

# Kartiroleikkaukset

Hanna Kinnunen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Jyväskylän yliopisto

Heinäkuu 2020

**Tiivistelmä** Hanna Kinnunen *Kartioleikkaukset*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 58 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2020

Tämän tutkielman tarkoituksena on käsitellä kartioleikkauksia useammasta eri näkökulmasta. Kartioleikkauksia käsitellään tutkielmassa geometrisen kartioleikkauksen, standardimuotoisten kartioleikkausten, yleisen toisen asteen yhtälön sekä kartioleikkausten parametriesitysten keinoin. Lisäksi tutkielman tavoitteena on näyttää, että toista tapaa apuna käyttämällä voidaan päätyä toiseen tapaan esittää sama kartioleikkaus. Kartioleikkausten käsitteet yhtenäistyvät tutkielmassa.

Affiini geometria sovelluksineen mahdollistaa kartioleikkausten kuvaamisen toisikseen, sillä kartioleikkaukset ovat affiinisti yhdenmuotoisia. Tutkielmassa käsitellään myös eksentrisyyttä, joka on kartioleikkausten tarkastelun kannalta oleellinen termi. Eksentrisyyttä käsitellään jokaiselle surkastumattomalle kartioleikkaukselle erikseen. Tutkielma tarkastelee myös jokaiselle surkastumattomalle kartioleikkaukselle erikseen heijastusominaisuuksia. Tutkielmassa käsitellään myös kartioleikkausten tangenttisuoria ja niiden kulmakertoimia.

Tutkielman lopussa keskitytään tarkastelemaan kartioleikkausten linkittämistä yläkoulun ja lukion matematiikkaan.

# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Kartioleikkaukset euklidisessa geometriassa</b>	<b>6</b>
2.1	Euklidinen geometria . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Kartioleikkaus geometrisesti</b>	<b>10</b>
3.1	Dandelinin pallot . . . . .	10
3.2	Kartioleikkaukset Dandelinin pallon avulla . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Kartioleikkausten standardimuodot</b>	<b>13</b>
4.1	Standardimuotoinen paraabeli . . . . .	13
4.2	Standardimuotoinen ellipsi . . . . .	15
4.3	Standardimuotoinen hyperbeli . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Eksentrisyys</b>	<b>22</b>
5.1	Ellipsin eksentrisyys . . . . .	22
5.2	Hyperbelin eksentrisyys . . . . .	25
5.3	Paraabelin eksentrisyys . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Kartioleikkaukset ja toisen asteen yhtälöt</b>	<b>28</b>
<b>7</b>	<b>Yleinen kartioleikkaus</b>	<b>32</b>
7.1	Affiini kuvaus . . . . .	32
7.2	Affiinin geometrian soveltaminen . . . . .	40
<b>8</b>	<b>Kartioleikkausten parametriesitykset</b>	<b>44</b>
8.1	Paraabeli . . . . .	44
8.2	Ellipsi . . . . .	44
8.3	Hyperbeli . . . . .	45
<b>9</b>	<b>Tangentit</b>	<b>47</b>
9.1	Paraabelin tangentti . . . . .	47
9.2	Ellipsin tangentti . . . . .	48
9.3	Hyperbelin tangentti . . . . .	49

<b>10 Kartioleikkausten heijastusominaisuudet</b>	<b>51</b>
10.1 Paraabelin heijastusominaisuudet . . . . .	51
10.2 Ellipsin heijastusominaisuudet . . . . .	52
10.3 Hyperbelin heijastusominaisuudet . . . . .	54
<b>11 Kartioleikkausten havainnollistaminen opetuksessa</b>	<b>55</b>
11.1 Kartioleikkausten soveltaminen peruskoulun opetussuunnitel- massa . . . . .	55
11.2 Kartioleikkaukset lukiomatematiikassa . . . . .	56
<b>Kirjallisuutta</b>	<b>58</b>

# 1 Johdanto

Äkksisen luentomonisteen mukaan [8] kartioleikkausten tutkiminen matemaatiikan historiassa aloitettiin 300 eaa. Tuolloin kartioleikkauksia tutki Eukleides. Eukleideen jälkeen, 200 eaa., Apollonios Pergalainen jatkoi kartioleikkausten tutkimista. Tutkimusmenetelmät poikkesivat nykyisistä huomattavasti, sillä käytössä oli vain puhtaasti geometriset keinot. Eukleides ja Apollonios käsitelivät kartioleikkauksia klassisen kartioleikkauksen näkökulmasta käyrinä, jotka saadaan, kun leikataan kartiota tasolla. Tähän ajattelutapaan pureudutaan myös tässä tutkielmassa. Luku 3 käsittelee geometristä kartioleikkausta.

Geometrisen kartioleikkauksen lisäksi tutkielmassa käsitellään myös standardimuotoisia kartioleikkauksia, kartioleikkausta toisen asteen yhtälön kautta sekä kartioleikkausten parametriesityksiä. Tavoitteena on näyttää, että kartioleikkaus voidaan määrittellä usammalla eri tavalla ja toista tapaa apuna käyttämällä voidaan päätyä toiseen tapaan esittää sama kartioleikkaus. Tutkielman on tarkoitus yhtenäistää käsitystä kartioleikkauksia eri tavalla määrittellessä.

Kartioleikkausten perusteellisemmän tarkastelun avuksi otetaan affiini geometria sovelluksineen luvussa 7. Kartioleikkausten kannalta keskeinen termi on eksentrisyys, johon keskitytään luvussa 5. Eksentrisyyttä käsitellään kullekin surkastumattomalle kartioleikkaukselle erikseen. Kartioleikkauksilla on mielenkiintoisia heijastusominaisuuksia. Heijastusominaisuuksia käsitellään luvussa 10. Lopuksi luvussa 11 pohditaan mahdollisuuksia kartioleikkausten linkittämisestä yläkoulun ja lukion matematiikkaan uusimpien opetussuunnitelmien [6] ja [7] puitteissa. Uudessa opetussuunnitelmassa korostuu ilmiöpohjaisuus, joten myös tässä tutkielmassa käsitellään kartioleikkausten opettamista ilmiöpohjaisen opetuksen näkökulmasta sekä yläkoulussa että lukiossa.

## 2 Kartioleikkaukset euklidisessa geometriassa

Tämän luvun tavoitteena on käsitellä kartioleikkauksia yleisellä tasolla. Luvussa määritellään jokainen kartioleikkaus erikseen ja käsitellään kartioleikkauksien keskeisiä ominaisuuksia. Luvussa 3.1 avuksi otetaan Dandelinin pallot kartioleikkausten tarkastelua varten.

### 2.1 Euklidinen geometria

Tässä tutkielmassa keskitytään lähinnä euklidiseen tasoon

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Kartioleikkaukset jaotellaan teoksessa Geometry [3] surkastuneisiin ja surkastumattomiin kartioleikkauksiin. Äkkisen luentomonisteessa [8] surkastumattomat kartioleikkaukset on nimetty aidoiksi kartioleikkauksiksi, mutta jaottelu on muutoin pidetty samana kuin teoksessa Geometry [3]. Tässä työssä nimityksenä käytetään surkastuneita ja surkastumattomia kartioleikkauksia.

Surkastuneet kartioleikkaukset jaotellaan seuraavasti kolmeen luokkaan:

- Piste
- Suora
- Kahden suoran yhdiste.

Surkastumattomat kartioleikkaukset jaotellaan puolestaan seuraavalla tavalla:

- Paraabeli
- Ellipsi, jonka erikoistapauksena ympyrä
- Hyperbeli.

Tässä työssä keskitytään erityisesti surkastumattomiin kartioleikkauksiin. Seuraavaksi määritellään surkastumattomat kartioleikkaukset jokainen erikseen.

**Määritelmä 1.** *Paraabeli on tasokäyrä, joka muodostuu niistä pisteistä, joilla kiinteästä pisteestä, paraabelin polttopisteestä, mitattu etäisyys on yhtä suuri kuin kiinteästä suorasta, johtosuorasta, mitattu kohtisuora etäisyys.*

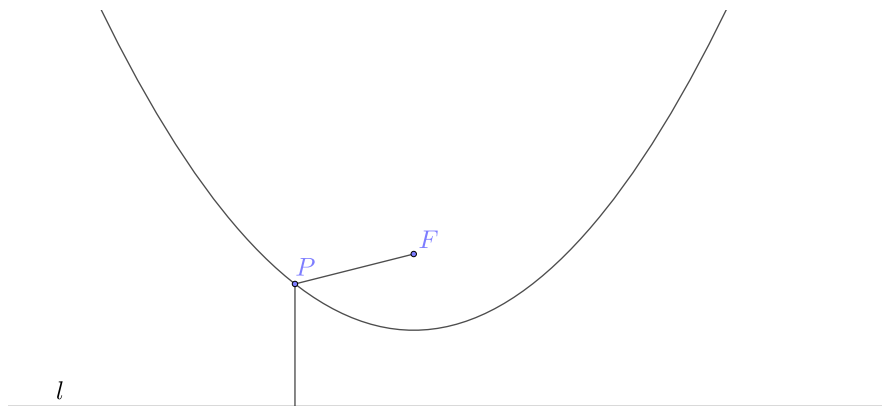
Paraabelin polttopistettä merkitään tässä työssä symbolilla  $F$  ja johtosuoraa symbolilla  $l$ , kuten kuvassa 1. Piste  $P$  on kartioleikkauksen satunnainen piste, ja piste  $Q$  on pistettä  $P$  lähinnä oleva piste johtosuoralta  $l$ .

Matemaattisesti edellinen määritelmä voidaan esittää siten, että

$$PF = PQ,$$

kun piste  $P$  on mielivaltainen piste paraabelilta.

Kuva 1: Paraabelin polttopiste ja johtosuora



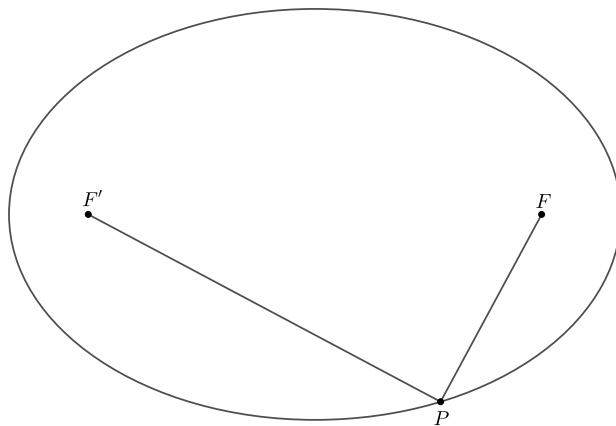
**Määritelmä 2.** *Ellipsi on tasokäyrä, joka muodostuu niistä pisteistä, joilla kahdesta kiinteästä pisteestä, ellipsin polttopisteistä, mitattujen etäisyyksien summa on vakio. Ympyrä on ellipsin erikoistapaus, jossa polttopisteet yhtyvät.*

Ellipsin polttopisteitä merkitään jatkossa  $F$  ja  $F'$ , kuten kuvassa 2. Ellipsin määritelmä voidaan matemaattisesti esittää siten, että

$$PF + PF' \text{ on vakio kaikilla } P,$$

kun  $P$  on satunnainen piste ellipsin kehältä.

Kuva 2: Ellipsin polttopisteet



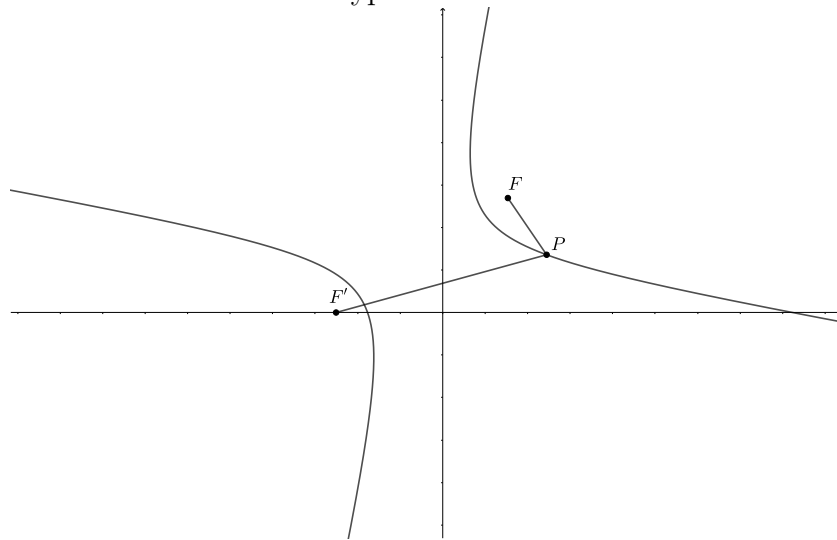
**Määritelmä 3.** *Hyperbeli on tasokäyrä, joka muodostuu niistä pisteistä, joilla kahdesta kiinteästä pisteestä, hyperbelin polttopisteistä, mitattujen etäisyyksien erotuksen itseisarvo on vakio.*

Tässä työssä hyperbelin polttopisteitä merkitään  $F$  ja  $F'$ . Edellinen määritelmä voidaan siis kirjoittaa siten, että

$$|PF - PF'| \text{ on vakio kaikilla } P.$$



Kuva 3: Hyperbelin määritelmä



### 3 Kartioleikkaus geometrisesti

Tässä luvussa ajatellaan, että kartioleikkaus saadaan leikkaamalla tasolla  $T$  kaksisuuntaista ympyräkartiota  $K$ . Standardilla kaksisuuntaisella ympyräkartiolla tarkoitetaan kahta kartiota, joista toinen avautuu ylöspäin ja toinen alaspäin. Molempien kärki on origossa. Seuraavaksi määritellään matemaattisesti kaksisuuntainen ympyräkartio.

**Määritelmä 4.** *Standardi kaksisuuntainen ympyräkartio on joukko  $K$  siten, että*

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}.$$

#### 3.1 Dandelinin pallot

Dandelinin palloa käsitellään sekä teoksessa Geometry [3] että Kivelän Matematiikkalehti Solmun artikkelissa [5]. Tässä luvussa kaltevaa tasoa, jolla leikataan kartiota  $K$  merkitään symbolilla  $T$ . Sovitetaan ympyräkartion  $K$  sisään pallo  $U$  siten, että se koskettaa tasoa  $T$  tason pisteessä  $F$ . Valitaan ympyrä  $C$  pallon keskipisteen kautta vaakatasossa leikkaavalta tasolta  $P$ .

#### 3.2 Kartioleikkaukset Dandelinin pallon avulla

Dandelinin pallon avulla voidaan todistaa, että paraabeli on kartioleikkaus. Kivelän kirjassa [4] suora ympyräkartio määritellään siten, että ympyräkartion muodostaa suoraparvi, jonka suorat kulkevat kiinteän ympyräviivan pisteiden kautta ja toisaalta sellaisen kiinteän pisteen kautta, joka sijaitsee ympyrän keskipisteen kautta kulkevalla ympyrän tason normaalilla. Tätä kutsutaan kaksihaaraiseksi pinnaksi, koska haaroja erottaa edellä mainittu kiinteä piste. Tätä pistettä kutsutaan kartion huipuksi. Normaalisuoralla tarkoitetaan tässä työssä kartion akselia. Kartion emäsuoriksi kutsutaan suoraparven suoria. Ympyrän tason ja emäsuoran välinen kulma on emäsuoran kaltevuuskulma.

Kartioleikkaukset  $S$  ovat joukkoja, jotka saadaan leikkaamalla kaksisuuntaista ympyräkartiota  $K$  tasolla  $T$ . Siten kartioleikkaukset  $S$  ovat tason  $T$

osajoukkoja  $S \subset T$ . Koordinaattimuutosten avulla taso  $T$  voidaan esittää avaruudessa  $\mathbb{R}^2$ . Tällöin kartioleikkaus  $S$  on tasojoukko.

Seuraavan lauseen todistus mukaillee Kivelän teoksen [4] todistusta. Todistuksessa käytetään apuna Dandelinin palloja.

**Lause 1.** *Leikatkoon taso  $T$  suoraa ympyräkartiota  $K$  siten, että se ei kulje kartion huipun kautta. Tason  $T$  ja kartion  $K$  leikkauskäyrä on ellipsi, paraabeli tai hyperbeli riippuen siitä, onko tason kaltevuuskulma pienempi, yhtä suuri vai suurempi kuin emäsuoran kaltevuuskulma.*

*Todistus.* Tarkastellaan ensin tapausta, jossa kartioleikkaus on ellipsi. Asetetaan leikkaavan tason kummallekin puolelle pallo siten, että molemmat pallot sivuavat kartiota pitkin ympyräviivaa ja koskettavat leikkaavaa tasoa  $T$  yhdessä pisteessä. Merkitään sivuamisympyröitä symbolein  $C_1$  ja  $C_2$  ja pisteitä, joissa pallo koskettaa leikkaavaa tasoa  $T$  symbolein  $F_1$  ja  $F_2$ . Olkoon  $P$  jokin leikkauskäyrän piste ja suora  $s$  pisteen  $P$  kautta kulkeva emäsuora. Olkoon piste  $A_1 = s \cap C_1$  ja  $A_2 = s \cap C_2$ . Tarkastellaan tasoa  $F_1PA_1$ . Se koskettaa toista Dandelinin palloa pisteessä  $F_1$  ja  $A_1$ . Tällöin se leikkaa kyseistä Dandelinin palloa siten, että poikkileikkaus on ympyrä. Poikkileikkauksena muodostuneen ympyrän tangentit ovat  $PF_1$  ja  $PA_1$ . Tangenttikulman kyljet ovat yhtä pitkät, joten saadaan, että  $PF_1 = PA_1$ . Toisesta Dandelinin pallostaan saadaan vastaavasti  $PF_2 = PA_2$ . Nyt näistä kahdesta yhtälöstä saadaan, että

$$PF_1 + PF_2 = PA_1 + PA_2 = A_1A_2.$$

Etäisyys  $A_1A_2$  on ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  välinen etäisyys emäsuoraa pitkin mitattuna, eikä se riipu pisteen  $P$  sijainnista kartioleikkauksella. Tämän perusteella summa  $PF_1 + PF_2$  on vakio. Leikkauskäyrä on määritelmän 2 nojalla ellipsi, jonka polttopisteet ovat  $F_1$  ja  $F_2$ .

Hyperbelin tapauksessa Dandelinin pallot tulee sijoittaa kaksisuuntaisen ympyräkartion  $K$  kumpaankiin haaraan. Kuten ellipsinkin tapauksessa, Dandelinin pallojen sivuamis pisteet ovat  $F_1$  ja  $F_2$ . Kuten aiemminkin, piste  $P$  on satunnainen piste hyperbeliltä. Samalla tavalla, kuten ellipsinkin tapauksessa, saadaan, että

$$|PF_1 - PF_2| = |PA_1 - PA_2| = A_1A_2 = \text{vakio}.$$

Paraabelin tapauksessa yksi Dandelinin pallo sijoitettuna toiseen kaksisuuntaisen ympyräkartion  $K$  haaraan riittää. Dandelinin pallo sivuaa tässä tapauksessa leikkaavaa tasoa pisteessä  $F$ . Kartion ja Dandelinin pallon sivuamisympyrän  $C$  kautta kulkevan tason  $I$  (taso  $I$  leikkaa siis kartiota kartion pohjan suuntaisesti) ja leikkaavan tason leikkaussuoraa merkitään symbolilla  $v$ . Valitaan jälleen leikkauskäyrältä satunnainen piste  $P$ . Olkoon  $A$  pisteen  $P$  kautta kulkevan emäsuoran ja ympyrän  $C$  leikkauspiste. Kuten aiemmissakin tapauksissa, nähdään, että  $PF = PA$ .

Etäisyys  $PV$  on pisteen kohtisuora etäisyys suorasta  $v$ . Koska emäsuoran kaltevuus on sama kuin normaalin kaltevuus, niin  $PA = PV$ . Yhdistämällä aiempaan tulokseen, saadaan, että  $PF = PV$ . Tällöin leikkauskäyrä on paraabeli, jonka polttopiste on  $F$  ja johtosuora  $v$ .  $\square$

## 4 Kartioleikkausten standardimuodot

Tässä luvussa käsitellään kartioleikkausten standardimuotoisia yhtälöitä. Muut kartioleikkaukset saadaan standardimuotoisista kartioleikkauksista. Jokainen kartioleikkaus voidaan esittää standardimuotoisen kartioleikkauksen ratkaisujoukkona sopivassa koordinaatistossa. Paraabelin, ellipsin ja hyperbelin standardimuotoiset yhtälöt todistetaan käyttämällä etäisyyksiin perustuvia kartioleikkausten määritelmiä.

### 4.1 Standardimuotoinen paraabeli

Määritelmän 1 nojalla paraabeli muodostuu niistä tason pisteistä  $P$ , joiden etäisyys johtosuorasta  $l$  ja polttopisteestä  $F$  on yhtä suuri. Pääakseliksi kutsutaan suoraa, joka kulkee polttopisteen  $F$  kautta ja on kohtisuorassa johtosuoraa  $l$  vastaan. Paraabeli on symmetrinen pääakselinsa suhteen. Paraabelin huippu on pisteessä, jossa paraabeli leikkaa pääakselinsa.

Standardimuotoisen paraabelin pääakseli on  $x$ -akseli. Tällöin paraabelin huippu on origossa, joka on yhtä kaukana polttopisteestä  $F$  ja johtosuorasta  $l$ .

Standardimuotoisen paraabelin polttopisteen  $F$   $y$ -koordinaatti on 0. Koska johtosuora  $l$  ja polttopiste  $F$  ovat yhtä kaukana paraabelin huipusta, polttopisteen  $x$ -koordinaatti on  $a$  ja johtosuoran  $l$  yhtälö on  $x = -a$ . Polttopiste  $F$  sijaitsee siis pisteessä  $F = (a, 0)$ .

**Lause 2.** *Standardimuotoisen paraabelin yhtälö on*

$$y^2 = 4ax, \quad \text{missä } a > 0.$$

Edellinen lause todistetaan seuraavaksi Adamsin kirjaa [1] mukaillen määritelmän 1 avulla.

*Todistus.* Määritelmän 1 nojalla tiedetään, että paraabelille pätee  $PF = PQ$ , kun  $P = (x, y)$  on jokin piste paraabelilta,  $F$  on polttopiste ja  $Q$  on pistettä  $P$  lähimpänä oleva piste johtosuoralta. Kuten kuvassa 4,  $\triangle PAF$  on suorakulmainen kolmio, jossa kyljet  $AP$  ja  $AF$  ovat kolmion kateetit. Kuvasta

4 nähdään, että sivu  $AP = y$  ja  $AF = |x - a|$ . Pythagoraan lauseen nojalla saadaan, että

$$(PF)^2 = (x - a)^2 + y^2$$

$$\iff PF = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Toisaalta nähdään myös kuvasta 4, että  $PQ = x + a$ . Koska tiedetään, että  $PF = PQ$ , niin saadaan, että

$$\sqrt{(x - a)^2 + y^2} = x + a$$

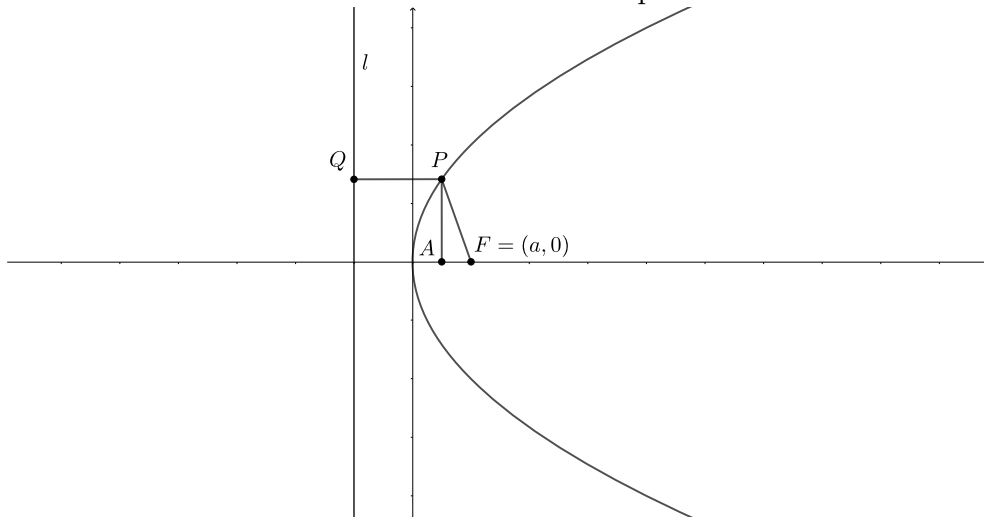
$$\iff (x - a)^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\iff x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\iff y^2 = 4ax.$$

□

Kuva 4: Standardimuotoinen paraabeli



Standardimuotoisesta paraabelin yhtälöstä voidaan selvittää johtosuoran  $l$  yhtälö ja polttopiste  $F$ .

Seuraavassa esimerkissä selvitetään standardimuotoon kartioleikkauksen yhtälöä muokkaamalla, mistä kartioleikkauksesta on kyse.

**Esimerkki 1.** Kirjoitetaan kartioleikkaus  $2y^2 = 18x$  standardimuodossa. Yhtälöä muokkaamalla saadaan, että

$$y^2 = 4 \cdot \frac{9}{4}x.$$

Huomataan lauseen 2 nojalla, että kyseessä on standardimuotoisen paraabelin yhtälö, jossa  $a = \frac{9}{4}$ .

Määritetään standardimuotoisen paraabelin yhtälöstä polttopiste  $F$  ja johtosuora  $l$ . Aiemmin todettiin, että paraabelilla on vain yksi polttopiste ja johtosuora. Paraabelin polttopiste on  $F = (a, 0) = (\frac{9}{4}, 0)$ . Johtosuoran  $l$  yhtälö on  $x = -a$ , joten sijoittamalla parametri  $a$  saadaan johtosuoran yhtälöksi  $x = -\frac{9}{4}$ .

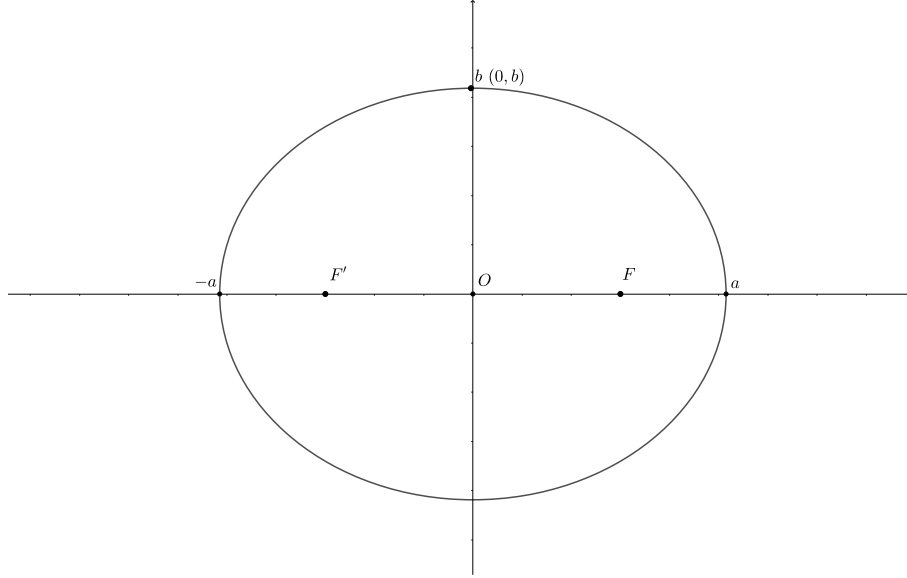
## 4.2 Standardimuotoinen ellipsi

Suoria, joiden suhteen ellipsi on symmetrinen, sanotaan ellipsin akseleiksi. Isoakseliksi sanotaan suoraa, jolla on sen polttopisteet  $F$  ja  $F'$ . Ellipsi on aina symmetrinen myös keskipisteensä suhteen.

Standardimuotoinen ellipsi on symmetrinen  $x$ - ja  $y$ -akselin suhteen kuten kuvassa 5. Ellipsin isoakseli on  $x$ -akseli, jolla on ellipsin polttopisteet  $F$  ja  $F'$ . Ellipsin keskipisteenä on standardimuodossa origo. Ellipsin pikkuakselilla tarkoitetaan akselia, joka on kohtisuorassa isoakselia vastaan ja kulkee ellipsin keskipisteen kautta.

Seuraavan lemmän nojalla pisteen  $P$  etäisyyksien summa sen polttopisteisiin on ellipsin isoakselin pituus, eli  $2a$ . Lemman todistukseen löytyy eräs toinen ratkaisu teoksesta Geometry [3]. Tässä työssä seuraavan lemmän todistuksen lähteenä on käytetty Adamsin teosta [1].

Kuva 5: Standardimuotoinen ellipsi



**Lemma 1.** Valitaan ellipsi, jonka isoakseli kulkee pisteiden  $(-a, 0)$  ja  $(a, 0)$  kautta. Ellipsin polttopisteet ovat  $F$  ja  $F'$ . Jos  $P$  on jokin piste ellipsiltä, on summa  $FP + PF' = 2a$ . Tämä pätee kaikille ellipsin pisteille  $P$ .

*Todistus.* Polttopisteen etäisyyttä ellipsin mielivaltaiselta pisteeltä  $P$  kutsutaan polttosäteeksi. Ellipsin polttosäteet ovat siis  $PF$  ja  $PF'$ . Määritelmän 2 nojalla ellipsin polttosäteiden summa  $PF + PF'$  on vakio, merkitään  $PF + PF' = 2a'$ . Toisaalta jos  $P = (a, 0)$ , niin  $PF = a - c$  ja  $PF' = a + c$ . Tästä seuraa, että  $2a' = 2a$ , joten  $a' = a$ .  $\square$

Määritelmän 2 mukaan ellipsi muodostuu niistä tason pisteistä, joiden etäisyyksien summa molempiin polttopisteisiin on vakio. Määritelmää käytetään seuraavan lauseen todistuksessa, joka mukailee Adamsin kirjaa [1].

**Lause 3.** Olkoon  $a, b \neq 0$ . Ellipsin yhtälö standardimuotoisena on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Todistus.* Standardimuotoisen ellipsin polttopisteet ovat  $F = (-c, 0)$  ja  $F' = (c, 0)$  siten, että etäisyyksien summa mistä tahansa ellipsin pisteestä  $P$  on  $2a$  (siten, että  $a > c$ ).



Kun merkitään kirjaimella  $b$  ellipsin ja  $y$ -akselin positiivista leikkauspistettä, niin Pythagoraan lauseen ja lemmän 1 nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ \iff b^2 &= a^2 - c^2. \end{aligned}$$

Kun piste  $P = (x, y)$  on jokin piste ellipsin kehältä, niin saadaan Pythagoraan lauseen nojalla, että

$$PF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad PF' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Koska  $PF' + PF = 2a$ , sijoittamalla saadaan, että

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 2a \\ \iff \sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \\ \iff x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2 \\ \iff x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \\ \iff -xc &= a^2 - a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \\ \iff a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= cx + a^2 \\ \iff a^2((x + c)^2 + y^2) &= (cx + a^2)^2 \\ \iff a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) &= c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 \\ \iff a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 \\ \iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ \iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Koska  $b^2 = a^2 - c^2$ , niin sijoittamalla saadaan, että

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2, \text{ joten} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

□

Seuraavassa esimerkissä kirjoitetaan standardimuotoon ellipsin yhtälö.

**Esimerkki 2.** Kirjoitetaan kartioleikkaus  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$  standardimuodossa. Kartioleikkaus  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$  voidaan kirjoittaa muodossa  $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ . Huomataan, että kyseessä on standardimuotoisen ellipsin yhtälö, jossa  $a = 7$  ja  $b = 4$ .

### 4.3 Standardimuotoinen hyperbeli

Määritelmän 3 nojalla hyperbeli on niiden pisteiden joukko, joiden etäisyyksien erotus hyperbelin polttopisteistä on vakio.

Kummassakin hyperbelin haarassa on yksi huippu. Hyperbeli on symmetrinen polttopisteiden kautta kulkevan suoran ja polttopisteiden välisen janan keskinormaalin kanssa. Hyperbelin keskipisteeksi kutsutaan pistettä, joka sijaitsee janan  $F'F$  keskipisteessä.

Kun hyperbeli on standardimuotoinen, sen huiput ovat pisteissä  $(a, 0)$  ja  $(-a, 0)$ , kuten kuvassa 6. Tällöin polttopisteet  $F$  ja  $F'$  ovat  $x$ -akselilla, ja niiden koordinaatit ovat  $F = (-c, 0)$  ja  $F' = (c, 0)$ . Standardimuotoisen hyperbelin keskipiste sijaitsee origossa.

Suoraa, jolla sijaitsevat hyperbelin polttopisteet, huiput ja keskipiste, kutsutaan hyperbelin vaaka-akseliksi. Standardimuotoisella hyperbelillä vaaka-akseli on  $x$ -akseli. Suora, joka on kohtisuorassa vaaka-akselia vastaan, on hyperbelin pysty-akseli. Standardimuotoisella hyperbelillä pysty-akseli on  $y$ -akseli. Pysty-akseli ei leikkaa hyperbeliä missään pisteessä.

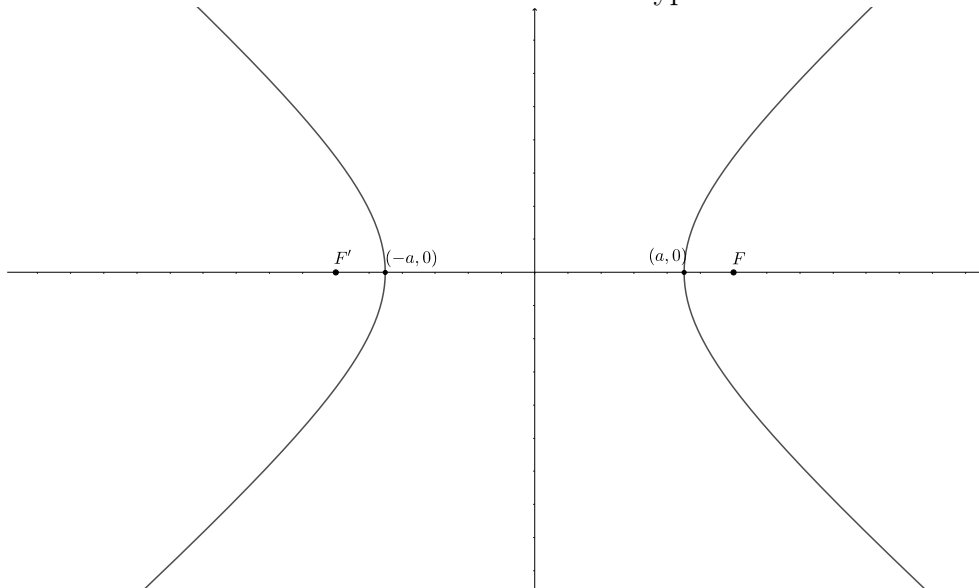
Kuten standardimuotoiselle ellipsilläkin, myös standardimuotoisen hyperbelin yhtälö on aina samaa muotoa.

**Lause 4.** Standardimuotoisen hyperbelin yhtälö on

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Todistus.* Määritelmän 3 nojalla polttopisteiden  $F$  ja  $F'$  etäisyys hyperbelin pisteestä  $P = (x, y)$  on  $|PF - PF'| = 2a$ , kun  $a < c$ . Tällöin hyperbelin polttopisteet ovat  $F = (c, 0)$  ja  $F' = (-c, 0)$ .

Kuva 6: Standardimuotoinen hyperbeli



Pythagoraan lauseen nojalla

$$(PF)^2 = (x + c)^2 + y^2$$

$$\iff PF = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

ja

$$(PF')^2 = (x - c)^2 + y^2$$

$$\iff PF' = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Tästä saadaan, että

$$PF' - PF = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Saadaan yhtälöpari siten, että

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a,$$

kun piste  $P$  sijaitsee hyperbelin oikeassa haarassa ja

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = -2a,$$

kun piste  $P$  sijaitsee vasemmassa haarassa.

Kuten standardimuotoisen ellipsin tapauksessa, myös tästä yhtälöparista saadaan, että

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Olkoon  $b$  positiivinen kokonaisluku siten, että  $b^2 = c^2 - a^2$ . Tällöin sijoittamalla aiempaan yhtälöön saadaan, että

$$\begin{aligned} -b^2x^2 + a^2y^2 &= -a^2b^2 \\ \iff \frac{-b^2x^2}{b^2a^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= -\frac{a^2b^2}{a^2b^2} \\ \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

□

**Esimerkki 3.** Kirjoitetaan kartioleikkaus  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 3$  standardimuodossa. Saadaan, että

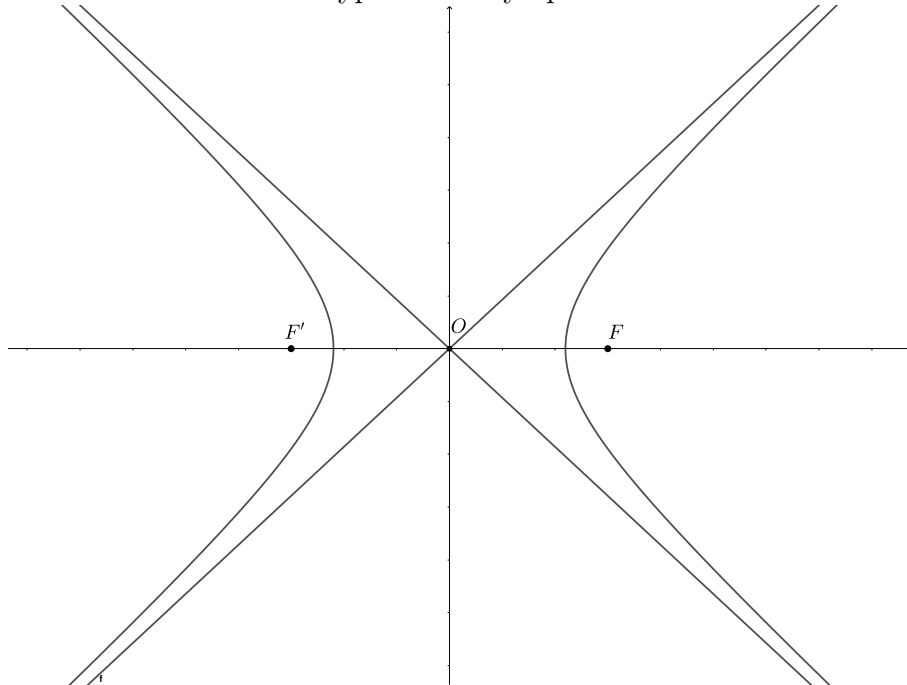
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} &= 3 \\ \iff \frac{x^2}{9} \cdot \frac{1}{3} - \frac{y^2}{12} \cdot \frac{1}{3} &= 1 \\ \iff \frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{36} &= 1 \\ \iff \frac{x^2}{\sqrt{27}^2} - \frac{y^2}{6^2} &= 1. \end{aligned}$$

Yhtälö  $\frac{x^2}{\sqrt{27}^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$  on standardimuotoinen, kun  $a = \sqrt{27}$  ja  $b = 6$ .

Kuvaan 7 on piirretty hyperbelin asymptoottisuorat.

Hyperbelin asymptoottisuorat ovat ne suorat, joita hyperbeli muistuttaa äärettömyyttä lähestyessään. Piirretään suorakulmio siten, että kaksi vaak akselin suuntaista sivua ovat pituudeltaan  $2a$ , ja pysty akselin suuntaiset sivut ovat pituudeltaan  $2b$ . Valitaan suorakulmion keskipisteeksi hyperbelin keskipiste, eli standardimuotoisen hyperbelin tapauksessa origo. Tällöin kaksi suorakulmion sivua ovat hyperbelien huippujen tangentilla. Nyt asymptoottisuorat voidaan piirtää siten, että piirretään suorat suorakulmion lävistäjien kautta. Jos  $a = b$ , hyperbeli on suorakulmainen.

Kuva 7: Hyperbelin asymptoottisuorat



Asymptoottisuorien yhtälöt saadaan yhtälöstä  $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ , eli asymptootit ovat  $y = \pm \frac{b}{a}x$ . Hyperbeli lähestyy mielivaltaisesti näitä suoria.

Suorakulmaisen hyperbelin asymptoottisuorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

## 5 Eksentrisyys

Eksentrisyyden käsittely perustuu Adamsin [1] kirjaan. Seuraavat määritelmät ja lemmat pätevät ellipsille ja hyperbelille. Paraabelin eksentrisyys käsitellään tässä luvussa lopuksi erillisenä osana. Merkitään kartioleikkauksen eksentrisyyttä kirjaimella  $e$ .

**Määritelmä 5.** *Ellipsin ja hyperbelin eksentrisyys on  $e = \frac{c}{a}$ .*

Eksentrisyyden tarkempi tarkastelu vaatii johtosuorien määrittelyn. Sekä ellipsillä että hyperbelillä johtosuoria on kaksi. Paraabelilla on vain yksi johtosuora. Standardimuotoisen ellipsin ja hyperbelin johtosuorat voidaan määritellä seuraavasti:

**Määritelmä 6.** *Standardimuotoisen ellipsin ja hyperbelin johtosuorien yhtälöt ovat  $x = \frac{a}{e}$  ja  $x' = -\frac{a}{e}$ .*

Standardimuotoisen ellipsin ja hyperbelin johtosuorat ovat siis yhdensuuntaisia  $y$ -akselin kanssa. Tässä työssä ellipsin ja hyperbelin johtosuoria merkitään symboleilla  $l$  ja  $l'$ .

Valitaan  $P$  siten, että se on mikä tahansa piste kartioleikkaukselta. Piste  $F$  on kartioleikkauksen polttopiste, ja piste  $Q$  on pistettä  $P$  lähin piste polttopistettä  $F$  vastaavalta johtosuoralta  $l$ . Tällöin kartioleikkauksen eksentrisyys  $e$  on suhde  $\frac{PF}{PQ}$ , kun  $PF$  on etäisyys pisteestä  $P$  polttopisteeseen ja  $PQ$  pisteen  $P$  etäisyys vastaavasta johtosuorasta  $l$ . Tämä voidaan esittää myös seuraavan lemmän avulla.

**Lemma 2.** *Eksentrisyydelle  $e$  pätee, että  $e = \frac{PF}{PQ}$ .*

Lemma todistetaan ellipsille ja hyperbelille molemmille erikseen niiden eksentrisyyksiä käsittelevissä kappaleissa.

### 5.1 Ellipsin eksentrisyys

Jokaiselle ellipsille pätee, että eksentrisyys  $e < 1$ , koska ellipsille aina  $c < a$ . Mitä suurempi ellipsin eksentrisyyden  $e$  arvo on, sitä vähemmän ellipsi

muistuttaa ympyrää. Jos eksentrisyys  $e = 0$ , niin  $a = b$  ja  $c = 0$ . Tällöin kaksi polttopistettä on samassa pisteessä, ja ellipsi on ympyrä.

Tarkastellaan seuraavaksi määritelmää 5. Määritelmän jana  $c$  voidaan toisaalta ilmaista toisella tavalla, koska Pythagoraan lauseen perusteella

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a^2 \\ \iff c^2 &= a^2 - b^2 \\ \iff c &= \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Tämä sijoittamalla saadaan, että ellipsin, jonka yhtälö on  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , kun  $a > b$ , eksentrisyys  $e$  on

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Kun  $e = \frac{c}{a}$ , eksentrisyyden määritelmän 5 nojalla, saadaan, että  $c = ae$ . Aiemmin todettiin, että  $F' = (c, 0)$  ja  $F = (-c, 0)$ , joten sijoittamalla saadaan, että  $F' = (ae, 0)$  ja  $F = (-ae, 0)$ .

Seuraavassa esimerkissä määritetään edellisen esimerkin standardimuotoisen ellipsin yhtälöstä eksentrisyys  $e$ .

**Esimerkki 4.** Määritetään standardimuotoisen ellipsin yhtälöstä  $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$  eksentrisyys  $e$  ja polttopisteet  $F$  ja  $F'$ . Kun  $a = 7$  ja  $b = 4$ , niin voidaan ratkaista parametri  $c$  siten, että

$$c = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{49 - 16} = \sqrt{33}.$$

Eksentrisyyden  $e$  yhtälöstä saadaan siis, että  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{33}}{7}$ . Aiemmin määritettiin, että polttopisteet ovat  $F = (ae, 0)$  ja  $F' = (-ae, 0)$ . Sijoittamalla saadaan  $F = (\sqrt{33}, 0)$  ja  $F' = (-\sqrt{33}, 0)$ .

Ellipsillä on määritelmän 6 nojalla kaksi johtosuoraa  $l$  ja  $l'$ , jotka ovat kohtisuorassa isoakselia vastaan.

Seuraavaksi todistetaan, että lemmän 2 mukaan ellipsille pätee, että  $e = \frac{PF}{PQ}$ . Pistettä  $P = (x, y)$  vastaava piste johtosuoralta  $l$  on  $Q$ . Tällöin etäisyys  $PQ$  on kohtisuoraan johtosuoraa  $l$  vastaan. Todistuksessa käytetään lausetta 3. Koska  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , niin  $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ .

Kun polttopiste  $F = (c, 0)$ , niin Pythagoraan lauseen nojalla

$$\begin{aligned}PF^2 &= (x - c)^2 + y^2 \\&= x^2 - 2cx + c^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\&= x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} \\&= -2cx + c^2 + b^2 + \frac{a^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \\&= -2cx + a^2 - b^2 + b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 \\&= -2cx + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 \quad (\text{koska } a^2 - b^2 = c^2) \\&= e^2x^2 - 2eax + a^2 \quad (\text{koska } c = ea) \\&= (a - ex)^2.\end{aligned}$$

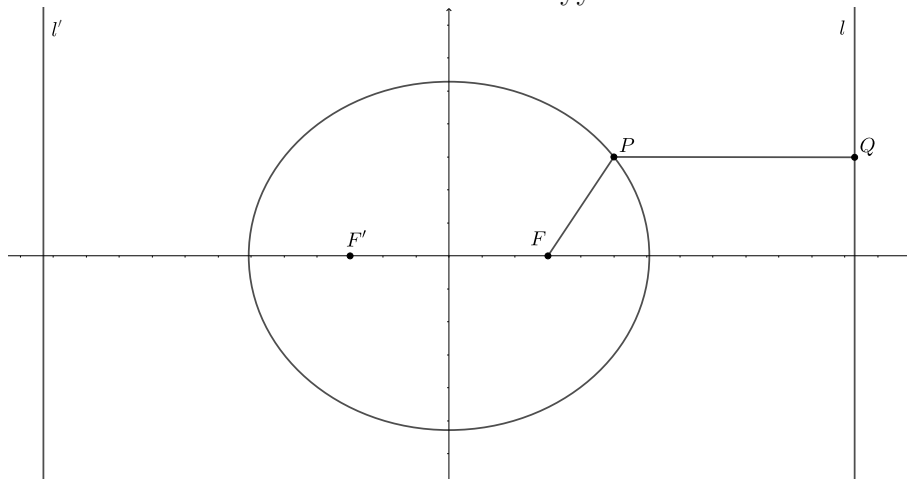
Nyt siis tiedetään, että  $PF = a - ex$ . Toisaalta myös johtosuoran yhtälön perusteella tiedetään, että  $QP = \left(\frac{a}{e} - x\right) = \frac{a-ex}{e}$ . Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned}\frac{PF}{PQ} &= (a - ex) : \frac{a - ex}{e} \\&= (a - ex) \cdot \frac{e}{a - ex} \\&= e.\end{aligned}$$

Standardimuotoiselle ellipsille pätee siis, että eksentrisyys  $e = \frac{PF}{PQ}$ .



Kuva 8: Eksentrisyys



## 5.2 Hyperbelin eksentrisyys

Määritelmän 5 nojalla hyperbelin eksentrisyys on muotoa  $e = \frac{c}{a}$ . Sijoittamalla saadaan, että  $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ , kun  $a, b > 0$ .

Jokaiselle hyperbelille pätee, että eksentrisyys  $e > 1$ , koska hyperbelille on aina  $c > a$ .

Suorakulmaiselle hyperbelille pätee, että  $a = b$ . Tällöin  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$ . Saadaan siis, että suorakulmaisen hyperbelin eksentrisyys  $e = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$ .

Todistetaan, että standardimuotoiselle hyperbelille pätee lemma 2, eli että  $e = \frac{PF}{PQ}$ .

Todistus etenee samankaltaisesti, kuin standardimuotoiselle ellipsillekin. Todistuksessa käytetään lausetta 4, jonka nojalla  $y^2 = b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$ . Pythagoraan lauseen nojalla saadaan, että  $PF^2 = (-x + c)^2 + y^2$ , mikäli polttopiste  $F$  ja piste  $P$  sijaitsevat eri haarassa. Jos polttopiste  $F$  ja piste  $P$  sijaitsevat samassa haarassa, niin  $PF^2 = (c - x)^2 + y^2$ . Molemmissa tapauksissa  $PF^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2$ .

Sijoittamalla saadaan, että

$$\begin{aligned}
 PF^2 &= x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
 &= x^2 - 2xc + c^2 + b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \\
 &= -2xc + c^2 - b^2 + \frac{a^2}{a^2}x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 \\
 &= -2xc + a^2 + b^2 - b^2 + \frac{b^2 + a^2}{a^2}x^2 \\
 &= e^2x^2 - 2aex + a^2 \\
 &= (a - ex)^2.
 \end{aligned}$$

Kuten standardimuotoisen ellipsin tapauksessa, myös hyperbelille pätee, että  $PF = a - ex$ . Samalla tavalla kuin ellipsin tapauksessa, saadaan myös hyperbelille, että  $e = \frac{PF}{PQ}$ .

**Esimerkki 5.** Ratkaistaan esimerkin 3 standardimuotoisen hyperbelin yhtälöstä  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 3$  eksentrisyys  $e$ , polttopisteet  $F$  ja  $F'$ , johtosuorat  $l$  ja  $l'$  sekä asymptoottisuorat.

Esimerkissä 3 ratkaistiin, että  $a = \sqrt{27}$  ja  $b = 6$ , joten

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{27}^2 + 6^2} = \sqrt{63}.$$

Seuraavaksi lasketaan eksentrisyys  $e$  sijoittamalla parametrit  $c$  ja  $a$  eksentrisyyden yhtälöön:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{21}}{\sqrt{3}\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Tällöin

$$F = (c, 0) = (ae, 0) = (\sqrt{63}, 0)$$

ja

$$F' = (-c, 0) = (-\sqrt{63}, 0).$$

Sijoittamalla yhtälöihin  $x = -\frac{a}{e}$  ja  $x' = \frac{a}{e}$  aiemmin ratkaistut  $a$  ja  $e$ , saadaan hyperbelin johtosuorat  $l$  ja  $l'$ .

Johtosuorat ovat

$$x = \sqrt{27} : \frac{\sqrt{21}}{9} = \sqrt{27} \cdot \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{9} \cdot 3}{\sqrt{7}} = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

ja

$$x' = -\sqrt{27} : \frac{\sqrt{21}}{9} = -\sqrt{27} \cdot \frac{3}{\sqrt{21}} = -\frac{\sqrt{9} \cdot 3}{\sqrt{7}} = -\frac{9}{\sqrt{7}}.$$

Asymptoottisuorat hyperbelille ovat  $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{6}{\sqrt{27}}x$ .

### 5.3 Paraabelin eksentrisyys

Paraabelin määritelmän 1 nojalla  $PF = PQ$ , kun  $Q$  on johtosuoralta  $l$  pistettä  $P$  vastaava piste. Tästä seuraa, että  $\frac{PF}{PQ} = 1$ . Paraabelin eksentrisyys voidaan siis määritellä myös asettamalla  $e = \frac{PF}{PQ} = 1$ .

## 6 Kartioleikkaukset ja toisen asteen yhtälöt

Kartioleikkauksia voidaan tarkastella monella eri tavalla. Kuten aiemmin on todettu, kartioleikkauksen yhtä määritelmistä käyttämällä voidaan päätyä toiseen tapaan esittää sama haluttu kartioleikkaus. Yksi tavoista määritellä kartioleikkaus on Yleisen toisen asteen yhtälön kautta, joka määritellään tässä luvussa. Tässä luvussa isot kirjaimet  $A, B, C, \dots$  ovat reaalityyppisiä lukuja, kun taas aiemmissa luvuissa isot kirjaimet ovat olleet tason pisteitä. Lemmojen, lauseiden ja määritelmien lähteenä on käytetty Äkkisen luentomonistetta [8].

Seuraavaksi määritellään Yleinen toisen asteen yhtälö, joka on oleellinen määritelmä kartioleikkausten laajempaa tarkastelua varten.

**Määritelmä 7** (Yleinen toisen asteen yhtälö). *Yleinen toisen asteen yhtälö on muotoa*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

*kun  $A, B, C, D, E$  ja  $F \in \mathbb{R}$ , ja ainakin yksi luvuista  $A, B$  tai  $C$  on nollasta eroava.*

Seuraavaa Yleiseen toisen asteen yhtälöön liittyvää lausetta käytetään apuna myöhemmin tässä luvussa.

**Lemma 3.** *Olkoon  $S \subset \mathbb{R}^2$  yhtälön*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{kun } A, C, D, E, F \in \mathbb{R}$$

*ratkaisujoukko. Mikäli kyseessä on surkastumaton kartioleikkaus, niin kyseessä on*

- *ellipsi, jos  $AC > 0$ ,*
- *paraabeli, jos  $AC = 0$  ja*
- *hyperbeli, jos  $AC < 0$ .*

*Todistus.* Käydään läpi kaikki eri tapaukset riippuen kertoimien  $A$  ja  $C$  arvoista.

Jos  $A = 0$  ja  $C \neq 0$ , niin yhtälöstä saadaan, että  $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Kyseessä on paraabeli, jos  $D \neq 0$  tai jokin surkastunut kartioleikkaus, jos  $D = 0$ .

Jos  $A \neq 0$  ja  $C = 0$ , niin tällöin saadaan, että  $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Yhtälö on siis sama kuin edellinen, jos vaihdetaan koordinaatit  $x$  ja  $y$ .

Jos  $A \neq 0$  ja  $C \neq 0$ , niin saadaan, että

$$\begin{aligned} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ \iff Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} &= \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \\ \iff Ax^2 + \frac{2xDA}{2A} + \frac{AD^2}{4A^2} + Cy^2 + \frac{2yEC}{2C} + \frac{CE^2}{4C^2} &= \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \\ \iff A \left( x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left( y + \frac{E}{2C} \right)^2 &= \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F. \end{aligned}$$

Merkitään sitten, että  $x' = x + \frac{D}{2A}$ ,  $y' = y + \frac{E}{2C}$  ja  $F' = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$ . Nyt sijoittamalla saadaan, että  $Ax'^2 + Cy'^2 = F'$ .

Jos  $AC > 0$ , niin  $A$  ja  $C$  ovat samanmerkkiset. Mikäli kerrotaan yhtälö tarvittaessa puolittain luvulla  $-1$ , niin voidaan olettaa, että  $A$  ja  $C$  ovat positiivisia. Tällöin yhtälön  $Ax'^2 + Cy'^2 = F'$  ratkaisujoukko jakautuu seuraavalla tavalla riippuen vakion  $F'$  arvosta. Ratkaisujoukko jakautuu siten, että kyseessä on

ellipsi, jos  $F' > 0$

piste, jos  $F' = 0$

ja tyhjä joukko, jos  $F' < 0$ .

Tarkastellaan seuraavaksi vielä tapausta, jossa  $AC < 0$ . Tällöin  $A$  ja  $C$  ovat erimerkkiset. Jos oletetaan, että  $A > 0$  ja  $C < 0$ , niin edelleen ratkaisujoukon määrittää vakion  $F'$  arvo. Jos  $F' \neq 0$ , niin kyseessä on hyperbeli. Mikäli  $F' = 0$ , niin kyseessä on kahden leikkaavan suoran yhdiste. Nyt voidaan jaotella niin, että erotetaan surkastumattomat kartioleikkaukset. Niitä vertaamalla alkuperäiseen väitteeseen, huomataan, että väite pätee.  $\square$

Seuraavan lauseen todistuksessa käytetään apuna lemmaa 3.

**Lause 5.** *Yleisen toisen asteen yhtälön toteuttavien pisteiden  $(x, y)$  joukko on joko kartioleikkaus, tyhjä joukko tai kahden yhdensuuntaisen suoran yhdiste.*

*Todistus.* Yhtälö  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  määrää kartioleikkauksen. Tämä voidaan esittää siten, että määritellään aluksi

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}, \mathbb{B} = \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix} \text{ ja } x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Tällöin Yleinen toisen asteen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$x^T \mathbb{A} x + \mathbb{B}^T x + F = 0.$$

On olemassa diagonaalimatriisi  $\mathbb{D}$  ja ortogonaalimatriisi  $\mathbb{P}$  siten, että

$$\mathbb{A} = \mathbb{P} \mathbb{D} \mathbb{P}^T,$$

kun

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbb{P} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}.$$

Parametrit  $x_1$  ja  $x_2$  ovat ominaisarvoja  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  vastaavat normitetut ominaisvektorit. Tällöin  $|x_i| = 1$ .

Merkitään nyt, että

$$x' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbb{P}^T x.$$

Tällöin yhtälö  $\mathbb{A} = \mathbb{P} \mathbb{D} \mathbb{P}^T$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$x'^T \mathbb{D} x' + \mathbb{B}^T \mathbb{P} x' + F = 0.$$

Laskemalla nähdään helposti, että kyseinen yhtälö on muotoa

$$A' x'^2 + C' y'^2 + D' x' + E' y' + F' = 0,$$

joten kyseessä on kartioleikkaus. □

Kartioleikkaus voidaan kuvata niiden pisteiden joukkona, joka toteuttaa määritelmässä 5 mainitun toisen asteen yhtälön joukossa  $\mathbb{R}^2$ . Toisen asteen yhtälöstä on mahdollista tunnistaa, mikä surkastumaton kartioleikkaus on kyseessä.

**Lause 6.** *Olkoon  $S$  aito kartioleikkaus, jonka yhtälö on muotoa*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad A, B, C, D, E \text{ ja } F \in \mathbb{R}.$$

*Tällöin kyseessä on*

- *ellipsi, jos  $B^2 - 4AC < 0$ ,*
- *paraabeli, jos  $B^2 - 4AC = 0$  ja*
- *hyperbeli, jos  $B^2 - 4AC > 0$ .*

*Todistus.* Väitteet saadaan suoraan, kun rajoitetaan tarkastelu pelkästään surkastumattomien kartioleikkausten tapauksiin. Huomataan, että lauseen 5 todistuksen lopusta nähdään, että  $A'C' = \det \mathbb{A} = AC - \frac{B^2}{4}$ . □

## 7 Yleinen kartioleikkaus

Tässä luvussa käsitellään kartioleikkauksia ja kartioleikkausten matematiikkaa yleisellä tasolla. Määritelmien, lemموjen ja lauseiden lähteenä on käytetty teosta Geometry [3]. Teosta Geometry [3] mukailee myös Äkkisen luentomoniste [8], jota on käytetty tämän luvun lähteenä.

Aiemmassa luvussa käsiteltiin kartioleikkauksia euklidisessa geometriassa. Seuraavaksi tarkastellaan teoriaa, jonka Felix Klein esitti 1800-luvun lopulla. Vaikka Kleinin ajatusmalli onkin jäänyt euklidisen geometrian varjoon, on sen avulla mahdollista tarkastella laajemmin kartioleikkauksia. Tämän luvun tarkoituksena on perehtyä affiiniin geometriaan, jota keskitytään tarkastelemaan tasossa  $\mathbb{R}^2$ .

### 7.1 Affiini kuvaus

Affiini geometria tarkastelee ominaisuuksia, jotka säilyvät affiineissa kuvauksissa. Affiini geometria muodostuu affiinien kuvausten muodostamasta ryhmästä  $\mathcal{A}(2)$ . Tässä luvussa  $\mathcal{L}(2)$  tarkoittaa kääntyvien  $2 \times 2$  - matriisien joukkoa siten, että

$$\mathcal{L}(2) = \{\mathbb{A} \in \mathcal{M}(2) : \det \mathbb{A} \neq 0\}.$$

Affinit kuvaukset voivat vääristää etäisyyksiä ja kulmia toisin kuin isometriat ja similariteetit. Etäisyyksien suhteen affiini geometria toimii kulmia paremmin, nimittäin affiini geometria säilyttää samalla suoralla olevien pisteiden suhteelliset etäisyydet. Affiini geometria kuvaa suorat suoriksi, ja suorien yhdensuuntaisuus säilyy.

**Määritelmä 8.** *Affiinien kuvausten ryhmään  $\mathcal{A}(2)$  kuuluvat kuvaukset  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ovat muotoa*

$$f(x) = \mathbb{A}x + b,$$

*kun  $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(2)$  ja  $b \in \mathbb{R}^2$ .*

**Lause 7** (Affiinin geometrian peruslause). *Olkoon  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  keskenään eri pisteitä siten, että ne eivät ole samalla suoralla, samoin kuin pisteet*



$A', B', C' \in \mathbb{R}^2$ . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen affiini kuvaus  $f$ , jolle  $f(A) = A', f(B) = B'$  ja  $f(C) = C'$ .

Lauseen todistus mukailee Äkkisen luentomonisteessa [8] esitettyä todistusta.

*Todistus.* Määritellään aluksi affiini kuvaus  $f \in \mathcal{A}(2)$  siten, että

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= A \\ f(1, 0) &= B \\ f(0, 1) &= C. \end{aligned}$$

Olkoon  $f(x) = \mathbb{A}x + b$  siten, että

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Tällöin saadaan sijoittamalla, että

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = A \\ &\iff A = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = B \\ &\iff \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = B \\ &\iff \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = B - A \end{aligned}$$

ja

$$f(0, 1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = C.$$

$$\begin{aligned} \iff \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= C \\ \iff \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} &= C - A. \end{aligned}$$

Merkitään siis, että  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} B - A & C - A \end{bmatrix}$  ja  $b = A$ . Alkuperäisen oletuksen nojalla  $A, B$  ja  $C$  eivät ole samalla suoralla. Tällöin vektorit  $\{B - A, C - A\}$  ovat lineaarisesti riippumattomia, jolloin matriisille  $\mathbb{A}$  pätee, että  $\det \mathbb{A} \neq 0$ . Kuvaus  $f$  on siis affiini kuvaus.

Olkoon  $g$  on affiini kuvaus, jolle pätee, että  $g(0, 0) = A', g(1, 0) = B'$  ja  $g(0, 1) = C'$ . Tällöin kuvaus  $h = g \circ f^{-1}$  on lauseen etsitty kuvaus. Nyt tiedetään, että kuvaus on olemassa.

Kun kuvauksen olemassaolo on osoitettu, täytyy vielä osoittaa sen yksikäsitteisyys. Olkoon  $g$  ja  $f$  affineja lauseen mukaisia kuvauksia. Määritellään seuraavaksi  $h = f \circ g^{-1}$ . Tällöin  $h$  on affiini kuvaus, ja pisteet  $A, B$  ja  $C$  eivät ole samalla suoralla, joten  $h = id$ . Tiedetään siis, että  $f = g$ .  $\square$

Seuraavaan esimerkkitehtävään löytyy eräs toinen ratkaisu teoksen Geometry [3] sivulta 89.

**Esimerkki 6.** Määrätään yksikäsitteinen affinikuvaus, joka kuvaa pisteet  $A = (2, 3)$ ,  $B = (1, 6)$  ja  $C = (3, -1)$  vastaavasti pisteiksi  $(1, -2)$ ,  $(2, 1)$  ja  $(-3, 5)$ .

*Pisteet  $A, B$  ja  $C$  eivät ole samalla suoralla, joten edellä todistettu lause 7 on voimassa. On siis olemassa yksikäsitteinen affinikuvaus  $f$ , jolle  $f(A) = f(2, 3) = (1, -2)$ ,  $f(B) = f(1, 6) = (2, 1)$  ja  $f(C) = f(3, -1) = (-3, 5)$ .*

*Kuvaus on muotoa  $f(x) = \mathbb{A}x + b$ , missä*

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Sijoittamalla matriisit  $A$  ja  $b$  kuvaukseen  $f(x)$  saadaan, että pisteessä  $A$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 2a_{11} + 3a_{12} \\ 2a_{11} + 3a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 2a_{11} + 3a_{12} + b_1 \\ 2a_{21} + 3a_{22} + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Samalla tavalla saadaan pisteessä  $B$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} + 6a_{12} \\ a_{21} + 6a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ja pisteessä  $C$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 3a_{11} - a_{12} \\ 3a_{21} - a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näistä kolmesta yhtälöstä saadaan kaksi yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 2a_{11} + 3a_{12} + b_1 = 1 \\ a_{11} + 6a_{12} + b_1 = 2 \\ 3a_{11} - a_{12} + b_1 = -3 \end{cases} \quad ja \quad \begin{cases} 2a_{21} + 3a_{22} + b_2 = -2 \\ a_{21} + 3a_{22} + b_2 = 1 \\ 3a_{21} - a_{22} + b_2 = 5. \end{cases}$$

Käytetään ensimmäisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi Gauss-Jordanin eliminointimenetelmää:

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
& \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{8}{3} \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{8}{3} \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{8}{3} \end{array} \right] \\
& \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -24 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Tästä saadaan, että

$$\begin{cases} a_{11} = 8 \\ a_{12} = 3 \\ b_1 = -24. \end{cases}$$

Tehdään sama toiselle yhtälöryhmälle:

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 1 & 14 \end{array} \right] \\
& \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{94}{9} \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 94 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 94 \end{array} \right] \\
& \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -33 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 94 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Tämän perusteella saadaan, että

$$\begin{cases} a_{21} = -33 \\ a_{22} = -10 \\ b_2 = 94. \end{cases}$$

Sijoittamalla eliminointimenetelmällä saadut arvot saadaan, että

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -33 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{bmatrix} -24 \\ 94 \end{bmatrix}.$$

Kuvaus on siten muotoa

$$f(x) = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -33 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -24 \\ 94 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi todistetaan, että affiinit kuvaukset muodostavat ryhmän.

**Lemma 4.** *Affiniinien kuvausten joukko  $\mathcal{A}(2)$ , varustettuna yhdistetyn kuvauksen laskutoimituksella, on ryhmä, eli*

1. Jos  $t_1$  ja  $t_2 \in \mathcal{A}(2)$ , niin  $t_1 \circ t_2 \in \mathcal{A}(2)$ ,
2. Identinen kuvaus  $Id \in \mathcal{A}(2)$ ,
3. Jos  $t \in \mathcal{A}(2)$ , niin  $t^{-1} \in \mathcal{A}(2)$  ja
4. kuvausten yhdiste on assosiatiivinen laskutoimitus.

*Todistus.* Osoitetaan, että neljä ryhmäaksioomaa on voimassa.

1. Suljettu

Olkoon  $t_1$  ja  $t_2$  affineja kuvauksia siten, että

$$t_1(x) = \mathbb{A}_2x + b_1 \quad \text{ja} \quad t_2(x) = \mathbb{A}_2x + b_2,$$

kun  $\mathbb{A}_1$  ja  $\mathbb{A}_2$  ovat kääntyviä  $2 \times 2$  -matriiseja. Tällöin jokaiselle  $x \in \mathbb{R}^2$  pätee, että

$$\begin{aligned} (t_1 \circ t_2)(x) &= t_1(\mathbb{A}_2x + b_2) \\ &= \mathbb{A}_1(\mathbb{A}_2x + b_2) + b_1 \\ &= (\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2)x + (\mathbb{A}_1b_2 + b_1). \end{aligned}$$

Koska matriisit  $\mathbb{A}_1$  ja  $\mathbb{A}_2$  ovat kääntyviä, tiedetään, että matriisi  $\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2$  on kääntyvä.

2. Neutraalialkio

Olkoon  $i$  affini kuvaus, jolle pätee

$$i(x) = \mathbb{I}x + 0 \quad (x \in \mathbb{R}^2),$$

kun  $\mathbb{I}$  on  $2 \times 2$  -ykkösmatriisi. Olkoon  $t$  on affiini kuvaus, jolloin

$$t(x) = \mathbb{A}x + b \quad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Tällöin jokaiselle  $x \in \mathbb{R}^2$  pätee, että

$$(t \circ i)(x) = \mathbb{A}(\mathbb{I}x + 0) + b = \mathbb{A}x + b = t(x)$$

ja

$$(i \circ t)(x) = \mathbb{I}(\mathbb{A}x + b) + 0 = \mathbb{A}x + b = t(x).$$

Nyt siis tiedetään, että  $t \circ i = i \circ t = t$ . Tämän perusteella  $i$  on siis neutraalialkio.

### 3. Käänteiskuvaus

Määritellään mielivaltainen affiini kuvaus  $t$  siten, että

$$t(x) = \mathbb{A}x + b \quad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Tällöin voidaan määritellä affiini kuvaus  $t'$ , jolle

$$t'(x) = \mathbb{A}^{-1}x - \mathbb{A}^{-1}b.$$

Nyt jokaiselle parametrille  $x \in \mathbb{R}^2$  pätee, että

$$\begin{aligned} (t \circ t')x &= t(\mathbb{A}^{-1}x - \mathbb{A}^{-1}b) \\ &= \mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}x - \mathbb{A}^{-1}b) + b \\ &= (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}x - \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}b) + b \\ &= (x - b) + b \\ &= x. \end{aligned}$$

Toisaalta myös

$$\begin{aligned} (t' \circ t)(x) &= t'(\mathbb{A}x + b) \\ &= \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}x + b) - \mathbb{A}^{-1}b \\ &= (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}x + \mathbb{A}^{-1}b) - \mathbb{A}^{-1}b \\ &= (x + \mathbb{A}^{-1}b) - \mathbb{A}^{-1}b \\ &= x. \end{aligned}$$

Tästä saadaan, että  $t \circ t' = t' \circ t = i$ . Tällöin kuvaus  $t'$  on kuvauksen  $t$  käänteiskuvaus.

#### 4. Assosiatiivisuus

Kuvausten yhdistäminen on aina assosiatiivinen.

□

Lemman 4 todistuksen perusteella käänteiskuvaus kuvaukselle  $f(x)$  on

$$f^{-1}(x) = \mathbb{A}^{-1}x - \mathbb{A}^{-1}b.$$

**Esimerkki 7.** Määrätään esimerkin 6 affinille kuvaukselle käänteiskuvaus.

Koska käänteiskuvaus on muotoa

$$f^{-1}(x) = \mathbb{A}^{-1}x + \mathbb{A}^{-1}b,$$

niin lasketaan käänteismatriisi  $\mathbb{A}^{-1}$ , kun  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -33 & -10 \end{bmatrix}$ .

Kun  $\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ , niin

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -33 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tästä saadaan kaksi yhtälöparia,

$$\begin{cases} 8x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ -33x_{11} - 10x_{21} = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 8x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ -33x_{12} - 10x_{22} = 1. \end{cases}$$

Koska ensimmäisestä yhtälöparista saadaan, että

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -\frac{3}{8}x_{21} + \frac{1}{8} \\ -33x_{11} - 10x_{21} = 0, \end{cases}$$

niin

$$\begin{aligned} -33 \cdot \left( -\frac{3}{8}x_{21} + \frac{1}{8} \right) - 10x_{21} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{99}{8}x_{21} - \frac{33}{8} - 10x_{21} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{19}{8}x_{21} &= \frac{33}{8} \\ \Leftrightarrow 19x_{21} &= 33 \\ \Leftrightarrow x_{21} &= \frac{33}{19}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla saadaan, että

$$x_{11} = -\frac{3}{8}x_{12} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8} \cdot \frac{33}{19} + \frac{1}{8} = -\frac{99}{8 \cdot 19} + \frac{19}{19 \cdot 8} = -\frac{80}{8 \cdot 19} = -\frac{10}{19}.$$

Toisesta yhtälöparista saadaan samalla tavalla laskemalla, että

$$x_{12} = -\frac{3}{19} \quad \text{ja} \quad x_{12} = -\frac{8}{19}.$$

Sijoittamalla saadut arvot saadaan, että  $\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{33}{19} & \frac{8}{19} \end{bmatrix}$ . Sijoittamalla saadaan, että

$$\mathbb{A}^{-1}b = \begin{bmatrix} -\frac{10}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{33}{19} & \frac{8}{19} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -24 \\ 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{42}{19} \\ -\frac{40}{19} \end{bmatrix}.$$

Käänteisfunktio  $f^{-1}(x)$  funktiolle  $f(x)$  on siis

$$f^{-1}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{10}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{33}{19} & \frac{8}{19} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{42}{19} \\ -\frac{40}{19} \end{bmatrix}.$$

## 7.2 Affinin geometrian soveltaminen

Tässä luvussa osoitetaan, että kartioleikkaukset voidaan kuvata toisikseen affiinilla kuvauksella. Kartioleikkaukset ovat siis affiinisti yhdenmuotoisia. Todistusten lähteenä tässä luvussa on käytetty Äkkisen luentomonistetta [8].

Kierto, siirto ja peilaus ovat tärkeitä operaatioita, joilla esimerkiksi standardimuotoisesta ellipsistä saadaan toinen ellipsi. Sama pätee kaikille kartioleikkauksille. Tässä työssä käsitellään kierto ja siirto, koska ne ovat oleellisia lemmän 6 todistuksen kannalta. Kiertokuvaus on affiini kuvaus, jossa  $A = R_\alpha$ , kun  $\alpha \in [0, 2\pi[$  ja  $b = (0, 0)$ . Tällöin tason kiertoa kulman  $\alpha$  verran vastapäivään vastaa lineaarikuvaus  $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , jonka matriisi on

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Jos tarkastellaan Yleistä toisen asteen yhtälöä, huomataan, että kiertokuvaus vaikuttaa yhtälössä vain termiin  $Bxy$ . Muihin termeihin kiertokuvaus ei vaikuta.



Siirtokuvaus on puolestaan affiini kuvaus, jossa  $A$  on identtinen matriisi,  $A = I$ , ja  $b = (c, d)$ . Siirtokuvaus vaikuttaa Yleisen toisen asteen yhtälön osioon  $Dx + Ey + F$ , mutta ei vaikuta termiin  $Bxy$ , toisin kuin kierto kuvaus.

**Lemma 5.** *Olkoon  $f$  affiini kuvaus ja  $A$  ja  $B$  pisteitä. Tällöin  $f$  kuvaa suorat suoriksi, janan  $AB$  janaksi  $f(A)f(B)$  ja puolisuoran  $\overrightarrow{AB}$  puolisuoraksi  $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ . Myös suunnat säilyvät.*

*Todistus.* Pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta kulkeva suora  $l$  on muotoa

$$l = \{tB + (1 - t)A : t \in \mathbb{R}\}.$$

Koska tiedetään, että  $f$  on affiini, niin  $f(x) = \mathbb{A}x + b$ . Tällöin sijoittamalla saadaan, että

$$\begin{aligned} f(x) &= f(tB + (1 - t)A) \\ &= \mathbb{A}tB + \mathbb{A}(1 - t)A + b \\ &= t(\mathbb{A}B + b) + (1 - t)(\mathbb{A}A + b) \\ &= tf(B) + (1 - t)f(A). \end{aligned}$$

Kuvaus  $f$  kuvaa suoran  $\overleftrightarrow{AB}$  suoraksi  $\overleftrightarrow{f(A)f(B)}$ . Sama nähdään myös puolisuoralle ja janalle rajoittamalla parametrin  $t$  arvoa, joten väite on osoitettu.  $\square$

Seuraavaa lemmaa käytetään apuna myöhemmin affiinin geometrian sovelluksissa.

**Lemma 6.** *Olkoon  $S$  surkastumaton kartioleikkaus. Jos  $S$  on*

- *ellipsi, niin on olemassa  $f \in \mathcal{A}(2)$  siten, että  $f(S)$  on yksikköympyrä  $x^2 + y^2 = 1$ .*
- *paraabeli, niin on olemassa  $h \in \mathcal{A}(2)$  siten, että  $h(S)$  on paraabeli  $y^2 = x$ .*
- *hyperbeli, niin on olemassa  $g \in \mathcal{A}(2)$  siten, että  $g(S)$  on hyperbeli  $x^2 - y^2 = 1$ .*

*Todistus.* Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa  $S$  on ellipsi. Siirtokuvauksella, merkitään  $f_1$ , voidaan siirtää ellipsin keskipiste origoon. Tämän jälkeen kiertokuvauksella  $f_2$  voidaan viedä ellipsin isoakselin  $x$ -akselille ja pikkuakselin  $y$ -akselille. Tällöin ellipsin yhtälö on standardimuotoa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ jollain } a \geq b > 0.$$

Sovelletaan vielä lineaarikuvausta  $f_3$  siten, että

$$f_3(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right).$$

Affiinien kuvausten yhdiste on affiini ja ellipsi kuvautuu näin yksikköympyräksi  $x^2 + y^2 = 1$ .

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa  $S$  on paraabeli. Kuvaus  $f_1$  on siirtokuvaus siten, että siirretään paraabelin huippu origoon. Seuraavaksi sovelletaan kiertokuvausta  $f_2$ , jotta saadaan paraabeli standardimuotoon  $y^2 = ax, a > 0$ . Soveltamalla lauseen kuvausta valitsemalla  $b = a$ , saadaan affiini kuvaus  $f_3$ , jolle  $f_3(x, y) = \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)$ . Yhdistämällä kuvaukset saadaan, että  $y^2 = x$ .

Jos kuvaus  $S$  on hyperbeli, voidaan siirtokuvaus  $f_1$  tehdä kuten ellipsille siten, että hyperbelin keskipiste on origossa, vaaka-akseli  $x$ -akselilla ja pystyakseli  $y$ -akselilla. Kiertokuvauksen  $f_2$  jälkeen hyperbeli on standardimuotoa  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  jollain  $b \geq a > 0$ . Soveltamalla kuvausta  $f_3$  ja yhdistämällä kuvaukset saadaan, että

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = 1.$$

□

Edellisen lemmän todistuksesta saadaan osoitettua seuraus kartioleikkausten kuvautumiselle.

**Seuraus 1.** *Jos  $S$  ja  $S'$  ovat molemmat ellipsejä, niin on olemassa affiini kuvaus  $f$  siten, että  $f(S) = S'$ . Sama pätee myös ellipsille ja paraabelille.*

*Todistus.* Olkoon  $S$  ja  $S'$  ellipsejä. Lemman 6 nojalla tiedetään, että  $f_1(S)$  ja  $f_2(S')$  ovat yksikköympyröitä. Kuvaus  $f_2^{-1} \circ f_1$  kuvaa tällöin ellipsin  $S$  ellipsiksi  $S'$  ja lemmän 4 nojalla on myös affiini. Samalla tavalla voidaan näyttää sama helposti myös paraabelille ja hyperbelille.  $\square$

**Lause 8.** *Olkoon  $S \subset \mathbb{R}^2$  surkastumaton kartioleikkaus, ja kuvaus  $f$  on affiini. Jos  $S$  on paraabeli, niin kuva  $f(S)$  on paraabeli, jos  $S$  on ellipsi, niin kuva  $f(S)$  on ellipsi ja jos  $S$  on hyperbeli, niin kuva  $f(S)$  on hyperbeli.*

*Todistus.* Olkoon  $S$  kartioleikkaus. Tällöin tiedetään, että joukon  $S$  pisteet toteuttavat yhtälön

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Valitaan kuvaus  $f$  siten, että se on affiini ja piste  $(x', y') \in f(S)$ . Tällöin on olemassa  $(x, y) \in S$  niin, että  $(x, y) = f^{-1}(x', y')$ . Koska  $f$  on affiini kuvaus, on olemassa  $p, q, r, s, t, u \in \mathbb{R}$  siten, että

$$(x, y) = f^{-1}(x', y') = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix} = (px' + qy' + t, rx' + sy' + u).$$

Kuvajoukko  $f(S)$  on koordinaattien  $x'$  ja  $y'$  avulla esitettynä eri kertoimilla muotoa

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0.$$

Lauseen 5 nojalla tiedetään, että kuvajoukko  $f(S)$  on kartioleikkaus. Affiinin geometrian nojalla surkastumaton kartioleikkaus kuvautuu surkastumattomaksi kartioleikkaukseksi. Tällöin tiedetään, että kuvajoukon  $f(S)$  yhtälö on muotoa

$$A'x'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \text{ kun } A', B', C', D', E' \text{ ja } F' \in \mathbb{R}.$$

Kun  $f^{-1}$  on affiini, laskemalla nähdään suoraan, että

$$B'^2 - 4A'C' = (ps - rq)^2(B^2 - 4AC), \text{ kun } ps - rq \neq 0.$$

Yhtälöstä seuraa väite lauseen 6 nojalla.

$\square$

## 8 Kartioleikkausten parametriesitykset

Kartioleikkaukset voidaan esittää parametriesityksinä polun  $\gamma : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  kuvana sopivalle  $A \subset \mathbb{R}$ . Tässä työssä esitetyt parametriesitykset perustuvat teokseen Geometry [3] ja Äkkisen [8] luentomonisteeseen.

### 8.1 Paraabeli

**Lause 9.** *Olkoon paraabeli  $S$  standardimuotoinen paraabeli, jonka yhtälö on muotoa*

$$y^2 = 4ax.$$

*Tällöin paraabelille  $S$  pätee, että*

$$S = \{(at^2, 2at) : t \in \mathbb{R}\}.$$

*Todistus.* Sijoitetaan standardimuotoisen paraabelin  $S$  yhtälöön  $y^2 = 4ax$  parametrisaation pisteet. Saadaan, että

$$\begin{aligned} (2at)^2 &= 4a(at^2) \\ \iff 4a^2t^2 &= 4a^2t^2. \end{aligned}$$

Parametrisaation pisteet ovat siis aina paraabelilla  $S$ . Nyt tiedetään, että  $\{(at^2, 2at) : t \in \mathbb{R}\} \subset S$ .

Toisaalta jos  $(x, y) \in S$ , niin voidaan osoittaa, että on olemassa jokin  $t$  siten, että  $x = at^2$  ja  $y = 2at$ . Valitaan, että  $t = \frac{y}{2a}$ . Ratkaisemalla standardimuotoisen paraabelin yhtälöstä  $x$  saadaan, että  $x = \frac{(2at)^2}{4a} = at^2$ . Tästä seuraa, että  $S \subset \{(at^2, 2at) : t \in \mathbb{R}\}$ , joten väite on nyt osoitettu.  $\square$

### 8.2 Ellipsi

Ympyrä on ellipsin erikoistapaus. Ympyrä  $C$ , jonka keskipiste on origossa ja säde on  $r$ , voidaan esittää parametrimuodossa siten, että

$$C = \{(r \cos t, r \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

Seuraavaksi tarkastellaan standardimuotoisen ellipsin parametrimuotoa.

**Lause 10.** Olkoon  $S$  standardimuotoinen ellipsi, jonka yhtälö on muotoa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tällöin ellipsille  $S$  pätee, että

$$S = \{(a \cos t, b \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}.$$

*Todistus.* Sijoittamalla parametrisaation pisteet standardimuotoisen ellipsin  $S$  yhtälöön saadaan, että

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 t}{b^2} &= 1 \\ \iff \cos^2 t + \sin^2 t &= 1. \end{aligned}$$

Parametrisaation pisteet ovat siis aina ellipsillä  $S$ . Tiedetään, että

$$\{(a \cos t, b \sin t) : t \in [0, 2\pi]\} \subset S.$$

Seuraavaksi tehdään kääntäen sama todistus.

Nyt tiedetään, että  $x' = \frac{x}{a} = \cos t$ . Tästä seuraa, että  $x = a \cos t$ . Koska  $y' = \frac{y}{b} = \sin t$ , niin tiedetään myös, että  $y = b \sin t$ . Tästä seuraa, että

$$S \subset \{(a \cos t, b \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}.$$

Alkuperäinen väite on todistettu. □

### 8.3 Hyperbeli

**Lause 11.** Olkoon  $S$  standardimuotoinen hyperbeli, jonka yhtälö on muotoa

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tällöin hyperbelille  $S$  pätee, että

$$S = \left\{ \left( \frac{a}{\cos t}, b \tan t \right) : t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \right\}.$$

*Todistus.* Sijoittamalla parametrisaation pisteet standardimuotoisen hyperbelin  $S$  yhtälöön saadaan, että

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= \left(\frac{a}{\cos t}\right)^2 - \frac{(b \tan t)^2}{b^2} = \frac{a^2}{\cos^2 t} - \frac{b^2 \tan^2 t}{b^2} = \frac{a^2}{\cos^2 t} - \frac{b^2 \tan^2 t}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t \\ &= \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = 1. \end{aligned}$$

Koska trigonometrinen yhtälö pätee kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ , niin tiedetään nyt, että

$$S \subset \left\{ \left( \frac{a}{\cos t}, b \tan t \right) : t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \right\}.$$

Toisaalta, jos  $y = b \tan t$ , niin sijoittamalla  $y = b \tan t$  standardimuotoisen hyperbelin yhtälöön  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  saadaan, että  $x = \frac{a}{\cos t}$ . Tästä seuraa, että

$$\left\{ \left( \frac{a}{\cos t}, b \tan t \right) : t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \right\} \subset S.$$

Väite on siis nyt osoitettu. □

## 9 Tangentit

Seuraavaksi tarkastellaan kartioleikkausten tangenttisuoria ja niiden kulmakertoimia. Merkitään kartioleikkauksen pisteitä parametreilla  $x = x(t)$  ja  $y = y(t)$ . Tangentin kulmakerrointa tarkastellaan pisteessä  $t$ , joka on satunnainen piste kuvaajalta.

**Lemma 7.** *Kun  $x = x(t)$  ja  $y = y(t)$ , tangenttisuoran kulmakerroin kuvaajalle  $\in \mathbb{R}^2$  pisteessä  $t$  on*

$$\frac{y'(t)}{x'(t)},$$

*kun  $x'(t) \neq 0$ .*

*Todistus.* Pisteet kuvaajalle parametreilla  $t$  ja  $t+h$  ovat  $(x(t), y(t))$  ja  $(x(t+h), y(t+h))$ . Jos  $h \neq 0$ , niin pisteiden välisen jängteen kulmakerroin on

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{x(t+h) - x(t)},$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{(y(t+h) - y(t)) : h}{(x(t+h) - x(t)) : h}.$$

Seuraavaksi tarkastellaan osamäärän raja-arvoa, kun  $h \rightarrow 0$ . Tällöin jängteen kulmakertoimen raja-arvo on sama kuin tangenttisuoran kulmakerroin, eli

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

□

### 9.1 Paraabelin tangentti

**Lemma 8.** *Pisteen  $(x_0, y_0)$  kautta kulkevan standardimuotoisen paraabelin tangenttisuoran yhtälö on*

$$yy_0 = 2a(x + x_0).$$

*Todistus.* Lauseen 9 nojalla standardimuotoiselle paraabelille pätee, että  $x_0 = at_0^2$  ja  $y_0 = 2at_0$ , kun  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Tällöin derivaatat ovat  $y'(t_0) = 2a$  ja  $x'(t_0) = 2at_0$ . Tästä seuraa, että kulmakerroin tässä pisteessä on

$$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{2a}{2at_0} = \frac{1}{t_0}, \text{ kun } t_0 \neq 0.$$

Tällöin pisteen  $(x_0, y_0)$  kautta kulkevan tangenttisuoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{1}{t_0}(x - x_0) \\ \iff y - 2at_0 &= \frac{1}{t_0}(x - at_0^2) \\ \iff y &= \frac{x}{t_0} - \frac{at_0^2}{t_0} + 2at_0 \\ \iff y &= \frac{x}{t_0} + at_0 \\ \iff y2at_0 &= 2at_0 \cdot \frac{x}{t_0} + 2at_0 \cdot at_0 \\ \iff y \cdot 2at_0 &= 2ax + 2a^2t_0^2 \\ \iff y \cdot 2at_0 &= 2a(x + at_0^2) \\ \iff yy_0 &= 2a(x + x_0). \end{aligned}$$

□

Aiemman todistuksen tangenttisuoran yhtälöä muokkaamalla saadaan yhtälö helposti muotoon

$$t_0y = x + at_0^2.$$

Tätä yhtälön muotoa käytetään myöhemmin luvussa 10.1, joka käsittelee paraabelin heijastusominaisuuksia.

## 9.2 Ellipsin tangentti

**Lemma 9.** *Pisteen  $(x_0, y_0)$  kautta kulkevan standardimuotoisen ellipsin  $E$  tangenttisuoran yhtälöksi saadaan*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$



*Todistus.* Kun  $(x_0, y_0) \in E$ , niin

$$(x_0, y_0) = (a \cos t_0, b \sin t_0).$$

Tangenttisuoran kulmakerroin on tällöin

$$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = -\frac{b \cos t_0}{a \sin t_0}.$$

Sijoittamalla kulmakerroin yleiseen tangenttisuoran yhtälöön saadaan, että

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{b \cos t_0}{a \sin t_0}(x - x_0) \\ \iff y - b \sin t_0 &= -\frac{b \cos t_0}{a \sin t_0}(x - a \cos t_0) \\ \iff ya \sin t_0 - ba \sin^2 t_0 &= -xb \cos t_0 + ab \cos^2 t_0 \\ \iff \frac{y}{a} \sin t_0 - \sin^2 t_0 &= -\frac{x}{a} \cos t_0 + \cos^2 t_0 \\ \iff \frac{y}{b} \sin t_0 + \frac{x}{a} \cos t_0 &= \sin^2 t_0 + \cos^2 t_0 \\ \iff \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

□

### 9.3 Hyperbelin tangentti

Seuraavaksi tarkastellaan hyperbelin tangenttisuoran yhtälöä. Tangenttisuoran yhtälön johtaminen hyperbelille etenee hyvin samalla tavalla, kuin paraabelin ja ellipsin tangenttisuorien yhtälöiden johtaminen.

**Lemma 10.** *Standardimuotoisen hyperbelin  $H$  tangenttisuoran yhtälö pisteen  $(x_0, y_0)$  kautta on*

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

*Todistus.* Kun  $(x_0, y_0) \in H$ , niin

$$(x_0, y_0) = \left( \frac{a}{\cos t_0}, b \tan t_0 \right).$$

Tällöin tangentin kulmakerroin on

$$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{b}{\cos^2 t_0} : \frac{a \sin t_0}{\cos^2 t_0} = \frac{b}{a \sin t_0}.$$

Seuraavaksi sijoitetaan kulmakerroin ja piste  $(x_0, y_0) \in H$  tangenttisuoran yhtälöön

$$\begin{aligned}
 y - y_0 &= k(x - x_0) \\
 \iff y - b \tan t_0 &= \frac{b}{a \sin t_0} \left( x - \frac{a}{\cos t_0} \right) \\
 \iff yy_0 - by_0 \frac{\sin t_0}{\cos t_0} &= \frac{by_0}{a \sin t_0} \left( x - \frac{a}{\cos t_0} \right) \\
 \iff yy_0 - b \frac{\sin^2 t_0}{\cos^2 t_0} &= \frac{b^2 \frac{\sin t_0}{\cos t_0}}{a \sin t_0} \left( x - \frac{a}{\cos t_0} \right) \\
 \iff yy_0 - b \frac{\sin^2 t_0}{\cos^2 t_0} &= b^2 \frac{\sin t_0}{\cos t_0 \sin t_0 a} \left( x - \frac{a}{\cos t_0} \right) \\
 \iff yy_0 - b \frac{\sin^2 t_0}{\cos t_0} &= \frac{b^2}{a \cos t_0} \left( x - \frac{a}{\cos t_0} \right) \\
 \iff \frac{yy_0}{b^2} - \frac{1 - \cos^2 t_0}{\cos^2 t_0} &= \frac{1}{a \cos t_0} \left( x - \frac{a}{\cos t_0} \right) \\
 \iff \frac{yy_0}{b^2} - \frac{1}{\cos^2 t_0} + 1 &= x \cdot \frac{1}{a \cos t_0} - \frac{1}{\cos^2 t_0} \\
 \iff x \cdot \frac{1}{a \cos t_0} - \frac{yy_0}{b^2} &= 1 \\
 \iff \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} &= 1.
 \end{aligned}$$

□

## 10 Kartioleikkausten heijastusominaisuudet

Mielenkiinto suunataan kartioleikkausten heijastusominaisuuksia tarkastellessa nimenomaan polttopisteistä lähteviin tai tuleviin valonsäteisiin. Surkastumattomien kartioleikkausten heijastusominaisuudet ovat keskenään samankaltaiset. Tässä luvussa käsitellään surkastumattomien kartioleikkauksien heijastusominaisuuksia kutakin erikseen. Peilillä tarkoitetaan yksiulotteista peiliä.

### 10.1 Paraabelin heijastusominaisuudet

**Lemma 11.** *Paraabelin polttopisteestä  $F$  lähtevä valo heijastuu paraabelin polttopisteestä sen akselin suuntaiseksi ja akselin suuntaiset valonsäteet heijastuvat polttopisteeseen.*

*Todistus.* Olkoon  $E$  standardimuotoinen paraabele  $y^2 = 4ax$ , ja olkoon piste  $P = (at^2, 2at)$  mielivaltainen piste paraabelilta  $E$ .

Aiemmin on todettu, että jos piste  $P$  on piste paraabelilta, niin paraabelin tangentti noudattaa yhtälöä  $ty = x + at^2$ . Jos  $T$  on piste, jossa tangentti leikkaa  $x$ -akselin, niin pisteessä  $T$  pätee, että  $y = 0$ . Tällöin  $t \cdot 0 = x + at^2$ , joten  $x = -at^2$ . Tiedetään siis, että  $T = (-at^2, 0)$ .

Merkitään kirjaimella  $O$  origoa. Tällöin pätee, että

$$TF = TO + OF = at^2 + a.$$

Pythagoraan lauseen nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned} FP &= \sqrt{(a - at^2)^2 + (2at)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 2a^2t^2 + a^2t^4 + 4a^2t^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 2a^2t^2 + a^2t^4} \\ &= \sqrt{a^2(1 + t^2)^2} \\ &= a(1 + t^2) \\ &= a + at^2 \end{aligned}$$

Saadaan siis, että  $TF = FP$ . Tämän perusteella kolmio  $\triangle PTF$  on tasakylkinen, joten  $\angle TPF = \angle FTP$ . Jos tarkastellaan paraabelin akselin suuntaisen

tulevan valon muodostaman suoran ja pisteen  $P$  kautta kulkevan paraabelin välistä kulmaa, huomataan, että se on samankohtainen kulman  $\angle FTP$  kanssa. Tasakylkisyyden nojalla myös kulma  $\angle TPF$  on yhtä suuri. Väite on siten todistettu.  $\square$

Valonheittimien ja radioteleskooppien suunnittelussa on käytetty hyödyksi paraabelin heijastusominaisuutta. Valonheittimen heijastuseriaatteena on parabolinen peili, jonka hehkulamppu on paraabelin polttopisteessä. Hehkulamppusta tuleva valo osuu paraabelin kaaren muotoiseen peiliin ja valonsäteet heijastuvat paraabelin heijastusominaisuuden mukaisesti paraabelilta akselin suuntaisesti.

Optisten teleskooppien tekniikka hyödyntää joskus myös muita kartioleikkauksia.

## 10.2 Ellipsin heijastusominaisuudet

Seuraava lemma tuo esiin mielenkiintoisen ominaisuuden ellipsin heijastumisen kannalta.

**Lemma 12.** *Ellipsin polttopisteestä  $F$  lähtevä valo heijastuu ellipsistä sen toiseen polttopisteeseen  $F'$ .*

Lemman todistus mukailee teoksen Geometry [3] todistusta. Todistus on esitetty myös Äkkisen luentomonisteessa [8]. Todistuksessa käytetään trigonometriasta tuttua sinilauseetta.

*Todistus.* Oletetaan, että ellipsi  $E$  on standardimuotoinen. Tällöin aiemman nojalla polttopisteet ovat  $F = (ae, 0)$  ja  $F' = (-ae, 0)$ , ja johtosuorat leikkaavat  $x$ -akselia pisteissä  $(\pm \frac{a}{e}, 0)$ .

Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että valo lähtee pisteestä  $F$  ja osuu ellipsiin  $E$  jossain tason pisteessä  $P$ . Pisteiden  $P$  koordinaatit saadaan ellipsin parametriesityksestä (Lause 10)  $P = (a \cos t, b \sin t)$ .

Ellipsin eksentrisyyden avulla saadaan, että

$$PF = e \cdot d(P, l) = e \left( \frac{a}{e} - a \cos t \right) = a - ae \cos t \text{ ja}$$

$$PF' = e \cdot d(P, l) = e \left( \frac{a}{e} + a \cos t \right) = a + ae \cos t,$$

joten

$$\frac{PF}{PF'} = \frac{a - ae \cos t}{a + ae \cos t} = \frac{1 - e \cos t}{1 + e \cos t}.$$

Pisteen  $P$  kautta kulkevan ellipsin  $E$  tangenttisuoran yhtälö on

$$\frac{x}{a} \cos t + \frac{y}{b} \sin t = 1.$$

Olkoon piste  $T$  pisteen  $P$  kautta kulkevan tangentin ja  $x$ -akselin leikkauspiste. Tällöin pätee, että

$$\frac{x}{a} \cos t = 1, \text{ eli } x = \frac{a}{\cos t}.$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{TF}{TF'} = \frac{(a : \cos t) - ae}{(a : \cos t) + ae} = \frac{1 - e \cos t}{1 + e \cos t}.$$

Huomataan, että

$$\frac{PF}{PF'} = \frac{TF}{TF'} \text{ ja } \frac{PF}{TF} = \frac{PF'}{TF'}.$$

Seuraavaksi käytetään sinilausetta kolmioille  $\triangle PFT$  ja  $\triangle PF'T$ . Sinilauseen perusteella

$$\frac{PF}{\sin \angle PTF} = \frac{TF}{\sin \angle TPF} \text{ ja } \frac{PF'}{\sin \angle PTF'} = \frac{TF'}{\sin \angle TPF'}.$$

Tästä edelleen saadaan, että

$$\frac{PF}{TF} = \frac{\sin \angle PTF}{\sin \angle TPF} \text{ ja } \frac{PF'}{TF'} = \frac{\sin \angle PTF'}{\sin \angle TPF'}.$$

Aiemman perusteella tiedetään siis, että

$$\frac{\sin \angle PTF}{\sin \angle TPF} = \frac{\sin \angle PTF'}{\sin \angle TPF'}.$$

Koska pisteet  $T$ ,  $F$  ja  $F'$  sijaitsevat samalla suoralla, tiedetään, että  $\angle PTF = \angle PTF'$ . Tällöin myös  $\sin \angle TPF = \sin \angle TPF'$ , joten

$$\angle TPF = \pi - \angle TPF'.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että tangenttisuoraan nähden janat  $PF$  ja  $PF'$  ovat samassa kulmassa ja lemma on todistettu.  $\square$

### 10.3 Hyperbelin heijastusominaisuudet

**Lemma 13.** *Valo, joka lähtee hyperbelin polttopisteestä  $F$  ja heijastuu hyperbelistä siten, että heijastuneen valon jatke kulkee toisen polttopisteen kautta.*

Lauseen todistus etenee samalla tavalla, kuin paraabelin heijastusominaisuuteen liittyvä lemmän 12 todistus. Todistus on näytetty teoksessa Geometry [3].

## **11 Kartioleikkausten havainnollistaminen opetuksessa**

Tämän luvun tarkoituksena on soveltaa kartioleikkausten matematiikkaa peruskoulun ja lukion uusimpia opetussuunnitelmia mukaillen. Sekä peruskoulussa että lukiossa kartioleikkauksia on mahdollista sivuta opetussuunnitelmien puitteissa. Kartioleikkaukset eivät terminä tule esille lukion tai peruskoulun opetussuunnitelmissa, mutta geometriaa ja avaruuskappaleita käsiteltäessä aihetta on mahdollista opettaa konkretisoivasti ja oppilaan taitotaso huomioiden. Vaikka kartioleikkauksista moni käsitellään viimeistään lukiossa, suurimmalle osalle opiskelijoille ei tule edes mieleen, että kyse on nimenomaan kartioleikkauksista, jotka saadaan kartion pintaa leikkaamalla. Tässä luvussa pyritään antamaan konkreettisia keinoja käsitellä kartioleikkauksia peruskoulussa ja lukiossa erikseen huomioiden oppilaan taitotaso.

### **11.1 Kartioleikkausten soveltaminen peruskoulun opetussuunnitelmassa**

Peruskoulun uusimman opetussuunnitelman [6] tavoitteena on kehittää oppilaan loogista, täsmällistä ja luovaa ajattelua. Opetuksen tarkoituksena on kehittää oppilaiden kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti. Näitä tavoitteita ajatellen kartioleikkausten sivuaminen jo peruskoulussa olisi hyödyllistä. Kartioleikkausten pintapuoleinen ymmärtäminen vaatii kuitenkin jo syvällisemmän matemaattisen ajattelukyvyn omaamista, joten alakouluun niistä puhuminen ei sovellu. Kartioleikkausten käsittely tulisi tehdä yläkoulussa pintapuoleisesti, erityisesti juuri 9. luokka-asteella. Surkastuneiden kartioleikkausten lisäksi yläkoulussa käsitellään kartioleikkauksista vain ympyrää ja paraabelia. Ympyrän ja paraabelin käsittelyssä on peruskoulutasolla jo tarpeeksi haastetta, joten tarpeen ei olisi tuoda lisää kartioleikkauksia, mutta opetuksessa voisi mainita ympyrää ja paraabelia käsiteltäessä, että nämä tasossa olevat kappaleet on mahdollista saada kartion pintaa tasolla leikkaamalla.

Uudessa opetussuunnitelmassa painottuu ilmiöpohjaisuus. Ilmiöpohjainen opettaminen kartioleikkausten yhteydessä olisikin mahdollista. Yläkoulussa opettaja voi joutua johdattelemaan oppilaiden ajattelua oikeaan suuntaan, eikä oppilas välttämättä pysty itse alusta alkaen oivaltamaan, miten kartiota leikataan tasolla, jotta saadaan ympyrä tai paraabeli. Peruskoulussa käytetään paljon kolmiulotteisia mallinnusvälineitä, ja 9. luokalla avaruusgeometriaa käsiteltäessä oppilaat usein käsittelevät myös kolmiulotteista kartiota. Tähän kohtaan voisikin soveltua oppilaille ryhmässä tehtävä pohdintatehtävä, jossa oppilaiden tulisi ensin oivaltaa, mitä tarkoittaa, kun tasolla leikataan kartiota. Tämän jälkeen oppilailta voisi kysellä, miten kartion pintaa tasolla leikkaamalla kartion pinnan poikkileikkaus olisi ympyrä tai paraabeli.

## 11.2 Kartioleikkaukset lukiomatematiikassa

Tämän kappaleen lähteenä on käytetty opetushalinnon lukion opetussuunnitelmaa [7]. Opetussuunnitelmassa matematiikan tehtävänä on kehittää luovan ajattelun sekä ilmaisun mallintamista, ilmaisemista ja ongelman ratkaisemisen taitoja. Juuri näitä edellä mainittuja taitoja kartioleikkausten opiskeleminen lukiossa kehittää. Varsinkin pitkän oppimäärän kurssilla on mahdollista käsitellä geometriassa kartioleikkausten kautta käyriä.

Opetussuunnitelman mukaan pitkän matematiikan geometrian kurssilla (MAA3) tavoitteena on, että opiskelija harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa ja muotoa koskevaa tietoa myös kolmiulotteisissa tilanteissa. Kurssin sisältöihin kuuluu myös suoraan kartioon liittyvien pituuksien, pintaalojen ja tilavuuksien laskeminen. Vaikka suoraan kartioleikkaukset eivät ole keskeisissä sisällöissä, voi kartiosta puhuttaessa silti tarkastella kartioleikkauksia.

Analyttisen geometrian ja vektoreiden kursseilla (MAA 4) opetussuunnitelmassa keskeisissä sisällöissä on mainittu käyrän yhtälö sekä suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälö. Nämä liittyvät oleellisesti kartioleikkauksiin, jo-



ten käyriä käsiteltäessä voitaisiin ottaa tarkemmin käsittelyyn, miten käyrät saadaan kartion pintaa leikkaamalla.

Analyttisen geometrian tavoitteena on, että opiskelija osaa käyttää ohjelmistoja käyrien ja vektoreiden tutkimisessa. Ohjelmistojen käyttäminen on tarpeen ylioppilaskirjoituksia varten. Esimerkiksi Geogebra -sovelluksen hallitseminen on opiskelijalle tärkeää, joten kartioleikkausten havainnollistaminen esimerkiksi juuri Geogebrian avulla voisi olla tarpeen. Lukion pitkän matematiikan opiskelijoille voisi opiskeluun lisämaustetta tuomaan antaa vaikka projektin kartioleikkauksiin liittyen. Esimerkiksi jos opiskelijat jaettaisiin ryhmiin, ja jokaiselle ryhmälle jaettaisiin oma kartioleikkaus, jota tutkia. Tässä kohtaa ei tietenkään haittaa mitään, jos useampi ryhmä opiskelee samaa kartioleikkausta. Ryhmän tulisi Geogebrian ja käytössä olevien kolmiulotteisten kappaleiden avulla havainnollistaa, miten kyseinen käyrä saadaan kartion pintaa leikkaamalla. Tämän jälkeen jokainen ryhmä voisi opettaa oman asiansa (ja esitellä kuvansa) ryhmälle, jolla ei ollut sama tutkittava kartioleikkaus.

## Kirjallisuutta

- [1] R. A. Adams, C. Essex, *Calculus : a complete course*, 8th ed., University of British Columbia & University of Western Ontario, 2014.
- [2] A. B. Ayoub, *The Eccentricity of a Conic Section*, The College Mathematics Journal, Vol. 34, No. 2, 2003, pp.116-121.
- [3] D. Brannan, M. Esplen, J. Gray, *Geometry*, 2nd ed., Cambridge University Press, New York.
- [4] S. K. Kivelä, *Algebra ja geometria*, Hämeenlinna, 1990.
- [5] S. K. Kivelä, *Geometriakulma: Ellipsi on kartioleikkaus*, Matematiikka-lehti Solmu, Solmu 1, 1998-1999.
- [6] Opetushallitus 2014, *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*, Helsinki, 2014.
- [7] Opetushallitus 2015, *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*, Helsinki, 2015.
- [8] T. Äkkinen, *Analyttistä geometriaa*, Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä, 2018.