

JYX



**This is a self-archived version of an original article. This version may differ from the original in pagination and typographic details.**

**Author(s):** Kuznetsov, N.V.; Lobachev, M.Y.; Yuldashev, M.V.; Yuldashev, R.V.

**Title:** О проблеме Гарднера для систем управления фазовой автоподстройкой частоты

**Year:** 2019

**Version:** Published version

**Copyright:** © 2019 Russian Academy of Sciences

**Rights:** In Copyright

**Rights url:** <http://rightsstatements.org/page/InC/1.0/?language=en>

**Please cite the original version:**

Kuznetsov, N.V., Lobachev, M.Y., Yuldashev, M.V., & Yuldashev, R.V. (2019). О проблеме Гарднера для систем управления фазовой автоподстройкой частоты. *Doklady Akademii Nauk*, 489(6), 541-544. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524896541-544>

УДК 519.71

## О ПРОБЛЕМЕ ГАРДНЕРА ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКОЙ ЧАСТОТЫ

Н. В. Кузнецов<sup>1,2,3,\*</sup>, М. Ю. Лобачев<sup>1</sup>, М. В. Юлдашев<sup>1</sup>, Р. В. Юлдашев<sup>1</sup>

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 21.05.2019 г.

Поступило 21.05.2019 г.

Показаны возможности решения проблемы Гарднера об определении полосы быстрого захвата для многомерных систем управления фазовой синхронизацией. Развитие аналогов классических критериев устойчивости для цилиндрического фазового пространства позволило впервые получить аналитические оценки полосы быстрого захвата для системы третьего порядка.

*Ключевые слова:* проблема Гарднера об определении полосы быстрого захвата, системы фазовой автоподстройки частоты, нелинейный анализ, частотные критерии устойчивости.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524896541-544>

Управление генераторами электрических колебаний по принципу “лидер—ведомый” было впервые использовано в начале прошлого века в системах фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ, Phase-locked loop) для подстройки частоты генератора к частоте входного сигнала [1]. В настоящее время различные схемы ФАПЧ реализуются в виде компактных электронных схем и получили широкое распространение в современном телекоммуникационном оборудовании, распределённых компьютерных архитектурах, глобальных навигационных системах (GPS, ГЛОНАСС) и других приложениях.

Схемы ФАПЧ являются существенно нелинейными системами автоматического регулирования. Важными инженерными характеристиками работы ФАПЧ являются диапазоны разностей частот, для которых возможна подстройка генераторов с требуемыми свойствами, а именно: полоса удержания (hold-in range), соответствующая наличию синхронного рабочего режима и локальной устойчивости, полоса захвата (pull-in range), соответствующая втягиванию в синхронный рабочий режим при любых начальных данных (глобальная устойчивость) [1–3]. Для строгого анализа устойчивости работы отдельных и связанных систем ФАПЧ естественным является развитие и применение методов функций Ляпунова [4–9].

В монографии известного американского специалиста Ф. Гарднера сформулирована следующая

проблема [10]: определить полосу быстрого захвата (lock-in range), которая соответствует синхронизации без проскальзывания циклов генераторов. Интерес к проблеме Гарднера в последние годы связан с развитием цифровых систем передачи данных на основе ФАПЧ, существенным повышением частот генераторов и требованиями к переходным режимам [11].

В данной работе впервые показаны аналитические возможности решения проблемы Гарднера для многомерных моделей ФАПЧ. Развитие аналогов классических критериев устойчивости для цилиндрического фазового пространства [6, 12] позволило впервые получить в настоящей работе аналитические оценки полосы быстрого захвата ФАПЧ третьего порядка.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

Рассмотрим классическую схему ФАПЧ в пространстве фаз сигналов (рис. 1) [1, 3].

Здесь входом схемы является фаза эталонного генератора (ЭГ)  $\theta_{\text{ref}}(t)$ ;  $\theta_{\text{vco}}(t)$  — фаза подстраиваемого генератора (VCO);  $\theta_e(t) = (\theta_{\text{ref}}(t) - \theta_{\text{vco}}(t))$  — разность фаз сигналов (расфазировка);  $\sin \theta_e(t)$  — характеристика фазового детектора (PD); Loop filter — линейный фильтр с передаточной функцией  $H(s)$  и начальным состоянием  $x(0)$ ;  $v_f(t)$  — выход линейного фильтра;  $K_{\text{vco}}$  — коэффициент усиления подстраиваемого генератора;  $\omega_{\text{vco}}^{\text{free}}$  — собственная частота подстраиваемого генератора; блок  $\frac{1}{s}$  — интегратор. Схема на рис. 1 описывает поведение двухфазных

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения

Российской Академии наук, Санкт-Петербург

<sup>3</sup> University of Jyväskylä, Finland

\*E-mail: n.v.kuznetsov@spbu.ru

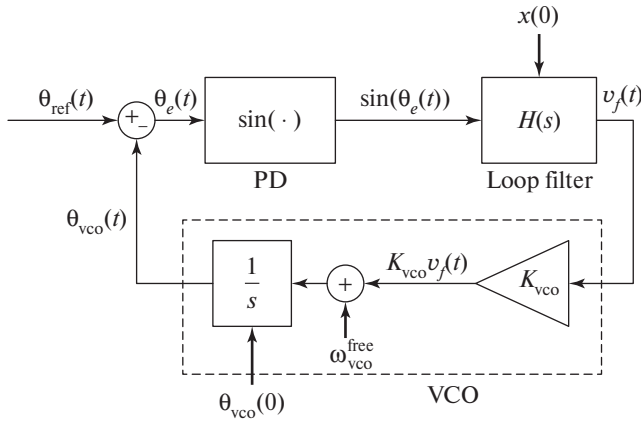


Рис. 1. Схема классической системы ФАПЧ в пространстве фаз сигналов.

моделей в пространстве сигналов [11], а классические схемы ФАПЧ в пространстве сигналов сводятся к этой схеме при помощи специальных методов усреднения [3].

Рассмотрим линейный фильтр с передаточной функцией второго порядка, имеющий один нулевой полюс [13]<sup>1</sup>:

$$H(s) = \frac{\tau_2 s + 1}{s(s + \tau_1)} + 1, \quad \tau_1 > 0, \tau_2 > 0. \quad (1)$$

Предполагаем, что передаточная функция — невырожденная, т.е.  $\tau_1 \tau_2 \neq 1$ ; частота входного сигнала — постоянная:  $\dot{\theta}_{ref}(t) = \omega_{ref}(t) \equiv \omega_{ref}$ ; закон изменения частоты подстраиваемого генератора — линейный [1]:

$$\dot{\theta}_{vco}(t) = \omega_{vco}(t) = \omega_{vco}^{free} + K_{vco} v_f(t). \quad (2)$$

Разность собственных частот генераторов обозначим

$$\omega_e^{free} \equiv \omega_{ref} - \omega_{vco}^{free}. \quad (3)$$

Из (1)–(3) получим систему дифференциальных уравнений, которая описывает классическую систему ФАПЧ в пространстве фаз сигналов:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin \theta_e, \\ \dot{x}_2 &= -\tau_1 x_2 + \sin \theta_e, \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco} \left( \frac{1}{\tau_1} x_1 + \frac{\tau_1 \tau_2 - 1}{\tau_1} x_2 + \sin \theta_e \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\theta_e$  можно рассматривать как циклическую переменную и проводить анализ системы (4) только для  $\theta_e(0) \in [-\pi, \pi)$ . Заметим, что система (4) инвариантна относительно преобразования

$$\begin{aligned} &(\omega_e^{free}, x_1(t), x_2(t), \theta_e(t)) \rightarrow \\ &\rightarrow (-\omega_e^{free}, -x_1(t), -x_2(t), -\theta_e(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

Свойство (5) позволяет провести анализ системы (4) только для  $\omega_e^{free} \geq 0$  и ввести в рассмотрение понятие отклонения частоты:

$$|\omega_e^{free}| = |\omega_{ref} - \omega_{vco}^{free}|. \quad (6)$$

Состояния равновесия системы (4), соответствующие синхронной работе генераторов, описываются уравнениями

$$\sin \theta_e^{eq} = 0, \quad x_1^{eq} = \frac{\tau_1 \omega_e^{free}}{K_{vco}}, \quad x_2^{eq} = 0 \quad (7)$$

и могут рассматриваться как многозначная функция от разности частот:  $(x_1^{eq}(\omega_e^{free}), x_2^{eq}, \theta_e^{eq})$ .

## 2. ПРОБЛЕМА ГАРДНЕРА: АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПОЛОСЫ БЫСТРОГО ЗАХВАТА

Для системы (4) состояния равновесия  $(x_1^{eq}, x_2^{eq}, \pi + 2\pi n)$  неустойчивы  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , и при выполнении неравенства

$$(\tau_1 + K_{vco})(\tau_1 + \tau_2) > 1 \quad (8)$$

состояния равновесия  $(x_1^{eq}, x_2^{eq}, 2\pi n)$  асимптотически устойчивы  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

Если для некоторого  $\omega_e^{free}$  каждая траектория системы (4) стремится к некоторому состоянию равновесия, то система с таким значением  $\omega_e^{free}$  называется глобально асимптотически устойчивой [12]. Если

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta_e(0) - \theta_e(t)| \geq 2\pi,$$

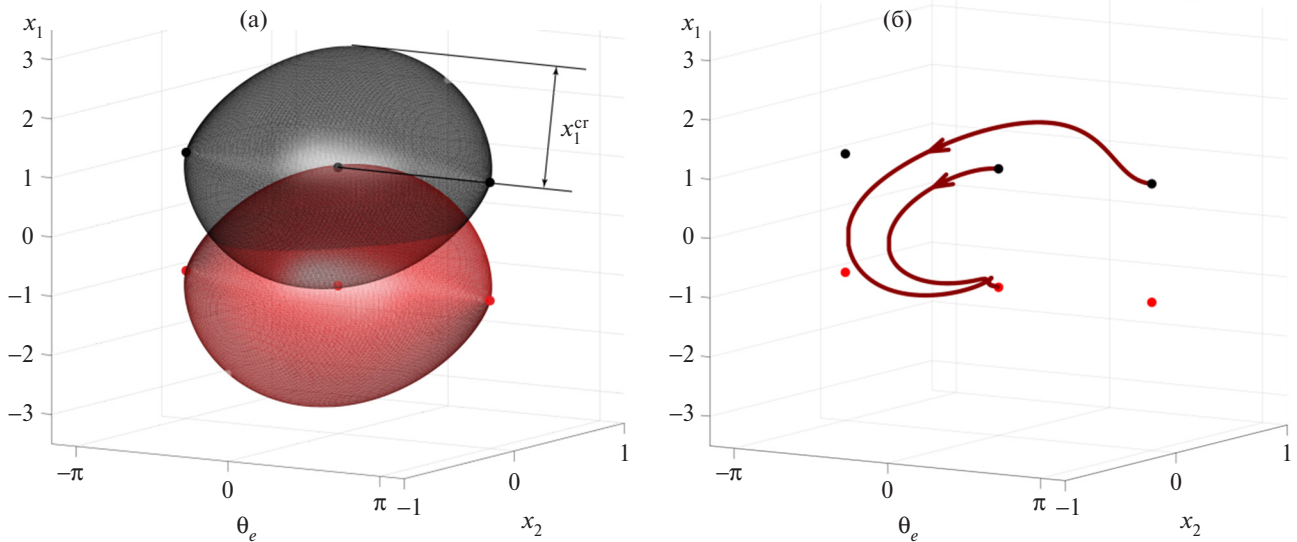
то имеет место проскальзывание цикла [3].

Определение 1 [3, 11]. Для системы (4) с фиксированным значением  $\omega_e^{free}$  область начальных состояний  $(x_1(0), x_2(0), \theta_e(0))$ , для которых синхронизация происходит без проскальзывания цикла, называется областью захвата без проскальзывания  $D_{lock-in}(\omega_e^{free})$ .

Определение 2 [3, 11]. Полосой быстрого захвата называется такой максимальный интервал отклонений частот  $|\omega_e^{free}| \in [0, \omega_l)$ , что для каждого отклонения частоты система (4) является глобально асимптотически устойчивой и область

$$D_{lock-in}((-\omega_l, \omega_l)) = \bigcap_{|\omega_e^{free}| < \omega_l} D_{lock-in}(\omega_e^{free})$$

<sup>1</sup> В литературе по ФАПЧ использование нулевого полюса рекомендуется для расширения диапазона захвата, а дополнительных устойчивых звеньев — для улучшения фильтрующих свойств [8].



**Рис. 2.**  $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2, K_{vco} = 1, |\omega_e^{free}| = 1$ . Оценка областей захвата без проскальзывания для  $\pm\omega_e^{free}$  (а). Траектории с начальными данными  $\left(-\frac{\tau_1}{K_{vco}}\omega_e^{free}, 0, 0\right)$  и  $\left(-\frac{\tau_1}{K_{vco}}\omega_e^{free}, 0, \pi\right)$  при  $\omega_e^{free} = -1$  притягиваются к состоянию равновесия без проскальзывания цикла (б).

содержит все асимптотически устойчивые состояния равновесия системы (4). Значение  $\omega_l$  называется частотой захвата без проскальзывания.

**Теорема 1.** При выполнении условия

$$\tau_1(\tau_1 + \tau_2) > 1 \tag{9}$$

система (4) является глобально асимптотически устойчивой.

Утверждение теоремы следует из выполнения частотных условий глобальной устойчивости [6, 14]. Заметим, что условие (9) расширяет область устойчивости, полученную без строгого применения критериев устойчивости для цилиндрического фазового пространства в известной работе Д. Абрамовича, представленной на конференции IEEE Military Communications Conference “21st Century Military Communications — What’s Possible?” (США, 1988) [13].

Таким образом, система (4) при условиях (9) имеет бесконечный диапазон захвата. Отметим, что проведение достоверного численного анализа устойчивости ФАПЧ является трудной задачей из-за возможности наличия скрытых аттракторов [14].

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие (9). Тогда для полосы быстрого захвата системы (4) справедлива оценка

$$[0, \omega_l) \supset \left[0, \sqrt{\frac{K_{vco}}{\tau_1}}\right). \tag{10}$$

Идея доказательства заключается:

а) в построении для фиксированного  $\omega_e^{free}$  семейства вложенных положительно инвариантных областей, содержащих асимптотически устойчивое состояние равновесия системы (4) и лежащих между плоскостями  $\{\theta_e = -\pi\}$  и  $\{\theta_e = \pi\}$ :

$$B_c(\omega_e^{free}) = \{(x_1, x_2, \theta_e) \mid V(x_1, x_2, \theta_e) < c, c \leq 2\},$$

где функцию  $V(x_1, x_2, \theta_e)$  удаётся выбрать в виде

$$V(x_1, x_2, \theta_e) = \frac{K_{vco}}{2\tau_1} \left(x_1 - \frac{\tau_1\omega_e^{free}}{K_{vco}}\right)^2 + \frac{K_{vco}}{2\tau_1} \left(\tau_1\sqrt{\tau_1^2 + \tau_1\tau_2 - 1} + 2\tau_1^2 + \tau_1\tau_2 - 1\right)x_2^2 + 1 - \cos\theta_e;$$

б) в отыскании максимального  $\omega_l^{est}$ , при котором для каждого отклонения частоты  $|\omega_e^{free}| \in [0, \omega_l^{est})$  пересечение областей  $B_{c=2}(\omega)$  для  $|\omega| < \omega_l^{est}$  содержит оба асимптотически устойчивых состояния равновесия системы  $\left(\pm\frac{\tau_1}{K_{vco}}\omega_e^{free}, 0, 0\right)$  (рис. 2). Аналогично можно получить оценки полосы быстрого захвата для фильтров более высокого порядка.

**Источник финансирования.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19–41–02002).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
2. Шахтарин Б.И., Сидоркина Ю.А., Асланов Т.Г. Анализ воздействия гармонической помехи на схему Костаса // Науч. вестник МГТУ ГА. 2015. Т. 222. № 12. С. 59–66.
3. Leonov G., Kuznetsov N., Yuldashev M., et al. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory // IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers. 2015. V. 62. № 10. P. 2454–2464.
4. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959.
5. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
6. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops. Stability and Oscillations. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2014.
7. Васильев С.Н., Козлов Р.И., Ульянов С.А. Устойчивость многорежимных формаций // ДАН. 2014. Т. 455. № 3. С. 269–274.
8. Khalil H.K. Nonlinear Systems. N.J.: Prentice Hall, 2002.
9. Abramovitch D. Phase-Locked Loops: A Control Centric Tutorial / Proc. American Control Conference, IEEE. 2002. P. 1–15.
10. Gardner F.M. Phaselock Techniques. 3<sup>rd</sup> ed. Wiley, 2005.
11. Best R., Kuznetsov N., Leonov G., et al. Tutorial on Dynamic Analysis of the Costas Loop // IFAC Annual Reviews in Control. 2016. V. 42. P. 27–49.
12. Гелуг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
13. Abramovitch D. Analysis and Design of a Third Order Phase-Lock Loop / Proc. Conference record. Military Communications Conference. IEEE. 1988. P. 455–459.
14. Alexandrov K., Kuznetsov N., Leonov G., et al. Pull-In Range of the PLL-Based Circuits with Proportionally-Integrating Filter // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. № 11. P. 720–724.

## ON THE GARDNER PROBLEM FOR THE PHASE-LOCKED LOOPS

N. V. Kuznetsov<sup>1,2,3</sup>, M. Y. Lobachev<sup>1</sup>, M. V. Yuldashev<sup>1</sup>, R. V. Yuldashev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,  
Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>3</sup>University of Jyväskylä, Finland

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev May 21, 2019

Received May 21, 2019

This report shows the possibilities of solving the Gardner problem of determining the lock-in range for multidimensional phase-locked loops systems. The development of analogs of classical stability criteria for the cylindrical phase space made it possible to obtain analytical estimates of the lock-in range for third-order system.

*Keywords:* Gardner problem on the lock-in range, phase-locked loops, nonlinear analysis, frequency stability criteria.