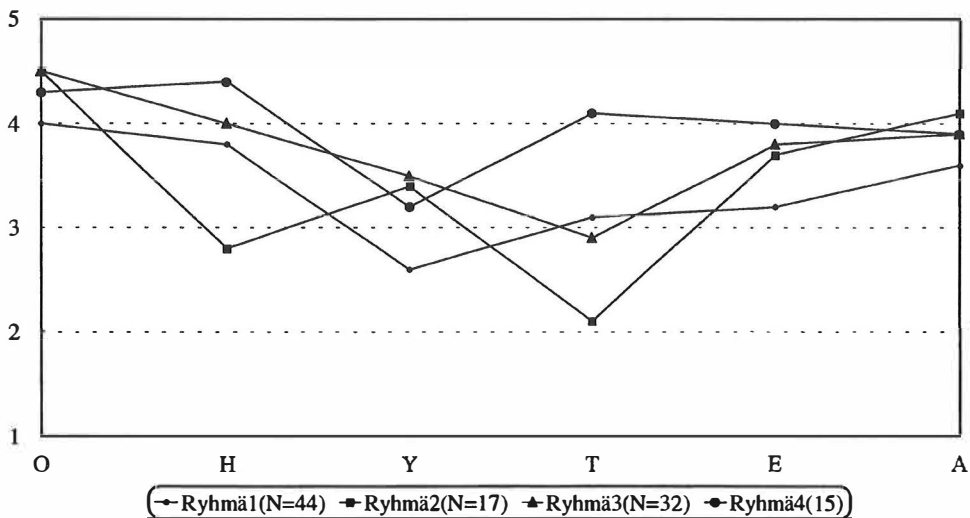
6.3.1 Opettajakokemus luokanopettajien uskomuksia erottelevana tekijänä

Kun varianssianalyysin avulla analysoitiin uskomusfaktoreiden ja opettajien taustamuuttujien välisiä suhteita, löydettiin vain vähän merkitseviä yhteyksiä. Ainoat tilastollisesti merkitsevät yhteydet havaittiin opettajakokemuksen ja kahden uskomusfaktorin välillä. Nämä uskomusfaktorit olivat oppituntikeskeisyys ja esitystavat. Kokeneimmilla opettajilla oli vahvemmat oppituntikeskeisyyttä ja matemaattista esitystapaa painottavat uskomukset kuin vähiten kokemusta omaavilla opettajilla. Tämä antoi viitteitä ja suuntia jatkoanalysoinnin pohjaksi.

Uskomuksiltaan erilaisten osaryhmien löytämiseksi luokanopettajien joukkoa analysoitiin lähemmin *ryhmittelyanalyysin* (CLUSTAN) avulla, missä analysoinnin pohjana olivat edelleen opettajille lasketut uskomusfaktoreiden summapistemäärät. Ryhmittelyanalyysia menetelmänä on kuvattu luvussa 5.6.

Luokanopettajien kohdalla analyysin tuloksena päädyttiin *neljän ryhmän* ratkaisuun. Yhdistettävien opettajaryhmien etäisyydessä tapahtui selvä harppaus siirryttäessä viiden ryhmän ratkaisusta neljän ryhmän ratkaisuun. Myös ryhmien koko ja sisällöllinen kiinnostavuus vaikuttivat neljän ryhmän ratkaisun valintaan. Ryhmien uskomusprofiilit ja ryhmien koko käyvät ilmi kuvioista 6.4. Luokanopettajien uskomusfaktorit olivat oppijakeskeisyys (O), harjoittelukeskeisyys (H), yhteistoiminnallisuus (Y), oppituntikeskeisyys (T), esitystavat (E) ja ajattelun kehittäminen (A).

Kuvio osoittaa, että luokanopettajien joukossa oli uskomuksiltaan kahdentyypisiä ryhmiä. Ryhmät 1 ja 3 olivat suurimmat opettajaryhmät ja niiden profiilit kulkivat miltei koko ajan päällekkäin ryhmän 3 profiilin ollessa ylempänä. Kuitenkin ryhmän 1 opettajien oppituntikeskeisyys-uskomukset olivat vahvemmat kuin ryhmässä 3. Yleensä ryhmien profiilien välinen etäisyys oli pieni, mutta yhteistoiminnallisuus-uskomusten kohdalla se hieman kasvoi.



Kuvio 6.4 Luokanopettajien uskomusprofiilit neljän ryhmän ratkaisussa

Ryhmät 2 ja 4 olivat kooltaan muita selvästi pienemmät. Niiden profiilit olivat kaksijakoiset ja poikkesivat kiinnostavasti toisistaan. Neljän faktorin osalta ryhmien uskomusprofiilit olivat verraten samanlaiset. Sen sijaan harjoittelukeskeisyys- ja oppituntikeskeisyys-uskomusten kohdalla erot olivat huomattavan suuret. Ryhmän 4 opettajat luottivat kaikkein vankimmin laskemisen perustekniikoiden hallintaan ja runsaaseen rutiiniharjoitteluun sekä oikeiden vastausten saamisen ja oppituntirauhan säilymisen tärkeyteen. Ryhmän 2 opettajilla nämä uskomukset olivat sitä vastoin kaikkein alhaisimmat ilmentäen sitä, että opettajien uskomuksissa painopiste oli toisaalla. Heidän uskomuksissaan

olivat tärkeässä asemassa erityisesti oppilaskeskeisyyteen ja yhteistoiminnallisuuteen liittyvät uskomukset.

Osatekijöittäin tarkasteluna opettajaryhmien profiilit olivat korkeimmillaan oppijakeskeisyys-uskomusten sekä ajattelun kehittämistä ja esitystapoja koskevien uskomusten kohdalla. Tästä voisi päätellä, että luokanopettajat näkevät oppijakeskeisyyden ja ajattelun kehittämisen matematiikan opetuksen keskeisinä periaatteina, mutta pitävät samalla myös tiettyjä esitystapoja sen opiskeluun sisältyvinä olennaisina asioina.

Eräs kiinnostavimmista profiilitarkastelun herättämistä kysymyksistä oli, millaisia opettajaryhmät – ja erityisesti ryhmät 2 ja 4 – olivat taustatekijöiltään. Tätä kysymystä selvitettiin alussa mainittujen taustamuuttujien suhteen ja tulokset käyvät ilmi taulukosta 6.5.

Taulukko 6.5 Uskomuksiltaan erilaisten luokanopettajaryhmien erot taustatekijöiden suhteen.

Taustamuuttujat	Luokittelu	Erojen merkittävyys
Sukupuoli	nainen / mies	n.s.
Kotiseutu	pohjoinen / väli / etelä / pääkaupunki	n.s.
Asuin ympäristö	maaseutu / kaupunki	n.s.
Opetuskokemus	1–8 v / 9–21 v / 22–38 v	*
Matem. erikoistuminen	ei / kyllä	n.s.
Täydennyskoulutus	ei yhtään / 1–2 krt. / 3 krt. tai enem.	n.s.

* $p < .05$

Luokanopettajien taustaa kuvaavista muuttujista uskomusryhmiin oli tilastollisesti merkittävä yhteys aineistossa ainoastaan opettajien opetuskokemuksella. Opettajaryhmät eivät siten poikenneet toisistaan sukupuolen (nainen vs. mies) tai asuin ympäristön (kaupunki vs. maaseutu) kannalta tai sen suhteen, missä puolella maata (kehitysalue) he toimivat opettajina. Ryhmien jakautumisessa matematiikkaan erikoistumisen ja täydennyskoulutuksen määrän suhteen oli havaittavissa hienoista erilaisuutta, mutta erot eivät olleet tilastollisesti merkittäviä.

Opettajaryhmät 2 ja 4, jotka olivat eniten erilaisia uskomustensa puolesta, poikkesivat selvimminkin toisistaan opetuskokemuksen suhteen. Ryhmään 4 kuuluivat kaikkein vanhimmat opettajat ja heillä oli opetuskokemusta keskimäärin 25 vuotta. Ryhmän 2 opettajat olivat nuorempia, mutta heilläkin oli kokemusta jo keskimäärin 13 vuotta. Luvussa 6.5 tullaan

tarkastelemaan lähemmin sitä, millä tavoin opettajaryhmät 2 ja 4 poikkesivat toisistaan opetuskäytäntöä kuvaavien piirteiden suhteen.

Yhteenvetona voidaan todeta, että luokanopettajien joukosta löytyi matematiikkauskomustensa puolesta erilaisia osaryhmiä. Erityisen kiinnostavia olivat kaksi pienryhmää, joiden opettajat poikkesivat toisistaan myös opetuskokemuksensa puolesta. Ensimmäisen ryhmän opettajien uskomuksissa oli korostetusti esillä harjoittelukeskeisyys (laskemisen perustekniikoiden hallinta, runsas rutiiniharjoittelu, oikeiden vastausten saaminen ja oppituntirauhan säilyttäminen). Tähän ryhmään kuuluvat opettajat olivat erittäin kokeneita. Toisen opettajaryhmän uskomuksissa olivat puolestaan vahvoja oppilaskeskeisyyteen ja yhteistoiminnallisuuteen liittyvät uskomukset ja ryhmään kuuluivat tämän opettajajoukon nuorimmat opettajat.

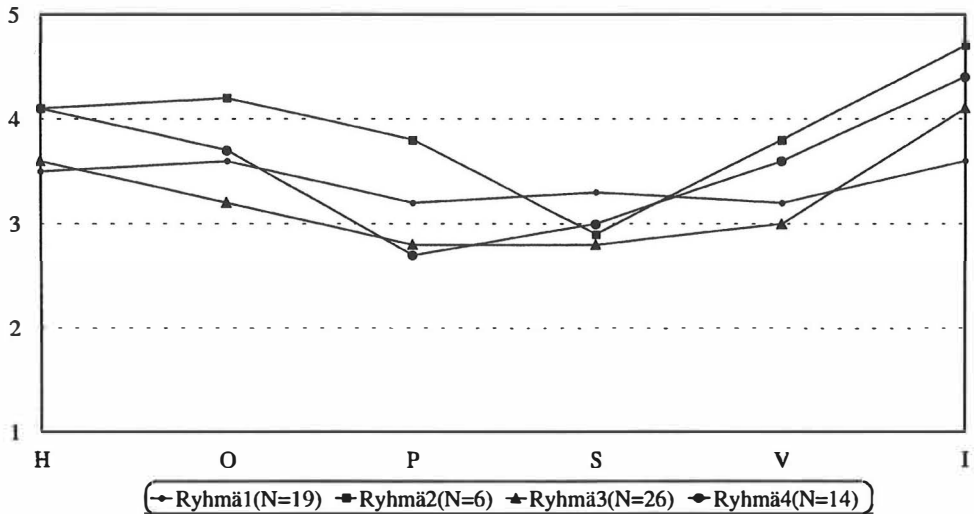
6.3.2 Aineenopettajien uskomuserojen tarkastelua

Aineenopettaja-aineistot olivat kooltaan sen verran luokanopettaja-aineistoa pienempiä, että niiden tilastollinen analysointi moniluokkaisten taustamuuttujien suhteen ei ollut tarkoituksenmukaista. Tästä johtuen uskomustensa puolesta erilaisten opettajaryhmien etsimisessä käytettiin ainoastaan ryhmittelyanalyysejä.

Ryhmittelyanalyysi tuotti erilaiset ratkaisut vuosina 1990 ja 1995, mikä oli tietysti odotettuakin, sillä ajankohtien faktoriratkaisut poikkesivat toisistaan melkoisesti. Vuoden 1990 aineistossa päädyttiin *neljän ryhmän* ratkaisuun, koska se oli sekä tilastollisesti että tulkinnallisesti selkein. Ryhmien profiilien kuvaamisessa käytetyt uskomusfaktorit olivat harjoittelukeskeisyys (H), oppijakeskeisyys (O), käytännönläheisyys (P), suorituskeskeisyys (S), oppimisen ongelmat (V) ja yksilöllisyys (I). Kuviossa 6.5 (seuraavalla sivulla) on esitetty näiden neljän ryhmän uskomusprofiilit ja ryhmien koko.

Profiilikuvio osoittaa, että vuoden 1990 aineistosta ei löytynyt sellaisia opettajaryhmiä, joiden matematiikkauskomuksissa olisi ollut kovin suuria eroja. Profiilit muistuttivat toisiaan, mutta kulkivat hieman eri tasoilla. Ryhmän 1 opettajien uskomukset olivat eri osatekijöiden suhteen hyvin keskitasoiset ja 'tasavahvat'. Ryhmän 3 profiili oli muodoltaan lähimpänä ryhmän 1 profiilia, mutta kulki lähes koko ajan uskomusprofiileista alimpana. Ainoastaan yksilöllisyys-faktorin osalta ryhmän 3 uskomukset olivat 1-ryhmän uskomuksia vahvemmat. Ryhmä 2 oli kaikkein pienin. Tämän ryhmän uskomusprofiili kulki kaikkein ylimpänä suorituskeskeisyys-uskomuksia lukuun ottamatta, jotka puolestaan olivat ryhmän 3 tasolla. Ryhmän 4 profiili kulki enemmän osan ryhmän 2 profiilia noudattaen. Kuitenkin käytännönläheisyys-uskomusten kohdalla ryhmät poikkesivat huomattavasti toisistaan ja tässä kohdin ryhmän 4 uskomukset olivat kaikkia muita heikoimmat. Yleensä uskomusprofiilit kulkivat varsin korkealla oppijakeskeisyyden ja yksilöllisyyden kohdalla ja sitä vastoin yhtenäisen matalalla suorituskeskeisyyden kohdalla. Tämä voisi viitata siihen, että jo

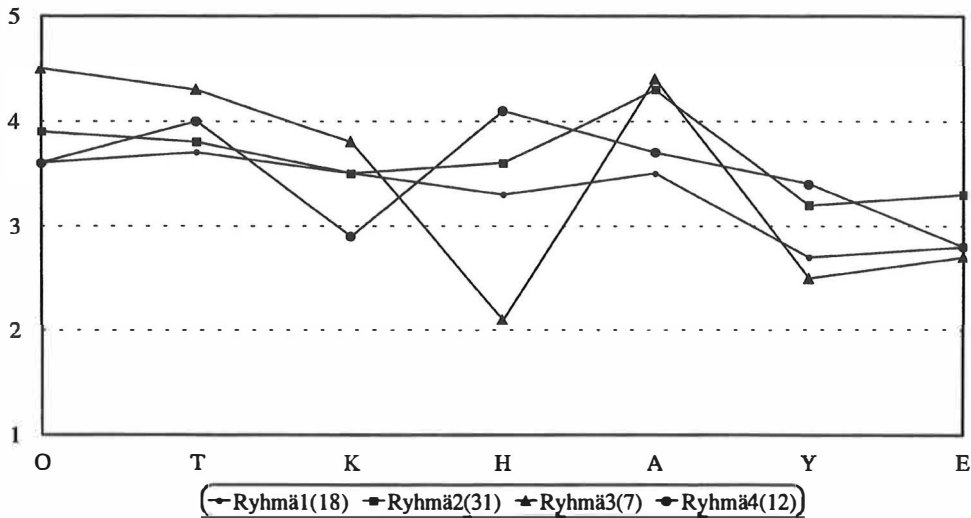
vuonna 1990 yläasteen matematiikan opetuksessa alettiin suuntautua oppilaslähtöiseen ja ajattelua korostavaan työskentelyyn suoritus- ja menetelmäpainotteisen opiskelun sijasta.



Kuvio 6.5 Aineenopettajien uskomusprofiilit neljän ryhmän ratkaisussa vuonna 1990.

Selvimmän toisistaan uskomustensa puolesta poikkeavat opettajaryhmät 2 ja 3 erosivat toisistaan myös joidenkin taustamuuttujien suhteen. Ryhmän 3 opettajat olivat valtaenemmistöltään miesopettajia, kun taas kooltaan pienessä 2-ryhmässä oli molempien sukupuolten edustajia. Ryhmän 2 kaikki opettajat työskentelivät kaupunkiympäristössä ja he olivat osallistuneet ryhmän 3 opettajia useammin ainejärjestön järjestämään täydennyskoulutukseen.

Myös vuoden 1995 aineistossa päädyttiin tilastollisia ja tulkinnallisia perusteita käyttäen neljän ryhmän ratkaisuun. Tässäkin ratkaisussa ryhmien etäisyyttä kuvaavassa tunnusluvussa tapahtui selvä harppaus edettäessä viiden ryhmän ratkaisusta neljän ryhmän ratkaisuun. Profiilien kuvaamiseen käytetyissä uskomusfaktoreissa oli kaksi samansisältöistä faktoria kuin vuonna 1990 eli oppijakeskeisyys (O) ja harjoittelukeskeisyys (T). Muut faktorit olivat hyvä oppiminen (H), konkreettisuus (K), ajattelun kehittäminen (A), yksilöllisyys (Y) sekä esitys- ja menettelytavat (E). Neljän opettajaryhmän uskomusprofiilit ja ryhmien koko on esitetty kuviossa 6.6.



Kuvio 6.6. Aineenopettajien uskomusprofiilit neljän ryhmän ratkaisussa vuonna 1995.

Vuoden 1995 profiilikuviosta nousee esiin kaksi päähavaintoa. Ensinnäkin opettajaryhmien profiilit muistuttavat toisiaan osoittaen sen, että uskomuksiltaan kovin monenlaisia ryhmiä ei tässä aineenopettajien joukossa ollut. Toiseksi kiinnittyy kuitenkin huomio ryhmään 3, jonka profiilin kulku oli muista poikkeava ja sen vuoksi kiinnostava. Ryhmä 3 oli kaikkein pienin (7 opettajaa) ja sen opettajilla oli kaikkein vahvimmat oppijakeskeisyyttä, hyvää oppimista, opetuksen konkreettisuutta ja ajattelun kehittämistä painottavat uskomukset. Sen sijaan ryhmän harjoittelukeskeisyyttä, yksilöllisyyttä sekä esitys- ja menettelytapoja korostavat uskomukset olivat muihin ryhmiin verrattuna kaikkein heikoimmat. Ryhmän 3 kannalta mielenkiintoisin vertailuryhmä oli ryhmä 4, jonka harjoittelukeskeisyys- ja yksilöllisyysuskomukset olivat muita ryhmiä vahvemmat. Oppijakeskeisyys- ja konkreettisuususkomusten kohdalla ryhmän 4 profiili kulki puolestaan alimpana. Ryhmät 1 ja 2 olivat ryhmistä suurimmat ja niiden profiilit kulkivat yleensä kahden edellä mainitun ryhmän välissä. Uskomustensa puolesta eniten erilaiset opettajaryhmät 3 ja 4 eivät poikenneet toisistaan tarkasteltujen taustamuuttujien suhteen.

Kaiken kaikkiaan voidaan todeta, että aineenopettajien joukosta voitiin löytää molempina vuosina neljä uskomusprofiililtaan erilaista osaryhmää. Vuoden 1990 aineistossa osaryhmien profiilit olivat muodoltaan hyvin samanlaiset ja profiilien erot eivät olleet suuret. Kaksi erilaisinta ryhmää poikkesi toisistaan siten, että toisessa ryhmässä uskomukset olivat kauttaaltaan vahvimmat ja toisessa taas kaikkein heikoimmat. Vuoden 1995 aineistossa oli osaryhmien profiileissa myös paljon samankaltaisuutta. Aineistosta erottui kuitenkin kaksi ryhmää, joista toisen ryhmän opettajilla oli vahvimmat oppijakeskeisyysuskomukset ja ajattelun kehittämisen uskomukset sekä heikoimmat harjoittelukeskeisyyttä ja esitys- ja

menettelytapoja painottavat uskomukset. Toisessa ryhmässä oli puolestaan muita vahvemmat harjoittelukeskeisyys-uskomukset ja kaikkein heikoimmat oppijakeskeisyys- ja konkreettisuus-uskomukset. Uskomuksiltaan erilaisten osaryhmien opettajat eivät yleensä poikenneet toisistaan tarkastelun kohteina olleiden taustamuuttujien suhteen.

6.4 Opettajien matematiikkauskomusten muuttuminen

Toinen kiinnostava kysymys koski opettajien matematiikka-uskomuksissa tapahtunutta 'muuttumista' tutkimusvuosien 1990 ja 1995 välisenä aikana ja näiden muutosten luonnetta, sikäli kun niitä esiintyi. Mahdollisuus tällaisen kehitysvertailun tekemiseen syntyi siitä, että kyselyaineistot kerättiin samoista kouluista ja osin myös samoilta opettajilta.

Opettajien uskomusten muutoksia tarkastellaan seuraavassa kahdella tavalla. Ensimmäkin selvitetään opettajien uskomuksissa tapahtuneita yleisiä muutoksia tarkastelemalla yksittäisten uskomusmuuttujien keskiarvoja mainittuina ajankohtina. Tämä luo yleiskuvaa muuttumisen mahdollisuudesta ja muutoksen suunnista. Samalla tarkastelu antaa tietoa käytetyn uskomuskyselyn toimivuudesta ja pätevyydestä opettajien matematiikkauskomusten selvittämisessä. Kuitenkaan mitään yleistettävää tulosta opettajien uskomusten muuttumisesta se ei voi antaa. Toinen lähestymistapa onkin kiinnostavampi. Siinä analysoidaan niiden 15 opettajan uskomusten muutoksia, jotka olivat mukana tutkimuksessa sekä vuonna 1990 että vuonna 1995. Tätä kuvaa täydennetään ja syvennetään vielä neljän opettajan osalta heitä koskevan haastatteluaineiston avulla.

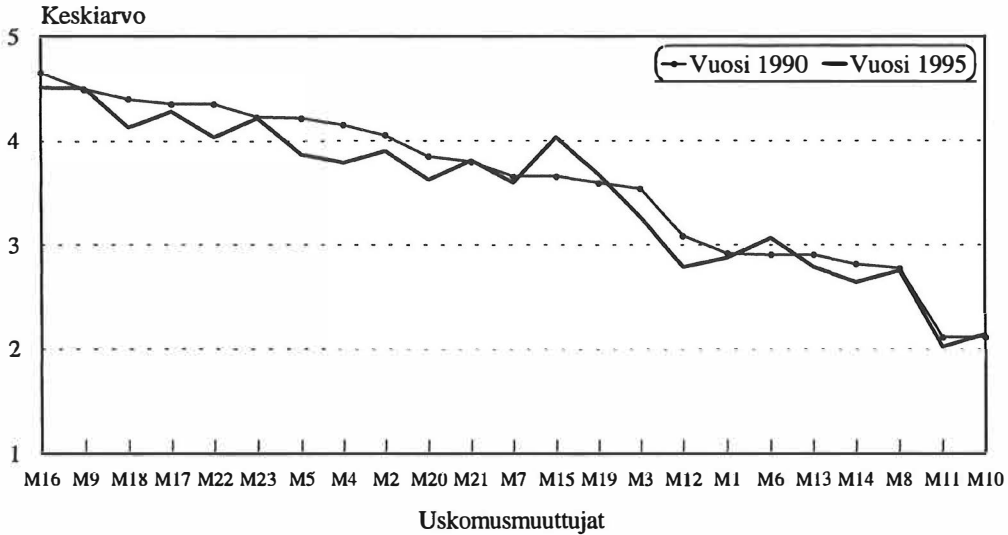
6.4.1 Matematiikkauskomusten erot vuosina 1990 ja 1995

Vuosina 1990 ja 1995 oli yhteisiä uskomusmuuttujia kaikkiaan 23 ja uskomusten eroja tarkastellaan ensin näiden muuttujien pohjalta. Kuviossa 6.7 on esitetty näiden muuttujien keskiarvot molempina ajankohtina. Muuttujien numerointi kuviossa on liitteen 7 mukainen.

Kuvion perusteella nähdään, että uskomusmuuttujien keskiarvot poikkesivat varsin vähän toisistaan. Toisin sanoen vuonna 1995 aineenopettajat vastasivat heille esitettyihin uskomusväittämiin samalla tavoin kuin he itse tai heidän kollegansa viisi vuotta aikaisemmin.

Eniten poikkeamaa keskiarvojen välillä oli muuttujissa 4 (*Oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan ennen kaikkea laskemisen perustekniikat*) ja 5 (*Matematiikan opetuksessa on ennen kaikkea harjoitettava runsaasti*) sekä muuttujassa 15 (*Tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä*). Vuonna 1995 muuttujien 4 ja 5 keskiarvo oli matalampi ja vastaavasti muuttujan 15 keskiarvo korkeampi kuin vuosikymmenen vaihteessa. Tämän perustella voisi sanoa, että vuonna 1995 opettajat panivat aiempaa enemmän painoa oppilaiden ajattelun käytölle runsaan laskuharjoittelun sijasta. Voidaan kuitenkin kysyä, ovatko nämä poik-

keamat seurausta siitä, että eri opettajajoukot ovat vastausten takana? Vai ovatko ne kenties ilmentymiä matematiikan opettajien ajattelussa ja uskomuksissa tapahtuneista muutoksista 1990-luvun ensi puoliskon aikana? Molemmat vaihtoehdot ovat mahdollisia.

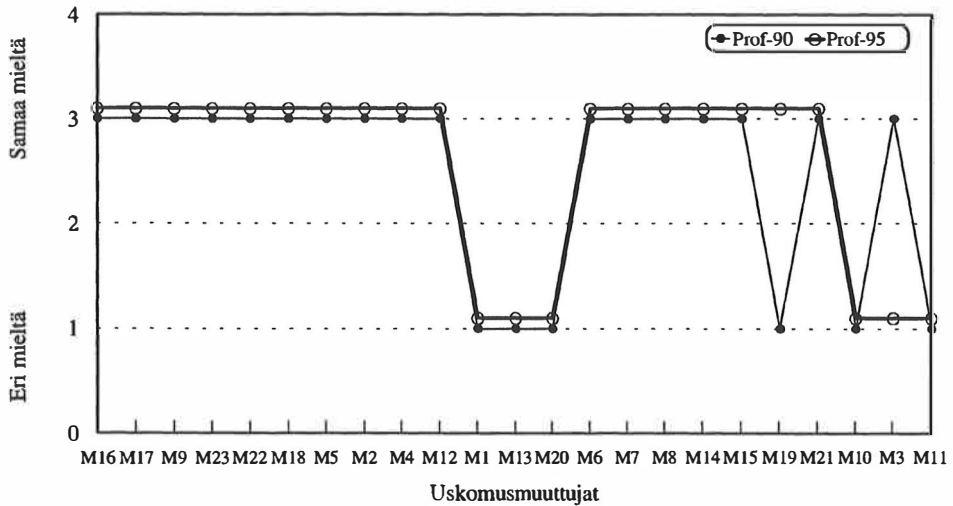


Kuvio 6.7 Uskomusmuuttujien keskiarvot vuosina 1990 ja 1995 (muuttujien järjestys vuoden 1990 keskiarvojen mukaan).

Kaiken kaikkiaan opettajien matematiikkauskomukset näyttivät keskiarvojen valossa kuitenkin varsin stabiileilta eikä merkkejä mistään suurista muutoksista ollut havaittavissa. Tämä ei silti tarkoita sitä, etteikö yksittäisten opettajien kohdalla uskomusten muuttuminen olisi ollut mahdollista.

6.4.2 Opettajien uskomusprofiilit muutoksen ilmentäjinä

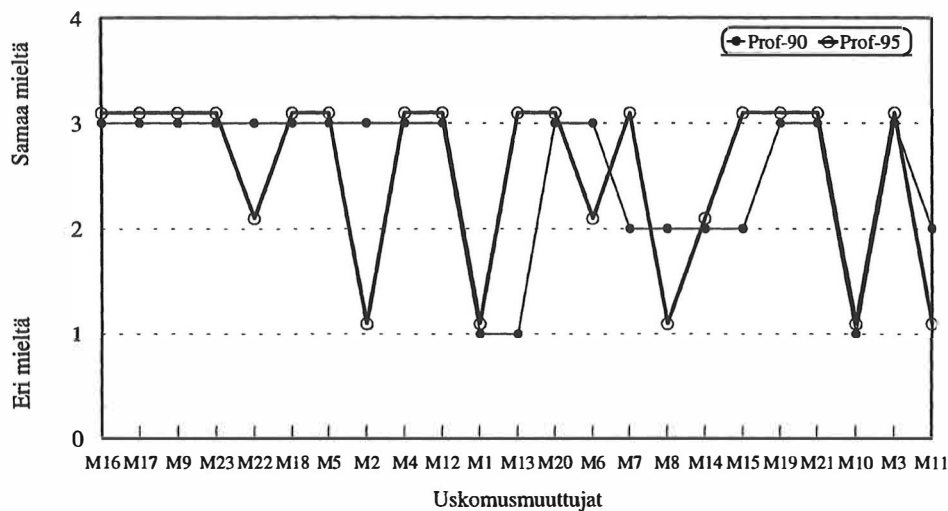
Seuraavassa analysoidaan lähemmin niiden 15 aineenopettajan matematiikkauskomusten kehitystä, jotka olivat mukana molemmissa tutkimusvaiheissa. Uskomusmuutosten analysoimisessa edettiin vaiheittain. Ensimmäisessä vaiheessa piirrettiin näiden opettajien *uskomusprofiilit* käyttäen ajankohdille yhteisiä uskomusmuuttujia (yhteensä 23 kpl). Tuloksena saatiin varsin kirjava joukko uskomusprofileja, joissa myös ajankohtien erot näkyivät eri tavoin. Seuraavat kaksi esimerkkiä (kuviot 6.8 ja 6.9) antavat kuvaa opettajien uskomusprofileista ja niiden muutoksista viiden vuoden aikana. Muuttujien järjestys valittiin kuvioissa sellaiseksi, että profiilit olisivat mahdollisimman hyvin tulkittavia.



Kuvio 6.8 Opettaja 1:n uskomusprofiilit vuosina 1990 ja 1995.

Opettajan 1:n uskomusprofiilit olivat molempina ajankohtina lähes identtiset. Ainoastaan kahden muuttujan kohdalla opettajan kannanotto oli vastakkainen edelliseen ajankohtaan verrattuna. Vuonna 1995 opettajan mielestä oli tarpeen mieltä tietokoneen käyttöä matematiikan opetuksessa (M19), mutta viisi vuotta aikaisemmin hän oli ollut asiasta toista mieltä. Samoin hän oli edelliseen kertaan verrattuna eri mieltä siitä, että suoritusten arvioinnissa tulisi ottaa huomioon käytetyt ratkaisutavat (M3). Kun opettajaa vuoden 1995 opettajakyselyn yhteydessä pyydettiin kertomaan erityisen tärkeitä puolia matematiikan opetuksessaan ja käsitystään opetuksen muuttumisesta muutaman viimeisen vuoden aikana, hän piti tärkeänä täsmällisyyttä merkinnöissä ja siistiä vihkoryötä. Matematiikan opetuksessa ei hänen mielestään ollut juurikaan tapahtunut muutoksia.

Opettaja 2:n uskomusprofiilit olivat edelliseen verrattuna erilaiset ja niissä oli myös enemmän poikkeamakohtia. Tämän opettajan uskomukset ja käsitykset matematiikan opetuksesta eivät olleet yhtä 'varmoja' kuin opettaja 1:n ja useiden muuttujien kohdalla opettaja ei ollut pystynyt ilmaisemaan omaa kantaansa. Muutamassa kohdin opettajan kanta oli viiden vuoden aikana muuttunut aivan vastakkaiseksi. Vuonna 1995 opettaja katsoi aikaisemmasta poiketen, että matemaattisesti täsmällinen kielenkäyttö ei ollut opetuksessa olennaista (M2). Lisäksi hän oli sitä mieltä, että opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon heikosti menestyvät oppilaat (M13). Vuonna 1990 hän oli ollut tämän suhteen eri mieltä. Opettajakyselyn avoimissa vastauksissa opettaja ilmaisi pyrkimyksensä ottaa oppilaat huomioon kannustamalla 'lahjakkaampia' kehittämään kykyjään ja tukemalla heikompia. Hänen mielestään matematiikan opetus oli muuttunut hieman oppilaskeskeisemmäksi 1990-luvun alkuvuosina.

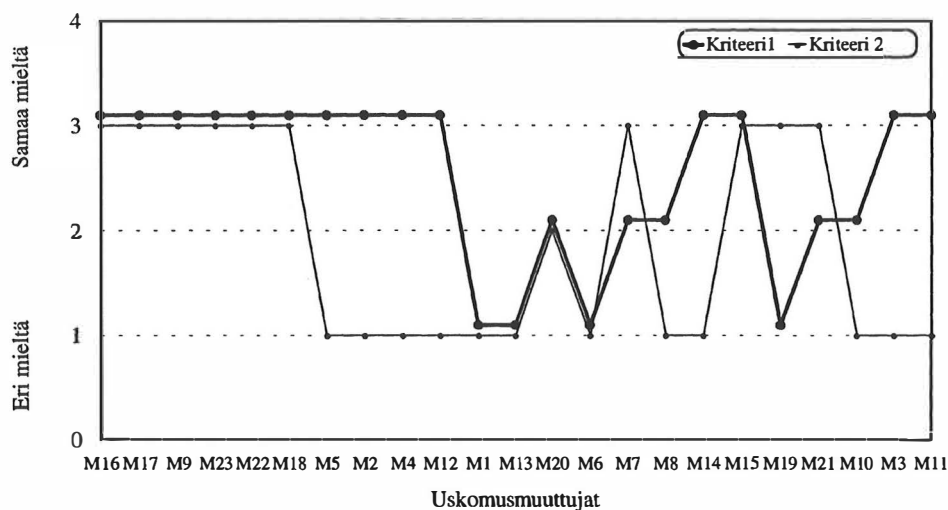


Kuvio 6.9 Opettaja 2:n uskomusprofiilit vuosina 1990 ja 1995.

Kaiken kaikkiaan näiden esimerkiopettajien uskomusprofiilien tarkastelu paljasti julkilausuttujen uskomusten moninaisuuden ja myös niissä tapahtuneet vaihtelut viiden vuoden aikajänteellä. Jotta uskomusprofiileja ja niiden muutoskohtia voitiin tarkastella pidemmälle, tarvittiin 'kriteerejä', joiden suhteen opettajien profiileja oli mahdollista arvioida ja vertailla. Tämän lisäksi kaivattiin syvempää opettajakohtaista tietoa mahdollisten muutoskohtien aitouden varmentamiseksi.

6.4.3 Kriteeriopettajien käyttäminen

Kriteeriopettajien määrittämisessä lähtökohtana pidettiin vuoden 1995 empiiristä aineistoa. Sen perusteella piirsin kaikille 68:lle opettajalle uskomusprofiilit. Tämän jälkeen etsin profiiliaineistosta sellaiset opettajatyypit, jotka olivat uskomuksiltaan mahdollisimman erilaiset, mutta samalla sisällöllisesti ja tulkinnallisesti järkevät. Tulokseksi sain kaksi kriteeriopettajaa, joiden uskomusprofiilit poikkesivat monissa kohdin selvästi toisistaan, mutta joiden profiileihin sisältyi myös yhteisiä aineksia. Tämä ilmenee myös kuviosta 6.10.



Kuvio 6.10 Kriteeriopettajien uskomusprofiilit vuonna 1995.

Uskomustyytit nimettiin *traditionaaliseksi tyyppi*ksi (kriteeri 1) ja *innovatiiviseksi tyyppi*ksi (kriteeri 2). Tässä yhteydessä on korostettava sitä, että ko. uskomustyytit määritettiin opettajien ilmaisemien uskomusten perusteella, eivätkä ne siten olleet pelkästään teoreettisesti muodostettuja ideaalityyppejä. Molemmille uskomustyyteille oli yhteistä ajattelun tärkeyden korostaminen (M16), oppisisältöjen perusteellinen käsittely (M18) sekä erilaisten ratkaisutapojen etsiminen ja käyttäminen (M9, M17, M22). Traditionaalisen tyytin uskomuksissa painottuivat tämän lisäksi laskemisen perustekniikat (M4), runsas rutiiniharjoittelu (M5 ja M14), oikeiden tulosten saaminen (M11) ja matemaattisen eksakti kielenkäyttö (M2). Nämä luonnehdinnat sopivat hyvin yhteen empiristisen oppimis- ja opetusperinteen ominaispiirteitä (ks. ss. 40-43).

Innovatiivisen tyytin uskomuksissa heijastui sitä vastoin vaihtoehdoisen opetuksen lähestymistavan etsiminen. Näissä uskomuksissa oltiin eri mieltä edellä mainittujen perinteisten 'opetusperiaatteiden' keskeisyydestä ja painotettiin enemmän mm. oppilaiden omaa aktiivisuutta (M19), opetuksen konkreettisuutta (M7) ja tietokoneiden hyväksikäyttöä (M21) opetuksen toteutuksessa. Uskomuksissa oli nähtävissä merkkejä konstruktivistisesta oppimisajattelusta, jossa opettajan yhtenä olennaisena tehtävänä on oppilaiden tiedonmuodostuksen tukeminen ja helpottaminen (ks. ss. 36-40).

Näitä kriteeriprofiileja käyttäen analysoitiin nyt tarkemmin, millaisia muutoskohtia tarkastelun kohteena olleiden 15 opettajan uskomusprofiileissa oli ja myös kumpaa tyyppiä uskomukset enemmän muistuttivat. Analysoinnin tulokset opettajien tyyppittelyn osalta on koottu taulukkoon 6.6.

Taulukko 6.6 Opettajien uskomusprofiilien vertailu ja muutokset aikavälillä 1990–95.

Opettajan numero	Lähin uskomustyyppi	Muutoksen suunta
1	traditionaalinen	traditionaalisemmaksi
2	traditionaalinen	ei juuri muutosta
4	traditionaalinen	ei juuri muutosta
5	traditionaalinen	ei juuri muutosta
6	traditionaalinen	ei juuri muutosta
7	traditionaalinen	ei juuri muutosta
9	traditionaalinen	ei juuri muutosta
11	traditionaalinen	ei juuri muutosta
12	traditionaalinen	ei juuri muutosta
14	traditionaalinen	ei juuri muutosta
3	innovatiivinen	innovatiivisemmaksi
8	innovatiivinen	innovatiivisemmaksi
10	innovatiivinen	innovatiivisemmaksi
13	innovatiivinen	innovatiivisemmaksi
15	innovatiivinen	ei juuri muutosta

Tulokset osoittivat ensinnäkin sen, että opettajien ilmaisemat uskomukset poikkesivat yleensä enemmän tai vähemmän kriteeriopettajien uskomuksista. Tästä huolimatta opettajat voitiin kuitenkin luokitella kahteen ‘uskomuskategoriaan’ sen perusteella, kuinka lähellä uskomusprofiilit olivat kriteeriprofileja. Kymmenen opettajan matematiikkauskomukset olivat lähempänä traditionaalisia uskomuksia. Näiden opettajien uskomuksissa aikavälillä 1990–95 tapahtuneet muutokset olivat vähäisiä eikä niissä ollut havaittavissa johdonmukaisuutta. Yhden opettajan uskomuksissa muutosta näytti tapahtuneen entistäkin traditionaalisempaan suuntaan.

Viiden opettajan matematiikkauskomukset voitiin luokitella tyypiltään innovatiivisiksi. Näiden opettajien uskomukset olivat viiden vuoden aikana muuttuneet yleensä hieman innovatiivisempaan suuntaan.

Kokonaisuutena tämän vaiheen tarkastelut osoittivat, että ajan mukana tapahtuvat muutokset opettajien uskomuksissa olivat varsin vähäisiä, kun niitä arvioitiin heidän kyselyvastaustensa ja uskomusprofiilinsa perusteella sekä verrattiin kriteeriopettajien uskomuksiin. Edelleen askarruttavaksi kysymykseksi jäi kuitenkin se, missä määrin opettajien vastaukset uskomuskyselyihin ilmensivät heidän opetusajatteluaan ja 'todellisia' matematiikkauskomuksiaan. Tämän selvittämiseksi käytettiin hyväksi neljältä opettajalta hankittua haastatteluaineistoa ja analysoitiin sen avulla näiden opettajien ajatuksia ja käsityksiä matematiikan oppimisesta ja opettamisesta.

6.4.4 Haastattelujen välittämänä kuva opettajien matematiikkauskomuksista

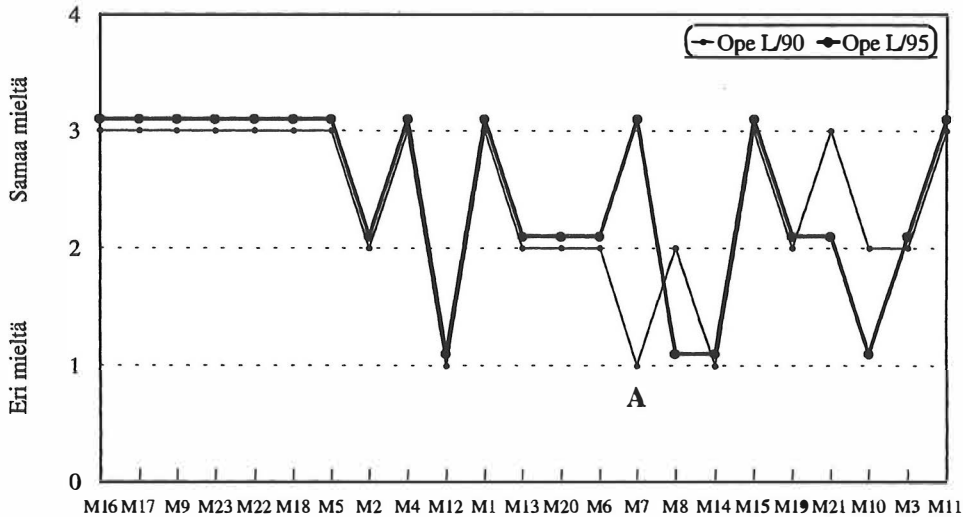
Haastateltavat opettajat valittiin molempiin tiedonkeruuvaiheisiin osallistuneista opettajista käyttäen kahta perustetta. Mukaan otettiin yksi molempien uskomustyyppien (traditionaalinen vs. innovatiivinen) edustaja sekä yksi molempien sukupuolten edustaja. Seuraavassa näiden neljän opettajan uskomuksia ja opetusajattelua kuvataan yhdistämällä haastattelujen ja uskomusprofiilien välittämä informaatio toisiinsa. Kuvauksessa käytetään runsaasti suoria lainauksia opettajien haastatteluista.

Opettaja L

Opettaja L oli naisopettaja ja opetuskokemusta hänellä oli takanaan 31 vuotta. Koulussa hänellä oli käytettävissään oma matematiikkaluokka, jossa oli mahdollista säilyttää erilaisia toimintamateriaaleja ja pitää esillä myös oppilaiden töitä. Uskomusprofiilinsa perusteella opettaja L oli lähempänä traditionaalista tyyppiä (ks. kuvio 6.11).

Kuviosta nähdään, että opettaja L:n uskomusprofiilit olivat hyvin samanlaiset vuosina 1990 ja 1995. Tämän perusteella oli ajateltavissa, että näin kokeneen opettajan uskomukset olivat saaneet jo hyvin vakiintuneen muodon. Hänellä olikin monia opetuksellisia periaatteita, jotka nousivat haastattelun aikana usein esille. Esimerkiksi hän painotti toistuvasti matematiikan tärkeyttä yhteiskunnan kannalta ja arkipäivän tilanteiden käsittelyä opetuksessa (vrt. matematiikan kulttuurisen merkityksen korostaminen, M23):

Mun mielestä vanhemmat kumminkin arvostaa matematiikkaa... Suurella osalla vanhempia on sellainen käsitys, että matematiikkaa tarvitaan ja sitä pitäisi hyvin opiskella. Enemmän tietysti täytyisi olla kaikenlaista yhteyttä tonne yhteiskuntaan. Näihin opetussuunnitelmiin nyt on otettu juuri sitä. Tämän yhden tunnin puitteissa pyritään aina liittämään ajankohtaiseen, että milloin on alennusmyynnit, vaalit, kilpailuja, uusi euroraha...Niin, että oppilaat näkisi missä sitä tarvitaan.



Kuvio 6.11 Opettaja L:n uskomusprofiilit vuosina 1990 ja 1995.

Opettaja L piti omaa ajatteluaan vanhanaikaisena tuoden sen esille useassakin kohdin, esimerkiksi:

Minä olen näin vanhanaikainen, kun minä ajattelen, että oppilas ei itse pysty selvittämään jotakin asiaa. Sille saattaa tulla vaikka minkälaisia käsityksiä. Se täytyy jossain vaiheessa ruotia yhdessä, että mitä varten sinä ajattelet näin ja näin, ja sitten hakea siitä ne virhekohdat.

Vertaamalla opettaja L:n eri vuosien uskomusprofileja keskenään, havaittiin niissä yksi suurempi poikkeamakohta (kohta A). Tämä uskomusväittämä (M7) käsitteli konkreettisen materiaalin käyttämistä opetuksessa. Vuonna 1995 opettaja pitikin sitä hyvin tärkeänä opetuksellisenä keinona toisin kuin viisi vuotta aikaisemmin:

Jos minä piirrän sen, niin tottakai oppilas ymmärtää. Mutta ei se tahdo siltikään mennä sellaiseksi, että hän itse oppisi sen piirtämään. Suuren osan peruskoulun laskuista saa piirtämällä selvitettyksi. Sitten me olemme koittaneet tällaista mittaamista, joskus kappaleitten tekemistä... Ne itse näkee ja erehtyy siinä, että 'ai niin, mulla jäi kansi pois tästä'.

Opettaja L:n ja traditionaalisen kriteeriopettajan uskomusprofiilit poikkesivat muutamassa kohdin toisistaan. Yksi uskomusväittämästä koski sitä, tulisiko oppilaiden välttämättä ymmärtää kaikki opetuksen menettelyt ja perustelut (M12). Opettaja L:n mielestä oppilaiden tarvitsee ymmärtää ja opettajan on autettava heitä siinä:

Jos oppilas ei ymmärrä jollakin tavalla, niin minä aika hyvin keksin jonkun muun tavan näyttää kappaleesta tai piirroksesta tai mittaamalla... Minä luulen, että mulla on ollut sellainen matematiikan taito, että minä pystyn kuvittelemaan tilanteen joksikin piirrokseksi... Jos joku oppilas sanoo väärin, niin minä kysyn, että miksi näin. Kyselen hyvinkin pitkään ja joskus mennään tarkoituksella aivan vikasuuntaan. Paras oli se, kun joku oppilas sanoi, ettei hän ymmärrä. Minä kysyin ja kysyin. Sitten se tuli itsekin umpikujaan. Sitten nauroin minä vuorostani ja sanoin, että 'minä tiesin tämän, mutta hyvä kun tulee selväksi'.

Toisen poikkeavan uskomusväittämän kohdalla oli kysymys rutiinitehtävien runsaasta käytöstä opetuksessa (M14) ja tällaista tapaa opettaja L ei suosinut:

Kun ne (oppilaat) saa laskimet, niin olen käyttänyt paljon sitä, että annan niille tähän kouluympäristöön liittyviä tehtäviä. Ne alkaa laskea oppikirjojen tai luokan verhojen hintoja. Ne itse mittailee ja tekee. Sitten ysiluokalla, kun jo osataan trigonometriset funktiot, niin selvitetään vaikka vammaisille tarkoitettun kulkuluiskan tekemistä. Se ei saa olla 20 astetta korkeampi. Ne käyvät sitten tuosta nuo luiskat mittailemassa... Jotenkin saa sen tähän yhteiskuntaan sidotuksi.

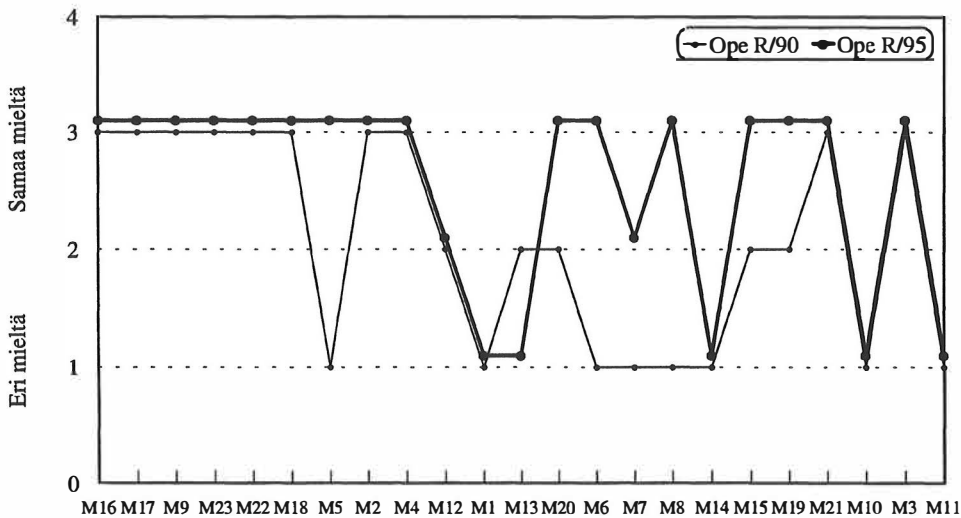
Opettaja L:n osalta voidaan yhteenvetona todeta, että hänen opetusajattelunsa ja matematiikkauskomuksensa eivät olleet lainkaan niin traditionaalisia kuin mitä hänen uskomusprofiilinsa ensiksi antoi ymmärtää. Itse asiassa opettajan uskomukset olivat yhdistelmä traditionaalisia ja innovatiivisia uskomuksia, kuten ne useimmiten ovatkin. Haastatteluaineistosta välittyi niin ikään selkeästi, että opettajalla oli hyvin varmat uskomukset matematiikan oppimisesta ja opetuksesta ja että hän myös käytännössä toimi niiden mukaisesti. Haastattelu vahvisti myös sen, että opettajan uskomusten muuttuminen oli ollut vähäistä.

Opettaja R

Opettaja R oli miesopettaja ja hänellä oli takanaan 21 vuoden opettajakokemus maaseutu-kaupungissa. Hänenkin uskomusprofiilinsa olivat lähellä traditionaalista tyyppiä (ks. kuvio 6.12).

Matematiikan oppimista koskeva perusajattelu (ks. M16, M17 ja M9) oli opettaja R:llä hyvin 'moderni' ja oppilaslähtöinen:

Kyllä minusta se oppiminen tapahtuu kaikista parhaiten silloin kun se asia jollain lailla ensin konkretisoidaan ja yritetään ottaa siitä oppilaille tutusta elävästä ympäristöstä joku tällainen tilanne. Jota sitten aletaan miettimään tämän asian kannalta. Ei annettaisi valmista ratkaisua, että se on näin... Se on vaikeinta siinä hommassa, että se oivallus tulisi sieltä oppilaan päästä. Kun sille annetaan palikat tähän pöydälle tavallaan näin symbolisesti. Siinä sitten tulee se ahaa-elämys, että näinhän se on. Jos minä laitan ne näin, niin nythän se toimii... Sitten ne (oppilaat) vaatii myöskin tällaista tietynlaista hyväksyntää.



Kuvio 6.12 Opettajan R uskomusprofiilit vuosina 1990 ja 1995.

Kuvatessaan oman matematiikan opetuksensa käytännön etenemistä opettaja R:n perinteiset uskomukset nousivat kuitenkin vahvemmin esiin:

Minä olen siinä tällainen vanhanaikainen, että minä näen matematiikan aika opettajakeskeisenä asiana... Siinä on ensinnäkin tietenkin kotitehtävät, joita on annettu. Ne lasketaan taululle tai jos on ihan simpeleitä niin ei. Kyllä minä aina otan opettajajohtoisesti sen johdattelun seuraavaan asiaan. Se käsitellään yhdessä. Pysin johdattelemaan sen asian siten, että ei anneta valmiiksi pureskeltua ratkaisua. Vaan se olisi tällaista johdattelevaa opetuskeskustelutyypistä. Se panisi ne itse miettimään ja ajattelemaan...Ei se aina näin mene. Ei sitä aina osaa eikä jaksa.

Opettaja R pani voimakkaasti painoa matematiikan perusvalmiuksille (ks. M2 ja M4) ja tämä heijastui myös soveltamisen (M15) ja perusvalmiuksien välisessä suhteessa:

En tiedä, olenko minä sitten ihan vanhakantainen tai muu. Sellaisia yläkäsitteitä ei synny ihmisessä ei millään, jos sillä ei ole sellaista rakennuspohjaa. Täytyy tietty määrä olla palikoita, että se pystyy niitä yhdistelemään. Ei ne synny tällaiset kokonaisuudet, jos ne ei nojaa mihinkään... Täytyy sitä halveksittua nippeliäkin olla.

Kyllä ne tietenkin ne perusvalmiudet... Ei voi soveltaa, jos ei niitä taida. Kyllä sitten kun ne taidot on. Kyllä sitä mahdollisimman paljon sinne sovelluksen puolelle pitäisi mennä. Nähdä se matematiikka myös välineenä. Myöskin niin, että se siis joskus oppilaassa herättää suurta hämmästyä ja ne on silmät ymmyrkäänä.

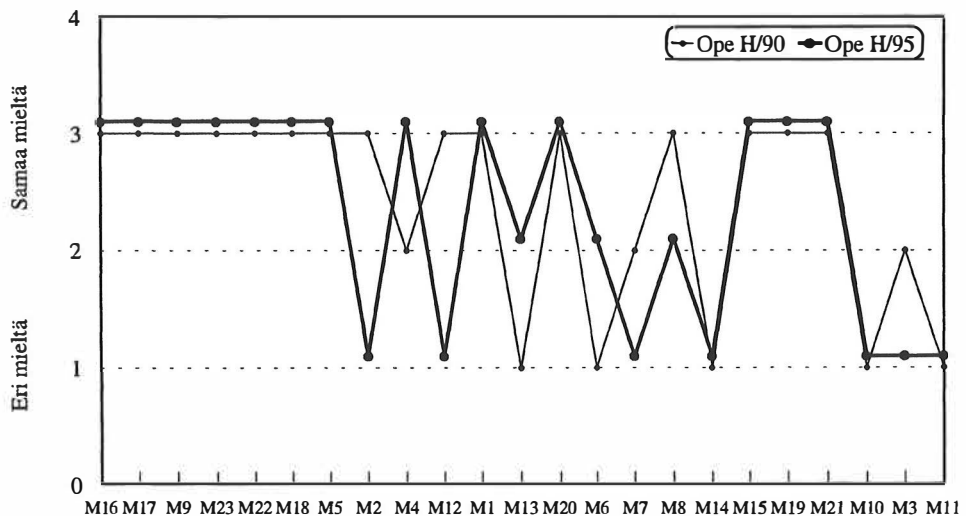
Uskomusprofiileista näkyy, että aikavälillä 1990–95 muutamien väittämien kohdalla (M5 ja M8) muuttumista oli tapahtunut traditionaaliseen suuntaan. Lisäksi vuonna 1995 opettaja R otti selkeämmin kantaa uskomusväittämiin kuin vuonna 1990, mikä on saattanut olla seurausta opettajan varmuuden lisääntymisestä:

Enemmän minä olen varmasti päässyt oppikirjasta eroon. On tullut sellaista varmuutta, että minä voin tehdä näin ja mulla on oikeus tehdä näin. Olen nähnyt sen myöskin niin, että tähän on mahdollisuuksia enemmän antava. Nuorena ei uskaltanut sillä lailla kokeilla kaikkia hommia. Tähän on loppujen lopuksi niin yksilöllinen ammatti.

Opettaja R:ää voi kaiken kaikkiaan pitää matematiikkauskomustensa ja opetusnäemyksensä puolesta varsin selkeänä traditionaalisenä tyyppinä. Myös hänen kohdallaan haastatteluaineisto laajensi ja syvensi käsitystä hänen uskomustensa luonteesta, eivätkä ne siten olleet aivan niin traditionaaliset kuin miltä ensin näytti. Tässä tapauksessa uskomusprofiilin antama kuva opettajan uskomuksista oli kuitenkin tarkempi kuin opettaja L:n kohdalla.

Opettaja H

Opettaja H oli nainen ja toimi opettajana suuren kaupungin yläasteella. Opettajakokemusta hänellä oli jo kaikkiaan 26 vuotta. Hänen uskomusprofiilinsa olivat lähempänä innovatiivista tyyppiä, joskin matematiikkauskomuksissa oli mukana myös joitakin traditionaalisia piirteitä (ks. kuvio 6.13).



Kuvio 6.13 Opettaja H:n uskomusprofiilit vuosina 1990 ja 1995.

Matematiikan oppimisen suhteen opettaja H:n näkemykset olivat varsin joustavat, mikä ilmeni siinä, että vuoden 1995 uskomusprofiilissa painottuivat innovatiivisten ominaispiirteiden (M15, M19, M12) ohella myös traditionaaliset ainekset (M5, M4):

Minä olen siinä kyllä aika vanhoillinen. Mun mielestä ei ole niin väliä, miten sitä opitaan. Voi olla ulkoaluku, jonkun säännön ulkoalukeminen. Ensinnä oppii sen ja sitten vasta hoksaa. On asioita, joita ei voi hoksata tai niin vaikeita asioita, että niitä ei tajua kovin hyvin... Ei se välttämättä ole aina niin, että oivallus tulisi ensin. Sen voi opetella ulkoa. Jos sen kunnolla oppii niin se menee sille tasolle, että tietää mistä on kysymys ja osaa sen ulkoa.

Keskeisiä tekijöitä oppimisen vaikeuteen olivat opettaja H:n mielestä oppilaiden passiivinen rooli, lyhytjännitteisyys ja heidän kielteiset asenteensa matematiikkaa kohtaan:

... oppimisessa on ne ongelmat. Mun mielestä ne (oppilaat) ei niin välitä tehdä töitä sillä tavalla. Koska eihän jotain asiaa, käsitteitä ja sitten niitä sääntöjä opi käyttämään, jos ei tee töitä. Siinä mielessä on oppilaat muuttuneet hirveästi huonompaan suuntaan... Ainakin mitä tulee seiskalle, niin kyllä siellä on valmiina jo niin vastahankaiset asenteet. Niitten murtaminen on isompi työ kuin opettaminen... Ne asenteet on aika pahat. Kuusi vuotta on pitkä aika oppia sellaiset asenteet, joita ei murra mikään.

Opettaja H piti paljon matematiikan opettamisesta ja käytti mieluiten oppilaslähtöistä työskentelytapaa (ks. M12):

Kaikkein mieluummin minä varmasti toimin vuorovaikutuksessa oppilaitten kanssa... Yritän saada oppilailta mahdollisimman paljon. Kyllähän minä tietenkin johdattelen sitä. Sitten minä yritän tehdä jonkun asian kiinnostavaksi sillä, mitä tiedän historiaa. Minulla on tapana sanoa, että ei tätä teidän kiusaksi ole keksitty. Kyllä se on tarpeeseen kehitelty... Kyllä minä yritän ne panna väliin tekemään itsekseenkin tutkimuksia.

Opettaja H katsoi, että hänen opetustavassaan oli tapahtunut tiettyjä muutoksia viimeisen kymmenen vuoden aikana. Vastaavalla tavalla opettajan uskomusprofiileissa oli useitakin muutoskohtia, joskaan niissä ei ollut havaittavissa selkeää johdonmukaisuutta:

Se on muuttunut, että yrittää kehitellä aina vaan yksinkertaisempia tapoja esittää, opettaa jonkun asian... On oppinut ymmärtämään, että jos ne (oppilaat) antaa väärän vastauksen, niin melkein tietää, miten ne ovat ajatelleet. Sitä minä en kyllä pysty kovin hyvin kuvittelemaan, että miten ne ajattelee silloin, kun ne jotakin asiaa yrittävät ja opiskelevat.

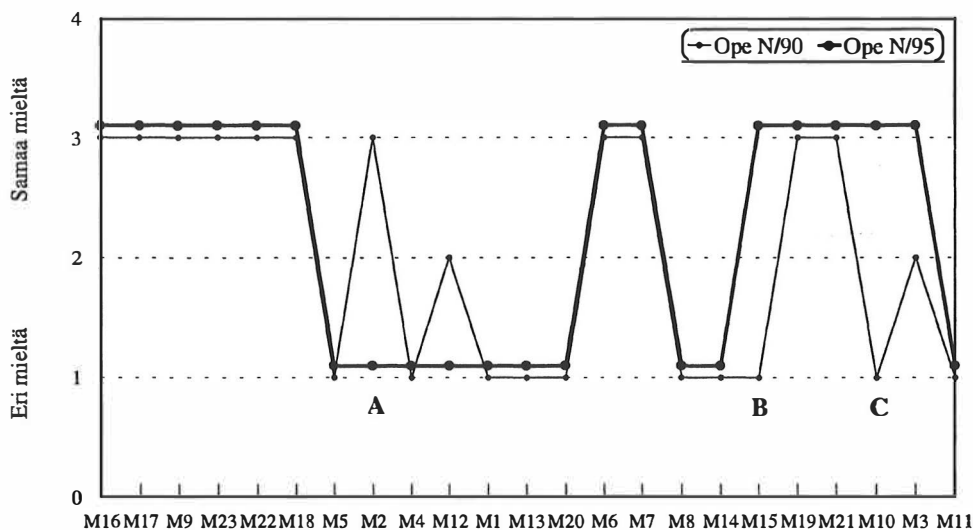
Kun opettaja H:ta pyydettiin arvioimaan omaa opetustapaansa traditionaalinen - innovatiivinen asteikolla, niin hän sijoitti itsensä johonkin keskivälille:

No en minä täysin perinteinen. Sanotaan, että mulla on jalat maassa aika tiukasti. Tällä hetkellä ehkä jossakin siellä puolessa välissä. Haluaisi ehkä enemmän kokeilla, mutta rohkeutta puuttuu. Toisaalta sitten taas se, että jos lähtee kokeilemaan jotain uusia, niin ei voi kauhean paljon mennä huonommaksi. Aina pitäisi uskaltaa.

Myös opettaja H:n kohdalla haastatteluaineisto oli varsin hyvin sopusoinnussa uskomusprofiilien välittämän kuvan kanssa, mutta samalla se täydensi sitä. Hänen opetusajattelustaan välittyi tietynlainen joustavuus siten, että hän pyrki etsimään vaihtoehtoisia ja oppilaita kiinnostavia lähestymistapoja opetukseensa. Toisaalta myös matematiikan opetuksen perinne välittyi uskomuksista ja se ilmeni mm. ulkoaoppimisen esiin nostamisena.

Opettaja N

Opettaja N oli miesopettaja ja työskenteli matematiikan opettajana pienessä maaseutukaupungissa. Hänellekin oli kertynyt opettajakokemusta jo 24 vuoden ajalta. Hänen matematiikkauskomuksensa olivat lähellä innovatiivista tyyppiä (ks. kuvio 6.14).



Kuvio 6.14 Opettaja N:n uskomusprofiilit vuosina 1990 ja 1995.

Hyvin leimallista opettaja N:n näkemyksille matematiikan opiskelusta oli ajattelun tärkeyden (M16) korostaminen:

Aivon käyttö on tunnetusti rasittavaa ja raskasta. Miten saa oppilaat sillä tavalla asennoitumaan, että ne (tehtävät) on mukavia ratkaista. Ne saisi siitä sellaista ratkaisun iloa, kun ne ratkoo niitä. Suurin ongelma on juuri se, että saa ne yleensä mieltimään... Kyllä minä olisin erittäin varovainen sen suhteen, että jos lisäaikaa saadaan, niin sitten laajennetaan sitä sisältöaluetta. Minä en kyllä siinä näkisi mitään järkeä. Vaan, että sitä matemaattista ajattelua voitaisiin parantaa ja kehittää. Ehkä innostaa jatkamaan niillä aloilla missä tarvitaan matematiikkaa.

Opettaja N:llä oli opetusajattelussaan tiettyjä periaatteita, joiden kautta myös uskomusprofiilien muutoskohdat (A, B ja C) tulevat helpommin ymmärretyiksi:

Joitakin periaatteita on. Yksi on se, että minä ainakin nykyään pyrin siihen, että minä en luennoi. Yksinpuhelua harrastan sen viisi minuuttia tunnissa, korkeintaan kymmenen. Minä otan yleensä jonkun sellaisen mitä minä pidän tärkeänä, joka on sellainen... että nyt on joku ovi kiinni, lukossa. Se voi olla pieni asia ja yleensä onkin aika pieni juttu... Toinen, jota voisi sanoa periaatteeksi, että minä en kovin mielelläni heti hyökkää oppilasta neuvomaan. Jos oppilas kysyy jostain tehtävästä, että miten tämä ratkaistaan, minä korkeintaan annan jonkun osavinkin tai siis potkaisen pikkuisen, että jouduttaa siltä kannalta... Sitten annan ja suosittelen sitä, että ne neuvovat toisiaan. Se on ihan suositeltavaa ja jopa liikkuvat luokassa.

Tällaisessa lähestymistavassa esimerkiksi järjestyksenpidolla (M10) oli selkeä merkitys opetuksen kokonaisuuden kannalta: 15 minuutin hiljainen osuus oppitunnista oli omistettu oppilaiden ajattelulle ja keskittymiselle:

Matematiikkahan on mun mielestä kyllä sitä, että siinä pitäisi olla n. 10–15 minuuttia tunnista vähintäänkin sellaista, että on hiljaista suurin piirtein. Minä tiedän, että kaikki opettajat ei tätä allekirjoita. Mulla on tällainen tapa, että olen pyrkinyt siihen, että tällainen hiljainen hetki on jolloin voi miettiä... Silloin mietitään.

Opettaja N oli sitä mieltä, että hänen opetuksessaan oli tapahtunut muuttumista vielä viimeisen 10 vuoden aikana. Hän ei ollut enää niin sidottu oppikirjaan kuin aikaisemmin ja ongelmakeskeiseen suuntaan eteneminen (ks. M15) tuntui kiinnostavan:

... tuo oppikirjan auktoriteetti ei ole enää sellainen. Se on tärkeä, mutta minä uskallan nyt vaikka heittää seinään oppikirjan, jos se tuntuu huonolta. Uskallan ja teenkin sitä, että käännellään reilusti (sivuja) yli, jos siltä näyttää. Otetaan ylimääräistä ja muuta... Kyllä minä mielelläni olisin halukas menemään enemmän siihen ongelmakeskeiseen lähestymistapaan. Siihen, että tehtävät oppikirjoissa kehittyisi edelleenkin siihen suuntaan, että sieltä turhaa karsittaisiin pois. Tarkemmin vielä

mietittäisiin, että mistä on todella apua matemaattisen ajattelun kehitykseen. Ja sitten käytännön matematiikan taitoihin ja mitä tarvitaan elämässä.

Arvioidessaan omaa matematiikan opetustaan opettaja N oli sitä mieltä, että se oli enimmäkseen perinteistä ja vain ehkä kolmasosaltaan uutta hakevaa, innovatiivista:

Kyllä se täytyy ihan rehellisesti myöntää, että varmaan on valtaosa sitä perinteistä. Kyllä minä väitän, että siellä se 20 % varmaan kuitenkin on, että yritän hakea jotain uutta. No ehkä 30 %. Kyllä se jollakin tavalla kuitenkin niin rutinoittaa tuo, kun on yli 20 vuotta opettajana ollut... Tämä on se paras, että kun minä olen kokeillut niin monia eri vaihtoehtoja.

Opettaja N vastasi sekä uskomusprofiiliensa että haastattelussa esiin tuomiensa seikkojen puolesta kaikkein parhaiten uskomuksiltaan innovatiivista tyyppiä. Haastattelussa nousi vahvasti esille matematiikan opiskelun oppilaslähtöisyys: ajattelun merkitys, asioiden omaehtoinen pohtiminen, opiskelutehtävien mielekkyys ja opettajan ohjaava rooli. Haastatteluaineistosta löytyi myös tulkintaa ja selitystä profiilien kuvaamille uskomusmuutoksille.

6.4.5 Yhteenvetoa

Luvussa 6.4 on tarkasteltu aineenopettajien matematiikkauskomusten muuttumista aikavälillä 1990–95. Tarkastelut osoittivat, että opettajien matematiikkauskomukset olivat hyvin vakaita ja niissä tapahtuneet muutokset olivat vähäisiä. Molemmissa tutkimusvaiheissa mukana olleita opettajia (15 kpl) voitiin lisäksi kriteeriopettajien määrittelyn avulla vertailla traditionaalsiin tai innovatiivisiin uskomustyypeihin. Yleensä opettajien uskomukset olivat moniulotteisia sisältäen eri suhteissa aineksia molemmista uskomustyypeistä.

Neljän opettajan haastattelujen välittämä informaatio antoi laajemman ja paremmin ymmärrettävän kuvan opettajien matematiikkauskomuksista ja myös niiden välittymisestä opettajan opetustyöhön. Haastattelut antoivat myös lisätulkintaa uskomusprofiilien muutoksille tutkimusajankohtien välillä. Kyseiset neljä opettajaa sijoittuivat uskomustensa puolesta traditionaalisuus – innovatiivisuus dimensiolle hieman eri tavalla kuin pelkästään uskomusprofiileja käytettäessä. Yksi opettaja oli lähellä traditionaalista tyyppiä, kaksi opettajista oli traditionaalisen ja innovatiivisen tyyppin yhdistelmiä ja yksi opettaja on lähinnä innovatiivista tyyppiä. Haastattelujen ja uskomuskyselyjen välittämän tiedon välillä ei juurikaan havaittu ristiriitaisuuksia.

Haastattelut paljastivat, että opettajat olivat vaatimattomia. Heidän oli hyvin vaikeaa nähdä itseään uusien ideoiden toteuttajina. Pikemminkin opettajat pyrkivät painottamaan oman opetusajattelunsa vanhanaikaisuutta ja perinteisyyttä silloinkin kun he kokeilivat omalotteisesti uusia toimintamalleja.

6.5 Uskomusten kytkennöistä matematiikan opetuksen toteuttamiseen

Aiempi uskomustutkimus viittaa selkeästi siihen, että opettajien matematiikkauskomuksilla on olennainen merkitys sille, millaiseksi opettajien opetuksellinen toiminta muotoutuu (luvut 4.3 ja 4.5.1). Toisaalta tutkimuksissa on havaittu myös yhteensopimattomuutta ja ristiriitaisuutta uskomusten ja opetuskäytäntöjen välillä. Tämä osoittaa, että uskomusten ja opetuksen toteutuksen väliset kytkennät ovat kompleksiset, eivätkä opettajien uskomukset ole suorassa syy–seuraus-suhteessa heidän opetuksellisiin käytäntöihinsä.

Tässä tutkimuksessa tarkastelun kohteena oli ensisijaisesti opettajakyselyjen avulla saatu kuva opetuksen toteuttamistavoista. Kyselyissä opettajat vastasivat sellaisiin matematiikan opetuksen toteuttamista koskeviin kysymyksiin kuten esimerkiksi, millä tavoin opetus on järjestetty, millaisia painotuksia heillä on opetuksessaan ja millaisia menettelytapoja he opetuksessaan käyttävät. Opettajahaastattelujen avulla pyrittiin lisäksi hankkimaan syvempää tietoa aineenopettajien uskomusten välittymisestä heidän opetustoimintansa. Kyselyjen ja haastattelujen välityksellä kerätty tieto opettajien toiminnasta oppituntitilanteissa on kuitenkin aina puutteellista verrattuna opetuksen havainnoinnin avulla saatavaan tietoon. Tästä johtuen seuraavassa puhutaankin tarkoituksellisesti opetuksen toteuttamisesta eikä opetuksen käytännöstä.

Opettajien uskomusten ja opetuksen toteuttamistapojen välisten yhteyksien tarkastelussa otettiin lähtökohdaksi uskomuserojen analysoinnin tulokset (luku 6.3.2). Tarkastelun kohteiksi valittiin ne opettajaryhmät, joissa matematiikkauskomukset poikkesivat toisistaan kaikkein eniten. Näiden ryhmien osalta analysoitiin sitä, millaisia opetuksellisia ratkaisuja opettajat ilmoittivat käyttäneensä ja missä määrin opettajien käyttämät ratkaisut ja menettelyt poikkesivat toisistaan.

Opettajakyselyissä oli opettajilta kysytty *opetuksen järjestelyihin, painotuksiin ja toteutustapoihin* liittyvää tietoa. Opetuksen organisointia kuvaavia muuttujia olivat mm. *oppituntien valmisteluun käytetty aika, oppikirjan käyttö opetuksessa ja kokeiden käytön useus*. Opetuksen painopisteitä koskevat muuttujat liittyivät siihen, *missä määrin opettajat panivat opetuksessaan painoa laskutaidolle, soveltamiselle sekä ajattelun ja ongelmanratkaisun kehittämiseksi*. Opetuksen toteutusta eritteleviä muuttujia olivat puolestaan *erilaisten työmuotojen (mm. päässä-lasku, opettajan esittävä opetus, oppilaiden itsekseen laskeminen, pari- tai ryhmätö) käyttäminen sekä kotitehtävien määrä ja luonne*.

6.5.1 Uskomusten heijastuminen luokanopettajien toimintatapoihin

Luokanopettajien aineistossa oli kaksi ryhmää, kokeneiden opettajien ryhmä ja nuorempien opettajien ryhmä, joiden matematiikkauskomuksissa ilmeni selviä eroavuuksia (kuvio 6.4, s. 134). Kokeneiden opettajien (ryhmä 4, N=15) uskomuksissa tulivat painokkaasti esille

laskemisen perustaidot, runsas rutiiniharjoittelu, oikeiden vastausten saaminen tehtävistä ja järjestyksen ylläpitäminen luokassa. Sitä vastoin nuoremmilla opettajilla (ryhmä 2, N=17) nämä uskomukset olivat selvästi heikommalla ja heillä nousivat tärkeään asemaan oppijakeskeisyyteen ja vuorovaikutukseen liittyvät uskomukset.

Matematiikan opetuksen luonnetta kuvaavien muuttujien jakautumia vertailtiin opettajaryhmittäin ristiintaulukointien avulla. Vaikka monien muuttujien kohdalla tapausten määrät olivat varsin pieniä, löydettiin joitakin kiinnostavia (myös tilastollisesti merkitseviä) eroja opettajaryhmien toiminnassa. Näitä eroja on kuvattu taulukossa 6.7.

Taulukko 6.7 Uskomuksiltaan erilaisten luokanopettajaryhmien (ryhmät 2 ja 4) erot matematiikan opetuksen toimintamuotojen suhteen.

Toimintamuoto	Ryhmä 2	Ryhmä 4	Erojen merkitsevyys
Summatiivisten kokeiden käyttö		enemmän	n.s.
Formatiivisten kokeiden käyttö	enemmän		n.s.
Laskutaidon korostaminen		enemmän	**
Soveltamisen ja ajattelun taitojen korostaminen		yhtä paljon	n.s.
Opettajan esittävä opetus		enemmän	*
Pari- ja ryhmätyön käyttäminen	enemmän		n.s.

* $p < .05$; ** $p < .01$; *** $p < .001$

Opetuksen järjestämistä koskevissa seikoissa ei ollut juurikaan eroja ryhmien välillä. Esimerkiksi kokeiden käyttöön liittyen oli havaittavissa, että ryhmän 2 opettajat käyttivät harvemmin summatiivisiä kokeita, mutta useammin formatiivisiä kokeita kuin ryhmän 4 opettajat.

Opetuksen painotuksissa ja työmuodoissa erot olivat selkeämpiä. Ryhmän 4 opettajat ilmoittivat painottavansa toistuvasti laskutaidon merkitystä opetuksessaan. Sen sijaan ryhmän 2 opettajilla tämä puoli oli harvemmin esillä. Molemmat ryhmät pitivät kuitenkin soveltamista ja ajattelun taitojen kehittämistä aivan yhtä painokkaasti esillä. Tähän yhteyteen liittyvä mielenkiintoinen havainto oli se, että kaikki ryhmän 4 opettajat ilmoittivat antavansa oppilailleen säännöllisesti kotitehtäviä, jotka ovat sekä tunnilla käsiteltyjen tehtävien kaltaisia että opetetun asian soveltamista. Tämä on toki mahdollista, jos kotitehtäviä annetaan paljon, mutta yhtä lailla tässä saattaa olla kysymys siitä, että opettajat halusivat näin ilmentää ajankohtaisen puolen (matematiikan soveltaminen) näkymistä opetuksessaan.

Opettajaryhmät erosivat toisistaan myös opetussisältöjen lähestymistavan suhteen. Kaikki ryhmän 4 opettajat käyttivät säännöllisesti opettajajohtoista työskentelyä, kun taas ryhmän 2 opettajat menettelivät näin harvemmin ja käyttivät useammin esimerkiksi pari- tai ryhmätöitä. Muissa opetustapaa kuvaavissa muuttujissa ryhmien opettajat toimivat hyvin samalla tavoin.

Näiden tuloshavaintojen perusteella voidaan todeta, että luokanopettajien matematiikkauskomukset heijastuivat muutamissa kohdin heidän opetustoimintaansa. Vertailtavina olleiden kahden opettajaryhmän (kokeneet opettajat vs. nuoremmat opettajat) uskomukset todentuivat opetuksen laskutaitopainotteisuuden, opettajajohtoisuuden ja myös kokeiden käytön kohdalla. Useimmissa opetuksen toteutusta kuvaavissa muuttujissa ryhmien välillä ei ollut eroja.

6.5.2 Uskomusten rooli aineenopettajien opetustoiminnassa

Vuonna 1990 oli aineenopettajien joukossa oli neljä uskomustensa puolesta erilaista ryhmää, joskin erot olivat verraten vähäiset. Kaksi näistä opettajaryhmistä poikkesi toisistaan kaikkien muiden uskomusfaktoreiden paitsi suorituskeskeisyys-uskomusten suhteen (kuvio 6.5, s. 137). Pienryhmän 2 (N=6) opettajilla erityisen vahvoja olivat harjoittelukeskeisyys, oppijakeskeisyys- ja yksilöllisyys-uskomukset. Myös käytännönläheisyys-uskomukset ja oppimisen ongelmiin liittyvät uskomukset olivat muita ryhmiä vahvemmat. Sen sijaan ryhmän 3 (N=26) opettajien uskomukset olivat yksilöllisyys-uskomuksia lukuun ottamatta heikommät kuin muissa ryhmissä.

Taulukko 6.8 Uskomuksiltaan erilaisten aineenopettajaryhmien (ryhmät 2 ja 3) erot matematiikan opetuksen toimintamuotojen suhteen vuonna 1990.

Toimintamuoto	Ryhmä 2	Ryhmä 3	Erojen merkitsevyys
Yhteinen keskustelu tehtävistä ja niiden ratkaisusta	enemmän		***
Opitun asian soveltamista korostavien kotitehtävien käyttäminen	enemmän		*

* $p < .05$; ** $p < .01$; *** $p < .001$

Matematiikan opetustoimintaa kuvaavien muuttujien analysointi näiden ryhmien kesken osoitti, että ryhmien opettajat toimivat pääosin hyvin samalla tavoin (taulukko 6.8). Kuitenkin parissa muuttujassa ilmeni sellaista eroavuutta, joka oli yhdenmukaista opettajien uskomusrakenteiden kanssa. Ensinnäkin ryhmän 2 opettajat ilmoittivat käyttävänsä useasti

opetuksessaan tapaa, jossa opettaja ja oppilaat yhdessä keskustelivat matematiikan tehtävistä ja niiden ratkaisuista. Ryhmän 3 opettajat käyttivät tällaista vain harvoin. Toiseksi ryhmän 2 opettajat antoivat säännöllisesti oppilailleen opetetun asian soveltamista edellyttäviä kotitehtäviä, mikä ryhmässä 3 oli puolestaan harvemmin tapahtuvaa. Näitä tuloksia voidaan pitää viitteellisenä osoituksena ryhmän 2 opettajien vahvemmista oppijakeskeisyyden ja käytännönläheisyyden uskomuksista.

Vuonna 1995 aineenopettajien joukossa oli niinkään neljä uskomuksiltaan erilaista ryhmää ja näistä kaksi oli erityisen kiinnostavaa (kuviot 6.6, s. 138). Ryhmän 3 (N=7) opettajien uskomukset olivat kaksijakoiset. Opettajilla oli muita vahvemmat oppijakeskeisyys- ja konkreettisuus-uskomukset sekä hyvää oppimista ja ajattelun kehittämistä korostavat uskomukset, mutta kaikkein heikoimmat harjoittelukeskeisyys- ja yksilöllisyys-uskomukset sekä esitys- ja työtapauskomukset. Ryhmän 4 (N=12) opettajilla olivat puolestaan harjoittelukeskeisyys- ja yksilöllisyys-uskomukset sitä vastoin muita ryhmiä vahvemmat ja taas oppijakeskeisyys- ja konkreettisuus-uskomukset kaikkein heikoimmat.

Opetusmuuttujien analysoinnin tulokset muistuttivat hyvin paljon vuoden 1990 tuloksia (taulukko 6.9). Useimmissa kohdin molempien ryhmien opettajat ilmoittivat toimivansa samalla tavoin. Kuitenkin kahden muuttujan kohdalla opettajien uskomusten ja heidän opetusmenettelyjensä johdonmukaisuus ilmeni selkeästi. Ensinnäkin kaikki ryhmän 4 opettajat ilmoittivat korostavansa opetuksessaan säännöllisesti laskutaidollisia tavoitteita. Ryhmässä 3 näitä tavoitteita painotettiin harvemmin ja annettiin sen sijaan ryhmään 4 verrattuna enemmän painoa käsiteltyjen asioiden soveltamiselle. Toinen muuttuja käsitteli opetuksen työskentelytapoja ja oli täsmälleen sama kuin vuoden 1990 aineistossa. Ryhmän 3 opettajat käyttivät ryhmän 4 opettajia säännöllisemmin työtapana yhteistä keskustelua, jossa käsiteltiin opiskelun kohteena olevia tehtäviä ja niiden ratkaisemista.

Taulukko 6.9 Uskomuksiltaan erilaisten aineenopettajaryhmien (ryhmät 3 ja 4) erot matematiikan opetuksen toimintamuotojen suhteen vuonna 1995.

Toimintamuoto	Ryhmä 3	Ryhmä 4	Erojen merkitsevyys
Laskutaidon korostaminen		enemmän	*
Opetuksen soveltamisen korostaminen	enemmän		n.s.
Yhteinen keskustelu tehtävistä ja niiden ratkaisuista	enemmän		n.s.

* $p < .05$; ** $p < .01$; *** $p < .001$

Neljän opettajan haastattelut antoivat lisävalaistusta matematiikkauskomusten ja opetuksen toimintatapojen välisistä kytkennöistä. Haastattelujen yhteydessä opettajat toivat laajemmin esille omaa ajatteluaan matematiikan opetuksesta ja samalla he liittivät sen opetustoimintaansa. Tällä tavoin oli mahdollista tarkastella lähemmin opettajan uskomusten ja toimintatapojen johdonmukaisuutta tai ristiriitaisuutta.

Opettajahaastattelujen välittämä kuva opettajista ja heidän matematiikkauskomuksistaan sisälsi runsaasti kytkentöjä opetuksen toimintatapoihin. Esimerkiksi opettaja L:n uskomuksiin sisältyi osittain traditionaalisia ja osittain innovatiivisia aineksia. Hänen kohdallaan matematiikkaan perinteisesti liitetyt uskomukset muodostivat perustan, johon hän oli liittänyt oppilaslähtöisyyttä tukevia aineksia. Nämä uskomukset tulivat useissa eri tilanteissa 'pinnalle' ja näihin liittyivät tietynlaiset opetukselliset tilanteet ja toiminnot:

Ennen tultiin oppikouluun sitä varten, että siitä sai paremman uran. Silloin täyty jaksa ja se oli valikoitunut porukka... Niin se (opetus) oli silloin teoreettisempaa. Nyt se täytyy jotenkin muuten keksiä.

Se käsitellään aina se uusi asia. Sitten vasta he saa ruveta laskemaan. ... Että ne ymmärtää sen. Sitten koitan aina keksiä uusia ja uusia tapoja sille, miten minä sen vielä kysyisin.

Se muuttuu väkisin peruskoulussa, kun oppilaat tulee entistä lyhytjänteisemmiksi. Sellaista pitkäjänteistä työtä ei jaksa tehdä tällainen heterogeeninen ryhmä... Kaikkea tällaista välihommaa täytyy olla siellä, varsinkin nyt kun on kaksoistunti... Sitten me olemme koittaneet kaikenlaista tällaista mittaamista, joskus kappaleitten tekemistä. Ne itse sen näkevät. ... Kun minä piirrän taululle, että teette kartion pahvista, jonka pohjan säde on joku 5 cm ja sitten korkeus on 12 cm. Siinä on pahvia ja mitat ja kaikki.

Kyllä minä täällä peruskoulun puolella ajattelen, että se on tämä käytäntöön liittyvä matematiikka (hyödyllistä). Päässälaskua täytyisi enemmän mennä mitä nykyisin.

Parhaitakin täytyisi voida opettaa ja sitten se innostaminen, että ne ei tänne kyllästy. Yleensä mulla on aina tuolla sivutauluilla siihen aiheeseen liittyviä (tehtäviä) ihan ylioppilaskirjoituksiin saakka.

Mulla on ollut tällainen tapa, että teemana tänään. Ne ottaa vaan laskimen ja laskeskelee sieltä sitten. Sitä ei enää käydy sillä lailla kauhean tarkasti, vaan aina jostakin asiasta mikä on teemana.

Luvun 6.4. tarkastelun perusteella opettaja R:n uskomukset olivat verraten perinteiset ja ne näkyivät myös hänen kuvaamassaan opetuksen toimintamallissa. Toisaalta opettajan uskomuksissa tuli esille pyrkimyksiä uuteen, mutta luopumisen tunne oli jo saamassa voiton

eivätkä pyrkimykset monissa kohdin enää kantaneet toiminnan tasolle. Hän toi esille myös sosiaalisen yhteisön merkityksen koulun ja opetuksen uudistumisessa:

Kyllä siinä on paljon siitä omasta vaivannäöstä kiinni. Se on tietenkin tällainen ammatti-eettinen kysymys, että millä eväillä sinne tunnille lähtee. ... Jos 15–20 vuotta on tietyt asiat tietyllä tavalla ottanut ja havainnut, että tämä menetelmä on minulle hyvä. Miksi vaihdan? ... Siinä ei isoja tule tapahtumaan ennen kuin nuori polvi nousee tuolta ja meitä lähtee. Sieltä tulee sitten sellaista tiettyä viitseliäisyyttä ja sitoutumista asioihin. ... Mennään nyt näin kuten tähänkin mennessä on menty.

Ihmiset sinänsä on aika konservatiivisia. On jännä tuolla ala-asteella, kun tulee tällaisia nuoria luokanopettajia, jotka on hyvin lahjakkaita ja panevat täysin pelit uusiksi. ... Kyllä siellä monesti koulutoimistossa alkoi puhelimet soida, että täällä on aivan vapaa ihminen, että eihän se opeta ollenkaan. Leikkii vain jotain kokonaisopetusta täällä viikon.

Opettaja H:n uskomukset ja ajattelu matematiikan opetusta kohtaan olivat verraten joustavat. Uskomuksissa oli paljon 'luovia' aineksia, joskin taustalla näyttäytyivät aika ajoin myös perinteisemmät piirteet. Tässä suhteessa ne muistuttivat opettaja L:n uskomuksia. Varsin pitkälle opettaja H:n uskomukset olivat yhdenmukaiset hänen opetustoimintojensa kanssa:

Matikkaa on ihan kiva opettaa. Aina miettii, että mitä minä tekisin. Kuinka sanoisin tuon eri tavalla. ... miten tämän veisin, että sen oppisi useampi.

Kaikkein mieluummin (työskentelen) ... kuitenkin vuorovaikutuksessa oppilaiden kanssa. Yritän saada oppilailta mahdollisimman paljon. Sitten toinen asia, mitä minä yritän, on tehdä kiinnostavaksi joku asia sillä, mitä tiedän historiasta.

Joissakin kohdin ilmeni, että ydinuskomuksilla oli rajoittava vaikutus opetustoimintaan ja siihen opettaja H:lla oli tietyt syyt:

Oppilaat on aika vanhoillisia loppujen lopuksi. ... Aika harvoin olen uskaltanut lähteä ihan sillä tavalla, että ne keskenään opiskelisi jonkun uuden asian. ... Vaikea sanoa (mistä se tulee), tietenkin pahimmillaan sitä pelkää, että se on itsessä. Itse viestittää sitä, että minä haluan olla aina äänessä. Tai sitten niin, että ne on sen verran vaikeita nämä asiat. Että ne ei jaksa.

Neljästä haastatellusta opettajatapauksesta opettaja N:n uskomukset sisälsivät vahvimmin konstruktivistia aineksia, joskin hänenkin ajattelullaan oli pitkää kokemuksesta johtuen traditionaalinen pohjavire. Voisi sanoa, että opettaja N:n tapauksessa uskomukset olivat muotoutuneet eräänlaiseksi 'opetusfilosofiaksi', joka myös näkyi hänen opetustoiminnassaan:

Sehän se on se opettajan tehtävä, osata aukaista se ovi, että on kenttää missä temmeltää.

En tiedä sitten, nythän tätä ollaan uudistamassa tosiaan tätä matematiikan oppiainesta ja opetustapoja. En ole varma, että onko tätä oikein ymmärretty vielä opettajien taholla, mitä se tarkoittaa. ... Mulla on ainakin se kuva tullut, että on vähän voitu ymmärtää väärin. Kun ei ymmärretä oikein ja ruvetaan leikkelemään tuntikaudet saksilla ja liimailemaan. ... Sinänsä olen aivan täysin samaa mieltä, että uudistusta on tarvittu. Tällainen ongelmakeskeisyys, monipuolisempi näkemys on tarpeen.

Kyllä väittäisin, että jollakin lailla innostunut vielä olen ollut. ... Siinä on se hyvä puoli, että en ikinä ole tavannut sellaista matematiikan ryhmää, jossa ei olisi ollut yhtään (matematiikasta) innostunutta oppilasta. ... Niillä on tällainen luontainen innostus...

Suurin ongelma on juuri se, että ne saa yleensä miettimään. ... Mulla on tällainen tapa, että on tällainen hiljainen hetki, jolloin voi miettiä. ... Silloin mietitään.

Aineenopettajien matematiikkauskomusten ja opetustoiminnan välisistä yhteyksistä voidaan kaiken kaikkiaan todeta, että vuosien 1990 ja 1995 tulokset olivat keskenään hyvin samankaltaiset. Molempina vuosina opettajien joukossa oli kaksi ryhmää, jotka poikkesivat uskomustensa suhteen siten, että toisessa ryhmässä oli vallitsevana 'oppijakeskeiset' uskomukset ja toisessa 'perinteiset' uskomukset. Oppijakeskeisten ryhmien opettajat antoivat opetuksessaan enemmän painoa käsiteltävien asioiden soveltamiselle, käyttivät useammin työtapana yhteistä keskustelua sekä antoivat säännöllisemmin opitun soveltamista vaativia kotitehtäviä kuin perinteisten ryhmien opettajat. Neljää aineenopettajaa koskevat haastattelut vahvistivat myös sitä näkemystä, että opettajan uskomukset ovat yhteydessä niihin tapoihin ja menettelyihin, joita hän opetuksessaan noudattaa.

6.6 Opettajien matematiikkauskomukset ja oppilaiden oppimistulokset

Clarkin ja Petersonin (1986) mallin mukaisesti opettajien omalla ajattelulla on tärkeä merkitys opetuksessa. Suunnitellessaan opetustaan ja ollessaan vuorovaikutuksessa oppilaidensa kanssa opettajat joutuvat jatkuvasti tekemään päätöksiä oman ajattelutyönsä pohjalta. Tällöin myös opettajien uskomusjärjestelmät omalla panoksellaan vaikuttavat heidän suunnitelmiinsa ja toimintaansa. Monimutkaisten vuorovaikutusprosessien kautta opettajien uskomuksilla on siten kytkentänsä oppilaiden oppituntityöskentelyyn ja myös heidän oppimiseensa.

Mikä vaikutus opettajien matematiikkauskomuksilla on oppilaiden oppimistuloksiin? Kysymys on tärkeä, koska oppimisen ongelmia pohdittaessa ollaan yleensä hyvin kiinnostuneita siitä, mitkä tekijät ovat yhteydessä oppimiseen. Kun opettajien uskomuksilla näyttäisi

olevan yhteyksiä heidän opetuksellisiin toimenpiteisiinsä, niin myös uskomusten vaikutukset oppilaiden oppimistuloksiin saattaisivat olla mahdollisia. Kysymykseen vastaaminen on kuitenkin vaikeaa sen vuoksi, että ne vuorovaikutus- ja välitysprosessit, joiden kautta uskomukset ovat yhteydessä opettajien toimintaan ja opettajien työskentelytavat puolestaan oppilaiden opiskelutoimintoihin, ovat äärimmäisen monimutkaiset ja monilta osin selvittämättä. Tutkimuksessa haluttiin kuitenkin tehdä utelias 'tilastollinen kurkistus' tähän opiskelun ja oppimisen monimutkaisten yhteyksien verkostoon ja katsoa, tuleeko uskomusmuuttujien vaikutus näkyviin oppimistulosten erojen selittämisessä.

Opettajien matematiikkauskomusten ja oppilaiden tiedollisten oppimistulosten yhteyksiä tarkasteltiin tilastollisen kaksitasomallin avulla. Analysoinnin lähtökohtana olivat luvussa 3.3.4 esitetyt mallit (ks. taulukot 3.2–3.4, ss. 65–67). Näissä malleissa oli esitetty oppilaiden oppimistuloksia selittävät taustatekijät ennen uskomusmuuttujien mukaan ottamista. Nyt mallitarkasteluihin otettiin mukaan kaikki aikaisempien vaiheiden selittävät muuttujat ja niiden lisäksi opettajatasoa kuvaavat uskomusmuuttujat (uskomusfaktorien summapistemäärät).

Tulokset on kuvattu taulukoissa 6.10 – 6.12. Kaikissa taulukoissa on esitetty sekä aiemmat mallit (Malli 1) että nyt saadut mallit (Malli 2), jotta mahdolliset muutokset ovat nähtävissä.

Taulukko 6.10 Neljännen luokan matematiikka-aineistoon sovitetun kaksitasomallin kerroinestimaatit ja niiden keskivirheet (sulkeissa) vuonna 1990.

Selittäjä	Kerroinestimaatti (keskivirhe)	
	Malli 1	Malli 2
Vakio	111.4 (1.725)	119.1 (3.382)
Kodin apu kotitehtävissä	2.730 (0.681)	2.846 (0.677)
Jatkokoulutushalu	2.140 (0.576)	2.311 (0.567)
Matematiikan opiskelun vaikeus	-1.175 (0.103)	-1.180 (0.101)
Kotitehtäviin käytetty aika	-0.063 (0.016)	-0.062 (0.016)
Opettajakokemus	0.067 (0.042)	-
<i>Harjoittelukeskeisyys-uskomukset</i>	-	-1.965 (0.801)
Kokonaisvarianssista on koulujen välistä vaihtelua	7.574 (2.299)	6.567 (2.095)
Kokonaisvarianssista on oppilaiden välistä vaihtelua koulujen sisällä	61.57 (3.028)	61.68 (3.033)

Taulukon 6.10 mallit poikkeavat jonkin verran toisistaan. Neljän ensimmäisen muuttujan kohdalla muutokset tosin olivat varsin vähäisiä. Kahta viimeistä muuttujaa koskevat tulokset olivat sitä vastoin merkityksellisempiä. Erityisen kiinnostavaa oli se, että yksi uskomusfaktoreista eli harjoittelukeskeisyys nousi neljäsluokkalaisten matematiikan oppimistuloksia selittäväksi tekijäksi. Tulos tarkoitti sitä, että opettajan uskomusten vahva harjoittelukeskeisyys (laskemisen perustekniikoiden ja runsaan rutiinilaskennan korostaminen) ilmeni heikompina oppimistuloksina oppilailta. Suuruudeltaan vaikutus oli hieman vähäisempi kuin oppilaiden oman jatkokoulutushalukkuuden vaikutus heidän suorituksiinsa. Lisäksi on huomattava, että mallissa 2 opettajakokemus ei ollut enää millään tavoin mukana, joskin sen vaikutus mallissa 1 oli myös varsin vähäinen eikä tilastollisesti merkitsevä.

Taulukko 6.11 Yhdeksännen luokan matematiikka-aineistoon sovitettujen kaksitasomallien kerroinestimaatit ja niiden keskivirheet (sulkeissa) vuonna 1990.

Selittäjä	Kerroinestimaatti (keskivirhe)	
	Malli 1	Malli 2
Vakio	99.82 (1.079)	99.92 (1.064)
Jatkokoulutushalu	7.294 (0.613)	7.545 (0.599)
Matematiikan harrastaminen	3.993 (1.027)	4.061 (1.027)
Mielipide matematiikan määrästä koulussa	-3.587 (0.601)	-3.548 (0.601)
Kodin apu kotitehtävissä	2.276 (0.616)	2.448 (0.608)
Kotitehtäviin käytetty aika	-0.084 (0.023)	-0.086 (0.023)
Kokonaisvarianssista on koulujen välistä vaihtelua	6.206 (1.946)	6.178 (1.943)
Kokonaisvarianssista on oppilaiden välistä vaihtelua koulujen sisällä	71.56 (3.378)	71.70 (3.384)

Taulukossa 6.11 esitetyt yhdeksäsluokkalaisten oppimistulosten selitysmallit olivat keskenään lähes identtiset. Vuonna 1990 opettajien uskomusfaktorit eivät siten kuuluneet oppilaiden oppimistuloksia selittävien muuttujien joukkoon.

Taulukko 6.12 Yhdeksännen luokan matematiikka-aineistoon sovitetun kaksitasomallin kerroinestimaatit ja niiden keskivirheet (sulkeissa) vuonna 1995.

Selittäjä	Kerroinestimaatti (keskivirhe)	
	Malli 1	Malli 2
Vakio	75.24 (1.628)	79.00 (2.282)
Luottamus matematiikan oppimiseen	6.298 (0.325)	6.328 (0.322)
Jatkokoulutushalu	5.296 (0.521)	5.284 (0.520)
Matematiikan oppikirja	1.433 (0.692)	1.521 (0.669)
Sukupuoli	1.167 (0.481)	1.156 (0.480)
Isän koulutus	0.663 (0.341)	0.664 (0.337)
<i>Esitys- ja menettelytapa-uskomukset</i>	-	-1.291 (0.547)
Kokonaisvarianssista on koulujen välistä vaihtelua	4.655 (1.377)	4.104 (1.283)
Kokonaisvarianssista on oppilaiden välistä vaihtelua koulujen sisällä	47.56 (2.204)	47.53 (2.203)

Vuoden 1995 yhdeksännen luokan aineistossa opettajien uskomukset olivat yhteydessä oppilaiden oppimistuloksiin. Tämä oli ainoa eroavuus taulukon 6.12 selitysmallien välillä ja muilta osin mallit olivat hyvin samanlaiset. Mallissa 2 opettajien esitys- ja menettelytapa-uskomukset selittivät oppilaiden oppimistuloksia ja uskomusfaktorin merkitys oli samaa suuruusluokkaa kuin matematiikan oppikirjalla ja oppilaan sukupuolella. Esitys- ja menettelytapa-uskomusten keskeinen sisältöhän oli se, että matematiikan opiskelu perustuu sääntöjen opetteluun ja että opetuksessa tulee painottaa matemaattisesti täsmällistä kielenkäyttöä ja symboleilla työskentelyä (taulukko 6.3, ss. 130–131). Mallin tulokset tarkoittivat sitä, että voimakkaat esitys- ja menettelytapa-uskomukset näkyivät heikompina oppimistuloksina oppilailla.

Tilastolliset tarkastelut osoittivat kaiken kaikkiaan, että opettajien matematiikka-uskomuksilla oli joitakin yhteyksiä myös oppilaiden matematiikan oppimistuloksiin. Yhteydet tulivat näkyville sekä neljäsluokkalaisten että yhdeksäsluokkalaisten kohdalla. Kuitenkin nämä kytkennät olivat vähäisiä siinä mielessä, että kummankin luokka-asteen aineistossa vain yksi uskomusfaktori oli tilastollisesti merkitsevä oppimistuloksia selittävä muuttuja. Muut, erityisesti oppilaskohtaiset muuttujat selittivät voimakkaammin oppilaiden oppisaavutuksia. Tarkasteluihin liittyy myös lukuisia epävarmuustekijöitä. Tämä ilmeni mm. siten, että

vuosien 1990 ja 1995 tulokset olivat yhdeksännellä luokalla osittain erilaiset. Näitä epävarmuustekijöitä käsitellään tutkimustulosten tarkastelun yhteydessä.

6.7 Yhteenvetoa opettajien matematiikkauskomuksista

Edellä on tarkasteltu ja kuvattu tämän tutkimuksen empiirisiä tuloksia. Tässä osaluvussa nämä tutkimuksen tulokset on koottu pääongelmittain.

Ongelma 1: Millaisia ovat opettajien uskomukset matematiikan oppimisesta ja opetuksesta?

Luokanopettajien ja aineenopettajien matematiikkauskomukset olivat monessa suhteessa samanlaiset. Opettajilla oli tiettyjä uskomuksia, joista he olivat lähes yksimielisiä. Osa näistä uskomuksista oli varsin perinteisiä ja osa uudistushakuisia. Yhtäältä näissä uskomuksissa painottui matemaattisen täsmällinen kielenkäyttö, laskemisen perustekniikkojen hallinta ja ahkera harjoittelu. Toisaalta uskomukset korostivat ajattelun tärkeyttä matematiikassa ja vähempien oppisisältöjen perusteellista tarkastelua sekä sellaisten ongelmatehtävien käsitteilyä opetuksessa, joissa oppilaita rohkaistaan itsenäiseen pohdintaan ja erilaisten ratkaisuteiden etsimiseen.

Uskomuksissa ilmeni myös mielenkiintoista vaihtelua sekä opettajaryhmien kesken että niiden sisällä. Enemmistö luokanopettajista katsoi mm., että oppiminen tulisi tehdä helpoksi pienten sisältökokonaisuuksien avulla. Sen sijaan yli puolet aineenopettajista oli asiasta eri mieltä. Luokanopettajat olivat yleensä myös sillä kannalla, että heikommat oppilaat on erityisesti huomioitava opetuksessa, kun sen sijaan vain noin kolmannes aineenopettajista ajatteli tällä tavoin. Aineenopettajista noin 70 prosenttia painottikin lahjakkaiden oppilaiden tarpeiden huomioimista. Edelleen noin 40 prosenttia luokanopettajista piti oikeiden tulosten saamista olennaisen tärkeänä matematiikan opiskelussa, kun ainoastaan kymmenesosa aineenopettajista näki asian samalla tavoin.

Luokanopettajien uskomusten faktorirakenne oli varsin selkeä. Kuuden faktorin ratkaisu oli tilastollisesti hyvin sopiva ja luontevasti tulkittavissa. Uskomusfaktorit olivat oppijakeskeisyys, harjoittelukeskeisyys, yhteistoiminnallisuus, oppituntikeskeisyys, esitystavat ja ajattelun kehittäminen. Luokanopettajien uskomuksista nousi vahvasti esille kaksi tekijää: oppijakeskeisyyden uskomukset ja harjoittelukeskeisyyden uskomukset. Myös matemaattista esitystapaa ja ajattelun kehittämistä korostavat uskomukset tulivat omina tekijöinä esille. Uskomusten rakenne muistutti monessa suhteessa Lindgrenin (1995) tutkimuksen uskomusrakennetta, vaikka tutkimusten luokanopettajaryhmät olivatkin erilaiset.

Aineenopettajien uskomusten faktorirakenne vuonna 1990 oli tilastollisesti kohtuullisen selkeä, mutta tulkinnallisesti ongelmallisempi. Uskomusrakenne sisälsi kuusi faktoria: harjoittelukeskeisyys, oppijakeskeisyys, käytännönläheisyys, suorituskeskeisyys, oppimisen ongelmat ja yksilöllisyys. Näistä vain kaksi ensimmäistä ja viimeinen olivat sisällöllisesti hyvin tulkittavia. Harjoittelukeskeisyys- ja oppijakeskeisyys-uskomusten faktorit olivat sisällöltään samanlaiset kuin luokanopettajilla.

Vuonna 1995 uskomusten faktorirakenne oli vielä selkeämpi kuin vuonna 1990. Rakenne sisälsi tuolloin seitsemän faktoria: oppijakeskeisyys, hyvä oppiminen, konkreettisuus, harjoittelukeskeisyys, ajattelun kehittäminen, yksilöllisyys sekä esitys- ja menettelytavat. Faktoreiden sisällöllinen tulkittavuus oli huomattavasti parempi kuin vuonna 1990. Opettajien uskomuksissa olivat voimakkaimpia ne osatekijät, jotka ilmensivät opetuksen oppijakeskeisyyttä ja matematiikan kunnollista oppimista. Harjoittelukeskeisyys-uskomukset olivat edelleen omana faktorinaan, mutta painoarvoltaan heikompana kuin vuoden 1990 faktorirakenteessa. Merkille pantavaa oli lisäksi se, että tällä faktorirakenteella ja luokanopettajien faktorirakenteella oli sisällöltään kolme yhteistä faktoria: oppijakeskeisyys, harjoittelukeskeisyys ja esitys- ja menettelytavat.

Kaiken kaikkiaan uskomusten luonnetta ja rakennetta koskevat tulokset kuvastivat selkeästi opettajien matematiikkauskomusten moniulotteisuutta. Tulokset olivat siten hyvin yhdenmukaisia useiden ulkomaisten tutkimusten kanssa (mm. Conroy 1987, Middleton ym. 1990). Esimerkiksi Middleton ym. (1990) havaitsivat, että matematiikan opettajilla oli joustavat ja monidimensioiset käsitykset matematiikasta, joiden mukaan matematiikka on sekä loogista, tieteellistä ajattelua että yhtä lailla ideoiden ja ajatusten kommunikointitapa.

Ongelma 2: Onko opettajien matematiikkauskomuksissa eroja?

Ryhmittelyanalyysia hyväksi käyttäen selvitettiin kysymystä, oliko luokanopettajien ja aineenopettajien joukossa ryhmiä, jotka poikkesivat toisistaan matematiikkauskomuksiltaan.

Luokanopettajien joukosta löytyi uskomustensa puolesta neljä erilaista ryhmää. Eriyisen kiinnostavia olivat kaksi pienryhmää, joiden opettajat poikkesivat toisistaan myös opetuskokemuksensa puolesta. Ensimmäisen ryhmän opettajien uskomuksissa oli korostetusti esillä harjoittelukeskeisyys (runsas rutiiniharjoittelu, laskemisen perustekniikoiden hallinta, oikeiden vastausten saaminen ja oppituntirauhan säilyttäminen). Tähän ryhmään kuuluvat opettajat olivat hyvin kokeneita. Toisen opettajaryhmän uskomuksissa olivat puolestaan vahvoja oppilaskeskeisyyteen ja yhteistoiminnallisuuteen liittyvät uskomukset. Tähän ryhmään kuuluvat opettajat olivat selvästi nuorempia.

Vastaavasti aineenopettajien joukosta voitiin löytää sekä vuonna 1990 että 1995 neljä uskomusprofiililtaan erilaista osaryhmää. Vuoden 1990 aineistossa osaryhmien profiilit olivat muodoltaan hyvin samanlaiset eivätkä profiilien erot olleet suuret. Kaksi uskomuksiltaan

erilaisinta ryhmää poikkesi toisistaan siten, että toisessa ryhmässä uskomukset olivat kauttaaltaan vahvimmat ja toisessa taas kaikkein heikoimmat. Vuoden 1995 aineistossa osaryhmien erot olivat toisentyypiset. Selvimmin erottui kaksi ryhmää. Toisen ryhmän opettajilla oli vahvimmat oppijakeskeisyyttä ja ajattelun kehittämistä korostavat uskomukset ja heikoimmat harjoittelukeskeisyyttä sekä esitys- ja menettelytapoja painottavat uskomukset. Toisessa ryhmässä oli puolestaan muita vahvemmat harjoittelukeskeisyys-uskomukset ja kaikkein heikoimmat oppijakeskeisyys- ja konkreettisuus-uskomukset. Uskomuksiltaan erilaisten osaryhmien opettajat eivät poikenneet toisistaan tarkastelun kohteina olleiden taustamuuttujien suhteen.

Ongelma 3. Millaisia muutoksia opettajien uskomuksissa tapahtuu tietyn ajanjakson aikana?

Vuosina 1990 ja 1995 kerätyt empiiriset aineistot loivat mahdollisuuden aineenopettajien matematiikkauskomuksissa tapahtuneiden muutosten selvittämiseen. Kaikkiaan 15 opettajaa vastasi uskomuskyselyyn molempina vuosina, minkä lisäksi neljältä opettajalta hankittiin vielä haastattelutietoa. Yksittäisten opettajien uskomusmuutosten arvioimiseksi kehitettiin tässä yhteydessä myös analysointimenetelmää. Opettajien uskomusprofiilien perusteella etsittiin kaksi matematiikkauskomustensa suhteen mahdollisimman erilaista opettajatyyppeä, joille annettiin nimitykset *traditionaalinen* opettajatyyppeä ja *innovatiivinen* opettajatyyppeä. Kriteeriprofiileja hyväksi käyttäen analysoitiin sen jälkeen jokaisen opettajan kohdalta, millä tavoin opettajan uskomusprofiili oli muuttunut ja kumpaa tyyppiä kohti muutosta oli tapahtunut.

Muutokset opettajien uskomuksissa olivat vähäisiä. Opettajien ilmaisemat uskomukset poikkesivat yleensä enemmän tai vähemmän 'kriteeriopettajien' uskomuksista. Kymmenen opettajan uskomukset olivat lähempänä traditionaalisia matematiikkauskomuksia ja uskomusten muutokset olivat vähäisiä eikä niissä ollut havaittavissa johdonmukaisuutta. Yhden opettajan uskomukset olivat muuttuneet vieläkin traditionaalisempaan suuntaan. Viiden opettajan uskomukset voitiin luokitella tyyppiltään innovatiivisiksi ja viiden vuoden aikana uskomukset olivat muuttuneet hieman enemmän innovatiiviseen suuntaan.

Neljän opettajan haastattelujen välittämä informaatio antoi laajemman ja paremmin ymmärrettävän kuvan opettajien uskomuksista ja tulkintaa uskomusten muutoksille tutkimusajankohtien välillä. Nämä opettajat sijoituivat uskomustensa puolesta traditionaalisuus–innovatiivisuus -dimensiolle eri tavalla kuin pelkästään uskomusprofiileja käytettäessä. Yksi opettaja oli lähellä traditionaalista tyyppiä, kaksi opettajista oli traditionaalisen ja innovatiivisen tyyppien yhdistelmiä ja yksi opettaja oli lähempänä innovatiivista tyyppiä. Haastattelujen ja uskomuskyselyjen välittämän tiedon välillä ei kuitenkaan voitu havaita ristiriitaisuuksia.

Opettajat olivat oman opetustapansa suhteen vaatimattomia ja heidän oli hyvin vaikeaa nähdä itseään uusien ideoiden toteuttajina. Päinvastoin he pyrkivät painottamaan opetustapansa vanhanaikaisuutta ja perinteisyyttä, aivan kuin tämä matematiikan opetuksen puoli olisi paremmin hyväksyttävä sekä koulu yhteisön että laajemmin yhteiskunnan piirissä.

Ongelma 4. Millä tavoin opettajien uskomukset ovat yhteydessä heidän opetustoimintaansa?

Opettajien matematiikkauskomusten ja heidän opetustoimenpiteidensä välillä havaittiin joitakin yhteyksiä. Kokonaisuutta ajatellen johdonmukaisten yhteyksien määrä oli kuitenkin vähäinen.

Luokanopettajilla kahden opettajaryhmän (kokeneet opettajat vs. nuoremmat opettajat) matematiikkauskomukset ilmentyivät opetuksen laskutaitopainotteisuuden, opettajajohtoisuuden ja myös kokeiden käytön kohdalla. Kokeneet opettajat käyttivät säännöllisemmin opettajajohtoista työskentelyä, painottivat enemmän laskutaidon merkitystä ja käyttivät useammin summatiivista arviointia kuin nuoremmat opettajat. Nuorempien opettajien ryhmässä olivat sitä vastoin vahvemmin esillä pari- ja ryhmätyön sekä formatiivisen arvioinnin käyttäminen. Monissa opetuksen toteutusta kuvaavissa muuttujissa ryhmien välillä ei ollut eroja.

Aineenopettajien kohdalla vuosien 1990 ja 1995 tulokset olivat keskenään hyvin samankaltaiset. Molempina vuosina opettajien joukossa oli kaksi ryhmää, jotka poikkesivat uskomustensa suhteen siten, että toisessa ryhmässä oli vallitsevana 'oppijakeskeiset' uskomukset ja toisessa 'perinteiset' uskomukset. Oppijakeskeisten ryhmien opettajat antoivat opetuksessaan enemmän painoa käsiteltävien asioiden soveltamiselle, käyttivät useammin työtapana yhteistä keskustelua sekä antoivat säännöllisemmin soveltamista vaativia kotitehtäviä kuin perinteisten ryhmien opettajat. Neljää aineenopettajaa koskevat haastattelut vahvistivat myös näkemystä, että opettajan uskomukset ovat yhteydessä niihin tapoihin ja menettelyihin, joita hän opetuksessaan noudattaa.

Kokonaisuutena tulokset osoittivat monien aikaisempien tutkimusten (mm. Bishop & Nickson 1983; Franke ym. 1997; Kuhs 1980; Thompson 1984) tavoin, että opettajien uskomukset ja opetustoimenpiteet ovat yhteydessä toisiinsa.

Ongelma 5. Millaisia yhteyksiä opettajien uskomuksilla on oppilaiden tiedollisiin oppimistuloksiin?

Huolellisesti kerätyt empiiriset tutkimusaineistot tekivät mahdolliseksi tarkastella tilastollisten monitasomallien avulla opettajien matematiikkauskomusten ja oppilaiden oppimistulosten välisiä yhteyksiä. Tarkastelut osoittivat, että opettajien matematiikka-uskomuksilla oli

yhteyksiä oppilaiden matematiikan oppimistuloksiin. Yhteydet tulivat näkyville peruskoulun neljäsluokkalaisten ja yhdeksäsluokkalaisten aineistoihin sovitetuissa malleissa. Kuitenkin kytkennät olivat vähäisiä siinä mielessä, että kummankin luokka-asteen aineistossa vain yksi uskomusfaktori oli tilastollisesti merkitsevä oppimistuloksia selittävä muuttuja. Neljännellä luokalla oppilaiden tuloksia voimakkaimmin selittävä tekijä oli kodin antama apu ja tuki matematiikankotitehtävissä. Oppilaiden ilmoittaman jatkokoulutushalukkuuden selitysosuus oli seuraavaksi suurin ja näkyi sillä tavoin, että mitä pitemmälle oppilaat halusivat jatkaa koulunkäyntiä peruskoulun jälkeen, sitä paremmat olivat heidän matematiikan suorituksensa. Opettajien harjoittelukeskeisyys-uskomusten selitysosuus oli miltei samansuuruinen ja niiden merkitys näkyi siten, että voimakkaat uskomukset ilmenivät heikompina oppilaiden tuloksina. Yhdeksännellä luokalla oppimistulosten selvästi voimakkaimpia oppimistulosten selittäjiä olivat oppilaan luottamus matematiikan oppimiseen ja jatkokoulutushalukkuus. Vuoden 1995 aineistossa opettajan esitys- ja menettelytapa-uskomukset oli yhtä voimakkaita oppilaiden suoritusten selittäjiä kuin matematiikan oppikirja ja oppilaan sukupuoli. Mitä vahvemmat sääntöjen opettelua, symboleilla operoimista ja matemaattisen täsmällistä kielenkäyttöä suosivat uskomukset opettajalla oli, sitä heikommat olivat oppilaiden suoritukset. Tarkasteleihin liittyy kuitenkin lukuisia epävarmuustekijöitä, mistä johtuen saatuihin tuloksiin on suhtauduttava varauksin.

7 USKOMUKSET MATEMATIIKAN OPETUKSEN MUOVAAJINA

“Reform necessitates change, that is, doing things differently. For many teachers, changing their teaching of mathematics is problematic and fraught with difficulties... We expect some teachers will change and others will not, despite our best efforts, and that some will change regardless of whether there are any external efforts at all. But consideration of what teachers believe and how their beliefs are structured provides us a means of conceptualizing teacher education in ways that promote change in something other than a random manner.” (Cooney & Shealy 1997, 106.)

7.1 Uskomukset opettajan käyttötietona

Uskomukset ovat olennaisen tärkeä osa opettajan käyttötietoa. Opettajan käyttötieto rakentuu hänen henkilökohtaisista ja ammatillisista kokemuksistaan, ja sen avulla hän jäsentää ja toteuttaa omaa opetustyötään. Uskomusten merkitys opettajan työlle johtuu niistä ominaisuuksista, joita uskomuksilla ja uskomusjärjestelmillä on (luku 2.6). Silloin kun opettajalla ei ole käytettävissään sopivia tietorakenteita ja kognitiivisia strategioita, hän käyttää hyväkseen uskomuksia. Uskomukset vaikuttavat merkittäväällä tavalla siihen, kuinka opettajat rakentavat tehtäväympäristöjä ja määrittävät ongelmatilanteita. Uskomusten episodinen luonne ja uskomusjärjestelmien sidoksettomuus tekee opettajille mahdolliseksi lähestyä ja käsitellä jäsentymättömiä ongelmia. Uskomuksiin sisältyvillä emotionaalisilla ja affektiivisilla elementeillä on puolestaan tärkeitä seuraamuksia sille, kuinka opettajat oppivat ja käyttävät oppimaansa sekä olettavat myös oppilaidensa oppivan.

Beijaardin ja Verloopin (1994) mielestä opettajasta tekee ammattilaisen se, että hänellä on käytännöllistä tietämystä (käyttötietoa), joka on muotoutunut hänen omaa opetustaan silmällä pitäen ja on käyttövalmista. Sellainen opettaja, joka on rakentanut tietoisesti tällaista tietämystä, on reflektiivinen ammattilainen ja halukas oppimaan lisää vuorovaikutuksessa opetusyhteisönsä kanssa. Voidaksemme ymmärtää, mitä opetus opettajien näkökulmasta merkitsee, on meidän tunnettava sitä ajattelua ja niitä uskomuksia, joiden avulla he määrittävät työtään ja opetustehtäviään. Mikäli emme ota tätä huomioon, on meidän kenties mahdoton ymmärtää sitä, mitä opettajat luokassa tekevät ja miksi he tekevät niin kuin tekevät.

Tutkimuksen tulokset osoittivat, että opettajilla on vahvoja *matematiikkauskomuksia* eli matematiikkaan, sen oppimiseen ja opettamiseen liittyviä uskomuksia. Tämä näkyi siinä, että sekä luokanopettajilla että aineenopettajilla oli koko joukko uskomuksia, joista he olivat miltei *yksimielisiä*. Nämä uskomukset korostivat mm. ajattelun tärkeyttä ja sellaisten

ongelmatehtävien käsittelyä, joissa oppilaille annetaan tilaa ja rohkaisua omakohtaiselle miettimiselle ja erilaisten ratkaisuteiden etsimiselle ja tuloksetta löytämiseksi. Lisäksi uskomuksissa painottui vähempien oppisisältöjen perusteellinen käsittely opetuksessa sekä oppilaita koskien laskemisen perustekniikojen hallinta ja ahkera harjoittelu. Uskomusten voi nähdä ilmentävän yhtäältä sellaista 'ideaalista tilannetta', millaiseksi opettajat haluaisivat tehdä opetuksensa, jos se olisi yksin heidän päätettävissään ja jos ulkoiset olosuhteet eivät asettaisi omia rajoituksiaan (Nespor 1987). Toisaalta ne kertovat niistä vähimmäisvaatimuksista, joita opettajat asettavat oppilaille matematiikan opiskelussa.

Uskomuksissa esiintyi mielenkiintoista vaihtelua sekä opettajaryhmien kesken että niiden sisällä. Opettajat suhtautuivat varsin eri tavoin esimerkiksi kysymykseen, tulisiko oppiminen tehdä helpoksi jakamalla oppisisältö pieniin osiin. Enemmistö luokanopettajista katsoi, että näin pitäisi tehdä, kun taas yli puolet aineenopettajista oli asiasta toista mieltä. Luokanopettajien ja aineenopettajien välillä näkyi eroja myös siinä, miten he suhtautuivat oikeiden tulosten merkitykseen matematiikan opiskelussa. Noin 40 prosenttia luokanopettajista piti oikeiden tulosten saamista olennaisen tärkeänä oppimisen kannalta, kun ainoastaan joka kymmenes aineenopettajista näki asian samalla tavoin. Nämä tuloshavainnot kuvastanevat osuvasti sitä erilaista koulutuksellista taustaa, joka luokanopettajilla ja aineenopettajilla on.

Matematiikkauskomusten rakenteita selvitettiin faktorianalyysin avulla. Analysoinnin tulokset paljastivat kaksi tärkeää tulosta. Ensinnäkin opettajien uskomukset olivat hyvin monidimensioiset ja toiseksi luokanopettajien ja aineenopettajien uskomusten rakenteissa oli varsin paljon yhteistä. Luokanopettajien uskomuksissa voitiin erottaa kuusi faktoria, joista erityisesti neljä olivat tulkinnallisesti kiinnostavia (oppijakeskeisyys, harjoittelukeskeisyys, esitystavat ja ajattelun kehittäminen). Faktoriratkaisu muistutti monissa kohdin Lindgrenin (1995) tutkimuksessaan saamaa tulosta. Esimerkiksi Lindgrenin faktoreista avoin lähestymistapa ja sisältökeskeisyys olivat miltei samoja kuin kirjoittajan oppijakeskeisyys- ja harjoittelukeskeisyys-faktorit. Niinikään oppituntikeskeisyys- ja yhteistoiminnallisuus-faktorit sisälsivät samoja aineksia, kuin Lindgrenin vastaavat faktorit, joista hän käytti nimityksiä säännöt & rutiinit sekä keskusteleminen & pelit. Faktorirakenteiden samankaltaisuus johtui mitä ilmeisimmin siitä, että käytetty mittari oli molemmissa tutkimuksissa sama. Aineenopettajien uskomukset sisälsivät vuonna 1990 kuusi faktoria ja vuonna 1995 seitsemän faktoria. Eri vuosien uskomusrakenteissa oli paljon yhteistä (erityisesti harjoittelukeskeisyyden ja oppijakeskeisyyden uskomukset), mutta monissa kohdin rakenteet poikkesivat toisistaan. Vuoden 1995 faktorirakenne oli kirjoittajan mielestä selkeämpi ja kiinnostavampi, koska se sopi aineistoon tilastollisesti paremmin ja oli paremmin sisällöllisesti tulkittavissa. Parempi sopivuus oli todennäköisesti seurausta siitä, että vuonna 1995 uskomuskyselyä parannettiin poistamalla huonoja väittämiä ja lisäämällä uusia. Tässä rakenteessa olivat voimakkaimpia ne osatekijät, jotka ilmensivät opetuksen

oppijakeskeisyyttä ja matematiikan kunnollista oppimista. Harjoittelukeskeisyys-uskomusten painoarvo oli nyt selvästi heikompi kuin vuonna 1990.

Luokanopettajien ja aineenopettajien matematiikkauskomuksissa oli paljon yhteistä, vaikka osa uskomusfaktoreista poikkesikin sisällöllisesti toisistaan. Harjoittelukeskeisyys- ja oppijakeskeisyys-uskomusten lisäksi molempien opettajaryhmien uskomusrakenteisiin kuuluivat myös esitys- ja menettelytapa-uskomukset. Näihin uskomuksiin sisältyivät matematiikka-tieteeseen usein liitettävät ominaispiirteet kuten täsmällinen kielenkäyttö ja symboleilla operointi.

Tulokset ovat monella tapaa mielenkiintoisia. Ensinnäkin kaikissa uskomusrakenteissa olivat näkyvissä *harjoittelukeskeisyys*-uskomukset jotka vahvasti liittyvät perinteiseen matematiikkakuvaan ja opetustapaan (ks. traditionaaliset uskomukset, Dionne 1984 ja sisältökeskeinen opetusnäkemys, Kuhs & Ball 1986). Traditionaaliseen matematiikkäsiitykseen vahvimmin liittyviä olivat myös esitys- ja menettelytapoja ja ajattelun kehittämistä painottavat uskomukset. Toisaalta uskomuksissa olivat vahvasti esillä *oppijakeskeisyyttä* korostavat uskomukset, joihin sisältyy konstruktivistiselle oppimiskäsitykselle leimallisia aineksia (konstruktivistiset uskomukset, Dionne 1984 ja oppijakeskeinen näkemys, Kuhs & Ball 1986). Kuinka sitten on mahdollista, että tällaiset erilaista oppimisen paradigmaa edustavat rakenteet voivat yhtäaikaaisesti olla vallitsevia ja elinvoimaisia? Tämä voidaan selittää uskomusten ryvästeyneisyys-ominaisuuden avulla (Green 1971). Uskomusjärjestelmien on mahdollista sisältää uskomusrypäitä, joilla ei ole yhteyttä toistensa kanssa. Näin ryvästymisen ehkäisee uskomusten välisiä vastakkainasetteluja ja antaa yksilölle mahdollisuuden ylläpitää keskenään ristiriitaisia uskomuksia.

Yksittäinen opettaja voi siis samanaikaisesti olla sitä mieltä, että "ongelmanratkaisu on matematiikan opetuksen kulmakivi" ja että "oppilaat oppivat parhaiten matematiikkaa kopioimalla luokan taululta ja opettelemalla kaikki yksityiskohdat". Uskomusten eriytyminen tekee mahdolliseksi se, että ristiriitaisia uskomuksia ei aseteta keskinäiseen vertailuun, vaan niiden annetaan olla omassa rauhassaan. Nämä ns. 'itsestään selvät' uskomukset ovat immuuneja rationaaliselle kritiikille (Cooney & Shealy 1997). Tällaiset uskomukset rohkaisevat opettajaa tarkastelemaan ympäröivää todellisuutta polarisoituneena (esim. "matematiikan tehtävät ovat joko oikein tai väärin" tai "vain matemaattisesti lahjakkaat oppilaat voivat oppia matematiikkaa".)

Uskomusten moniulotteisuutta kuvaava tulos on yhdenmukainen aikaisemman uskomustutkimuksen kanssa (mm. Conroy 1987; Middleton ym. 1990). Se tarkoittaa sitä, että niin luokanopettajien kuin aineenopettajienkin uskomukset rakentuvat pikemminkin monista osatekijöistä kuin yhdestä yksittäisestä uskomustyyppistä. Mitä ilmeisimmin se on seurausta siitä, että opettajien uskomukset ovat peräisin hyvin monista lähteistä ja siitä, että uskomusjärjestelmien sisällä on mahdollista säilyttää keskenään ristiriitaisia uskomuksia.

Luokanopettajien matematiikkauskomusten rakenne näyttäisi olevan yksinkertaisempi kuin aineenopettajilla. Niissä ovat esillä yhtäältä vahvat perinteistä matematiikan opetusta kuvastavat uskomukset ja toisaalta lähes yhtä voimakkaat uudempaa oppimis- ja opetus-kulttuuria edustavat uskomukset. Aineenopettajien matematiikkauskomukset koostuvat useammanlaisista aineksista, mutta samalla uskomusten luonne on jollain tapaa 'tasapaksu'. Luokanopettajien uskomusten selkeämpi ja luontevammin tulkittava rakenne saattaa osin johtua heidän koulutustaustastaan. Luokanopettajat joutuvat koulutusaikanaan opiskelemaan matematiikkaa ja myös matematiikan didaktiikkaa huomattavasti vähemmän kuin aineenopettajat, mistä johtuen uskomukselliset ainekset jäävät vähäisimmiksi. Heidän uskomuksensa eivät ole koulutuksen aikana myöskään joutuneet muutospaineiden kohteiksi siinä määrin kuin aineenopettajilla. Luokanopettajien uskomusten voi nähdä siten olevan 'puhtaammin' oman kouluajan matematiikkakokemusten jäljiltä ja vasta matematiikan opettajana olemisen kautta ne ovat tulleet arvioinnin alaisiksi.

Tutkimuksen tulokset osoittivat myös, että opettajien keskuudessa oli matematiikkauskomuksiltaan erilaisia osaryhmiä. Sekä luokanopettajien että aineenopettajien joukosta löytyi kaksi pienempää ryhmää, joissa erilaisuutta ilmeni harjoittelukeskeisyys- ja oppijakeskeisyys-uskomusten välillä. Toisessa ryhmässä harjoittelukeskeisyys oli selvästi oppijakeskeisyyttä vahvemmin esillä ja toisessa ryhmässä tilanne oli päinvastoin. Luokanopettajien kohdalla opettajakokemus oli yhteydessä matematiikkauskomusten erilaisuuteen siten, että voimakkaasti harjoittelukeskeisyyttä painottavat opettajat olivat erittäin kokeneita, kun taas oppijakeskeisyyttä suosivat opettajat olivat opettajajoukon nuorimmasta päästä. Aineenopettajien erilaiset uskomusryhmät eivät poikenneet toisistaan taustamuuttujien suhteen.

Se, että 25 vuotta työskennelleiden luokanopettajien matematiikkauskomukset olivat varsin perinteiset, ei ole sinällään mikään yllättävä havainto. Heidän uskomustensa muotoutumisen ja kehittymisen kannalta ratkaisevat koulutus- ja opetus-kulttuurin tekijät ovat peräisin 1960–70 luvuilta, jolloin matematiikan opetuksen tavoitteet ja käytännöt olivat nykyiseen verrattuna erilaiset. Sitä vastoin nuorten opettajien kohdalla näitä uskomuksia synnyttävät ja tuottavat kokemukset ovat olleet jo varsin toisenlaisia.

7.2 Uskomusten muuttuminen ei tapahdu helposti

Tutkimuksen tulokset osoittivat, että aineenopettajien matematiikkauskomukset olivat hyvin vakaita ja muuttuivat vain vähän vuosien 1990–1995 välisenä aikana. Joitakin muutoksia tapahtui sellaisissa opetuksen piirteissä, jotka konstruktivistisen oppimiskäsityksen yleistymisen myötä ovat olleet yhä enemmän esillä. Ensinnäkin opettajat painottivat aikaisempaa voimakkaammin, että on tärkeää kiinnittää huomiota oppilaiden ratkaisuprosessien etenemiseen eikä vain vastausten saamiseen. Toiseksi opettajat korostivat enemmän kuin

aiemmin, että oppilaiden on välttämättä ymmärrettävä esitetyt perustelut ja menettelyt, jotta he voivat menestyksellisesti rakentaa omaa oppimistaan. Rohkaisevaa opettajien matematiikkauskomusten muutoksissa oli lisäksi se, että niillä opettajilla, joiden uskomukset olivat voittopuolisesti innovatiivisia ja joustavia, tapahtui muutosta yhä joustavampaan suuntaan. Koulukohtaisen opetussuunnitelmatyön käynnistymisellä on saattanut myös olla oma merkityksensä näihin muutoksiin.

Se, että aineenopettajien matematiikkauskomukset pysyivät viiden vuoden aikavälillä hyvin stabiileina, on odotettua. Tämä tulos on myös yhdenmukainen aikaisempien tutkimustulosten kanssa (mm. Pajares 1994; Posner ym. 1982), joiden mukaan uskomusten muuttuminen etenkin aikuisiällä on harvinaista. Se varoittaa samalla aliarvioimasta uskomusten ennallaan pysymisen sitkeyttä (Thompson 1991).

Uskomusten muuttumattomuus johtuu osaltaan varmaan siitä, että matematiikan opettajien uskomuksissa oli eräitä vahvoja *ydinuskomuksia*, joista opettajat näyttävät pitävän tiukasti kiinni. Nämä uskomukset liittyivät laskemisen *perustekniikoiden hallintaan, runsaaseen harjoitteluun ja matemaattisen täsmälliseen kielenkäyttöön*. Sinällään näihin uskomuksiin sisältyvät toiminta-ajatukset ovat matematiikan opetukseen ja opiskeluun kuuluvia, mutta äärimuodoissaan ne todennäköisesti kurjistavat muita yhtä tärkeitä periaatteita (laskutekniikat vs. menetelmien käyttäminen, harjoittelun määrä vs. harjoittelun laatu, formaali kieli vs. luonnollinen kieli). Olennaista onkin se, millaisen painoarvon opettaja antaa näille uskomuksille omassa uskomusjärjestelmässään. Mikäli näiden harjoittelukeskeisten uskomusten johdannaiset (Nespor 1985) ovat sellaisia, että niissä painottuvat rutiiniharjoittelu, oikeiden vastausten saaminen ja symbolimatematiikka, niin silloin opettajan uskomusjärjestelmä on hyvin yksipuolinen. Uskomusten vaikutukset ovat tällöin mitä todennäköisimmin nähtävissä opiskelun traditionaalisina piirteinä. Tilanne on toisenlainen, jos opettaja 'hyväksyy' uskomusjärjestelmänsä edellä mainittujen ydinuskomusten rinnalle ajattelua laajentavia, innovatiivisia uskomuksia. Tämä on mahdollista, sillä uskomusjärjestelmä on joustava ja sallii keskenään kilpailevien uskomusryhmien läsnäolon.

Cooney ja Shealy (1997, 96–106) ovat esittäneet toisenlainen näkökulman, joka auttaa meitä ymmärtämään opettajien ajatteluprosesseja ja opetustoimintoja. Kysymys on siitä tavasta, jolla opettajat rakentavat tietämystään matematiikasta ja matematiikan opetuksesta. Yksilöinä opettajat sijoittavat itsensä eri tavalla suhteessa auktoriteetteihin, joita ovat esimerkiksi oman alan professorit, opetusviranomaiset, vanhemmat, oppikirjat tai opettajajärjestön viralliset kannanotot. Tässä sijoittumisessa tapahtuu jatkuvasti muutosta opettajan työhistorian aikana. Olennaisen tärkeä opettajan ammatillisen kehittymisen ja uudistumisen kannalta on vaihe, jossa hän ei ole enää riippuvainen muiden ajattelusta ja tekemisistä, vaan arvioi erilaisia lähestymistapoja omien tietojensa, arvostustensa ja kokemustensa pohjalta. Kulkiessaan kohti tätä siirtymävaihetta opettajat tunnistavat, mitä siitä on seurauksena ja monet opettajat jopa ahdistuvat siitä. Tavallaanhan opettajia

pyydetään tekemään työnsä vaikeammaksi ja epävarmemmaksi. Jotkut opettajat eivät olekaan valmiita haasteeseen, vaan joko palaavat entiseen tai siirtävät päätöstään myöhemmäksi.

Neljää aineenopettajaa koskeneet haastattelut paljastivat sellaisen asenteellisen pohjavireen, jolla saattaa olla merkitystä matematiikkauskomusten muuttumisen vaikeuteen ja hitauteen. Opettajilla oli taipumusta aliarvioida oman opetuksen uudistuneisuutta tai omien ideoiden merkitystä ja pikemminkin nähdä perinteinen opetustapa 'hyveenä'. Tämä viittaisi siihen, että kouluyhteisössä on hyväksyttävämpää ja suotavampaa toimia samalla tavoin kuin muutkin toimivat (sosiaalinen suotavuus, Lundberg & Linnakylä 1992).

Posner ym. (1982) huomauttavat, että uskomusten muuttuminen tai paremminkin korvautuminen on epätodennäköistä, elleivät ne osoittaudu tarpeettomiksi. Tämä voi puolestaan tapahtua vain silloin, kun yksilö asettaa ne kyseenalaisiksi eikä pysty enää sulauttamaan niitä uskomusjärjestelmäänsä. Mikäli tällainen tilanne syntyy, on uskomuksen muuttuminen sittenkin viimeinen vaihtoehto. Nimittäin sen jälkeen kun uskomukset ovat saaneet muotonsa, yksilöt pyrkivät rakentamaan niiden suojaksi selityksiä, jotka voivat olla joko oikeita tai sitten täysin keksittyjä. Suojausmekanismit muodostavat lopulta itseään toteuttavan systeemin: uskomukset vaikuttavat toimintamuotoihin, jotka ovat sopusoinnussa näiden uskomusten kanssa ja siten vahvistavat niitä.

Hyvänä esimerkkinä perinteisten matematiikkauskomusten voimakkuudesta ja pysyvyydestä voi mainita Verschaffelin ym. (1997, 356–357) varsin tuoreen tutkimuksen, joka käsitteli luokanopettajakoulutuksessa olevien opiskelijoiden uskomuksia arkielämän tiedon ('terveen järjen') merkityksestä sanallisten tehtävien ratkaisemisessa. Kun opettajakokelaat käsittelevät sanallisia tehtäviä opetuksessaan, oli heillä voimakas taipumus jättää kaikki arkipäivän tieto ja realistiset tarkastelut pois. Sen sijaan nämä tulevat opettajat pyrkivät tulkitsemaan ja mallintamaan esitettyjä tehtäviä ei-realistisella ja mekaanisella tavalla. Samalla he kritisoivat tällaisten arkielämän tehtävien käyttämistä väittämällä, että oli täysin sopimatonta ja kohtuutonta esittää viidesluokkalaisille näin monimutkaisia ja huonosti muotoiltuja tehtäviä. Näiden argumenttien kautta välittyivät heidän pedagogiset uskomuksensa, joiden mukaan arkielämän tilanteisiin sijoitetut tehtävät ovat hyödyttömiä ja jopa vahingollisia sanallisten tehtävien opettamisen kannalta. Opettajakokelaiden mielestä tällaiset tehtävät johdattavat oppilaat pois ainoasta oikeasta opettamisen tavasta: opettaa oppilaat saamaan oikea numeerinen vastaus suorittamalla tehtävään 'kätkeyty' aritmeettiset operaatiot.

7.3 Uskomuksilla on merkitystä opettamiseen ja oppimiseen

Opettajien matematiikkauskomusten ja heidän opetuskäytäntöjensä välisiä yhteyksiä koskevat tulokset osoittivat, että joitakin johdonmukaisia yhteyksiä uskomusten ja opetuk-

sen toteutustapojen välillä voitiin havaita. Kuitenkaan mitään erityisen vahvoja yhteyksiä ei löydetty. Selvimmin yhteydet näkyivät sekä luokan- että aineenopettajilla siinä, että uskomuksiltaan vahvasti oppijakeskeiset opettajat käyttivät useammin keskustelevaa työtapaa ja panivat enemmän painoa asioiden soveltamiselle kuin harjoittelukeskeiset opettajat. Tämä on tärkeä ja jo monissa aikaisemmissa tutkimuksissa havaittu tulos (mm. Cooney & Shealy 1997; Swan 1998; Thompson 1984).

Yleisempi havainto oli kuitenkin se, että tuloksissa ilmeni 'yhteensopimattomuutta' uskomusten ja toteutustapojen välillä, mikä on myös tuotu esille aikaisemmassa kansainvälisessä tutkimuksessa (mm. Deforges & Cockburn 1987). Yhteensopimattomuus ilmeni kahdella tapaa. Ensinnäkin havaittiin, että vaikka opettajaryhmien uskomuksissa ilmeni eroavuuksia, niin opetustoimenpiteet olivat samanlaiset. Toiseksi havaittiin, että vaikka opettajaryhmän uskomuksissa painottuivat selkeästi oppijakeskeisyyttä suosivat piirteet, olivat opettajien säännöllisesti käyttämät opetuksen työmuodot hyvin perinteisiä ja suorituskeskeisiä.

Tulokset ovat selkeä osoitus siitä, että opettajien matematiikkauskomukset eivät ole yksinkertaisella tavalla yhteydessä opetuksen käytäntöön, vaan että tämä yhteys on todella monimutkainen. Kysymys voi silloin kohdistua siihen, onko tutkimuksessa onnistuttu riittävän hyvin selvittämään uskomusten ja opetuskäytännön välisiä kytkentöjä. On selvää, että käytetyllä menetelmällä on puutteensa. Kyselyaineiston ja sen tilastollisen analysoinnin perusteella ei ole juurikaan mahdollista tavoittaa sitä yhteyttä, joka vallitsee opettajan uskomusten ja hänen toimintatapansa välillä. Se on aina yksilöllinen ja vaihtelee tilanteesta toiseen, mikä tuli paremmin esille opettajien haastatteluissa. Munby (1984) huomauttaakin, että opettajan kysyttäessä ilmaisemat uskomukset eivät ole välttämättä yhteneviä niiden uskomusten kanssa, jotka ovat olennaisesti vaikuttamassa ainutkertaisessa opetustilanteessa. Kyselylomakkeisiin vastaaminen tarjoaa myös mahdollisuuden ilmaista edistyksellisempiä uskomuksia kuin mitä opetustodellisuus on (Lundberg & Linnakylä 1992).

Voidaan myös kysyä, miksi opettajien matematiikkauskomusten ja heidän opetuskäytäntöjensä välillä on olemassa epäsuhtaa. Miksi opettajat eivät toimi opetuksessaan sillä tavoin kuin mihin heidän uskomuksensa antaisivat mahdollisuuden? Ensinnäkin opettajat voivat kokevat ahdistuneisuutta monista asioista: vanhemmat saattaisivat vastustaa uusia menetelmiä, uuden kokeilu saattaisi johtaa oppilaiden arvosanojen laskuun tai oppilaat eivät pitäisi opetustavan vaihtamisesta, koska ovat tottuneet jo tiettyyn 'rutiiniin'. Toiseksi opettajat kokevat, että uusien lähestymistapojen opiskelu ja opetuksen valmistelu vie koulutyön ohella paljon aikaa. Opettajat joutuvat punnitsemaan kuinka paljon voim käyttää aikaa valmisteluun ja arviointiin sekä millä tavoin jaan aikaa tiedon välittämisen ja asioiden keksimisen välillä oppitunnin aikana. Yli 20 erilaisen oppilaan kanssa työskentely tuo tiettyjä rajoituksia: mikä on hyvä yhdelle, on usein huono toiselle.

Uskomusten välittymistä opetuskäytäntöön voidaan kokonaisvaltaisemmin tulkita Ernestin (1991) esittämällä tavalla, jossa koulun sosiaalisen kontekstin merkitys nähdään ensiarvoisen tärkeänä (omaksutut vs. toteutetut uskomukset, s. 76). Tämä merkitys välittyi kouluyhteisön eri intressiryhmien (oppilaat, vanhemmat, opettajakollegat, rehtori) erilaisina, jopa ristiriitaisina odotuksina. Myös monilla muilla tekijöillä kuten oppisisällöillä, oppimateriaaleilla, arviointiohjeilla, opetusjärjestelyillä, säästöpäätöksillä, lomautuksilla, koulun ilmapiirillä jne. on oma merkittävä vaikutuksensa. Opettajaan kohdistuukin voimakkaita paineita, jotka vaikuttavat omien opetus- ja oppimisuksomusten hyväksymiseen ja niiden toteuttamiseen. Useimmiten nämä monista suunnista tulevat rajoitteet merkitsevät sitä, että toteutuva opetus näyttyy hyvin erilaisena kuin mihin aikomukset ja uskomukset olisivat antaneet mahdollisuuden. Sosiaalistamiseksi on monesti niin voimakas, että vaikka saman koulun opettajilla olisivat erilaiset uskomukset matematiikasta ja sen opettamisesta, niin he silti opettavat samalla tavalla.

Ernestin (1991) esittämän uskomusten välittymismallin mukaisesti opettajien opetusprosessien muuttuminen ja heidän uskomustensa mukautuminen kulkevat rinnakkain. Toisin sanoen opettajien matematiikkauskomusten ja opetuskäytännön suhde on luonteeltaan dialektinen (mm. Hoyles 1992; Thompson 1991). Opettajat toimivat opetuksessaan mieluummin omaksumallaan perinteisellä tavalla, koska heidän on todella vaikeaa käsittää sitä, että oppilaat oppivat matematiikkaa 'tyhjästä' (Nolder 1990). Jos on kysymys uudenlaisen menettelyn kokeilemisestä tai luokan kontrolloinnin säilyttämisestä, niin jälkimmäisen on saatava etusija, koska opettajien on pystyttävä hallitsemaan ja ennustamaan luokan tapahtumia.

Edellä kuvatun mukaisesti esimerkiksi luokanopettajien varsin vahvat oppijakeskeisyys-uskomukset eivät useinkaan jaksa kantaa opetuksen käytäntöön saakka. Vaikka opettajan tavoitteena olisikin toiminta, jossa opiskeltavaa sisältöä lähestytään yhteisesti erilaisia materiaaleja ja toiminnallisuutta hyväksi käyttäen, minkä lisäksi työskennellään ja harjoitellaan pareittain tai pienryhmissä, niin toteutuva työskentely on varsin toisenlainen. Äärimuodossaan se saattaa olla jopa sitä, että oppilaat tekevät itsekseen matematiikan oppikirjasta tietyn sivumäärän mukaisen 'urakan' ja tarkistavat myös itsenäisesti tehtävät tarkistusrasteilla olevista vastauskirjoista. Missä määrin opettajien uskomukset ovat johdonmukaisia heidän opetuskäytäntönsä kanssa, näyttäisi riippuvan opettajien taipumuksesta reflektoida (tarkkailla) omaa toimintaansa. Refleктоimalla omien toimenpiteidensä vaikutuksia oppilaisiin, opetustilanteisiin ja omiin uskomuksiinsa, opettajat kehittävät ns. kontekstiherkkyttä, jonka avulla he pystyvät valitsemaan ja toteuttamaan tilannekohtaisesti sopivaa opetusta noudattaen paremmin omia uskomuksiaan ja menettelyjään.

Opettajien matematiikkauskomusten merkitys tuli myös näkyville, kun niiden yhteyttä oppilaiden oppimistuloksiin tarkasteltiin tilastollisten monitasomallien avulla. Luokanopettajilla harjoittelukeskeiset uskomukset selittivät oppilaiden oppimistuloksia siten, että opettajan vahvat harjoittelukeskeiset uskomukset vaikuttivat oppilaiden suorituksiin heikentävästi. Aineenopettajilla puolestaan esitys- ja menettelytapoja korostavat uskomukset kuuluivat oppimistulosten vaihtelua selittävien tekijöiden joukkoon. Mitä enemmän sääntöjen opettelua, symboleilla operoimista ja täsmällistä kielenkäyttöä korostavat uskomukset opettajalla olivat, sitä heikommat olivat oppilaiden suoritukset.

Tulokset ovat kiinnostavia, mutta herättävät toki myös monia kysymyksiä. Kyseiset tarkastelut tehtiin tieteellisestä uteliaisuudesta, koska tutkimusaineistot tarjosivat siihen mahdollisuuden. Kun aikaisemman opettaja- ja uskomustutkimuksen perusteella tiedetään, että opettajien ajatteluprosessien sekä heidän toimintansa ja sen havaittavien vaikutusten väliset yhteydet ovat erittäin kompleksiset (Clark & Peterson 1986, s. 20), liittyy opettajien uskomusten ja oppilaiden oppimistulosten keskinäiseen tarkasteluun runsaasti epävarmuus-tekijöitä ja selvitettäviä kysymyksiä. Miten opettajien uskomusten välittyminen tapahtuu? Millä tavoin opettajien matematiikkauskomukset ovat yhteydessä oppilaiden uskomuksiin? Missä määrin oppilaiden uskomukset ovat yhteydessä heidän oppimiseensa? Kuinka hyvin opettajien uskomusten arvioinnin luotettavuutta pystytään parantamaan?

Kiinnostavaa näissä tuloshavainnoissa on se, että ne tuntuvat sisällöllisesti luonteilta. Keskeinen sanomahan tuloksissa on se, että hyvin perinteinen ja laskutaitopainotteinen matematiikan opetus ei enää tällä hetkellä tuota sellaisia oppimiskokemuksia ja oppimistuloksia, jotka tämän ajan nuorille olisivat merkityksellisiä ja hyödyllisiä ja joita oppimistulosten arvioinnissa tällä hetkellä painotetaan. Uskomusten ja oppimisen väliset yhteydet tarjoavatkin jatkotutkimukselle runsaasti uusia haasteita.

7.4 Uskomukset, opettajankoulutus ja matematiikan opetuksen muutos

Matematiikan opetuksen uudistumisessa opettajat ovat avainasemassa. Miten opettajan kohdalla muuttuminen voi tapahtua? Kuinka opettajankoulutus voi edistää opettajien ammatillista kehittymistä esitettyjen uudistuspyrkimysten mukaisesti? Millaiset kokemuksia tarvitaan opettajamuutoksen aikaansaamiseksi? Tämänkin tutkimuksen tulokset osoittavat, että koulu yhteisöllä on tärkeä merkitys sille, millaisen opetustavan opettajat omaksuvat. Toinen merkittävä tekijä on se, kuinka hyvin opettajat ovat tietoisia omista uskomuksistaan matematiikkaa ja sen opettamista ja oppimista kohtaan, koska uskomukset vaikuttavat heidän alttiuteensa toimeenpanna muutosta. Olisikin tärkeää, että muutos ja muuttuminen nähtäisiin olennaisena osana opettajan työtä ja että muutoksen siemenet kylvettäisiin jo opettajan ammatillisen uran varhaisessa vaiheessa käyttäen hyväksi niitä sosiaalisia konteksteja, joissa opettajat oppivat opettamaan.

Kun ajattelemme matematiikan opetussuunnitelmamuutoksia ja niiden suhdetta opettajien toimintaan, liittyy niihin monenlaisia ongelmia. Jokainen muutos on monimuotoinen ja syvälinen prosessi, johon sisältyy lukuisia koulutuspoliittisia periaatteita ja keskeisiä tavoitteenasetteluja. Sellainen opetussuunnitelmallinen lähestymistapa, joka ei ota huomioon opettajia ja heidän työskentelytilannettaan muutosta välittävänä tekijänä, on teoreettiselta perustaltaan heikko ja tuomittu epäonnistumaan. Mikäli muutoksen halutaan olevan muutakin kuin 'tekninen toimenpide' (Hoyles 1992), sen tulee olla vuorovaikutuksessa matematiikan opetuksen ja oppimisen perusoletusten kanssa. Opetussuunnitelman toteuttamista ja muutosta ei voida määrätä ulkoapäin, vaan sen täytyy tapahtua sisältä – koulujen ja opettajien kautta. Tällöin myös opettajien uskomukset ja niiden merkitys opettajan työn jäsentäjänä on otettava huomioon.

Kun matematiikanopetuksen julkilausuttuna tavoitteena on suosia ongelmakeskeistä työskentelytapaa ja oppilaiden kokemusmaailman hyödyntämistä opiskelussa, tarvitaan myös voimaperäistä koulutuksellista ja materiaalista panostamista opettajistoon. Käynnissä oleva LUMA-ohjelma on yksi esimerkki tällaisesta. Usein on kuitenkin tilanne sellainen, että kun opettajat yrittävät liittää opetukseensa uudentyyppejä ('konstruktivistisia') lähestymistapoja, he tekevät sen ainoastaan pintauskomusten tasolla. Tällainen työskentely ei yleensä onnistu sen vuoksi, että toimintatavat eivät ole sopusoinnussa opettajien ydinuskomusten kanssa. Nämä ydinuskomukset ikään kuin 'estävät' opettajia hyväksymästä sellaisia ajatuksia, joiden mukaan opiskelun jäsentäminen ja toteuttaminen heille totutusta poikkeavalla tavalla olisi mahdollista. Opettajille saattaa tällöin kuitenkin syntyä sellainen vaikutelma, että he ovat jo merkittävästi muokanneet opetusmenetelmiään ja että he itse asiassa jo toteuttavat toisenlaista opetustapaa.

Matematiikan opetuksessa ollaan tällä hetkellä paradigmanmuutoksen keskellä. Tietämys ja käsitykset siitä, mitä ja millä tavoin matematiikkaa on mahdollista opettaa, ovat dramaattisesti muuttuneet monien opettajien omista kouluajoista. Todellisuudessa yksi vakavimmista matematiikan opetuksen uudistumisen esteistä on ollut se, että käytännön opetus on vahvasti itseään säilyttävää. Opettajat, joiden toivotaan toteuttavan opetustaan uusien tavoitteiden ja oppimista koskevien periaatteiden mukaisesti, ovat kuitenkin 'vanhan' opetustradition ja opetussuunnitelman tuotteita. Suuri osa nykyisistä matematiikan opettajista on läpikäynyt kouluopetuksensa ja opettajankoulutuksensa aikana, jolloin matematiikan opetussuunnitelmien sisältö oli vahvasti menetelmäpainotteinen, minkä lisäksi kouluympäristö ja arviointitavat vahvistivat sääntöihin ja kaavoihin pohjautuvaa opetusta. Tämän seurauksena opettajien uskomusjärjestelmät ovat rakentuneet sellaisiksi, että opettajien on useinkin ollut mahdotonta ymmärtää uusien opetussuunnitelmien periaatteita ja ratkaisuja. Myös oppikirjat 'opettajan opetussuunnitelmina' ovat tarjonneet legitimiin ja turvalliseen mahdollisuuden oman 'uskonnon' säilyttämiseen.

Opettajat, jotka ovat tottuneet toteuttamaan perinteistä 'menetelmällistä' opetusta, eivät ole välttämättä tarvinneet paljoa tietämystä siitä, kuinka oppilaat oppivat matematiikkaa. Heidän tehtävänä on ollut selvittää oppilailleen tietyt suoritustavat oppikirjojen esittämällä tavoilla. Tämän vuoksi näiltä opettajilta myös puuttuu sellaista uudempaa tietämystä matematiikasta ja oppilaiden oppimisesta, joka on aivan olennaista innostavan ja tuloksekkaan opiskelun kannalta.

Matematiikan opettajien arvosteleminen tai syylittäminen tässä tilanteessa on kaikkein hyödyttömintä, mitä saatettaisiin tehdä. On täysin hedelmätöntä ja epärealistista pelkäänsä vaatia, että opettajien tulee ymmärtää ja opettaa matematiikkaa eri tavalla kuin he aikaisemmin ovat tehneet. Aivan yhtä vähän kuin voimme sanoa, että 'panemme oppilaat oppimaan matematiikkaa', on sopimatonta esittää, että 'panemme opettajat muuttamaan opetustaan'. Kysymys ei myöskään ole siitä, että 'vanha opetustapa' kokonaan mitätöidään. Sen sijaan joudumme vakavasti pohtimaan niitä keinoja, joilla matematiikan opettajia voidaan auttaa ja tukea heidän ammatillisessa kehittämisessään. On pyrittävä näkemään kysymysten laajemmat syyt ja etsimään niihin sen mukaisia ratkaisuja. Keskeiseksi tavoitteeksi voisi Sahlbergin (1996) tapaan esittää, että yhä enemmän opettajat hylkäisivät yksityisyyttä ja yksinäisyyttä suosivan toimintamallin ja suuntautuisivat kohti kollegiaalista ja yhdessä tapahtuvaa työskentelyä.

Millä tavoin opettajien matematiikkauskomuksiin voidaan sitten vaikuttaa? Miten uskomukset voivat muuttua tai korvautua? Millaisia kokemuksia opettajat tarvitsevat, jotta todellista muutosta heidän opetuskäytännöissään tapahtuisi? Voidaan myös kysyä, onko uskomusten muuttaminen tarpeellista tai onko se edes suotavaa (mm. Hoyles 1992; Nespor 1989)?

Uskomukset eivät muutu pakolla. Olennaisinta on, että luodaan mahdollisuudet ja olosuhteet uskomusten muuttumiselle, sillä ainoastaan opettajien oma toiminta tekee uskomusten muuttumisen mahdolliseksi. Opettajien peruskoulutuksen ja täydennyskoulutuksen yksi tärkeimmistä haasteista olisikin auttaa koulutettavia tulemaan tietoisiksi omista uskomuksistaan ja esittämään perusteluja näiden uskomusten järkevyydestä ja pätevyydestä. Uskomukset voivat muuttua vasta, kun niistä ensin ollaan tietoisia (Väljjarvi 1993). Samalla on kuitenkin varmistettava se, että on löydettävissä vaihtoehtoisia tai uusia uskomuksia vanhojen tilalle. Se, mitä opettajankouluttajat ja tutkijat voivat tehdä, on tarjota ideoita, kehittämismahdollisuuksia ja toimintamalleja. Niiden tehtävänä on rohkaista opettajia asioiden tarkasteluun, tiedostamiseen ja reflektointiin, jolloin syntyy myös mahdollisuuksia opettajien henkilökohtaiselle kasvuille. Ilman tätä tiedostamista koulutustilaisuudet ja kehittämishankkeet ovat huonoimmillaan vallitsevan opetustavan ikuistamista, kuten Kaplan (1991) on pessimistisesti todennut.

Perinteiset koulutuspäivät on havaittu kovin tehottomiksi asenne- tai uskomusmuutosten kannalta. Tämä johtuu siitä, että uskomusten kohdalla pintatason muutokset eivät ole riittäviä, vaan tarvitaan muutoksia opettajien ydinuskomuksiin. Kun opettajat palaavat koulustilaisuuksista takaisin kouluun uudet ajatukset ja mahdollisuudet mielessään, olisi äärimmäisen tärkeää saada tukea näiden mahdollisuuksien toteuttamiselle päivittäisessä opetustyössä. Jos opettajat voivat yhdessä keskustella kokemuksistaan jonkun menetelmän käytöstä, niin suuretkin asenne- ja uskomusmuutokset ovat mahdollisia. Muutokset ovat vielä pysyvämpiä, mikäli opettajat voivat havaita lähestymistavan tai menetelmän vaikutukset myös oppilaiden oppimisessa. Uskomusten muuttuminen voi tapahtua eri tavoin: se voi olla seurausta toiminnan muuttumisesta ja myös päinvastoin.

Esimerkkinä tästä voidaan mainita pari vuotta sitten julkaistu tutkimus, jossa selvitettiin niin opettajien uskomuksissa, tiedoissa kuin opetustavoissakin tapahtuvia muutoksia yhden vuoden aikana (Franke ym. 1997, 269–272). Tulokset osoittivat, että 90 prosenttia opettajista muutti sekä uskomuksiaan että opetuskäytäntöjään hankkeen aikana. Yllättävämpi havainto oli kuitenkin se, että opettajien lähtötilanteen uskomukset ja käytännöt olivat vain heikosti yhteydessä siihen, milloin, kuinka paljon ja millä tavoin muutoksia tapahtui. Sellaiset opettajat, joiden uskomukset ja opetustavat olivat enemmän yhdenmukaiset projektin ajatusten kanssa, eivät edenneet nopeammin ja suuremmin harppauksin kuin toiset opettajat. Kolme muuttumisen tapaa olivat vallitsevia. Kolmasosalla opettajista uskomukset muuttuivat ennen opetuskäytäntöjä, kolmasosalla käytännöt muuttuivat ensin ja uskomukset sitten ja loput opettajista muuttivat uskomuksiaan ja käytäntöjään samanaikaisesti. Merkittävin tulos koski muutosalttiutta. Muutosprosessin alkuvaiheessa opettajat olivat herkempiä ottamaan käyttöönsä sellaisia vaihtoehtoisia lähestymistapoja ja käytäntöjä, joihin he olivat päässeet tutustumaan. Opetustapojen monipuolistaminen saattaisi siten olla hyvä keino saada uudistumisprosessi liikkeelle. Myöhemmässä vaiheessa opetuskäytännön muutoksen jatkuminen ei näyttäisi kuitenkaan olevan mahdollista ilman uskomusten muuttumista. Uskomusten muuttumisen kautta opettajat pystyvät paremmin sitoutumaan itsesyntyiseen ja itseään ylläpitävään uudistumisprosessiin, joka tarjoaa opettajille enemmän mahdollisuuksia rakentaa oppilaiden tarpeet ja edellytykset huomioivaa matematiikan opiskelua.

Koska siis opetustavan muuttuminen on vaativa ja pitkäkestoinen prosessi, on kouluyhteisön tuki olennainen edellytys opettajien ammatillisen kehittymisen kannalta (Leino, A.-L. & Leino, J. 1997). Opettaja oppii toisilta opettajilta, johdolta ja ympäristöstään tutkimustietoa ja tutkijoita unohtamatta. Opettajille on tärkeitä saada vierailta toistensa luokissa ja keskustella kokemuksistaan kollegojensa kanssa, jotta uskomusten muuttumisessa päästäisiin opetuskäytännön tasolle. Sen vuoksi on tärkeää luoda riittävästi sellaisia konkreettisia tilanteita, joissa opettajat voivat yhdessä pohtia ajattelu- ja toimintatapojaan.

Tärkeä keino auttaa matematiikan opettajia kehittämään uudenlaisia näkökulmia luokkahuoneessa toimimiselle, on antaa heidän nähdä ja kokea sellaisia opiskelutilanteita, joiden tarjoamat oppimiskokemukset ovat riittävän vahvoja kyseenalaistamaan pitkänkin opetustradition. Opettajien täytyy voida henkilökohtaisesti tunnistaa, että tässä on nyt sellaista oppimista, jota he haluaisivat saada aikaan omissa opetusryhmissään. Opetustilanteiden on oltava riittävän haasteellisia opettajien oman matemaattisen osaamisen tasolla. Tällöin opettajat kykenevät lisäämään omaa matemaattista tietämystään ja voivat myös kokea syvempää oppimista. Nämä tilanteet suovat opettajille mahdollisuuden kohdata matematiikkaa konstruoimisen, tutkimisen ja ajattelun kautta eikä vain yleisesti hyväksytyinä, kumuloituvana ja valmiina tiedon rakennelmana. Yleensä tämä opettajan toimintatavan uudelleen jäsentäminen vaatii yhteistä ja riittävän pitkäkestoista työskentelyä.

Väljærvi (1993) huomauttaa, että uskomusten uudelleen arvioiminen edellyttää avointa ja myönteistä ilmapiiriä, jossa ihmiset voivat tuoda esiin omia ajatuksiaan, heidän osallistumisestaan rohkaistaan ja erilaisia näkemyksiä arvostetaan. 1990-luvun aikana onkin toteutettu lukuisia kehittämishankkeita (mm. Cobb ym. 1990; Simon & Schifter 1991), joissa on onnistuttu saamaan kokeneiden matematiikan opettajien uudistumisprosessi hyvin käyntiin kiinnittämällä erityistä huomiota opetustilanteiden kokemukselliseen reflektointiin (myös Wood ym. 1991; Philippou & Christou 1998, Senger 1999). Aivan olennaisena elementtinä näissä hankkeissa on ollut opettajien omien uskomusten tunnistaminen ja uudelleenarviointi, mistä on ollut seurauksena myös muutoksia opettajien uskomuksissa.

Simonin ja Schifterin (1991) toteuttamassa hankkeessa opettajat reflektoivat ensin omaa opetuskäytäntöään ja -kokemuksiaan. Tämän jälkeen opettajat toteuttivat uudelleen muotoiltuja lähestymistapoja ja opetusratkaisuja oppituntitilanteissa, joissa heitä pyrittiin tukemaan monin tavoin. Työskentelyn jälkeen muutoksia havaittiin opettajien uskomuksissa, jotka liittyivät mm. sellaisiin kysymyksiin kuten, mitä on oppilaiden oppiminen, mitä on matematiikka, millaista on matemaattinen työskentely ja mistä hyvä matematiikan opetus muodostuu.

Cobb ym. (1990) toteuttivat kehittämishankkeen, jossa he seurasivat matematiikan opettajien opetuskäytännön muuttumista. Työskentely tapahtui kunkin opettajan omassa luokassa, missä opettaja oppi tekemällä ja reflektoimalla omia toimintojaan. Tutkijoiden tehtävänä oli auttaa opettajaa kehittämään henkilökohtaisia, kokemuspohjaisia perusteluja opetuskäytännön uudelleenorganisoinnille sekä auttaa häntä toimimaan uudella tavalla, eikä suinkaan näyttää opettajalle kuinka opettaa tietyllä tavalla. Ensiarvoisen tärkeä vaihe työskentelyssä oli se, kun opettaja ymmärsi, että hänen opetustapansa ei toimi kunnolla. Tämä loi välttämättömän 'henkisen tason' opettajan ja tutkijoiden hyödylliselle yhteistyölle. Kehittämishankkeen jälkeen opettajat pystyivät hahmottamaan uudella tavalla omaa rooliaan opettajana. Aiemmalle roolille oli luonteenomaista esittää 'virallinen tapa' ratkaista matematiikan tehtäviä ja arvostella niitä. Uudessa tavassa oli sen sijaan olennaista käyttää omaa

auktoriteettia matemaattisen vuorovaikutuksen ohjaamiseen ja ylläpitämiseen kuuntelemalla, tarjoamalla vaihtoehtoja ja selkeyttämällä oppilaiden ajattelutapoja ja ilmaisuja.

Monien opettajien kohdalla on myös tarvetta sisällöllisen tietämyksen kohentamiseen. Jotta opettajat voisivat tarjota oppilailleen merkityksellisiä ja mielekkäitä oppimistilanteita, heillä itsellään täytyisi olla mahdollisuus omassa koulutuksessaan tehdä matematiikkaa: tutkia, analysoida, rakentaa malleja, kerätä ja esittää tietoa, perustella asioita ja ratkaista ongelmia. Esimerkiksi ongelmaratkaisupainotteista työskentelyä koskien olisi autettava opettajia rikastuttamaan ja uudistamaan tietämystään, osaamistaan ja uskomuksiaan, koska niillä on ratkaiseva merkitys realististen ongelmatilanteiden mallintamisessa ja saatujen tulosten tulkinnassa. Koulutuksessa tulisi riittävästi harjoitella todellisten ja kompleksisten tehtävien ratkaisemista sekä keskustella keskenään niihin sisältyvistä mallintamis- ja tulkintakysymyksistä. Pelkästään yliopistokurssien lukumäärän lisääminen koulutukseen ei kuitenkaan takaa sitä, että esimerkiksi opettajiksi opiskelevat saavat tarvitsevansa sisällölliset tiedot (Borko ym. 1992). Sen vuoksi opettajankoulutuksessa (sekä perus- että täydennyskoulutuksessa) tulisi koulutettavilla olla riittävästi mahdollisuuksia vahvistaa myös omaa pedagogista sisältötietämystään (mm. sisältöjen hyödyllisimmät esitysmuodot, tehokkaimmat analogiat ja havainnollistamistavat). Samalla olisi tarvetta kiinnittää huomiota siihen, että opettajat pystyisivät näkemään ja ymmärtämään opiskeltavia asioita oppilaiden näkökulmasta eikä aikuisen näkökulmasta.

Luokanopettajiksi opiskelevien matemaattisessa koulutuksessa on olennaista, että opiskelijat omaksuvat näkemyksen matematiikasta inhimillisenä toimintana, joka on paljon muutakin kuin oppisisältöjen 'läpikäyntiä'. Opettajakokelailla tulisi olla koulutuksessaan aikaa ja kannustimia sellaiseen harjoitteluun ja reflektointiin, joka on välttämätöntä heidän ammatillisen tietoperustansa kehittämiseksi. Samalla nämä tulevat opettajat tulisi saada arvioimaan omia uskomuksiaan siitä, kuinka oppilaat oppivat. Opiskelun kohteena tulisi matematiikan sisältöjen rinnalla olla erityisesti vuorovaikutustilanteet oppilaiden kanssa ja se, kuinka tämä vuorovaikutus voi rohkaista oppilaita työskentelemään matemaattisesti.

Vankempi sisällöllinen ja pedagoginen tietämys luo hyvät olosuhteet myös uskomusten uudelleenarvioinnille ja muovaamiselle. Samalla se lisää ratkaisevasti opettajan päätöksenteon joustavuutta. Sellaiset matematiikan opettajat, joilla on tasapainoiset ja joustavat uskomukset sekä vankka sisällöllinen ja pedagoginen osaaminen, pystyvät suunnittelemaan ja toteuttamaan opetustaan oppilaiden ajattelun ja olosuhteiden pohjalta.

Arvioinnin merkitys on myös tärkeä. Koska arvioinnin vaikutukset opetukseen ja oppimiseen ovat kiistattomat, voivat edistykselliset arviointimenetelmät toimia todellisen muutoksen ja uudistumisen välineenä. Esimerkiksi uudenlaiset ja elämänläheiset ongelmaratkaisutehtävät (mm. Linnakylä & Kupari 1996) saavat opettajan pohtimaan, miten omat oppilaat niistä selviävät ja millä tavoin siihen voisi vaikuttaa.

7.5 Tutkimuksen merkitys ja uudet haasteet

Tässä tutkimuksessa on tarkasteltu opettajien matematiikkauskomuksia, niiden rakennetta ja luonnetta sekä uskomusten merkitystä matematiikan opetuksen muovaajana. Opetus on tällöin ymmärrettävä laajassa merkityksessä, jolloin siihen sisältyvät sekä opettamisen ja opiskelun käytännöt että myös oppimisen ehdot. Hahmottamalla uskomusten rakenteita, selvittämällä uskomusten yhteyksiä opettajien opetustyöskentelyyn ja analysoimalla uskomusten muuttumista on pyritty ymmärtämään, miksi opettajat ajattelevat ja toimivat tietyillä tavoin. Tutkimuksessa on tehty vertailua perinteisen ja uudistushakuisen matematiikan opetuksen välillä. Traditionaalista ja innovatiivista opettajatyyppejä on käytetty kansainvälisen tutkimuskäytännön tavoin muutoksen kuvaamisen välineenä. Samalla on etsitty syitä sille, miksi opettajien toimintatapojen muuttuminen ja uudistuminen on vaikea ja pitkälinen prosessi. Tutkimuksen tavoitteena on ollut ymmärtää opettajien toimintaa, ei arvostella tai syyllistää opettajia muuttumattomuudesta ja perinteisen säilyttämisestä. Kirjoittajan mielestä tällä tavoin on mahdollista etsiä ja löytää keinoja matematiikan opetuksen uudistumiselle.

Tutkimus nostaa selkeästi esiin sen, että matematiikan opettajilla on vahvoja matematiikkauskomuksia, joilla on myös kytkentöjä opettamiseen, opiskeluun ja oppimiseenkin. Se luo jäsentynyttä kuvaa uskomusten luonteesta ja rakenteesta ja antaa siten perustaa uudelle tutkimukselle. Erityisesti ryhmittelyanalyysin ja profiilimenetelmien sekä monitasomallien käyttö osoittautuivat tässä hyödyllisiksi ja uusia mahdollisuuksia avaaviksi metodisiksi välineiksi. Lisäksi tutkimus pyrkii korostamaan uskomusten tiedostamisen ja uudelleenarvioinnin tärkeyttä ja tähän liittyviä opettajakoulutuksellisia tarpeita. Tutkimus on tärkeällä tavalla opettanut, miten opettajat käsittävät itsensä ja työnsä. Se on opettanut paremmin ymmärtämään niitä tilanteita ja olosuhteita, joissa opettajat toimivat, sekä arvostamaan niitä muutoksia, joita opettajat myös tekevät. Useimmiten ne pienetkin muutokset, joita me tutkijat emme aina osaa arvostaa, ovat merkityksellisiä opettajille ja heidän omalle kehitykselleen.

Opettajien uskomuksiin kohdistuva tutkimus voi toimia sillanrakentajana opetuksen teorian ja käytännön välillä. Pitemmällä aikavälillä tämä voi johtaa uudenlaiseen tietämykseen, joka on ekologisesti tarkoituksenmukaista ja teoreettisesti perusteltua. Tällainen tietämys voi rikastaa opettajien perus- ja täydennyskoulutusta ja auttaa käytännön opetuksen kehittämishankkeiden toteutuksessa. Kun huomiota kiinnitetään opettajien uskomuksiin ja laajemmin heidän ajatteluunsa, niin heitä tarkastellaan silloin nimenoman opetuksen asiantuntijoina.

Tutkimushanke oli kokonaisuudessaan kirjoittajan itsensä suunnittelema ja toteuttama. Perusotteeltaan se oli kvantitatiivinen, jota sen myöhemmässä vaiheessa täydennettiin ja syvennettiin laadullisella aineistolla. Lähestymistavan valinta johtui suurimmaksi osaksi omasta koulutus- ja työhistoriasta. Vaikka saatettaisiin pitää luonnollisena, että matema-

tikko lähestyy oman alueensa tutkimuskysymyksiä objektiivisella ja määrällisellä otteella, niin en kuitenkaan näe itseäni aivan tällaisena tutkijana. Yritän tarkastella matematiikan opetuksen ja oppimisen problematiikkaa tavalla, jossa 'määrällisellä' tiedolla on oma merkityksensä. Sen lisäksi tutkimustiedolle tulee antaa subjektiivista ja kontekstuaalista tulkintaa, jotta sillä olisi opetuksen parissa työskentelevien kannalta enemmän sanottavaa.

Tämän pitkän tutkimustyön aikana olen kokenut tilanteen, joka on varmasti tuttu useimmille tutkimusta tekeville. Tutkimuksen kannalta kiinnostavat kysymykset ovat tutkimuksen edetessä muuttaneet muotoaan. Ensi alkuun keskeisinä pidetyt ongelmat ovat tulleet vähemmän kiinnostaviksi ja toiset kysymykset ovat nousseet tärkeämmiksi. Esimerkiksi tutkimuksen alussa tehdyt metodologiset ratkaisut ovat merkinneet sitä, että niiden muuttaminen ei ole enää jatkossa ollut mahdollista. Todennäköisesti myös jotkut tehdyistä tuloshavainnoista ovat saattaneet saada subjektiivista painotusta. Kirjoittajan omat uskomukset matematiikan opetusta kohtaan eivät ole voineet olla vaikuttamatta joihinkin valintoihin tai tulkintoihin. Tätä vaikutusta on pyritty kuitenkin minimoimaan sillä, että tutkimuksen osavaiheita on esitelty usein kongresseissa ja tutkijatapaamisissa ja näin hankittu vahvistusta tehdyille päätelmille.

Käytetyllä tutkimusotteella on omat puutteensa ja rajoituksensa tarkasteltavien ilmiöiden kannalta. Empiirisen aineiston puutteena voidaan pitää opettajanäytteiden eitospohjaisuutta ja niiden pienuutta. Tämä on rajoittanut tulosten yleistettävyyttä. Kyselylomakkeita käyttäen ja opettajia haastatteleamalla ei ole mahdollista saada riittävää kuvaa opettajien uskomuksista eikä heidän opetuskäytännöstään. Jatkossa kysymyksiä tulisivikin lähestyä intensiivisemmällä tutkimusotteella. Opettajiin ja opetukseen kohdistuvan arvioinnin tulisi tapahtua luonnollisessa opetuskontekstissa ja tehdä oikeutta opetuksen dynamikalle, sillä opettajat eivät ajattele ja toimi samalla tavalla eri tilanteissa ja erilaisten oppilaiden kanssa. Mahdollisimman luotettavan kuvan saaminen voidaan varmistaa tarkastelemalla kysymystä useamman kuin yhden tietolähteen ja menetelmän (triangulaation) avulla. Jo nyt käytetyn haastatteluaineiston merkitys oli aineenopettajien uskomusten kannalta olennaisen tärkeä. Jos nyt voisi jälkiviisaasti aloittaa tutkimuksen uudelleen, olisi laadullisen lähestymistavan vahvempi mukanaolo keskeisin muutos.

Tutkimus nostaa esiin myös uusia tutkimushaasteita. Ensinnäkin uskomustutkimuksen piirissä ei ole vielä olemassa yhtenäistä tapaa ymmärtää ja tulkita empiirisiä tutkimshavaintoja tai alueen teoreettista hahmotusta (Hoyles 1992). Jatkotutkimuksessa olisivikin tarvetta syvällisemmin analysoida kontekstin vaikutusta opettajien uskomuksiin ja ottaa tarkastelun kohteeksi myös mahdollisuus useista – jopa keskenään ristiriitaisista – uskomusjärjestelmistä. Millä tavoin opettajien uskomukset ovat vuorovaikutuksessa opetuksen kontekstimuutujien kanssa? Millainen yhteys on olemassa opettajan reflektiivisyyden ja uskomusten johdonmukaisuuden välillä sekä näiden ja opetuskäytäntöjen välillä?

Toiseksi tulisi selvittää lähemmin koulutuksen ja kehittämishankkeiden vaikutuksia opettajien uskomuksiin ja opettajien muutoshalukkuuteen. Vaikka jo onkin olemassa kokemuksia opettajankoulutushankkeista, joissa on onnistuttu vaikuttamaan opettajien matematiikkauskomuksiin, on jatkotutkimukselle tarvetta. Millaiset koulutukselliset toimenpiteet ovat tehokkaita pyrittäessä vaikuttamaan opettajien uskomuksiin matematiikasta ja matematiikan opetuksesta? Kuinka pitkäaikaista koulutusta tarvitaan, jotta tulokset olisivat suotuisia ja pysyviä? Kolmanneksi kaivattaisiin tutkimusta opettajien uskomusten ja opetuksen innovaatioiden välisestä vuorovaikutuksesta. Neljänneksi olisi tarvetta kehittää tutkimuksen metodologiaa ja tapoja saada tutkimus yhtenäisemmäksi ja vertailtavammaksi. Uskomusten arviointia varten tulisi kehitellä vuorovaikutteisten menetelmien yhdistelmiä, jotka sisältävät haastatteluja, havainnointeja, kirjallisia raportointeja ja portfolioita. Myös uskomuskyselyjä tulisi kehittää ja parantaa.

Ja vielä lopuksi. Tämänkin tutkimuksen tulokset tukevat sitä, että matematiikan opettajat pystyvät luomaan sellaisia opiskeluympäristöjä, joissa oppilaiden matemaattista tiedonrakentamista ja ymmärtämistä voidaan yhä paremmin kehittää. Näiden ympäristöjen on oltava opettajien järjestämiä ja ne voivat syntyä vain heidän uskomustensa ja tietämyksensä pohjalta. Puhumalla opiskeluympäristöistä, joissa käsiteltävät tilanteet ovat mahdollisimman usein elämänläheisiä, mielekkäitä ja merkityksellisiä oppilaille, halutaan korostaa sitä, että juuri opettajien pyrkimykset ja aikomukset – eivät mitkään yksittäiset toimenpiteet – määrittävät tämän opiskelun luonteen. Sellaisessa opiskelussa opettajien tärkeimpiä tehtäviä on oppia tuntemaan oppilaidensa matemaattista tietämystä ja harmonisoimaan opetusmenetelmänsä tätä tietämystä vastaavaksi. Tälle uudistumistyölle ei ole mitään päätepidettä, vaan kyseessä on polku, jonka kulkeminen johtaa yhä voimakkaampaan ammatilliseen kasvuun. Niille, jotka rohkenevat kohdata tällaiseen opetuskäytäntöön sisältyviä epäilyjä, turhautumisia ja epävarmuuksia, tämä polku tarjoaa varmasti myös palkkioita ja sisäistä tyydytystä.

“It would not be enough to change every classroom in a school, in turn. What is at issue is a new intellectual culture for schools, a culture that legitimates and supports curiosity and challenge as the engines of learning. Not only will it be necessary for teachers to reinvent mathematics instruction from within a new conceptual frame, it also will be necessary for teachers and administrators to reinvent school culture from within that new conceptual frame. It will also be necessary for parents and the larger public to develop an understanding of the reform movement’s hopes for their children so that they can knowledgeablely provide support.” (Fennema & Nelson 1997, 415.)

LÄHTEET

- Abelson, R. 1979. Differences between belief systems and knowledge systems. *Cognitive Science* 3, 355–366.
- Ball, D.L. 1988. Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics* 8 (1), 40–48.
- Ball, D.L. 1991. Research on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation. *Teoksessa J. Brophy (toim.) Advances in research on teaching*. Greenwich, CT: JAI Press. Volume 2, 1–48.
- Barbeau, E.J. 1989. Mathematics for the public. Paper presented at the meeting of the International Commission on Mathematics Instruction. September 1989, Leeds University, England.
- Battista, M.T. 1992. Teacher beliefs and the reform movement in the mathematics education. *Phi Delta Kappan* 75 (6), 462–470.
- Bauersfeld, H. 1992. Integrating theories for mathematics education. *For the Learning of Mathematics* 12 (2), 19–28.
- Bauersfeld, H. 1995. The structuring of the structures. *Teoksessa L.P. Steffe & J. Gale (toim.) Constructivism in education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Beijaard, D. & Verloop, N. 1996. Assessing teachers' practical knowledge. *Studies in Educational Evaluation* 22 (3), 275–286.
- Bishop, A.J. 1988. *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Bishop, A.J. 1992. International perspectives on research in mathematics education. *Teoksessa D.A. Grows (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 710–723.
- Bishop, A.J. 1993. Influences from society. *Teoksessa A. Bishop, K. Hart, S. Lerman & T. Nunes. Significant influences on children's learning of mathematics*. Paris: Unesco. Document Series 47, 1–26.
- Bishop, A.J. & Goffree, F. 1986. Classroom organisation and dynamics. *Teoksessa B. Christensen, A.G. Howson & M. Otte (toim.) Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel, 309–365.
- Bishop, A.J. & Nickson, M. 1983. A review of research in mathematical education. Part B. The social context of mathematics education. Windsor, UK: NFER-Nelson.
- Björkqvist, O. 1993. Social konstruktivism och utvärdering. *Teoksessa L. Haapasalo & P. Kupari (toim.) Konstruktivismi matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman kehittämisessä*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 6, 8–17.
- Björkqvist, O. (toim.) 1998. *Mathematics teaching from a constructivist point of view*. Åbo Akademi University. Department of Teacher Education. Reports from the Faculty of Education 3.

- Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C.A., Underhill, R.G., Jones, D. & Agard, P.C. 1992. Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily. *Journal for Research in Mathematics Education* 23 (3), 194–222.
- Boyer, C. 1994. *Tieteiden kuningatar. Matematiikan historia osa I*. Helsinki: Art House.
- Bracey, G.W. 1983. On the compelling need to go beyond minimum competency. *Phi Delta Kappan* 64 (10), 717–721.
- Brown, C.A. 1985. A study of the socialization to teaching of a beginning mathematics teacher. Athens: University of Georgia. Doctoral dissertation.
- Brown, C.A. & Cooney, T.J. 1982. Research on teacher education: A philosophical orientation. *Journal of Research and Development in Education* 15 (4), 13–18.
- Brown, S.J. & Cooney, T.J. 1991. Stalking the dualism between theory and practice. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM)* 23 (4), 112–117.
- Bruner, J. 1966. *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Burton, L. 1989. Mathematics as a cultural experience: Whose experience? Teoksessa C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop & P. Gerdes (toim.) *Mathematics, education and society. Science and technology education*. Paris: Unesco. Document Series 35, 16–19.
- Burton, L. 1999. The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics* 37 (2), 121–143.
- Calderhead, J. 1996. Teachers: Beliefs and knowledge. Teoksessa D.C. Berliner & R.C. Calfee (toim.) *Handbook of educational psychology*. New York: Macmillan.
- Calderhead, J. & Robson, M. 1991. Images of teaching: Student teachers' early conceptions of classroom practice. *Teaching & Teacher Education* 7 (1), 1–8.
- Carpenter, T.P., Fennema, E., Peterson, P.L. & Carey, D.A. 1988. Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 19 (5), 385–401.
- Chatfield, C. & Collins, A.J. 1989. *Introduction to multivariate analysis*. London: Chapman and Hall.
- Clark, C.M. 1988. Asking the right questions about teacher preparation: Contributions of research on teaching thinking. *Educational Researcher* 17 (2), 5–12.
- Clark, C.M. & Peterson, P.L. 1986. Teachers' thought processes. Teoksessa M.C. Wittrock (toim.) *Handbook of research on teaching* (3. painos). New York: Macmillan, 255–296.
- Clement, J. 1982. Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education* 13 (1), 16–30.
- Cobb, P. & Steffe, L.P. 1983. The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education* 14 (2), 83–94.
- Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. 1990. Classrooms as learning environments for teachers and researcher. Teoksessa R. Davis, C. Maher, & N. Noddings (toim.) *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Series 4*. Reston, VA: NCTM, 125–146.
- Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. 1992. Characteristics of classroom mathematical traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal* 29 (3), 573–604.

- Confrey, J. 1990. What constructivism implies for teaching. Teoksessa R.B. Davis, C.A. Maher & N. Noddings (toim.) *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Series 4. Reston, VA: NCTM, 107–122.
- Connelly, F.M. & Clandinin, J. 1986. On narrative methods, personal philosophy and narrative unities in the study of teaching. *Journal of Research in Science Teaching* 23 (4), 293–310.
- Conroy, J. 1987. Monitoring school mathematics: Teachers' perceptions of mathematics. Teoksessa T.A. Romberg & D.M. Stewart (toim.) *The monitoring of school mathematics: Background papers. Volume 3: Teaching and future directions*. Madison: Wisconsin Center for Education Research, 75–92.
- Cooney, T.J. 1985. A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education* 16 (5), 324–336.
- Cooney, T.J. 1988. The issue of reform: What have we learned from yesteryear? *Mathematics Teacher* 80 (5), 352–363.
- Cooney, T.J. & Shealy, B.E. 1997. On understanding the structure of teachers' beliefs and their relationships to change. Teoksessa E. Fennema & B.S. Nelson (toim.) *Mathematics teachers in transition*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 87–109.
- D'Ambrosio, U. 1985. Ethno-mathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics* 5 (1), 44–48.
- Davis, P.J. 1991. Applied mathematics as a social instrument. Teoksessa M. Niss, W. Blum & I. Huntley. *Teaching of mathematical modelling and applications*. Chichester: Ellis Horwood, 1–9.
- Davis, P.J. & Hersh, R. 1981. *The mathematical experience*. Boston: Birkhäuser.
- Deforges, C. & Cockburn, A.D. 1987. *Understanding the mathematics teacher: A study of primary school practice*. Basingstoke: Falmer Press.
- Dewey, J. 1933. *How we think*. Boston: D.C. Heath.
- Dionne, J. 1984. The perception of mathematics among elementary school teachers. Teoksessa J. Moser (toim.) *Proceedings of the sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the PME*. Madison: University of Wisconsin, 223–228.
- Dionne, J. 1987. Elementary school teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching and learning: twelve case studies. Teoksessa J.C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (toim.) *Proceedings of the Eleventh International Conference of the Psychology of Mathematics Education*. Montreal, Canada, 84–92.
- Dunkin, M.J. & Biddle, B.J. 1974. *The study of teaching*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Dörfler, W. & McLone, R.R. 1986. Mathematics as a school subject. Teoksessa B. Christensen, A.G. Howson & M. Otte (toim.) *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel, 49–97.
- Ernest, P. 1988. The attitudes and practices of student teachers of primary school mathematics. *Proceedings of PME12. Vetzprem, Hungary. Volume I*, 288–295.
- Ernest, P. 1989a. The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching* 15 (1), 13–33.
- Ernest, P. 1989b. The impact of beliefs on the teaching of mathematics. Teoksessa P. Ernest (toim.) *Mathematics teaching. The state of the art*. London: Falmer Press, 249–254.

- Ernest, P. 1991. *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.
- Ernest, P. 1992. Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and implications for mathematics education. Paper presented in the 7th International Congress on Mathematical Education. August 1992, Quebec, Canada.
- Fennema, E. & Leder, G.C. (toim.) 1990. *Mathematics and gender*. New York: Teachers College Press.
- Fennema, E. & Nelson, B.S. (toim.) 1997. *Mathematics teachers in transition*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Ford, M.I. 1988. Fifth grade teachers and their students: An analysis of beliefs about mathematical problem solving. ERIC, ED 310 912.
- Fox, L.H., Brody, L. & Tobin, D. 1980. *Women and the mathematical mystique*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- Frank, M. 1990. What myths about mathematics are held and conveyed by teachers. *Arithmetic Teacher* 37 (5), 10–12.
- Franke, M. L., Fennema, E. & Carpenter, T. 1997. Teachers creating change: Examining evolving beliefs and classroom practices. Teoksessa E. Fennema & B.S. Nelson (toim.) *Mathematics teachers in transition*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 255–282.
- Freudenthal, H. 1973. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. 1978. Weeding and sowing. Preface to a science of mathematics education. Dordrecht: Reidel.
- Furinghetti, F. 1996. A theoretical framework for teachers' conceptions. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) *Current state of research on mathematical beliefs III*. Proceedings of the MAVI-3 workshop. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Reports 170, 19–25.
- Goldin, G.A. 1990. Epistemology, constructivism and discovery learning in mathematics. Teoksessa R. Davis, C. Maher & N. Noddings (toim.) *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Series 4. Reston, VA: NCTM, 36–47.
- Goldstein, H. 1995. *Multilevel statistical models*. London: Edward Arnold.
- Good, T.L. 1979. Teacher effectiveness in the elementary school. *Journal of Teacher Education* 30 (2), 52–64.
- Good, T.L. & Brophy, J.E. 1986. School effects. Teoksessa M.C. Wittrock (toim.) *Handbook of research on teaching*. New York: McGraw Hill, 570–602.
- Good, T.L. & Grows, D. 1978. *Missouri mathematics effectiveness project: A program of naturalistic and experimental research*. Columbia: University of Missouri, Center for Research in Social Behaviour.
- Goodman, J. 1988. Constructing a practical philosophy of teaching: A study of preservice teachers' professional perspectives. *Teaching & Teacher Education* 4 (2), 121–137.
- Green, T.F. 1971. *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.

- Grossman, P.L., Wilson, S.M. & Shulman, L.S. 1989. Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. Teoksessa M.C. Reynolds (toim.) Knowledge base for the beginning teacher. New York: Pergamon Press, 23–36.
- Grows, D.A., Good, T.A. & Dougherty, B.J. 1990. Teacher conception about problem solving and problem solving instruction. Teoksessa G. Booker, P. Cobb & T.N. de Mendicuti (toim.) Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Oaxtapec, Mexico. Volume 1, 135–142.
- Guskey, T.R. 1986. Staff development and the process of teacher change. *Educational Researcher* 15 (5), 5–12.
- Haapasalo, L. 1985. Ongelmakeskeisen matematiikanopetuksen metodiikka. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitoksen opetusmonisteita 10.
- Haapasalo, L. 1991. Konstruktivismi matemaattisen käsitteenmuodostuksen ohjaamisessa ja analysoimisessa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 43.
- Haapasalo, L. 1994. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Vaajakoski: MEDUSA-Software.
- Haapasalo, L. & Kupari, P. 1991. Matematiikan opetuksen ja opetus suunnitelman kehityssuuntia. Teoksessa T. Keranto, M. Huhananti, O. Karjalainen & V. Komulainen (toim.) Matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkiminen ja kehittämistyö. Oulun yliopisto. Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan opetusmonisteita ja selosteita 38, 4–18.
- Hannula, M. 1997. Pupils' reactions on different kind of teaching. Teoksessa G. Törner (toim.) Current state of research on mathematical beliefs IV. Proceedings of the MAVI-4 workshop. University of Duisburg. Preprint 383, 33–40.
- Hersh, R. 1986. Some proposals for revising the philosophy of mathematics. Teoksessa T. Tymoczko (toim.) New directions in the philosophy of mathematics. Boston: Birkhäuser, 9–28.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.) Conceptual and procedural knowledge: A case of mathematics. London: Erlbaum, 1–27.
- Hirsjärvi, S. 1984. Kasvatusfilosofia ja ihmiskäsitys. Jyväskylän yliopiston kasvatustieteen laitoksen julkaisu B 5.
- Hirsjärvi, S. & Hurme, H. 1982. Teemahaastattelu. Helsinki: Yliopistopaino.
- Hirsjärvi, S. & Hurme, H. 1984. Merkityksen ongelma haastattelututkimuksessa. Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden laitoksen julkaisu A 3.
- Hoskonen, K. 1996. Mathematical beliefs of eight-graders: What is mathematics? Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Current state of research on mathematical beliefs III. Proceedings of the MAVI-3 workshop. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 170, 48–52.
- House, E.R. 1995. Evaluoinnin futuurin perfekti. Teoksessa S. Takala (toim.) Arviointi ja koulutuksen laadun kehittäminen. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 23–32.
- Hoyles, C. 1992. Mathematics teaching and mathematics teachers: A meta-case study. *For the Learning of Mathematics* 12 (3), 32–44.

- Howson, G. & Wilson, B. 1986. School mathematics in the 1990s. ICMI Study Series. Cambridge: Cambridge University Press.
- Jahnke, H.N. 1986. Origins of school mathematics in early nineteenth-century Germany. *Journal of Curriculum Studies* 18 (1), 85–94.
- Junnila, O. 1995. MAOL 1935–1995. Kuusi vuosikymmentä matemaattisten aineiden asialla. Helsinki: MAOL.
- Kangasniemi, E. 1989. Opetussuunnitelma ja matematiikan koulusaavutukset. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 28.
- Kangasniemi, E. 1996. Koulusaavutusten arviointi opetuksen kehittämiseksi ja oppimisen edistämiseksi. Teoksessa H. Louekoski (toim.) Yrjö Yrjönsuuri -juhlaseminaari 30.1.1996. Helsinki: Opetushallitus, 25–48.
- Kansakoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö II. 1952. Varsinaisen kansakoulun opetussuunnitelma. Komiteanmietintö 1952: 3. Helsinki: Valtioneuvoston kirjapaino.
- Kaplan, R.G. 1991. Teachers' beliefs and practices: A square peg in a square hole. Teoksessa R.G. Underhill (toim.) Proceedings of the thirteenth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Blacksburg, VA: Virginia Tech, 119–125.
- Karjalainen, O. 1982. Matematiikan opetuksen affektiiviset tavoitteet ja niiden toteutumisen arvioiminen peruskoulun ala-asteella. Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia 10.
- Keitel, C. 1987. What are the goals of mathematics for all. *Journal of Curriculum Studies* 19 (5), 393–407.
- Keitel, C. 1993. Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematics teaching by applications. Teoksessa J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley & M. Niss. Innovation in maths education by modelling and applications. Chichester: Ellis Horwood, 19–30.
- Keranto, T. 1992. Kontekstuaalinen lähestymistapa matematiikan opetukseen ja oppimiseen. IV osaraportti. Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia 82.
- Kilpatrick, J. 1987. What constructivism might be in education? Teoksessa J.C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (toim.) Proceedings of the Eleventh Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Montreal, Canada, 3–27.
- Kiuasmaa, K. 1982. Oppikoulu 1880–1980: Oppikoulu ja sen opettajat koulujärjestyksestä peruskouluun. Oulu: Pohjoinen.
- Komiteanmietintö 1970. Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö 1970: A5. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Komiteanmietintö 1988. Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean välimietintö 1988: 30. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Komiteanmietintö 1989. Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean loppumietintö 1989: 45. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Konttinen, R. 1995. Arvostelusta näyttöön – koulutuksen arvioinnin kehityspiirteitä Suomessa. Teoksessa S. Takala (toim.) Arviointi ja koulutuksen laadun kehittäminen. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 9–22.

- Kouluhallitus 1976. Matematiikka. Ehdotus perustavoitteiksi ja perusoppiaineeksi peruskoulussa. Helsinki: Kouluhallitus.
- Kouluhallitus 1982. Peruskoulun matematiikan oppimäärä ja oppimääräsuunnitelma. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Kouluhallitus 1985. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Kroll, D. 1989. Connections between psychological learning theories and the elementary mathematics curriculum. Teoksessa P.R. Trafton & A.P. Shulte (toim.) *New directions for elementary school mathematics*. 1989 Yearbook. Reston, VA: NCTM.
- Krygowska, A.Z. 1979. Mathematics education at the first level in post-elementary and secondary schools. Teoksessa *New trends in mathematics teaching*. Volume IV. Paris: Unesco, 31–46.
- Kuhs, T. 1980. Teachers conceptions of mathematics. East Lansing: Michigan State University. Unpublished doctoral dissertation.
- Kuhs, T.M. & Ball, D.L. 1986. Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions. East Lansing: Michigan State University, Center on Teacher Education.
- Kupari, P. 1993a. Mistä rohkeus ja keinot koulumatematiikan uudistumiseen? Teoksessa E. Kangasniemi & R. Kontinen (toim.) *Lue, etsi, tutki*. Tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Juva: WSOY, 114–131.
- Kupari, P. 1993b. Laskutaidotko kadonneet? Peruskoululaiset matematiikan kokijoina ja taitajina. Teoksessa P. Linnakylä & H. Saari (toim.) *Oppiiko oppilas peruskoulussa*. Peruskoulun arviointi 90-tutkimuksen tuloksia. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 81–104.
- Kupari, P. 1993c. Millä tavoin matematiikan opiskelu ja opetus on muuttunut. Teoksessa V. Brunell & P. Kupari (toim.) *Peruskoulu oppimisympäristönä*. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 81–104.
- Kupari, P. 1994. Applied problem solving in Finnish school mathematics education in the 1980s. Results and experiences in the international context. University of Jyväskylä. Institute for Educational Research. Publications Series A 58.
- Kupari, P. 1995. Mathematics teachers' beliefs and conceptions of mathematics education. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) *NORMA-94 Conference*. Proceedings of the Nordic Conference on Mathematics Teaching in Lahti 1994. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research report 141, 110–115.
- Kupari, P. 1996a. Changes in teachers' beliefs of mathematics teaching and learning. Teoksessa G. Törner (toim.) *Current state of research on mathematical beliefs II*. Proceedings of the 2nd MAVI workshop. University of Duisburg. Preprint 340, 25–31.
- Kupari, P. 1996b. Miten peruskoulun matematiikan oppimiselle on käynyt säästöjen kourissa? Teoksessa R. Jakku-Sihvonen, A. Lindström & S. Lipsanen (toim.) *Toteuttaako peruskoulu tasa-arvoa?* Helsinki: Opetushallitus, 436–450.
- Kupari, P. 1997a. Teachers' mathematical beliefs – four teacher cases. Teoksessa G. Törner (toim.) *Current state of research on mathematical beliefs IV*. Proceedings of the MAVI-4 workshop. University of Duisburg. Preprint 383, 71–77.

- Kupari, P. 1997b. Mitä matematiikasta opitaan koulussa? Valtakunnallisten arviointitutkimusten tuloksia. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 216–237.
- Kuuskoski, U. 1974. Koulumatematiikan uudistamisesta. *Matemaattisten aineiden aikakauskirja* 38 (4), 223–227.
- Lakatos, I. 1976. *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lave, J. 1988. *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. New York: Cambridge University Press.
- Leder, G.C. & Gunstone, R.F. 1990. Perspectives on mathematics learning. *International Journal of Educational Research* 14 (2), 105–120.
- Lehtinen, E., Kinnunen, R., Vauras, M., Salonen, P. Olkinuora, E. & Poskiparta, E. 1989. *Oppimiskäsitys koulun kehittämisessä*. Kouluhallitus. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Leino, A-L. & Leino, J. 1997. *Opettaminen ammattina*. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Leino, J. 1984. Koulumatematiikan opetuksen nykytilanteesta ja kehityssuunnista. *Matemaattisten aineiden aikakauskirja* 48 (2), 119–124.
- Leino, J. 1987. Ongelmanratkaisun merkityksestä ja toteutustavoista. *Dimensio* 51 (4), 46–50.
- Leino, J. 1989. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa: Heijastumia ICME-6:sta. Teoksessa K. Seinelä (toim.) *Matemaattis-luonnontieteellisten aineiden didaktiikan päivät 1988*. Tampereen yliopisto. Tampereen opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A12, 40–49.
- Leino, J. 1992a. Uutta ajattelua matematiikan opetukseen. *Kasvatus* 23 (1), 40–46.
- Leino, J. 1993. Origins and varieties of constructivism. Teoksessa P. Kupari & L. Haapasalo (toim.) *Constructivist and curriculum issues in school mathematics education*. University of Jyväskylä. Institute for Educational Research. Publication series B 82, 1–8.
- Lerman, S. 1983. Problem solving or knowledge centered: The influence of philosophy on mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14 (1), 59–66.
- Lerman, S. 1993. The role of teachers in children's learning of mathematics. Teoksessa A. Bishop, K. Hart, S. Lerman & T. Nunes. *Significant influences on children's learning of mathematics*. Paris: Unesco. Document Series 47, 61–85.
- Lesh, R. & Lamon, S.J. (toim.) 1992. *Assessment of authentic performance in school mathematics*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- Lester, F.K. & Garofalo, J. 1987. The influence of affects, beliefs and metacognition on problem solving behaviour: some tentative speculations. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association in Washington, DC. ERIC, ED 281 758.
- Lindberg, L. & Grevholm, B. (toim.) 1998. *Kvinnor och matematik*. Konferensrapport 20–21 april 1996. Göteborgs universitet. Institutionen för ämnesdidaktik. Avdelningen för matematik.
- Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. *Matikkatupa-kokeilu peruskoulun toisella luokalla*. Tampereen yliopisto. *Acta Universitatis Tampereensis* A 307.

- Lindgren, S. 1994. Problem solving – diligent work. The beliefs of elementary school teachers on teaching mathematics. An experimental study in Tokyo 1991. Teoksessa O. Björkqvist & L. Finne (toim.) *Matematikdidaktik i Norden. Rapporten från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi* 8, 162–170.
- Lindgren, S. 1995. Pre-service teachers' beliefs and conceptions about mathematics and mathematics teaching. Reports from the Department of Teacher Education in Tampere University A 4.
- Lindgren, S. 1996. Thompson's levels and views about mathematics. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM)* 28 (4), 113–117.
- Linn, R.L. & Gronlund, N.E. 1995. *Measurement and assessment in teaching*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Linnakylä, P. 1995. Lukutaidolla maailmankartalle. *Kansainvälinen lukutaitotutkimus Suomessa*. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteiden tutkimuslaitos.
- Linnakylä, P. & Kupari, P. 1996. Autenttinen arviointi peruskoulun opiskelua ja arviointimenetelmiä uudistamassa. Teoksessa A. Räisänen & T. Frisk (toim.) *Silta uuteen opiskelijarviointiin. Arviointia opiskelija-arvioinnista*. Helsinki: Opetushallitus, 95–121.
- Linnakylä, P. & Malin, A. 1997. Oppilaiden profiloituminen kouluviihtyvyyden arvioinnissa. *Kasvatus* 28 (2), 112–127.
- Lokki, O. 1974. Miltä koulun matematiikan opetus näyttää teknillisen korkeakouluopetuksen perustana? *Matemaattisten aineiden aikakauskirja* 38 (3), 130–142.
- Lundberg, I. & Linnakylä, P. 1993. *Teaching reading around the world. IEA study of reading literacy*. Hamburg: IEA.
- Luonnontieteiden koulutuksen arviointi 1993. *Luonnontieteiden koulutuksen arviointiryhmän loppuraportti*. Opetusministeriö. Koulutus- ja tiedepolitiikan linjan julkaisusarja 3. Helsinki: Painatuskeskus.
- Malaty, G. 1986. Matematiikan opetuksesta. Osa 2: Mikä on olennaista? *Dimensio* 50 (5), 46–47.
- Malin, A. 1997. *Monitasomallit koulututkimuksessa*. Suomen tilastoseuran vuosikirja 1996, 193–206.
- Malinen, P. 1971. Matematiikan opetuksen uudistamisen heikkouksia. *Matemaattisten aineiden aikakauskirja* 35 (3), 138–144.
- Malinen, P. 1977. Peruskoulun matematiikan opetussuunnitelman kehitys. *Kouluhallituksen tiedotuslehti* 4, 1–2.
- Malinen, P. 1986. Matematiikan opetussuunnitelmien uudistaminen pohjoismaissa tutkimusten valossa. Teoksessa E. Lehtinen (toim.) *Tieto, tunne ja matematiikan opetus*. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunta. *Julkaisusarja B:20*, 91–99.
- Malinen, P. 1997. *Katsaus matematiikan oppimisen, oppimisvaikeuksien ja opetuksen tutkimukseen Suomessa*. Teoksessa P. Räisänen, P. Kupari, T. A. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia matematiikan opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki -Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 11–17.
- Malmio, B. 1937. *Piirteitä matematiikan opetuksesta*. *Matemaattisten aineiden aikakauskirja*. Helsinki: Suomen Matematiikan ja Fysiikan Opettajien Liitto, 145–162.

- Malmivuori, M-L. 1994. Affektiiviset tekijät matematiikan oppimisessa. Teoksessa H. Silfverberg & K. Seinelä (toim.) Ainedidaktiikan teorian ja käytännön kohtaaminen. Tampereen yliopisto. Tampereen opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A 18, 177–189.
- Mandler, G. 1990. A constructivist theory of emotion. Teoksessa N.L. Stein & B. Leventhal (toim.) Psychological and biological approaches to emotion. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 21–43.
- Mathematics counts 1982. Report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of Dr W H Cockroft. London: Her Majesty's Stationery Office.
- McLeod, D.B. 1987. Beliefs, attitudes and emotions: affective factors in mathematics learning. Teoksessa J.C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (toim.) Proceedings of the Eleventh International Conference of the Psychology of Mathematics Education. Montreal, Canada, 170–180.
- McLeod, D.B. 1992. Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. Teoksessa D.A. Grows (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: McMillan, 575–596.
- Middleton, J.A., Webb, N.L., Romberg, T.A. & Pittelman, S.D. 1990. Teachers' conceptions of mathematics and mathematics education. University of Wisconsin-Madison: Wisconsin Center for Education Research. School of Education.
- Moss, P.A. 1994. Can there be validity without reliability? *Educational Researcher* 23 (2), 5–12.
- Munby, H. 1984. A qualitative approach to the study of a teacher's beliefs. *Journal of Research in Science Teaching* 21 (1), 27–38.
- Mura, R. 1995. Images of mathematics held by university teachers of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 28 (4), 385–399.
- Männistö, Y. 1997. Kouluhallitus koulututkimuksen rahoittajana ja tutkimustiedon käyttäjänä. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 181.
- NCTM 1980. An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM 1989. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM 1991. The professional standards for teaching mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nespor, J. 1985. The role of beliefs in the practice of teaching: Final report of the teacher beliefs study. Austin: University of Texas. Research and Development Center for Teacher Education. Report 8024.
- Nespor, J. 1987. The role of beliefs in the practice of teaching. *Journal of Curriculum Studies* 19 (4), 317–328.
- Neyland, J. 1995. Neo-behaviourism and social constructivism in mathematics education. Teoksessa SAMEpapers 1995. Hamilton, New Zealand: University of Waikato. Centre for Science, Mathematics and Technology Education Research, 114–143.
- Niiniluoto, I. 1980. Johdatus tieteenfilosofiaan. Keuruu: Otava.
- Niiniluoto, I. 1984. Tiede, filosofia ja maailmankatsomus. Helsinki: Otava.

- Nisbet, R. & Ross, L. 1980. *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgement*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Nolder, R. 1990. Accomodating curriculum change in mathematics: Teachers' dilemmas. Teoksessa G. Booker, P. Cobb & T.N. de Mendicuti (toim.) *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Oaxtapec, Mexico. Volume 1, 167–174.
- Ojanen, S. 1993. Reflektiivisyys opetuksessa ja ohjauksessa. Teoksessa S. Ojanen (toim.) *Tutkiva opettaja: Opetus 21. vuosisadan ammattina*. Helsingin yliopisto. Lahden tutkimus- ja koulutuskeskuksen oppimateriaaleja 21, 125–147.
- Opetushallitus 1994. *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994*. Helsinki: Painatuskeskus.
- Opetusministeriö 1997. *Koulutuksen arviointistrategia*. Helsinki: Opetusministeriö.
- Paasonen, J., Pehkonen, E. & Leino, J. (toim.) 1993. *Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoriaa ja käytäntöä*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 116.
- Pajares, F.M. 1992. Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research* 62 (3), 307–332.
- Pehkonen, E. 1985. Miksi ongelmanratkaisua koulussa? *Matemaattisten aineiden aikakauskirja* 49 (5), 390–395.
- Pehkonen, E. 1991. *Probleemakentät matematiikan opetuksessa. Osa 2: Opettajankouluttajien käsityksiä probleemanratkaisun opettamisesta matematiikassa*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 98.
- Pehkonen, E. 1992. Opettajien uskomuksista matematiikasta ja sen opettamisesta. Teoksessa S. Tella (toim.) *Joustava ja laaja-alainen opettaja. Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 7.2.1992*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 100, 277–286.
- Pehkonen, E. 1993. What are Finnish teacher educators' conceptions about the teaching of problem solving in mathematics. *European Journal of Teacher Education* 16 (3), 237–256.
- Pehkonen, E. 1994a. On teachers' beliefs and changing mathematics teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik* 15 (3/4), 177–209.
- Pehkonen, E. 1994b. Opettajien matemaattisten uskomusten muuttamisesta. Teoksessa H. Silfverberg & K. Seinelä (toim.) *Ainedidaktiikan teorian ja käytännön kohtaaminen*. Tampereen yliopisto. Tampereen opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A 18, 59–66.
- Pehkonen, E. 1994c. Oppilaiden uskomukset rajoittavat heidän oppimismahdollisuuksiaan matematiikassa. Teoksessa S. Tella (toim.) *Näytön paikka: Opetuksen kulttuurin arviointi. Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 4.2.1994. Osa 2*, 175–181.
- Pehkonen, E. 1998. Comparing research results on professors' conceptions of mathematics. Teoksessa M. Hannula (toim.) *Current state of research on mathematical beliefs VII. Proceedings of the MAVI-7 workshop*. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research reports 198, 57-63.

- Pehkonen, E. & Lepmann, L. 1993. On teachers' conceptions about the role of answers in solving mathematical problems in Estonia and Finland. Teoksessa J.R. Becker & B.J. Pence (toim.) Proceedings of the 15th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Volume 2. San Jose, CA: San Jose State University, 203–209.
- Pehkonen, E. & Lepmann, L. 1994. Teachers' conceptions about mathematics teaching in comparison (Estonia – Finland). Teoksessa M. Ahtee & E. Pehkonen (toim.) Constructivist viewpoints for school teaching and learning in mathematics and science. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 131, 105–110.
- Pehkonen, E. & Lepmann, L. 1995. Vergleich der Auffassungen von Lehrern über den Mathematikunterricht in Estland und Finnland. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 139.
- Pehkonen, E. & Törner, G. 1994. Development of teachers' conceptions about mathematics teaching: What are the key experiences for the change? Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik. Universität Duisburg. Preprint 270.
- Pehkonen, E. & Törner, G. 1995. Mathematical belief systems and their meaning for the teaching and learning of mathematics. Teoksessa G. Törner (toim.) Current state of research on mathematical beliefs. Proceedings of the MAVI workshop. University of Duisburg. Preprint 310, 1–14.
- Pehkonen, E. & Zimmermann, B. 1990. Probleemakentät matematiikan opetuksessa ja niiden yhteys opetuksen ja oppilaiden motivaation kehittämiseen. Osa 1: Teoreettinen tausta ja tutkimusasetelma. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 86.
- Peterman, F.P. 1991. An experienced teacher's emerging constructivist beliefs about teaching and learning. Paper presented at the Annual Meeting of American Educational Research Association. Chicago, IL, 3.–7.4.1991. ERIC, ED 336 344.
- Peterson, P.L. & Barger, S.A. 1984. Attribution theory and teacher expectancy. Teoksessa J.B. Dusek (toim.) Teacher expectancies. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 159–184.
- Peterson, P., Swing, S., Stark, K. & Waas, C. 1984. Students' cognitions and time on task during mathematics instruction. *American Educational Research Journal* 21 (3), 487–515.
- Peterson, P.L., Fennema, E., Carpenter, T.P. & Loef, M. 1989. Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction* 6 (1), 1–40.
- Philippou, G.N. & Christou, C. 1998. The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 35 (2), 189–206.
- Pimm, D. 1987. *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. New York: Routledge & Kegan Paul.
- Pirie, S. & Kieren, T. 1992. Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 23 (5), 505–528.
- Popkewitz, T.S. 1988. Instructional issues in the study of school mathematics curriculum research. Teoksessa A.J. Bishop (toim.) *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, 221–249.

- Posner, G.J., Strike, K.A., Hewson, P.W. & Gertzog, W.A. 1982. Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education* 66 (2), 211–227.
- Rauste-von Wright, M. & von Wright, J. 1994. *Oppiminen ja koulutus*. Porvoo: WSOY.
- Resnick, L.B. 1987. *Education and learning to think*. Washington, DC: National Academy Press.
- Resnick, L.B. & Ford, W.W. 1981. *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Rinne, R. 1984. Suomen oppivelvollisuuskoulun opetussuunnitelman muutokset vuosina 1916–1970: Opetussuunnitelman intentioiden ja lähtökohtien teoreettis-historiallinen tarkastelu. *Turun yliopiston julkaisuja C 44*.
- Ritchie, G. & Carr, K. 1992. A constructivist critique of mastery learning in mathematics. *New Zealand Journal of Educational Studies* 27 (2), 191–201.
- Robitaille, D.F. & Garden, R.A. 1989. *The IEA study of mathematics II: Contexts and outcomes of school mathematics*. Oxford: Pergamon Press.
- Roehler, L.R., Duffy, G.G., Herrman, B.A., Conley, M. & Johnson, J. 1988. Knowledge structures as evidence of the 'personal': Bridging the gap from thought to practice. *Journal of Curriculum Studies* 20 (2), 159–165.
- Rokeach, M. 1968. *Beliefs, attitudes and values: A theory of organization and change*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Romberg, T.A. 1984. Classroom tasks, instructional episodes and performance in mathematics. *Proceedings of the 8th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Sydney, Australia, 116–126.
- Romberg, T.A. 1988. Changes in school mathematics: Curricular changes, instructional changes and indicators of change. New Brunswick, NJ: Center for Policy Research in Education.
- Romberg, T.A. 1992. Problematic features of the school mathematics curriculum. Teoksessa P.W. Jackson (toim.) *Handbook of research on curriculum*. New York: Macmillan, 749–774.
- Romberg, T.A. & Carpenter, T.P. 1986. Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. Teoksessa M.C. Wittrock (toim.) *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillan, 850–873.
- Saari, H. 1983. Koulusaavutusten affektiiviset oheissaavutukset. *Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisuja* 348.
- Saari, H. & Kupari, P. 1996. Missä peruskoulu säästi? Teoksessa R. Jakku-Sihvonen, A. Lindström & S. Lipsanen (toim.) *Toteuttaako peruskoulu tasa-arvoa?* Helsinki: Opetushallitus, 100–118.
- Sahlberg, P. 1996. Kuka auttaisi opettajaa. Post-moderni näkökulma opetuksen muutokseen yhden kehittämisprojektin valossa. *Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto*.
- Schifter, D. 1996. A constructivist perspective on teaching and learning mathematics. *Phi Delta Kappan* 77 (7), 492–499.
- Schoenfeld, A. 1983. Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science* 7 (4), 329–363.
- Schoenfeld, A. 1985. *Mathematical problem solving*. San Diego, CA: Academic Press.
- Schoenfeld, A. 1989. Explorations of students' mathematical beliefs and behaviour. *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (4), 338–355.

- Senger, E. 1999. Reflective reform in mathematics: The recursive nature of teacher change. *Educational Studies in Mathematics* 37 (3), 199–221.
- Shaw, K.L., Davis, N.T. & McCarty, J. 1991. A cognitive framework for teacher change. Teoksessa R.G. Underhill (toim.) *Proceedings of the thirteenth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Volume 2. Blacksburg, VA: Virginia Tech, 161–167.
- Shulman, L.S. 1986. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15 (2), 4–14.
- Simon, D.E. 1989. How autonomous are the teacher of mathematics. Teoksessa C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop & P. Gerdes (toim.) *Mathematics, education and society. Science and technology education*. Paris: Unesco. Document Series 35, 97–99.
- Simon, M.A. 1995. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education* 26 (2), 14–45.
- Simon, M.A. & Schifter, D. 1991. Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics* 22 (4), 309–311.
- Skemp, R. 1976. Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher* 26 (3), 9–15.
- Sorvali, T. 1991. Elias Lönnrot ja matematiikan opetus. *Karjalainen* 22.4.1991.
- Southwell, B. & Khamis, M. 1992. Beliefs about mathematics and mathematics education. Teoksessa B. Southwell, B. Perry & K. Owens (toim.) *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. University of Western Sydney, Nepean: Mathematics Education Research Group of Australasia, 497–509.
- Spiro, R. 1982. Subjectivity and memory. Teoksessa J.-F. Le Ny & W. Kintsch (toim.) *Language and comprehension*. New York: North-Holland, 29–34.
- Steffe, L.P. & Cobb, P. 1988. *Construction of arithmetical meaning and strategies*. New York: Springer.
- Steffe, L.P. & Neshet, P. (toim.) 1996. *Theories of mathematical learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Steffe, L.P. & Wiegel, H.G. 1992. On reforming practice in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 23 (5), 445–465.
- Swan, M. 1998. Discussion activities, teacher beliefs and the learning of mature, low attaining students. *Nordic Studies in Mathematics Education* 6 (3-4), 7–24.
- Syrjälä, L. & Numminen, M. 1988. Tapaustutkimus kasvatustieteessä. *Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia* 51.
- Syrjäläinen, E. 1992. Muuttuuko koulu? Koulu 2001-projektin muuttamisen mahdollisuudet ja rajat. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 111.
- Tall, D. 1998. Information technology and mathematics education: enthusiasms, possibilities and realities. Teoksessa C. Alsina, J.A. Alvarez, M. Niss, A. Pérez, L. Rico & A. Sfard (toim.) *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*. Sevilla, Spain: S.A.E.M. THALES, 65–82.

- Tella, S. 1994. Uusi tieto- ja viestintäteknikka avoimen oppimisympäristön kehittäjänä. Osa 1. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 124.
- The Underachieving Curriculum 1987. Assessing U.S. school mathematics from an international perspective. Champaign, IL: Stipes.
- Thompson, A. 1982. Teachers' conceptions of mathematics. Three case studies. Athens: University of Georgia. Unpublished doctoral dissertation.
- Thompson, A. 1984. The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics* 15 (2), 105–127.
- Thompson, A.G. 1991. The development of teachers' conceptions of mathematics teaching. Teoksessa R.G. Underhill (toim.) *Proceedings of the thirteenth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Blacksburg, VA: Virginia Tech, 8–14.
- Thompson, A.G. 1992. Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. Teoksessa D.A. Grouws (toim.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan, 127–146.
- Travers, K.J. & Westbury, I. (toim.) 1989. *The IEA study of mathematics I: Analysis of mathematics curricula*. Oxford: Pergamon Press.
- Törner, G. & Grigutsch, S. 1994. Mathematische Weltbilder bei Studienanfängern eine Erhebung. *Journal für Mathematik-Didaktik* 15 (3/4), 211–251.
- Underhill, R.G. 1988. Mathematics teachers' beliefs: Review and reflections. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 10 (3), 43–58.
- Van Fleet, A. 1979. Learning to teach: The cultural transmission analogy. *Journal of Thought* 14 (4), 281–290.
- Verschaffel, L., de Corte, E. & Borghart, I. 1997. Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction* 7 (4), 339–359.
- Vinner, S. 1983. Concept definition, concept image, and the notion of function. *International Journal for Mathematics Education, Science and Technology* 14 (3), 293–305.
- von Glasersfeld, E. 1984. An introduction to radical constructivism. Teoksessa P. Watzlawick (toim.) *The invented reality*. New York: Norton, 17–40.
- von Glasersfeld, E. 1987. Learning as a constructive activity. Teoksessa C. Janvier (toim.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 3–17.
- von Glasersfeld, E. 1992. A constructivist approach to experiential foundations of mathematical concepts. Teoksessa S. Hills (toim.) *The history and philosophy of science in science education*. Vol. II. Kingston, Ontario: Queen's University, 553–571.
- von Glasersfeld, E. 1995. *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: Falmer Press.
- von Wright, J. 1992. *Oppimiskäsitteiden historiaa ja pedagogisia seurauksia*. Helsinki: Opetushallitus.

- Väljjarvi, J. 1991. Uudistavan opetussuunnitelma-ajattelun lähtökohtia. Teoksessa E. Kangasniemi & H. Saari (toim.) Arviointia ja ajatuksia koulun kehittämistä. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 69, 59–70.
- Väljjarvi, J. 1993. Kurssimuotoisuus opetussuunnitelman moduulirakenteen sovelluksena lukiossa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 54.
- Weiner, B. (toim.) 1974. Achievement motivation and attribution theory. Morristown, NJ: General Learning Press.
- Wilson, S.M. 1990. The secret garden of teacher education. *Phi Delta Kappan* 72 (3), 204–209.
- Wood, T., Cobb, P. & Yackel, E. 1991. Change in teaching mathematics: A case study. *American Educational Research Journal* 28 (3), 587–616.
- Wood, T., Cobb, P. & Yackel, E. 1995. Reflections on learning and teaching mathematics in elementary school. Teoksessa L.P. Steffe & J. Gale (toim.) *Constructivism in education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 401–422.
- Zimmermann, B. 1991. Heuristik als ein Element mathematischer Denk- und Lernprozesse. Universität Hamburg. Habilitationsschrift. (Julkaisematon).

Tutkimuksen liitteet

Liite 1 Yhteenvetoa peruskoulun matematiikan opetuskäytännössä tapahtuneista muutoksista ja oppimistulosten kehityksestä aikavälillä 1979–1995. Taulukot ja kuviot.

Taulukko 1 Peruskoululaisten keskimääräinen ajankäyttö matematiikan kotitehtäviin, kaikkiin kotitehtäviin ja TV:n/videoiden katseluun vuosina 1979–95.

Oppilaan käyttämä aika (minuuttia/päivä)	Vuosi 1979		Vuosi 1990		Vuosi 1995	
	\bar{x}	s	\bar{x}	s	\bar{x}	s
Matem. kotitehtäviin						
4. luokka	32.2	34.7	22.9	18.0	-	-
6. luokka	28.3	19.3	25.0	19.1	-	-
9. luokka	22.8	17.1	17.9	13.6	19.1	14.6
Kaikkiin kotitehtäviin						
4. luokka	80.2	50.8	61.4	41.1	-	-
6. luokka	82.6	55.4	63.3	50.4	-	-
9. luokka	70.7	49.5	50.6	40.5	49.1	29.8
TV:n katseluun						
4. luokka	163.7	96.3	164.1	113.4	-	-
6. luokka	161.4	82.4	167.3	107.9	-	-
9. luokka	136.9	75.3	137.8	92.2	*)	-

*) Vuonna 1995 oppilaiden television ja videoiden katselua arvioitiin eri tavalla kuin aiemmin. Keskimääräinen käytetty aika oli noin 2,5 tuntia.

Taulukko 2 Matematiikan opetusryhmien jakautuminen oppilasmäärän mukaan peruskoulun yhdeksännellä luokalla vuosina 1979–95.

Opetusryhmän oppilasmäärä	Vuosi 1979 (%)	Vuosi 1990 (%)	Vuosi 1995 (%)
alle 13 oppilasta	17.4	6.2	0
13–15 oppilasta	9.2	40.0	16.2
16–20 oppilasta	20.0	50.7	55.9
21–25 oppilasta	27.5	1.6	25.0
yli 25 oppilasta	23.9	1.5	2.9

Taulukko 3 Matematiikan opetuksen työskentelymuotojen useus opettajien ja oppilaiden arvioimina eri luokka-asteilla vuonna 1990 ja 1995. (Vuoden 1995 osalta mukana ovat vain 9. luokan opettajien arviot.)

Työskentelymuoto	Tehdään "lähes joka tunti"	
	Opettajat (%)	Oppilaat (%)
Pääsälaskun harjoittelu		
- 4. luokka	36	25
- 6. luokka	39	26
- 9. luokka/90	20	20
- 9. luokka/95	7	-
Opettajan esittävä opetus		
- 4. luokka	91	75
- 6. luokka	83	88
- 9. luokka/90	88	81
- 9. luokka/95	78	-
Tehtävien laskeminen itseksään		
- 4. luokka	96	70
- 6. luokka	94	80
- 9. luokka/90	86	80
- 9. luokka/95	82	-
Keskusteleminen matematiikan tehtävistä ja niiden ratkaisuksista		
- 4. luokka	20	34
- 6. luokka	17	50
- 9. luokka/90	15	54
- 9. luokka/95	19	-

Taulukko 4 Matematiikasta pitämistä sekä matematiikan vaikeutta ja tärkeyttä kuvaavien asenneväittämien tuloksia peruskoulun ala-asteella vuonna 1990.

Asenneväittäjä	Samaa mieltä (%)			
	4. lk	N	6. lk	N
Matematiikasta pitäminen <i>Matematiikka on mielenkiintoista.</i>	47	1007	40	1055
<i>Matematiikka on jotain sellaista, josta pidän hyvin paljon.</i>	40	1001	30	1053
<i>Minusta on mukavaa päästä laskemaan luokan taululle.</i>	41	1006	25	1055
Matematiikan vaikeus <i>Matematiikka on minusta vaikeaa.</i>	10	1001	21	1054
<i>En selviydy kovin hyvin matematiikassa.</i>	13	1000	24	1055
<i>Kun kuulen sanan "matematiikka", minulle tulee vastenmielisyyden tunne.</i>	11	993	22	1053
Matematiikan tärkeys <i>On tärkeätä osata matematiikkaa, jotta saisi hyvän työpaikan.</i>	67	1000	67	1054
<i>Lähtötulevaisuudessa vaaditaan useimmissa ammateissa hyvää matematiikan taitoa.</i>	55	1005	66	1057

Taulukko 5 Yhdeksäsluokkalaisten matematiikasta pitämistä sekä matematiikan vaikeutta ja tärkeyttä kuvaavien asenneväittämien tuloksia vuosina 1990 ja 1995.

Asenneväittäjä	Samaa mieltä (%)			
	1990	N	1995	N
Matematiikasta pitäminen <i>Matematiikka on mielenkiintoista.</i>	45	1127	41	1162
<i>Matematiikka on jotain sellaista, josta pidän hyvin paljon.</i>	32	1123	24	1159
<i>Olen hyvä suorittamaan matematiikan tehtäviä.</i>	32	1125	33	1151
Matematiikan vaikeus <i>Matematiikka on minusta vaikeaa.</i>	34	1127	36	1163
<i>En selviydy kovin hyvin matematiikassa.</i>	35	1126	33	1150
<i>Kun kuulen sanan "matematiikka", minulle tulee vastenmielisyyden tunne.</i>	25	1125	26	1151
Matematiikan tärkeys <i>On tärkeätä osata matematiikkaa, jotta saisi hyvän työpaikan.</i>	67	1124	59	1157
<i>Lähtötulevaisuudessa vaaditaan useimmissa ammateissa hyvää matematiikan taitoa.</i>	70	1131	62	1165

Taulukko 6 Yhdeksäsluokkalaisten matematiikka-asenteiden erot sukupuolen ja matematiikan suoritustason mukaan vuonna 1990. (Oppilaat on jaettu neljään neljännekseen matematiikan suorituspistemäärän (theta) perusteella.)

Asennefaktori	Sukupuoli		Matematiikan suoritustaso			
	Tytöt	Pojat	I(alin)	II	III	IV
Matematiikan vaikeus						
- keskiarvo	3.07	2.83	3.58	3.26	2.81	2.20
- keskihajonta	0.89	0.86	0.70	0.73	0.76	0.64
- eron merkitsevyys	***			**	**	** 1
Matematiikan merkitys						
- keskiarvo	3.15	3.40	2.94	3.15	3.37	3.62
- keskihajonta	0.69	0.62	0.61	0.61	0.64	0.62
- eron merkitsevyys		***		**	**	**
Matematiikan motivaatio						
- keskiarvo	2.56	2.57	2.18	2.38	2.67	2.98
- keskihajonta	0.75	0.76	0.70	0.66	0.70	0.70
- eron merkitsevyys	n.s.	n.s.		n.s.	**	**
Matematiikka ja sukupuoli						
- keskiarvo	4.32	4.07	4.08	4.12	4.20	4.34
- keskihajonta	0.90	1.08	1.08	1.08	1.00	0.84
- eron merkitsevyys	***			n.s.	n.s.	n.s.

¹ Merkitsevyys ilmoitettu aina vasemmalla puolella oleviin ryhmiin nähden
 *** p<.001 ** p<.01 * p<.05

Taulukko 7 Yhdeksäsluokkalaisten matematiikka-asenteiden erot sukupuolen ja matematiikan suoritustason mukaan vuonna 1995. (Oppilaat on jaettu neljään neljännekseen matematiikan suorituspistemäärän (theta) perusteella.)

Asennefaktori	Sukupuoli		Matematiikan suoritustaso			
	Tytöt	Pojat	I(alin)	II	III	IV
Matematiikan itseluottamus						
- keskiarvo	2.96	3.36	2.38	2.90	3.40	3.84
- keskihajonta	0.89	0.84	0.71	0.73	0.72	0.65
- eron merkitsevyys		***		**	**	** 1
Matematiikan motivaatio						
- keskiarvo	2.46	2.64	2.11	2.36	2.67	3.04
- keskihajonta	0.86	0.82	0.72	0.74	0.77	0.85
- eron merkitsevyys		***		**	**	** 1
Matematiikan merkitys						
- keskiarvo	3.29	3.48	3.14	3.33	3.44	3.60
- keskihajonta	0.59	0.64	0.64	0.61	0.53	0.59
- eron merkitsevyys		***		**	**	** 2
Matematiikan vaikeus						
- keskiarvo	2.73	2.64	3.23	2.86	2.52	2.17
- keskihajonta	0.80	0.77	0.72	0.68	0.65	0.67
- eron merkitsevyys	n.s.			**	**	** 1
Matematiikkapelko						
- keskiarvo	2.99	3.40	2.93	3.05	3.24	3.50
- keskihajonta	0.92	0.88	0.95	0.91	0.87	0.88
- eron merkitsevyys	***			n.s.	**	** 2
Matematiikka ja sukupuoli						
- keskiarvo	4.43	4.11	4.14	4.33	4.32	4.32
- keskihajonta	0.78	1.03	1.03	0.89	0.86	0.90
- eron merkitsevyys	***			n.s.	n.s.	n.s. 1

¹ Eron merkitsevyys ilmoitettu aina vasemmalla puolella oleviin ryhmiin nähden

² Eron merkitsevyys ilmoitettu I-neljännekseen nähden

*** p<.001 ** p<.01 *p<.05

Taulukko 8 Peruskoulun 4. luokan matematiikan tehtävien ratkaisuprosenttien keskiarvot ja keskihajonnat eri sisältöalueilla vuosina 1979 ja 1990. (Keskiarvot laskettu tutkimuksille yhteisistä tehtävistä, joiden lukumäärä ilmoitettu suluissa.)

Sisältöalue	Arviointi 1979		Arviointi 1990		k-arvojen erotus
	\bar{x}	s	\bar{x}	s	
Lukukäsité (12)	65.8	17.0	76.6	18.4	+10.4
Yhteen- ja vähennyslasku (12)	70.3	15.2	80.4	12.1	+10.1
Kertolasku (8)	66.0	18.2	66.0	18.4	0
Jakolasku (5)	61.9	19.2	63.7	24.7	+1.8
Lausekkeet ja yhtälöt (4)	35.1	21.9	38.7	16.7	+3.6
Geometria (8)	67.2	18.1	66.9	23.6	-0.3
Soveltava matematiikka (9)	54.7	13.2	71.5	17.8	+16.8
Kaikki yhdessä (57)	62.7	18.4	70.1	20.1	+7.4

Taulukko 9 Peruskoulun 6. luokan matematiikan tehtävien ratkaisuprosenttien keskiarvot ja keskihajonnat eri sisältöalueilla vuosina 1979 ja 1990. (Keskiarvot laskettu tutkimuksille yhteisistä tehtävistä, joiden lukumäärä ilmoitettu suluissa.)

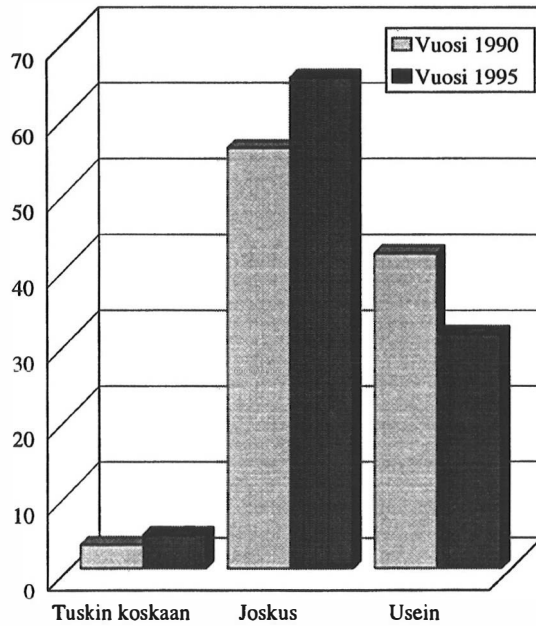
Sisältöalue	Arviointi 1979		Arviointi 1990		k-arvojen erotus
	\bar{x}	s	\bar{x}	s	
Lukukäsité (18)	68.6	15.1	68.3	17.9	-0.3
Yhteen- ja vähennyslasku (9)	72.0	18.2	74.1	14.9	+2.1
Kertolasku (8)	69.4	11.4	68.4	16.0	-1.0
Jakolasku (10)	72.7	12.4	69.4	20.9	-3.3
Lausekkeet ja yhtälöt (11)	57.7	17.5	54.5	23.7	-3.2
Geometria (11)	54.3	22.0	56.0	19.3	+1.7
Soveltava matematiikka (16)	56.6	21.2	61.2	22.3	+4.6
Kaikki yhdessä (81)	63.9	18.4	64.3	20.0	+0.4

Taulukko 10 Peruskoulun 9. luokan matematiikan tehtävien ratkaisuprosenttien keskiarvot ja keskihajonnat eri sisältöalueilla vuosina 1979 ja 1990. (Keskiarvot laskettu tutkimuksille yhteisistä tehtävistä, joiden lukumäärä ilmoitettu suluissa.)

Sisältöalue	Arviointi 1979		Arviointi 1990		k-arvojen erotus
	\bar{x}	s	\bar{x}	s	
Lukukäsite ja laskutoimitukset (8)	51.4	21.9	52.4	21.7	+1.0
Algebra (11)	50.6	14.0	47.6	12.8	-3.0
Funktiot (7)	45.6	22.8	37.3	24.8	-8.3
Yhtälöt (9)	41.6	23.9	39.7	23.9	-2.1
Geometria (11)	45.4	18.9	50.9	22.2	+5.5
Soveltava matematiikka (7)	43.9	14.3	46.3	12.9	+2.4
Kaikki yhdessä (53)	46.6	18.8	46.4	20.0	-0.2

Taulukko 11 Peruskoulun 9. luokan matematiikan tehtävien ratkaisuprosenttien keskiarvot ja keskihajonnat eri sisältöalueilla vuosina 1990 ja 1995. (Keskiarvot laskettu tutkimuksille yhteisistä tehtävistä, joiden lukumäärä ilmoitettu suluissa.)

Sisältöalue	Arviointi 1990		Arviointi 1995		k-arvojen erotus
	\bar{x}	s	\bar{x}	s	
Lukukäsite ja laskutoimitukset (9)	59.8	13.7	59.5	16.6	-0.3
Algebra (11)	60.6	11.2	60.3	15.0	-0.3
Funktiot (9)	52.5	20.8	54.3	20.5	+1.8
Yhtälöt (11)	51.5	15.8	56.7	15.0	+5.2
Geometria (21)	59.5	19.9	60.9	21.7	+1.4
Soveltava matematiikka (15)	41.8	19.4	47.1	19.9	+5.3
Kaikki yhdessä (76)	54.2	18.5	56.5	19.0	+2.3



Kuvio 1 Ongelmanratkaisutaitojen korostaminen matematiikan opetuksessa 9. luokan opettajien ilmoittamana vuosina 1990 ja 1995.

Liite 2 Yhden opettajakokelaan matematiikan oppitunnin analysointi uskomusten näkökulmasta (Borko ym. 1992, 204-218).

Tapausesimerkin avulla tutkijat pyrkivät kiinnittämään huomiota 'noviisiopettajien' uskomuksiin hyvästä matematiikan opetuksesta, heidän tietoihinsa opetettavasta sisällöstä sekä heidän uskomuksiinsa opettamaan oppimisesta. Analysoinnin kohteena oli 6. luokan oppituntia, jossa opetusharjoittelija opetti murtolukujen jakolaskua. Tunnin edetessä hän joutui tilanteeseen, jossa hän ei pystynyt antamaan ymmärrettävää selitystä oppilaille, eikä hän tehnyt sitä myöskään seuraavalla tunnilla. Opetusharjoittelijalla oli laajin matemaattinen tausta kaikista koulutettavista ja hän halusi erikoistua matematiikkaan. Haastatteluilla ja observoinnilla kerätyn tiedon avulla etsittiin vastauksia mm. seuraaviin kysymyksiin. Mitä opettaja tiesi ja uskoi murtolukujen jakolaskun opettamisesta? Kuinka vankka oli hänen oma tietämyksensä aiheesta? Mitä hän todella uskoi siitä, kuinka kyseinen asia pitäisi opettaa? Millä tavoin koulutusohjelmaan kuulunut matematiikan menetelmäkurssi vaikutti opettajan oppisisältötietoon ja pedagogiseen sisältötietoon murtolukujen jakolaskusta?

Oppitunnin kuvaus

Opettajan tavoitteena oli murtolukujen jakolaskun opettaminen ja sen harjoittaminen. Tunnilla hän esitti oppilaille esimerkin

$$3/4 : 1/2$$

Opettaja selitti murtolukujen jakamisen menetelyn siten, että jakaminen 'käännetään' kertolaskuksi. Jonkin ajan kuluttua oppilas E kysyi: "Miksi jakolasku käännetään kertolaskuksi?"

Opettaja K tunnisti heti, että oppilas halusi käsitteellisen selityksen ja hän yritti vastata siihen konkreetin esimerkin avulla. Hän piirsi seinän, josta 1/4 oli maalattu ja maalia oli jäljellä vain puolikkaaseen loppuosasta... Opettaja selitti ja selitti kunnes hän huomasi, että joku oli pielessä. Hän yritti saada selville, missä oli vika ja kehotti oppilaita laskemaan tehtäviä käyttämällä niihin hänen antamaansa sääntöä. Jonkun ajan kuluttua opettaja huomasi, että hän olikin käyttänyt selityksessään kertolaskua havainnollistavaa tilannetta, mutta hän ei sanonut sitä oppilaille. Loppuajan tunnista (joka kesti kauemmin kuin oli suunniteltu) hän käytti 'kääntämissäännön' harjoitteluun erilaisissa tilanteissa. Opettaja ei yrittänyt antaa kunnollista selitystä myöskään seuraavana päivänä. Haastattelussa opettaja selitti tienneensä, että oppilaille oli ollut murtolukujen jakolasku jo aiemmin ja siksi hänen mielestään oli pääasia, että 'he muistivat kääntää ja sitten kertoa'.

Oppitunnin analysointi

Opettajan mielestä hyvä matematiikan opetus sisälsi pääasiassa sen, että matematiikka on *merkityksellistä ja mielekästä* oppilaille. Hyvät opettajat tekevät opetuksensa merkitykselliseksi oppilaille sovellusten avulla. He sisällyttävät opetukseensa sellaisia sovelluksia, joita oppilaat voivat hyödyntää jokapäiväisessä elämässä ja myös sovelluksia, jotka oppilaiden mielestä saattavat olla hyödyllisiä tulevaisuudessa. Lisäksi hyvät opettajat käyttävät sellaisia matematiikkaan liittyviä aktiviteetteja, joista oppilaat nauttivat. Myöhemmissä haastatteluissa opettaja alkoi kuitenkin puhua siitä, kuinka vaikeaa on tunnilla liittää matematiikkaa oppilaiden elämään.

Alkujaan opettaja ymmärsi murtolukujen jakolaskun, jota yleisesti pidetään vaikeana sisältönä oppia ja opettaa, ainoastaan rutiinalgoritmina. Hänellä ei myöskään ollut tietoa erilaisista esitystavoista, joiden avulla hän olisi voinut opettaa sisällön. Ennen tarkastelun kohteena ollutta opetustuokiota koulutukseen oli sisällytetty menetelmäkurssi, jolla oli käsitelty murtolukujen jakolaskun opettamista.

Koska opettaja tarvitsi opetustuokiota varten jonkun lähestymisidean, hän valitsi menetelmäkursilla oppimansa tavan eli konkreetin esimerkin. Hän ei kuitenkaan miettinyt sen pitempään

esimerkin toimivuutta. Hän oli kyllä opetellut, että aloittaisi murtolukujen jakolaskun selittämisen siten, että jakaminen 'käännetään' kertolaskuksi. Mutta hän ei ollut oppinut sitä käsitteellistä tietoa, jota hän olisi tarvinnut viedäkseen selityksensä loppuun ja vastatakseen oppilas E:n esittämään kysymykseen siitä, miksi jakolasku käännetään kertolaskuksi. Niinpä ei ollut yllättävää, että kun opettaja joutui vaikeuksiin esimerkkinsä kanssa ja aikaa kului, niin hän luovutti ja jätti kysymykseen vastaamatta. Sen sijasta hän alkoi harjoituttaa oppilaille hyvin hallitsemaansa jakolaskualgoritmia.

Miksi opettaja ei pystynyt antamaan kunnollista vastausta oppilaiden kysymykseen? Tutkijat näkivät tälle useita syitä. Ensinnäkin opettaja oli suorittanut verraten paljon matematiikan opintoja yliopistossa, mikä vahvisti hänen uskomustaan siitä, että hänen matemaattiset tietonsa olivat riittävät alkeismatematiikan opetuksen. Tämän ennakkokäsityksen tukemana hän ei voinut ymmärtää, että hänen oppisisältötietonsa eivät olleetkaan riittävät, jotta hän olisi voinut toteuttaa uskomuksensa hyvästä opetuksesta kyseisen asian opettamisessa. Opettaja ei kenties lainkaan ymmärtänyt, mitä voisi merkitä se, että osaa matematiikkaa yhtään eri tavoin kuin hän. Jos hänen oma osaamisensa oli tulosta siitä, että hän oppi hyvin ulkoa monimutkaisiakin matemaattisia toimintakaavoja ja osasi soveltaa niitä erilaisiin ongelmatilanteisiin, niin se on saattanut synnyttää tunteen ja uskomuksen, että rutiinioppiminen riittää ainakin murtolukujen jakolaskussa.

Toiseksi koulutukseen sisältynyt menetelmäkurssi ei näyttänyt selkeyttäneen sitä, mikä merkitys sovelluksilla ja visualisoinneilla voi olla murtolukujen ymmärrettäväksi tekemisessä. Se, että opettaja ei halunnut todella panostaa oman käsitteellisen tietämyksensä lisäämiseen saattoi johtua siitä, että opettajakokelaat ylipäättään osoittivat kiinnostusta vain sellaisia opetuksessa esitetyjä ideoita kohtaan, joita he voisivat suoraan soveltaa omassa luokkaopetuksessaan.

Miksi opettaja ei perehtynyt paremmin murtolukujen jakolaskuun epäonnistuneen yrityksen jälkeen, jotta olisi pystynyt antamaan oppilaille paremman vastauksen? Eräs tärkeä syy tähän näkyi siinä opettajan uskomuksessa – joka jatkuvasti vahvistui ja vahvistui – että matematiikkaa opettamaan oppii vain käytännön kautta. Uskomus on varsin yleinen opettajaksi opiskelevien keskuudessa ja sillä voi olla hyvin vakavia seurauksia. Tämän uskomuksen heikentämiseksi opettajakokelailla tulisi olla koulutuksessaan aikaa ja kannustimia sellaiseen harjoitteluun ja reflektointiin, joka on välttämätöntä heidän ammatillisen tietoperustansa kaikkien osatekijöiden kehittämiseksi.

Opettaja oli useimpien uusien opettajien tapaan kovasti huolissaan luokan hallinnasta. Hän oli sitä mieltä, että oppilaat eivät luonnostaan nauti matematiikasta, minkä vuoksi oli tärkeää sisällyttää sovelluksia ja muita mukavia toimintoja opetukseen. Oppilaiden kiinnostusta ylläpitämällä hän uskoi voivansa ratkaista luokan hallinnan ongelmat. Vaikka opettaja uskoikin vahvasti, että opetuksessa pitäisi käyttää kiinnostavia sovelluksia, niin hän ei opetuksessaan pystynyt tarjoamaan sellaisia sovelluksia kuin olisi halunnut.

Tutkijoiden mukaan kyseisen opettajan uskomukset hyvästä matematiikan opetuksesta sisälsivät paljon sellaisia aineksia, jotka sopivat yhteen tämänhetkisen näkemyksen kanssa hyvästä ja tehokkaasta matematiikan opetuksesta. Opettajan mielestä matematiikan opetuksen tuli olla merkityksellistä ja mielekästä oppilaille. Nämä uskomukset rakentuiivat omille kokemuksille koulumatematiikasta, koulutukseen sisältyneen menetelmäkurssin antamille tiedoille ja omasta luokkaopetuksesta saaduille kokemuksille. Kiinnostavaa oli kuitenkin se, että hänen myöhemmät kokemuksensa eivät saaneet häntä muuttamaan aikaisempia uskomuksia tai ratkaisemaan uskomusten ja kokemusten välisiä ristiriitoja.

Liite 3 Matematiikan opettajien teemahaastattelut huhti–toukokuussa 1996.

Teemahaastattelun runko

Haastattelun aluksi on tarpeen tuoda esille,

- että olen koulutukseltani matematiikan opettaja, mutta siirtynyt 1970-luvulla tutkimuksen puolelle,
- että olen tehnyt sen jälkeen matematiikan opetussuunnitelmaan, opetukseen ja oppimiseen liittyvää tutkimustyötä,
- että olen tällä hetkellä kiinnostunut matematiikan opetuksesta nimenomaan opettajan näkökulmasta (Millaista on opettaa matematiikkaa koulussa?),
- että tähän yhteyteen liittyen haluan keskustella aiheesta muutamien kokeneempien opettajien kanssa.

Opettaja on opiskelun ohjaajana ja oppimistilanteiden luojana niin keskeinen, että hänen tilannettaan on ehdottomasti tarkasteltava.

Haastatteluteemat

Keskustelun avaus voisi liittyä koulun kannalta johonkin ajankohtaiseen asiaan. Sellainen voisi olla esimerkiksi koulujen opetussuunnitelmatyö ja sen eteneminen. Se saattaa tosin aiheuttaa joissakin opettajissa ärtymystä (turhana prosessina), mutta saa varmasti keskustelun käyntiin. Miten ops-prosessi sujunut? Onko ollut ongelmia? Millaisia?

0. Millaista matematiikan opetus mielestäsi tällä hetkellä on? Mikä on matematiikan asema oppiaineena?

- Mikä on mielestäsi matematiikan asema yhteiskunnassa? Mihin matematiikkaa tarvitaan? Miksi sitä on tarpeen opiskella?
- Miten ympäröivä yhteiskunta siihen suhtautuu? Miten koulu suhtautuu?
- Miten itse suhtaudut? Oletko tyytyväinen/ tyytymätön? Kyllästynyt?
- Mitkä ovat suurimmat ongelmat? Miksi?

1. Miten matematiikkaa mielestäsi opitaan?

- Millainen aine matematiikka on?
- Miksi matematiikan oppiminen on joillekin vaikeaa? Miten tätä vaikeutta voitaisiin vähentää?
- Onko matematiikan oppimiselle mielestäsi jotain perusedellytyksiä tai vaatimuksia?

2. Millä tavalla sinä itse opetat matematiikkaa?

- Pidätkö matematiikan opettamisesta? Piditkö jo koulussa matematiikasta? Vaikuttiko tämä siihen, että sinusta tuli matematiikan opettaja?
- Onko sinulla joku oma 'opetusfilosofia'? Mitä sinä pidät matematiikan opetuksessa keskeisenä?
- Onko käyttämäsi tapa sellainen, johon olet tyytyväinen ja joka on mahdollisimman tehokas? Millainen on oppikirjan vs. muun materiaalin asema opetuksessasi?
- Miten haluaisit kehittää tai parantaa omaa opetustapaasi?
- Onko oma opetuksesi muuttunut 5-10 viimeisen vuoden aikana? Millä tavoin?
- Mitkä ovat mielestäsi suurimmat/vakavimmat opetusta ja opiskelua haittaavat tekijät? Pystytkö mielestäsi omilla tai koulun toimenpiteillä poistamaan näitä haittatekijöitä?
- Mitä olosuhteita pitäisi muuttaa, jotta voisit/pystyisit kehittämään omaa opetustasi? Tasoryhmittely? Miten opettajayhteisö tukee?
- Jos matematiikan opetukseen olisi enemmän tunteja, pienemmät ryhmäkoot ja modernit välineet ja materiaalit, niin millä tavoin sinun opetuksesi muuttuisi? Ideaalitalanne?
- Millaista täydennyskoulutuksen tulisi mielestäsi olla? Mitä aiheita sen tulisi käsitellä?
- Miten mielestäsi opitaan opettamaan matematiikkaa?

3. Arviointi

- Miten sinä tiedät, että oppilaat ovat omaksuneet opettamasi asian?
- Millaisia arviointitapoja käytät opetuksessasi? Kuinka usein? Numeroarvosanan käyttö ja sen merkitys?
- Onko arvioinnilla (kokeilla) vaikutusta omaan opetukseesi?
- Millä tavalla suhtaudut pinnalla olevaan keskusteluun arvioinnista ja arviointitapojen laajentamisesta?
 - + Miksi laajentaminen olisi tarpeen tai ei tarpeen?
 - + Millä tavoin tulisi arviointia laajentaa? Sanallinen arviointi? Portfolio -arviointi (ongelman ratkaisu, tutkimustehtävät, projektit)?
 - + Olisitko valmis kokeilemaan uudenlaisia tapoja?

Lopuksi

Millaisena sinä koit tämän keskustelutilanteen? Oliko se luonteva, piinaava, ahdistava...? Haluatko täydentää jotain? Haluatko kysyä jotain?

Liite 4 Uskomuskyselyt vuosina 1990 ja 1995.

Taulukko 1 *Luokanopettajille* (4. luokka) esitetyt uskomusväittämät sekä niiden keskiarvot (\bar{x}) ja keskihajonnat (s) vuonna 1990.

	Väittämä	Opettajia	\bar{x}	s
1.	Opettajan pitäisi tehdä oppilaalle oppiminen mahdollisimman helpoksi, esimerkiksi jakamalla oppiainees pieniin osiin.	56	3.64	1.12
2.	On kiinnitettävä huomiota täsmälliseen ja matemaattisesti oikeaan kielenkäyttöön.	56	3.86	1.02
3.	Suoritusten arvioinnissa on otettava huomioon käytetyt ratkaisutavat.	54	3.89	.90
4.	Oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan ennen kaikkea laskemisen perusteelliset menetelmät.	56	4.52	.57
5.	Matematiikan opetuksessa on ennen kaikkea harjoiteltava runsaasti.	56	4.16	.83
6.	Matematiikan opetuksessa olisi käytettävä runsaasti oppimispelejä.	56	3.16	.91
7.	Oppilaiden pitäisi työskennellä mahdollisimman usein konkreettista materiaalia käyttäen.	56	3.96	.89
8.	Opetuksessa olisi erityisesti harjoiteltava matemaattisten symbolien käyttämistä.	56	2.95	.82
9.	Opetuksessa olisi edistettävä sosiaalista oppimista (mm. ryhmissä työskentelyä).	56	3.61	1.04
10.	Oppilaan tulisi saada kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla.	56	4.48	.63
11.	Opettajan ensisijainen tehtävä on pitää luokassa järjestystä yllä.	55	2.18	1.06
12.	Oppilaiden pitäisi tehtäviä ratkaistaessa saada ennen kaikkea oikea tulos.	55	2.89	1.12
13.	Opettajan pitäisi ennen kaikkea pyrkiä vilkkaaseen opetuskeskusteluun.	56	3.23	.97
14.	Oppilaan ei tarvitse välttämättä ymmärtää jokaista perustelua ja menettelyä.	56	2.29	.97
15.	Opetuksessa pitäisi ottaa erityisesti huomioon heikosti menestyvien oppilaiden tarpeet.	56	3.52	.99

Taulukko 1 jatkuu

	Väittäjä	Opettajia	\bar{x}	s
16.	Opetuksessa olisi laskettava mahdollisimman usein sellaisia rutiinitehtäviä, joissa tunnetun menetelmän oikea käyttäminen johtaa varmasti tulokseen.	56	3.18	.99
17.	Matematiikan opetuksessa pitäisi käsitellä ennen kaikkea sovellutuksia.	56	3.54	.91
18.	Olisi opetettava ennen kaikkea matemaattista tietoutta, kuten tosiasioita ja tuloksia.	55	3.02	.83
19.	Tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä.	56	4.39	.70
20.	Oppilaita olisi rohkaistava etsimään tehtäviin erilaisia ratkaisuteitä ja niistä olisi opetuksessa keskusteltava.	56	4.41	.73
21.	Olisi käsiteltävä mieluummin vähemmän oppisisältöjä perusteellisesti kuin paljon sisältöjä pinnallisesti.	55	4.31	.86
22.	Oppilaiden olisi saatava tilaisuus itse muotoilla tehtäviä ja ongelmia ja sitten ratkoa niitä.	56	3.96	.71
23.	Opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon lahjakkaiden oppilaiden tarpeet.	56	3.62	.94
24.	Olisi mietittävä, missä matematiikan opetuksen tilanteissa voisi tietokoneen ottaa käyttöön.	55	3.82	.92
25.	Opetuksessa olisi käsiteltävä mahdollisimman usein tehtäviä, joissa oppilaan on ensin mietittävä ja joiden ratkaisemiseen ei riitä pelkästään laskurutiinien hallinta.	53	4.10	.74
26.	Matematiikan tunneilla on korostettava yksilöllistä työskentelyä.	53	3.53	.91
27.	Opetuksessa on tuotava selvästi esille, että matematiikka on oleellinen osa kulttuuriamme.	53	3.83	.85

Taulukko 2 *Luokanopettajille* (6. luokka) esitetyt uskomusväittämät sekä niiden keskiarvot (\bar{x}) ja keskihajonnat (s) vuonna 1990.

	Väittämä	Opettajia	\bar{x}	s
1.	Opettajan pitäisi tehdä oppilaalle oppiminen mahdollisimman helpoksi, esimerkiksi jakamalla oppiaines pieniin osiin.	52	3.46	1.00
2.	On kiinnitettävä huomiota täsmälliseen ja matemaattisesti oikeaan kielenkäyttöön.	52	3.98	.80
3.	Suoritusten arvioinnissa on otettava huomioon käytetyt ratkaisutavat.	52	3.67	.90
4.	Oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan ennen kaikkea laskemisen perustekniikat.	52	4.25	.93
5.	Matematiikan opetuksessa on ennen kaikkea harjoitettava runsaasti.	52	3.83	1.02
6.	Matematiikan opetuksessa olisi käytettävä runsaasti oppimispelejä.	52	3.15	.87
7.	Oppilaiden pitäisi työskennellä mahdollisimman usein konkreettista materiaalia käyttäen.	52	3.73	.91
8.	Opetuksessa olisi erityisesti harjoitettava matemaattisten symbolien käyttämistä.	52	3.12	.83
9.	Opetuksessa olisi edistettävä sosiaalista oppimista (mm. ryhmissä työskentelyä).	52	3.36	1.08
10.	Oppilaan tulisi saada kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla.	52	4.40	.63
11.	Opettajan ensisijainen tehtävä on pitää luokassa järjestystä yllä.	52	2.17	1.13
12.	Oppilaiden pitäisi tehtäviä ratkaistaessa saada ennen kaikkea oikea tulos.	52	2.85	1.16
13.	Opettajan pitäisi ennen kaikkea pyrkiä vilkkaaseen opetuskeskusteluun.	51	3.10	.99
14.	Oppilaan ei tarvitse välttämättä ymmärtää jokaista perustelua ja menettelyä.	52	2.67	1.10
15.	Opetuksessa pitäisi ottaa erityisesti huomioon heikosti menestyvien oppilaiden tarpeet.	52	3.29	.92

Taulukko 2 jatkuu

	Väittäjä	Opettajia	\bar{x}	s
16.	Opetuksessa olisi laskettava mahdollisimman usein sellaisia rutiinitehtäviä, joissa tunnetun menetelmän oikea käyttäminen johtaa varmasti tulokseen.	52	2.75	1.03
17.	Matematiikan opetuksessa pitäisi käsitellä ennen kaikkea sovellutuksia.	51	3.69	.81
18.	Olisi opetettava ennen kaikkea matemaattista tietoutta, kuten tosiasioita ja tuloksia.	52	2.88	.86
19.	Tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä.	52	4.46	.54
20.	Oppilaita olisi rohkaistava etsimään tehtäviin erilaisia ratkaisuteitä ja niistä olisi opetuksessa keskusteltava.	52	4.36	.49
21.	Olisi käsiteltävä mieluummin vähemmän oppisisältöjä perusteellisesti kuin paljon sisältöjä pinnallisesti.	52	4.02	.96
22.	Oppilaiden olisi saatava tilaisuus itse muotoilla tehtäviä ja ongelmia ja sitten ratkoa niitä.	52	3.71	.83
23.	Opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon lahjakkaiden oppilaiden tarpeet.	52	3.58	.78
24.	Olisi mietittävä, missä matematiikan opetuksen tilanteissa voisi tietokoneen ottaa käyttöön.	52	3.83	.65
25.	Opetuksessa olisi käsiteltävä mahdollisimman usein tehtäviä, joissa oppilaan on ensin mietittävä ja joiden ratkaisemiseen ei riitä pelkästään laskurutiinien hallinta.	51	4.02	.74
26.	Matematiikan tunneilla on korostettava yksilöllistä työskentelyä.	52	3.64	.97
27.	Opetuksessa on tuotava selvästi esille, että matematiikka on oleellinen osa kulttuuriamme.	52	3.86	.60

Taulukko 3 *Aineenopettajille* (9. luokka) esitetyt uskomusväittämät sekä niiden keskiarvot (\bar{x}) ja keskihajonnat (s) vuonna 1990.

	Väittämä	Opettajia	\bar{x}	s
1.	Opettajan pitäisi tehdä oppilaalle oppiminen mahdollisimman helpoksi, esimerkiksi jakamalla oppiaines pieniin osiin.	65	2.92	1.11
2.	On kiinnitettävä huomiota täsmälliseen ja matemaattisesti oikeaan kielenkäyttöön.	65	4.05	.82
3.	Suoritusten arvioinnissa on otettava huomioon käytetyt ratkaisutavat.	65	3.54	1.06
4.	Oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan ennen kaikkea laskemisen perusteellisuudet.	65	4.15	.73
5.	Matematiikan opetuksessa on ennen kaikkea harjoitettava runsaasti.	64	4.22	.79
6.	Matematiikan opetuksessa olisi käytettävä runsaasti oppimispelejä.	65	2.91	.96
7.	Oppilaiden pitäisi työskennellä mahdollisimman usein konkreettia materiaalia käyttäen.	65	3.66	.91
8.	Opetuksessa olisi erityisesti harjoitettava matemaattisten symbolien käyttämistä.	65	2.78	.99
9.	Opetuksessa olisi edistettävä sosiaalista oppimista (mm. ryhmissä työskentelyä).	65	3.85	.83
10.	Oppilaan tulisi saada kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla.	65	4.49	.50
11.	Opettajan ensisijainen tehtävä on pitää luokassa järjestystä yllä.	65	2.12	.94
12.	Oppilaiden pitäisi tehtäviä ratkaistaessa saada ennen kaikkea oikea tulos.	64	2.12	.76
13.	Opettajan pitäisi ennen kaikkea pyrkiä vilkkaaseen opetuskeskusteluun.	64	3.27	1.07
14.	Oppilaan ei tarvitse välttämättä ymmärtää joikaista perustelua ja menettelyä.	65	3.09	1.14
15.	Opetuksessa pitäisi ottaa erityisesti huomioon heikosti menestyvien oppilaiden tarpeet.	65	2.91	1.00
16.	Opetuksessa olisi laskettava mahdollisimman usein sellaisia rutiinitehtäviä, joissa tunnetun menetelmän oikea käyttäminen johtaa varmasti tulokseen.	65	2.82	.90

Taulukko 3 jatkuu

	Väittäjä	Opettajia	\bar{x}	s
17.	Matematiikan opetuksessa pitäisi käsitellä ennen kaikkea sovellutuksia.	65	3.66	.87
18.	Olisi opetettava ennen kaikkea matemaattista tietoutta, kuten tosiasioita ja tuloksia.	63	2.70	.87
19.	Tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä.	65	4.65	.48
20.	Oppilaita olisi rohkaistava etsimään tehtäviin erilaisia ratkaisuteitä ja niistä olisi opetuksessa keskusteltava.	65	4.35	.60
21.	Olisi käsiteltävä mieluummin vähemmän oppisisältöjä perusteellisesti kuin paljon sisältöjä pinnallisesti.	65	4.40	.68
22.	Oppilaiden olisi saatava tilaisuus itse muotoilla tehtäviä ja ongelmia ja sitten ratkoa niitä.	65	3.60	.86
23.	Opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon lahjakkaiden oppilaiden tarpeet.	65	3.85	.99
24.	Olisi mietittävä, missä matematiikan opetuksen tilanteissa voisi tietokoneen ottaa käyttöön.	65	3.80	.96
25.	Opetuksessa olisi käsiteltävä mahdollisimman usein tehtäviä, joissa oppilaan on ensin mietittävä ja joiden ratkaisemiseen ei riitä pelkästään laskurutiinien hallinta.	65	4.35	.57
26.	Matematiikan tunneilla on korostettava yksilöllistä työskentelyä.	65	3.42	.95
27.	Opetuksessa on tuotava selvästi esille, että matematiikka on oleellinen osa kulttuuriamme.	65	4.23	.70
28.	Opetuksessa olisi käytettävä mahdollisimman usein projektityöskentelyä. (Esimerkki projektista: akvaarion hankkiminen ja kunnostaminen.)	65	2.68	.90
29.	Visualisointia on käytettävä opetuksessa mahdollisimman usein. (Esim. kuvassa on kaava $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ visualisoitu.)	64	3.56	1.04

Taulukko 4 *Aineenopettajille* (9. luokka) esitetyt uskomusväittämät sekä niiden keskiarvot (\bar{x}) ja keskihajonnat (s) vuonna 1995.

	Väittämä	Opettajia	\bar{x}	s
1.	Opettajan pitäisi tehdä oppiminen oppilaalle mahdollisimman helpoksi esimerkiksi jakamalla oppiaines pieniin osiin.	66	2.88	1.10
2.	On kiinnitettävä huomiota täsmälliseen ja matemaattisesti oikeaan kielenkäyttöön.	68	3.90	.95
3.	Suoritusten arvioinnissa on otettava huomioon käytetyt ratkaisutavat.	68	3.26	1.14
4.	Matematiikkaa oppii parhaiten keksimällä itsen säännöt.	55	3.27	1.08
5.	Oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan ennen kaikkea laskemisen perusteelliset säännöt.	68	3.79	.94
6.	Jos luokassa vallitsee avoin ja välitön ilmapiiri, niin oppilaat esittävät omia ehdotuksia ja kysymyksiä.	68	4.56	.53
7.	Matematiikan opetuksessa on ennen kaikkea harjoiteltava runsaasti.	68	3.87	.90
8.	Matematiikan opetuksessa olisi käytettävä oppimispelejä.	68	3.07	.85
9.	Oppilaiden pitäisi työskennellä mahdollisimman usein konkreettista materiaalia käyttäen.	68	3.60	.88
10.	Opetuksessa olisi erityisesti harjoiteltava matemaattisten symbolien käyttämistä.	68	2.76	.88
11.	Ei ole järkevää käyttää matematiikan tunnilla usein ryhmätyötä.	68	3.04	.98
12.	Oppilaan tulisi saada kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla.	68	4.50	.56
13.	Opettajan ensisijainen tehtävä on pitää luokassa järjestystä yllä.	68	2.15	.88
14.	On liian aikaa vievää antaa oppilaiden kertoilla omia kokemuksiaan laskutehtävistä.	68	2.22	.81
15.	Oppilaiden pitäisi tehtäviä ratkaistessaan saada ennen kaikkea oikea tulos.	68	2.03	.85
16.	Opetuksessa pitäisi ottaa erityisesti huomioon heikosti menestyvien oppilaiden tarpeet.	67	2.79	.93
17.	Matematiikan opiskelu perustuu sääntöjen opetteluun.	68	2.59	.97

Taulukko 4 jatkuu

Väittäjä	Opettajia	\bar{x}	s
18. Oppilaan ei tarvitse välttämättä ymmärtää jo- kaista perustelua ja menettelyä.	68	2.79	1.03
19. Matematiikan tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä.	67	4.51	.50
20. Opetuksessa olisi laskettava mahdollisimman usein sellaisia rutiinitehtäviä, joissa tunnetun menetelmän oikea käyttäminen johtaa varmasti tulokseen.	68	2.65	.91
21. Matematiikan opetuksessa pitäisi mahdollisim- man usein käsitellä sovellutuksia.	68	4.03	.57
22. Oppilaita olisi rohkaistava etsimään tehtäviin erilaisia ratkaisuteitä ja niistä olisi opetuksessa keskusteltava.	68	4.28	.57
23. Matemaattiset prosessit ja ideat ovat tärkeämpiä kuin säännöt ja tosiasiat.	66	3.20	.75
24. Olisi käsiteltävä mieluummin vähemmän op- pisisältöjä perusteellisesti kuin paljon sisältöjä pinnallisesti.	68	4.13	.71
25. Oppilaiden tulisi olla tilaisuuksia itse muotoilla tehtäviä ja ongelmia ja sitten ratkoa niitä.	68	3.68	.70
26. Opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon lahjakkaiden oppilaiden tarpeet.	67	3.63	.87
27. Olisi mietittävä, missä matematiikan opetuksen tilanteissa voisi tietokoneen ottaa käyttöön.	68	3.81	.58
28. Opetuksessa olisi käsiteltävä mahdollisimman usein tehtäviä, joissa oppilaan on ensin mietit- tävä ja joiden ratkaisemiseen ei pelkästään riitä laskurutiinien hallinta.	68	4.04	.66
29. Matematiikan tunneilla tulee korostaa oppilaiden yksinään työskentelyä.	68	2.57	.85
30. Opetuksessa on tuotava selvästi esille, että matematiikka on oleellinen osa kulttuuriamme.	68	4.22	.67

Liite 5 Uskomuskyselyjen rotatoidut faktorimatriisit.

Taulukko 1 Uskomuskyselyn rotatoitu faktorimatriisi luokanopettajilla vuonna 1990 (N = 108; alle .30 lataukset on jätetty merkitsemättä).

Muuttuja	I	II	III	IV	V	VI	h ²
M20	.79						.68
M10	.79						.68
M19	.73						.60
M22	.42		.40				.52
M5		.79					.67
M4		.76					.60
M16		.53		.42			.52
M26			-.73			.40	.73
M13			.61				.45
M9	.54		.56				.63
M6			.53			.45	.55
M12				.76			.63
M11				.71			.60
M15		.36		.51			.46
M2					.69		.54
M27	.40				.67		.63
M8					.63		.49
M17					.46	.34	.55
M25						.73	.64
M24	.31					.53	.47
M23					.39	.53	.47
Om.arv.	3.83	2.44	1.75	1.52	1.30	1.28	12.11

Taulukko 2 Uskomuskyselyn rotatoitu faktorimatriisi aineenopettajilla vuonna 1990 (N = 65; alle .30 lataukset on jätetty merkitsemättä).

Muuttuja	I	II	III	IV	V	VI	h ²
M5	.73						.63
M4	.64						.52
M23	.62	.33					.61
M8	.57					.34	.65
M20		.73					.55
M25		.59					.41
M10		.58					.42
M19		.57				-.37	.55
M13		.45					.40
M1	.34		.69				.65
M7			.61		.41		.58
M9			.60				.43
M17			.59			-.51	.76
M28	-.37	.39	.51				.58
M11				.67	.39		.63
M12				.65			.48
M21				-.64			.51
M16	.42			-.52			.51
M6	-.45			.48			.56
M2					-.76		.60
M15		.31			.64	.30	.66
M24					.53		.36
M27				-.31	.36		.35
M26						.85	.73
M22		.37	.47			.51	.64
Om.arv.	3.58	2.66	2.15	1.94	1.93	1.49	13.77

Taulukko 3 Uskomuskyselyn rotatoitu faktorimatriisi aineenopettajilla vuonna 1995 (N = 68; alle .30 lataukset on jätetty merkitsemättä).

Muuttuja	I	II	III	IV	V	VI	VII	h ²
M4	.68							.57
M14	-.62							.54
M12	.61	.36						.55
M22	.55	.44						.58
M23	.50							.53
M1		-.71		.31				.70
M28		.63						.54
M21		.63			.40			.60
M15		-.58						.58
M24		.55						.45
M8			.69					.50
M25	.32		.67					.66
M9		.36	.54			-.34		.65
M5				.81				.75
M20				.66	-.34			.65
M7	-.41			.59				.57
M30					.68			.56
M19					.60			.47
M18	-.31				-.48		-.31	.57
M26	-.33					.65		.68
M16						.64		.63
M29						.62		.50
M11			-.39			.57		.50
M3							-.69	.60
M10							.66	.57
M17	-.32						.49	.54
M2	-.45		.39				.47	.68
Om.arvot	4.46	2.65	2.00	1.92	1.72	1.66	1.30	15.71

Liite 6 Matematiikan opettajien uskomusfaktoreiden summapistemäärien keskiarvot, keskihajonnat ja reliabiliteettikertoimet vuosina 1990 ja 1995.

Taulukko 1 Luokanopettajien (N = 108) uskomusfaktoreiden summapistemäärien keskiarvot (\bar{x}), keskihajonnat (s) ja reliabiliteettikertoimet (Cronbachin α -kerroin) vuonna 1990.

Uskomusfaktori	Osioiden määrä	\bar{x}	s	α - kerroin
1. Oppijakeskeisyys	4	4.28	0.50	.74
2. Harjoittelukeskeisyys	3	3.79	0.69	.62
3. Yhteistoiminnallisuus	4	3.07	0.64	.58
4. Oppituntikeskeisyys	3	3.02	0.73	.56
5. Esitystavat	4	3.60	0.55	.56
6. Ajattelun kehittäminen	3	3.83	0.56	.44

Taulukko 2 Aineenopettajien (N = 65) uskomusfaktoreiden summapistemäärien keskiarvot (\bar{x}), keskihajonnat (s) ja reliabiliteettikertoimet (Cronbachin α - kerroin) vuonna 1990.

Uskomusfaktori	Osioiden määrä	\bar{x}	s	α - kerroin
1. Harjoittelukeskeisyys	4	3.75	0.61	.62
2. Oppijakeskeisyys	5	4.23	0.42	.58
3. Käytännönläheisyys	5	3.35	0.59	.64
4. Suorituskeskeisyys	5	2.39	0.54	.61
5. Oppimisen ongelmat	4	3.22	0.55	.50
6. Yksilöllisyys	2	3.51	0.76	.57

Taulukko 3 Aineenopettajien (N = 68) uskomusfaktoreiden summapistemäärien keskiarvot (\bar{x}), keskihajonnat (s) ja reliabiliteettikertoimet (Cronbachin α - kerroin) vuonna 1995.

Uskomusfaktori	Osioiden määrä	\bar{x}	s	α - kerroin
1. Oppijakeskeisyys	5	3.84	0.51	.71
2. Hyvä oppiminen	5	3.87	0.52	.66
3. Konkreettisuus	3	3.45	0.61	.61
4. Harjoittelukeskeisyys	3	3.44	0.68	.61
5. Ajattelun kehittäminen	3	3.98	0.51	.38
6. Yksilöllisyys	4	3.01	0.59	.56
7. Esitys- ja menettelytavat	4	3.00	0.62	.48

Liite 7 Aineenopettajille vuosina 1990 ja 1995 esitetyt yhteiset uskomusväittämät sekä niiden keskiarvot (\bar{x}) ja keskihajonnat (s).

	Väittämä	$\bar{x}/90$	s/90	$\bar{x}/95$	s/95
1.	Opettajan pitäisi tehdä oppilaalle oppiminen mahdollisimman helpoksi, esimerkiksi jakamalla oppiaines pieniin osiin.	2.92	1.11	2.88	1.10
2.	On kiinnitettävä huomiota täsmälliseen ja matemaattisesti oikeaan kielenkäyttöön.	4.05	.82	3.90	0.95
3.	Suoritusten arvioinnissa on otettava huomioon käytetyt ratkaisutavat.	3.54	1.06	3.26	1.14
4.	Oppilaiden pitäisi oppia hallitsemaan ennen kaikkea laskemisen perusteellisuudet.	4.15	.73	3.79	0.94
5.	Matematiikan opetuksessa on ennen kaikkea harjoiteltava runsaasti.	4.22	.79	3.87	0.90
6.	Matematiikan opetuksessa olisi käytettävä runsaasti oppimispelejä.	2.91	.96	3.07	0.85
7.	Oppilaiden pitäisi työskennellä mahdollisimman usein konkreettia materiaalia käyttäen.	3.66	.91	3.60	0.88
8.	Opetuksessa olisi erityisesti harjoiteltava matemaattisten symbolien käyttämistä.	2.78	.99	2.76	0.88
9.	Oppilaan tulisi saada kokea, että samaan tulokseen voi päästä eri tavoilla.	4.49	.50	4.50	0.56
10.	Opettajan ensisijainen tehtävä on pitää luokassa järjestystä yllä.	2.12	.94	2.15	0.88
11.	Oppilaiden pitäisi tehtäviä ratkaistaessa saada ennen kaikkea oikea tulos.	2.12	.76	2.03	0.85
12.	Oppilaan ei tarvitse välttämättä ymmärtää joikaista perustelua ja menettelyä.	3.09	1.14	2.79	1.03
13.	Opetuksessa pitäisi ottaa erityisesti huomioon heikosti menestyvien oppilaiden tarpeet.	2.91	1.00	2.79	0.93
14.	Opetuksessa olisi laskettava mahdollisimman usein sellaisia rutiinitehtäviä, joissa tunnetun menetelmän oikea käyttäminen johtaa varmasti tulokseen.	2.82	.90	2.65	0.91

Taulukko jatkuu

	Väittäjä	$\bar{x}/90$	$s/90$	$\bar{x}/95$	$s/95$
15.	Matematiikan opetuksessa pitäisi käsitellä ennen kaikkea sovellutuksia.	3.66	.87	4.03	0.57
16.	Tunneilla pitäisi korostaa ajattelun tärkeyttä.	4.65	.48	4.51	0.50
17.	Oppilaita olisi rohkaistava etsimään tehtäviin erilaisia ratkaisuteitä ja niistä olisi opetuksessa keskusteltava.	4.35	.60	4.28	0.57
18.	Olisi käsiteltävä mieluummin vähemmän oppisisältöjä perusteellisesti kuin paljon sisältöjä pinnallisesti.	4.40	.68	4.13	0.71
19.	Oppilaiden olisi saatava tilaisuus itse muotoilla tehtäviä ja ongelmia ja sitten ratkoa niitä.	3.60	.86	3.68	0.70
20.	Opetuksessa olisi otettava erityisesti huomioon lahjakkaiden oppilaiden tarpeet.	3.85	.99	3.63	0.87
21.	Olisi mietittävä, missä matematiikan opetuksen tilanteissa voisi tietokoneen ottaa käyttöön.	3.80	.96	3.81	0.58
22.	Opetuksessa olisi käsiteltävä mahdollisimman usein tehtäviä, joissa oppilaan on ensin mietittävä ja joiden ratkaisemiseen ei riitä pelkästään laskurutiinien hallinta.	4.35	.57	4.04	0.66
23.	Opetuksessa on tuotava selvästi esille, että matematiikka on oleellinen osa kulttuuriamme.	4.23	.70	4.22	0.67