

MATEMATIIKAN KIELENTÄMINEN ALKUOPETUKSESSA

Saana Rasimus

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
Kevätlukukausi 2019
Kokkolan yliopistokeskus Chydenius
Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Rasimus, Saana. 2019. Matematiikan kielentäminen alkuopetuksessa. Kasvatustieteen pro gradu tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Kokkolan yliopistokeskus Chydenius. 70 sivua.

Tutkielman tarkoituksena oli selvittää, kuinka alkuopetuksessa opetetaan matematiikkaa ja erityisesti, kuinka kielentämistä käytetään opetuksessa. Aihe nousi nykyisestä perusopetuksen opetussuunnitelmasta. Matematiikan kielentäminen toteuttaa hyvin matematiikan opetussuunnitelman sisältöjä ja menetelmiä.

Tutkimuskysymykset

1. Kuinka alkuopetuksessa opetetaan matematiikkaa?
2. Mitä konkreettisia välineitä alkuopettajat käyttävät matematiikan opetuksessa?
3. Kuinka paljon kielentämistä käytetään matematiikan alkuopetuksessa?
 - a. Vaikuttavatko työkokemus, valmistumisajankohta tai yliopisto, josta on valmistunut, kielentämisen käyttämiseen opetuksessa?

Tutkimus on kvantitatiivinen tutkimus. Se tehtiin sähköisenä kyselytutkimuksena sähköpostilinkin kautta luokanopettajille, jotka työskentelivät alkuopetuksessa lukuvuonna 2018-2019. Kyselyyn vastasi 94, joista kaksi karsiutui pois heti alussa, sillä niissä ei ollutkaan vastauksia. Lopullisissa tuloksissa on mukana 92 vastausta. Tuloksia tulkittiin prosenttiluvuin, keskiarvoin, keskihajonnoin ja korrelaatioiden avulla. Tuloksista selviää, että vastaajat opettavat matematiikka alkuopetuksessa monipuolisesti. He käyttävät oppikirjoja ja konkreettisia välineitä. Kynäpaperi-työskentely on vähäisempää. Monelle kielentämisen käsite on vielä vieraampi.

Avainsanat: matematiikka, matemaattinen ajattelu, matematiikan luonne, kielentäminen, alkuopetus

SISÄLLYSLUETTELO

TIIVISTELMÄ	2
1. JOHDANTO	4
2. MATEMATIIKAN LUONNE.....	5
3. MATEMAATTINEN AJATTELU.....	8
3.1 Lähtökohtia matemaattiselle ajattelulle.....	8
3.2 Matemaattisen ajattelun käyttäminen ja harjoittelu.....	10
4. KIELENTÄMINEN MATEMATIIKASSA	13
4.1 Matematiikka on oma kielensä	14
4.2. Kommunikointi osana kielentämistä.....	14
4.3. Matemaattinen ajattelu ja kielentämisen kieli.....	15
4.4. Kielennetään matematiikan tehtävää	18
4.5. Positiiviset vaikutukset	18
5. ALKUOPETUSIKÄINEN LAPSI.....	25
5.1 Kehitysvaihe yleensä	25
5.2 Kehitysvaiheet matematiikassa	28
5.3 Konkretia ja taktiisuus	29
6. TUTKIMUKSEN TARKOITUS JA TUTKIMUSKYSYMYKSET	32
7. TUTKIMUKSEN TOTEUTUS	33
7.1 Tutkimusmenetelmät.....	33
7.2 Aineiston hankinta ja analyysi	34
8. LUOTETTAVUUS JA EETTISYYS	38
9. TULOKSET.....	40
JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA.....	61
LÄHTEET	66
LIITTEET	71

1. JOHDANTO

Matematiikka on aina kiinnostanut minua. Numerot ovat olleet helpompia kuin kirjaimet. Olen halunnut ymmärtää matematiikkaa. Olen opettaessakin halunnut tietää mitä oppilaat ovat ajatelleet laskua tehdessä. Olen pyytänyt heiltä välivaiheita laskuihin. Opintojen aikana minulle on vahvistunut, toimintani on ollut oikean suuntaista. Kielentäminen on hyvin tärkeä osa matematiikkaa, kuinka tuoda omaa ajatteluaan esille.

Nykyisessä perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa¹ (2014) mainitaan matematiikan tehtäväksi matemaattisen ajattelun luova, täsmällinen ja looginen käyttö, oppilaiden kyky käyttää ja soveltaa monipuolisesti matematiikkaa. Konkretian tulisi myös olla suuressa osassa opetusta. ”Opetus kehittää oppilaiden kykyä ilmaista matemaattista ajatteluaan konkreettisin välinein, suullisesti, kirjallisesti ja piirtäen sekä tulkiten kuvia” (POPS 2014, 128.) Jorma Joutsenlahden (2005) paljon tutkima kielentäminen on juurikin tätä. Se perustuu neljään osa-alueeseen matemaattisesta ajattelusta: luonnollinen kieli, symbolikieli, kuviokieli ja taktiilinen toiminnan kieli.

Matematiikasta on tehty paljon tutkimuksia, muun muassa matemaattisesta ajattelusta ja kielen yhteydestä matematiikkaan. Tämä aihe kiinnostaa monia. Joutsenlahti on suomalaisia johtavia tutkijoita kielentämisessä. Ulkomaisista tutkijoista muun muassa Judit Moschovich on tutkinut kielen yhteyttä matematiikkaan ja sen oppimiseen.

Tässä tutkimuksessa selvitetään, kuinka alkuopetuksen luokanopettajat opettavat matematiikkaa. Mielenkiintoista on selvittää vaikuttavatko luokanopettajan valmistumisajankohta tai -yliopisto siihen, kuinka paljon hän käyttää kielentämisen muotoja matematiikan opetuksessa. Oletuksena on, että Tampereen yliopistosta valmistuneilla olisi vahva pohja kielentämiseen Joutsenlahden kautta. Toisaalta ne luokanopettajat, jotka ovat opiskelleet nykyisen opetussuunnitelman aikana ovat päässet avaamaan ja oppimaan siitä erityisesti. Lisäksi selvitettiin millaisia konkreettisia välineitä luokanopettajat käyttävän alkuopetuksen matematiikan sisältöjä opettaessaan.

¹ Käytän jatkossa tässä tutkimuksessa lyhennettä POPS viittaamaan Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin 2014.

2. MATEMATIIKAN LUONNE

Pehkonen ja Rossi (2018, 10) määrittivät matematiikan kolmella toisista kohdalla. Ensin matematiikka on formaaleja aksiomaattisia systeemejä, abstrakteja struktuureja ja objekteja sekä niiden ominaisuuksien ja suhteiden luomista ja tulkittamista. Mikä tarkoittaa sitä, että matematiikka on erilaisia koskemattomia säännönmukaisuuksia ja niillä soveltamista ja kommunikointia. Se on logiikkaa, tarkkuutta, täsmällisyyttä ja päättelyä sekä lakien ja sääntöjen soveltamista. Matematiikka on oma kielensä, joukko erilaisia merkintöjä ja symboleja. Se on todellisuudesta lainattujen mallien suunnittelua ja analysointia sekä soveltamista. Erityisesti sitä voidaan pitää keinona ymmärtää ilmiöitä ja tehdä ennusteita. Se on yksinkertaistamista ja ongelmanratkaisua. Siinä tulkitaan säännönmukaisuuksia. Matematiikkaan kuuluu induktiivinen ajatteleva, tutkiminen, havainnoiminen ja yleistäminen. Se on luovaa toimintaa ja jopa mielikuvituksen tuote. Sitä pidetään totuutena ja muiden tieteiden äitinä ja ytimenä. Voidaan puhua niin sanotusta kovasta tieteestä. Matematiikalla on monia eri sisältöjä, kuten geometria, algebra, tila, luku, muoto, määrä ja niin edelleen. Matematiikka voi olla mahdotonta, sen hahmottamiseen voi olla vaikeus. Toiset hahmottavat matematiikka helpommin kuin toiset. Siinä voi kehittyä, mutta se voi olla myös ylitytsempäämätöntä.

Kaiken edellä mainitun jälkeen matematiikka, niin kuin kaikki tiede, on kumulatiivista. Siinä tulee oppia ensin tietyt perustaidot, jotta voi oppia seuraavia asioita. Kumulatiivisuuden lisäksi voidaan puhua kerroksellisuudesta tai spiraalimaisesta luonteesta. Opitaan aina uutta vanhan tiedon päälle, syventäen aiemmin opittua. Spiraaliopetuksessa samat asiat toistuvat vuodesta toiseen, mutta joka vuosi niihin tulee jotain lisää ja opittua tietoa syvennetään. Uuden tiedon sisäistäminen vie aikaa, jolloin on hyvä, että uutta tietoa voidaan prosessoida rauhassa, jolloin seuraavana vuonna aihe onkin jo tutumpi, ja voidaan taas tuoda syventäviä elementtejä. Esimerkiksi alakoulussa opetellaan peruslaskutoimituksia vuosittain. Koulun alkaessa matemaattinen harjoittelu aloitetaan luonnollisilla luvuilla, mutta kolmannella luokalla mukaan saadaan jo desimaali- ja murtolukujen tarkempi tutkiminen ja niillä laskeminen. (Pehkonen & Rossi 2018, 25.)

Ensin alkuopetuksessa opiskellaan varsinaiset matemaattiset taidot, kuten lukujonotaidot, sen jälkeen voidaan harjoitella soveltamista vaativia tehtäviä. Vasta kun

hahmotetaan, kuinka omia taitoja voidaan käyttää hyväksi, voidaan alkaa ratkaista ongelmanratkaisutehtäviä. Näiden tulisi aina olla oman tason mukaisia, jolloin voisi hyödyntää juuri itsellä olevia ongelmanratkaisutaitoja.

Tätä kutsutaan hierarkkisuudeksi matematiikassa: ensin peruskäsitteet ja -taidot, sitten vasta monimutkaisempia tehtäviä. Tätä on havainnollistettu oheisessa Aunolan ja Nurmen (2018, 55) laatimassa taulukossa (TAULUKKO 1). Kun oppilas pystyy selittämään tehtävän itselleen omin sanoin ja rakentamaan tiedon itselleen uudelleen, hän pystyy yleistämään tarvittavan matemaattisen säännön. Vasta tämän jälkeen oppilas pystyy soveltaviin tehtäviin. (Yrjönsuuri 2007, 208.)

TAULUKKO 1. Lapsen matemaattista kehitystä. Mukailten Nurmen, Ahosen, Lyytisen, Lyytisen, Pulkkinen ja Ruoppilan laatimaa taulukkoa 2014 (Aunola & Nurmi 2018, 559)

ikä, keskimäärin	Esimerkkejä siitä, mitä lapsi hallitsee
alle 1kk	Pystyy tekemään erotteluja lukumäärien välillä, kun niiden suhteellinen ero on riittävän suuri.
4kk	Osaa ajatuksellisesti lisätä ja vähentää joukosta yhden.
1v 5kk	Alkaa oppia lukusanoja.
2v	Alkaa oppia lukusanojen järjestystä. Osaa yksi yhteen - vastaavuuden tehtävässä, jossa jaetaan esineitä.
2v 6kk	Havaitsee, että lukusanat merkitsevät myös yhtä suurempia lukuja (yksi vs. monta).
3v	Osaa laskea pienen määrän esineitä.
3v 6kk	Osaa lisätä ja vähentää joukosta yhden esineillä ja lukusanoilla. Ymmärtää, että esineitä on niin monta kuin viimeksi lueteltu lukusana ilmoittaa.
4v	Osaa käyttää sormia apuna yhteenlaskuissa.
5v	Tunnistaa arabialaiset numerot.
5v 6kk	Osaa luetella lukusanat oikein 40:en saakka.
6v	Ymmärtää lukumäärän säilyvyyden.
6v 6kk	Ymmärtää yhteenlaskun ja vähennyslaskun olevan komplementaarisia eli toisiaan täydentäviä.
7v	Osaa palauttaa joitain aritmeettisiä faktoja muistista laskematta niitä (esimerkiksi $1+3=4$)
8v	Lukusuoran ymmärtäminen: yli puolet 8-Vuotiaista osaa vastata oikein myös kysymykseen, kuinka monta numeroa on kolmen ja yhdeksän välillä.
9v	Lapsi alkaa oppia kertotauluja. Sormien käyttö laskemisen apuna vähentyy selvästi; joillain lapsilla ääneen laskeminen säilyy edelleen.
10v ja vanhemmat	Abstraktin järjelyn ja työmuistin kehittyminen tekevät mahdolliseksi erilaisten algoritmien käytön, eli lapsi oppii sääntöjä, joiden perusteella laskutoimituksia voidaan suorittaa mahdollisimman vähillä vaiheilla. Lukusuoran ymmärtäminen: lapsi osaa vastata oikein kysymykseen, kuinka monta numeroa on kolmen ja yhdeksän välillä.

Matemaattisten taitojen oppiminen ei tapahdu yhtä nopeasti kuin lukemaan ja kirjoittamisen oppiminen. Se vaatii paljon harjoitusta, ajattelua ja prosessointia. Eteneminen tapahtuu askeleittain yksinkertaisemman osataidon oppimisesta kohti monimutkaisempia ja vaativampia taitoja. Nämä taidot koostuvat useasta eri osatekijästä. Numeerinen tieto sisältää numeroiden tunnistamisen ja kyvyn asettaa lukuja järjestykseen. Aritmeettisten yhdistelmien muistaminen, kuten lisääminen, vähentäminen, kertominen ja jakaminen, on toinen matemaattisten taitojen osatekijä. Matemaattisten käsitteiden ja periaatteiden ymmärtäminen on tietoa siitä, kuinka ja miten voidaan laskea. Toisaalta se on myös taitoa soveltaa erilaisia laskustrategioita joustavasti ja monipuolisesti. Viimeisenä osatekijänä on ongelmanratkaisutaidot, jolloin tavoitteena on pystyä tunnistamaan matemaattinen ongelma ja rakentaa suunnitelma sen ratkaisemiseksi. (Aunola & Nurmi 2018, 64, 55.)

Oppilas prosessoi oppimiaan asioitaan itsekseen, mutta usein ahaa-elämyksiä syntyy myös keskustellessa ja kommunikoidessa toisten kanssa. Voidaan sanoa, että oppilaan lukukäsite kehittyy vuorovaikutuksessa toisten kanssa. Erityisesti keskustelu ja tutkiminen vievät ajattelua ja päättelyä eteenpäin. Nämä vahvistavat lukukäsitteen muodostumista ja sen ymmärtämistä, mikä on oleellista matematiikassa. (Rezat & Rye Ejersbo 2018, 27.)

Lukukäsitteen ymmärtäminen on matematiikan yksi peruspilareista ja sen osaaminen ennustaa myöhempien taitojen osaamista, erityisesti päässäälaskutaitoja ja niihin liittyviä laskustrategioita. Toisaalta lukukäsitteen ymmärtäminen vahvistuu, kun harjoittelee enemmän päässäälaskutaitoja, jolloin erilaiset laskustrategiatkin vahvistuvat. (Rezat & Rye Ejersbo 2018, 27). Päässäälasku on yksi tehokkaimmista tekniikoista lukukäsitteen opettamisessa ja oppimisessa (Pehkonen & Rossi 2018, 28).

Matematiikan luonne näkyy, kun pyritään kehittämään matemaattinen malli käytännön tilanteessa esiintyvistä rakenteista ja soveltaa sitä esimerkiksi ongelmanratkaisutilanteessa. Tällöin pyritään kehittämään omassa ajattelussa siten, että seuraavalla kerralla ongelma olisi helpompi ratkaista. (Pehkonen & Rossi 2018, 10.)

3. MATEMAATTINEN AJATTELU

Aiemmin kouluissa opetettiin vain mekaanista laskutaitoa. Tällöin matemaattinen ajattelu jäi vähäiselle harjoittamiselle, eikä välttämättä luonnistunut alkuunkaan. Yrjönsuuren (2007, 150) mukaan oppilaan kokemukset jäävät matematiikan osaamisestaan hyvin suppeiksi. He tietävät osaavansa laskea mekaanisesti, mutta matematiikka on paljon enemmän, muun muassa laajoja ajatteluprosesseja ja -taitoja. Tänä päivänä opetussuunnitelmakin vaatii mekaanista laskemista monipuolisempaa opettamista, kuten ajattelun taitoja. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, 234) mainitaan matematiikan oppiaineen tehtäväksi kehittää matemaattista luovaa ajattelua.

3.1 LÄHTÖKOHTIA MATEMAATTISELLE AJATTELULLE

Joutsenlahti (2005, 51) on väitöskirjassaan tutkinut matemaattista ajattelua ja mitä se on. Hän ei ole päässyt aivan tarkkaan määritelmään. Hän on kuitenkin löytänyt viisi kokonaisuutta, jotka vaikuttavat matemaattiseen ajatteluun, sen syntyyn ja kehittymiseen. Uskomukset, kulttuuri, matemaattiset kyvyt, informaation prosessi ja ongelmanratkaisu ovat kaikki keskeisiä lähtökohtia matemaattiselle ajattelulle. Matemaattinen ajattelu terminä ja sen määritelmä eivät ole yksiselitteiset ja se voi olla ajattelua matematiikasta tai se voi olla matematiikan avulla ajattelua kuten Pekonen ja Rossi (2018, 59) ovat esittäneet. Se voi olla monimutkaisten prosessien yhdistelmä, joka soveltaa operaatioita ja prosesseja.

Joutsenlahti (2005, 20, 51) on laajentanut haastavan määritelmän. Hän ottaa mukaan matemaattisen ajattelun lisäksi myös matemaattisen tiedon ja - taidon. Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018, 416) artikkelissa päätellään, että matemaattinen ajattelu on tiedon prosessointia, erityisesti konseptuaalisen, proseduraalisen ja strategisen tiedon. Käytännössä voidaan puhua, että oppilas hyödyntää aikaisemmin oppimaansa ja rakentaa oman toimintansa kautta itselleen uutta tietoa. Viitala (2018, 16-17) puolestaan näkee matemaattisen ajattelun kognitiivisena toimintana. Siihen vaikuttavat vahvasti affektit ja mielen eri metatasot.

Pehkonen ja Rossi (2018, 59) lainaavat Burtonia (1984) matemaattisen ajattelun määritelmässä. Tämän määritelmän mukaan matemaattinen ajattelu muodostuu

operaatioista ja prosesseista, joihin liittyvä dynamiikka on oleellisessa osassa. Matemaattinen ajattelu on selkeästi erotettu matematiikan tekniikoista ja siihen liittyvistä sisällöistä. Se on osa niitä. Kuitenkin se on paljon enemmän, kuin vain sisällöt ja tekniikat.

Yrjönsuuren (2007, 199, 205-207, 216) määritelmässä matemaattinen ajattelu on abstraktisuudessaan ja loogisuudessaan hyvin pitkälle kehittyntä. Matemaattista ajattelua ei ole helppo, eikä sitä välttämättä tulisikaan, erottaa tavallisesta ajattelusta. Tässä määritelmässä matemaattista ajattelua tarkastellaan algoritmisesta ja reflektioivasta näkökulmasta. Algoritminen suuntautuu toimintaan ja silloin tehtävänä on ratkaista tehtävä. Kehitellään työvälineitä, tuloksia ja todistuksia. Reflektioivassa ajattelussa pohditaan olemassaoloa ja ennakoidaan tulevaa. Keskitytään täsmälliseen, loogiseen, toteen ja epätoteen. Tärkeää on kehittää oivalluksia ja deduktiivisia päätelmiä. Se on siis nimensä mukaisesti reflektioivaa eli pohtivaa.

Matemaattinen ajattelu edellyttää kykyä erottaa ja valikoida tietoa ympäristöstä ja tietystä tilanteesta. Tietoa tulee reflektoida ja yhdistää aiemmin opittuun ja koettuun. Näin syntyy uutta tietoa, jota jälleen muokataan uuden tiedon kautta. Matemaattisen tiedon avulla opitaan matemaattista ajattelua. (Yrjönsuuri 2007, 202). Lisäksi matemaattinen ajattelu koostuu tietopohjasta, ongelmanratkaisutekniikoista, uskomuksista, affekteista ja harjoittelusta. Näitä kaikkia voi ja myös pitää harjoitella sekä opiskella. (Viitala 2018, 16.)

Viitala (2018, 15) näkee myös suurena haasteena käyttää opetuksessa ja perusopetuksen opetussuunnitelmassa termiä matemaattinen ajattelu, koska sitä ei ole tarkasti määritelty. Kaikilla ei ole yhteistä linjaa, eikä ole selvää, kuinka tulisi toimia, jotta kaikki toimisivat yhtenevästi. Kuten edellä huomataan tätä samaa ovat miettineet muutkin tutkijat (ks. esim. Joutsenlahti 2005, 51). Kuinka siis määritellä matemaattinen ajattelu? Viitala on rakennellut oman kokonaisuuden monien eri tutkijoiden mietteiden pohjalta ja luonut omaan tutkimukseensa sopivan määritelmän matemaattiselle ajattelulle. Tämäkin määritelmä on vain hänen määritelmänsä tutkimustaan varten. Se ei ole yleispätevä määritelmälle matemaattinen ajattelu.

3.2 MATEMAATTISEN AJATTELUN KÄYTTÄMINEN JA HARJOITTELEMINEN

Matemaattista ajattelua käytetään, kun edessä on haasteellinen matemaattinen ongelma. Sen kanssa saatetaan ponnistella pitkäänkin monipuolisesti ajatellen. Ajattelu muokkautuu sen mukaan, mihin sisältöön oppilas suuntaa sitä. Mihin oppilas keskittyy ja mikä tuntuu itselle ominaiselta. Kun matemaattisen ajattelun malli on alusta asti vahvasti mukana opiskelussa, se kehittyy kantavaksi. Silloin voi käyttää konkreettisia malleja havainnollistamaan laskutoimituksia. Lisäksi ajattelulla voidaan rakentaa sisäisiä ratkaisumalleja. (Yrjönsuuri 2007, 166, 206.)

Matemaattinen ajattelu, kuten mikään muukaan ajattelu, ei näy ulos päin. Kukaan ei pysty sanomaan mitä toinen ajattelee. Opettajakin voi vain keskustelun kautta päästä jyvälle oppilaansa ajattelusta. Tällöin kommunikointi on erityisen tärkeässä asemassa matematiikan opetuksessa. Kommunikoimalla voidaan tehdä matemaattinen ajattelu näkyväksi. (Pehkonen & Rossi, 58.)

Opetuksella voidaan vaikuttaa siihen, millainen käsitys lapselle ja nuorelle muodostuu matematiikasta ja sen opiskelusta. Millaista matematiikan opetuksen tulisi olla, että matemaattinen ajattelu olisi kaikille luonnollista? Millaisesta toiminnasta on kysymys, kun lapsi pyrkii laajentamaan matemaattista osaamistaan? Nämä kysymykset mietittyvät monia opettajia ja vanhempia (Yrjönsuuri 2007, 149; Sorariutta 2017, 20; Brendefur, Strother & Rich 2018, 41.)

Lapset kehittyvät hyvin eri tahtiin, myös matemaattiset taidot kehittyvät eri aikaan ja erityisesti tämä koskee matemaattisen ajattelun taitoja. Vanhempien omat mieltymykset, uskomukset ja vahvuudet suuntaavat myös lasta. Kuinka paljon vanhemmilla on tietoa ja taitoa ohjata lasta tiettyyn suuntaan? Mihin asioihin he kiinnittävät huomiota lasten kanssa keskustellessa ja puuhatessa? Aikuisten tulisikin ohjata lapsia huomioimaan tarkkoja lukumääriä. Näin voidaan vaikuttaa lapsen matemaattiseen ympäristön havainnointiin ja ajatteluun. (LUKIMAT 2017.)

Pehkonen ja Rossi (2018, 63) ovat ynnänneet kolme opetuksessa käytettävää keinoa, jotka kehittävät matemaattista ajattelua. Niistä ensimmäinen on sopivien ongelmanratkaisutehtävien käyttäminen. Niiden tulisi olla oppilaan ajattelun tason mukaisia, jotta oppilas saisi ne ratkaistuksi, mutta joutuisi ponnistelemaan ja miettimään vastauksen saamiseksi. Toinen on ajatuskarttojen laatiminen, mikä jäsentää ajattelua. Ajatuskartan avulla saa kaikki asiat yhtä aikaa esille. Niitä on hyödyllistä käyttää

opetusvälineinä myös matematiikassa. Kolmantena matemaattisen ajattelun kehittämässä mainitaan kielentäminen, jolloin omaa ajattelua tuodaan esille.

Luumäellä on tutkittu matemaattisen ajattelun harjoittelemista ja kirjattu tuloksia ylös heidän kunnan omaan opetussuunnitelmaan peda.net -internet sivustolle (Luumäen perusopetuksen opetussuunnitelma, 2019). Arkisesta ympäristöstämme löytyy valtavasti matemaattista ajattelua herättävää havainnoitavaa, kuten samanlaisuudet, eroavaisuudet, vastakohtat ja luokittelu. Avaruudellista hahmottamista, geometriaa ja mittaamista pystyy harjoittelemaan hahmottaessa omaa kehoa. Ajan käsitteitä tulee esiin puheessa, kuten esimerkiksi tänään, huomenna, aamuisin ja iltaisin. Nopea ja hidas vertailu liittyvät myös aikaan: kauanko jonkin matka kestää. Lukujonojen muodostaminen ja lukumäärien laskeminen sekä ongelmanratkaisutehtävät vahvistavat matemaattista ajattelua.

Yrjönsuuri (2007, 151–157) on havainnut, että kun oppilas oppii, hän pystyy kehittämään itselleen uusia matemaattisia ajatuksia ja kehittämään matemaattista osaamistaan. Hän kehittyy itselleen mielekkäiden valintojen tekemisessä ja toimii aktiivisesti yhteisössä. Oppilas muodostaa sisäisiä toimintamalleja muun muassa kohtaamistaan ilmiöistä. Jotta matematiikassa ja sen ajattelussa pystyy kehittymään, täytyy päästä soveltamisen tasolle. Tämä taas edellyttää tiettyjen matemaattisten rakenteiden ymmärtämistä.

Konkretia ja välineet ovat erityisesti alakouluikäiselle tärkeitä oppimisen havainnollistamisessa. Laskutoimituksia tulisi havainnollistaa mahdollisimman monipuolisesti. Tällöin sisäiset mallit vahvistuvat ulkoisten mallien ja tiedon pohjalta. Matemaattinen ajattelu on siis vahvasti mukana opetuksessa alusta alkaen. Oppiessaan lapsi pystyy tuottamaan uusia matemaattisia ajatuksia. Tätä kautta hän kehittää matemaattista osaamistaan. (Yrjönsuuri 2007, 155, 166.)

Oppilaan oppiessa ja kehittyessä hän kasvattaa tietojaan. Alkuun hän saattaa siirtyä taidon ja tiedon portailla systemaattisesti ylemmälle askelmalle, mutta tietojen ja taitojen karttuessa hän voi hypätä jonkin portaan yli tai välillä tulla takaisin alemmalle portaalle. Tämän kaltainen toiminta on matemaattiselle ajattelulle oleellista. Matemaattinen ymmärtäminen ja sen kehittyminen perustuvat dynaamiseen, kokonaisvaltaiseen ja ei -lineaariseen kasvuprosessiin. Matemaattisten tietojen lisäksi matemaattista ajattelua kehittävät matemaattiset taidot. Tällaisiin taitoihin luetaan muun muassa järjestelmällisen harjoittelun avulla saavutetut taidot. Kolmantena asiana

matemaattiseen ajatteluun vaikuttaa oppilaan kyvyt, kuten koulutuksesta tai harjoituksesta johtumattomia kompetensseja. (Leppäaho 2007, 31, 36.)

4. KIELENTÄMINEN MATEMATIIKASSA

Sanakirjan mukaan verbi kielentää tarkoittaa oman ajatuksen saattamista kielelliseen muotoon (Suomisanakirja.fi 2019). Kielentämistä on lähes kaikkialla. Rättyä ja Kulju (2018, 61–62) ovat tutkineet kielentämistä äidinkielen didaktiikassa, mutta määrittelivät termiä laajemminkin. Vaikka hekin ovat määritelleen kielentämisen sanakirjan mukaan, he ovat myös ottaneet huomioon, kuinka erilaisia määritelmiä termi saa riippuen tieteen alasta. Suomen kielen ainedidaktisessa määritelmässä se tarkoittaa pedagogista menetelmää. Erityisesti silloin käytetään kielentämisen termiä, kun oppilas reflektoi omaa ajatteluaan. Ääneen ajattelumenetelmä on äidinkielessä ehkä käytetyin kielentämistä hyödyntävä harjoitus. Se tunnetaan myös nimellä think aloud -menetelmä.

Matematiikassa kielentäminen, englanniksi languaging, on Jorma Joutsenlahden paljon tutkima ja kehittänyt osa-alue. Hän on tehnyt paljon tutkimusta muun muassa äidinkielen ja kirjallisuuden yliopistonlehtori Pirjo Kuljun kanssa. Tutkimuksissa keskeistä on ollut matematiikan ja äidinkielen yhteydet opetuksessa. Kielentämistä on lähes kaikkialla ja siksi matematiikka ja äidinkielenkin liittyvät läheisesti toisiinsa. Kuinka tuoda omaa ajatteluaan esille? Siinä ei vaikuta sisältötieto, vaan kuinka osaa esittää toisille omaa ajatteluaan. Kielentämistä voi toteuttaa monella eri tavalla. Puheen ja kirjottamisen avulla saadaan jo paljon aikaan. Siksi äidinkielen lehtorin on varmasti mielenkiintoista yhdistää voimansa matematiikantutkijan kanssa. (Joutsenlahti 2015, 58.) Moschkovich (2010, 2–10) on tutkinut kielentämistä ja kieltä matematiikan oppimisessa. Hän on tutkinut maahanmuuttajia ja heitä, jotka eivät puhu äidinkielenään saamaa kieltä, tässä tapauksessa englantia. Erityisesti hän on huomannut, miten tärkeä kieli on matematiikan oppimisessa ja opiskelussa. Se ei ole vain puhuttua kieltä, vaan siihen liittyy myös sosiaalinen puoli. Tämä kaikki tukee myös Joutsenlahden ja Tossavainen (2018, 410) määritelmää kokonaisvaltaisesta kielentämisestä matematiikassa.

Kielentäminen matematiikassa on oman ajattelun esille tuomista ja ilmaisemista kielen avulla eli useimmiten kirjallisesti tai suullisesti. Toisin sanoen kyse on matemaattisesta ajattelusta. Joutsenlahti (2018) on kiteyttänyt matematiikan kielentämisen seuraavasti: ”Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla.” (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 410, 416.) Kielentämistä, voidaan pitää hyvinkin kokonaisvaltaisena työskentelytapana. Se ei ole

vain selittämistä, vaan siihen sisältyy myös kommunikaatio. (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 48; Metsämuuronen 2013, 11; Joutsenlahti & Perkkilä 2019, 1-2).

4.1 MATEMATIIKKA ON OMA KIELENSÄ

Planas, Morgan ja Schütte (2018, 196) tutkivat matematiikan koulutusta ja kieltä. Heidän johtopäätöksensä on, että matematiikka on oma kielensä. Samaa vahvistavat Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, 413). Matematiikan kieltä ei ole mahdollista opiskella tai oppia vain yhdellä tietyllä luonnollisella kielellä, vaan se voi olla yhteinen kieli kahdelle eri puolilla maailmaa asuvalle henkilölle, jotka eivät puhu samaa luonnollista kieltä. Luonnollinen kieli on esimerkiksi suomi tai ruotsi tai jonkin muu kieli, joka voi olla puhujan äidinkieli. Luonnollisen kielen lisäksi voidaan puhua niin sanotuista keinotekoisista kielistä, joista yksi on matematiikka.

Planas ym. (2018, 196) ovat rajanneet matematiikan opetuksesta kolme eri kieltä. Ensin on oppilaan kieli. Se on samaa arkikieltä kuin he käyttävät missä tahansa muussa kommunikaatiossa. Opettajat puhuvat omaa kieltään, sillä he osaavat jo oman alansa termejä ja asioita enemmän. Tästä puhutaan luokkahuoneen kielenä. Kolmantena on matematiikan kieli, jossa sekoittuvat luonnollisen kielen ilmaisut ja matematiikan symbolit sekä lausekkeet. Kieli on työkalu kaikkeen ajattelemiseen sekä matemaattisen tiedon rakentumiseen erityisesti semioottisesta näkökulmasta. Näin ovat lausuneet Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, 421), kun ovat lainanneet Schleppegrellia (2007). Eli pitää ymmärtää matematiikkaa ja sen logiikkaa, jotta sen kieltä pystyy ymmärtämään. (Planas ym. 2018, 197.)

4.2. KOMMUNIKOINTI OSANA KIELENTÄMISTÄ

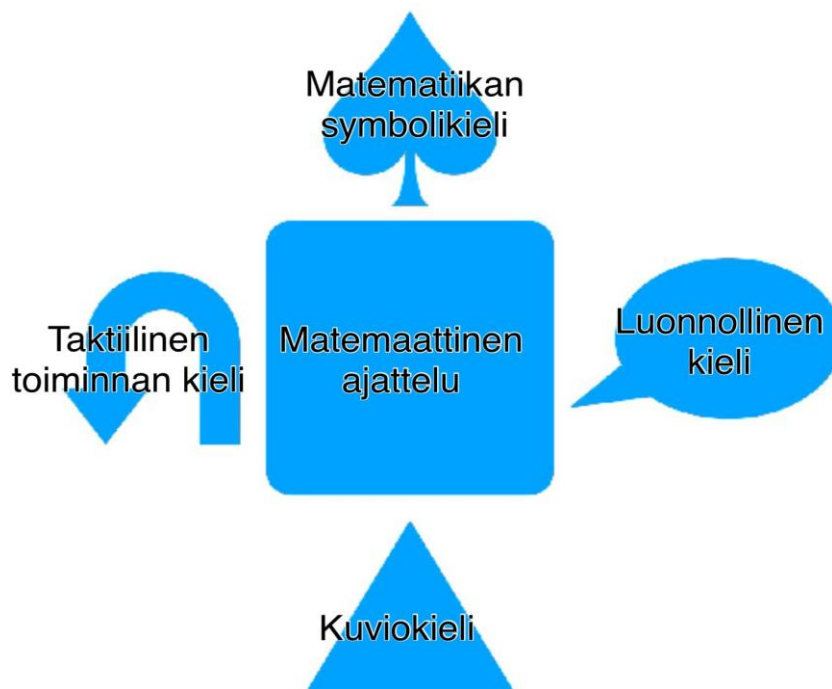
Kielentäminen ei ole pelkkää puhetta, vaan se on myös kommunikaatiota. Silloin on mahdollista ilmaista omaa ajatteluaan muille. (Joutsenlahti 2015, 58.) Vygotsky (1982, 19–20) on viitannut kielellä kommunikaatioon, sosiaaliseen kanssakäymiseen. Kommunikaatio on tärkeää kaikessa kanssakäymisessä. Kun oppilas selittää omaa ratkaisuaan matematiikan tehtävästä muille, hänen on pakko kommunikoida jollain tavalla muiden kanssa.

Kiinnittämällä huomiota siihen, kuinka perustellaan, argumentoidaan, todistetaan, vertaillaan matemaattisia kohteita ja niiden välisiä suhteita, voidaan kehittyä myös vuorovaikutustaidoissa. Näin on huomionnut myös Planas ym. (2018, 198–199). Kommunikoinnilla luokkahuoneessa ja muissa yhteyksissä on suuri vaikutus ja kommunikointi voi auttaa ymmärtämään matematiikkaa. Kommunikointi mainitaan myös matematiikan perusopetuksen opetussuunnitelmassa (POPS 2014, 128.) “Matematiikan opetus kehittää myös vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja.”

Jotkut opettajat käyttävät ”puhutaan matematiikkaa” -termiä tai lausahdusta. Matematiikan tunnilla ei tarvitse olla täysi hiljaisuus, mutta puhuessa täytyy pysyä asiassa. Planas ym. (2018, 203) huomasivat tutkimuksessaan, että opetuskieltä ei voi erottaa matematiikasta. Se on kommunikoinnin tärkeä osa ja kommunikointi on tärkeä osa oppimisprosessia. Matematiikasta puhuminen on matematiikan tekemistä, ajattelun, ymmärtämisen ja tiedon rakentamista. Lapsen tulee kääntää matematiikka omalle äidinkielelleen ja kielentää, kertoa, selittää, piirtää, kirjoittaa, näyttää välinein mitä tämä matematiikka tarkoittaa ja kuinka hän on sen ajatellut.

4.3. MATEMAATTINEN AJATTELU JA KIELENTÄMISEN KIELI

Joutsenlahti ja Rättyä (2015, 52) ovat koonneet matemaattisen ajattelun esilletuomisen ja ilmaisemisen neljällä eri tavalla, jotka muodostavat matematiikan kielen. (ks. Kuvio 1.) He ovat piirtäneet hyvin yksinkertaisen ja asiat selkeästi esille tuovan kuvan matematiikan kielen ja kielentämisen eri muodoista. Matemaattinen ajattelu koostuu luonnollisesta kielestä, kuviokielestä, matematiikan symbolikielestä sekä toiminnallisesta taktiilisesta kielestä.



KUVIO 1. Matematiikan kielentämisen neljä osa-aluetta. Mukailten Joutsenlahtea ja Rättyää (2015, 52)

Luonnollinen kieli on puhumamme kieli. Usein se on äidinkieli. Voimme käyttää sitä suullisesti tai kirjallisesti ilmaistessa. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, 415) kirjoittavat, että luonnollinen kieli on erittäin tehokas, kun ilmaistaan esimerkiksi määrien ominaisuuksia. Samoin määrittelevät Joutsenlahti ja Rättyä (2015, 52) Luonnollinen kieli voi olla sisäistä puhetta, puhutaan itselle usein mielessä, kuinka jokin asia menisi. Se voi olla ääneen puhuttua kieltä jollekin toiselle, niin sanotusti ulkopuoliselle. Kolmantena se voi olla kirjoitettua, jolloin se on ilmaistu mahdollisimman tarkasti ja täydellisesti paperilla tai näytöllä. Se ei välttämättä aina ole sanallista, vaan se voi sisältää muutakin, esimerkiksi kuvia. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 416; Joutsenlahti & Rättyä 2015, 47, 52.)

Kuviokieli taas on numeroiden ja määrien hahmottamista kuvioiden avulla. Se on eri äidinkieliä puhuville sama. Siinä tarkastellaan lukumäärää visuaalisuuden kautta. Lukumäärät ovat tarkoin esitetty, esimerkiksi kuvissa. Jokainen voi esimerkiksi piirtää saman määrän ympyröitä paperille ja he tarkoittavat sillä samaa. Kuviokielen avulla voi tehokkaasti ilmaista myös käsitteiden välisiä yhteyksiä. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 415; Joutsenlahti & Rättyä 2015, 52.)

Taktiilinen eli käsin kosketeltava kieli on välinein tehtävää ja konkreettista. Siinä käytetään voimakkaasti paineaistia ja kinesteettistä aistia. Taktiilinen toiminnan kieli käyttää välineitä apuna. Erilaiset käsin kosketeltavat välineet, kuten kymmenjärjestelmävälineet, saattavat helpottaa asioiden hahmottamista, kun niitä pääsee koskettamaan ja konkreettisesti siirtämään. Erityisesti taktiillisella kielellä pystytään havainnollistamaan ja tarkentamaan jotain asiaa sanojen apuna. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 415; Joutsenlahti & Rättyä 2015, 52.)

Matematiikan symbolikieli on kaikille aikuisille tuttu. Se on universaali. Se sisältää kaikki matemaattiset merkit, kuten numerot. Symbolikieli on kehittynyt matemaattisen symbolijärjestelmän yksiköiksi. Se on merkkejä, joilla on tietyt normistot. Niiden avulla pystytään ilmaisemaan abstraktejakin käsitteitä lyhyesti ja yksiselitteisesti. Arjessa puhumme muun muassa numeroista ja laskumerkeistä. Symbolikieli on toimivaa esimerkiksi määrien muutoksia ilmaistessa. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 414, 415; Joutsenlahti & Rättyä 2015, 52.)

Pääsääntöisesti matematiikkaa kielennettäessä selitetään omia ratkaisuja kirjallisesti tai suullisesti (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 410). Tällaista opetusta pitäisi olla paljon, jotta opettajat pystyisivät oikeasti tietämään mitä oppilas osaa. Eli kuinka hän on jonkin asian ratkaissut ja onko hän oppinut kaikki tarvittavat asiat oikeassa järjestyksessä ja voiko hän siirtyä jo astetta haastavampiin asioihin? Erityisesti mitä pienemmistä oppilaista on kyse, sitä enemmän tulisi mukaan ottaa myös toiminnallinen taktiilinen kieli. Lapsi pystyy välinein selittämään omaa ajatteluaan, vaikkei hän osaisi vielä kirjoittaa. Aikuinen voi seurata ratkaisun saamista välineitä seuraamalla. Toisaalta hän voi myös ohjata, mikäli välineet eivät liikukaan ratkaisun kannalta oikein.

Lapset ovat erilaisia, joten on tärkeä antaa aikaa saada vastaus tai ratkaisuehdotus. On monia eri mahdollisuuksia kertoa, kuinka hän pääsi omaan vastaukseensa. Jotta jokainen pääsee näyttämään onnistumisensa, on tärkeää huomioida jokainen yksilöllisesti ja antaa tarpeeksi aikaa. Nopeimmat voivat ratkaista tehtävän useallakin eri tavalla. Tarvitaan monenlaisia eri keinoja, joilla voidaan tuoda esille omaa ajattelua. Toiselle sopii kirjoittaminen ja piirtäminen, toinen taas valitsee mieluummin konkreettisia välineitä. Kolmas haluaa kertoa ratkaisunsa suullisesti. Moni käyttää useita keinoja selittäessään koko ratkaisunsa (Joutsenlahti & Kulju 2015, 72.)

4.4. KIELENNETÄÄN MATEMATIIKAN TEHTÄVÄÄ

Joutsenlahti ja Kulju (2015) ovat huomanneet, että Brunerin narratiivinen ja loogistieteelliset ajattelumuodot (ks. Kuvio 2) sopivat erittäin hyvin matematiikan kielentämiseen. Matematiikka on loogista ajattelua vaativaa sekä tieteellisesti todistettua. Narratiivisuuden kautta on mahdollista sijoittaa opiskeltava ajaton asia lähemmäksi oppilaan maailmaa ja se on mahdollista oppia omakohtaisesti. Tällöin oppiminen vahvistuu kontekstisensitiivisuuden kautta. Tällä tavoin abstraktille matematiikalle saadaan enemmän kiinnityspintaa oppilaiden elämään ja oppimiseen. (Joutsenlahti & Kulju 2015, 72-73.)



KUVIO 2. Brunerin kolme ajattelun muotoa. Mukailten Yrjönsuurta (2007, 65)

Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, 410) puhuvat multisemioottisesta lähestymistavasta, jolloin erityisesti jo aiemmin mainitut matematiikan kielen osa-alueet ovat keskiössä: luonnollinen kieli, kuviokieli, matematiikan symbolikieli ja taktiilinen toiminnan kieli. Näillä pyritään auttamaan matemaattisten termien ja käsitteiden oppimista, kun ne pystytään yhdistämään lähemmin arkeen ja luomaan niille merkityksiä.

Oman ajattelun jäsentäminen on suuri osa matematiikan kielentämistä. Kun oppilas kertoo toiselle, miten hän on ratkaissut tehtävän, hän joutuu ensin jäsentämään asian itselleen ja vielä sen jälkeen kertomaan tunnettuja sanoja ja termejä käyttäen asian toisille. Näin oppilas jäsentää omaa ajatteluaan ja omaksuu matemaattisia käsitteitä syvällisemmin. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 417, 428.)

4.5. POSITIIVISET VAIKUTUKSET

Kielentäminen matematiikassa tukee monia taitoja. Sillä on monia positiivisia vaikutuksia muun muassa oppimisessa ja opettamisessa. Nykyisessä

opetussuunnitelmassa (POPS 2014, 128) mainitaan matematiikan opetuksen kohdalla oppiaineen tehtävä seuraavasti.

Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. - Konkretia ja toiminnallisuus ovat keskeinen osa matematiikan opetusta ja opiskelua. - Se kehittää myös viestintä-, vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja. - Opetus kehittää oppilaiden kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti.

Vuosiluokkien 1–2 matematiikan opetuksessa oppilaille tarjotaan monipuolisia kokemuksia matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostumisen perustaksi. Opetuksessa hyödynnetään eri aisteja. Opetus kehittää oppilaiden kykyä ilmaista matemaattista ajatteluaan konkreettisin välinein, suullisesti, kirjallisesti ja piirtäen sekä tulkiten kuvia. (Pops 2014, 128.)

Lisäksi nykyisen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa korostuvat laaja-alaiset tavoitteet, joista ensimmäinen on ajattelu ja oppimaan oppiminen. Ne on luotu tuomaan syvyyttä ja kokonaisvaltaisuutta opetukseen. Ensimmäinen laaja-alainen tavoite tukee erityisesti matematiikan kielentämistä opetusmuotona. Oppilaiden oma ajattelu on keskiössä.

Ajattelu ja oppimaan oppiminen (L1)

Työskentelyn lähtökohtana ovat oppilaiden omat kokemukset, havainnot ja kysymykset. Ihmettelylle, oivaltamiselle, uuden löytämiselle ja keksimiselle, mielikuvitukselle sekä oppimisen ilolle on tilaa. Oppilaita kannustetaan kysymään ja kuuntelemaan, tekemään tarkkoja havaintoja, etsimään tietoa sekä tuottamaan ja kehittelemään yhdessä ideoita ja esittämään työnsä tuloksia. Ikäkaudelle sopivien ongelmanratkaisu- ja tutkimustehtävien avulla viritetään uteliaisuutta ja kiinnostusta ympäröivän maailman ilmiöitä kohtaan sekä vahvistetaan taitoa jäsentää, nimetä ja kuvailla ympäristöä. Oppilaita rohkaistaan myös kyseenalaistamaan havaitsemiaan asioita ja huomaamaan, että tieto voi olla joskus ristiriitaista ja epäselvää. - Monipuolinen liikkuminen ja motoriset harjoitukset tukevat ajattelun kehittymistä ja oppimista. Muistin, mielikuvituksen sekä eettisen ja esteettisen ajattelun kehittymistä tuetaan satujen ja tarinoiden, pelien, lorujen, laulujen ja leikkien, taiteen eri muotojen sekä monipuolisen vuorovaikutuksen avulla. (Pops 2014, 99.)

Nämä perusteet ohjaavat opettajan työtä. Näissä edellä mainituissa kohdissa on kielentämisen elementtejä. Siksi kielentäminen on mainio työkalu matematiikan opetuksessa. Tällöin opettaja toteuttaa huomaamattaan opetussuunnitelmaa.

Tulevaisuuden taitoja

Kommunikointi ja omien ajatusten esille tuominen ovat tulevaisuuden työmarkkinoiden tärkeimpiä taitoja. Erityisesti tiimityöskentelyn lisääntyessä on tärkeää osata ilmaista ajatuksensa muille ymmärrettävästi (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 417). Kun tätä harjoitellaan jo alakoulussa, se on helpompaa tulevaisuudessa. Opetuksen tulisi tarjota oppilaille tulevaisuuden taitoja. Mitä nuorempana tiettyjä taitoja harjoitellaan, sitä luontevammilta ne tuntuvat tulevaisuudessa.

Pehkonen on nähnyt opetusmenetelmällisesti tärkeimmäksi muutokseksi keskustelun ja kommunikoinnin lisääntymisen erityisesti matematiikan tunneilla. Hänen mielestään luokassa olisi keskusteltava paljon oppilaiden ratkaisuksista. Tämä voisi tapahtua hyvinkin spontaanisti, eikä siihen välttämättä tarvitsisi opettajan tai aikuisen ohjausta. Aikuinen voisi alkuun olla niin sanottu puheenjohtaja, mutta oppilaat itse voisivat keskustelua. Kun tällainen toimintamalli olisi oppilaille tuttu, yksi heistä voisi toimia puheenjohtajana. Oppilaat keskustelisivat ja kommunikoisivat keskenään matematiikan tehtävien ratkaisuksista, jolloin painotus olisi aktiivisessa oppimisessa. (Pehkonen 1994, 61)

Matemaattinen ajattelu kehittyy vertaisryhmässä. Pehkonen (1994, 61) ehdottama keskusteleva tehtävien läpikäyntityyli on juuri sitä. Ryhmän jäsenten refleктоivan vuorovaikutuksen seurauksena myös omat ajatukset saavat vahvistusta tai uuden suunnan. Kielennettäessä tulee väistämättä kommunikoitua toisten kanssa. (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 53.)

Formatiivinen arviointi

Arviointi on puhuttanut paljon nykyisessä opetussuunnitelmassa. Kuinka toteuttaa jatkuvaa arviointia? Jatkovaa arviointia, formatiivista arviointia, tulisi olla jokaisella oppitunnilla. Se on koko ajan ja jatkuvasti tapahtuvaa. Kielentäminen helpottaa tätä haastavaa työtä, sillä silloin opettajalla on todella mahdollisuus kuulla ja nähdä, mitä oppilas osaa. Oppilas itse kertoo mitä mikäkin käsite tarkoittaa ja kuinka on tehtävän ratkaissut. Tällöin opettaja tietää hyvinkin helposti onko oppilas ymmärtänyt asian vai onko kenties hajulla tai aivan hakoteillä. Opettajan oppilaan tuntemus paranee ja työn suunnittelu on helpompaa, myös eriyttämisen näkökulmasta. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 417, 424)

Opettaja arvioi oppilaitaan koko ajan. Kun hän huomaa jotain haastetta, hän tarttuu siihen ja lähtee selvittämään, mistä se mahdollisesti johtuu. Tässä vaiheessa hän keskustelee paljon oppilaan kanssa. Kinnunen (2003, 47) on antanut viisi ohjetta opettajalle matemaattiseen oppimishaasteeseen törmätessä. Viidennessä ohjeessa kehoitetaan lisäämään yhteistä pohdintaa ja ajattelun näkyväksi tekemistä, eli kielentämistä. Opettajan tulee myös antaa oppilaalle lisää mahdollisuuksia selittää ja kertoa omia ajatuksiaan ja näkemyksiään sekä kysyä kysymyksiä. Lisäksi opettajaa kehoitetaan käyttämään mahdollisimman monipuolisia keinoja, esimerkiksi konkreettisia välineitä.

Yrjönsuuri (2007, 63) puhuu evaluointitaidosta. Se tarkoittaa oppilaiden opiskelun ja oppimisen arvioimista. Erityisesti arviointi pohjautuu osaamisen keinojen valintaan erilaisten ja sopivia tehtäviä varten. Opettajan tulisi arvioida oppilaitaan koko ajan, jotta hän pystyy suunnittelemaan seuraavat oppitunnit mahdollisimman kehittäviksi ja hyödyllisiksi. Jokainen tunti tuli olla suunniteltu kyseiselle oppilasryhmälle sen hetkisten taito- ja herkkyytasojen mukaan, mahdollisuuksien mukaan eriyttäen oppilaskohtaisesti.

Kielentämisen kautta rakentuu oppilaan, toisten oppilaiden ja opettajan välillä tieto siitä, kuinka jokin asia on tehty tai ratkaistu. Näiden merkitysten rakentaminen vahvistaa kaikille myös yhteistä läpinäkyvää arviointia. Arviointi rakentuu summatiivisen, formatiivisen, vertais- tai itsearviointin näkökulmasta. Kielentämisen avulla voidaan työskentelyä matematiikassa arvioida koko ajan. (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 51, 53.)

Arvioinnin lisäksi opettajan on erittäin hyödyllistä käyttää kielentämistä apuna suunnittelutyössään. Sitä voi käyttää monipuolisesti lyhyen - ja pitkän aikavälin suunnittelussa. On erittäin tärkeää huomioida oppilaat suunnittelussa ja siihen kielentäminen antaa erinomaiset mahdollisuudet. Oppilaiden on tärkeä tuntea, että opettaja suunnittelee opettamisen heitä varten ja heidän tulevaisuudentaitojaan kartuttaen. (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 53)

Motivaatio, omakohtaisuus, autenttisuus arkeen

Koulun alkaessa lapsilla on pääsääntöisesti positiivinen kuva omista taidoistaan, suoriutumisestaan ja oppimisestaan. He ovat niin sanotusti hyviä kaikessa ja osaavat paljon. Keskeisessä asemassa kaikessa oppimisessa ja elämässä ovat lapsen ominaisuudet, kuten kognitiiviset - ja sosiaaliset taidot, omat käsityksensä itsestään oppijana sekä motivaatio. Kuitenkin 5-7 vuotiaalla alkaa kehittyä kyky verrata omia suorituksiaan muiden suorituksiin. Tällöin lapsen luottamus omiin taitoihin saattaa muuttua. Tämä on erittäin herkkää aikaa, jotta koulupolku lähtee oikeille urille. (Nurmi, Ahonen, Lyytinen, Lyytinen, Pulkkinen & Ruoppila 2014, 98, 103.)

Usein arkikielessä motivaatio tarkoittaa lapselle tai aikuiselle ominaista tapaa tai piirrettä, joka vaikuttaa oppimiseen. Se voidaan mieltää jopa pysyväksi ominaisuudeksi. Virallisemmin puhutaan oppimismotivaatiosta, joka on paljon moninaisempi, mutta vaikuttaa myös oppimiseen. Oppimistapoja on yhtä monta erilaista kuin on oppilaitakin. Samoin motivaatiota ja sen kehittymistä muokkaavat useat eri tekijät. Esimerkiksi lapsen omat ajatukset, käsitykset, uskomukset ja ennakoinnit omasta onnistumisesta tai epäonnistumisesta vaikuttavat motivaatioon. Tämä kaikki vaikuttaa siihen, kuinka lapsi toimii, työskentelee, innostuu ja suoriutuu uusissa oppimistilanteissa. Sen hetkiset tai aikaisemmat kokemukset voivat synnyttää halun oppia lisää, tuhota sen kokonaan tai jotain siltä väliltä. (Nurmi ym. 2014, 103.). Motivaatio tulee yleensä ilmi henkilökohtaisista mieltymyksistä, erilaisista valinnoista selittää asioita, emotionaalisista tunteista ja reaktioista sekä vireystilasta (Viitala 2018, 18).

Yrjönsuuri (2007, 151) kirjoittaa lapsen motivaatiosta opiskella matematiikkaa. Paras motivaatio syntyy, kun se on sisäinen. Lapsi itse haluaa oppia ja on kiinnostunut. Opettajan tulisi antaa tähän mahdollisuus. Matematiikan oppimisessa liian alhainen kompleksisuus ei synnytä sisäistä innostusta ja myös liika haastavuus voi johtaa turhautumiseen ja opiskelunnon lopahtamiseen. Sopivilla tehtävillä ruokitaan lapsen kiinnostusta, jolloin lapsen oma sisäinen halu oppia syttyy ja kasvaa. Sisäisen motivaation kautta syvälliselle oppimiselle on parhaat edellytykset. (Mattinen, Hannula, Lehtinen 2006, 6.)

Myönteiset kokemukset omasta oppimisesta ovat keskeisiä uuden opiskelussa. Ne lisäävät motivaatiota. Uudet kokemukset kehittävät toimintaa ja sen lähtökohtia uuden oppimiselle ja erityisesti onnistumiset kannustavat eteenpäin. Epäonnistumiset taas muuttavat käsityksiä omista mahdollisuuksista kielteisiksi. Myönteisen motivaation

säilyttämiseksi on ensiarvoisen tärkeää virittää opetus lapsen lähikehityksen vyöhykkeelle. Myönteiset kokemukset lisäävät sisäistä motivaatiota ja halu oppia uutta lisääntyy eikä ulkoiseen hyväksymiseen sidottu pakonomainen suoriutumisen tarve kasva suuremmaksi. (Yrjönsuuri 2007, 21; Nurmi ym. 2014, 103.)

Lasten minäkuvan kehittäminen ja sisäisen motivaation kasvattaminen lisää lasten kiinnostusta opeteltavia asioita kohtaan. Motivaatio oppia matematiikkaa ja luottamus koulumatematiikassa vaikuttavat matemaattisen ajattelun kehittymiseen (Viitala 2018, 26). Jotta kaikilla oppilailla olisi positiivinen minäkuva ja hyvä oppimismotivaatio, tarvitsemme siihen mukaan kaikki lapsen elämässä mukana olevat aikuiset. Opettajan ja lapsen välinen vuorovaikutus muokkaa lapsen motivaatiota. Sekä luokan ja koko koulun ilmapiiri vaikuttavat siihen, mitä motivaatiolle tapahtuu kouluvuosien kuluessa. Kehittykö se positiiviseksi sisäiseksi motivaatioksi vai katoaako koulunkäynnistä kokonaan ilo ja into. (Nurmi ym. 2014, 99, 104.)

Monien tutkimusten mukaan auktoritatiivinen kasvatustyyli vaikuttaa hyvään motivoitumiseen ja selviytymiseen koulussa. Se tarkoittaa ohjaavaa, avointa ja dialogista kasvatusotetta, jolloin aikuiset ovat vastavuoroisessa suhteessa lapsen kanssa. Lapselle tulee antaa aikaa pohtia. Utelias lapsi kartuttaa tietojaan kyselemällä, tarkkailemalla, tutkimalla, kokeilemalla. Tällainen suuntautuminen on tehokkaan ja syvällisen tiedon muokkaamisen ja myös älyllisen kehityksen edellytys. Lapsi, joka oppii osaa keskittyä ja toimii tehtäväsuuntautuneesti. (Nurmi ym. 2014, 98; Yrjönsuuri 2007, 24)

Kun oppilaat keksivät itse lausekkeeseen sanallisen tehtävän, se on yleensä heidän omasta kokemuspöörästään. Tällöin koulun tarjoama matematiikka tulee lähemmäksi heidän arkeaan ja motivoi. Omakohtaisuus syventää ymmärrystä. Lasku saattaa jäädä paremmin mieleen ja asiakokonaisuuden tieto syvenee, kun sitä on pystynyt pohtimaan lähempänä omaa käsitysmaailmaa. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 425.) Pohtiminen on sisäistä toimintaa, jossa yksilö vertaa saamiaan kokemuksia aikaisempiin kokemuksiinsa ja pyrkii näin luomaan kohtaamastaan ilmiöstä käsityksen. Hän pystyy yhdistämään tehtäviä arkeen aiempien kokemusten pohjalta. Kokemukset ja niiden reflektointi positiivisen kautta saavat aikaan uuden oppimisen. (Yrjönsuuri 2007, 25, 26.) Matematiikassa pystytään hyvin hakemaan tehtäviin autenttisuutta oppilaiden omasta kokemusmaailmasta, esimerkiksi negatiiviset luvut voidaan yhdistää lämpömittarin pakkaslukemiin tai keskiarvoa voidaan laskea luokkatoverien pituuksista,

sekä taulukoida oppilaiden lempiruokia, ja esittää tulokset diagrammeina. (Pehkonen & Rossi 2018, 30; Mutanen 2018, 125.)

5. ALKUOPETUSIKÄINEN LAPSI

Alkuopetusikäinen lapsi on koulutaipaleensa aloittanut lapsi. Alkuopetus käsittää Suomessa ensimmäisen ja toisen vuosiluokan. Usein tähän vaiheeseen lisätään myös esiopetus. Puhutaankin usein esi- ja alkuopetuksesta. Lapset aloittavat esiopetuksen sinä vuonna, kun he täyttävät kuusi ja koulun ensimmäisen luokan sinä vuonna, kun he täyttävät seitsemän. (POPS 2014, 14, 98)

5.1 KEHITYSVAIHE YLEENSÄ

Aikuiset muokkaavat elinympäristön lapsilleen ja myös ohjaavat lapsen käyttäytymistä omilla toimillaan ja käyttäytymisellään. Vanhempien on siis tärkeä tiedostaa, kuinka lasten kehitys etenee. Mitkä tekijät mahdollisesti edistävät ja mitkä taas hidastavat suotavaa kehitystä? Kuinka kehitykselle luodaan parhaat mahdolliset edellytykset? Tämä kaikki tapahtuu lapsen kanssa vuorovaikutuksessa. Eli myös lapsen ominaispiirteet ohjaavat aikuisten käyttäytymistä. (Nurmi ym. 2014, 22–23.)

Lapsuus on voimakkaan kasvamisen, kehittymisen ja oppimisen aikaa. Se alkaa noin kahden vuoden iässä ja jatkuu aina kahteentoista ikävuoteen asti, välillä vieläkin myöhempään. (Nurmi ym. 2014, 23). Piaget (1988, 23–24, 104–105) jakaa lapsuuden, noin 2-12 vuotta, kahteen osaan: intuitiivisen älykkyyden kausi (2-6 vuotiaat) ja konkreettisten operaatioiden kausi (7-12-vuotiaat). Ennen lapsuutta on vauvaikä ja lapsuuden jälkeen nuoruus. Siirtymät eivät ole jyrkkiä, vaan liukuvia, esimerkiksi konkreettisten operaatioiden vaihe voi alkaa jo kuuden ikävuoden pintaan ja voi hyvinkin kestää yläkouluikään asti. Esi- ja alkuopetusikäinen lapsi elää esioperationaalista vaihetta. Koulun alettua, noin seitsemän vuoden iässä lapsi siirtyy vaiheittain operationaalisen vaiheen rakentumiseen (ks. Taulukko 2.).

Esioperationaalinen kehityksen vaihe voidaan jakaa kahteen osaan. Noin 2-4 vuotias lapsi siirtyy esittävän ajattelun vaiheeseen. Tämän vaiheen lopussa tulee intuitiivisen ajattelun vaihe, noin 4-7-vuotiailla lapsilla. Tällöin lapsella on vielä oma näkökulmansa ja hän on siihen sitoutunut. Hän luokittelee ympäristöstään vähän kaikkea, mutta pystyy luokittelemaan vain yhdellä ominaisuudella kerrallaan. Lapsen päättelyä ohjaa vielä välitön havainto tilanteesta. Aikaan sidottu tapahtuma, kuten esimerkiksi esteen säilyvyyden ymmärtäminen on vielä vaikeaa, jopa mahdotonta. 5-7-

vuotiaat lapset alkavat hallita jäsentyneet representatiiviset eli esittävät säätelyt. He pystyvät jo luokittelemaan asioita ja tapahtumia laajemmin ja monipuolisemmin. Heille on muodostunut järjestyssuhteiden käsitys ja jäsentyminen. (Piaget 1988, 106.) Vasta seitsemän vuoden iässä lapset pystyvät tekemään kahta erilaista tietoa yhdistelemällä oikean ja loogisen johtopäätöksen (Nurmi ym. 2014, 90).

TAULUKKO 2. Lapsen kehitysvaiheet. Mukailten Piaget'n (1988) ja Nurmen ym. (2014) pohjalta

		refleksivaihe ja organisoitujen havaintojen vaihe	
1	vauvaikä	sensomotorinen älykkyyden vaihe	
2		intuitiivisen älykkyyden kausi	esioperatiivinen vaihe: esittävä ajattelu
3	esioperatiivinen vaihe: intuitiivinen ajattelu		
4			
5			
6	lapsuus		konkreettisten operaatioiden kausi
7			
8			
9		operatiivinen vaihe	
10			
11			
12	nuoruus	abstraktien operaatioiden kausi	
13			

Lapsen tiedonkäsittelytaidot kehittyvät päivittäin. Erityisesti leikit ja ongelmanratkaisutilanteet kehittävät taitoja. Näissä tilanteissa lapsella on mahdollisuus sekä harjoittaa taitojaan että oppia uutta. Jotta kehitys olisi tehokasta ja jatkuvaa, tulee toiminnan olla säännöllistä, pitkäkestoista ja muuttua ajan kuluessa monimutkaisemmaksi. (Nurmi ym. 2014, 25.) Rakenteluleikit ovat erittäin hyviä kehittämään juuri näitä taitoja, erityisesti 3-7 vuoden iässä, jolloin kolmiulotteisuuden käsite alkaa hahmottua voimakkaammin. Rakenteluleikit kehittävät tilan ja suhteiden ymmärtämistä, luovuutta ja kekseliäisyyttä sekä materiaalien tuntemusta. Yhdessä rakennettaessa lapset joutuvat neuvottelemaan, kuinka toimitaan. Erityisesti näitä tilanteita syntyy leikeissä, joissa syntyy ristiriitoja. Silloin lapsen täytyy tehdä töitä ongelmanratkaisun eteen, jolloin aikuinen voi olla tarvittaessa tukemassa oikeaan suuntaan. Fyysisyys on aina lapsen leikissä mukana, iästä riippumatta. (Nurmi ym. 2014, 67, 69.)

Piaget (1988, 23-24) on määritellyt keskilapsuuden alkavan noin 6-7 vuoden iässä. Se kestää lapsesta riippuen noin 12-vuoden ikään asti. Tätä hän on kutsunut osittain konkreettisten operaatioiden kaudeksi. Toisin sanoen loogisen ajattelun alkuvaiheeksi, jolloin lapselle syntyvät moraaliset ja sosiaaliset tunteet. Tällöin myös ihmisten välinen yhteistoiminta vakiintuu. Lapsen oma ajattelu kehittyy monipuolisemmaksi ja toisia huomioonottavammaksi.

Seitsemän ikävuoden molemmin puolin tapahtuu muutoksia aivotoiminnassa. Niiden ajatellaan olevan yhteydessä kognitiivisten kykyjen kehittymiseen. Silloin erityisesti ajattelun ja toiminnanohjauksen alueilla tapahtuu kehitystä. Tätä kutsutaan myelisoitumiseksi. Tiedonkulku hermosoluissa nopeutuu. Lapsen kokemukset ja toiminta muokkaavat myelisoitumista ja sitä kautta aivoja. Aivotoiminnan muutos ei ole voimakkaasti sidoksissa ikään vaan on ennemmin kiinni ajattelun muuttumisesta. Ensimmäisellä luokalla oleva lapsi voi olla kaikkea 4-10-vuotiaan välillä riippuen kehitysvaiheestaan. (Nurmi ym. 2014, 80–82.) Nurmi ym. (2014, 96) on huomionnut, että kaikki oppiminen tapahtuu lähikehityksen vyöhykkeellä. Opittavan asian tulee olla ajankohtainen ja sopivan haastava. Alkuun lapsi tarvitsee hieman apua, jotta onnistuu, mutta ajan kuluessa lapsi pystyy onnistumaan jo ilman apua. Kaiken opetuksen tulisi olla hieman kehitystä edellä, mutta ei liikaa, jotta lapsi voi omaksua uuden opin. (Vygotsky 1982, 185–186.)

5.2 KEHITYSVAIHEET MATEMATIIKASSA

Koulun alkaessa lapsella on jo tiettyjä matemaattisia taitoja, esimerkiksi lukusanat ja niiden järjestys tuli osata. Lapsen tulisi pystyä tekemään eroja lukumäärien välillä ja hänen tulisi osata lisätä ja vähentää yksi mielessä, lukusanoilla ja esineillä. Hänen tulisi osata hahmottaa yksi yhteen -vastaavuus, erityisesti tehtävissä, joissa jaetaan esineitä. Samoin hänen tulisi osata vertailla termeillä: yksi - monta. Esineiden lukumäärä tulisi osata laskea, kun niitä on vähän tai sopivasti. Lapsen tulisi tunnistaa arabialaiset numeromerkit sekä luetella numerot neljäänkymmeneen asti. Lukumäärän säilyvyys tulisi myös ymmärtää koulun alkaessa. (Nurmi ym. 2014, 108, 111; Hannula-Sormunen, Mattinen, Räsänen & Ruusuvirta. 2018, 156, 167.)

Matemaattinen kehittyminen, kuten numeroiden oppiminen ja erilaiset laskutaidot, tapahtuu perusprosessien kehityksen kautta. Perusprosesseja ovat muun muassa työmuisti, tilan havaitseminen, kognitiot ja kielelliset taidot. Näiden kehityksen myötä myös ensimmäiset matemaattiset taidot kehittyvät ja vahvistuvat. Toisaalta nämä perusprosessit kehittyvät yleensä muun kehityksen ja iän myötä ja niihin ei voi juurikaan vaikuttaa. Opeteltavat taidot, kuten neliöjuuri ja negatiiviset luvut, opitaan yleensä muiden opettamina. Näitä taitoja voidaan kutsua sekundaarisiksi taidoiksi. Sekundaarinen taito tarkoittaa, että se edellyttää harjoittelua, oppimista ja organisoitua kulttuurin välittymistä. Lapsen oma ajattelu ja aktiivisuus ovat suuressa roolissa oppimisessa. (Nurmi ym. 2014, 108–109; Lepola & Hannula 2006, 20-25.)

Konkreettisten operaatioiden kehitysvaiheessa, jolloin voidaan puhua lapsen olevan noin 6-12 iässä, eli keskilapsuudessa, keskeisessä asemassa ovat uudet ajattelun taidot. Ajattelu kehittyy nopeasti ja uusia hermoratoja muodostuu. Nämä taidot ovat voimakkaasti yhteydessä matematiikan ajattelun kehittymiseen. Näitä taitoja ovat esimerkiksi edellä mainittu säilyvyyden käsitteen kehittyminen ja transitiivisuus eli tiettyjen suhteiden ominaisuudet. (Nurmi ym. 2014, 108.)

Alkuopetusikäinen lapsi on suunnilleen seuraavanlaisessa vaiheessa matematiikan taitojen ja tietojen osalta: Hän osaa lukujonotaidot eli lapsi osaa luetella lukusanat oikein 40:en saakka, hän ymmärtää lukumäärän säilyvyyden sekä yhteenlaskun ja vähennyslaskun olevan komplementaarisia eli toisiaan täydentäviä, hän osaa palauttaa joitakin aritmeettisia faktoja muistista laskematta niitä (esimerkiksi $1+3$ on yhtä suuri kuin 4) ja ymmärtää lukusuoran. Esimerkiksi yli puolet 8-vuotiaista osaa

vastata oikein myös kysymykseen, kuinka monta numeroa on kolmen ja yhdeksän välillä (Nurmi ym. 2014, 111.)

Aunola ja Nurmi (2018, 59) ovat muun muassa tutkineet lukujonotaitojen hallintaa matematiikan kokonaiskuvaan liittyen. He ovat huomanneet, että juuri lukujonotaitojen hallinta viestii matematiikan informaation automatisoitunutta käyttöä. Tällöin tarkkaavaisuutta pystytään suuntaamaan haastaviinkin tehtäviin. Samoin he ovat huomioineet, että matemaattisten vaikeuksien tai haasteiden taustalla on useasti puutteelliset lukujonotaidot. Erityisen tärkeää olisi, että jokainen oppisi lukujonotaidot huolella. Tällöin olisi mahdollista lisätä resursseja vaativiin ongelmanratkaisutehtäviin ja erilaisten proseduurien seurantaan. Tämän tyyppinen lukujen luettelu taito on tärkeää erityisesti lukuja mieleen palautettaessa. Lisäksi se vaikuttaa myös laajasti kaiken matemaattisen tiedon mieleen palauttamiseen. Automatisoituneet lukujonotaidot vahvistavat tiedon tarkkuutta mieleen palautettaessa.

Pelkillä lukujonotaidoilla ei kuitenkaan pärjää matematiikassa. Ne ovat yksi tärkeä osa matematiikan oppimista. Jotta oppii matematiikkaa ja siinä uusia asioita sekä kartuttaa taitojaan, vaaditaan lapselta myös hyvää työmuistia, tarkkaavaisuutta, prosessointinopeutta ja kokonaisvaltaisesti kielen kehitykseen liittyviä tekijöitä. (Aunola & Nurmi 2018, 60.)

5.3 KONKRETIA JA TAKTIILISUUS

Piaget'n (1988, 45–46) tutkimusten perusteella opetuksessa tulee huomioida lapsen oman aktiivisuuden korostaminen. Lapsen kehitystaso tulee ottaa huomioon kaikessa opetuksessa. Esimerkiksi keskilapsuudessa opettaminen ei voi vielä perustua abstrakteille käsitteille, sillä lapsi ei pysty niitä vielä käsittelemään. Sen sijaan opetuksen täytyy sisältää konkreettisia kiinnekohtia lapsen aiempiin kokemuksiin. Erityisen toimivaksi on huomattu lapsen omaan aktiivisuuteen liittyvät kokeilut ja toiminnallisuus.

Aktiivisuuden ja kokeilunhalun kautta lapsen ajattelu kehittyy vaiheittain. Alkuun lapsi tukeutuu konkreettisiin välineisiin ja konkretiaan. Pikkuhiljaa ajattelu kehittyy ja alakoulun lopulla moni on jo ohittanut konkreettisen operaation ja ajattelemisen vaiheen. (Piaget 1988, 52.)

Konkreettisen operaation vaihe lasketaan olevan lapsilla noin 7-10 vuoden iässä. Tässä kasvun ja kehityksen vaiheessa lapsi alkaa ymmärtää esineiden ominaisuuksia. Niiden koko, tilavuus, pituus, paino, ala, määrä, massa, lukumäärä ja moni muu ominaisuus alkaa kiinnostaa ja merkitä lapsille enemmän. Lapsi ymmärtää näiden ominaisuuksien pysyvän samoina, vaikka jokin ulkoinen piirre, esimerkiksi väri, muuttuisi. Lapsen ongelmanratkaisutaidot kehittyvät. Hän ymmärtää, että ongelman vastauksia saattaa olla useampia. Luokittelut, sarjoitukset, yksi yhteen -vastaavuudet, kokonaislukujen ja murtolukujen ryhmät vahvistuvat. Oppilas kehittyy matemaattisissa taidoissa. (Nurmi ym. 2014, 89; Piaget 1988, 106–107.)

Konkreettisten operaatioiden vaiheessa lapsi ei tukeudu enää pelkkään näköhavaintoon, vaan hän ymmärtää konkreettisissa tilanteissa, että kaikki ei ole välttämättä sitä miltä näyttää. Erityisesti kolmiulotteisuuden havaitseminen kehittyy nopeasti. Lapsia alkaa kiinnostaa luokittelu enemmän. He pystyvät jo tekemään myös alaluokkia ryhmittämilleen kokonaisuuksille. (Nurmi ym. 2014, 89–90.) Konkreettisten operaatioiden vaiheessa, erityisesti esi- ja alkuopetuksessa, kuten Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, 422) ilmaisevat, on tärkeää tutkia muutoksia, jotka liittyvät lukumääriin. Lasten tulisi päästä tutkimaan alku- ja lopputilanteita. Näitä tilanteita tarkkoihin lukumääriin liittyen voidaan harjoitella esimerkiksi erilaisilla konkreettisilla muutoskuvilla. Niihin voi olla piirretty selkeästi alku- ja lopputilanne.

Joutsenlahden (2015, 64) kielentämisen mallissa on neljä osaa, symbolinen kieli, luonnollinen kieli, kuviokieli ja neljäntenä taktiilinen toiminnan kieli. Taktiilisen toiminnan kielen kautta saadaan ikäkaudelle tärkeää konkreettisuutta ja taktiilisuutta mukaan enemmän. Maailmassa on matematiikkavälineitä yllin kyllin. Niitä tulisi hyödyntää opetuksessa, erityisesti alkuopetusikäisten kanssa, jolloin heillä on herkkyyskausi kaikessa käsin kosketeltavassa toiminnassa. Esimerkiksi kymmenjärjestelmä välineiden käyttö opetuksessa ilmentää ajattelua käsin kosketeltavana toimintana. Joutsenlahti (2015, 64) on lainannut käsityötieteestä oivan lauseen, joka sopii myös matematiikan kielentämiseen ja taktiilisuuteen erittäin hyvin: “Think through our hands”. Tämä lause summaa taktiilisen tiedon lähtökohdat ja merkityksen.

Konkreettisuus saadaan helposti mukaan matematiikan oppitunneilla, kun havainnollistetaan asioita. Matematiikka on hyvin abstraktia, jolloin havainnollistaminen on keskeistä opetuksessa. Erityisen tärkeää se on alkuopetuksessa

ja alakoulussa, mutta se nähdään myös erittäin hyödyllisenä myös yläluokkien puolella. Havainnollistettaessa pyritään konkretisoimaan esimerkiksi matematiikan sanallinen lasku, jotta se olisi helpompi ratkaista. Silloin konkretisoidaan tehtävä välinein tai piirtäen. Välineet voivat olla mitä vain: merkkejä, nappeja, leluja, noppia, kyniä, videoita, tai mitä milloinkin on tarjolla. Niiden avulla pyritään selkeyttämään tehtävä ja antamaan monipuolinen kuva ratkaisusta. Oppilaiden huomio voidaan kiinnittää kohdennetummin tiettyihin keskeisiin yksityiskohtiin. (Pehkonen & Rossi 2018, 26.)

Havainnointi on konkreettista työskentelyä, silloin oppilas itse pääsee tutkimaan ja käyttämään erilaisia konkreettisia välineitä. Hän pääsee tutustumaan erilaisiin välineisiin ja pystyy valitsemaan sieltä itselleen luontevimmat ja tehtävänsä soveltuvimmat. Välineiden kautta oppilaat tutustuvat erilaisiin oppisisältöihin ja heillä on mahdollisuus luoda pohjaa syvemmälle oppimiselle. Jotta oppilas pääsee luomaan oman kokemuksen havainnoinnista, on tärkeää antaa hänelle myös riittävästi konkreettisia välineitä. Oppilaat tarvitsevat konkretiaa abstraktien käsitteiden ja sisältöjen oppimisessa. (Pehkonen & Rossi 2018, 27.)

Konkreettisen välinetyöskentelyn lisäksi Taylor ja Harris (2014, 71) kehottavat viemään lapset ulos oppimaan. Heidän mukaansa alkuopetusikäinen lapsi hahmottaa matemaattisia taitojaan hyvinkin laajasti. Erityisesti ympäristön kokeminen ja tutkiminen on mitä suuremmissa määrin oman matemaattisen ajattelun laajentamista. Lasta tulee rohkaista ja kannustaa kokeilemaan erilaisia ratkaisuja. Lapsen matemaattinen ajattelukin kehittyy, kun hän pääsee kokemaan asioita monipuolisesti, perinteisen ajattelun ulkopuolelta.

Kokeilemista ja liikkumista matematiikan opetuksessa tukee myös aivojen ja keskushermoston kehittyminen. Aivokuorella toisiinsa liittyvät tunto- ja näköaistit kehittyvät eniten varhaisessa keskilapsuudessa, ennen assosiativisia alueita. Nämä ovat tietoja eri aivoalueilta yhdisteleviä alueita, jotka alkavat kehittyä keskimäärin esiopetusikäisillä. Myös hermoradat kehittyvät voimakkaasti lapsuudessa. Ne vahvistuvat liikkeessä ja liikuttaessa. Kaikki liike vahvistaa hermoratoja. Myös kaikki tieto kulkee näitä samoja hermoratoja pitkin. Monipuolisuus on tärkeää, jotta hermoradat kehittyvät mahdollisimman monisäikeisiksi ja paksuiksi. Tällöin tietokin kulkee nopeammin. Lapsella monipuolisuus liikkeessä tulee muun muassa leikin kautta. Kokonaisvaltainen monipuolisuus elämässä ja lapsen kasvussa on tärkeää, se tukee ihan kaikkea lapsen kehityksessä. (Nurmi ym. 2014, 83.)

6. TUTKIMUKSEN TARKOITUS JA TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tämän tutkimuksen tarkoitus on selvittää, kuinka matematiikkaa opetetaan, painottuen alkuopetukseen. Alkuopetusikäinen lapsi on vielä voimakkaasti konkreettisessa kasvun ja oppimisen vaiheessa, mikä edellyttäisi hyvin konkreettista opetusta ja paljon erilaisten välineiden ja materiaalien käyttöä. Nykyinen perusopetuksen opetussuunnitelma puoltaa monipuolisia opetustyyliä ja lapsen oman ajattelun kehittämistä. Matematiikassa juuri kielentäminen vastaa opetussuunnitelman antamiin tavoitteisiin. Tutkimustani ohjaavat seuraavat tutkimuskysymykset, jotka nousivat teoriasta kielentämisen muodoista ja ajatuksista:

1. Kuinka alkuopetuksessa opetetaan matematiikkaa?
2. Millaisia konkreettisia välineitä alkuopettajat käyttävät matematiikan opetuksessa?
3. Kuinka paljon kielentämistä käytetään matematiikan alkuopetuksessa?
 - a. Kielentämisen osalta selvitetään myös vaikuttavatko työkokemus, valmistumisajankohta tai yliopisto, josta on valmistunut, kielentämisen käyttämiseen opetuksessa?

7. TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

7.1 TUTKIMUSMENETELMÄT

Tutkimus on otantatutkimus eli kaikki mahdolliset alkuopettajat eivät osallistu tutkimukseen, vaan perusjoukosta otetaan otanta. Pro gradu on tutkielmaharjoitelma, joten tutkimuksen otanta ei ole 20 prosenttia kaikista Suomen alkuopettajista, vaan vähemmän. Tästä syystä tutkimuksen tuloksia ei voida yleistää koko perusjoukkoon. Tavoiteotanta oli sata alkioita, mikä on alle kaksi prosenttia kaikista alkuopetuksessa toimivista opettajista. (Heikkilä 2004, 33.)

Suunnitelmallista kyselytutkimusta, jossa aineisto kerätään kyselylomakkeella, kutsutaan survey-tutkimukseksi. Valmista täysin soveltuvaa kyselylomaketta ei löytynyt, joten oli tarve luoda uusi lomake. Lomaketta laatiessa täytyi itse rakennella mittareita sekä määritellä ja muokata kysymyksiä, jotta tutkimuslomakkeesta tulisi juuri omaan tutkimukseen sopiva. Lomakkeen laatijan tulee tutkia ja lukea riittävästi teoriaa, jotta hän pystyy muokkaamaan käyttämänsä käsitteet juuri oikeanlaisiksi mittariksi. Tässä tutkimuksessa kyselylomakkeen rakentaminen onnistui tutkimuskysymysten pohjalta. Lomake alkaa taustakysymyksillä, jonka jälkeen siirrytään tärkeimpiin kysymyksiin. (Heikkilä 2004, 19; Valli 2018a 93; Vastamäki & Valli 2018, 139)

Tutkimuksen toteuttamistavaksi valikoitui internetkysely mikä säästää aikaa, koska vastaukset ovat suoraan sähköisessä muodossa ja ne ovat helposti siirrettävissä analysointi- tai taulukko-ohjelmaan. Kyselyä pystyy myös helposti levittämään ympäri Suomen sähköpostin välityksellä. Sähköisellä lomakkeella voidaan varmistaa, että vastaaja vastaa kaikkiin vaadittaviin kysymyksiin. Tämä tapahtuu muotoilemalla kysymykset pakollisiksi, jolloin vastaaja ei pääse etenemään seuraavaan kysymykseen, ennen kuin on vastannut edelliseen. Tässä tutkimuksessa pakollisia kysymyksiä, joista pystyi valitsemaan vain yhden vastausvaihtoehdon, olivat lomakkeen (Liite 1.) kysymykset 1, 2 ja 3. (Valli 2018a, 101–102; Valli & Perkkilä 2018, 117–118, 121; Valli 2015 47–53; Heikkilä 2004, 69–70.)

Tutkimusaineiston keräämiseen oli kaksi vaihtoehtoa: sähköpostin kautta verkkokyselyn linkki tai sosiaalisessa mediassa linkki, vastatkoon ken haluaa -menteliteetilla. (Valli & Perkkilä 2018, 119–120.) Käytettäväksi keräystavaksi valikoitui vaihtoehdoista ensimmäinen eli pyrittiin saamaan vaadittava määrä (sata

vastausta) kasaan sähköpostien kautta. Tietosuoja on kyselytutkimuksessa tärkeä asia, erityisesti tämän päivän verkkomaailmassa. Tässä tutkimuksessa vastaajia ei ole mahdollista tunnistaa tai profiloida kyselyn vastausten perusteella, ei analysointivaiheessa eikä tulosten esityksissä. Nimeä, ikää tai asuinpaikkaa ei kysytä, eikä edes kuntaa, jossa työskentelee. (Heikkilä 2004, 31; Vilka 2007, 95)

Tässä tutkimuksessa analysoidaan tuloksia käyttäen prosentteja, keskiarvoja, keskihajontoja. Jotta keskiarvojen laskeminen kannattaa, tulee laskea ja mainita myös keskihajonta. Jos tulosten jakauma noudattaa normaalijakaumaa keskihajonta on pienempi kuin tilanteessa, jossa tulokset eivät ole jakautuneet normaalisti. Prosenttilukemien, keskiarvojen ja keskihajontojen lisäksi tuloksia tutkitaan ristiintaulukoinnin ja korrelaatioiden avulla, jolloin voidaan selvittää tulosten mahdollisia riippuvuuksia ja niiden tilastollisia merkitsevyyksiä. Kyselyn tulokset käsiteltiin SPSS-tilastointiohjelman avulla. (Valli 2018b, 257-260; Metsämuuronen 2009, 347, 351–355, 364–367, 508, 577, 592.)

7.2 AINEISTON HANKINTA JA ANALYYSI

Tutkimus aloitettiin määrittelemällä tutkimuksen tavoitteet ja niiden kautta tutkimusongelmat. Nämä muodostuivat tutkijan kiinnostuksenkohteiden ja taustateorioiden mukaan. Seuraavaksi määriteltiin perusjoukko, joka on tässä tutkimuksessa kaikki Suomen alkuopettajat eli ensimmäistä tai toista luokkaa opettavat opettajat. Suomessa on noin 18 000 luokanopettajaa, joista noin kolmannes, 6000, opettaa alkuopetuksessa (Suomen virallinen tilasto (SVT): Opettajat ja muu henkilökunta (verkkajulkaisu) 2003).

Tämän empiirisen tutkimuksen aineisto kerättiin sähköisellä webropol -kyselylomakkeella (ks. Liite 1.) Kyselylomake koostettiin tutkimuskysymysten perusteella. Lomakkeen tarkoituksena oli myös minimoida vastaajan ponnistelut ja vastausvirheet. Tässä kyselylomakkeessa se huomioitiin siten, että kyselyn raakaversiota testattiin luokanopettajiksi opiskelevilla ja heiltä pyydettiin kommentteja. Kyselylomake muokattiin lopulliseen muotoon näiden kommenttien perusteella. Muokkauksella pyrittiin minimoimaan virhetulkintojen mahdollisuus. (Holopainen & Pulkkinen 2006, 39.) Myös lomakkeen pituus on tärkeä asia. Pituutta tärkeämpää on kuitenkin, kuinka kauan vastaamiseen menee eli kuinka kauan vastaaja jaksaa keskittyä

vastaamiseen. Tämän tutkimuksen kyselylomake on pyritty rakentamaan vastaajaystävälliseksi lyhyeksi ja ytimekkääksi. Kyselylomake laadittiin ja aineiston keruu aloitettiin vasta, kun teoriatausta oli kirjoitettu ja tutkimuskysymykset tarkentuneet. (Valli 2018a 93-95; Valli 2015, 41–43; Heikkilä 2004, 47–48.)

Yleensä kyselylomake aloitetaan taustakysymyksillä, kuten vastaajan sukupuoli, ikä, asuinpaikka tai muu vastaava. Valli (2018a 94) mainitsee nämä kysymykset lämmittävinä kysymyksinä. Taustakysymysten avulla saadaan selitettäviä muuttujia, esimerkiksi naisten ja miesten erot. Näin myös tässä tutkimuksessa taustakysymykset aloittavat kyselylomakkeen. (Valli 2015, 43; Heikkilä 2004, 48.) Kyselylomakkeen tärkeimmän kysymyksen tulisi olla melko alussa, jotta vastaaja on vielä terävänä vastatessaan. Tämä kyselylomake on lyhyt ja siinä tärkeimmät kysymykset ovat 5, 6 ja 7. Loput kysymykset täydentävät vastauksia. Tutkimuslomakkeen kysymysten tulee mitata oikeita asioita yksiselitteisesti, jotta ne antavat vastauksia tutkimusongelmiin. (Heikkilä 2006, 29.)

Lomakkeen kysymykset voidaan luokitella kysymystyyppin tai myös sisällön mukaan. Tähän tutkimukseen on valittu täsmällisiä tosiasiatietoja mittaavia kysymyksiä, arvionvaraisia tosiasioita sekä asenteisiin ja mielipiteisiin liittyviä kysymyksiä. Tämä kyselylomake painottui Likert-asteikkoihin kysymyksiin eli kysymyksiin, joissa vastaaja valitsee itselleen parhaiten sopivan vaihtoehdon, samaa mieltä – eri mieltä asteikolta. (vrt. Heikkilä 2004, 55–56. ks. Liite 1.)

Tärkeää lomakkeen kysymyksissä on se, että kysytään yksiselitteisesti ja vain yhtä asiaa kerrallaan. Tällöin vastaajan ei tarvitse miettiä, että mitä kysymyksellä haetaan. Kysymysten etenemisjärjestyksen tulee olla looginen. Jokaisen kysymyksen tarpeellisuus ja hyödyllisyys tulee olla perusteltu. Kysymys ei saa myöskään olla johdatteleva, liian monimutkainen tai liian pitkä. Sen tulee olla kirjoitettu hyvällä yleiskielellä eli slangi, murre sanat, sivistyssanat ja erityissanasto tulee jättää kysymyksistä pois, ellei niitä juuri haluta tutkia. (Heikkilä 2004, 48, 57.)

Kuten edellä on mainittu, kyselylomake (ks. Liite 1) testattiin opiskelijoiden tutkielmaseminaarissa, jolloin saatiin yhdeksän vastausta. Niitä analysoitiin ja kyselylomaketta muokattiin vihjeiden mukaan. Ensin lähetettiin pääkaupunkiseudun koulujen rehtoreille sähköpostia, jossa kysyttiin sopisiko tulla käymään, kertomaan tästä projektista ja keräämään vastauksia pro gradu -tutkielmaan. Kyselyyn vastaaminen tapahtuisi qr-koodin tai internetlinkin kautta, eikä kestäisi kauaa. Tämänlainen vierailu

onnistui muutamaan kouluun. Vastauksia kertyi 21. Koska tarvittiin lisää vastauksia, lähetin kyselytutkimuksen vastauslinkkiä ja qr-koodia sähköpostilla rehtoreille ympäri Suomea. Kunnat ja niistä valitut koulut valittiin satunnaisotannalla. Viestissä pyydettiin rehtoreita välittämään kysely alkuopettajille. Sähköposteja lähetettiin 161. Ajatuksena oli, että jokaisessa koulussa olisi keskimäärin 4-6 alkuopettajaa, tällä tavoin tavoitettaisiin noin 650-900 opettajaa. Kuitenkaan kaikki eivät vastanneet ja vastauksia kertyi lopulta 94. Vastausprosentti oli kahdeksan prosenttia, mikä on vähän suhteessa lähetettyjen viestien potentiaaliseen määrään.

Aineisto koostui 94 vastauksesta, joista kaksi oli ilmeisesti jäänyt jostain syystä kesken. Niissä oli vastattu vain kahteen ensimmäiseen kysymykseen. Nämä lomakkeet jätettiin huomioimatta ja todellisia vastauksia oli 92. Aineisto analysoitiin SPSS-analyysiohjelmalla. Jolla laskettiin vastauksista keskiarvot ja keskihajonnat sekä kunkin vastausvaihtoehdon prosenttiosuudet. Lisäksi tuloksia tutkittiin ristiintaulukoinnin ja korrelaatioiden avulla. (Valli 2018b, 257–258; Metsämuuronen 2009, 347, 351–355, 364–367, 508, 577, 592.)

Kysymyksen vastausta voidaan käyttää myös selittävänä muuttujana, esimerkiksi vanhemmat toimivat näin ja nuoremmat näin. Mittausmenetelmä määrittää millaisia tilastollisia menetelmiä voidaan käyttää. Oikein käytetyt ja oikeat menetelmät takaavat oikeita, totuutta vastaavia tuloksia. (Valli 2015, 31.)

Taustakysymykset ja niiden vastaukset ovat tietyt, niitä ei mitailla keskenään. Tässäkin kyselylomakkeessa on heti alussa kolme taustakysymystä, joiden vastauksia ei voida mitata keskenään. Järjestysasteikkoiselle muuttujalle voidaan käyttää monipuolisempia menetelmiä. Tämänlaisia kyselytyyppejä oli muutama tässä tutkimuksessa. Välimatka- ja suhdeasteikkoisille muuttujille on eniten erilaisia mahdollisuuksia mitta-asteikkojen suhteen. Tämä tutkimus koostuu pääsääntöisesti näistä välimatka- ja suhdeasteikkoisia muuttujia hyödyntävistä kysymyksistä. (vrt. Valli 2015, 39.)

Prosenttiosuuksia pystyy laskemaan ja vertailemaan kaikissa kysymyksissä. Siksi ne valikoituivat yhdeksi esitystavaksi. Keskiarvot kertovat monelle lukijalle selkeästi tutkimuksen päälinjat, jolloin kaikkia tuloksia ei tarvitse erikseen katsoa. Pelkän keskiarvon tulkintaa voidaan syventää laskemalla keskihajonta. Mikäli keskihajonta on pieni, vastaukset painottuvat muutamaan vaihtoehtoon. Suuri keskihajonta taas kertoo, että vastaajat ovat olleet hyvin eri mieltä. Tuloksia tutkittaessa ja laskettaessa löytyi

samansuuntaisia tuloksia parin eri muuttujan keskiarvoissa, joten tässä tapauksessa laskettiin niiden välinen korrelaatio. (Metsämuuronen 2009, 364–367, 508, 577, 592.)

8. LUOTETTAVUUS JA EETTISYYS

Hyvin määritellyt ja perustellut mittarit ovat tärkeä osa luotettavaa tutkimusta. Tuloksetkin ovat tällöin keskimäärin validimpia. Validius on varmistettava etukäteen. Tämä tarkoittaa sitä, että perusjoukko määritellään alkuun tarkasti ja tätä kautta saadaan edustava otos. Mittarin validius määrittää myös tutkimuksen validiutta. Tämän tutkimuksen kyselylomakkeen mittareita on mietitty tarkkaan, erityisesti niiden asteikkoja on mietitty. Tutkimus on aloitettu tutkimusjoukon tarkalla määrittelyllä. Se käsittää kaikki Suomen luokanopettajat, jotka opettavat alkuopetuksessa eli ensimmäistä tai toista luokkaa lukuvuodella 2018-2019. Tähän kyselyyn vastasi heistä 92. Tutkimuksen tulokset ovat luotettavia tässä kyseisessä joukossa, mutta eivät ole yleistettävissä koko Suomen alkuopetuksessa toimiviin opettajiin. (Heikkilä 2004, 29; Metsämuuronen 2009, 74–75.)

Validiteetti ilmaisee sen, kuinka hyvin tutkimuksessa on kyetty mittaamaan juuri sitä, mitä tutkimussuunnitelmassa on määritelty mitattavan. Siitä voidaan puhua myös tutkimuksen pätevyytenä. Paras tilanne on, että onnistutaan mittaamaan juuri sitä, mitä oli tarkoituskin. (Holopainen & Pulkkinen 2006, 14; Vilka 2007, 150; Heikkilä 2004, 29; Nardi 2018, 43.) Tässä tutkimuksessa oli tarkoitus kartoittaa matematiikan kielentämisen käyttöä alkuopetuksessa. Tätä pystyttiin mittaamaan rakennetuilla mittareilla. Validiteetti voidaan jakaa sisäiseen ja ulkoiseen. Ulkoinen validiteetti merkitsee tutkimuksen ja mittauksen yleistettävyyttä, kuinka hyvin tutkimus voidaan toistaa toisissakin ryhmissä. Sisäinen validiteetti merkitsee tutkimuksen omaa luotettavuutta, ovatko käytetyt käsitteet ja teoriat luotettavia ja kattavat hyvin tutkittavan ilmiön. Tässä tutkimuksessa ulkoinen validiteetti on heikko, koska otos on pieni ja painottunut pääkaupunkiseudun opettajiin. Siitä syystä sen toistettavuus toisissa ryhmissä on heikko. Tutkimuksen sisäinen validiteetti sen sijaan on hyvä. (Metsämuuronen 2009, 65, 74, 125–127.)

Tutkijan oma tarkkuus ja kriittisyys vaikuttavat tutkimuksen luotettavuuteen. Virheitä voi sattua milloin vain: aineistoa kerätessä, sitä käsiteltäessä tai tuloksia tulkitessa. Tulosten tulkinta ja analysointi on tutkimuksen luotettavuuden tärkeimpiä hetkiä. Tutkijan tulee olla puolueeton ja tutkimuksen kauttaaltaan objektiivista. Tutkijan omat asiat eivät saa vaikuttaa tutkimuksen johtopäätöksiin millään lailla. (Heikkilä 2004, 30–31.) Tutkijan ammattietiikkaan kuuluu muun muassa tutkimuksen

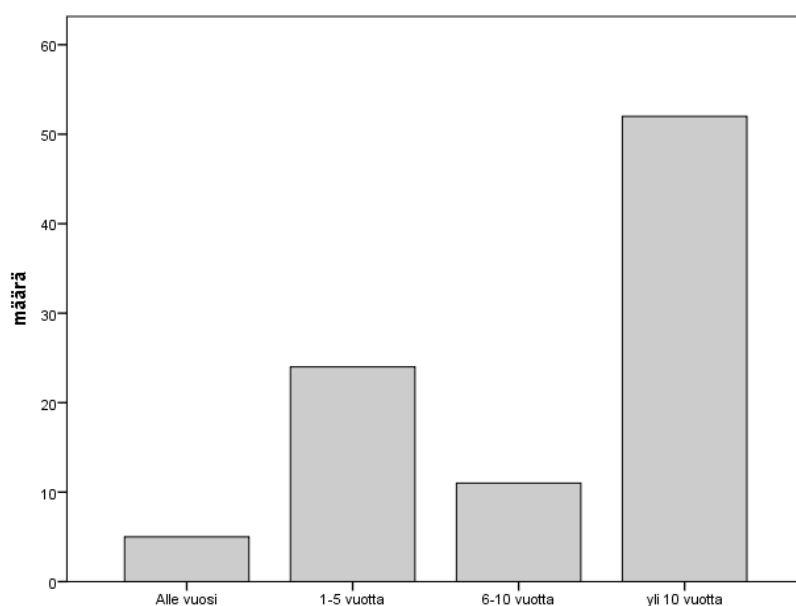
kysymysten asettelu, mikä ei saa olla johdattelevaa. Myöskään tutkimuksen tavoitteet, aineiston kerääminen ja niiden käsittely, tulosten esittäminen ja aineiston säilytys ei saa loukata kohderyhmää, tiedeyhteisöä eikä hyvää tieteellistä tapaa. (Vilkkä 2007, 89–90.)

Tutkimuksen eettisyyteen liittyy vahvasti vastaajien tunnistamattomuus. Tässä tutkimuksessa vastaajia ei ole mahdollista tunnistaa missään tutkimuksen vaiheessa. Vastaukset on kerätty kaikki sähköisesti, eikä kyselylomakkeessa ole tarkkoja henkilöön kohdistuvia kysymyksiä, joista voisi tunnistaa ketään. Vastaukset ovat tallentuneet suoraan sähköiseen järjestelmään, josta ne on siirretty analysointiohjelmaan. Kysely on teetetty siten, että jokaisella on ollut mahdollisuus myös jättää vastaamatta. Kysymykset ovat yleisiä, joihin jokaisen on mahdollista vastata. Tutkimus on rehellinen ja huolellinen. Koko tutkimuksen ajan on oltu avoimia ja puolueettomia. Tutkielman valmistuttua kysely ja vastaukset säilyvät webropol-ohjelmassa 2020 vuoden vaihteeseen. Sen jälkeen ne poistuvat, kun tutkijan yliopiston tunnuksia ei enää ole. Myös SPSS-ohjelmaan siirretyt vastaukset poistetaan. (Metsämuuronen 2009, 92-95.)

9. TULOKSET

Tulokset on esitetty pääsääntöisesti pylväsdiagrammien, keskiarvojen ja keskihajontojen avulla ja esitysjärjestys on sama kuin kyselylomakkeessa.

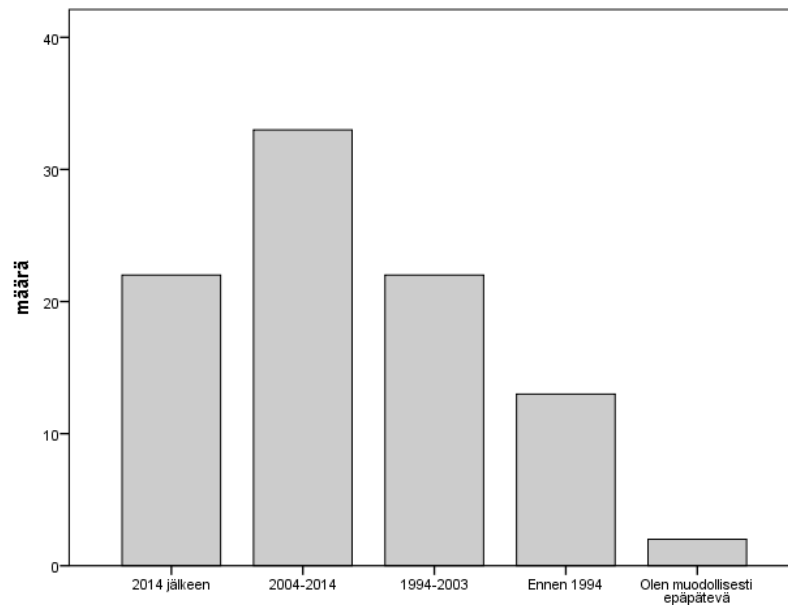
Työkokemusta kysyttäessä vastausvaihtoehdot oli jaettu neljään osaan: alle vuosi työkokemusta, 1-5 vuotta työkokemusta, 6-10 vuotta työkokemusta ja yli kymmenen vuotta työkokemusta (ks. Kuvio 3).



KUVIO 3. Työkokemus luokanopettajana, N=92.

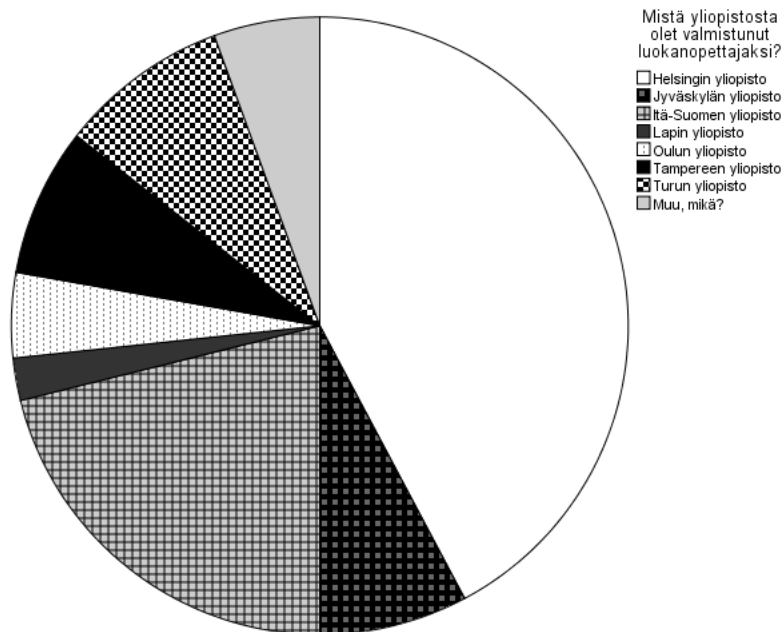
Viidellä vastanneista oli työkokemusta luokanopettajana alle vuosi, tämä on 5,4% kaikista vastanneista. Vastaajista 24 oli työskennellyt vuodesta viiteen vuoteen, mikä on 26,1% kaikista vastanneista. Yhdellätoista (12%) oli työkokemusta 6-10 vuotta ja suurin osa (56,5%) vastaajista oli työskennellyt yli kymmenen vuotta. Sain tutkimukseeni paljon tietotaitoa pitkän työkokemuksen muodossa.

Kysymyksen opettajaksivalmistumisesta (ks. Kuvio 4.) olen rajannut viiteen vaihtoehtoon. Valitsin vuodet opetussuunnitelmien mukaan: 2014 vuoden jälkeen valmistuneet, 2004-2014 välillä valmistuneet, 1994-2003 välillä valmistuneet, ennen 1994 vuotta valmistuneet. Viidentenä kohtana oli muodollisesti epäpätevät. He hyppäsivät seuraavan kysymyksen yli, jossa kysyttiin valmistumisyliopistoa.



KUVIO 4. Luokanopettajaksivalmistumisvuosi, N=92.

Luokanopettajaksivalmistumisvuodet jakautuvat tasaisemmin kuin työkokemus. Ennen 1994 valmistuneita oli 13 (14,1%). 1994-2003 vuosien aikana valmistuneita oli 22 (23,9%) vastaajista. 2004-2014 vuosien aikana valmistuneita oli 33 (35,9%) ja 2014 jälkeen valmistuneita oli 22 (23,9%). Muodollisesti epäpäteviä opettajia vastaajissa oli kaksi (2,2%). He eivät vastanneet seuraavan kysymykseen, jossa kysyttiin opettajaksi valmistumisyliopistoa (ks. Kuvio 5).

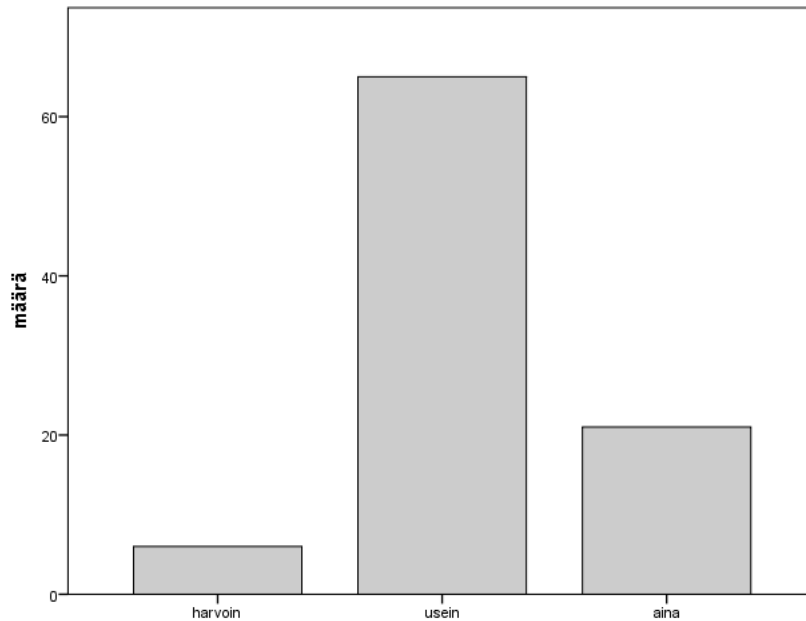


KUVIO 5. Valmistumisyliopistot, N=90.

Muodollisesti päteviä luokanopettajia kyselyyn vastanneista oli 90. Heistä 38 (42,2%) oli valmistunut Helsingin yliopistosta, seitsemän (7,8%) Jyväskylä yliopistosta, 19 (21,1%) Itä-Suomen yliopistosta, kaksi (2,2%) Lapin yliopistosta, neljä (4,4%) Oulun yliopistosta, seitsemän (7,8%) Tampereen yliopistosta, kahdeksan (8,9%) Turun yliopistosta. Viisi (5,6%) vastaajista oli valinnut vaihtoehdon muu, mikä. Tämä tarkoittaa sitä, että he ovat valmistuneet sellaisesta laitoksesta, josta ei voi enää valmistua luokanopettajaksi. Näistä oli neljä Joensuun yliopistosta (joka on nykyään osa isompaa Itä-Suomen yliopistoa) ja yksi Kajaanin opettajankoulutuslaitoksesta, joka on lopetettu ja siirretty Ouluun.

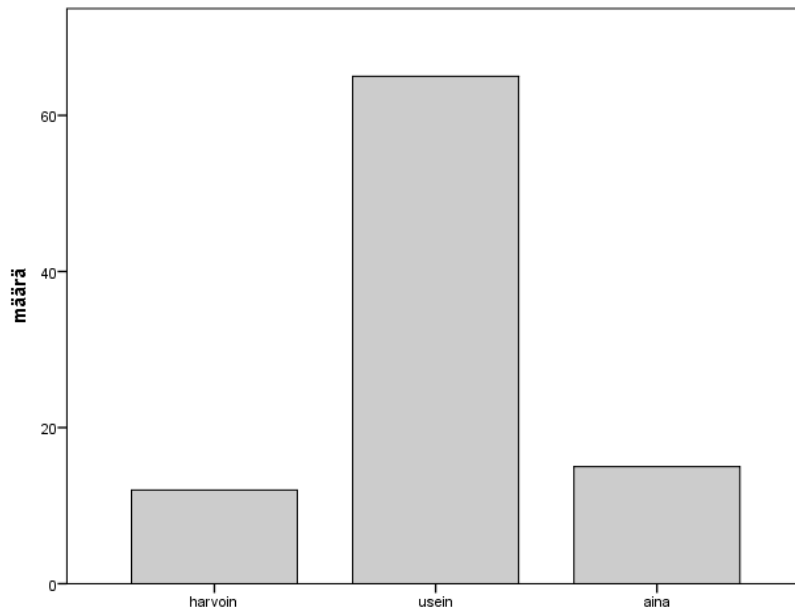
Vahva painotus näkyy Helsingin yliopistolla. Tähän on todennäköisesti syynä se, että alkuun oli tarkoitus painottaa vain pääkaupunkiseudulla toimiviin opettajiin, mutta kun vastaajien määrä näytti vähäiseltä, laajennettiin kysely koskemaan koko Suomea. Tällöin otettiin satunnaisotannalla paikkakuntia kartalta ja lähetettiin paikkakuntin rehtoreille kyselylomakkeen linkki sähköpostilla ja pyydettiin toimittamaan eteenpäin alkuopettajilleen.

Kuinka opetat matematiikkaa? -kysymyksessä oli useampi kohta, joiden aktiivisuutta omassa opetuksessa tuli arvioida en koskaan – harvoin – usein – aina vastausvaihtoehdoilla. (ks. Kuviot 6-10.)



KUVIO 6. Opetan matematiikkaa kirjan tehtäviä teettämällä, N=92.

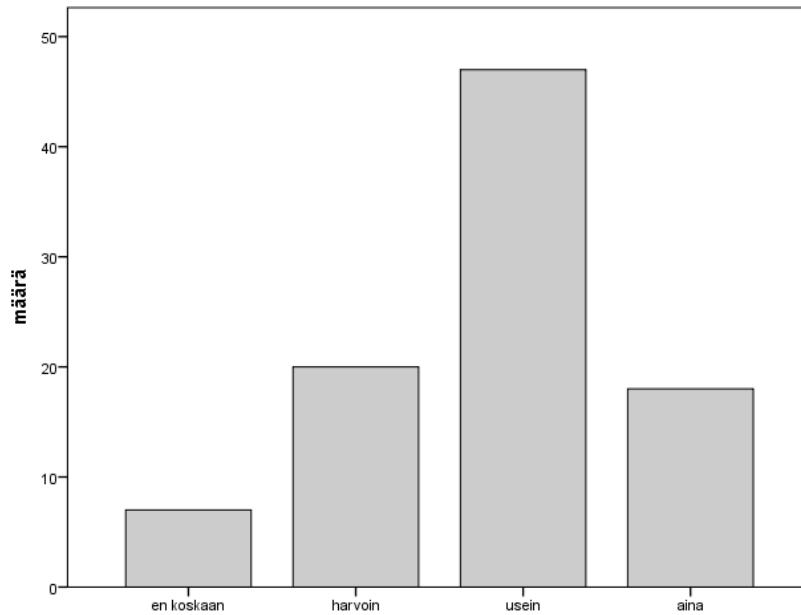
Kirjantehtäviä opetuksessa teetti (ks. Kuvio 6) aina 21 (22,8%) vastaajista. Tämä tarkoittaa sitä, että 21 opettajan jokaisella matematiikan oppitunnilla oppilaat tekevät tehtäviä oppikirjoista. Vastaajista 65 (70,7%) kertoi opettavansa matematiikkaa oppikirjan tehtäviä teettämällä usein. Kuusi (6,5%) vastaajista kertoi käyttävänsä kirjaa harvoin. Kukaan vastaajista ei vastannut, ettei käyttäisi koskaan kirjaa matematiikan opetuksessa. Opettajat opettavat matematiikkaa oppikirjaa käyttämällä keskiarvolla 3,16 (usein), jolloin keskihajonta oli 0,519. Tämän vastauksen pohjalta näen, että oppikirjat ohjaavat matematiikan opetusta hyvin paljon.



KUVIO 7. Opetan matematiikkaa konkreettisilla välineillä, N=92, ka 3,03, s 0,544.

Vastaajista 15 (16,3%) valitsi vaihtoehdon aina, kohtaan, jossa kysyttiin kuinka usein käyttää opetuksessaan konkreettisia välineitä (ks. Kuvio 7). Se on hieman yli 16 % kaikista vastaajista. Yli 70% (65) vastasi käyttävänsä konkreettisia välineitä usein. Harvoin konkreettisia välineitä opetuksessaan käyttäviä oli 12 (13%).

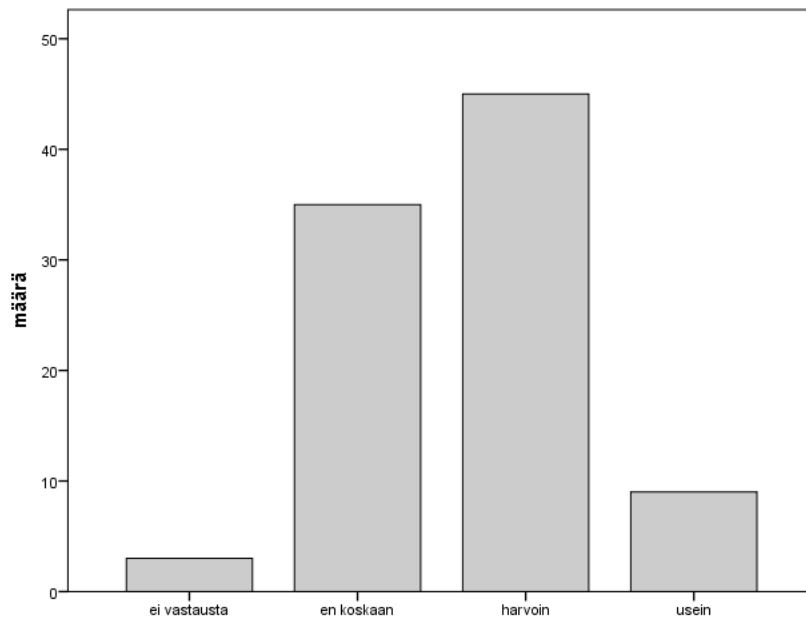
Kolmekymmentä (32,6%) opettajaa vastasivat opettavansa matematiikkaa aina taululla demonstroiden. Lähes puolet vastaajista (44 vastaajaa, 47,8%) kertoivat käyttävänsä usein taululla demonstroitua matematiikan opetuksessa. Vastaajista 16 (17,4%) käyttää harvoin taululla demonstroitua matematiikan opetuksessa. Kaksi vastaajista ei vastannut tähän kysymykseen. Kokonaisuudessa keskiarvoksi tuli 3,09 ja keskihajonnaksi 0,834, mikä tarkoittaa sitä, että hajontaa oli jonkin verran.



KUVIO 8. Opetan matematiikkaa sähköisillä materiaaleilla, N=92.

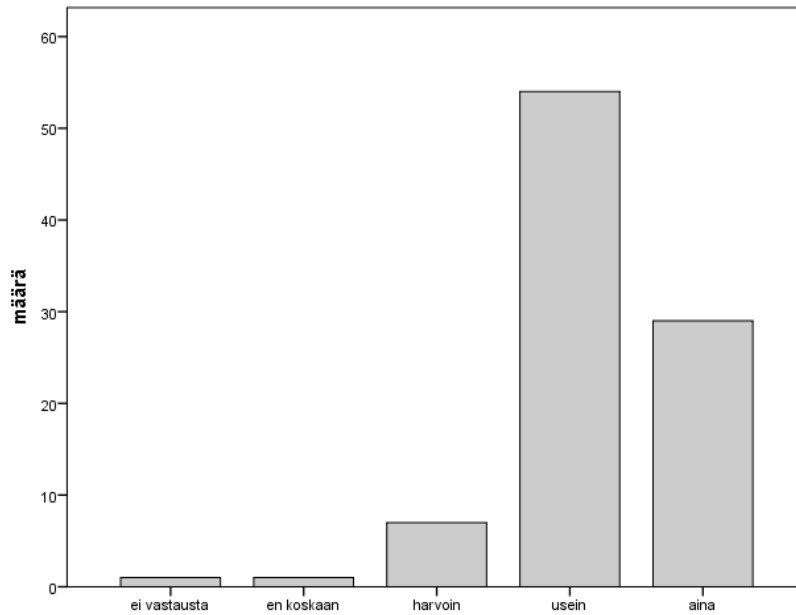
Vastaajista 18 (19,6%) kertoi käyttävänsä sähköisiä materiaaleja (ks. Kuvio 8) aina matematiikan opetuksessa. Yli puolet vastaajista, 47 (51,1%) käyttää sähköisiä materiaaleja usein opetuksessa. Viidennes vastanneista, 20 (21,7%) käyttää harvoin sähköisiä materiaaleja matematiikan opetuksessa. Seitsemän (7,6%) ei käytä sähköisiä materiaaleja lainkaan matematiikan opetuksessa. Keskiarvoksi tuli 2,83 ja keskihajonnaksi 0,833.

Kysyttäessä pelien avulla matematiikan opettamisesta neljä (4,3%) vastaajista antoi aina-vastauksen. 55 (59,8%) opettaa matematiikkaa usein pelien avulla. 33 (35,9%) vastaajista käyttää pelejä harvoin apuna. Kaikki vastaajista käyttävät pelejä ainakin joskus, kukaan ei vastannut: ei koskaan. Keskiarvoksi tarkentui 2,68 ja keskihajonnaksi 0,553.



KUVIO 9. Opetan matematiikkaa vihkotyöskentelyllä, N=92.

Kolme vastaajista ei vastannut kysymykseen vihkotyöskentelyn käyttämisestä matematiikan opetuksessa ollenkaan (ks. Kuvio 9). Vastaajista 35 (38%) ei käytä vihkotyöskentelyä koskaan. Lähes puolet, 45 (48,9%) käyttävät harvoin matematiikan opetuksessaan vihkotyöskentelyä. Yhdeksän (9,8%) vastaajista käyttää usein vihkotyöskentelyä. Kukaan ei käytä aina. Keskiarvo oli pieni 1,65 ja keskihajonta kohtuullinen 0,702.



KUVIO 10. Opetan matematiikkaa keskustellen, N=92.

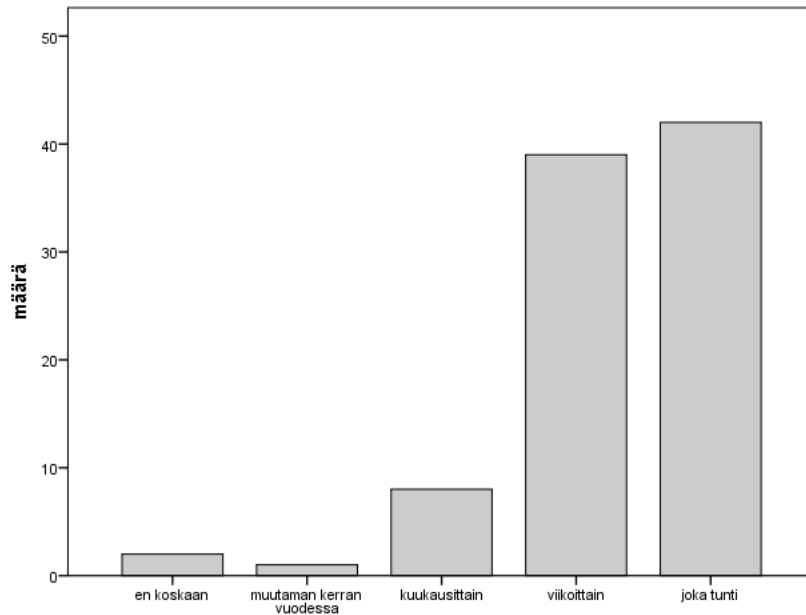
Yksi ei vastannut ollenkaan kysymykseen, jossa selvitettiin matematiikan opettamista keskustelun avulla (ks. Kuvio 10). Vastaajista 29 (31,5%) opettaa matematiikkaa aina keskustellen. Vastaajista 54, joka on yli puolet (58,7%) opettavat matematiikkaa usein keskustellen. Seitsemän (7,6%) vastaajista kertoi käyttävänsä keskustelua harvoin matematiikan opetuksessa ja yksi (1,1%) ei käytä keskustelua koskaan matematiikan opetuksessa. Keskiarvoksi muodostui 3,18 ja keskihajonnaksi 0,710.

Valmiiden kysymysten lisäksi viimeisenä vaihtoehtona oli, opetan matematiikkaa muuten, miten. Tähän oli usea vastaajista kirjoittanut omia toimintatapojaan opettaa matematiikkaa. Taulukossa 3 on teemoiteltu nämä avovastaukset. Oikeanpuoleisessa sarakkeessa on määrä, kuinka moni on vastannut näin.

TAULUKKO 3. Opetan matematiikkaa muuten, miten?

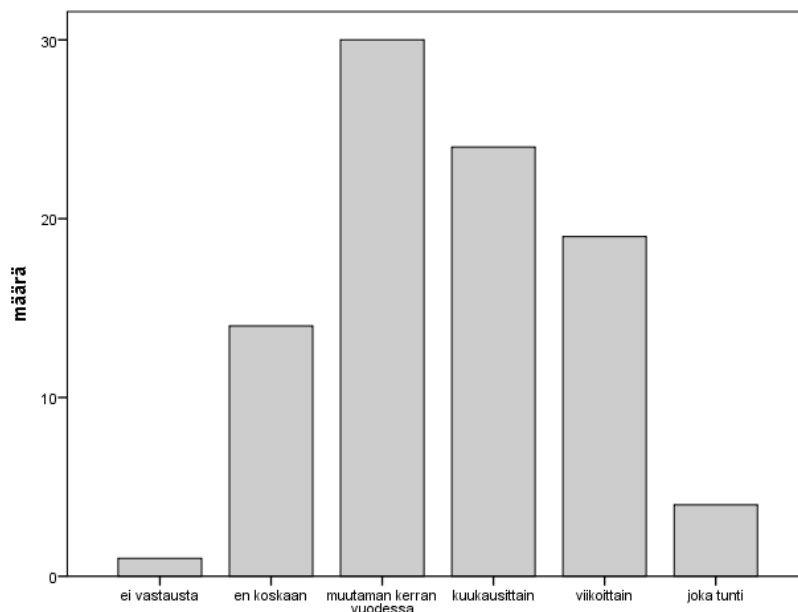
erilaisilla toiminnallisesti	17
leikkien	6
erilaisilla pari- ja ryhmätyöskentelyillä	6
tarinoiden avulla, loruilla ja lauluilla	5
pistetyöskentelyllä	5
oppilaat malleina	4
ulkona	3
esimerkkilaskuin, laskemalla oppilaiden kanssa yhdessä ääneen	3
piirtämällä	3
ruokaillessa, muun tekemisen lomassa	2
ongelmanratkaisutehtävillä	1
osana muita oppiaineita	1
konkreettisten kokemusten avulla	1
kuljettamalla rinnakkain symbolista, kuvallista ja kielellistä ilmaisua	1
yhdistämällä koodausta matematiikkaan esim. Beebotit	1
Varga-Nemenyi matematiikkaa (omat luovat opetusmenetelmät ja -menetelmät)	1

Seuraavassa tehtäväkokonaisuudessa muoto on sama kuin ensimmäisessä. On annettu tietyt keinot, joiden avulla oppilaat tuovat omaa ajatteluaan esille matematiikan tunneilla. Vastaajat arvioivat kuinka usein oppilaat käyttävät näitä keinoja heidän opetuksessaan, ei koskaan – muutaman kerran vuodessa – kuukausittain – viikoittain – joka tunti. (ks. Kuviot 11-16).



KUVIO 11. Oppilaat tuovat esille omaa ajatteluaan suullisesti, N=92.

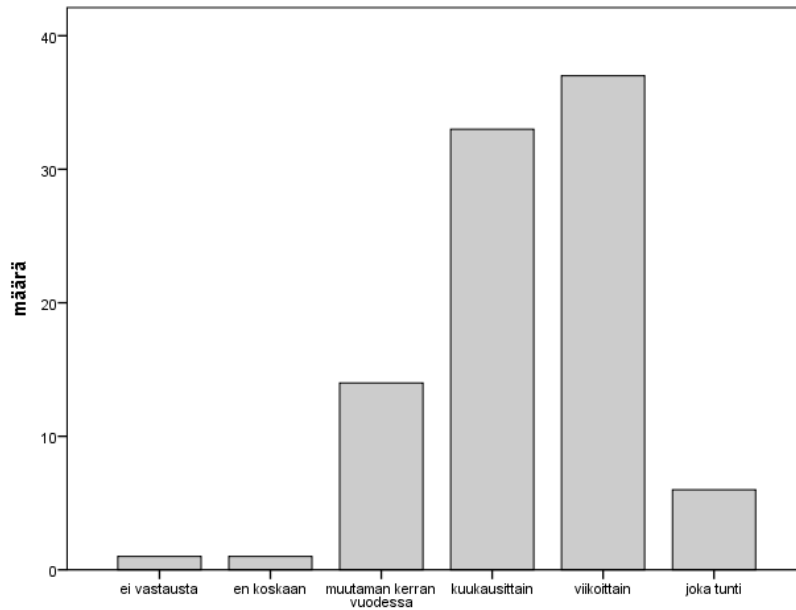
Kaksi (2,2%) opettajista vastasi, ettei heidän matematiikan opetuksessaan oppilaat ikinä selitä omaa ajatteluaan suullisesti oppitunneilla (ks. Kuvio 11). Yksi opettajista vastasi, että oppilaat selittävät suullisesti ajatteluaan muutamana kerran vuodessa. Kahdeksalla (8,7%) opettajalla oppilaat toivat omaa ajatteluaan suullisesti esille kuukausittain. Opettajista 39 (42,4%) vastasi, että suullista ajattelun esilletuomista viikoittain. Vastaajista 42 (45,7%) valitsi vaihtoehdon, että oppilaat tuovat omaa ajatteluaan suullisesti esille joka tunti. Keskiarvo 4,28, mikä on suhteellisen korkea, toisaalta keskihajontaa oli myös, 0,843. Tämä kuulostaa erittäin hyvältä. Kuten edellisen kysymyksen kohdalla tulikin esille, on tärkeää päästä ilmaisemaan omaa ajatteluaan monella eri tavalla. Suullinen ilmaisu on ihmiselle luonnollinen tapa.



KUVIO 12. Oppilaat tuovat esille omaa ajatteluaan kirjoittaen, N=92.

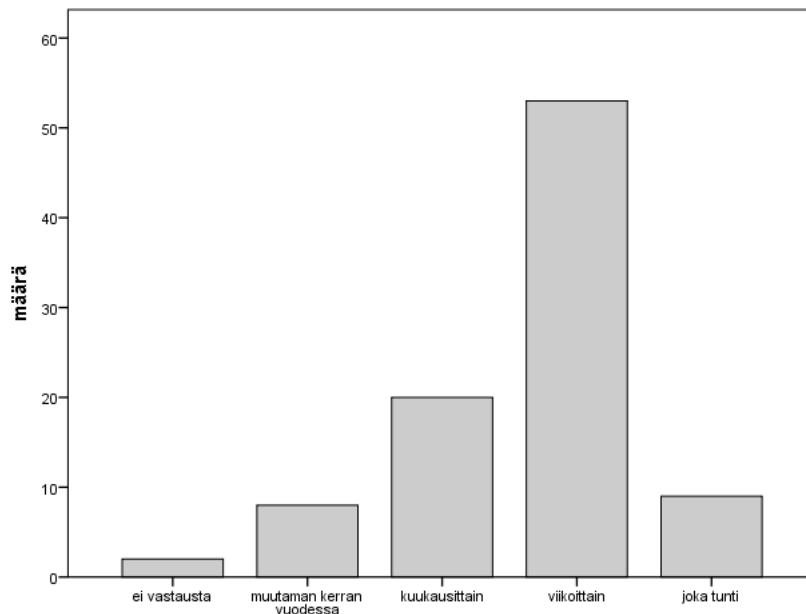
Yksi ei vastannut kysymykseen, jossa selvitettiin oppilaiden ajattelun esilletuomista kirjoittaen (ks. Kuvio 12). Vastaajista 14 (15,2%) valitsi vaihtoehdon ei koskaan. Heidän opetuksessaan oppilaat eivät tuo ajatteluaan esille kirjoittaen ollenkaan. Vastaajista 30 (32,6%) kertoi oppilaiden tuovan matemaattista ajatteluaan esille kirjoittaen muutaman kerran vuodessa. Neljännes vastaajista (24/92, 26,1%) taas käyttää kirjoittamista oppilaiden ajattelun esilletuomiseen kuukausittain. Viikoittain tätä tyyliä käyttää 19 (20,7%) vastaajista. Vain neljä (4,3%) vastaajista käyttää kirjoittamista ajattelun esilletuomisessa joka tunti. Keskiarvoksi kertyi vain 2,63, mutta suurella keskihajonnalla 1,136. Uskon, että harvimmin käytetty muoto, kirjoittaminen, sillä kaikki oppilaat eivät vielä osaa lukea ja kirjoittaa alkuopetuksessa. Kuin myös näkyi vihkotyöskentely kohdassa. Hajonta on suurta vastauksissa.

Huomasin samoja viitteitä muutaman kysymyksen vastauksissa. Kuinka usein oppilaat tuovat matemaattista ajatteluaan esille kirjoittaen –kysymys (ks. Kuvio 12) ja opetan matematiikkaa vihkotyöskentelyllä –kysymys (ks. Kuvio 9) antoivat samansuuntaisia vastauksia. Kumpikin kysymys sai pienen keskiarvon. Joten hain niille korrelaatiota. Korrelaatio ei ollut hyvin selkeä, mutta tilastollisesti merkitsevä. $C = 0,236^*$, korrelaatio on siis tilastollisesti merkitsevä. Merkitsevyys näkyy heikosti osittain siksi, että aineisto on suhteellisen pieni, vain 92 alkia. $P = 0,024$.



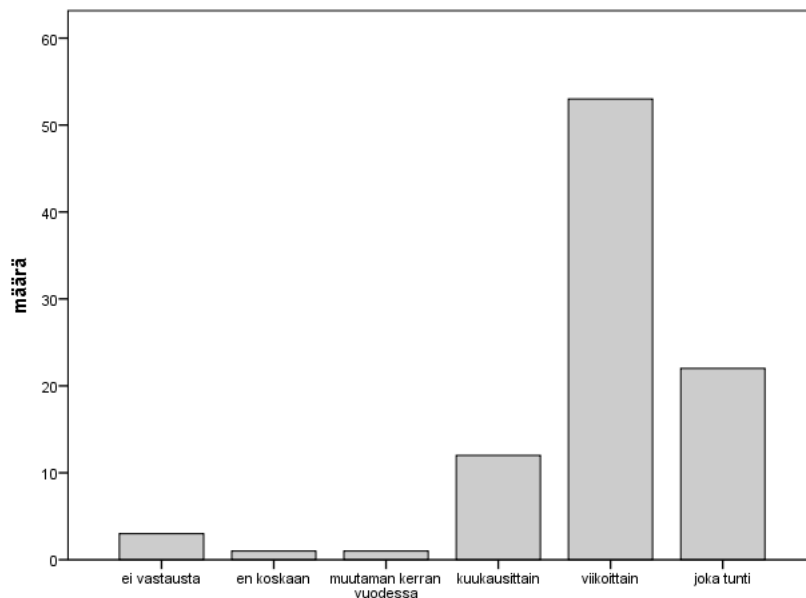
KUVIO 13. Oppilaat tuovat esille omaa ajatteluaan piirtäen, N=92.

Yksi ei vastannut kysymykseen, jossa selvitettiin kuinka usein oppilaat tuovat omaa ajatteluaan esille piirtäen (ks. Kuvio 13). Yksi vastaajista ei käytä koskaan piirtämistä selittämään oppilaan ajattelua. Vastaajista 14 (15,2%) käyttää piirtämistä ajattelun esilletuomisessa apuna muutaman kerran vuodessa. Vastaajista 33 (35,9%) käyttää kuukausittain piirtämistä apuna oppilaiden tuodessa omaa ajatteluaan esille. Vastaajista 37 (49,2%) käyttää tätä opetustapaa viikoittain. Kuuden (6,5%) vastaajan oppitunneilla piirretään joka tunti. Keskiarvo 3,33 ja suhteellisen suuri keskihajonta 0,927 eli vastukset jakautuivat enemmän.



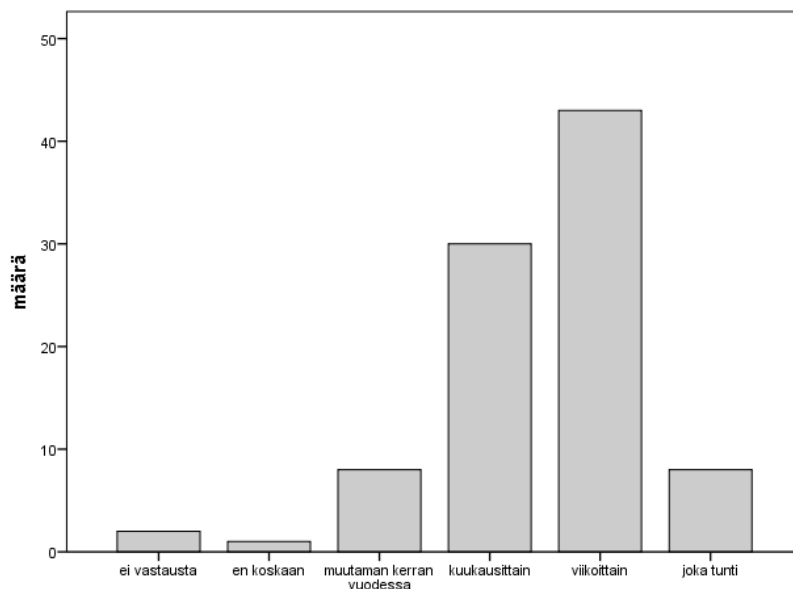
KUVIO 14. Oppilaat tuovat esille omaa ajatteluaan konkreettisin välinein, N=92.

Kaksi ei vastannut kysymykseen, jossa kysyttiin oppilaiden mahdollisuuksia tuoda omaa ajatteluaan esille konkreettisin välinein (ks. Kuvio 14). Kahdeksan (8,7%) käyttää välineitä muutamana kerran vuodessa oppilaan ajattelun esille tuomiseen. Vastaajista 20 (21,7%) vastasi käyttävänsä välineitä oppilaan ajattelun esilletuomiseen kuukausittain. Vastaajista 53 (57,6%) käyttää välineitä viikoittain oppilaiden ajattelun esilletuonnin apuna. Vastaajista 9 (9,8%) käyttää joka tunti. Keskiarvo oli 3,62 ja keskihajonta lähes yksi, 0,936, mikä tarkoittaa, ettei vastaajien yhteneväisyys ollut kovin suurta.



KUVIO 15. Oppilaat tuovat esille omaa ajatteluaan kertomalla aikuiselle, kuinka ratkaisi tehtävän, N=92.

Kolme (3,3%) ei vastannut kysymykseen, jossa kysyttiin kuinka usein oppilaat tuovat omaa ajatteluaan esille kertomalla ratkaisujaan aikuiselle (ks. Kuvio 15) ollenkaan. Yksi vastaajista ei käytä tätä tekniikkaa ollenkaan. Yksi vastaajista käyttää muutamia kertoja vuodessa. Kuukausittain opetuksessaan käyttää 12 vastaajista (13%). Oppilaat tuovat omaa ajatteluaan esille kertomalla aikuiselle viikoittain 53:n vastaajan opetuksessa (57,6%). Joka tunti aikuiselle kertoen, kuinka ratkaisi tehtävän, valitsi vastaajista 22 (23,9%). Keskiarvoksi tarkentui 3,92, mikä ei kerro paljon, sillä keskihajonta on suhteellisen suuri, 1,019. Tässä vastauksessa keskihajonta on suuri, mikä johtuu varmasti muutamasta ei koskaan ja muutaman kerran vuodessa vastauksista. Hajonta vastauksien välillä pylväiden perusteella ei ole suurta.

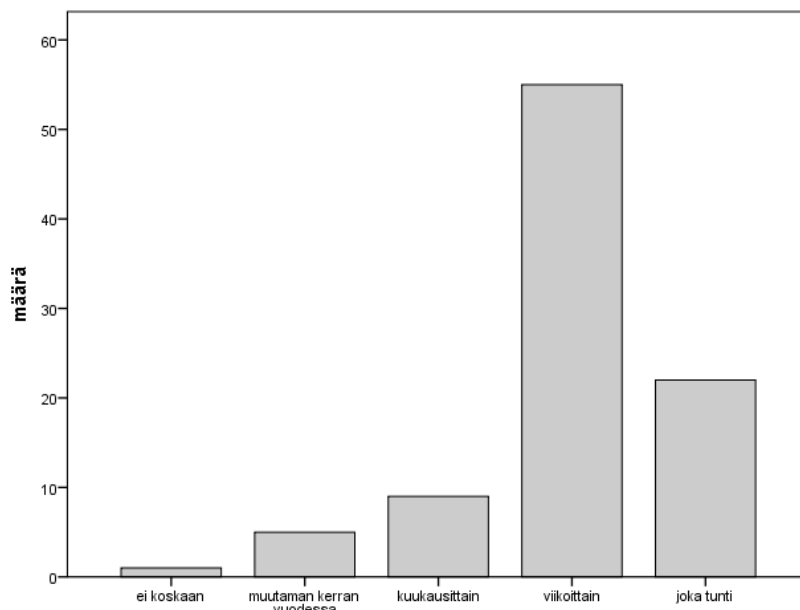


KUVIO 16. Oppilaat tuovat esille ajatteluaan kertomalla toiselle oppilaalle, kuinka ratkaisi tehtävän, N=92.

Kaksi ei vastannut ollenkaan kysymykseen, jossa selvitettiin oppilaiden ajattelun esilletuomista toisille oppilaille kertoen (ks Kuvio 16). Yksi vastaajista ei koskaan käytä opetuksessaan sitä, että oppilaat tuovat ajatteluaan esille ja kertovat toisille oppilaille ratkaisujaan. Vastaajista kahdeksan (8,7%) käyttää tätä työskentelytapaa muutaman kerran vuodessa. Vastaajista 30 (32,6%) käyttää kuukausittain. Vastaajista 43 (46,7%) kertoi käyttävänsä viikoittain oppilaiden toisille oppilaille kertomista apuna ajattelun esilletuomisessa. Vastaajista kahdeksan (8,7%) käyttää tätä työskentelytapaa joka tunti. Keskiarvo 3,47 on keskiluokkaa, toisaalta keskihajonta on suhteellisen suuri 0,966. Aikuiselle kerrottaessa keskiarvoksi tuli 3,92, mikä on suurempi kuin toiselle oppilaalle kerrottaessa vastauksen keskiarvo, 3,47.

Vastaajien oli myös mahdollista kertoa omia tapojaan, joilla oppilaat pääsevät ilmaisemaan omaa ajatteluaan. Eräs vastaajista kertoi käyttävänsä iPadeja apuna ja oppilaat pääsevät tekemään ”ohjelman” tai muun sellaisen. Kenties tässä on tarkoitettu ohjelmalla uutista tai muuta videointia apuna käyttävää. Ajatuksenani on, että alkuopetuksessa ei vielä ohjelmoida kokonaisia ohjelmia.

Seitsemännessä kysymyksessä kysyttiin, kuinka usein oppilaat selittävät ratkaisujaan tai tehtäviensä vastauksia. Tässä kysymyksessä oli vastausvaihtoehtoina ei koskaan – muutaman kerran vuodessa – kuukausittain - viikoittain – joka tunti. (ks. Kuvio 17)



KUVIO 17. Oppilaat selittävät ratkaisujaan tai tehtäviensä vastauksia, N=92.

Yksi vastasi, ettei oppilaat selitä ratkaisujaan tai tehtäviensä vastauksia koskaan (ks. Kuvio 17). Viidellä (5,4%) opettajalla oppilaat selittävät tehtäviensä ratkaisuja muutamia kertoja vuodessa. Yhdeksällä (9,8%) vastaajista oppilaat selittävät ratkaisujaan ja tehtäviensä vastauksia kuukausittain. Vastaajista 55 (59,8%) kertoi näin tapahtuvan viikoittain. 22:lla (23,9%) vastaajista oppilaat selittävät ratkaisujaan ja tehtäviensä vastauksia joka tunti. Keskiarvo 4,00 on melko suuri ja keskihajontaa kohtuullisesti, $s = 0,812$, melko luotettava vastaus.

Vertaan seitsemännen kysymyksen avulla, kuinka opettajan työkokemus vaikuttaa oppilaiden mahdollisuuksiin selittää ratkaisujaan tai tehtäviensä vastauksia. Vastaajat, joilla oli alle vuosi luokanopettajan työkokemusta (5), kertyi vastausten keskiarvoksi 4,20 (viikoittain), jolloin keskihajonta oli suhteellisen suuri, 0,837. Suhteellisen monen tuoreen opettajan oppitunneilla oppilaat selittävät omia ratkaisujaan usein. Vastaajat, joilla oli työkokemusta 1-5 vuotta (24) antavat oppilaidensa selittää ratkaisujaan lähes viikoittain, keskiarvo 3,96, jolloin keskihajonta oli suurempi 0,955. Vastaajista 6-10 vuotta (11) työskennelleiden opetuksessa oppilaat selittivät eniten omia ratkaisujaan ja tehtäviensä vastauksia, lähes joka tunti, keskiarvolla 4,72, jolloin keskihajontakin oli melko pieni, 0,467. Yli kymmenen vuotta luokanopettajan työkokemusta omaavat, joita oli 52, antavat oppilaiden selittää tehtäviensä ratkaisuja lähes yhtä usein kuin 1-5 vuotta työskennelleet, keskiarvoksi tarkentui 3,94 ja keskihajonnaksi 0,802.

Kuinka taas opettajaksi valmistumisvuosi vaikuttaa oppilaiden mahdollisuuksiin selittää ratkaisujaan tai tehtäviensä vastauksia. Viimeisimmäksi valmistuneet, 2014

jälkeen, joita oli 22, vastasivat antavansa oppilaisen selittää ratkaisujaan tai tehtäviensä vastauksia viikoittain, keskiarvoksi muodostui 3,86, jolloin keskihajonta oli suhteellisen suuri, 0,941. Toisaalta keskihajonta on aika suuri, joten tässä ryhmässä löytyy vastaajissa hajontaa. Vastaajien, jotka ovat valmistuneet 2004-2014 vuosina, heitä oli 33, opetuksessa oppilaat selittävät ratkaisujaan ja tehtäviensä vastauksia viikoittain. Keskiarvo 4,03 ja keskihajonta 0,684. Eniten oppilaat pääsevät selittämään omia ratkaisuja ja tehtävien vastauksia 1994-2003 vuosina valmistuneiden opetuksessa, joita oli 22. Keskiarvo nousi 4,18, keskihajonnan ollessa 0,733. Ennen 1994 vuotta valmistuneiden, joita oli 13, opetuksessa oppilaat selittivät keskiarvollisesti vähiten ratkaisujaan tai tehtävien vastauksia. Toisaalta myös hajonta oli suurinta. Emme siis voi yleistää aiemmin valmistuneiden luokanopettajien opetustyyliä. Keskiarvo 3,77 ja suuri keskihajonta 1,013. Muodollisesti epäpäteivät luokanopettajat (kaksi vastaajaa) vastasivat, että heidän opetuksessaan oppilaat selittävät ratkaisujaan ja tehtävien vastauksia lähes joka tunti. Keskiarvoksi heille kertyi 4,5 ja keskihajonta 0,707 tasoittoa. Kaksi eivät vastanneet valmistumisyliopistoaan, sillä he olivat epäpäteviä ja kyselyohjelma ohjasi heidät automaattisesti ohittamaan tämän kysymyksen. Kokonaismäärä tässä kysymyksessä on $n=90$.

Seuraavassa vertailen eri yliopistoista valmistuneita keskenään. Helsingin yliopistosta valmistuneiden, joiden määrä oli 38, opetuksessa oppilaat selittivät ratkaisujaan ja tehtäviensä vastauksia lähes joka tunti. Keskiarvoksi tarkentui 4,21, jolloin keskihajonta oli suhteellisen pieni, 0,528. Jyväskylän yliopistosta valmistuneet, joita oli seitsemän, käyttivät opetuksessaan tyyliä, jossa oppilaat selittävät ratkaisujaan tai tehtäviensä vastauksia viikoittain. Keskiarvolla 4,00. Toisaalta keskihajonta, 1,155, oli suurta. Vastauksista löytyy myös, että yhden opetuksessa oppilaat eivät selitä ratkaisujaan koskaan.

Itä-Suomen yliopistosta valmistuneiden, joita oli 19, opetuksessa oppilaat selittivät ratkaisujaan ja tehtäviensä vastauksia viikoittain. Keskiarvo tässäkin ryhmässä 4,00, mutta keskihajonta pienempi kuin Jyväskylän yliopistosta valmistuneilla, 0,577. Lapin yliopistosta oli valmistunut kaksi, jotka kummatkin vastasivat, että oppilaat selittävät ratkaisujaan ja tehtäviensä vastauksia viikoittain. Keskiarvoksi muodostui siis 4,00, ja keskihajonnaksi nolla, sitä ei ollut ollenkaan. Oulun yliopistosta valmistuneilla neljällä keskiarvo oli pienin, 3,00. Heillä oppilaat selittävät ratkaisujaan ja tehtäviensä vastauksia kuukausittain. Toisaalta kuten Jyväskylän yliopistosta valmistuneilla hajonta

oli suurta myös Oulun yliopistosta valmistuneilla, s 1,155. Samoin suuri hajonta vastauksissa näkyy myös Turun yliopistosta valmistuneilla kahdeksalla. Heillä keskiarvo oli 3,25 ja keskihajonta 1,389. Tampereen yliopistosta valmistuneilla uskoisi olevan vahva oppi kielentämisestä, sillä Jorma Joutsenlahti on siellä matematiikan didaktiikasta vastaava yliopistolehtori. Sieltä valmistuneita oli seitsemän. Heidän vastaustensa keskiarvo oli 4,29. Mikä tarkoittaa, että heidän oppitunneillaan oppilaat selittävät ratkaisujaan ja tehtäviensä vastauksia viikoittain tai jopa joka tunti. Kuitenkin näissäkin vastauksissa oli hajontaa, 0,756. Muita vastaajia oli viisi. He olivat valmistuneet yliopistoista, joissa ei enää ole kasvatustieteen laitoksen luokanopettajien koulutuslinjaa. Muun muassa Kajaanin opettajankoulutuslaitos on siirtynyt Ouluun. Heidän vastauksensa jätin tässä kohdassa huomiotta, sillä yksittäinen vastaus ei olisi antanut suurta merkitsevyyttä.

Matematiikan kielentämisessä on oleellisen osana oman ajattelun esille tuominen myös konkreettisin välinein. Selvitin mitä konkreettisia välineitä alkuopetuksessa toimivat luokanopettajat käyttävät matematiikan opetuksessa. Olin antanut alkuun seitsemän eri välinettä ja pyysin merkitsemään kaikki, joita niistä käyttävät. Lisäksi oli mahdollisuus kirjata vielä loppuun, mitä muita konkreettisia välineitä käyttää (ks. Taulukko 4). Taulukkoon on teemoiteltu vastaukset ja oikeassa sarakkeessa lukema kertoo vastausten määrän.

Kymmenjärjestelmävälineitä käytti 93,5 %, eli lähes jokainen, vain kuusi vastaajista ei käyttänyt niitä. Helminauhoja tai helmitauluja opetuksessaan käyttää 69 luokanopettajaa, mikä on 75 % kaikista vastaajista. Kananmunakennoja käyttää yli puolet (55,4 %). Tämä on hieno huomata, sillä kananmunakennot eivät ole kaupallinen tuote tai alun perin matematiikan opetusvälineeksi tarkoitettu. Noppia ja arpakuutiota käyttää 92,4 % vastaajista opetuksessaan. Multilink-kuutiot ovat myös suosittuja, 89,1 % vastaajista käyttää niitä opetuksessaan. Numero- ja lukukortteja käyttää 87 % luokanopettajaa alkuopetuksessa. Vähiten valmiista välineistä oli käytetty robotteja. 43,5 % vastaajista käyttää niitä matematiikan opetuksessa.

TAUKUKKO 4. Mitä konkreettisia välineitä käytät matematiikan opetuksessa? Muita, mitä?

Erilaiset pienet ja isot luokiteltavat, lajiteltavat, laskettavat esineet, kuten napit	13
loogiset palat	12
leikkirahat	11
satataulu	7
lukusuorat	5
värisauvat	5
erilaiset kellot	3
kertotauluruudukot/-vihkot	3
pelit	3
viivoittimet ja mittanauhhat	3
laskukuvat	3
erilaiset lelut, mm. kauppatavarat ja pikkuautot	3
oppikirjojen materiaalit	2
laskualustat	2
kynä ja paperi	2
lattiamuodot ja -teippaukset	2
lapset itse	2
tilavuusmitat	2
puiset geometriset muodot	2
sormet	1
hajotuskoneet	1
kuinka monta-purkit	1
tangramit	1
sinipunakiekot	1
pistelukukortit	1
Vargan välineet alkuopetukseen	1

Kyselylomakkeen (ks. Liite 1) viimeisessä kysymyksessä kysyttiin, miksi käytät tai voisit käyttää kielentämistä matematiikan opetuksessa. Kysymykseen oli annettu vastausvaihtoehtoja, joista voi valita kaikki itselleen sopivat. Yksi ei vastannut tähän kysymykseen ollenkaan. Vastaajista 57,7 % käyttää kielentämistä innostamiseen. Matemaattisen ajattelun esilletuomisessa kielentämistä käyttää 97,8 %, samoin kuin matemaattisen ajattelun kehittämiseksi 97,8 %. Arvioinnin apuvälineenä käyttävät tai voisivat käyttää 53,5 %. Yli kolmasosa (37 %) integroi matematiikkaa äidinkieleen kielentämisen avulla. Vastaajista 37 % käyttää tai voisi käyttää kielentämistä oppilaiden pitkäjänteisen työskentelyn kehittämiseen. Lisäksi vastaajat olivat lisänneet omia ajatuksiaan, miksi he käyttävät tai voisivat käyttää kielentämistä matematiikan opetuksessa. Seuraava lista on juuri näitä vastaajien ajatuksia: hauskaa kaikille, lapsen oppimisen tukeminen, omaan oivaltamiseen mahdollistaminen, vaihtoehtoisten ratkaisumenetelmien tarjoaminen, erilaisten ratkaisutapojen esilletuominen, ajattelun monipuolistaminen, luokkakavereiden auttaminen, matemaattisen ajattelun ymmärtämisen alkeet, toiminnanohjaamisen tukeminen, mielenkiinnon/tarkkaavaisuuden ylläpito, motivoiminen, keskustelutaitojen kehittäminen, havainnollistaminen, konkretisoiminen, matematiikan yhdistäminen arkielämän aiheisiin, yksilöllinen huomioiminen, suomi toisena kielenä oppilaiden avuksi.

Kyselylomakkeen ensimmäisenä varsinaisena kysymyksenä taustakysymysten jälkeen oli avoin kysymys: mitä mielestäsi kielentäminen matematiikassa tarkoittaa. Tämän oli tarkoitus olla niin sanottu täydentävä kysymys, jota ei varsinaisesti analysoida, vaan siitä saadaan lisätietoa. Näissä vastauksissa näkyi hyvin monenkirjavaa vastausta. Moni osasi selittää kielentämistä hyvin.

”Matemaattisen ajattelun ja kielen yhteyttä, jossa matematiikan kieltä tuodaan näkyville ja avataan. Tähän voi liittyä matematiikan oman kielen havainnollistamista ja näkyväksi tekemistä eri havainnollistamisvälineiden ja esim. piirtämisen avulla.”

(vastaaja 41)

Useassa vastauksessa kävi ilmi, että vastaajat näkivät, että kielentäminen tarkoittaa sitä, että opettaja selittää oppilaille mitä tapahtuu tai mitä jonkin matemaattinen termi tarkoittaa.

”Selittää lapselle, mitä matemaattiset käsitteet tarkoittavat” (vastaaja 6)

”Matematiikan termistön ja käsitteistön avaamista ja kielitietoista opetusta matematiikan tunneilla” (vastaaja 8)

”Puhutaan matematiikan kieli auki lapsille. Sanotaan se.” (vastaaja 15)

”Mat. ajattelun sanallistamista. Selittämistä oppilaille sanallisesti (kuvat tukena)” (vastaaja 27)

Muutamassa kohdassa oli vastattu rohkeasti: en tiedä tai en ole kuullutkaan moisesta. Monissa vastauksissa oli ilahduttavasti korostettu sitä, että vastaukseen voi päästä monella eri tavalla. Matematiikassa ei ole välttämättä vain yhtä ainoaa oikeaa vastausta. Ratkaisuun kuuluu myös matka ja erilaiset laskusuoritukset.

JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA

Tämän matematiikan kielentämisen käyttöä kartoittavan opinnäytetutkimuksen toteuttamiseksi laadittiin kyselylomake, johon oli tavoitteena saada vastaus sadalta alkuopetuksen luokanopettajalta. Lopullisessa analysoinnissa oli mukana 92 alkiota, mikä jäi hieman tavoitteesta. Otos oli kuitenkin tarpeeksi suuri, jotta tuloksia pystyttiin analysoimaan tilastollisesti. Laajemmalla otoksella olisi tosin vielä saanut selkeämmät ja yleistettävämmät tulokset. Alkuajatus oli teettää kysely vain pääkaupunkiseudun alkuopettajilla, mutta jälkepäin sitä ei voinut pitää parhaana vaihtoehtona. Tutkimuksen kannalta olisi ollut järkevämpää, että olisi alusta asti lähdetty hakemaan vastauksia kyselyyn koko Suomen alueelta. Suurin osa valmistuneista jää töihin sille alueelle missä on opiskellut, joten koko Suomeen painottuvalla kyselyllä olisi saatu mukaan enemmän muissa kuin Helsingin yliopistossa opiskelleita.

Suurena haasteena tutkimuksen tekemisessä oli rehtoreiden monenkirjava käyttäytyminen tutkimusaineistoa kerätessä. Kysyessäni rehtoreilta mahdollisuutta välittää sähköpostilla kyselylinkkiäni eteenpäin alkuopettajille, jotkut rehtorit kyselivät vastauksessaan kunnan tutkimuslupaa. Varmistin ohjaajaltani, että kuinka tulisi toimia. Olisiko minun pitänyt saada tutkimuslupa kaikilta kunnilta? Päädyimme yhdessä samaan: aikuinen opettaja osaa itse valita vastaako kyselyyn, joka ei liity oppilaisiin, kouluun tai kuntaa millään lailla. Osa rehtoreista taas lähetti viestin eteenpäin opettajille ja toivottivat onnea opintojen viimeisiin ponnisteluihin ja gradun tekoon. Tämän tyyppinen haaste koskee luultavimmin vain pienempiä tutkielmia.

Kysely koostui matematiikan kielentämisen osa-alueista. Kysymysten yhteisten vastausten pohjalta pyrittiin selvittämään kuinka luokan opettajat opettavat matematiikkaa alkuopetuksessa ja kuinka he käyttävät kielentämistä hyväksi. Halusin pitää kyselylomakkeen (Liite 1) lyhyenä ja ytimekkäänä, jotta vastaajat eivät kokisi sitä liian työlääksi. Tulosten kannalta lomakkeen kysymysten yksiselitteisyys on keskeinen asia. Vaikka tätä kyselylomaketta testattiin luokanopettajaopiskelijoilla, jälkepäin ajatellen olisi joidenkin kysymysten sanamuotoja pitänyt harkita vielä tarkemmin. Siihen oli jäänyt erilaisia tulkintamahdollisuuksia. Esimerkiksi kysymyksessä, jossa kysyttiin kuinka usein opettaja matematiikkaa keskustelleen, joku on voinut ymmärtää kohdan siten, että opettaja kysyy ja oppilas vastaa. Samoin kysymyksessä, jossa kysyttiin matematiikan opettamisesta kirjoittaen, olisi voinut määritellä tarkemmin mitä

tarkoitetaan kirjoittamisella. Joku on saattanut ymmärtää vihkotyöskentelyn pelkkänä kirjoittamisena.

Hyvänä kyselylomakkeessa (Liite 1) koin kysymysten vastausvaihtoehtojen arvon näkymisen useassa kohdassa. Sen ei olisi pitänyt olla haaste. Silti osa oli jättänyt vastaamatta, johonkin kohtaan, joten on mahdotonta tietää, onko vastaaja siis tarkoittanut, ettei toimi näin ollenkaan, vai eikö hän kenties ole ymmärtänyt kysymystä. Kysely jäi hieman liian monitulkintaiseksi.

Tutkimuksen tärkein havainto oli se, että moni opettaja opettaa matematiikkaa monipuolisesti alkuopetuksessa. Tämä on tärkeää kasvavan lapsen kehityksen, oppimisen ja motivaation kannalta. Monipuolisen opetuksen tärkeyden ovat todenneet myös Nurmi ym. (2018, 89-90). Samoin Joutsenlahden ja Rättyän (2015, 52) kokoama kuva (ks. Kuvio 1) kertoo paljon ja sisältää opettamisen ja oppimisen monipuolisuuden matematiikassa.

Alkuopetusikäinen lapsi on hyvin konkreettisesti oppimisen vaiheessa, jolloin on erittäin tärkeää tarjota myös konkreettisia välineitä. (Nurmi ym. 2014, 89; Piaget 1988, 106-107.) Myös tässä tutkimuksessa kakki opettajat opettivat konkreettisia välineitä käyttäen (Kuvio 7), suurin osa usein tai aina. Harvoin konkreettisia välineitä käyttävien osuus oli pienin eikä kukaan vastannut ”ei koskaan”. Piaget’in (1988, 23–24, 104–105) mukaan konkreettisten operaatioiden kausi on lapsilla alkaa noin seitsemän ikävuoden tienoilla ja kestää noin kahteentoista ikävuoteen.

Opettajat käyttävät hyvin monenlaisia konkreettisia välineitä opetuksessa. Perinteisten noppien, pelimerkkien ja kymmenjärjestelmävälineiden lisäksi moni käytti kananmunakennoja, loogisia paloja ja leikkirahoja. Muutamassa vastauksessa oli sanottu käytettävän oppilaita ja sormia apuna opetuksessa. On erittäin hyvä, että opettajat huomioivat lapsen kehitysvaiheen ja tuovat paljon konkretiaa opetukseen. (Nurmi ym. 2018, 108.) Tässä kohtaa kyselyä, kun selvitettiin kuinka usein käyttää konkreettisia välineitä opetuksessa, olisi ollut hyvä olla jatkokysymys ”miksi”, mikäli vastaa ”en käytä ikinä konkreettisia välineitä”. Olisi ollut mielenkiintoista tietää, miksi joku ei käyttäisi konkreettisia välineitä opetuksessa. Toisaalta tässä tutkimuksessa siihen ei olisi tullut yhtään vastausta.

Hyvin moni vastaajista käyttää sähköisiä materiaaleja päivittäin. Tämä on selvästi tämän päivän trendi. Sähköiset materiaalit ovat edullisempia ja niitä on helpompi käsitellä, kuin oppikirjoja. Kenenkään ei tarvitse kuljetella niitä mihinkään, vain

tunnukset riittävät. Kuitenkin vastaajista jopa seitsemän ilmoittaa, ettei käytä sähköisiä materiaaleja ollenkaan. Tulosten kannalta olisi myös ollut mielenkiintoista saada tarkempaa tietoa miksi osa opettajista ei käytä sähköisiä materiaaleja. Kyselylomakkeessa olisi voinut olla ”en koskaan” vastanneille jatkokysymys ”miksi”. On mahdollista, että tämä johtuu resursseista. Kaikilla kouluilla ei välttämättä ole vielä laitteita käyttämään oppikirjavalmistajan tekemiä sähköisiä materiaaleja. Voi olla myös, että kirjatilauksen yhteydessä on valittu jo koululla olemassa olevat painetut opettajan oppaat, eikä ole tilattu samaa materiaalia sähköisenä niiden rinnalle. Tällöin on voitu säästää hieman rahaa.

Kuinka opetat matematiikkaa -kysymyksen kohdalla tuli esille vähäinen vihkotyöskentelyn avulla opettaminen. Samoin kirjoittaminen opetuskeinona oli vähän käytetty. On mahdollista, että tämänlainen opettaminen, missä ei käytetä vihkotyöskentelyä ja kirjoittamista, johtuu oppikirjojen muodoista, sillä niissä ei juuri ole vihkotehtäviä, varsinkaan ensimmäisellä ja toisella luokalla. Tämä voi myös kertoa vihkotyöskentelyn kokonaisvaltaisesta hiipumisesta tekniikan kehittyessä ja digivälineiden tultua luokkiin. Kolmantena syynä vihkotyöskentelyn vähäiseen käyttöön opetuksessa voi olla oppilaiden ikä. Varsinkaan ensimmäisellä luokalla kaikki eivät vielä osa lukea tai kirjoittaa.

On erittäin hyvä, että oppilaat pääsevät keskustelemaan matematiikasta. Tässä tutkimuksessa yli 90 % opettajista käytti keskustelua opetuksessaan aina tai useasti ja vain yksi vastaaja ei käyttänyt keskustelua koskaan. Toisaalta kaksi opettajista on vastannut kysymykseen, missä kysyttiin kuinka usein oppilaat selittävät omaa ajatteluaan suullisesti, ettei heidän opetuksessaan oppilaat selitä koskaan selitä omaa ajatteluaan suullisesti. On mahdollista, että kysymys keskustelun käytöstä opetuksessa olisi pitänyt muotoilla selkeämmin. Oppilaiden olisi tärkeä työskennellä monipuolisesti matematiikan parissa. Yksi kielentämisen muoto on luonnollinen kieli ja luonnollista kieltä käytetään nimenomaan keskustellessa. Tällöin oppilas jäsentää omaa ajatteluaan suullisesti kertoen toiselle, jolloin oma ajattelu kehittyy. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 416; Joutsenlahti & Rättyä 2015, 47.) On mahdollista, että ensimmäisellä ja toisella luokalla oppilaille annettava vastuu on vielä vähäisempää. Siksi kysymys, jossa kysyttiin kuinka usein oppilaat selittävät tehtäviensä ratkaisujaan toisilleen, saa heikomman keskiarvon kuin aikuiselle kerrottaessa. Opettaja voi haluta kontrolloida mitä lapset osaavat ja siksi vaatia kertomaan aikuiselle ratkaisujaan. Lapsi voi myös

hakea hyväksyntää kertomalla aikuiselle, ja saa mahdollisesti aikuiselta kehuja hyvästä suorituksesta.

Vastaajat saivat myös kertoa omia tapojaan, kuinka opettavat matematiikkaa. Eniten oli vastattu: ”toiminnallisesti”. Tätä on vaikea tulkita yksiselitteisesti, sillä osa vastausvaihtoehdoista oli jo toiminnallisia. On mahdollista, että vastaajat tarkoittavat toiminnallisella opiskelulla liikkuvaa tapaa opiskella. He opettaisivat liikkuvan toiminnan kautta, sillä esimerkiksi vaikka myös välineillä tehdessä oppiminen on toiminnallista. Lisäksi alkuopetusikäisten kanssa opitaan ikäkaudelle sopivin keinoin paljon leikin, laulun ja tarinoiden avulla. Pari- ja ryhmätyöskentely aloitetaan jo koulupolun alkaessa. Olisi mahdollisesti ollut selkeämpää laittaa kysymykseen yhdeksi vaihtoehdoksi ”liikunnan avulla”.

Yhtenä tutkimuskysymyksenä oli selvittää vaikuttavatko luokanopettajien valmistumisajankohta tai valmistumisyliopisto heidän matematiikan opetukseensa. Vastaajia oli sen verran pieni joukko ja suurin osa oli valmistunut Helsingin yliopistosta, että valmistumisyliopiston vertaaminen ei ollut kaikkein mielekkäintä. Järkevämpää oli vertailla vastaajia valmistumisajankohdan ja työkokemuksen mukaan. Valitsin tarkkailtavaksi kysymyksen, kuinka usein oppilaat selittävät ratkaisujaan tai tehtäviensä vastauksia. Oletan, että varsinkin 2014 jälkeen valmistuneet ovat opintojensa aikana käyneet paljon läpi nykyistä opetussuunnitelmaa, jolloin heillä tulisi olla viimeisin tieto mitä matematiikan opetussuunnitelmassa sanotaan ja kuinka kielentäminen tukee kaikkea matematiikan opetussuunnitelmassa.

Työkokemus näkyi matematiikan opetuksessa vähän, eikä juuri tehnyt eroa siihen kuinka paljon oppilaat pääsevät selittävään ratkaisujaan tai tehtäviensä vastauksia. Pidempään töissä olleet käyttivät suunnilleen saman verran kielentämistä matematiikan opetuksessa kuin vastavalmistuneetkin. Eräs vastaaja oli kirjoittanut kysymykseen, miksi käytät tai voisit käyttää kielentämistä matematiikan opetuksessa: *”Se on olennainen osa matematiikkaa, ja sitä kyllä Kaikki kokeneet opettajat käyttävätkin jo.”* (Vastaaja 56). Tämä ei tosin näkynyt tämän tutkimuksen tuloksissa. Tulosten perusteella ei pysty päättelemään, että kaikki kokeneet opettajat käyttäisivät kielentämistä.

Tässä tutkimuksessa ei kysytty opettajien osallistumista täydennyskoulutuksiin ja sen vaikutusta kielentämisen käyttöön. Muun muassa Turun yliopistossa on tutkittu paljon pienten lasten ja alkuopetusikäisten matematiikkaa ja Lehtinen ja Hannula-

Sormunen työryhmiensä kanssa tekevät tutkimusta ja järjestävät täydennyskoulutusta nimellä Joustavaan matematiikkaan ja Pikku-matikka.

Tämän tutkimuksen otoskoko ei mahdollista yliopistojen vertailua ja myös rajoittaa tulosten tulkintaa. Tulevaisuudessa olisi mielenkiintoista selvittää tarkemmin, kuinka opettajat hyödyntävät ja toteuttavat matematiikan opetuksessaan kielentämistä. Tämän voisi toteuttaa esimerkiksi havainnointitutkimuksena seuraamalla useamman opettajan matematiikan tunteja ja ennen kokeen alkua keskustella opettajien kanssa kielentämisestä, jotta varmistetaan että kaikki osallistujat ymmärtävät mitä kielentämisellä tarkoitetaan. Mielenkiintoista olisi myös selvittää heijastuuko opettajan keskusteleva opetustyyli oppilaisiin. Eli kertovatko ja selittävätkö oppilaat silloin enemmän.

LÄHTEET

- Ahvenainen, O. & Holopainen, E. 2014. Lukemis- ja kirjoittamisvaikeudet. Teoreettista taustaa ja opetuksen perusteita. Special data. Jyväskylä.
- Aunola, K. & Nurmi, J.-E. 2018. Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg ja P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti. Helsinki, 54–69.
- Brendefur, J., Strother, S. & Rich, K. 2018. Building place value understanding through modeling and structure. *Journal of Mathematics Education*. 1/11/2018. DOI:10.26711/007577152790017. 31–45.
- Hannula-Sormunen, M., Mattinen, A., Räsänen, P. & Ruusuvirta, T. 2018. Varhaisten matemaattisten taitojen perusta: synnynnäiset valmiudet, tietoinen toiminta ja vuorovaikutus. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg ja P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti. Helsinki. 158–183.
- Heikkilä, T. 2004. Tilastollinen tutkimus. Helsinki: Edita.
- Holopainen, M. & Pulkkinen, P. 2006. Tilastolliset menetelmät. Helsinki: WSOY.
- Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisten tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. Tampereen yliopisto. Tampereen yliopisto Acta Universitatis Tamperensis 1061. Saatavilla <http://acta.uta.fi>. Luettu 10.1.2019.
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2015. Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä. Teoksessa T. Kaartinen (toim.) Monilukutaito kaikki kaikessa. Tampereen yliopiston normaalikoulu, 57–76.
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2017. Multimodal languaging as a pedagogical model - a case study of the concept of division in school mathematics. *Education Sciences* 7 (1), 1-9. Saatavilla DOI:10.3390/educsci7010009. Luettu 6.11.2018.
- Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. 2019. Sustainability Development in Mathematics Education: A case study of what kind of meaning do prospective class teachers find for the mathematical symbol “ $\frac{2}{3}$ ”? *Sustainability*, 11 (2), 457. Saatavilla DOI:10.3390/su11020457. Luettu 14.9.2019.
- Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. 2015. Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen ja M. Tarnanen (toim.). Rajaton tulevaisuus - kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium

- Jyväskylässä 13.-14.2.2014. Suomen ainedidaktinen tutkimusseura. Ainedidaktisia tutkimuksia 8, 45–62.
- Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. 2018. Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg ja P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti. Helsinki. 410–431.
- Kahanpää, L. 2019. Matematiikkaa alkuopettajille. Verkkolehti solmu. Saatavilla <https://matematiikkalehtisolmu.fi/haku.html?q=Matematiikka+alkuopettajille>. Luettu 10.1.2019.
- Kinnunen, R. 2003. Miksi kertotauluun kompastuu? Lukujen hallinta oppimisen perustana. Turun yliopisto. Oppimistutkimuksen keskus.
- Lehtinen, E., Hannula-Sormunen, M., McMullen, J. & Gruber, H. 2017. Cultivating mathematical skills: from drill-and-practice to deliberate practice. *Mathematics Education*. DOI: 10.1007/s11858-017-0856-6.
- Lepola, J. & Hannula, M. 2006. Matemaattisten taitojen kehittyminen esi- ja alkuopetuksen aikana: Mitkä tekijät ennakoivat aritmeettisten taitojen kehitystä? Teoksessa M. Hannula & J. Lepola (toim.) Kohti koulua - kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten vaikeuksien kehitys. Turun yliopiston kasvatustieteellinen laitos.
- Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmaratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa - Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Jyväskylän yliopisto. *Jyväskylä studies in education, psychology and social research*.
- LUKIMAT 2017. LUKIMAT / Matematiikka. Saatavilla <http://www.lukimat.fi/matematiikka>. Luettu 10.1.2019.
- Luumäen perusopetuksen opetussuunnitelma. Saatavilla <https://peda.net/luumaki/perusopetus/ol/13-luonnos>. Luettu 10.1.2019.
- Mattinen, A., Hannula, M. & Lehtinen, E. 2006. Katsotaanpas kuinka monta jalkaa tällä toukalla on! - Lapsen ohjaaminen lukumäärien havaitsemiseen ja käsittelemiseen. Teoksessa M. Hannula & J. Lepola (toim.) Kohti koulua - kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten vaikeuksien kehitys. Turun yliopiston kasvatustieteellinen laitos.
- Metsämuuronen, J. 2009. Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteessä. Jyväskylä: Gummerus.

- Metsämuuronen, J. 2013. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005-2012. Koulutuksen seurantaraportit 4/2013. Helsinki. Opetushallitus.
- Moschkovich, J. N. 2010. Language(s) and learning mathematics – resources, challenges and issues for research. Teoksessa J. N. Moschkovich (toim.) Language and Mathematics Education – Multiple Perspective and Directions for Research. The United State of America: Information Age Publishing Inc. 1–28.
- Mutanen, A. 2018. Matematiikan mielekkyys ja sovellettavuus. FMSERA Journal 2(1), 122–132. Saatavilla <https://journal.fi/fmsera>. Luettu 10.10.2018.
- Nardi, P. M. 2018. Doing survey research – A guide to quantitative methods. 4. painos. New York, NY: Routledge. Saatavilla DOI <https://doi.org/10.4324/9781315172231>. Luettu 27.5.2019.
- Nurmi, J.-E., Ahonen, T., Lyytinen, H., Lyytinen, P., Pulkkinen, L. & Ruoppila, I. 2014. Ihmisen psykologinen kehitys. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Pehkonen, E. 1994. Avoimet tehtävät vastauksena oppimisenäkemyksen esittämiin haasteisiin. R. Seppälä (toim.) Matematiikka -taitoa ajatella. Helsinki: Opetushallitus, 60–64.
- Pehkonen, E. & Rossi, M. 2018. Hyvää matematiikan opetusta etsimässä. Helsinki: MFKA-Kustannus.
- Piaget, J. 1988. Lapsi maailmansa rakentajana. Suomentanut S. Palmgren. Porvoo: WSOY.
- Planas, N., Morgan, C. & Schutte, M. 2018. Mathematics education and language. Teoksessa T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (toim.) Developing research in mathematics education. Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe. New York, NY: Routledge, 196–210.
- POPS. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. 2014. Helsinki: Opetushallitus.
- Rezat, S. & Rye Ejersbo, L. 2018. Number sense in teaching and learning arithmetic. Teoksessa T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (toim.) Developing Research in Mathematics Education. Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe. New York, NY: Routledge, 23–31.

- Rättyä, K. & Kulju, P. 2018. Kielitietoisuutta kielentämällä – kieliopin tehtävyyppien kehittäminen. *Ainedidaktiikka* 2(1), 59-74. Saatavilla <https://doi.org/10.23988/ad.68750>. Luettu 11.3.2019.
- Suomen virallinen tilasto (SVT): Opettajat ja muu henkilökunta (verkkojulkaisu) 2003. Helsinki: Tilastokeskus. Saatavilla https://tilastokeskus.fi/til/ope/2003/ope_2003_2005-05-03_tie_001.html. Luettu 9.4.2019.
- Suomisanakirja.fi 2019. Saatavilla <https://www.suomisanakirja.fi/kielent%C3%A4%C3%A4>. Luettu 11.3.2019.
- Sorariutta, A. 2017. ”Yhdessä enemmän matemaattista osaamista” - äidin ja isän ohjausvuorovaikutus ja varhaiskasvatuksen määrä lapsen kehityksen ennustajina. Turun yliopisto. Turun yliopiston julkaisuja – Annales Universitatis Turkuensis Sarja- ser. C osa - tom. 45
- Taylor, H. & Harris, A. 2014. *Learning and Teaching Mathematics 0-8*. Lontoo: SAGE.
- Töttö, P. 2012. Paljonko on paljon? Luvuilla argumentoinnista empiirisessä tutkimuksessa. Tampere: Vastapaino.
- Valli, R. 2015. *Johdatus tilastolliseen tutkimukseen*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Valli, R. 2018a. Aineistonkeruu kyselylomakkeella. Teoksessa R. Valli (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1*. Jyväskylä: PS-kustannus, 92–116.
- Valli, R. 2018b. Numerot ja niiden tulkinta määrällisessä tutkimuksessa. Teoksessa R. Valli (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2*. Jyväskylä: PS-kustannus, 248–260.
- Valli, R. 2018c. Parivertailu ja aineistonkeruu. Teoksessa R. Valli (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1*. Jyväskylä: PS-kustannus, 142–155.
- Valli, R. & Perkkilä, P. 2018. Sähköinen kyselylomake ja sosiaalinen media aineistonkeruussa. Teoksessa R. Valli (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1*. Jyväskylä: PS-kustannus, 117–128.
- Vastamäki, J. & Valli, R. 2018. Tutkimusasetelman ja mittareiden valinta kyselylomaketutkimuksessa. Teoksessa R. Valli (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1*. Jyväskylä: PS-kustannus, 129–141.
- Viitala, H. 2018. Studying pupils' mathematical thinking through problem solving and view of mathematics. Case studies of Finnish comprehensive school pupils. University of Agder. Saatavilla http://www.researchgate.net/publication/332633468_A_case_study_on_Finnish_p

upils'_mathematical_thinking_Problem_solving_and_view_of_mathematics.

Luettu 13.8.2018.

- Vilka, H. 2007. Tutki ja mittaa. Määrällisen tutkimuksen perusteet e-kirja. Helsinki: Tammi. Saatavilla https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/98723/Tutki-ja-mittaa_2007.pdf?sequence=1. Luettu 27.5.2019.
- Vygotsky, L. 1982. Ajattelu ja kieli. Suom. K. Helkama ja A. Koski-Jännes. Helsinki: Weilin+Göös.
- Yrjönsuuri, R. 2007. Matematiikka mieluisaksi. Psykologinen lähestymistapa opetukseen ja opiskeluun sekä matemaattisen ajattelun osaamisen arviointiin. Helsinki: Oppilo.

LIITTEET

Kyselylomake 1/4

Kysely alkuopettajille

1. Työkokemus luokanopettajana *

- Alle vuosi
- 1-5 vuotta
- 6-10 vuotta
- yli 10 vuotta

2. Luokanopettajaksivalmistumisvuosi

- 2014 jälkeen
- 2004-2014
- 1994-2003
- Ennen 1994
- Olen muodollisesti epäpätevä

3. Mistä yliopistosta olet valmistunut luokanopettajaksi?

- Helsingin yliopisto
- Jyväskylän yliopisto
- Itä-Suomen yliopisto
- Lapin yliopisto
- Oulun yliopisto
- Tampereen yliopisto
- Turun yliopisto
- Åbu Akademi
- Muu, mikä? _____

Kyselylomake 2/4

4. Mitä mielestäsi kielentäminen tarkoittaa matematiikassa?



5. Miten opetat matematiikkaa?

1 = en koskaan

2 = harvoin

3 = usein






4 = aina

	1 	2 	3 	4 
Kirjan tehtäviä teettämällä	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Konkreettisilla välineillä	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Taululla demonstroiden	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Sähköisillä materiaaleilla	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Pelien avulla	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Vihkotyöskentelyllä	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Keskustellen	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Muuten, miten?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Muuten, miten?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Kyselylomake 3/4

6. Kuinka usein oppilaat tuovat esille omaa ajatteluaan?

- 1 = ei koskaan
 2 = muutaman kerran vuodessa
 3 = kuukausittain
 4 = viikoittain
 5 = joka tunti

	1 	2 	3 	4 	5 
Suullisesti	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Kirjoittaen	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Piirtäen	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Välinein	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Oppilas kertoo aikuiselle, kuinka ratkaisi tehtävän	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Oppilas kertoo toiselle oppilaalle, kuinka ratkaisi tehtävän	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Muuten, miten?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Muuten, miten?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

7. Kuinka usein oppilaat selittävät ratkaisujaan tai tehtäviensä vastauksia?

- 1 = ei koskaan
 2 = muutaman kerran vuodessa
 3 = kuukausittain
 4 = viikoittain
 5 = joka tunti

	1 	2 	3 	4 	5 
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Kyselylomake 4/4

8. Mitä konkreettisia välineitä käytät matematiikan opetuksessa?

- Kymmenjärjestelmävälineet
- Helminauhat/-taulut
- Kananmunakennot
- Multilink-kuutiot
- Nopat
- Beebot-robotit
- Numero-/lukukortit
- Muita, mitä? _____
- Muita, mitä? _____

9. Miksi käytät tai voisit käyttää kielentämistä matematiikan opetuksessa?

- Innostaminen
- Matemaattisen ajattelun esilletuominen
- Matemaattisen ajattelun kehittäminen
- Arvioinnin apuväline
- Äidinkielen integrointi
- Pitkäjänteisen työskentelyn kehittäminen
- Muu, mikä? _____