Kompleksiset vektoriavaruudet

Tuomas Särkijärvi

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2020

Tiivistelmä: T. Särkijärvi, *Kompleksiset vektoriavaruudet* (engl. *Complex vector spaces*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 25 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2020.

Tässä matematiikan pro gradu -tutkielmassa perehdytään kompleksisiin vektoriavaruuksiin ja sivutaan myös niiden sovelluskohteita. Tutkielman tavoitteena on esitellä riittävät tiedot, jotta lukija voi muodostaa eheän kokonaisuuden kompleksisten vektoriavaruuksien perusteista ja yhdistää näin saatua tietoa jo tunnettuihin reaaliavaruuden tapauksiin.

Tutkielman alussa määritellään yleisesti reaaliset vektoriavaruudet ja aliavaruudet. Työn edetessä laajennetaan tarkastelua ja määritellään myös tutkielman kannalta oleellinen kompleksinen vektoriavaruus. Määritelmät ovat hyvin lähellä toisiaan, mutta reaalisessa vektoriavaruudessa vektoreiden skalaarikertoimet ovat reaalisia, kun taas kompleksisissa vektoriavaruuksissa vektoreiden skalaarikertoimet ovat kompleksilukuja. Yleisimpänä esimerkkinä reaalisesta vektoriavaruudesta on $\mathbb{R}^n$ ja vastaavasti yleisin esimerkki kompleksisesta vektoriavaruudesta on $\mathbb{C}^n$.

Kompleksilukujen perusteita kerrataan hieman laskutoimituksien ja ominaisuuksien osalta, ennenkuin syvennytään tarkemmin kompleksisiin vektoriavaruuksiin. Työn edetessä tarkastellaan kompleksisia vektoreita ja matriiseja, sekä niiden ominaisuuksia. Oleellista on ymmärtää vektoreihin ja matriiseihin liittyviä käsitteitä reaaliavaruudessa ja kompleksiavaruudessa, joten tarkastelu etenee johdonmukaisesti reaaliavaruuden tapauksista ja ominaisuuksista kohti kompleksiavaruuden tilanteita. Oleellisimpia määritelmiä ja tuloksia voidaan laajentaa melko vaivattomasti suoraan reaaliavaruudesta kompleksiavaruuteen. Esimerkiksi matriisi A on reaalinen matriisi, mikäli sen alkiot ovat reaalilukuja. Vastaavasti matriisi A on kompleksinen matriisi, mikäli sen alkiot ovat kompleksilukuja. Tähän liittyen voidaan laajentaa kaikki reaalisten matriisien laskutoimitukset ja matriisien perusominaisuudet koskemaan myös kompleksisia matriiseja.

Yhtenä tutkielman merkittävimpänä tarkastelun kohteena on ominaisarvoteoria, erityisesti kompleksiavaruudessa. Määritelmän mukaan reaalisella $n \times n$ -matriisilla A on reaalinen ominaisvektori x jos on olemassa reaalinen kerroin λ siten, että $Ax = \lambda x$. Kompleksiavaruudessa ominaisarvot ja ominaisvektorit matriisille määritellään vastaavasti, mutta vektori x ja ominaisarvo λ ovat kompleksisia. Ratkaistaessa reaalisen $n \times n$ -matriisin ominaisarvoja ja -vektoreita havaitaan, että ominaisarvoja voi olla korkeintaan n kappaletta ja edelleen tällaisen matriisin ominaisarvot voivat olla kompleksisia, vaikka matriisin alkiot olisivat olleet reaalilukuja. Reaalisesta tilanteesta poiketen, kompleksisella $n \times n$ -matriisilla on aina (kertaluvut huomioiden) n kappaletta ominaisarvoja, joista osa voi olla reaalisia ja osa kompleksisia.

Tutkielmassa perehdytään tarkemmin reaalisiin ja kompleksisiin 2×2 -matriiseihin, joiden avulla selvitetään matriisien ominaisarvojen geometrista tulkintaa ja graafisia ominaisuuksia. Työn lopussa esitetään, kuinka matriisien kompleksiset ominaisarvot näkyvät vektorin kiertoina ja pituuden muutoksena kun kerrotaan vektoria x matriisilla A.

Sisältö

Johdanto

Tämän kirjoitelman tarkoituksena on käsitellä kompleksisia vektoriavaruuksia ja niiden sovelluskohteita. Tutkielman ensimmäisessä luvussa lähdetään liikkeelle reaalisista vektoriavaruuksista, joista laajennetaan tarkastelua kompleksisiin vektoriavaruuksiin. Tutkielman alkupuolella tarkastellaan myös kompleksilukujen, vektoreiden ja matriisien laskutoimituksia ja ominaisuuksia, sillä näiden hallinta on oleellinen osa kokonaisuuden rakentamista.

Monessa kohtaa työtä saamme muodostettua yhteyksiä reaaliavaruuden ja kompleksiavaruuden tulosten ja ominaisuuksien välille. Esimerkiksi kaikille tuttuja reaalisia toisen asteen polynomiyhtälöitä ratkaistaessa ratkaisujen määrä reaaliavaruudessa on riippuvainen yhtälön diskriminantista. Kompleksiluvut ja niiden ominaisuudet antavat mahdollisuuden saada selville tällaisen polynomiyhtälön kaikki ratkaisut. Vastaavasti tässä tutkielmassa kun ratkaistaan neliömatriisien karakteristisia yhtälöitä, saatetaan päätyä kompleksisiin ratkaisuihin vaikka matriisin alkiot olisivatkin olleet reaaliset. Tämä antaa motivaation perehtyä kompleksisiin vektoriavaruuksiin, vaikka lähtökohtana olisikin tarkastella vain reaalialkioisia matriiseja. Tiettyjen reaalisten tapausten tulosten todistaminen vaatii kompleksisten avaruuksien käsittelyä ja hallintaa. Tarkasteltaessa esimerkiksi symmetrisen reaaliavaruuden matriisin ominaisarvoja, voidaan huomata niiden olevan reaalisia. Tämän tuloksen todistaminen ei kuitenkaan onnistu ilman kompleksilukuja ja kompleksisia vektoriavaruuksia.

Tutkielman luvuissa 2.3. ja 2.4. selvitetään matriisien ominaisarvoteoriaa reaali- ja kompleksiavaruudessa, sekä perehdytään erityisesti matriisien kompleksisten ominaisarvojen laskemiseen. Tarkastellaan aluksi reaalisia ominaisarvoja ja -vektoreita, jonka jälkeen laajennetaan tarkastelua kompleksisiin ominaisarvoihin ja -vektoreihin. Lisäksi työssä perehdytään luvussa 2.5. erikoistapauksena hieman symmetrisiin matriiseihin ja niiden ominaisarvoihin. Tutkielman lopuksi luvussa 2.6. selvitetään ominaisarvojen geometrista tulkintaa, esimerkiksi sitä kuinka ominaisarvot vaikuttavat yksittäisen vektorin suuntaan ja pituuteen.

Tärkeimpinä lähteinä tässä työssä on käytetty teoksia *Elementary Linear Algebra* (Howard & Rorres, 2010) ja *Linear Algebra and Its Applications* (Lay, Lay & McDonald, 2016). Kompleksi- ja matriisilaskennan perusteita on kerrattu tarpeen mukaan, yleisimmät tulokset ja laskusäännöt oletetaan kuitenkin tunnetuiksi.

LUKU 1

Vektoriavaruudet

1.1. Vektoriavaruudet ja aliavaruudet

Tämän työn kannalta on oleellista tuntea perusteet reaalisista vektoriavaruuksista ja aliavaruuksista. Työn edetessä laajennamme näkemystä kompleksisiin vektoriavaruuksiin. Tämän osion lähteenä on pääasiassa käytetty teosta *Linear Algebra and Its Applications* (Lay, Lay ja McDonald, 2016, s.191-199) ja tukena teosta *Reaalisia vektoriavaruuksia ja ominaisarvoja* (Mikko Saarimäki, 2012, s.53-57).

1.1.1. Vektoriavaruudet. Aluksi tarvitsemme tietysti määritelmän yleisesti reaaliselle vektoriavaruudelle, määritellään kompleksinen vektoriavaruus myöhemmin. Seuraava määritelmä pohjautuu tunnettuihin ja hyvinkin itsestäänselviin algebrallisiin ominaisuuksiin reaaliavaruuksissa. Oleellista määrittelyssä on skalaarien a ja b reaalisuus. Myöhemmin määriteltävissä kompleksisissa vektoriavaruuksissa skalaarit a ja b ovat kompleksilukuja.

Määritelmä 1.1. Reaalinen vektoriavaruus on epätyhjä joukko V, joka muodostuu vektoreista. Joukon vektoreille on määritelty yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen. Kaikille vektoreille $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, sekä skalaareille $a, b \in \mathbb{R}$ täytyy olla voimassa seuraavat kymmenen sääntöä/aksioomaa

(1) vektoreiden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ summa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ on myös joukossa V
(2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (vaihdannaisuus)
(3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (liitännäisyys)
(4) On olemassa nollavektori $\mathbf{0}$, jolle pätee $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
(5) kaikille $\mathbf{u} \in V$ on olemassa vektori $-\mathbf{u} \in V$, jolle $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$
(6) kaikille $\mathbf{u} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$ pätee $a\mathbf{u} \in V$
(7) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ (osittelulaki)
(8) $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$ (osittelulaki)
(9) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
(10) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Tutuin esimerkki reaalisesta vektoriavaruudesta on $\mathbb{R}^n$, muita reaalisia vektoriavaruuksia ovat esimerkiksi kaikkien reaalisten $m \times n$ -matriisien joukko (varustettuna tavallisilla matriisien laskutoimituksilla) ja kaikkien reaalisten polynomien joukko.

Esimerkki 1.2. Olkoon $V = \mathbb{R}^n$ ja vektoriavaruuteen V liittyvät laskutoimitukset määritelty n-komponenttisten vektoreiden yhteenlaskuna ja skalaarikertolaskuna kun $k \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

ja

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)\,.$$

Näiden tulokset ovat myös n-komponenttisia vektoreita joukossa V, joten joukon $V \subset \mathbb{R}^n$ vektoreille on määritelty yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen. Saadut vektorit toteuttavat edelleen kaikki loput aksioomat (2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10) määritemästä 1.1.

Yleisesti tunnettuja käsitteitä ovat myös edellä määritellyt vektoriavaruuteen V liitettävät nollavektori $\mathbf{0}$ ja vektoriavaruuden V vektorin $\mathbf{u}$ vastavektori $-\mathbf{u}$.

LAUSE 1.3. *Vektoriavaruuden nollavektori* $\mathbf{0}$ *ja vektorin* $\mathbf{u}$ *vastavektori* $-\mathbf{u}$ *ovat yksikäsitteisiä.*

Todistetaan näistä ensimmäinen aiemmin esitettyjen vektoriavaruuden sääntöjen avulla. Myös vastavektorin yksikäsitteisyys on todistettavissa näiden kymmenen säännön nojalla.

TODISTUS. Todistus voidaan tehdä vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että vektoriavaruudella olisikin kaksi nollavektoria $\mathbf{0}$ ja $\overline{\mathbf{0}}$. Kun tarkastellaan nollavektoreiden summaa $\mathbf{0}+\overline{\mathbf{0}}$, huomataan säännön (4) nojalla ettei nollavektorin lisääminen toiseen vektoriin muuta summan arvoa. Koska nollavektoreita on kaksi, saadaan $\mathbf{0}+\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$ ja $\overline{\mathbf{0}}+\mathbf{0} = \overline{\mathbf{0}}$. Tästä edelleen säännön (2) nojalla $\mathbf{0}+\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}}+\mathbf{0}$, josta edelleen $\mathbf{0} = \overline{\mathbf{0}}$ $\square$

Edellä esitettyjen sääntöjen avulla voidaan helposti osoittaa seuraavat hyödylliset ominaisuudet jokaiselle vektorille $\mathbf{u} \in V$ ja skalaarille $a \in \mathbb{R}$

- $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$

Näitä laskusääntöjä voidaan havainnollistaa yksinkertaisilla esimerkeillä

ESIMERKKI 1.4. Olkoon vektori $\mathbf{u} = (2,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tällöin

- $0\mathbf{u} = 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$
- $5 \cdot \mathbf{0} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$
- $-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\mathbf{u}$

Tarkastellaan vektoriavaruutta 2×2 -matriiseille, joiden alkiot ovat reaalisia. Myöhemmin tutkielmassa perehdytään tällaisten matriisien ominaisarvojen selvittämiseen ja muun muassa ominaisarvojen geometriseen tulkintaan.

ESIMERKKI 1.5. Olkoon V reaalisten 2×2 -matriisien joukko, jonka matriiseille on voimassa normaalit matriisien yhteenlasku ja vakiolla kertominen seuraavasti

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

ja

$$k\mathbf{u} = k \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}.$$

Kuten tästä nähdään, tuloksena on 2×2 -matriisit, jolloin määritelmän 1.1 kohdat (1) & (6) toteutuvat. Tästä edelleen voidaan näyttää myös kaikki muut kohdat, joista suurin osa tulee suoraan matriisien laskutoimitusten ominaisuuksista, kuten vaihdannaisuus (2), liitännäisyys (3) ja osittelulait (7) & (8), sekä kohta (9). Näistä esimerkkinä vaihdannaisuus

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{v}+\mathbf{u}.$$

Määritelmän 1.1 kohdassa (4) tarvitaan nollamatriisia $\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, jolloin saadaan matriisien yhteenlaskusta

$$\mathbf{0}+\mathbf{u}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}=u$$

ja vastaavasti $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$. Kohdan (5) näyttämiseen tarvitaan matriisin $\mathbf{u}$ vastamatriisi $-\mathbf{u}$ jokaiselle vektoriavaruuden V matriisille $\mathbf{u}$ siten, että $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$. Määritellään

$$-\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-u_{11} & -u_{12}\\ -u_{21} & -u_{22}\end{bmatrix},$$

jolloin

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-u_{11} & -u_{12}\\ -u_{21} & -u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ja vastaavasti myös $(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Edelleen viimeinen kohta (10) saadaan

$$1\mathbf{u}=1\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{u}.$$

1.1.2. Aliavaruudet. Usein vektoreiden parissa on hyödyksi tuntea aliavaruuden käsite ja sen ominaisuuksia. Esimerkiksi erään vektoriavaruuden vektorit voivat olla osa jonkin isomman vektoriavaruuden vektorijoukkoa. Vektoriavaruuden määritelmästä poiketen, aliavaruuden määritelmässä riittää tarkastella kolmea eri sääntöä tai ominaisuutta, loput seuraavat automaattisesti.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Vektoriavaruuden V aliavaruus on V:n osajoukko H, jolla on seuraavat ominaisuudet

a) Vektoriavaruuden V nollavektori $\mathbf{0}\in H$
b) Vektoreiden $\mathbf{u},\mathbf{v}\in H$ summalle pätee $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in H$
c) Kaikille $\mathbf{u}\in H$ ja $a\in\mathbb{R}$ pätee $a\mathbf{u}\in H$

Edellä mainittujen ominaisuuksien a), b) ja c) toteutuessa voidaan siis varmistua siitä, että aliavaruus $H\subset V$ on itsessään vektoriavaruus. Tämä laajennettuna tarkoittaa käytännössä sitä, että jokainen aliavaruus on vektoriavaruus. Myös käänteisesti, jokainen vektoriavaruus on jonkin isomman avaruuden tai ainakin itsensä aliavaruus.

LUKU 2

Kompleksiset vektoriavaruudet

Kuten jo johdannossa todettiin, laskettaessa neliömatriisien karakteristisia yhtälöitä, saatetaan päätyä imaginäärisiin ratkaisuihin vaikka matriisin alkiot olisivatkin olleet reaaliset. Tähän palaamme tutkielmassa myöhemmin. Esitietoina tälläisissä tilanteissa tulee hyödylliseksi tuntea kompleksisten vektoriavaruuksien perusperiaatteita ja kompleksilukujen keskeisiä ominaisuuksia sekä laskutoimituksia. Tämän luvun lähteenä on käytetty teosta Howard & Rorres, Elementary Linear Algebra (10. laitos).

2.1. Yleistä kompleksiluvuista

Yleisesti kirjoitetaan kompleksiluvut muodossa $z = a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja i on imaginääriyksikkö.

Kompleksilukujen $z = a + bi$ ja $w = c + di$ yhteen- ja kertolasku määritellään seuraavasti

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

ja

$$zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Huomionarvoista on, että imaginääriyksikölle i pätee

$$\begin{aligned}
i^2 &= i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1 \\
i^3 &= i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i \\
i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\
i^5 &= i \cdot i^4 = (-1) \cdot 1 = -1.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.1. Olkoon nyt kompleksiluvut $v = 1 + 3i$ ja $w = 2 - i$. Tällöin

$$v + w = (1 + 2) + (3 + (-1))i = 3 + 2i$$

ja

$$vw = (2 - (-3)) + (-1 + 6)i = 5 + 5i.$$

Kertolasku on usein käytännöllisempää suorittaa kuten normaali reaalisten polynomien kertolasku ja käyttää lisäksi tietoa $i^2 = -1$. Tällöin

$$vw = (1 + 3i)(2 - i) = 2 + 6i - i - 3i^2 = 2 + 5i + 3 = 5 + 5i.$$

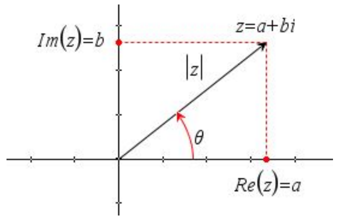
Kootaan yhteen kompleksilukuihin liittyviä tärkeitä määritelmiä.

Määritelmä 2.2. Olkoon kompleksiluku $z = a + bi$. Tällöin

(1) $\mathrm{Re}(z) = a$ on kompleksiluvun z reaaliosa ja $\mathrm{Im}(z) = b$ kompleksiluvun z imaginääriosa
(2) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ on kompleksiluvun z moduuli eli itseisarvo
(3) $\overline{z} = a - bi$ on kompleksiluvun z kompleksikonjugaatti

Yleisesti kompleksiluvulle $z = a + bi$ pätee seuraavat ominaisuudet

- $z = \overline{z}$ jos ja vain jos z on reaaliluku.
- $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- kulma θ kuvassa 2.1 on kompleksiluvun z argumentti
- $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ ja $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$
- kompleksikonjugaatti $\overline{z}$ ja z ovat graafisesti tarkasteltuna toistensa peilikuvia reaaliakselin suhteen
- kompleksiluvun z polaarimuoto on $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$



Kuva 2.1. kompleksiluvun z argumentti θ

Esimerkki 2.3. Kompleksiluvun $z = 1 - i$

- itseisarvo (eli moduuli)
$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
- kompleksikonjugaatti
$$\overline{z} = 1 + i$$
- tulo kompleksikonjugaatin kanssa
$$z\overline{z} = 1^2 + (-1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$
- eräs polaarimuoto saadaan rajaamalla argumentti θ jaksollisuuden nojalla välille $-\pi < \theta \leq \pi$ ja käyttämällä suorakulmaisen kolmion trigonometriaa kuvasta 2.1. Ratkaistaan kulma θ yhtälöistä
$$1 = \sqrt{2}\cos\theta$$
ja
$$-1 = \sqrt{2}\sin\theta.$$
Tästä saadaan rajatulle välille sopivaksi kulmaksi $\theta = -\frac{\pi}{4}$, jolloin polaarimuoto on
$$z = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})$$

Tarkastellaan vielä esimerkin kautta kompleksilukujen osamäärän laskemista ja ennen sitä näytetään, kuinka käänteisluku voidaan laskea. Kompleksilukujen osamäärän laskemiseen voidaan soveltaa laskusääntöä
$$(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$$
kun tiedetään että kompleksiluvun z käänteisluvulle z^{-1} pätee
$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$
Yleisesti on hyvä tiedostaa, että jokaisella nollasta poikkeavalla kompleksiluvulla on käänteisluku.

Esimerkki 2.4. Olkoon kompleksiluku $v = 1 + 3i$. Tällöin sen käänteisluku v^{-1} saadaan kompleksilukujen ominaisuuksia käyttämällä

$$
\begin{aligned}
v^{-1} &= \frac{1}{v} && \text{lavennetaan kompleksikonjugaatilla } \overline{v} \\
&= \frac{\overline{v}}{v\overline{v}} && \text{nimittäjälle pätee } z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2 \\
&= \frac{1-3i}{1^2+3^2} \\
&= \frac{1-3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i
\end{aligned}
$$

Tarkastetaan vielä käänteisluvun oikeellisuus laskemalla tulo

$$
\begin{aligned}
vv^{-1} &= (1+3i)\left(\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i\right) \\
&= \left(1 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10}\right) + \left(1 \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) + 3 \cdot \frac{1}{10}\right) i \\
&= \frac{10}{10} + 0i \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

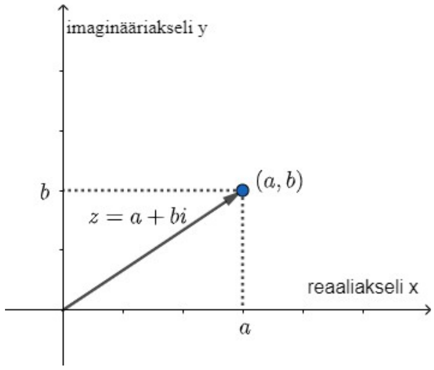
jolloin kyseessä on varmasti kompleksiluvun v käänteisluku.

Esimerkki 2.5. Osamäärän ratkaisemiseen tarvitaan kompleksilukujen ominaisuuksia, kuten edellä käänteisluvun laskemisessa. Olkoon kompleksiluvut $v = 1 + 3i$ ja $w = 2 - i$.

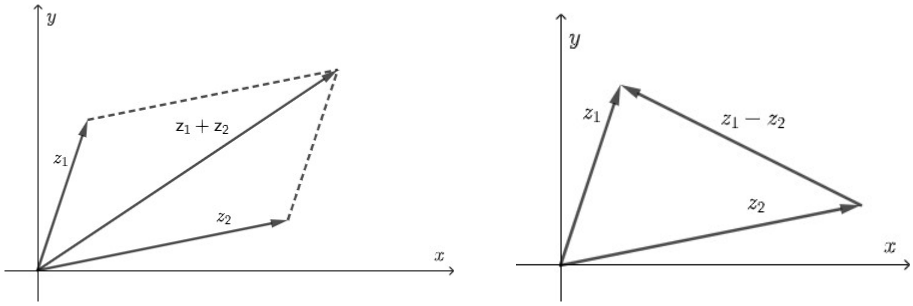
$$
\begin{aligned}
\frac{v}{w} &= vw^{-1} = v \cdot 1 \cdot w^{-1} && \text{kerrotaan luvulla 1, sillä yleisesti } zz^{-1} = 1 \\
&= (1+3i)(2+i)(2+i)^{-1}(2-i)^{-1} \\
&= (1+3i)(2+i)((2+i)(2-i))^{-1} && \text{kompleksikonjugaatille } z\overline{z} = a^2 + b^2 \\
&= (1+3i)(2+i)(4+1)^{-1} \\
&= (1+3i)\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) && \text{kompleksilukujen tulo} \\
&= -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}i.
\end{aligned}
$$

Näin saatiin siis osamäärälle $\frac{v}{w} = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}i$.

Tarkastellaan seuraavaksi kompleksilukujen graafista esitystä. Graafisesti kompleksiluvut määritellään kompleksitasossa koordinaattipisteiden avulla joko vektoreina tai pisteinä. Kompleksitasossa reaaliakselina on reaalisen koordinaatiston x-akseli ja imaginääriakselina reaalisen koordinaatiston y-akseli. Kompleksiluvun esitys kompleksitasossa on havainnollistettu kuvassa 2.2, kompleksilukujen z_1 ja z_2 yhteenlasku kuvassa 2.3.



KUVA 2.2. Kompleksiluvun $z = a + bi$ graafinen esitys



KUVA 2.3. Kompleksilukujen z_1 ja z_2 summa z_1+z_2 (vasemmalla) sekä erotus $z_1 - z_2$ (oikealla)

2.2. Vektorit ja matriisit kompleksiavaruudessa

Kompleksisen vektoriavaruuden määritelmä on hyvin lähellä reaalisen vektoriavaruuden määritelmää, mutta kompleksisissa vektoriavaruuksissa vektoreiden skalaarikertoimet ovat kompleksilukuja. Reaaliluvut ajatellaan olevan siis kompleksilukuja, joiden imaginääriosa on nolla.

MÄÄRITELMÄ 2.6. Kompleksinen vektoriavaruus on joukko V, jonka alkioita sanotaan vektoreiksi. Joukon V vektoreille on määritelty yhteenlasku ja kompleksiluvulla kertominen siten, että laskutoimitukset toteuttavat määritelmää 1.1 vastaavat ehdot.

(1) vektoreiden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ summa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ on myös joukossa V
(2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (vaihdannaisuus)
(3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (liitännäisyys)
(4) On olemassa nollavektori $\mathbf{0}$, jolle pätee $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
(5) kaikille $\mathbf{u} \in V$ on olemassa vektori $-\mathbf{u} \in V$, jolle $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$
(6) kaikille $\mathbf{u} \in V$ ja $k \in \mathbb{C}$ pätee $k\mathbf{u} \in V$
(7) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ (osittelulaki)
(8) $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$ (osittelulaki)
(9) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
(10) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

MÄÄRITELMÄ 2.7. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin kompleksinen n-vektori on n:n kompleksiluvun jono $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Edelleen kaikki tälläiset kompleksiset n-vektorit yhdessä muodostavat kompleksisen avaruuden $\mathbb{C}^n$. Kompleksisia n-vektoreita lasketaan yhteen ja kerrotaan kompleksiluvulla komponenteittain.

Tässä tarkasteltava $\mathbb{C}^n$ on yksi esimerkki kompleksisesta vektoriavaruudesta, mutta muitakin kompleksisia vektoriavaruuksia on. Kompleksisille vektoreille ja vektoriavaruuksille pätee samat ominaisuudet kuin reaalisille vektoreille ja vektoriavaruuksille. Mikäli $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ovat kompleksilukuja, on olemassa kompleksiavaruuden $\mathbb{C}^n$ vektori $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, missä $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ovat kyseisen vektorin komponentteja. Komponentit voivat olla reaalisia tai kompleksisia. Esimerkiksi seuraavat vektorit ovat kompleksisia

$$\mathbf{u} = (3i, 1+i, -2i), \mathbf{v} = (6, i, 0).$$

Edelleen kompleksiavaruuden vektorit ja niiden komponentit voidaan jakaa reaali- ja imaginaariosiin. Kaikki vektorit

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \ldots, a_n + b_n i)$$

voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + i\,(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Tästä edelleen saadaan

$$\mathbf{v} = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) + i\,\mathrm{Im}(\mathbf{v}).$$

Lisäksi vektoria

$$\overline{\mathbf{v}} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n) = (a_1 - b_1 i, a_2 - b_2 i, \ldots, a_n - b_n i)$$

kutsutaan vektorin $\mathbf{v}$ kompleksikonjugaatiksi, jolle pätee

$$\overline{\mathbf{v}} = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) - i\,\mathrm{Im}(\mathbf{v}).$$

Esimerkkinä vektori $\mathbf{u}$ ja sen kompleksikonjugaatti $\overline{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{u} = (2+3i, 4, 1-5i), \overline{\mathbf{u}} = (2-3i, 4, 1+5i).$$

Tästä seurauksena saadaan yhteys reaalisten ja kompleksisten vektoriavaruuksien välille. Kompleksiavaruuden vektori $\mathbf{v}$ on reaaliavaruuden vektori jos ja vain jos vektorin $\mathbf{v}$ kompleksikonjugaatti $\overline{\mathbf{v}}$ on sama kuin itse vektori $\mathbf{v}$. Käytännössä tällaisia vektoreita ovat ne kompleksiavaruuden vektorit, joiden imaginaariosa on nolla. Jatkon kannalta on oleellista määritellä kompleksisten vektoreiden lisäksi myös kompleksiset matriisit. Reaalisen matriisin määritelmän mukaan matriisi A on reaalinen, mikäli kaikki sen alkiot ovat reaalilukuja. Lisäksi voidaan laajentaa kaikki reaalisten matriisien laskutoimitukset ja matriisien perusominaisuudet koskemaan myös kompleksisia matriiseja.

MÄÄRITELMÄ 2.8. Matriisi A on kompleksinen matriisi, mikäli sen alkiot ovat kompleksilukuja.

Edelleen kompleksinen matriisi A voidaan jakaa reaali- ja imaginaarimatriiseihin $\mathrm{Re}(A)$ ja $\mathrm{Im}(A)$. Matriisista A voidaan muodostaa matriisi $\overline{A}$, kun otetaan matriisin A jokaisen alkion kompleksikonjugaatti. Matriisin determinantti lasketaan kuten reaalisessa tapauksessa.

Esimerkki 2.9. Olkoon matriisi $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 3 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$. Tällöin

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Re}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{Im}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ja

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+2i & 3 \\ 0 & -i \end{vmatrix} = (1+2i)(-i) - (3)(0) = -i - 2i^2 = 2 - i.$$

Kun jatkossa tarkastelemme vektoreiden ja matriisien ominaisarvoja kompleksiavaruudessa, tarvitsemme eräitä ominaisuuksia niin kompleksisille vektoreille kuin kompleksisille matriiseillekin. Näitä ominaisuuksia on lueteltu seuraavissa lauseissa.

Lause 2.10. *Olkoon kompleksiset vektorit* $\mathbf{u}$ *ja* $\mathbf{v}$*, sekä kerroin* k*, joka on kompleksiluku. Tällöin*

(1) $\overline{\overline{\boldsymbol{u}}} = \boldsymbol{u}$
(2) $\overline{k\boldsymbol{u}} = \overline{k}\overline{\boldsymbol{u}}$
(3) $\overline{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{v}}$
(4) $\overline{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{u}} - \overline{\boldsymbol{v}}$

Lause 2.11. *Jos* A *on kompleksinen* $m \times k$*-matriisi ja* B *on kompleksinen* $k \times n$*-matriisi, niin*

(1) $\overline{\overline{A}} = A$
(2) $\left(\overline{A^T}\right) = \left(\overline{A}\right)^T$
(3) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

Lisäksi tarvitsemme vektorien pistetulon sekä normin määritelmät kompleksiavaruudessa.

Määritelmä 2.12. Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ja $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ kompleksiavaruuden vektorit. Tällöin kompleksinen pistetulo vektoreille voidaan määritellä

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}.$$

Toisaalta saadaan kompleksiavaruuden vektorin $\mathbf{u}$ normille

Määritelmä 2.13. Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Tällöin vektorin $\mathbf{u}$ normi on

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2}.$$

Yleisesti vektori $\mathbf{v}$ on kompleksiavaruuden yksikkövektori, mikäli $||\mathbf{v}|| = 1$ ja vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat ortogonaaliset, mikäli $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Vektoreiden pistetulo reaaliavaruudessa voidaan esittää matriisitulon avulla seuraavasti. Olkoon reaaliavaruuden vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$. Kun vektorit esitetään sarakevektoreina $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$, saadaan pistetulolle

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}.$$

Tästä edelleen vastaava yhteys pistetulolle kompleksiavaruudessa

LEMMA 2.14. *Olkoon nyt kompleksiavaruuden vektorit* $\boldsymbol{u}$ *ja* $\boldsymbol{v}$*. Tällöin pistetulolle*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T \overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{v}}^T \boldsymbol{u}. \tag{2.1}$$

Tarkastellaan vielä esimerkin kautta kuinka pistetulo muodostuu kompleksisille vektoreille $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$

ESIMERKKI 2.15. Olkoon $\mathbf{u} = (1+i, 2i, 3-i)$ ja $\mathbf{v} = (2+i, 1, -3i)$. Tällöin vektoreiden pistetulot

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1+i)\left(\overline{2+i}\right) + 2i\left(\overline{1}\right) + (3-i)\left(\overline{-3i}\right) \\ &= (1+i)(2-i) + 2i + (3-i)3i \\ &= 6 + 12i\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} &= (2+i)\left(\overline{1+i}\right) + 1\left(\overline{2i}\right) + (-3i)\left(\overline{3-i}\right) \\ &= (2+i)(1-i) - 2i - 3i(3+i) \\ &= 6 - 12i.\end{aligned}$$

Lasketaan vielä malliksi vektoreille $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ normit

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{|1+i|^2 + |2i|^2 + |3-i|^2} = \sqrt{2+4+10} = 4.$$

ja

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{|2+i|^2 + |1|^2 + |-3i|^2} = \sqrt{5+1+9} = \sqrt{15}.$$

Pistetulon esimerkistä nähdään, että kompleksisten vektoreiden pistetulo ei ole vaihdannainen, kuten reaalisten vektoreiden tapauksessa tiedetään olevan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$. Kirjoitetaan tämä ominaisuus yhdessä muiden kompleksisten vektoreiden ominaisuuksien kanssa lauseeksi

LAUSE 2.16. *Olkooon* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *ja* $\boldsymbol{w}$ *kompleksiavaruuden* $\mathbb{C}^n$ *vektoreita ja kerroin* k *jokin kompleksiluku. Tällöin vektoreiden pistetulolle kompleksiavaruudessa pätee*

(1) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}}$ *Epäsymmetrisyys*
(2) $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ *Distributiivisuus*
(3) $k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}$ *Homogeenisyys*
(4) $\boldsymbol{u} \cdot k\boldsymbol{v} = \overline{k}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$ *Antihomogeenisyys*
(5) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$ *ja* $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ *jos ja vain jos* $\boldsymbol{v}$ *on nollavektori*

Näistä kohdat (1) ja (4) poikkeavat kompleksikonjugaatin myötä reaalisesta tapauksesta, joten todistetaan näistä ensimmäinen.

TODISTUS. Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ja $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} &= \overline{v_1\overline{u_1} + v_2\overline{u_2} + \cdots + v_n\overline{u_n}} \\ &= \overline{v_1\overline{u_1}} + \overline{v_2\overline{u_2}} + \cdots + \overline{v_n\overline{u_n}} \\ &= \overline{v_1}u_1 + \overline{v_2}u_2 + \cdots + \overline{v_n}u_n \\ &= u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

□

Yleisesti ottaen vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ pistetulo on kompleksiluku, mutta lauseen 2.16 kohtaan (5) liittyen voidaan tehdä havainto poikkeuksesta. Kun pistetulon $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ vektoreille pätee $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, niin vektoreiden pistetulo on reaaliluku.

2.3. Ominaisarvoja ja -vektoreita reaaliavaruudessa

Kun haluamme tarkastella kompleksisen vektoriavaruuden vektoreita ja matriiseja, tulee meidän ymmärtää niihin liittyviä käsitteitä myös reaaliavaruudessa. Monissa tilanteissa reaaliavaruuden käsitteet ja määritelmät laajentuvat sellaisenaan kompleksiavaruuteen. Määritellään jatkoa ajatellen tärkeät käsitteet seuraavaksi ja tarkastellaan näihin liittyviä tilanteita reaaliavaruudessa. Tämän osion pääasiallisena lähteenä on käytetty teosta *Elementary linear algebra* [**1**, kpl 5.1]

Määritelmä 2.17. Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Tällöin nollasta poikkeava vektori $x \in \mathbb{R}^n$ on matriisin A reaalinen ominaisvektori, jos Ax on vektorin x moninkerta, jollekin kertoimelle $\lambda \in \mathbb{R}$. On siis oltava

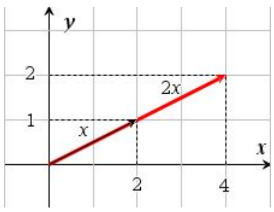
$$Ax = \lambda x$$

Tällöin kyseistä kerrointa λ kutsutaan matriisin A ominaisarvoksi ja vektoria x edelleen kerrointa λ vastaavaksi ominaisvektoriksi.

Esimerkki 2.18. Neliömatriisin $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ominaisarvoon $\lambda = 2$ liittyvä ominaisvektori on $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, sillä

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2x$$

Geometrisesti tilannetta havainnollistaa kuva 2.4. Tässä vektoria x on kerrottu matriisilla A, jolloin ominaisvektorin pituus on kaksinkertaistunut matriisin ominaisarvon 2 myötä.



Kuva 2.4. Ominaisvektorin x moninkerta $2x$

Edelleen on järkevää selvittää kuinka ominaisarvoja ja ominaisvektoreita saadaan laskettua reaaliavaruudessa, sillä vaikka lähtöarvot ovatkin reaalisia, voidaan ominaisarvoja ja -vektoreita laskiessa päätyä kompleksisiin ratkaisuihin. Tarkastellaan esimerkin kautta, kuinka ominaisarvoihin ja -vektoreihin käytännössä päädytään, sekä muodostetaan myös yleinen tapaus jatkoa varten. Tässä tarvitaan kuitenkin seuraavaa aputulosta.

LEMMA 2.19. *Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Tällöin λ on matriisin A ominaisarvo jos ja vain jos λ toteuttaa matriisin A karakteristisen yhtälön*

$$det(A - I\lambda) = 0 \tag{2.2}$$

Todistetaan tämä käyttäen tunnettuja kääntyvän matriisin ominaisuuksia ja ehtoja, erityisesti matriisin determinanttiin liittyen.

TODISTUS. Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Tiedetään määritelmästä 2.17, että ominaisarvolle λ_0 pätee $Ax = \lambda_0 x$. Tästä saadaan yhtälöä muokkaamalla matriisiyhtälöksi

$$(A - \lambda_0 I_n)x = 0.$$

Edelleen matriisin ominaisuuksista tiedetään esimerkiksi, että matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos

$$det(A) \neq 0.$$

Nyt siis matriisiyhtälöllä $(A - \lambda_0 I_n)x = 0$ on epätriviaali ratkaisu jos ja vain jos $det(A - \lambda_0 I_n) = 0$. Voidaan siis muodostaa näitä tietoja käyttäen päättely

$$\begin{aligned} \lambda_0 \text{ on } A\text{:n ominaisarvo} &\Leftrightarrow \text{yhtälöllä } Ax = \lambda x \text{ on ratkaisu} \\ &\Leftrightarrow \text{yhtälöllä } (A - \lambda_0 I_n)x = 0 \text{ on ratkaisu} \\ &\Leftrightarrow \text{matriisi } A - \lambda_0 I_n \text{ ei ole kääntyvä} \\ &\Leftrightarrow det(A - \lambda_0 I_n) = 0 \end{aligned}$$

□

ESIMERKKI 2.20. Selvitetään nyt yhtälön (2.2) avulla esimerkin matriisin A kaikki ominaisarvot. Ratkaistaan siis yhtälö $det(A - I\lambda) = 0$, kun $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

mistä edelleen determinantin laskusäännöillä saadaan

$$(3 - \lambda)(-\lambda) = 0$$

ja kertomalla sulut auki saadaan toisen asteen polynomiyhtälö

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Tästä toisen asteen yhtälöstä saadaan ratkaistua kaksi ominaisarvoa $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 2$.

Yleisesti $n \times n$ matriisin karakteristinen polynomi voidaan kirjoittaa muodossa

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

ja tästä edelleen nollakohtayhtälö

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0,$$

jolla on korkeintaan n kappaletta ratkaisuja. Tästä edelleen seurauksena $n \times n$ -matriisilla voi olla korkeintaan n kappaletta ominaisarvoja. Osa näistä yhtälön ratkaisuista voi olla kompleksisia ja siten myös $n \times n$ -matriisin ominaisarvot voivat olla kompleksisia, vaikka matriisin alkiot olisivat olleet reaalilukuja.

2.4. Ominaisarvoja ja -vektoreita kompleksiavaruudessa

Edellisessä osiossa tarkasteltiin omaisarvoteorian perusteita ja esimerkkejä reaaliavarudessa. Kuten useissa muissakin tilanteissa, omiaisarvot ja -vektorit kompleksisille matriiseille määritellään vastaavasti kuten reaalisillekin matriiseille aputuloksen (2.2) avulla. Määritellään aluksi kompleksiset ominaisarvot ja ominaisvektorit ja tarkastellaan lisäksi niihin liittyviä oleellisia ominaisuuksia. Tämän osion lähteenä on käytetty teosta *Elementary linear algebra* [**1**, kpl 5.3].

MÄÄRITELMÄ 2.21. Olkoon A $n \times n$ matriisi. Tällöin nollasta poikkeava kompleksiavaruuden vektori $x \in \mathbb{C}^n$ on matriisin A kompleksinen ominaisvektori, jos Ax on vektorin x moninkerta, jollekin kertoimelle $\lambda \in \mathbb{C}$. On siis oltava

$$Ax = \lambda x.$$

Matriisin A ominaisarvoja λ vastaava kompleksinen ominaisavaruus muodostuu kaikista kompleksisista ominaisvektoreista x, jotka ovat ratkaisuja yhtälölle $det(\lambda I - A)x = 0$. Tällöin ratkaisujen joukko on kompleksiavaruuden aliavaruus.

LAUSE 2.22. *Olkoon A $n \times n$ -matriisi, jonka alkiot ovat kompleksilukuja. Tällöin λ on matriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos λ toteuttaa matriisin A karakteristisen yhtälön*

$$det(A - I\lambda) = 0 \tag{2.3}$$

Reaalisesta tilanteesta poiketen, kompleksisessa tapauksessa karakteristisellä yhtälöllä on aina (kertaluvut huomioiden) n ratkaisua, kun kyseessä on $n \times n$ -matriisi. Ratkaisut voivat olla esimerkiksi osa reaalisia ja osa kompleksisia. Huomionarvoista on myös yhteys reaalisten matriisien kompleksisten ominaisarvojen ja niitä vastaavien ominaisvektorien välillä. Esitetään tämä seuraavassa lauseessa

LAUSE 2.23. *Jos λ on reaalisen $n \times n$ matriisin A kompleksinen ominaisarvo ja x sitä vastaava ominaisvektori, niin $\overline{\lambda}$ on myös matriisin A ominaisarvo ja $\overline{x}$ sitä vastaava ominaisvektori.*

Toisin sanoen reaalisen matriisin kompleksiset ominaisarvot ovat pareittain liittolukuja eli kompleksikonjugaatteja keskenään. Tällöin myös konjugaatteja vastaavat ominaisvektorit ovat toistensa kompleksikonjugaatteja.

TODISTUS. Olkoon siis A reaalinen $n \times n$ matriisi. Oletetaan, että λ on matriisin A ominaisarvo ja x sitä vastaava ominaisvektori. Tällöin saadaan

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\overline{x}. \tag{2.4}$$

Nyt koska A on reaalinen matriisi, niin $A = \overline{A}$ ja lauseen 2.11 kohdasta (3) saadaan

$$\overline{Ax} = \overline{A}\overline{x} = A\overline{x}. \tag{2.5}$$

Tästä edelleen yhdistämällä kaavat (2.2) ja (2.3) saadaan

$$A\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

Tämä pitää paikkaansa kun ominaisvektorin x konjugaatti $\overline{x}$ on ominaisvektorin määritelmän mukaisesti nollasta poikkeava. Tällöin siis matriisin A ominaisarvona on $\overline{\lambda}$ ja sitä vastaava ominaisvektori $\overline{x}$. □

Tarkastellaan tähän liittyen kompleksisten ominaisarvojen ja ominaisvektorien selvittämistä esimerkin avulla

Esimerkki 2.24. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Lasketaan nyt sille ominaisarvot ja selvitetään niitä vastaavat ominaisvektorit. Muodostetaan aluksi karakteristinen yhtälö $det(A - \lambda I) = 0$, mistä saadaan ratkaistua matriisin ominaisarvot.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot (-2) &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Tästä edelleen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\begin{aligned} &\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\ &\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \qquad (\text{missä} : -16 = (4i)^2) \\ &\lambda = 1 \pm 2i. \end{aligned}$$

Kuten tästä voidaan huomata, niin ominaisarvoille $\lambda_1 = 1 + 2i$ ja $\lambda_2 = 1 - 2i$ pätee

$$\lambda_1 = 1 + 2i = \overline{1 - 2i} = \overline{\lambda_2}.$$

Selvitetään vielä ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit määritelmän 2.21 avulla, kun $\lambda_1 = 1 + 2i$. Tällöin on oltava

$$\begin{gathered} Ax = \lambda_1 x \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (1+2i) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{gathered}$$

Tästä voidaan muodostaa yhtälöpari kun avataan matriisien kertolaskut

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = x_1 + 2ix_1 \\ -2x_1 + x_2 & = x_2 + 2ix_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2ix_1 + 2x_2 & = 0 \\ -2x_1 + -2ix_2 & = 0 \end{cases}.$$

Viimeisestä yhtälöparista saadaan $x_2 = ix_1$ eli ominaisarvoa λ_1 vastaava ominaisvektori $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$. Tällöin lauseen 2.23 mukaan on oltava myös ominaisarvoa λ_2 vastaava ominaisvektori $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. Ratkaisut voidaan vielä tarkistaa

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2i \\ -2+i \end{bmatrix} = (1+2i) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{x}$$

ja

$$A\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2i \\ -2-i \end{bmatrix} = (1-2i) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \lambda_2 \overline{\mathbf{x}}.$$

Edelleen meitä kiinnostaa jatkossa reaalisten 2×2 -matriisien ominaisuudet, joten tarkastellaan hieman tällaisten matriisien ominaisarvojen selvittämistä. Määritellään tätä varten neliömatriisin jälki.

MÄÄRITELMÄ 2.25. $n \times n$ neliömatriisin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

jälki (merkitään $Tr(A)$) on matriisin diagonaalialkioiden summa.

Lisäksi oleellisessa osassa on muodostaa karakteristinen polynomi matriisille. Olkoon nyt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, jolloin tätä vastaava karakteristinen polynomi saadaan determinantin avulla

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc).$$

Nyt yhtälön viimeiseen muotoon voidaan käyttää aputulosta 2.25 ja determinantin määritelmää käänteisesti, jolloin saadaan

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A),$$

mistä edelleen karakteristinen yhtälö

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0. \tag{2.6}$$

Voidaan nyt huomata, että karakteristinen yhtälö on vastaavassa muodossa kuin algebrassa toisen asteen yhtälö täydellisessä muodossaan $ax^2 + bx + c = 0$. Tällöin voidaan ratkaisujen määrä selvittää diskriminantin $D = b^2 - 4ac$ avulla seuraavasti.

(1) Jos diskriminantti $D > 0$, niin yhtälöllä on kaksi reaalista juurta
(2) Jos diskriminantti $D = 0$, niin yhtälöllä on yksi reaalinen (kaksinkertainen) juuri
(3) Jos diskriminantti $D < 0$, niin yhtälöllä on kaksi imaginaarista juurta

Käyttämällä tätä ajatusta karakteristiseen yhtälöön (2.6), saadaan ratkaisujen määrälle

LAUSE 2.26. *Olkoon* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *reaalinen* 2×2 *-matriisi. Tällöin matriisin* A *karakteristinen yhtälö on* $\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$ *jolloin matriisilla* A *on*

(1) kaksi keskenään erisuurta reaalista ominaisarvoa, jos $tr(A)^2 - 4det(A) > 0$,
(2) yksi (kaksinkertainen) reaalinen ominaisarvo, jos $tr(A)^2 - 4det(A) = 0$
(3) ja kaksi kompleksista ominaisarvoa, jos $tr(A)^2 - 4det(A) < 0$.

Kohdan (3) *ominaisarvot ovat toisilleen konjugaatteja.*

ESIMERKKI 2.27. Olkoon matriisi $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, jolloin $det(A) = 9$ ja jälki $tr(A) = 0$. Tästä saadaan siis

$$\begin{aligned} tr(A)^2 - 4det(A) &= 0^2 - 4 \cdot 9 \\ &= -36. \end{aligned}$$

Nyt koska $-36 < 0$, niin lauseen 2.26 kohdan (3) nojalla matriisilla A on olemassa kaksi kompleksista ominaisarvoa. Edelleen voidaan muodostaa karakteristinen yhtälö

$$\lambda^2 + 9 = 0,$$

joka voidaan ratkaista normaalia yhtälönratkaisua käyttäen

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 9 &= 0 \\ \lambda^2 &= -9 \\ \lambda &= \pm\sqrt{-9} \qquad (i^2 = -1) \\ \lambda &= \pm 3i. \end{aligned}$$

Matriisin A ominaisarvot ovat siis $\lambda = 3i$ ja $\lambda = -3i$.

2.5. Symmetriset matriisit ja niiden ominaisarvot

Tarkastellessa symmetrisen $n \times n$-matriisin geometrisia ja numeerisia ominaisuuksia, tulee hyödylliseksi tuntea perusteet symmetrisen matriisin diagonalisoituvuudesta ja matriisien similaarisuudesta. Tässä osiossa halutaan löytää yhteys $n \times n$ -matriisin ominaisarvojen ja matriisin kannan välille. Tärkeimmät tulokset on lähteestä *Elementary linear algebra* [**1**, kpl 5.2]. Lähdetään liikeelle määrittelemällä matriisien similaarisuus.

Määritelmä 2.28. Olkoon kaksi neliömatriisia A ja B. Tällöin matriisi B on similaarinen matriisin A kanssa, jos $B = P^{-1}AP$, missä P on kääntyvä neliömatriisi.

Tästä matriisin A muunnoksesta käytetään nimitystä *similariteettimuunnos*. Edelleen voidaan aina todeta matriisien A ja B similaarisuudesta seuraavaa.

Lause 2.29. *Matriisi A on similaari matriisin B kanssa, jos ja vain jos B on similaari A:n kanssa.*

Yleisesti similaarisilla matriiseilla on monia hyödyllisiä ominaisuuksia, joita luetellaan seuraavaksi. Olkoon siis kaksi neliömatriisia A ja B, jotka ovat similaariset ja $B = P^{-1}AP$. Tällöin

- Matriiseilla A ja B on sama determinantti
- Matriiseilla A ja B on sama jälki
- Matriiseilla A ja B on sama karakteristinen polynomi
- Edellisestä seurauksena; matriiseilla A ja B on samat ominaisarvot

Similaaristen matriisien ominaisuuksista päästää määrittelemään neliömatriiseille diagonalisoituvuus

Määritelmä 2.30. Olkoon matriisit A ja P neliömatriiseja. Tällöin matriisi A on diagonalisoituva, jos sille on olemassa kääntyvä matriisi P siten, että $P^{-1}AP$ on diagonaalinen. Tällöin matriisi P diagonalisoi A:n.

Tästä voidaan edelleen muodostaa yhteys diagonalisoituvuuden ja matriisin ominaisarvojen välille.

Lause 2.31. *Olkoon A $n \times n$ -matriisi. Tällöin seuraavat lauseet ovat yhtä pitäviä*

(1) Matriisi A on diagonalisoituva
(2) Matriisilla A on n kappaletta lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita

Toisin sanoen A on diagonalisoituva, jos ja vain jos sille on tarpeeksi monta ominaisvektoria muodostamaan reaaliavaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta. Tästä voidaan myös käänteisesti tehdä johtopäätös

LAUSE 2.32. *Olkoon A $n \times n$ -matriisi. Jos matriisilla A on vähemmän kuin n kappaletta ominaisarvoja vastaavia kantavektoreita, niin se ei ole diagonalisoituva.*

2.5.1. Symmetristen matriisien ominaisarvot. Symmetristen matriisien ominaisarvoille voidaan muodostaa seuraava lause

LAUSE 2.33. *Jos reaalinen matriisi A on symmetrinen, niin sen ominaisarvot ovat reaalisia.*

Tämän lauseen todistus voidaan viedä läpi käyttäen hyväksi kompleksisten ominaisarvojen ominaisuuksia. Matriisi A voidaan ajatella kompleksiavaruuden matriisina A, jonka alkioiden imaginaariosa on nolla.

TODISTUS. Olkoon λ matriisin A kompleksinen ominaisarvo ja x tätä ominaisarvoa vastaava nollasta poikkeava kompleksinen ominaisvektori. Tällöin määritelmästä 2.21 saadaan

$$Ax = \lambda x.$$

Kerrotaan yhtälöä puolittain ominaisvektorin konjugaatin transpoosilla, jolloin saadaan

$$\overline{x}^T Ax = \overline{x}^T(\lambda x) = \lambda \left(\overline{x}^T x\right) = \lambda(x \cdot x) = \lambda \left|\left|x\right|\right|^2.$$

Tästä edelleen saadaan ominaisarvolle

$$\lambda = \frac{\overline{x}^T Ax}{\left|\left|x\right|\right|^2}.$$

Nyt kun nimittäjä tässä yhtälössä on reaaliluku, riittää siis ominaisarvon reaalisuuden varmistamiseksi näyttää että osoittaja on sama kuin sen kompleksikonjugaatti. Käytännössä siis

$$\overline{\overline{x}^T Ax} = \overline{x}^T Ax. \tag{2.7}$$

Nyt konjugaatin ja transpoosin ominaisuuksista, matriisin A symmetrisyydestä ja reaalisuudesta, sekä edellisestä yhtälöstä (2.7) saadaan

$$\overline{\overline{x}^T Ax} = \overline{\overline{x}}^T \overline{Ax} = x^T \overline{Ax} = \left(\overline{Ax}\right)^T x = (A\overline{x})^T x = \overline{x}^T A^T x = \overline{x}^T Ax.$$

□

2.6. Ominaisarvojen geometrinen tulkinta

Kuten monessa matematiikan ja erityisesti vektoreiden sovelluskohteessa, meitä kiinnostaa usein ilmiöiden geometrinen tulkinta ja graafiset ominaisuudet. Tarkastellaan nyt hieman reaalisten matriisien kompleksisten ominaisarvojen geometrista puolta ja selvitetään kuinka ne vaikuttavat esimerkiksi yksittäisen vektorin suuntaan ja pituuteen. Tämän osion päätulokset on lainattu teoksesta Elementary Linear Algebra [**1**, kpl 5.3]. Tarkastellaan aluksi reaalista 2×2 -matriisia C, joka voidaan kirjoitaa muodossa

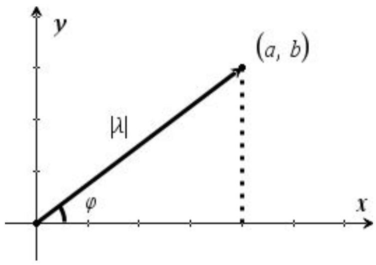
$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Myöhemmin saadaan keinot selvittää myös yleinen tilanne. Matriisin C ominaisarvoille saadaan

LAUSE 2.34. *Olkoon* $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, *jolloin matriisin* C *ominaisarvot ovat* $\lambda = a \pm bi$. *Tällöin voidaan kirjoittaa matriisi* C *muotoon*

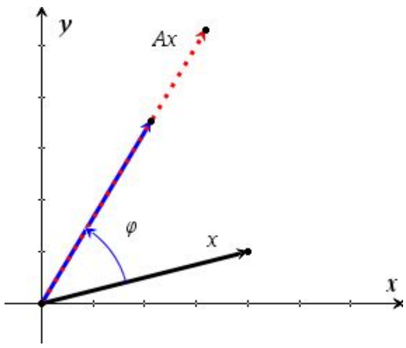
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = |\lambda| \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

kunhan toinen tekijöistä a *tai* b *on nollasta poikkeava. Tässä kulma* φ *on positiivisen* x*-akselin ja origosta pisteeseen* (a, b) *kulkevan vektorin välinen kulma.*



KUVA 2.5.

Tämän lauseen kautta voidaan tehdä seuraava havainto. Vektorin kertominen kaavan (2.8) mukaisella matriisilla A tarkoittaa geometrisesti vektorin kiertämistä kulman φ verran ja sen pituuden skaalaamista tekijällä $|\lambda|$.



KUVA 2.6. Vektorin x kierto kulman φ verran ja skaalaus tekijällä $|\lambda|$

TODISTUS. Olkoon matriisi $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Matriisin C kompleksiset ominaisarvot $\lambda = a \pm bi$ voidaan laskea muodostamalla karakteristinen polynomi

$$det(C - \lambda I) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$$

ja ratkaisemalla sen nollakohdat. Suorakulmaisen kolmion trigonometriasta saadaan $a = |\lambda| \cos\varphi$ ja $b = |\lambda| \sin\varphi$, jotka voidaan sijoittaa matriisiin C seuraavasti

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = |\lambda| \begin{bmatrix} \frac{a}{|\lambda|} & -\frac{b}{|\lambda|} \\ \frac{b}{|\lambda|} & \frac{a}{|\lambda|} \end{bmatrix} = |\lambda| \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

□

Tarkastellaan vielä matriisien jakoa tekijöihin käyttämällä kompleksisia ominaisarvoja. Seuraavan lauseen nojalla voidaan todeta kaikkien reaalisten 2×2 -matriisien, joilla on kompleksisia ominaisarvoja, käyttäytyvän kuten kaavan (2.8) matriisi C.

LAUSE 2.35. *Olkoon A reaalinen 2×2 -matriisi, jolla on kompleksiset ominaisarvot $\lambda = a \pm bi$ (oltava $b \neq 0$). Tällöin jos x on ominaisarvoa $\lambda = a - bi$ vastaava ominaisvektori matriisille A, niin matriisi $P = \begin{bmatrix} Re(x) & Im(x) \end{bmatrix}$ on kääntyvä ja*

$$A = P \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{2.10}$$

Tarkastellaan tähän liittyen esimerkkiä tekijöihin jakamisesta, kun neliömatriisin kompleksiset ominaisarvot ja niitä vastaavat vektorit tiedetään.

ESIMERKKI 2.36. Olkoon reaalinen matriisi $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, jolle kompleksiset ominaisarvot $\lambda_1 = 3i$ ja $\lambda_2 = -3i$, sekä näitä ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4-3i \end{bmatrix}$ ja $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4+3i \end{bmatrix}$. Nyt näistä ominaisarvoa $\lambda_1 = 3i$ vastaa vektori $\overline{\mathbf{x}}$. Tällöin ominaisarvolle λ_1 ja omainaisvektorille $\overline{\mathbf{x}}$ saadaan

$$a = 0, b = 3, \mathrm{Re}(\overline{x}) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathrm{Im}(\overline{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tästä edelleen lauseen 2.35 nojalla matriisi

$$P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\overline{x}) & \mathrm{Im}(\overline{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Käyttämällä käänteismatriisille ehtoa $PP^{-1} = \mathrm{I}$, saadaan

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan alkuperäinen matriisi A kirjoittaa tekijöidensä avulla kuten yhtälössä (2.10)

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Tarkistuksen vuoksi yhtälön oikea puoli voidaan laskea auki matriisien kertolaskuna

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -15 \\ 9 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Edelleen voidaan tarkastella matriisin $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ kiertokulmaa yhtälön 2.9 avulla. Tehdään tekijöihin jako

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = |\lambda| \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

ja koska $\lambda = 3i$, niin

$$|\lambda| = 3.$$

Voidaan siis kirjoittaa
$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$
Nyt saadaan siis tästä muodostettua yhtälöt
$$0 = 3\cos\varphi$$
ja
$$3 = 3\sin\varphi,$$
mistä edelleen ratkaisemalla kiertokulman
$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Käytännössä kiertokulma φ on siis 90° positiiviseen kiertosuuntaan.

Yksinkertaisimmillaan matriisien kompleksiset ominaisarvot näkyvät siis kiertoina ja pituuden muutoksena kun kerrotaan jotakin vektoria x matriisilla A. Tämä tuokin esille reaalisten matriisien kompleksisten ominaisarvojen potentiaalin eri sovelluskohteissa. Edelleen kun samaa vektoria x kerrotaan useampaan kertaan matriisilla A, muodostuu potenssisarja
$$x, Ax, A^2x, \ldots, A^nx, \ldots,$$
jonka tuottamien vektorien päätepisteet muodostavat sopivilla valinnoilla esimerkiksi elliptisiä ratoja. Tästä luettavissa lisää esimerkiksi lähteestä [**1**, s.586–588].

Kirjallisuutta

[1] Anton Howard ja Chris Rorres: *Elementary Linear Algebra.* kymmenes laitos, John Wiley & Sons, Inc. 2010.

[2] David C. Lay, Steven R. Lay ja Judi J. McDonald: *Linear Algebra and Its Applications.* Viides laitos, Pearson Education, Inc. 2016.

[3] Mikko Saarimäki: *Reaalisia vektoriavaruuksia ja ominaisarvoja*, Jyväskylän Yliopisto, Jyväskylä, 2012.