Virtaukset ja niiden sovelluksia

Elisa Leirimaa

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2020

Tiivistelmä: Elisa Leirimaa, *Virtaukset ja niiden sovelluksia*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 38s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2020.

Tässä tutkielmassa perehdytään verkostoihin ja niihin määriteltyihin virtauksiin. Virtaus on funktio, joka liittää jokaiseen verkoston suunnattuun sivuun kokonaislukuarvon ja toteuttaa tietyt ehdot. Ensinnäkin, jokaiselle suunnatulle sivulle tulee päteä, että vastakkaiselle suunnatulle sivulle virtauksen arvo on yhtä suuri mutta eri merkkinen. Toiseksi jokaisesta kärjestä lähde ja nielu poislukien on lähdettävä virtausta yhtä paljon kuin siihen on saapunut. Lähde on se kärki, josta virtaus lähtee liikkeelle, ja nielu on kärki, johon virtaus lopulta päätyy. Kolmanneksi virtauksen arvon on oltava jokaisessa suunnatussa sivussa korkeintaan yhtä suuri kuin vastaava kapasiteettifunktion arvo. Kapasiteettifunktio liittää jokaiseen verkoston suunnattuun sivuun kokonaislukuarvon, joka kuvaa kunkin suunnatun sivun suurinta mahdollista virtauksen arvoa.

Tutkielmassa osoitetaan lause, joka kertoo, että verkoston läpi kulkevan suurimman mahdollisen virtauksen arvo on sama kuin pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvo. Tätä Fordin ja Fulkersonin kehittämää lausetta kutsutaan suurin virtaus - pienin leikkaus -lauseeksi. Tätä lausetta hyödynnetään läpi koko tutkielman, ja sen avulla osoitetaan keskeisiä verkkoteorian tuloksia, kuten Königin lause, Hallin lause ja Mengerin lause. Königin lauseen mukaan verkon maksimaalisen sovituksen suuruus on sama kuin pienimmän peitteen suuruus. Hallin lause antaa välttämättömän ja toisaalta riittävän ehdon sille, että kaksiosaiselle verkolle löytyy täydellinen sovitus. Mengerin lause puolestaan antaa verkoston suurimman mahdollisen lukumäärän erillisiä polkuja. Nämä tulokset saadaan osoitettua konstruoimalla verkosta verkosto ja lähettämällä virtausta lähteestä verkoston läpi. Näin voidaan hyödyntää virtauksille ja verkostoille osoitettuja tuloksia.

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Peruskäsitteitä **3**

3 Suurin virtaus - pienin leikkaus -lause **9**

4 Kaksiosaisten verkkojen sovitus **13**

5 Verkon peite ja Königin lause **25**

6 Täydellinen sovitus ja Hallin lause **29**

7 Erilliset polut verkostossa ja Mengerin lause **34**

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään verkostoja ja niihin määriteltyjä virtauksia. Ennen verkoston määrittelyä tutkitaan hieman verkkoja yleisemmin. Verkko koostuu kärjistä sekä kärkiä yhdistävistä sivuista. Verkosto sisältää verkon sekä jokaiseen verkon sivuun suunta huomioon otettuna määritellyn kapasiteettifunktion arvon. Lisäksi verkosto sisältää lähteen ja nielun. Lähde on se kärki, josta virtaus lähtee liikkeelle, ja nielu on kärki, johon virtaus lopulta päätyy. Virtaus on verkoston sivuihin suunta huomioon otettuna määritelty funktio, jonka tulee toteuttaa tietyt ehdot. Ensinnäkin, jokaiselle suunnatulle sivulle tulee päteä, että vastakkaiselle suunnatulle sivulle virtauksen arvo on yhtä suuri mutta vastakkaismerkkinen. Toiseksi jokaisesta kärjestä lähde ja nielu poislukien on lähdettävä virtausta yhtä paljon kuin siihen on saapunut. Kolmanneksi virtauksen arvon on oltava jokaisessa suunnatussa sivussa korkeintaan yhtä suuri kuin vastaava kapasiteettifunktion arvo.

Tämän tutkielman keskiössä on Fordin ja Fulkersonin kehittämä lause, joka kertoo, että verkoston läpi kulkevan suurimman mahdollisen virtauksen arvo on sama kuin pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvo. Tätä lausetta kutsutaan suurin virtaus - pienin leikkaus -lauseeksi. Tätä tulosta hyödynnetään muissa luvuissa, ja sen avulla osoitetaan valikoituja keskeisiä verkkoteorian tuloksia. Tämä toteutetaan konstruoimalla verkosta verkosto. Keskeisiä todistettavia lauseita ovat Königin lause, Hallin lause ja Mengerin lause. Ennen näitä tutkielmassa tutustutaan kaksiosaisten verkkojen sovitukseen.

Kaksiosaisten verkkojen sovitus saadaan ratkaistua virtausten avulla. Luvussa 4 osoitetaan, että kaksiosaisen verkon suurimman sovituksen suuruus on sama kuin vastaavan konstruoidun verkoston suurimman virtauksen arvo. Jos sovitus ei ole suurin mahdollinen, suurempi sovitus löydetään konstruoimalla verkosto ja lähettämällä sitä pitkin suurempi virtaus uudelleen ohjattua reittiä pitkin. Tällöin tämä uudelleen ohjattu reitti antaa kyseisen suuremman sovituksen.

Luvussa 5 todistetaan virtausten avulla Königin lause. Lause kertoo, että verkon maksimaalisen sovituksen suuruus on sama kuin pienimmän peitteen suuruus. Luvussa 6 osoitetaan Hallin lause. Hallin lause antaa välttämättömän ja toisaalta riittävän ehdon sille, että kaksiosaiselle verkolle löytyy täydellinen sovitus. Lopuksi luvussa 7 osoitetaan Mengerin lause, joka antaa verkoston suurimman mahdollisen lukumäärän erillisiä polkuja. Näissä lauseissa ei esiinny verkostoa, mutta kyseisistä verkoista saadaan konstruoitua verkosto lisäämällä lähde ja nielu. Näin ollen voidaan soveltaa virtauksille todistettuja lauseita ja saadaan osoitettua edellä mainitut lauseet. Monet tutkielman todistuksista ovat teknisiä, joten todistusten lukemisen helpottamiseksi niiden yhteyteen on lisätty kuvia.

Verkkoteorian käytännön sovelluskohteet ovat laajat. Virtausteoriaa voidaan soveltaa esimerkiksi sähköverkkojen, tietoverkkojen, puhelinlinjojen, teiden, rautateiden tai putkistojen mallintamiseen [1]. Verkoston eri osissa on tietty kapasiteetti kuljettaa esimerkiksi sähköä tai informaatiota. Tämä kapasiteetti rajoittaa sitä, kuinka suuri virtaus kyseistä tuotetta voi kustakin kohdasta kulkea. Tässä työssä on kuitenkin rajoituttu tarkastelemaan virtausten matemaattisia sovelluksia keskeisiin verkkoteorian osa-alueisiin.

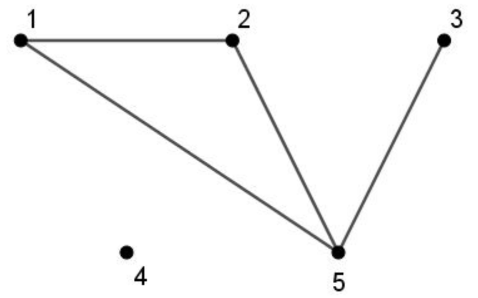
2 Peruskäsitteitä

Tässä luvussa käsitellään aluksi lyhyesti verkkoihin liittyviä peruskäsitteitä, minkä jälkeen käsitellään hieman tarkemmin verkostoja ja niiden ominaisuuksia. Luvun määritelmät ovat lähteistä [2] ja [3]. Verkoston käsitteen muodostamiseen tarvitaan verkko ja siihen liittyviä käsitteitä.

Määritellään aluksi verkko ja tutustutaan sen ominaisuuksiin. Otetaan myös käyttöön tärkeitä käsitteitä, kuten kävely ja suunnattu sivu.

Määritelmä 2.1. *Pari $G := (V, E)$, missä V on joukko ja joukon E alkiot ovat joukon V kahden alkion osajoukkoja, on verkko. Sanotaan, että joukon V alkiot ovat kärkiä ja joukon E alkiot ovat sivuja verkossa $G = (V, E)$. Sivua $e \in E$, jonka kärkipisteet ovat $x \in V$ ja $y \in V$, merkitään $e = \{x, y\}$.*

Esimerkki 2.2. *Pari $G = (V, E)$, missä $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\}$ on verkko.*



Kuva 1: Verkko, jonka kärjet ovat $1, 2, 3, 4$ ja 5. Verkon sivuja on merkitty kärkiä yhdistävillä janoilla.

Määritelmä 2.3. *Olkoon G verkko ja alkiot $v_i, i = 1, \dots, k$ sen kärkiä. $v_1 - v_k$-kävely lähtee kärjestä v_1 ja päättyy kärkeen v_k siten, että sivu $\{v_i, v_{i+1}\}$ kuuluu joukkoon E kaikilla $i = 1, \dots, k-1$. Tätä kävelyä voidaan merkitä $v_1 v_2 \dots v_k$.*

Määritelmä 2.4. *Olkoon $G = (V, E)$ verkko. Tällöin suunnattujen sivujen joukko on*

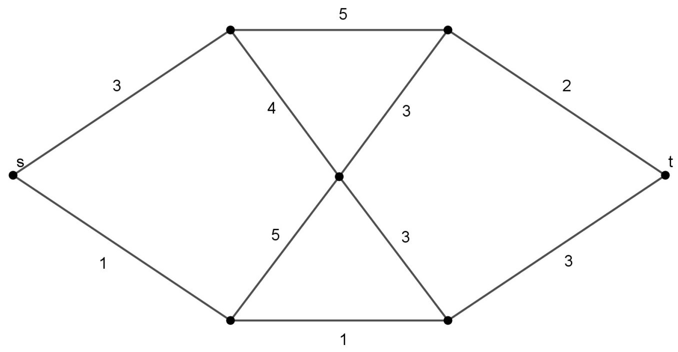
$$\overrightarrow{E} := \{(x, y) | x, y \in V; e = \{x, y\} \in E\},$$

missä (x, y) on järjestetty pari. Merkitään, että $\overrightarrow{e} = (x, y) \in \overrightarrow{E}$ on suunnattu sivu, jonka alkukärki on x ja loppukärki y. Tällöin $\overleftarrow{e} = (y, x) \in \overrightarrow{E}$ on suunnattu sivu, jonka alkukärki on y ja loppukärki on x.

Määritellään seuraavaksi kapasiteettifunktio ja verkosto sekä niihin liittyviä käsitteitä, kuten virtaus ja leikkaus. Osoitetaan myös joitakin yksinkertaisia tuloksia näihin liittyen.

Määritelmä 2.5. *Olkoon $G = (V, E)$ verkko. Tällöin kuvaus $c : \overrightarrow{E} \to \mathbb{N}$ on kapasiteettifunktio verkossa G. Olkoon $s, t \in V$ kaksi kärkeä ja c kapasiteettifunktio verkossa G. Tällöin $N := (G, s, t, c)$ on verkosto.*

Esimerkki 2.6. *Kuvassa 2 on esitetty eräs verkosto $N = (G, s, t, c)$. Suunnattuja sivuja vastaavat kapasiteettifunktion arvot on merkitty kuvaan. Suunnattuun sivuun $\overrightarrow{e}$ liittyvä kapasiteettifunktion arvo on sama kuin suunnattuun sivuun $\overleftarrow{e}$ liittyvä kapasiteettifunktion arvo.*

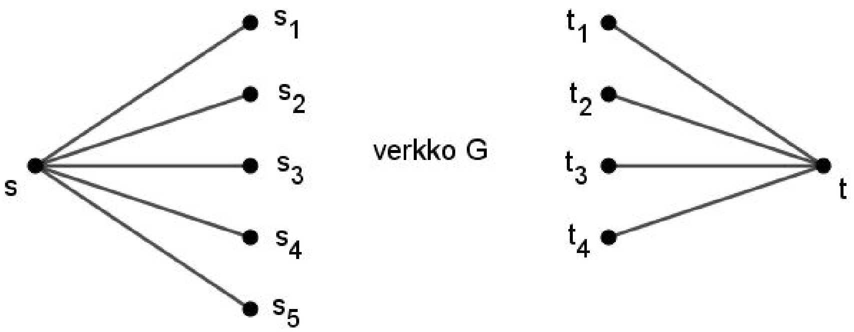


Kuva 2: Verkosto $N = (G, s, t, c)$ ja suunnattuja sivuja vastaavat kapasiteettifunktion arvot.

Varsinkin verkostojen sovelluksien kannalta on järkevää kutsua verkoston $N = (G, s, t, c)$ kärkeä s lähteeksi ja kärkeä t nieluksi. Verkostossa N voi olla myös useampi lähde ja nielu. Seuraava esimerkki on mukailtu lähteessä [4, ss. 296-297] esitetystä esimerkistä.

Esimerkki 2.7. *Useamman lähteen ja nielun tapaus saadaan palautettua tilanteeseen, jossa on vain yksi lähde ja yksi nielu. Kuvassa 3 keskellä on jokin verkko G. Lisätään tähän lähteet s_1, s_2, s_3, s_4 ja s_5 sekä nielut t_1, t_2, t_3 ja t_4. Näin saadaan verkko G', joka sisältää verkon G kärjet ja sivut sekä lähteet s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 sekä nielut t_1, t_2, t_3, t_4 ja näistä lähtevät sivut verkkoon G.*

Verkosta G' muodostetaan verkosto N joillakin suunnattujen sivujen kapasiteettien arvoilla c. Konstruoidaan tästä verkosto N' lisäämällä kärjet s ja t siten, että kärjestä s lähtee sivu jokaiseen lähteeseen ja jokaisesta nielusta lähtee sivu kärkeen t. Näin lisätty kärki s on keinotekoinen lähde ja kärki t keinotekoinen nielu. Asetetaan kärjestä s lähtevien ja kärkeen t päättyvien suunnattujen sivujen kapasiteetin arvoksi verkostosta N riippuen jokin riittävän suuri luku, jotta keinotekoiset lähde ja nielu eivät rajoita virtausta ja siten ne eivät muuta alkuperäisen verkoston käyttäytymistä.



Kuva 3: Verkosto N', joka koostuu verkosta G ja verkoston N lähteistä s_1, s_2, s_3, s_4 ja s_5 sekä nieluista t_1, t_2, t_3 ja t_4 ja keinotekoisista lähteestä ja nielusta s ja t.

Koska useamman lähteen ja nielun tapaukset voidaan palauttaa yhden lähteen ja nielun tilanteeseen, käsitellään tässä tutkielmassa vain tapauksia, joissa lähteitä ja nieluja on kumpaakin vain yksi kappale.

Määritelmä 2.8. *Olkoon $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{Z}$ funktio. Kiinnitetystä kärjestä $v \in V$ lähtevien ja kärkiin $w \in V$ päättyvien suunnattujen sivujen, jotka kuuluvat joukkoon $\overrightarrow{E}$, joukkoa merkitään (v, V). Tällöin $f(v, V)$ on näihin suunnattuihin sivuihin liittyvien funktion f arvojen summa.*

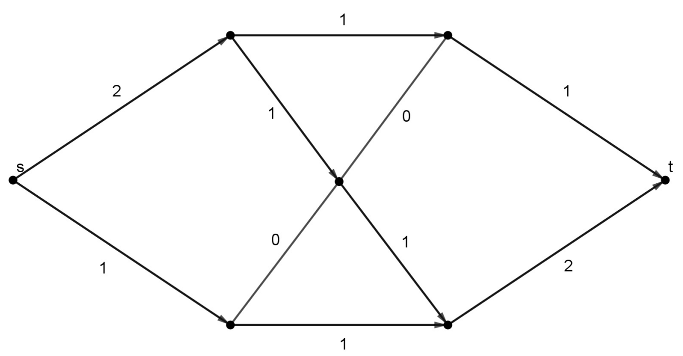
Määritelmä 2.9. *Funktio $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{Z}$ on virtaus verkostossa N jos*

1. $f(\overrightarrow{e}) = -f(\overleftarrow{e})$ *kaikilla* $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$
2. $f(v, V) = 0$ *kaikilla* $v \in V \backslash \{s, t\}$ *ja*
3. $f(\overrightarrow{e}) \leq c(\overrightarrow{e})$ *kaikilla* $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$.

Määritelmän 2.9 kohta 1 tarkoittaa sitä, että jokaisella virtauksen osalla $f(\overrightarrow{e})$ on vastakkaiseen suuntaan kulkeva virtaus $f(\overleftarrow{e})$, joka on saman suuruinen kuin $f(\overrightarrow{e})$ mutta vastakkaismerkkinen. Kohta 2 tarkoittaa intuitiivisesti sitä, että virtausta ei katoa tai tule lisää matkan varrella, vaan jokaisesta kärjestä lähtee yhtä paljon virtausta kuin siihen on saapunut, poislukien lähde ja nielu. Kohta 3 kertoo, että jokaista suunnattua sivua vastaava kapasiteettifunktion arvo rajoittaa ylhäältä vastaavaa funktion f arvoa.

Määritelmä 2.10. *Olkoon f virtaus verkostossa N ja s verkoston N lähde. Tällöin virtauksen f arvo on kärjestä s lähteviin suunnattuihin sivuihin liittyvien arvojen $f(\overrightarrow{e})$ summa ja sitä merkitään $|f| = f(s, V)$.*

Esimerkki 2.11. *Kuvassa 4 on esitetty verkosto $N = (G, s, t, c)$ ja suunnattuja sivuja vastaavat virtauksen arvot. Nuolten kärjet vastaavat suunnattujen sivujen loppukärkiä. Vastakkaisiin suuntiin kulkevia negatiivisia virtauksen arvoja ei ole merkitty kuvaan. Suunnattuja sivuja vastaavat kapasiteettifunktion arvot ovat samat kuin kuvassa 2. Kuvan virtaus toteuttaa kaikki määritelmän 2.9 ehdot. Voidaan laskea, että $|f| = f(s, V) = 2 + 1 = 3$.*



Kuva 4: Virtaus verkostossa $N = (G, s, t, c)$. Vastakkaisiin suuntiin kulkevia negatiivisia virtauksen arvoja ei ole merkitty kuvaan.

Määritelmä 2.12. *Olkoon $N = (G, s, t, c)$ verkosto ja X ja Y kärkiä sisältäviä joukkoja siten, että $Y = V \backslash X$, $s \in X$ ja $t \in Y$. Tällöin verkoston N leikkaus koostuu niistä suunnatuista sivuista, joiden alkukärki kuuluu joukkoon X ja loppukärki joukkoon Y. Tätä leikkausta merkitään (X,Y).*

Sanotaan, että määritelmän 2.12 mukainen leikkaus erottaa kärjen $x \in X$ kärjestä $y \in Y$. Joukon X kärjestä x ei voi kulkea kärkeen $y \in Y$ kulkematta leikkauksen läpi.

Määritelmä 2.13. *Virtauksen f arvo leikkauksessa (X, Y) on leikkaukseen liittyvien suunnattujen sivujen arvojen $f(\overrightarrow{e})$ summa. Sitä merkitään $f(X, Y)$.*

Edellä määriteltiin virtauksen f arvo määritelmässä 2.10 siten, että $|f| = f(s, V)$. Virtauksen arvo $f(s, V)$ voidaan tulkita virtauksen arvoksi leikkauksessa $(\{s\}, V \backslash \{s\})$. Verkostoon N muodostuu yleensä useita eri leikkauksia. Herää kysymys, miten virtauksien arvot eri leikkauksissa liittyvät toisiinsa. Osoittautuu, että virtauksen arvo ei riipu leikkauksesta, vaan on sama kaikkialla verkostossa. Osoitetaan tämä tulos. Todistus on laajennettu lähteessä [2, s.126] esitetystä todistuksesta.

Lemma 2.14. *Olkoon $N = (G, s, t, c)$ verkosto. Virtauksen f arvo on sama missä tahansa verkoston N leikkauksessa.*

Todistus. Olkoon (X, Y) mikä tahansa verkoston N leikkaus. Tällöin joukko (X, V) sisältää kaikki suunnatut sivut, joiden lähtökärki on jokin joukon X alkioista. Joukko (X, X) sisältää kaikki suunnatut sivut, joiden alku- ja loppukärki kuuluu joukkoon X. Näin ollen näiden erotuksena saadaan joukko, joka sisältää leikkauksen (X, Y) alkiot. Siispä pätee

$$f(X, Y) = f(X, V) - f(X, X).$$

Nyt $f(X, X) = 0$, sillä kaikilla suunnatuilla sivuilla, joiden molemmat kärjet kuuluvat joukkoon X, pätee määritelmän 2.9 kohta 1, jolloin näiden suunnattujen sivujen funktion f arvot summautuvat nollaksi. Näin ollen $f(X, Y) = f(X, V)$. Leikkauksen (X, V) alkiot voidaan jakaa niihin, joiden lähtökärki on s, ja niihin joiden lähtökärki on jokin muu joukon X kärki. Saadaan

$$f(X, V) = f(s, V) + \sum_{v \in X \backslash \{s\}} f(v, V).$$

Kärki t ei kuulu joukkoon $X \backslash \{s\}$, sillä t kuuluu joukkoon Y. Siispä tiedetään, että $\sum_{v \in X \backslash \{s\}} f(v, V) = 0$ määritelmän 2.9 ehdon 2 nojalla. Tällöin

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= f(X, V) \\ &= f(s, V) + \sum_{v \in X \backslash \{s\}} f(v, V) \\ &= f(s, V). \end{aligned}$$

Olkoon nyt (X', Y') jokin toinen verkoston N leikkaus. Edellisen nojalla pätee myös $f(X', Y') = f(s, V)$, joten $f(X, Y) = f(s, V) = f(X', Y')$. $\square$

Edellä määriteltiin virtauksen arvo leikkauksessa ja osoitettiin, että virtauksen arvo on sama missä tahansa verkoston leikkauksessa. Leikkaukseen liittyy myös kapasiteettifunktion arvo. Määritellään seuraavaksi tämä ja osoitetaan, että kapasiteettifunktion arvo missä tahansa verkoston leikkauksessa rajoittaa ylhäältä virtauksen arvoa verkostossa.

Määritelmä 2.15. *Leikkauksen (X, Y) kapasiteetin arvo $c(X, Y)$ on leikkauksen (X, Y) suunnattujen sivujen joukosta X joukkoon Y kapasiteettifunktion c arvojen summa.*

Lemma 2.16. *Minkä tahansa virtauksen arvo verkostossa N on ylhäältä rajoitettu millä tahansa verkoston N leikkauksen kapasiteetin arvolla.*

Todistus. Olkoon (X, Y) ja (X', Y') mitkä tahansa kaksi verkoston N leikkausta. Lemman 2.14 nojalla $|f| = f(X, Y) = f(X', Y')$. Määritelmän 2.9 kohdan 3 nojalla taas tiedetään, että $f(x', Y') \leq c(x', Y')$ kaikilla $x' \in X'$. Siten myös

$$\sum_{x' \in X'} f(x', Y') \leq \sum_{x' \in X'} c(x', Y'),$$

joten $f(X', Y') \leq c(X', Y')$. Tällöin

$$|f| = f(X, Y) = f(X', Y') \leq c(X', Y'),$$

eli mielivaltaiseen leikkaukseen (X', Y') liittyvä kapasiteetin arvo rajoittaa ylhäältä mihin tahansa leikkaukseen liittyvää virtauksen arvoa. □

3 Suurin virtaus - pienin leikkaus -lause

Tässä luvussa todistetaan Fordin ja Fulkersonin vuonna 1956 julkaisema lause. Lauseen todistuksessa seurataan lähteessä [2, ss. 127–128] esitettyä todistusta, mutta tässä esitetty todistus on osin laajennettu lähteessä esitetystä todistuksesta. Tämä suurin virtaus - pienin leikkaus -lause antaa yhteyden virtauksen suurimmalle ja leikkauksen pienimmälle arvolle.

Lause 3.1. *Kaikissa verkostoissa suurin virtauksen arvo on sama kuin pienin leikkauksen kapasiteetin arvo.*

Todistus. Olkoon $N = (G, s, t, c)$ verkosto. Konstruoidaan verkostoon N virtaukset $f_0, f_1, f_2 \ldots$ siten, että

$$|f_0| < |f_1| < |f_2| < \ldots$$

Asetetaan $f_0(\overrightarrow{e}) := 0$ kaikilla $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$. Näin asetettu f_0 on virtaus, sillä se toteuttaa kaikki määritelmän 2.9 ehdot. Virtauksen arvoa voidaan kasvattaa, kunnes virtauksen arvo on sama kuin vastaava kapasiteetin arvo. Koska $|f_i|$ on kokonaisluku kaikilla indekseillä i, pätee $|f_{n+1}| \leq |f_n| + 1$ kaikilla n. Määritelmän 2.9 ehdon 3 nojalla kaikki virtausten arvot ovat ylhäältä rajoitettuja vastaavan kapasiteetin arvolla, joten lemman 2.16 nojalla myös virtausten arvojen summat $|f_i|$ ovat ylhäältä rajoitettuja minkä tahansa verkoston N leikkauksen kapasiteetin arvolla. Siispä jono $f_0, f_1, f_2, \ldots$ päättyy johonkin virtaukseen f_n. Lauseen osoittamiseksi tulee löytää jokin leikkaus, jonka kapasiteetin arvo on $|f_n|$.

Tutkitaan ensin joukkoa, joka koostuu niistä kärjistä, joihin on olemassa kävely kärjestä s siten, että pätee $f_n(\overrightarrow{e_i}) < c(\overrightarrow{e_i})$ kaikilla indekseillä i, joilla sivu $\overrightarrow{e_i}$ kuuluu kyseiseen kävelyyn. Osoitetaan, että kärki t ei voi kuulua tähän joukkoon. Tällöin verkostoon N muodostuu jokin leikkaus, jossa toinen joukko on edellämainuttu joukko ja toinen koostuu lopuista kärjistä. Osoitetaan, että kapasiteetin arvo tässä leikkauksessa on etsitty kapasiteetin arvo, jonka suuruus on $|f_n|$.

Olkoon S_n kaikkien niiden kärkien v joukko, joille G sisältää $s-v$ - kävelyn $v_0 \ldots v_l$, joille

$$f_n(\overrightarrow{e_i}) < c(\overrightarrow{e_i}) \tag{1}$$

kaikilla $0 \leq i < l$. Tässä $\overrightarrow{e_i} := (v_i, v_{i+1})$, $v_0 = s$, $v_l = v$ ja f_n suurin mahdollinen virtaus. Jaetaan nyt todistus kahteen tapaukseen, jotka yhdessä käsittävät kaikki mahdolliset tapaukset. Tutkitaan erikseen tapauksia $t \in S_n$ ja $t \notin S_n$.

Jos $t \in S_n$, merkitään vastaavaa $s-t$- kävelyä $W = v_0 \dots v_l$, missä $v_0 = s$ ja $v_l = t$. Voidaan olettaa, että kävelyssä W mikään kärki ei ole mukana useammin kuin kerran. Olkoon

$$\epsilon := min\{c(\overrightarrow{e_i}) - f_n(\overrightarrow{e_i}) \mid 0 \leq i < l\}.$$

Koska $f_n(\overrightarrow{e_i}) < c(\overrightarrow{e_i})$ kaikilla $i < l$, täytyy päteä $\epsilon > 0$. Lisäksi ϵ on kokonaisluku, sillä luvut $f_n(\overrightarrow{e_i})$ ja $c(\overrightarrow{e_i})$ ovat kokonaislukuja, ja siten myös niiden erotus on kokonaisluku.

Virtausta f_n voidaan nyt kasvattaa luvun ϵ verran. Lisätään siis luvun ϵ suuruinen virtaus kävelyä W pitkin. Olkoon

$$f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = \begin{cases} f_n(\overrightarrow{e}) + \epsilon, & \overrightarrow{e} = \overrightarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1 \\ f_n(\overrightarrow{e}) - \epsilon, & \overrightarrow{e} = \overleftarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1 \\ f_n(\overrightarrow{e}), & e \notin W. \end{cases}$$

Koska $f_n(\overrightarrow{e})$ on virtauksena kokonaislukuarvoinen ja ϵ on kokonaisluku, myös f_{n+1} on kokonaislukuarvoinen, kuten pitääkin. Tarkistetaan, että f_{n+1} täyttää määritelmän 2.9 ehdot ja että f_{n+1} on siten virtaus. Tarkistetaan ensin, että ehto 1 toteutuu. Funktion f määritelmän nojalla pätee

$$f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = \begin{cases} f_n(\overrightarrow{e}) + \epsilon, & \overrightarrow{e} = \overrightarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1 \\ f_n(\overrightarrow{e}) - \epsilon, & \overrightarrow{e} = \overleftarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1 \\ f_n(\overrightarrow{e}), & e \notin W. \end{cases}$$

Koska $f_n(\overrightarrow{e}) = -f_n(\overleftarrow{e})$ kaikilla $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$, pätee

$$f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = \begin{cases} -f_n(\overleftarrow{e}) + \epsilon, & \overleftarrow{e} = \overleftarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1 \\ -f_n(\overleftarrow{e}) - \epsilon, & \overleftarrow{e} = \overrightarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1 \\ -f_n(\overleftarrow{e}), & e \notin W. \end{cases}$$

Otetaan -1 yhteiseksi tekijäksi kaikilta riveiltä ja saadaan

$$f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = \begin{cases} -(f_n(\overleftarrow{e}) - \epsilon), & \overleftarrow{e} = \overleftarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1 \\ -(f_n(\overleftarrow{e}) + \epsilon), & \overleftarrow{e} = \overrightarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1 \\ -f_n(\overleftarrow{e}), & e \notin W. \end{cases}$$

Otetaan jokaisesta tapauksesta -1 yhteiseksi tekijäksi eteen ja saadaan

$$f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = -\begin{cases} (f_n(\overleftarrow{e}) - \epsilon), & \overleftarrow{e} = \overleftarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1 \\ (f_n(\overleftarrow{e}) + \epsilon), & \overleftarrow{e} = \overrightarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1 \\ f_n(\overleftarrow{e}), & e \notin W \end{cases}$$

$$= -f_{n+1}(\overleftarrow{e}).$$

Ehto 1 on siis voimassa. Tarkistetaan ehto 2. Olkoon nyt $v \in V \backslash \{s, t\}$. Jos v kuuluu polkuun W, polkua W pitkin kulkee kaksi suunnattua sivua, joiden kärkipiste on v. Kärki v on toisen loppukärki ja toisen alkukärki. Siten

$$f_{n+1}(v, V) = f_n(v, V) + \epsilon - \epsilon = 0.$$

Jos v ei kuulu polkuun W, pätee

$$f_{n+1}(v, V) = f_n(v, V) = 0.$$

Näin ollen myös ehto 2 on voimassa.

Tarkistetaan vielä ehto 3. Täytyy siis osoittaa, että $f_{n+1}(\overrightarrow{e}) \leq c(\overrightarrow{e})$. Tutkitaan erikseen tapaukset $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1$, $\overrightarrow{e} = \overleftarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1$ ja $e \notin W$. Kun $e \notin W$, pätee funktion f_{n+1} määritelmän ja kohdan 1 nojalla

$$f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = f_n(\overrightarrow{e}) < c(\overrightarrow{e}).$$

Tapauksessa $\overrightarrow{e} = \overleftarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1$ pätee funktion f_{n+1} määritelmän, luvun ϵ määritelmän ja kohdan 1 nojalla

$$f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = f_n(\overrightarrow{e}) - \epsilon < f_n(\overrightarrow{e}) < c(\overrightarrow{e}).$$

Tapausta $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e_i}, i = 0, \dots, l-1$ varten huomataan ensin, että $\epsilon \leq c(\overrightarrow{e_i}) - f_n(\overrightarrow{e_i})$ luvun ϵ määritelmän nojalla. Nyt

$$f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = f_n(\overrightarrow{e}) + \epsilon \leq f_n(\overrightarrow{e}) + c(\overrightarrow{e_i}) - f_n(\overrightarrow{e_i}) = c(\overrightarrow{e}).$$

Näin ollen kaikki määritelmän 2.9 ehdot täyttyvät ja siten f_{n+1} on todella virtaus.

Tutkitaan virtauksen f_{n+1} kokonaisarvoa $|f_{n+1}| = f_{n+1}(s, V)$. Oletuksen nojalla kärki s sisältyy kävelyyn W vain kerran, joten vain kävelyä W pitkin lähtevän virtauksen arvo on muuttunut. Tälle pätee $f_{n+1}(\overrightarrow{e_0}) = f_n(\overrightarrow{e_0}) + \epsilon$, joten $|f_{n+1}| > |f_n|$. Tämä on kuitenkin ristiriita oletuksen kanssa, jonka mukaan $|f_n|$ on virtauksen suurin mahdollinen arvo. Ei siis voi päteä $t \in S_n$.

Tutkitaan tapausta $t \notin S_n$. Tällöin $(S_n, V \backslash S_n)$ on leikkaus verkostossa N. Halutaan osoittaa, että

$$f(S_n, V \backslash S_n) = c(S_n, V \backslash S_n).$$

Tehdään antiteesi, jolloin $f(S_n, V \backslash S_n) < c(S_n, V \backslash S_n)$. Jokaisen leikkaukseen $(S_n, V \backslash S_n)$ kuuluvan suunnatun sivun loppukärki kuuluu joukkoon $V \backslash S_n$. Koska $f(S_n, V \backslash S_n) < c(S_n, V \backslash S_n)$, on olemassa jokin suunnattu sivu $\overrightarrow{e} \in (S_n, V \backslash S_n)$, jolle pätee $f(\overrightarrow{e}) < c(\overrightarrow{e})$. Tällöin suunnatun sivun $\overrightarrow{e}$ loppukärkeen on olemassa joukon S_n määritelmän mukainen kävely, joten myös tämä loppukärki kuuluu joukkoon S_n. Tämä on ristiriita, sillä nyt tämä loppukärki kuuluu sekä joukkoon S_n että joukkoon $V \backslash S_n$. Siten antiteesi on epätosi ja

$$|f_n| = f_n(S_n, V \backslash S_n) = c(S_n, V \backslash S_n),$$

mikä haluttiinkin osoittaa.

Lemman 2.16 nojalla mikään verkoston N virtauksen arvoista ei voi olla suurempi kuin c_n, joten tämä on todella virtauksien maksimiarvo. Toisaalta mikään verkoston N leikkauksen kapasiteetin arvoista ei voi olla pienempi kuin $|f_n| = c_n$ lemman 2.16 nojalla, joten tämä on leikkauksien kapasiteettien minimiarvo. On siis osoitettu, että suurin mahdollinen virtauksen arvo verkostossa N on sama kuin pienin mahdollinen leikkauksen kapasiteetin arvo. $\square$

4 Kaksiosaisten verkkojen sovitus

Tässä luvussa käsitellään kaksiosaisia verkkoja ja niiden sovituksia. Osoittautuu, että eräissä sovituksiin liittyvissä tuloksissa voidaan käyttää hyödyksi edellisessä luvussa osoitettua lausetta 3.1. Seuraaviin lukuihin on teknisimpien todistusten yhteyteen lisätty kuvia. Näihin kuviin on suositeltavaa tutustua todistusten lukemisen yhteydessä, sillä ne helpottavat yksityiskohtien ja merkintöjen ymmärtämistä.

Määritellään aluksi tarpeellisia käsitteitä, kuten verkon ositus ja sovitus sekä vuorotteleva ja lisäävä polku. Osoitetaan tämän jälkeen tulos, joka liittää sovituksen ja virtauksen toisiinsa. Luvun määritelmät ovat lähteistä [2] ja [5].

Määritelmä 4.1. *Olkoon $G = (V, E)$ verkko siten, että $V = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$ ja $E \subset \{\{p, q\} : p \in P, q \in Q\}$. Tällöin G on kaksiosainen verkko ja $\{P, Q\}$ on verkon G ositus.*

Määritelmä 4.2. *Olkoon $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko. Joukko $M \subset E$ on verkon G sovitus, jos joukon M sivuilla ei ole yhteisiä kärkiä. Sovituksen M suuruus on sen alkioiden lukumäärä $|M|$.*

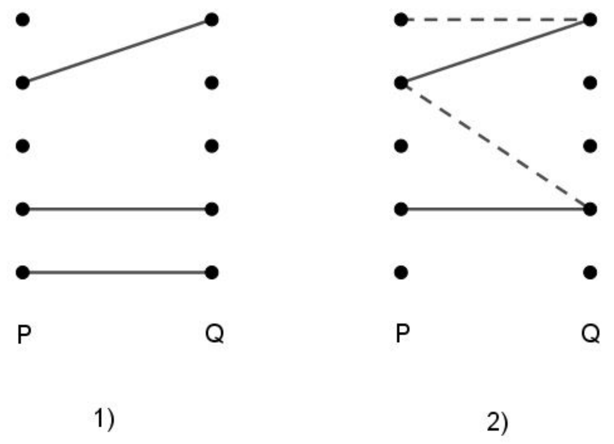
Määritelmä 4.3. *Olkoon $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko, $\{P, Q\}$ sen ositus ja M sen sovitus. Vuorotteleva polku on polku, joka alkaa joukosta P ja sisältää vuorotellen sivuja joukoista M ja $E \backslash M$.*

Vuorotteleva polku sovituksen M suhteen ei ole yksikäsitteinen. Vuorotteleva polku voi alkaa joukon M tai joukon $E \backslash M$ sivusta. Vuorotteleva polku ei välttämättä käy läpi kaikkia sovituksen M sivuja. Myös yksittäinen sivu joukosta M tai joukosta $E \backslash M$ tulkitaan vuorottelevaksi poluksi.

Esimerkki 4.4. *Kuvassa 5 kohdassa 1) on esitetty eräs sovitus M. Kohdassa 2) on esitetty sitä vastaava vuorotteleva polku. Vuorotteleva polku ei tässä tapauksessa käy läpi kaikkia sovituksen M sivuja. Molemmissa kohdissa vasemmanpuoleiset kärjet kuuluvat joukkoon P ja oikeanpuoleiset joukkoon Q. Yhtenäisellä viivalla on merkitty sovitukseen M kuuluvia sivuja ja katkoviivalla vuorottelevaan polkuun kuuluvia sivuja, jotka eivät kuulu sovitukseen M. Vuorotteleva polku alkaa joukon P kärjestä ylänurkassa.*

Sanotaan, että kärki v kuuluu sovitukseen M, jos on olemassa sellainen sivu $e \in M$, jonka kärkipiste v on. Kärki v ei kuulu sovitukseen M, jos tällaista sivua $e \in M$ ei ole olemassa.

Määritelmä 4.5. *Olkoon $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko, jonka ositus on $\{P, Q\}$. Olkoon sillä sovitus M. Vuorotteleva polku, joka päättyy joukon Q kärkeen, joka ei kuulu sovitukseen M, on lisäävä polku.*

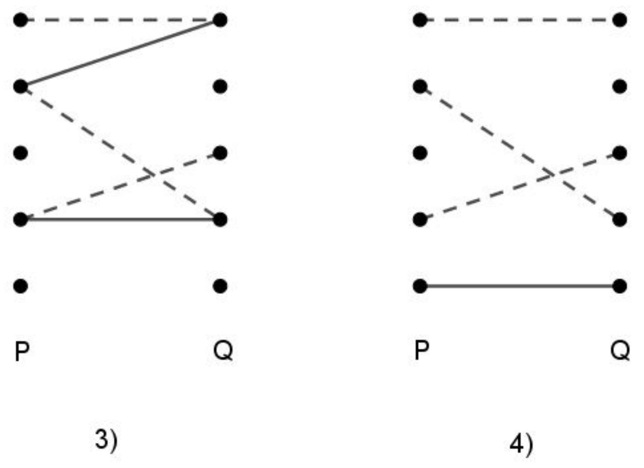


Kuva 5: Vuorotteleva polku.

Lisäävä polku on määritelmän 4.5 nojalla myös vuorotteleva polku. Määritelmän 4.3 nojalla vuorotteleva polku alkaa joukon P kärjestä. Siten myös lisäävä polku alkaa joukon P kärjestä. Lisäävä polku ei välttämättä käy läpi kaikkia sovituksen M sivuja.

Esimerkki 4.6. *Kuvassa 6 kohdassa 3) on esitetty eräs kuvan 5 sovitusta M vastaava lisäävä polku. Tässä tapauksessa lisäävä polku ei käy läpi kaikkia sovituksen M sivuja. Kohdassa 4) on esitetty lisäävän polun avulla saatu sovitus M'. Sovitus M' koostuu niistä lisäävän polun sivuista, jotka kuuluvat joukkoon $E \setminus M$ sekä niistä sovituksen M sivuista, joita lisäävä polku ei käy läpi. Kohdissa 3) ja 4) vasemmanpuoleiset kärjet kuuluvat joukkoon P ja oikeanpuoleiset joukkoon Q. Yhtenäisellä viivalla on merkitty sovitukseen M kuuluvia sivuja ja katkoviivalla lisäävään polkuun kuuluvia sivuja, jotka eivät kuulu sovitukseen M. Lisäävä polku alkaa joukon P kärjestä ylänurkassa ja päättyy joukon Q kärkeen. Huomataan, että sovitukseen M' kuuluvia sivuja on yksi enemmän kuin sovitukseen M kuuluvia sivuja.*

Lisäävän polun avulla saadaan sovitus M', jonka suuruus on yhtä suurempi kuin alkuperäisen sovituksen M suuruus. Lisäävän polun avulla saadut sovituksen M' sivut eivät silti ole samoja sivuja kuin sovituksessa M, vaikka nimitys "lisäävä polku" voisi näin antaa ymmärtää. Sovituksen M' sivut koostuvat lisäävän polun sivuista, jotka kuuluvat joukkoon $E \setminus M$, sekä niistä sovituksen M sivuista, joita lisäävä polku ei käy läpi. Huomataan myös, että lisäävän polun ensimmäinen sivu ei voi kuulua sovitukseen M. Osoitetaan ensin tämä tarvittava aputulos ja sen jälkeen muut edellä mainitut väitteet.



Kuva 6: Lisäävä polku.

Lemma 4.7. *Olkoon G kaksiosainen verkko, jonka ositus on $\{P, Q\}$. Olkoon M verkon G sovitus, johon liittyy lisäävä polku. Tällöin lisäävä polku alkaa joukon P kärjestä, joka ei kuulu sovitukseen M.*

Todistus. Olkoon G kaksiosainen verkko, jonka ositus on $\{P, Q\}$. Olkoon sillä sovitus M, jolle pätee $|M| = n, n \in \mathbb{N}$. Halutaan osoittaa, että lisäävän polun on alettava kärjestä, joka kuuluu joukkoon P mutta ei sovitukseen M.

Tehdään antiteesi. Oletetaan nyt, että lisäävä polku alkaa joukon P kärjestä, joka kuuluu sovitukseen M. Tällöin lisäävä polku etenee seuraavasti. Ensimmäinen sivu kuuluu sovitukseen M, ja sen alkukärki kuuluu joukkoon P ja loppukärki joukkoon Q. Seuraava sivu ei kuulu sovitukseen M, ja sen alkukärki kuuluu joukkoon Q ja loppukärki joukkoon P. Jälleen seuraava sivu kuuluu sovitukseen M, ja sen alkukärki kuuluu joukkoon P ja loppukärki joukkoon Q. Sen jälkeinen sivu ei kuulu sovitukseen M, ja sen alkukärki kuuluu joukkoon Q ja loppukärki joukkoon P. Näin siis jokaisen sivun, joka kuuluu joukkoon M, alkukärki kuuluu joukkoon P ja loppukärki joukkoon Q. Vastaavasti sivujen, jotka eivät kuulu sovitukseen M, alkukärki kuuluu joukkoon Q ja loppukärki joukkoon P. Edetään näin, kunnes on käyty läpi kaikki lisäävään polkuun kuuluvat sovituksen M sivut viimeistä lukuun ottamatta.

Kuten muidenkin sovitukseen M kuuluvien sivujen, kuuluu viimeisen sivun loppukärki joukkoon Q, kuten lisäävällä polulla tulee olla. Polku ei voi kuitenkaan päättyä tähän, sillä viimeinen sivu ei saa kuulua sovitukseen M määritelmän 4.5 nojalla. Polkua voidaan jatkaa sivulla, joka ei kuulu sovitukseen M. Tämä sivu kuitenkin päättyy kärkeen, joka kuuluu joukkoon P. Määritelmän 4.5 nojalla lisäävä polku ei voi päättyä tähänkään. Polkua ei kuitenkaan voida jatkaa, sillä kaikki sovitukseen M kuuluvat sivut on käyty läpi eikä vuorotteleva polku voi sisältää kahta peräkkäistä sivua joukosta $E \backslash M$. On siis päädytty ristiriitaan. Antiteesi on siten epätosi ja näin ollen lisäävän polun on alettava joukon P kärjestä, joka ei kuulu sovitukseen M. $\square$

Lemma 4.8. *Olkoon M kaksiosaisen verkon $G = (V, E)$ sovitus, jolla on lisäävä polku ja olkoon M' lisäävään polkuun liittyvä sovitus, joka koostuu lisäävään polkuun liittyvistä sivuista, jotka kuuluvat joukkoon $E \backslash M$ sekä sovituksen M sivuista, jotka eivät kuulu lisäävään polkuun. Tällöin lisäävään polkuun liittyvän sovituksen M' suuruus on yhtä suurempi kuin sovituksen M suuruus.*

Todistus. Olkoon $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko, $\{P, Q\}$ sen ositus ja M ositukseen $\{P, Q\}$ liittyvä sovitus. Nimetään joukon P alkioita $a, a', a'' \ldots$ ja joukon Q alkioita $b, b', b'' \ldots$ siten, että $\{a, b\} \in M$, $\{a', b'\} \in M \ldots$ Olkoon joukon $\{a, a', a'', \ldots\}$ alkioita n kappaletta, jolloin myös joukon $\{b, b', b'', \ldots\}$ alkioita on n kappaletta.

Olkoon sovituksella M lisäävä polku. Muodostetaan sovitus M' niistä lisäävän polun sivuista, jotka eivät kuulu sovitukseen M sekä niistä sovituksen M sivuista, jotka eivät kuulu lisäävään polkuun. Lisäävä polku päättyy määritelmän 4.5 nojalla joukon Q kärkeen, joka ei kuulu sovitukseen M. Olkoon tämä kärki b^*.

Etsitään pari kaikille joukon $\{b, b', b'', \ldots\} \cup \{b^*\}$ alkioille joukosta P. Osoitetaan, että näin muodostuneilla sivuilla ei ole yhteisiä kärkiä, jolloin tämä joukko on sovitus. Joukon $\{b, b', b'', \ldots\} \cup \{b^*\}$ alkioita on $n + 1$ kappaletta, joten myös näin muodostuneen sovituksen suuruus on $n + 1$.

Nyt on oltava, että jokin joukon $\{a, a', a'', \ldots\}$ alkioista on toinen kärki lisäävän polun viimeiselle sivulle. Merkitään tätä kärkeä a^*:lla. Siten $\{a^*, b^*\} \in M'$.

Tarkastellaan nyt sovitukseen M kuuluvan sivun, jonka toinen kärki on a^*, joukkoon Q kuuluvaa kärkeä. Olkoon tämä kärki b^{**}. Näiden kärkien välinen sivu ei voi kuulua sovitukseen M', sillä kärki a^* kuuluu toiseen sivuun, joka kuuluu sovitukseen M'. Kärjen b^{**} täytyy siis pariutua jonkin toisen joukon $\{a, a', a'', \ldots\}$ alkion kanssa. Valitaan siis sen pariksi lisäävään polkuun kuuluvan sivun, joka ei kuulu sovitukseen M, toinen kärki. Merkitään tätä kärkeä a^{**}:llä.

Jatketaan näin, kunnes on käytetty joukon $\{a, a', a'', \ldots\}$ alkioista kaikki lisäävään polkuun kuuluvat kärjet. Tämän jälkeen on vielä jäljellä yksi joukon $\{b, b', b'', \ldots\}$ alkioista, joka on jäänyt parittomaksi. Olkoon tämä $\tilde{b}$. Lemman

4.7 nojalla tiedetään, että lisäävä polku alkaa joukon P kärjestä, joka ei kuulu sovitukseen M. Näin ollen tämä kärki ei ole mikään kärjistä $a, a', a'', \ldots$. Olkoon tämä kärki $\tilde{a}$. Näin ollen löytyy pari myös kärjelle $\tilde{b}$. Tämä sivu $\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ ei kuulu sovitukseen M mutta kuuluu sovitukseen M'. Lisäävä polku sisältää siis yhden sivun enemmän joukosta $E \backslash M$ kuin joukosta M, sillä lisäävä polku sekä alkaa että päättyy joukkoon $E \backslash M$ kuuluvalla sivulla.

Olkoon lisäävään polkuun kuuluvien joukon M sivujen lukumäärä k, $k \leq n$ ja lisäävän polun ulkopuolelle jäävien joukon M sivujen lukumäärä l, $l \leq n$. Tällöin $k + l = n$. Nyt lisäävään polkuun kuuluvien joukon $E \backslash M$ alkioiden lukumäärä on $k + 1$. Nyt siis

$$|M'| = (k + 1) + l = (k + l) + 1 = n + 1.$$

Näin on löydetty sovitus M', jonka suuruus on $n + 1$. Lisäksi kaikki joukon $\{b, b', b'', \ldots\}$ kärjet, jotka kuuluvat lisäävään polkuun, ovat pariutuneet eri kärjen kanssa kuin sovituksessa M, joten nämä sivut kuuluvat joukkoon $E \backslash M$. Sovitus M' koostuu siis niistä lisäävään polkuun liittyvistä sivuista, jotka kuuluvat joukkoon $E \backslash M$, sekä sovituksen M sivuista, jotka eivät kuulu lisäävään polkuun. $\square$

Nyt tiedetään, että jos verkolle $G = (V, E)$ on olemassa sovitukseen M liittyen lisäävä polku, voidaan tällöin löytää sovitus M', joka on suurempi kuin sovitus M. Tästä herää kysymys siitä, kuinka kauan vastaavaa menettelyä voidaan jatkaa ja mikä on suurin mahdollinen sovituksen suuruus. Suurimman mahdollisen sovituksen etsimistä kutsutaan sovitusongelmaksi. Seuraavan lauseen todistuksessa on seurattu lähteen [6, s.127] todistusta. Osin lähteen todistusta on täydennetty todistamalla osaväitteet, joita lähteen todistuksessa ei ole osoitettu.

Lause 4.9. *Olkoon $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko, jonka sovitus on M. Sovituksen M suhteen on olemassa lisäävä polku jos ja vain jos M ei ole suurin mahdollinen sovitus.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että jos kaksiosaisen verkon $G = (V, E)$ sovituksen M suhteen on olemassa lisäävä polku, M ei tällöin ole suurin sovitus. Olkoon $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko. Oletetaan, että sovituksen M suhteen on olemassa lisäävä polku. Tällöin lemman 4.8 nojalla on olemassa verkon G sovitus M', jolle pätee

$$|M'| = |M| + 1.$$

Siten sovitus M' on suurempi kuin sovitus M, joten M ei voi olla suurin sovitus.

Osoitetaan seuraavaksi, että jos sovitus M ei ole kaksiosaisen verkon $G = (V, E)$ suurin sovitus, löytyy tällöin lisäävä polku sovituksen M suhteen. Oletetaan, että sovitus M ei ole suurin. Tällöin on olemassa jokin toinen sovitus M', joka on suurin. Näille pätee $|M'| > |M|$. Olkoon

$$G' = (V, (M \cup M') \backslash (M \cap M')).$$

G' on verkko, joka sisältää sivut, jotka kuuluvat joko sovitukseen M tai M' mutta eivät molempiin.

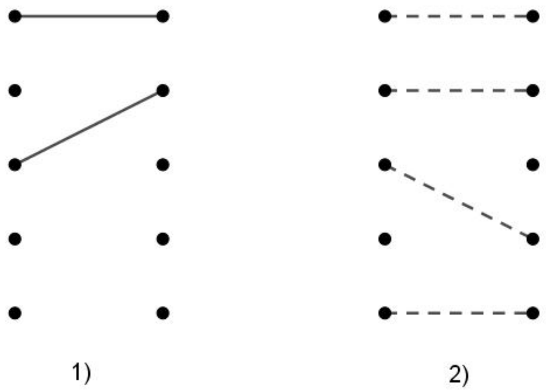
Tällöin G' sisältää enemmän sivuja joukosta M' kuin joukosta M. Osoitetaan tämä väite. Tehdään antiteesi. Oletetaan, että G' sisältää saman määrän sivuja molemmista joukoista tai enemmän joukon M sivuja kuin joukon M' sivuja. Merkitään m:llä joukkoa sivuja, jotka kuuluvat joukkoon M, mutta eivät joukkoon M', ja merkitään m':lla sivuja, jotka kuuluvat joukkoon M' mutta eivät joukkoon M. Nyt

$$|M| = |m| + |M \cap M'| > |m'| + |M \cap M'| = |M'|.$$

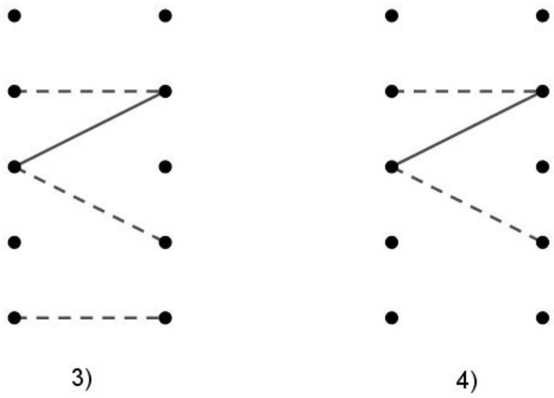
Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, jonka mukaan sovitus M' on suurin. Siispä antiteesi on epätosi, ja näin ollen G' sisältää enemmän sivuja joukosta M' kuin joukosta M.

Näin määritellyn verkon G' jokainen kärki on kosketuksissa korkeintaan yhteen joukon M' sivuun ja korkeintaan yhteen joukon M sivuun. Osoitetaan tämä väite. Tehdään antiteesi. Oletetaan, että on olemassa jokin verkon G' kärki, joka on kosketuksissa useampaan kuin yhteen joukon M tai M' sivuun. Voidaan olettaa, että tämä kärki on kosketuksissa useampaan kuin yhteen joukon M sivuun. Tällöin joukko M ei ole sovitus, mikä on ristiriita oletuksen kanssa ja näin ollen antiteesi on epätosi. Verkon G' jokainen kärki on siis kosketuksissa korkeintaan yhteen joukon M' sivuun ja korkeintaan yhteen joukon M sivuun.

Koska jokainen verkon G' kärki on kosketuksissa korkeintaan yhteen joukon M' sivuun ja korkeintaan yhteen joukon M sivuun eikä verkko G' sisällä sivuja, jotka kuuluisivat sekä joukkoon M että joukkoon M', jokainen verkon G' sivu on osa vuorottelevaa polkua joukkojen M ja M' suhteen. Verkon G' sivut muodostavat siis komponentteja, joista jokainen koostuu vuorottelevasta polusta. Näistä komponenteista ainakin yksi sisältää enemmän sivuja joukosta M' kuin joukosta M, sillä G' sisältää enemmän sivuja joukosta M' kuin joukosta M. Tämä komponentti on siis vuorotteleva polku, joka sisältää enemmän sivuja joukosta M' kuin joukosta M. Tämä komponentti rakentuu vuorotellen sivuista joukosta M ja M' ja sivuja joukosta M' on enemmän kuin joukosta M. Näin ollen sen sivuista ensimmäisen ja viimeisen sivun on kuuluttava joukkoon M'. Koska sivuja on pariton määrä, on ensimmäisen ja viimeisen sivun alku- ja loppukärjistä toinen joukosta P ja toinen joukosta Q. Valitaan, että vuorotteleva polku alkaa joukon P kärjestä. Tällöin vuorotteleva polku alkaa joukon P kärjestä sivulla, joka kuuluu sovitukseen M', ja päättyy joukon Q kärkeen, joka kuuluu sovitukseen M'. Määritelmän 4.5 nojalla tämä vuorotteleva polku on siis lisäävä polku sovituksen M suhteen. $\square$



Kuva 7: Sovitus M ja suurempi sovitus M'.



Kuva 8: Verkon G' sivut sekä komponentti, joka on lisäävä polku.

Esimerkki 4.10. *Kuvassa 7 kohdassa 1) on esitetty sovitus M ja kohdassa 2) suurempi sovitus M'. Kuvassa 8 kohdassa 3) on esitetty lauseen 4.9 todistuksessa määritellyn verkon G' sivut, eli sivut, jotka kuuluvat joko sovitukseen M tai M' mutta eivät molempiin. Kuvassa 8 kohdassa 4) on esitetty* *komponentti, joka on lisäävä polku sovituksen M suhteen. Tässä tapauksessa myös verkon G' erillinen sivu, joka kuuluu joukkoon M' on komponentti, joka on lisäävä polku sovituksen M suhteen. Lauseen 4.9 osoittamiseksi riittää kuitenkin löytää yksi tällainen komponentti.*

Lauseen 4.9 nojalla jokaiselle sovitukselle M, joka ei ole suurin mahdollinen, löytyy lisäävä polku. Lemman 4.8 nojalla tällöin löytyy suurempi sovitus M'. Jos taas lisäävää polkua ei ole olemassa, lause 4.9 kertoo, että tällöin sovitus M on suurin mahdollinen. Joka tapauksessa löydetään suurin mahdollinen sovitus lähtien liikkeelle mielivaltaisesta sovituksesta.

Kaksiosaisten verkkojen sovitus on verkkoteorian osa-alue, jota voidaan käsitellä ilman virtauksia. Lause 3.1 antaa kuitenkin kätevän tavan ratkaista kaksiosaisten verkkojen sovitusongelma. Kaksiosaisen verkon ympärille voidaan konstruoida verkosto ja siihen virtaus, jolloin sovitusongelma palautuu maksimaalisen virtauksen etsimisen ongelmaan. Osoitetaan seuraavaksi tulos, jonka avulla voidaan löytää suurin mahdollinen sovitus käyttäen apuna lausetta 3.1. Todistus seuraa lähteessä [5, ss. 48-49] esitettyä todistusta, mutta lähteen yksi laajempi lause on tässä pilkottu pienempiin osiin. Tässä on osoitettu ensimmäinen osa lauseesta.

Olkoon nyt $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko, jonka ositus on $\{P, Q\}$. Konstruoidaan verkko G' siten, että lisätään verkkoon G kärjet s ja t siten, että kärjestä s lähtee suunnattu sivu jokaiseen joukon P kärkeen ja jokaisesta joukon Q kärjestä lähtee suunnattu sivu kärkeen t. Nyt verkon G' kärjet ovat joukko $V' = V \cup \{s, t\}$. Merkitään verkon G' suunnattujen sivujen joukkoa E':lla. Kärjestä s joukon P kärkiin kulkee äärellinen määrä sivuja. Olkoon näiden sivujen lukumäärä n. Konstruoidaan nyt verkosto $N = (G', s, t, c)$ siten, että asetetaan kapasiteettifunktion c arvoksi 1 kaikille niille verkon G' suunnatuille sivuille, joiden toinen kärki on s tai t. Asetetaan kapasiteettifunktion c arvoksi $n+1$ niille suunnatuille sivuille, joiden toinen kärki kuuluu joukkoon P ja toinen joukkoon Q. Tällöin pätee seuraava tulos.

Lemma 4.11. *Verkon G suurimman sovituksen suuruus on sama kuin verkoston N suurimman virtauksen arvo.*

Todistus. Osoitetaan aluksi, että jokaista virtausta f, jonka arvo on k, kohden löytyy sovitus M, jonka suuruus on myös k. Olkoon f virtaus verkostossa N ja olkoon virtauksen f arvo k. Olkoon $f(p, q)$ suunnattuun sivuun (p, q), $p \in P, q \in Q$ liittyvä virtauksen arvo. Kärjestä s lähtee vain yksi sivu jokaiseen joukon P kärkeen. Tällöin virtauksen $f(p, q)$ arvo on joko 1 tai 0 jokaiselle suunnatulle sivulle (p, q), sillä jokaista kärjestä s lähtevää sivua rajoittaa kapasiteetti, jonka arvo on 1. Suunnatuille sivuille (q, p) virtauksen arvo on -1, jos $f(p, q) = 1$ ja $f(q, p) = 0$, jos $f(p, q) = 0$. Määritellään joukko

$M \subset E$ siten, että $\{p, q\} \in M$, jos $f(p, q) = 1$ ja $\{p, q\} \notin M$, jos $f(p, q) = 0$. Tällöin $|M| = k$. Leikkaukseen

$$(P \cup \{s\}, Q \cup \{t\})$$

liittyvä virtauksen arvo on myös k, sillä lemman 2.14 nojalla virtauksen arvo on k jokaisessa verkoston N leikkauksessa. Virtausta f kohden löytyy siis joukko M, joka on saman suuruinen. Virtaus f ei kuitenkaan ole välttämättä suurin mahdollinen, joten joukon M suuruus on pienempi tai yhtä suuri kuin suurimman mahdollisen virtauksen arvo.

Osoitetaan, että tällöin joukko M on sovitus. Määritelmän 4.2 nojalla M on sovitus, jos joukon M sivuilla ei ole yhteisiä kärkiä. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että joukon M sivuilla on yhteisiä kärkiä. Tällöin on kaksi mahdollista tapausta, joita tarkastellaan erikseen. Joko joukon P jostakin kärjestä lähtee useampi kuin yksi sivu joukon Q kärkiin tai joukon Q johonkin kärkeen saapuu useampi kuin yksi sivu joukon P kärjistä.

Tarkastellaan tapausta, jossa joukon P jostakin kärkestä lähtee useampi kuin yksi sivu joukon Q kärkiin. Olkoon tämä kärki p. Tällöin $f(p, q) = 1$ vastaaville suunnatuille sivuille. Näitä suunnattuja sivuja on oletuksen nojalla vähintään kaksi, joten määritelmän 2.9 kohdan 2 nojalla kärkeen p saapuu virtausta kärjestä s, jonka arvo on vähintään 2. Tämä on ristiriita alussa tehdyn oletuksen kanssa, jonka mukaan kärkien s ja p välisen suunnatun sivun kapasiteetin arvo on 1. Siten myöskään vastaavan suunnatun sivun virtauksen arvo ei voi olla suurempi kuin yksi määritelmän 2.9 kohdan 3 nojalla.

Tutkitaan seuraavaksi tapaus, jossa joukon Q johonkin kärkeen saapuu useampi kuin yksi sivu joukon P kärjistä. Olkoon tämä kärki q. Tällöin $f(p, q) = 1$ vastaaville suunnatuille sivuille. Näitä suunnattuja sivuja on antiteesin oletuksen nojalla vähintään kaksi, joten määritelmän 2.9 kohdan 2 nojalla kärjestä q on myös lähdettävä virtaus kärkeen t, jonka arvo on vähintään 2. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, jonka mukaan kärkien q ja t välisen suunnatun sivun kapasiteetin arvo on 1. Siten määritelmän 2.9 kohdan 3 nojalla myöskään vastaavaan suunnattuun sivuun liittyvän virtauksen arvo ei voi olla suurempi kuin yksi. Näin ollen antiteesi on epätosi, ja siten M on sovitus.

Osoitetaan seuraavaksi, että jokaista sovitusta M, jonka suuruus on k, kohden löytyy virtaus f, jonka arvo on myös k. Olkoon nyt annettuna sovitus M. Määritellään funktio $f(v, w)$, $(v, w) \in \overrightarrow{E'}$ seuraavasti. Jos $v \in P$ ja $w \in Q$, niin $f(v, w) = 1$, jos $\{v, w\} \in M$, ja tällöin $f(w, v) = -1$. Jos $v \in P$ ja $w \in Q$, niin $f(v, w) = 0$, jos $\{v, w\} \notin M$. Jos $v \in Q$ ja $w \in P$, niin $f(v, w) = 0$, jos $\{v, w\} \notin M$.

Jos $v = s$ ja $w \in P$, niin $f(v, w) = 1$, jos on olemassa sivu, joka kuuluu sovitukseen M ja kulkee kärjen w kautta, ja $f(v, w) = 0$ muuten. Jos $v \in P$

ja $w = s$, niin $f(v, w) = -1$, jos on olemassa sivu, joka kuuluu sovitukseen M ja kulkee kärjen w kautta, ja $f(v, w) = 0$ muuten.

Jos $v \in Q$ ja $w = t$, niin $f(v, w) = 1$, jos on olemassa sivu, joka kuuluu sovitukseen M ja joka kulkee kärjen v kautta, ja $f(v, w) = 0$ muuten. Jos $v = t$ ja $w \in Q$, niin $f(v, w) = -1$, jos on olemassa sivu, joka kuuluu sovitukseen M ja joka kulkee kärjen v kautta, ja $f(v, w) = 0$ muuten.

Osoitetaan, että näin määritelty funktio f on virtaus. Tarkistetaan määritelmän 2.9 ehto 1. Huomataan, että jokaiselle verkoston N suunnatulle sivulle (v, w), johon liittyvä funktion $f(v, w)$ arvo on 1, löytyy vastakkainen suunnattu sivu, johon liittyvä funktion $f(v, w)$ arvo on -1. Jokaista suunnattua sivua, johon liittyvä funktion $f(v, w)$ arvo on 0, kohden löytyy vastakkainen suunnattu sivu, johon liittyvä funktion $f(v, w)$ arvo on 0. Siten

$$f(v, w) = -f(w, v)$$

kaikilla $(v, w) \in \overrightarrow{E'}$, joten ehto 1 on voimassa.

Tarkistetaan määritelmän 2.9 ehto 2. Olkoon p jokin joukon $P \cup Q$ kärki. Tällöin

$$f(p, V) = 1 - 1 = 0,$$

jos p kuuluu sovitukseen M, ja

$$f(p, V) = 0 - 0 = 0,$$

jos p ei kuulu sovitukseen M. Ehto 2 on siis voimassa.

Tarkistetaan ehto 3. Verkoston N suunnatuille sivuille, joiden toinen kärki on joko s tai t, kapasiteettifunktion arvo on 1. Suunnatuille sivuille, joiden toinen kärki kuuluu joukkoon P ja toinen joukkoon Q, kapasiteettifunktion arvo on $n + 1$. Funktio $f(v, w)$ saa arvoja -1, 0 ja 1. Kaikille näille suunnatuille sivuille pätee siis

$$f(v, w) \leq c(v, w).$$

Ehto 3 on siis voimassa. Näin ollen kaikki määritelmän 2.9 ehdot täyttyvät, ja siten funktio $f(v, w)$ on virtaus.

Funktio $f(v, w)$ on siis virtaus verkostossa N ja $|f| = |M|$. Siispä löydettiin sovitusta M kohden virtaus, joka on samansuuruinen. Sovitus M ei kuitenkaan ole välttämättä suurin mahdollinen, joten virtauksen f arvo on pienempi tai yhtä suuri kuin suurimman sovituksen suuruus.

Edellä saatiin tulos, jonka mukaan virtauksen f arvo on pienempi tai yhtä suuri kuin suurimman sovituksen suuruus. Olkoon M' verkoston N suurin sovitus. Tällöin $|f| \leq |M'|$. Lauseen 3.1 nojalla voidaan löytää suurin mahdollinen virtaus. Olkoon f' suurin mahdollinen virtaus. Siten

$$|f'| \leq |M'|.$$

Edellä saatiin myös tulos, jonka mukaan sovituksen M suuruus on pienempi tai yhtä suuri kuin suurimman mahdollisen virtauksen f arvo. Tällöin $|M| \leq |f'|$. Voidaan valita $M = M'$, jolloin pätee

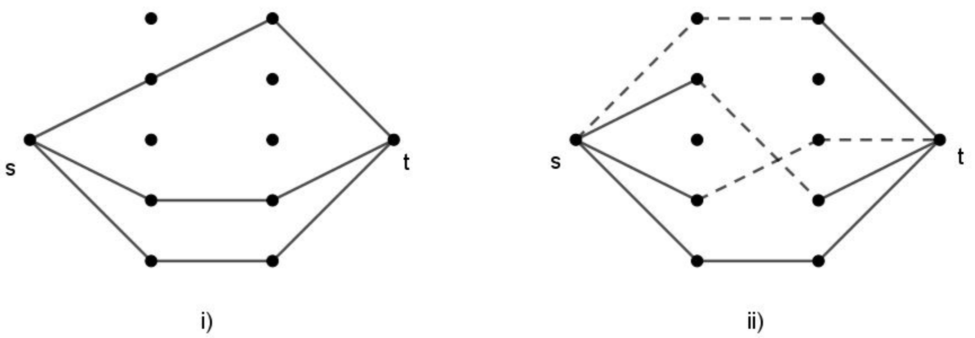
$$|M'| \leq |f'|.$$

Siispä on oltava $|M'| = |f'|$. □

Lauseen 4.11 todistuksessa osoitetaan, että jokaista virtausta f kohden löytyy sovitus M, joka on saman suuruinen, ja että jokaista sovitusta M' kohden löytyy virtaus f', joka on saman suuruinen. Yhdessä lauseen 4.9 kanssa nämä kertovat, että virtauksen kasvattamisen ja suuremman sovituksen etsimisen välillä on vastaavuus.

Lähdetään liikkeelle kaksiosaisen verkon $G = (V, E)$ mielivaltaisesta sovituksesta M. Tällöin löytyy lemman 4.11 todistuksen nojalla virtaus f, joka on yhtä suuri. Mikäli sovitus M ei ole suurin mahdollinen, löytyy lauseen 4.9 nojalla lisäävä polku sovituksen M suhteen. Lauseen 4.8 nojalla tällöin löytyy sovitus M', joka on yhtä suurempi kuin sovitus M. Tällöin lemman 4.11 nojalla löytyy myös virtaus f', joka on yhtä suuri kuin sovitus M'. Tämä voidaan tulkita siten, että virtausta f kasvatetaan yhden verran. Lähetetään siis lähteestä s olemassaolevan virtauksen lisäksi yhden suuruinen virtaus joukon P kärkeen, joka ei kuulu sovitukseen M. Lemman 4.7 nojalla tällainen kärki on olemassa. Lemman 4.8 nojalla sovitukset M ja M' eivät sisällä kaikkia samoja sivuja. Virtaus f' siis uudelleen ohjataan kulkemaan eri reittiä kuin virtaus f.

Esimerkki 4.12. *Kuvassa 9 on esitetty esimerkkejä 4.4 ja 4.6 vastaavien sovituksien M ja M' vastaavat virtaukset f ja f'. Kuvassa i) on esitetty sovitusta M vastaava virtaus ja kuvassa ii) sovitusta M' vastaava virtaus. Molemmissa kuvissa vasemmanpuoleiset pisteet kuuluvat joukkoon P ja oikeanpuoleiset joukkoon Q. Lähteestä s lähtevä katkoviiva kuvaa lähetettyä lisävirtausta ja joukkojen P ja Q väliset katkoviivat kuvaavat uudelleen ohjattua virtauksen reittiä.*



Kuva 9: Sovitusta M vastaava virtaus f ja suurempaa sovitusta M' vastaava uudelleen ohjattu virtaus f'.

5 Verkon peite ja Königin lause

Tässä luvussa tarkastellaan kaksiosaisen verkon peitettä ja sen yhteyttä verkon sovitukseen. Lisäksi osoitetaan yhteys peitteen suuruudelle ja leikkauksen kapasiteetin arvolle. Lopuksi osoitetaan tämän avulla Königin lause, joka kertoo, että verkon maksimaalisen sovituksen suuruus on sama kuin pienimmän peitteen suuruus. Luku perustuu lähteeseen [5, ss. 47-49]. Määritellään aluksi kaksiosaisen verkon peite ja osoitetaan, että kaksiosaisen verkon sovituksen suuruus on aina pienempi tai yhtä suuri kuin saman verkon peitteen suuruus.

Määritelmä 5.1. *Olkoon $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko. Joukko $C \subset V$ on verkon G peite, jos kaikkien verkon G sivujen vähintään yksi kärki on joukossa C. Peitteen C suuruus $|C|$ on sen alkioiden lukumäärä.*

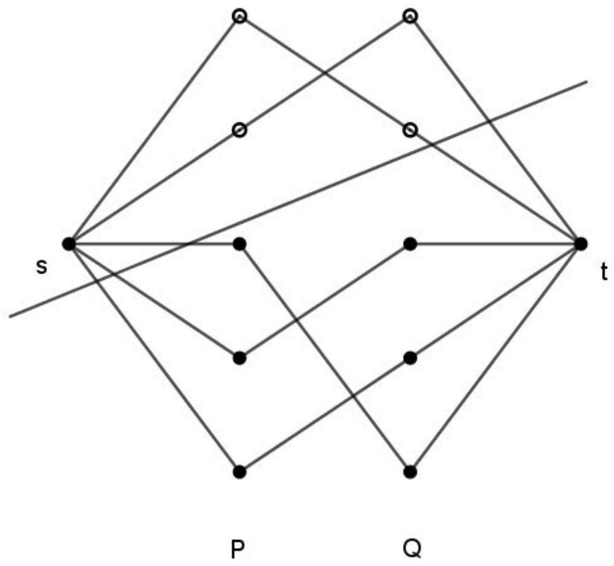
Lemma 5.2. *Olkoon $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko. Tällöin mille tahansa verkon G sovitukselle M ja peitteelle C pätee $|M| \leq |C|$.*

Todistus. Olkoon M mikä tahansa kaksiosaisen verkon G sovitus ja C mikä tahansa verkon G peite. Kaikilla sivuilla, jotka kuuluvat sovitukseen M, on ainakin yksi kärki, joka kuuluu peitteeseen C. Koska M on sovitus, sen sivuilla ei ole yhteisiä kärkiä. Näin ollen sovituksen M sivuja vastaavat peitteeseen C kuuluvat kärjet ovat erillisiä. On siis oltava, että $|M| \leq |C|$. □

Lemma 5.2 kertoo, että kaikille sovituksille M ja peitteille C pätee $|M| \leq |C|$. Jos löydetään sovitus M, jonka suuruus on sama kuin jonkin peitteen C, tiedetään, että tällöin sovitus M on suurin mahdollinen ja vastaavasti peite C pienin mahdollinen.

Verkon peitteellä on yhteys myös vastaavan verkoston leikkauksen kapasiteetin arvoon. Osoitetaan seuraavaksi tämä yhteys. Olkoon nyt $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko, jonka ositus on $\{P, Q\}$. Konstruoidaan verkko $G' = (V', E')$, jossa $V' = V \cup \{s, t\}$ ja E' sisältää joukon E alkioiden lisäksi kärjestä s kaikkiin joukon P kärkiin kulkevat sivut ja kaikista joukon Q kärjistä kärkeen t kulkevat sivut. Kärjestä s joukon P kärkiin kulkee äärellinen määrä sivuja. Olkoon näiden sivujen lukumäärä n. Joukossa P on siis n kappaletta alkioita. Konstruoidaan verkosto $N = (G', s, t, c)$ siten, että asetetaan kapasiteettifunktion c arvoksi $n + 1$ suunnatuille sivuille, joiden toinen kärki kuuluu joukkoon P ja toinen joukkoon Q ja asetetaan kapasiteettifunktion arvoksi 1 suunnatuille sivuille, joiden toinen kärki on joko s tai t. Tällöin pätee seuraava tulos.

Lemma 5.3. *Verkon G pienimmän peitteen suuruus on sama kuin verkoston N pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvo.*



Kuva 10: Verkoston N pienin leikkaus. Joukon A kärkiä on merkitty ontoilla ympyröillä.

Todistus. Olkoon A joukon V osajoukko siten, että leikkauksen

$$(\{s\} \cup A, V' \backslash (\{s\} \cup A))$$

kapasiteetti on pienin mahdollinen. Verkostossa N on olemassa ainakin leikkaus

$$(\{s\}, V' \backslash \{s\}),$$

jonka kapasiteetti on sama kuin sivujen lukumäärä, jotka kulkevat kärjestä s kärkiin joukossa P. Tämän leikkauksen kapasiteetin arvo on siten sama kuin joukon P alkioiden lukumäärä, sillä jokaista suunnattua sivua kärjestä s kärkeen joukossa P vastaavan kapasiteettifunktion arvo on 1. Näin ollen pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvo ei voi olla joukon P alkioiden lukumäärää suurempi. Oletuksen nojalla kärjestä s lähtevien suunnattujen sivujen lukumäärä on n, joten pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvo on korkeintaan n. Näin ollen joukkojen $P \cap A$ ja $Q \backslash A$ välillä ei voi olla sivua. Osoitetaan tämä väite.

Tehdään antiteesi. Oletetaan, että joukkojen $P \cap A$ ja $Q \backslash A$ välillä on sivu. Tällöin vastaavassa verkostossa N on suunnattu sivu joukosta $P \cap A$ joukkoon $Q \backslash A$. Tällöin leikkauksen kapasiteetin arvo on vähintään $n+1$, sillä leikkaukseen kuuluu suunnattu sivu, jonka kapasiteetin arvo on $n+1$. Tämä johtuu kapasiteettifunktion määrittelystä, jonka mukaan kapasiteettifunktion arvo on $n+1$ suunnatuille sivuille, joiden toinen kärki kuuluu joukkoon P ja toinen joukkoon Q. Nyt siis leikkauksen kapasiteetin arvo on vähintään $n+1$, mikä on ristiriita oletuksen kanssa, jonka mukaan pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvo on korkeintaan n. Siispä joukkojen $P \cap A$ ja $Q \backslash A$ välillä ei voi olla sivua. Täysin vastaavalla perustelulla nähdään, että myöskään joukon $P \backslash A$ ja joukon $Q \cap A$ välillä voi olla sivua.

Koska joukosta $P \cap A$ ei voi olla sivua joukkoon $Q \backslash A$, on sellaisten sivujen, joiden toinen kärki kuuluu joukkoon $P \cap A$, toisen kärjen kuuluttava joukkoon $Q \cap A$. Vastaavasti sellaisten sivujen, joiden toinen kärki kuuluu joukkoon $Q \backslash A$, toisen kärjen on kuuluttava joukkoon $P \backslash A$, koska joukosta $Q \backslash A$ ei voi olla sivua joukkoon $P \cap A$. On siis oltava niin, että jokainen verkon G sivu on kosketuksissa joukon

$$C = (P \backslash A) \cup (Q \cap A)$$

johonkin kärkeen. Siten C on verkon G peite. Samasta syystä on myös oltava niin, että leikkauksen $(\{s\} \cup A, V' \backslash (\{s\} \cup A))$ kapasiteetin arvo on

$$c(\{s\} \cup A, V' \backslash (\{s\} \cup A)) = |P \backslash A| + |Q \cap A| = |C|.$$

Osoitetaan vielä, että näin löydetty peite on todella pienin mahdollinen peite. Tehdään antiteesi, eli väitetään, että on olemassa peite C', joka on pienempi kuin peite C, eli

$$|C'| < |C|.$$

Vastaavasti kuten yllä osoitettiin, että $|C| = c(\{s\} \cup A, V' \backslash (\{s\} \cup A))$, voidaan osoittaa, että nyt on oltava leikkaus (X', Y'), jolle pätee

$$c(X', Y') = |C'|.$$

Tällöin pätee

$$c(X', Y') = |C'| < |C| = c(\{s\} \cup A, V' \backslash (\{s\} \cup A)).$$

Tämä on kuitenkin ristiriita oletuksen kanssa, jonka mukaan leikkauksen $(\{s\} \cup A, V' \backslash (\{s\} \cup A))$ kapasiteetin arvo on pienin mahdollinen leikkauksen kapasiteetin arvo. Siten antiteesin on oltava epätosi ja peite C on todella pienin mahdollinen peite. Siispä verkon G pienimmän peitteen suuruus on sama kuin verkoston N pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvo. □

Edellä saatiin lauseen 3.1 avulla tulokset, jotka kertovat sovituksen M ja peitteen C suuruudesta. Kootaan nyt nämä lemmat 4.11 ja 5.3 yhteen lauseessa, joka tunnetaan nimellä Königin lause.

Lause 5.4. *Olkoon G kaksiosainen verkko. Tällöin verkon G maksimaalisen sovituksen suuruus on sama kuin verkon G pienimmän peitteen suuruus.*

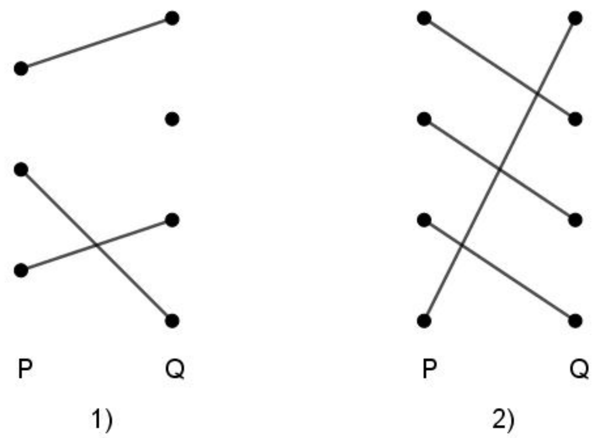
Todistus. Käytetään lemmojen 4.11 ja 5.3 tuloksia lauseen todistuksessa. Näin voidaan tehdä, sillä molemmissa lemmoissa konstruoidut verkostot ovat samat. Olkoon siis $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko, jonka ositus on $\{P, Q\}$. Olkoon $G' = (V', E')$ verkko, jossa $V' = V \cup \{s, t\}$ ja E' sisältää joukon E alkioiden lisäksi kärjestä s kaikkiin joukon P kärkiin kulkevat sivut ja kaikista joukon Q kärjistä kärkeen t kulkevat sivut. Olkoon $N = (G', s, t, c)$ verkosto, missä kapasitteettifunktion c arvo on $n + 1$ suunnatuille sivuille, joiden toinen kärki kuuluu joukkoon P ja toinen joukkoon Q ja kapasiteettifunktion arvo on 1 suunnatuille sivuille, joiden toinen kärki on joko s tai t. Olkoot M verkon G sovitus, f verkoston N virtaus, (X, Y) verkoston N leikkaus ja C verkon G peite.

Lemman 4.11 nojalla tiedetään, että verkon G suurimman sovituksen suuruus on sama kuin verkoston N suurimman mahdollisen virtauksen arvo. Lauseen 3.1 nojalla taas tiedetään, että verkoston N suurimman mahdollisen virtauksen arvo on sama kuin pienimmän mahdollisen leikkauksen kapasiteetin arvo. Lemman 5.3 nojalla tiedetään, että verkoston N pienimmän mahdollisen leikkauksen kapasiteetin arvo on sama kuin verkon G pienimmän peitteen suuruus. Siten verkon G suurimman sovituksen suuruus on sama kuin pienimmän peitteen suuruus. □

6 Täydellinen sovitus ja Hallin lause

Tässä luvussa tutkitaan kaksiosaisen verkon G, jonka ositus on $\{P, Q\}$, sovitusta, jossa jokaisesta joukon P tai Q kärjestä lähtee sivu toisen joukon kärkeen. Tällaista sovitusta kutsutaan täydelliseksi sovitukseksi. Lisäksi todistetaan Hallin lause. Hallin lauseen avulla voidaan ratkaista kuinka monta naista joukon miehiä täytyy tuntea, jotta jokainen miehistä voi mennä naimisiin tuntemansa naisen kanssa. Tämän vuoksi Hallin lause tunnetaan myös nimellä Hallin avioliittolause. Toisaalta Hallin lausetta voidaan käyttää myös esimerkiksi ratkaisemaan työtehtävien jakoon liittyvä ongelma. Työpaikan kutakin tehtävää pystyy tekemään tietyt työntekijät. Työntekijät pystyvät tekemään useampia eri tehtäviä ja samaa tehtävää osaa suorittaa useampi työntekijä. Etsimällä täydellinen sovitus voidaan löytää oikea työtehtävä jokaiselle työntekijälle siten, että kaikki tehtävät tulevat tehdyiksi. Tässä tutkielmassa pitäydytään kuitenkin yleisessä matemaattisessa tapauksessa. Luku perustuu lähteeseen [7, ss. 116-118], jonka sisältöjä on täydennetty esimerkillä ja kuvilla.

Määritelmä 6.1. *Olkoon $G = (V, E)$ kaksiosainen verkko, jonka ositus on $\{P, Q\}$. Olkoon tällä kaksiosaisella verkolla sovitus M. Sovitus M on täydellinen joukon P suhteen, jos jokaisesta joukon P kärjestä lähtee sivu johonkin joukon Q kärkeen.*



Kuva 11: Kaksi verkkoa ja niihin liittyvät täydelliset sovitukset.

Määritelmässä 6.1 määritellään täydellinen sovitus joukon P suhteen. Vastaavasti voitaisiin määritellä täydellinen sovitus joukon Q suhteen. Joukoille P ja Q ei ole annettu mitään toisistaan eroavia ominaisuuksia, joten kaikki tulokset ovat sovellettavissa koskemaan kumpaa tahansa joukkoa. Selkeyden vuoksi tarkastellaan vain joukon P suhteen täydellistä sovitusta.

Esimerkki 6.2. *Kuvassa 11 on esitetty kaksi eri verkkoa. Osassa 1) on esitetty verkko ja sen täydellinen sovitus joukon P suhteen. Osassa 2) esitetty sovitus on täydellinen sekä joukon P että joukon Q suhteen. Huomataan, että osan 1) verkossa ei voida löytää täydellistä sovitusta joukon Q suhteen, sillä joukon P alkioita on vähemmän kuin joukon Q alkioita.*

Seuraava lause tunnetaan nimellä Hallin lause. Olkoon siis kaksiosaisella verkolla G ositus $\{P, Q\}$. Olkoon P' joukon P jokin osajoukko, jolle pätee $1 \leq |P'| \leq |P|$ ja Q' joukon Q osajoukko, joka koostuu niistä kärjistä, joilla on yhteinen sivu jonkin joukon P' kärjen kanssa. Tällöin pätee seuraava tulos.

Lause 6.3. *Joukon P suhteen on olemassa täydellinen sovitus, jos ja vain jos $|P'| \leq |Q'|$ kaikille joukoille $P' \subset P$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että on olemassa täydellinen sovitus joukon P suhteen. Osoitetaan, että tällöin pätee $|P'| \leq |Q'|$ kaikille joukoille P', $P' \subset P$, joille pätee $1 \leq |P'| \leq |P|$ ja Q' on joukon Q osajoukko, joka koostuu niistä kärjistä, joilla on yhteinen sivu jonkin joukon P' kärjen kanssa. Tehdään antiteesi. Oletetaan, että $|P'| > |Q'|$ joillakin joukoilla P' ja Q'. Tällöin joukossa P' on enemmän alkioita kuin joukossa Q', joten selvästi jokaiselle joukon P' alkiolle ei voi löytyä paria joukosta Q' siten, että jokainen joukon Q' alkio tulee käytettyä vain kerran. Siispä antiteesi on epätosi ja siten $|P'| \leq |Q'|$.

Oletetaan sitten, että kaikille joukoille P', $P' \subset P$, joille pätee $1 \leq |P'| \leq |P|$ ja Q' on joukon Q osajoukko, joka koostuu niistä kärjistä, joilla on yhteinen sivu jonkin joukon P' kärjen kanssa, pätee $|P'| \leq |Q'|$. Osoitetaan, että tällöin on olemassa täydellinen sovitus joukon P suhteen.

Konstruoidaan kaksiosaisesta verkosta G verkosto N. Lisätään kärjet s ja t siten, että kärjestä s lähtee sivu jokaiseen joukon P kärkeen, jolla on yhteinen sivu jonkin joukon Q kärjen kanssa ja jokaisesta joukon Q kärjestä, jolla on yhteinen sivu jonkin joukon P kärjen kanssa, lähtee sivu kärkeen t. Asetetaan kapasiteettifunktion arvoksi 1 jokaiselle suunnatulle sivulle.

Tehdään antiteesi. Oletetaan, että verkossa G ei ole täydellistä sovitusta joukon P suhteen. Tällöin verkon G suurin mahdollinen sovitus on pienempi kuin joukon P alkioiden lukumäärä. Verkostossa N voi kulkea virtausta yhteensä korkeintaan suurimman mahdollisen sovituksen suuruuden verran lauseen 4.11 nojalla. Tällöin on siis olemassa ainakin jokin kärki joukossa P, jonka läpi ei kulje virtausta. Siten suurimman virtauksen arvo on pienempi kuin joukon P alkioiden lukumäärä. Merkitään suurinta virtauksen f arvoa $|f|$:llä Pätee siis

$$|f| < |P|.$$

Joukosta P voidaan valita jokin osajoukko $\tilde{P}$ sellaisia kärkiä, joiden läpi kulkee virtausta. Valitaan joukoksi $\tilde{Q}$ ne joukon Q kärjet, joihin tulee virtausta joukosta $P \backslash \tilde{P}$. Tällöin se osa virtauksesta, joka ei kulje joukon $\tilde{P}$ kärkien läpi, kulkee joukon $\tilde{Q}$ kärkien läpi. Lisäksi joukolla $\tilde{Q}$ ei ole yhteisiä sivuja joukon $\tilde{P}$ kanssa, joista kulkisi virtausta. Jos joukosta $\tilde{P}$ olisi sivu johonkin joukon $\tilde{Q}$ kärkeen, josta kulkisi virtausta, olisi tähän joukon $\tilde{Q}$ kärkeen tultava virtausta kahdesta joukon P kärjestä, jolloin saapuvan virtauksen arvo olisi vähintään 2. Joukon Q jokaisesta kärjestä lähtee kuitenkin vain yksi sivu kärkeen t, jonka kapasiteetin arvo on 1. Joukosta $\tilde{P}$ ei siis voi kulkea virtausta joukkoon $\tilde{Q}$. On siis olemassa $\tilde{P} \subset P$ ja $\tilde{Q} \subset Q$ siten, että

$$|\tilde{P}| + |\tilde{Q}| = |f|$$

ja joukosta $P \backslash \tilde{P}$ ei ole sivua joukkoon $Q \backslash \tilde{Q}$, josta kulkisi virtausta. Tällöin pätee siis

$$|\tilde{P}| + |\tilde{Q}| = |f| < |P|$$

ja erityisesti

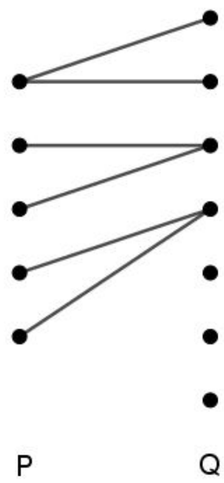
$$|\tilde{Q}| < |P| - |\tilde{P}|.$$

Tilannetta on havainnollistettu kuvissa 12, 13 ja 14.

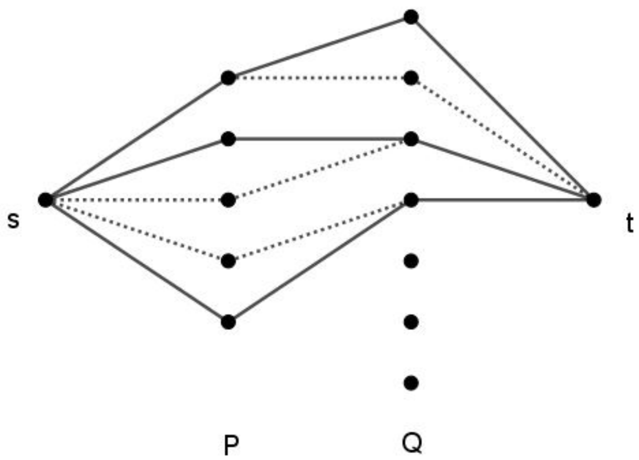
Merkitään $\hat{Q}$:lla joukon Q osajoukkoa, joka koostuu niistä kärjistä, joilla on yhteinen sivu joukon $\hat{P} = P \backslash \tilde{P}$ kärkien kanssa. Tällöin $\hat{Q} \subset \tilde{Q}$, joten

$$|\hat{Q}| \leq |\tilde{Q}| < |P| - |\tilde{P}| = |P \backslash \tilde{P}| = |\hat{P}|.$$

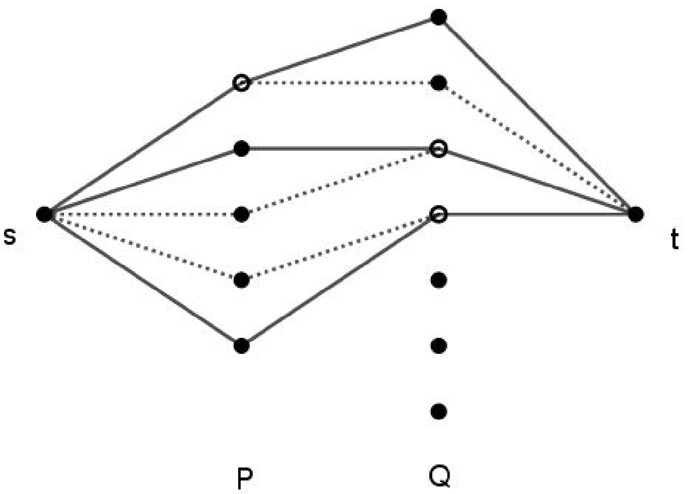
Erityisesti siis $|\hat{Q}| < |\hat{P}|$, mikä on vastoin oletusta. Päädyttiin ristiriitaan, joten antiteesi on epätosi ja alkuperäinen väite pätee. Siispä verkossa G on olemassa täydellinen sovitus joukon P suhteen. □



Kuva 12: Kaksiosainen verkko G, jonka ositus on $\{P, Q\}$. Verkolla G ei ole täydellistä sovitusta joukon P suhteen.



Kuva 13: Verkkoon G konstruoitu verkosto N. Yhtenäiset viivat kuvaavat sivuja, joissa kulkee virtausta ja katkoviivat sivuja, jotka kuuluvat verkostoon mutta joissa ei kulje virtausta.



Kuva 14: Sama verkosto kuin kuvassa 13. Joukon P ontto ympyrä kuvaa lauseen 6.3 todistuksen joukkoa $\tilde{P}$, joukon Q ontot ympyrät sekä joukon $\tilde{Q}$ että joukon $\hat{Q}$ alkioita. Tämän kuvan mukaisessa tilanteessa $|\tilde{P}| + |\tilde{Q}| = 3 < 5 = |P|$.

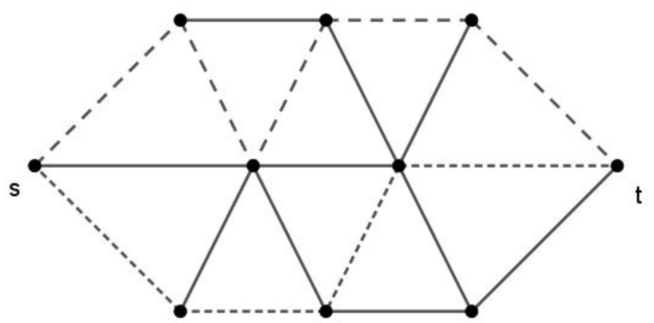
7 Erilliset polut verkostossa ja Mengerin lause

Seuraava sovellus on hyödyllinen esimerkiksi tietoverkostojen käytännön syiden kannalta. Tietoverkoston jokin osa saattaa vioittua, jolloin tieto ei voi enää kulkea kyseistä vioittunutta polkua pitkin. Jos käytössä on kuitenkin useampi risteämätön polku, voi tieto edelleen kulkea toista polkua pitkin. Tässä luvussa todistetaan Mengerin lause, joka antaa suurimman mahdollisen määrän erillisiä polkuja verkostossa. Luvun määritelmät ja lause perustuvat lähteisiin [8, ss. 51-52] ja [9, s. 75].

Määritelmä 7.1. *Olkoon N verkosto ja kärjet s ja t verkoston N eri kärkiä, jotka eivät ole vierekkäiset. Tällöin kaksi $s-t$ -polkua ovat erilliset, jos poluilla ei ole muita yhteisiä kärkiä kuin kärjet s ja t.*

Määritelmän 7.1 nojalla erillisillä poluilla ei ole yhteisiä kärkiä poislukien lähde ja nielu. Tästä seuraa, että erillisillä poluilla ei myöskään ole yhteisiä sivuja, sillä jos olisi yhteinen sivu, olisivat yhteisen sivun molemmat kärjet myöskin yhteisiä.

Esimerkki 7.2. *Kuvassa 15 on esitetty verkosto N ja sen kaksi erillistä polkua erilaisin katkoviivoin. Molemmat polut alkavat kärjestä s ja päättyvät kärkeen t, mutta muita yhteisiä kärkiä näillä poluilla ei ole.*



Kuva 15: Verkoston N kaksi erillistä polkua.

Määritelmä 7.3. *Olkoon N verkosto ja s ja t verkoston N eri kärkiä ja $e_1, e_2, .., e_n$ verkoston N eräitä sivuja. Sanotaan, että sivut e_i , $i = 1, 2, ..., n$ erottavat kärjet s ja t, jos on olemassa verkoston N leikkaus, joka koostuu suunnatuista sivuista $\overrightarrow{e_i}$.*

Seuraava lause saadaan helposti lauseen 3.1 seurauksena. Lause tunnetaan nimellä Mengerin lause.

Lause 7.4. *Olkoon N verkosto ja kärjet s ja t verkoston N eri kärkiä. Erillisten polkujen suurin mahdollinen lukumäärä kärkien s ja t välillä on sama kuin pienin kärkiä s ja t erottavien sivujen lukumäärä.*

Todistus. Olkoon N verkosto ja kärjet s ja t verkoston N eri kärkiä. Asetetaan jokaisen verkoston N suunnatun sivun kapasiteetin arvoksi 1. Tällöin verkoston N pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvo on sama kuin kärkiä s ja t erottavien sivujen pienin lukumäärä. Lauseen 3.1 nojalla pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvo on sama kuin suurimman virtauksen arvo.

Merkitään erillisten polkujen lukumäärää n:llä ja suurimman virtauksen arvoa $|f|$:llä. Osoitetaan, että $n = |f|$. Osoitetaan ensin, että $n \geq |f|$. Tehdään antiteesi. Oletetaan, että $n < |f|$. Tällöin erillisiä polkuja on aidosti vähemmän kuin mikä on virtauksen suuruus. Nyt siis joko kaikki virtaus kulkee erillisiä polkuja pitkin tai on jokin polku, jolla on yhteinen sivu näiden erillisten polkujen kanssa, jota pitkin virtaus kulkee. Molemmissa tapauksissa jollekin suunnatulle sivulle virtauksen arvo on suurempi kuin 1. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, sillä jokaisen suunnatun sivun virtauksen arvoa rajoittaa lemman 2.16 nojalla kapasiteetin arvo 1. Siten jokaiseen suunnattuun sivuun liittyvä virtauksen arvo on joko 0 tai 1. Siispä antiteesi on epätosi ja

$$n \geq |f|.$$

Osoitetaan sitten, että $n \leq |f|$. Virtausta voidaan lähettää kulkemaan jokaista erillistä polkua pitkin, joten selvästi suurimman virtauksen arvo on vähintään sama kuin erillisten polkujen lukumäärä. Siispä

$$n \leq |f|.$$

Koska $n \geq |f|$ ja $n \leq |f|$, täytyy olla, että

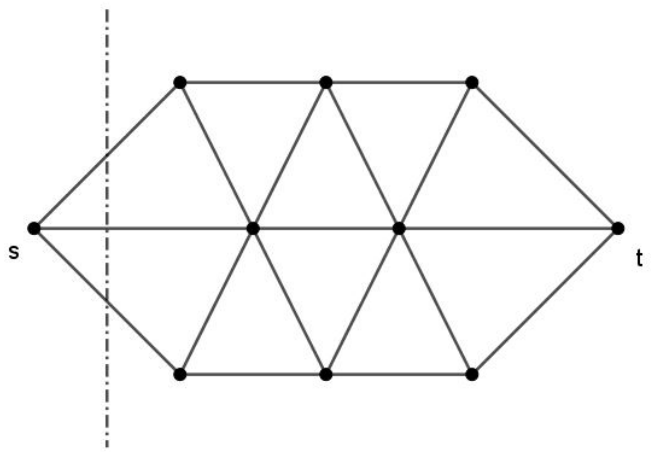
$$n = |f|,$$

eli suurimman virtauksen arvon on oltava sama kuin erillisten polkujen lukumäärä. Siten erillisten polkujen lukumäärä kärkien s ja t välillä on sama kuin pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvo, mikä on sama kuin kärkiä s ja t erottavien sivujen lukumäärä. □

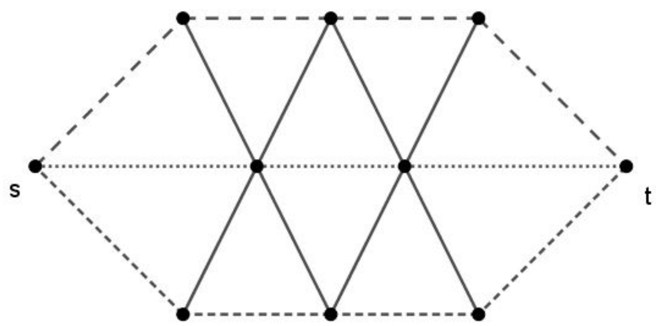
Esimerkki 7.5. *Tarkastellaan esimerkin 7.2 verkostoa N. Olkoon verkoston N suunnattujen sivujen kapasiteettien arvo 1, kuten lauseessa 7.4. Kuvassa 15 on esitetty kaksi erillistä polkua. Tutkitaan onko tämä suurin mahdollinen määrä erillisiä polkuja tässä verkostossa.*

Tarkastellaan verkoston N pienimmän leikkauksen kapasiteetin arvoa. Kuvaan 16 on merkitty verkoston N leikkaus, jonka kapasiteetin arvo on pienin mahdollinen. Tämän kapasiteetin arvo on kolme, joten myös kärkiä s ja t erottavien sivujen pienin lukumäärä on kolme. Lauseen 7.4 nojalla verkoston N suurin mahdollinen lukumäärä erillisä polkuja on kolme. Näin ollen esimerkin 7.2 kaksi erillistä polkua ei ole suurin mahdollinen määrä erillisiä polkuja.

Kuvassa 17 on esitetty verkoston N kolme erillistä polkua. Polkuja on merkitty erilaisin katkoviivoin. Jokainen polku alkaa kärjestä s ja päättyy kärkeen t, mutta muita yhteisiä kärkiä näillä poluilla ei ole.



Kuva 16: Verkoston N leikkaus, jonka kapasiteetin arvo on pienin mahdollinen. Tämä leikkaus koostuu pienimmästä lukumäärästä kärkiä s ja t erottavia sivuja.



Kuva 17: Verkoston N kolme erillistä polkua.

Lähdeluettelo

[1] Deo Narsingh: *Graph Theory With Applications to Engineering and Computer Science*. Englewood Cliffs (N.J.), 1974

[2] Diestel Reinhard: *Graph Theory*. New York, Springer, 1997

[3] Bondy J.A. & Murty U.S.R: *Graph Theory*. New York, Springer, 2008

[4] Christofides, Nicos: *Graph Theory: An Algorithmic Approach*. New York, 1975

[5] Cook William J.: *Combinatorial optimization*. New York, Wiley, 1998

[6] Gibbons Alan: *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 1985

[7] Wilson Robin J.: *Introduction to graph theory*. Edinburgh, 1972

[8] Bollobás Béla: *Graph Theory: An Introductory Course*. New York, 1979

[9] Bollobás Béla: *Modern Graph Theory*. New York, Springer, 1998