Lämpöyhtälön alkuarvo-ongelma lokaalisti integroituvalla alkudatalla

Juho Levänen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2019

Tiivistelmä: Juho Levänen, *Lämpöyhtälön alkuarvo-ongelma lokaalisti integroituvalla alkudatalla*, matematiikan pro gradu-tutkielma, 36 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, elokuu 2019.

Tämän tutkielman tarkoituksena on osoittaa, että lämpöyhtälön alkuarvo-ongelman alkudatan ei tarvitse olla jatkuva, jotta ongelmalle voidaan löytää ratkaisu. Aluksi työssä käsitellään jatkuvan alkudatan tapaus, sillä lokaalisti integroituvalla alkudatalla ratkaisumenetelmät ovat samankaltaisia. Molemmissa tapauksissa lämpöyhtälön toteutuminen osoitetaan laskemalla derivaatat erotusosamäärällä. Jatkuvan alkudatan tapauksessa alkudata kuvastaa, kuinka lämpö on jakaantunut havainnoinnin alkuhetkellä $t = 0$ ja alkuarvoehdon toteutuminen tarkoittaa, että ratkaisufunktion arvo on sama kuin alkudatan arvo ajanhetkellä $t = 0$. Koska lämpöyhtälön ratkaisu u on jatkuva, lokaalisti integroituvalla alkudatalla alkuarvoehtoa ei voida käsitellä samaan tapaan. Tästä johtuen lokaalisti integroituvalla alkudatalla g alkuarvoehto käsitellään $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä. Tämä tarkoittaa, että kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{R}^n$ pätee $||u(\cdot, t) - g(\cdot)||_{1,K} \to 0$, kun $t \to 0$.

Työssä käsitellään myös alkuarvo-ongelman yksikäsitteisyyttä. Jatkuvan alkudatan tapauksessa ratkaisusta saadaan yksikäsitteinen, kun ratkaisulle asetetaan kasvunopeutta rajoittava ehto. Vastaavanlainen tulos voitaisiin saada myös lokaalisti integroituvalle alkudatalle, mutta sen todistaminen jää tämän työn laajuuden ulkopuolelle. Työssä käsitellään myös vastaesimerkki, jolla osoitetaan kasvuehdon välttämättömyys ratkaisun yksikäsitteisyydelle.

Sisältö

1. Johtanto

Lämpöyhtälö on osittaisdifferentiaaliyhtälö, jolla fysiikassa mallinnetaan lämmön johtumista. LuK-tutkielmassani [9] käsiteltiin lämpöyhtälöä vain jatkuvan alkudatan tapauksessa. Tämän jälkeen herää kysymys, kuinka paljon lämpöyhtälön alkuarvo-ongelmaa voidaan yleistää. Tässä työssä otetaan ensimmäinen askel heikompiin oletuksiin lokaalisti integroituvan alkudatan muodossa. Tarkemmin sanottuna tässä työssä tutkitaan homogeenisen lämpöyhtälön alkuarvo-ongelmaa

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

jossa alkudata g on tunnettu lokaalisti integroituva funktio. Lisäksi funktiolle g asetetaan kasvua rajoittava ehto $|g(x)| \leq Ce^{\alpha|x|^2}$, kun $|x| > r$. Jatkuvan alkudatan tapauksessa alkudata g kuvastaa lämmön jakautumista tarkkailun aloitushetkellä $t = 0$ ja ratkaisu u kuvaa lämpötilan muuttumista ajassa.

Jatkuvalla alkudatalla alkuarvoehto $u = g$ tarkoittaa, että funktioiden u ja g arvot omat samat kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, kun $t = 0$. Jos alkuarvofunktio g on vain lokaalisti integroituva tämä ehto ei toimi sellaisenaan. Tästä syystä sanomme, että alkudata g on otettu $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä ja käytämme L^1-normia mittaamaan ratkaisun ja alkudatan läheisyyttä. Täsmällisemmin vaadimme, että kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{R}^n$ pätee $||u(\cdot, t) - g(\cdot)||_{1,K} \to 0$, kun $t \to 0$.

Tämän työn päätuloksena osoitamme, että lämpöyhtälön alkuarvo-ongelma ratkeaa $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä otetulla alkudatalla. Saamme ratkaisulle u integraaliesityksen

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy.$$

Lämpöyhtälön toteutumisen osoittaminen funktiolle u olisi helppoa, jos derivaatat saisi viedä lausekkeessa esiintyvän integraalin sisään. Koska se ei ole itsestään selvää, osoitamme tämän laskemalla derivaatat erotusosamäärän avulla. Erotusosamäärää käsitellessä jaamme funktiossa u esiintyvän integraalin kahteen osaan käyttäen alkudatan g kasvuehdon rajaa r. Rajan sisäpuolelle jää äärellismittainen joukko, joka on helppo käsitellä ja rajan ulkopuolella käytämme funktion g kasvuehtoa integraalin arvioinissa.

Alkuarvoehdon toteutumista $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä käsitellessä kehitämme jonon sileitä funktioita jotka lähestyvät funktiota g. Käyttäen tätä jonoa jaamme ehdossa esiintyvän L^1-normin integraalin osiin. Jaamme nämä osat edelleen pienempiin paloihin käyttäen kasvuehdon rajaa r kuten erotusosamäärässä ja osoitamme, että kaikki palat ovat mielivaltaisen pieniä.

Jotta alkuarvo-ongelman ratkaisusta saadaan yksikäsitteinen, ratkaisulta joudutaan vaatimaan samanlainen kasvua rajoittava ehto kuin asetimme alkudatalle g. Käyttäen tätä kasvuehtoa voidaan todistaa maksimiperiaate ja sen avulla ratkaisun yksikäsitteisyys. Tässä työssä teemme tämän vain jatkuvan alkudatan tapauksessa. Sama idea toimisi myös lokaalisti integroituvalle alkudatalle, mutta reunaehtojen käsittely olisi hankalampaa ja se jää tämän työn laajuuden ulkopuolelle.

Ratkaisun kasvua rajoittava ehto on välttämätön ratkaisun yksikäsitteisyydelle. Osoitamme tämän käyttäen vastaesimerkkiä. Vastaesimerkissä toinen ratkaisu on triviaali nollafunktio ja toinen on funktiosarja. Sarjaa käsitellessä päädymme samankaltaiseen ongelmaan kuin aikaisemmin lämpöyhtälön toteutumisessa. Meidän on osoitettava, että saamme viedä derivaatan sarjan summan sisälle. Tämän teemme näyttämällä, että sarja on tasaisesti suppeneva.

Käsittelemme myös lämpöyhtälön epähomogeenista alkuarvo-ongelmaa $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä otetulla alkudatalla. Epähomogeenisen alkuarvo-ongelman ratkaisun etsimiseen käytetään Duhamelin periaatetta. Otamme ratkaisuja homogeenisen alkuarvo-ongelmaan, jossa aloitushetki t on siirretty kohtaan s ja integroimme muuttujan s ylitse. Laskemme homogeenisen yhtälön ratkaisulle arvioita pienellä t ja niiden avulla näytämme alkuarvoehdon toteutumisen epähomogeenisessa tapauksessa. Epähomogeenisen lämpöyhtälön toteutumisen osoituksessa käytetään differentiaalilaskennan ja integraalilaskennan väliarvolauseita.

Jean Bapiste Joseph Fourier kuvasi ensimmäisenä lämmön johtumista differentiaaliyhtälöiden avulla. Hän otti käytännönläheisen lähestymistavan lämmön käyttäytymiseen. Fourier oletti, että yksittäisen pisteen lämpötilaan vaikuttaa vain sen naapuripisteet lämmön virtauksen suunnassa, ja näin hän muotoili lämmön johtumista kuvaavan ongelman jatkuvassa kappaleessa. Fourier kuvasi ongelmaa kolmessa osassa: lämmön siirtyminen tilassa, lämmön varastointi pienessä osassa kappaletta ja reunaehdoilla. Differentiaaliyhtälö koski vain kappaleen sisällä tapahtuvaa muutosta ja ulkopuolen vaikutus kappaleeseen kuvattiin reunaehdoilla. Vuonna 1807 Fourier lähetti paperinsa julkaistavaksi Ranskan akatemiaan, mutta sitä ei hyväksytty julkaistavaksi. Myöhemmin vuonna 1822 hän laajensi työtään ja julkaisi sen nimellä Théorie Analytique de la Chaleur [4].[11]

Tämän työn pääasiallinen lähde on DiBenedetton kirja Partial Differential Equations [1], jossa on käsitelty lokaalisti integroituvaan alkudataan liittyvät asiat. Toinen tärkeä lähde on Evansin samanniminen kirja [3], jota on käytetty jatkuvan alkudatan käsittelyssä. Lämpöyhtälön maksimiperiaatetta käsittelevien lauseiden todistukset ovat alunperin Watsonin kirjasta [15] ja Johnin kirjasta [7]. Ratkaisun yksikäsitteisyyden vastaesimerkin alkuperä on Tychonoffin julkaisu [14]. L^p-funktioiden teoriaa käsittelevissä lauseissa on käytetty lähteenä reaalianalyysin luentomuistiinpanoja [8] ja niissä esiintyvät siloittajafunktiot ovat peräisin Friedrichsiltä [5].

2. Esitietoja

Tämän kappaleen määritelmissä ja lauseissa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko, ellei toisin ole mainittu.

2.1. Merkintöjä ja määritelmiä. Merkitsemme funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pisteessä x laskettuja osittaisderivaattoja ja suuntaan ν pisteessä x laskettua derivaattaa seuraavasti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = f_{x_i}(x),$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f_{x_i}(x+he_i)-f_{x_i}(x)}{h} = \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} f(x) = f_{x_i x_i}(x),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\nu)-f(x)}{h}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)\nu_i(x)=\frac{\partial}{\partial\nu}f(x),$$

jossa e_i on muotoa $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ oleva yksikkövektori ja ν on mielivaltaiseen suuntaan osoittava yksikkövektori.

Määritelmä 2.1. Olkoon $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Määrittelemme Laplace operaattorin Δ

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}f=:\Delta f.$$

Funktiolle $u:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ merkinnällä Δu tarkoitamme lähtöjoukon $\mathbb{R}^n$ osan suhteen otettujen osittaisderivaattojen summaa. Joskus myös merkitsemme Δ_x korostamaan tätä.

Määritelmä 2.2. Olkoon $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funktio. Joukon $\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)\neq 0\}$ sulkeuma on nimeltään funktion f kantaja. Merkitsemme $f\in C_0(\Omega)$, jos $f:\Omega\to\mathbb{R}$ on jatkuva ja sen kantaja on kompakti.

Määritelmä 2.3. Olkoon $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Jos funktion f kaikki osittaisderivaatat kertalukuun $k\in\mathbb{N}$ asti ovat jatkuvia joukossa Ω, niin merkitsemme $f\in C^k(\Omega)$. Jos kaikkien kertalukujen derivaatat ovat jatkuvia merkitsemme $f\in C^\infty(\Omega)$.

Funktiolle $\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ merkinnässä $C^{h,k}(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ h kertoo montako kertaa funktio on derivoituva lähtöjoukon $\mathbb{R}^n$ osan muuttujien suhteen ja k vastaavasti kertoo montako kertaa funktio on jatkuvasti derivoituva $[0,\infty)$ osan suhteen.

Määritelmä 2.4. Olkoon $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Funktion f divergenssi $\mathrm{div}(f)$ on

$$\mathrm{div}(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f_i.$$

Määritelmä 2.5. Olkoon $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Funktion f gradientti pisteessä $x\in\Omega$ on

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f(x),\frac{\partial}{\partial x_2}f(x),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}f(x)\right).$$

Seuraavissa määritelmissä ja lauseissa käytämme merkintää $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}=\overline{\mathbb{R}}$.

Määritelmä 2.6. Olkoon $1\leq p<\infty$ ja $f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ mitallinen funktio. Määrittelemme L^p-normin

$$||f||_{p,\Omega}=\left(\int_\Omega|f|^p dx\right)^{1/p},$$

ja merkitsemme $f\in L^p(\Omega)$, jos $||f||_{p,\Omega}<\infty$. Käytämme L^p-normille usein lyhennettyä merkintää $||f||_p$, koska on selvää minkä joukon yli integointi tehdään.

Määritelmä 2.7. Olkoon $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Sanomme, että funktio f on lokaalisti integroituva ja merkitsemme $f\in L^1_{loc}(\Omega)$, jos kaikilla kompakteilla joukoilla $K\subset\Omega$ pätee

$$\int_K|f(x)|dx<\infty.$$

MÄÄRITELMÄ 2.8. Olkoon $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen funktio. Määrittelemme L^∞-normin

$$||f||_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ melkein kaikilla } x \in \Omega\},$$

ja merkitsemme $f \in L^\infty(\Omega)$, jos $||f||_\infty < \infty$.

MÄÄRITELMÄ 2.9. Olkoon $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen funktio. Merkitsemme $f \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, jos kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \Omega$

$$\inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ melkein kaikilla } x \in K\} < \infty.$$

LAUSE 2.10. *Kolmioepäyhtälö. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

LAUSE 2.11. *Minkowskin epäyhtälö* [10]. *Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $f, g \in L^p(\Omega)$. Tällöin*

$$||f + g||_{p,\Omega} \leq ||f||_{p,\Omega} + ||g||_{p,\Omega}.$$

LAUSE 2.12. *Hölderin epäyhtälö* [6]. *Olkoon $1 \leq p < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ ja $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ mitallisia funktiota. Tällöin*

$$||fg||_{1,\Omega} \leq ||f||_{p,\Omega} \cdot ||g||_{q,\Omega}.$$

Tapauksessa $p = 1$ määrittelemme $q = \infty$.

LAUSE 2.13. *Monotoninen konvergenssi. Olkoon $f : \Omega \to [0, \infty]$ ja olkoon $\{f_k\}$ nouseva jono mitallisia funktioita siten, että*

$$f_k(x) \xrightarrow{\text{k}\to\infty} f(x) \text{ kaikilla } x \in \Omega.$$

Tällöin

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx.$$

LAUSE 2.14. *Lebesquen dominoitu konvergenssi. Olkoon $f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ jono mitallisia funktioita siten, että*

$$f_k(x) \xrightarrow{\text{k}\to\infty} f(x) \text{ melkein kaikilla } x \in \Omega.$$

Lisäksi oletetaan, että on olemassa funktio $g \in L^1(\Omega)$ jolle kaikilla k pätee

$$|f_k(x)| \leq |g(x)| \text{ melkein kaikilla } x \in \Omega.$$

Tällöin

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx.$$

LAUSE 2.15. *Gauss-Green. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, yhtenäinen ja rajoitettu joukko ja joukon reuna $\partial\Omega \in C^1$. Tämä tarkoittaa, että reuna saadaan eräässä mielessä C^1-funktioiden avulla. Katso tarkka määritelmä* [3] *liitteet C.1. Tällöin kaikilla funktioilla $u \in C^1(\overline{\Omega})$ pätee*

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu_i(x)dS,$$

jossa $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ *on joukosta* Ω *ulospäin osoittava yksikkövektori pisteessä* $x \in \partial\Omega$.

LAUSE 2.16. *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *avoin, yhtenäinen ja rajoitettu joukko ja* $\partial\Omega \in C^1$. *Tällöin kaikilla funktioilla* u, $v \in C^2(\overline{\Omega})$ *pätee*

$$\int_\Omega v\Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial}{\partial\nu}u\, dS - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial}{\partial\nu}v\, dS + \int_\Omega u\Delta v\, dx,$$

jossa ν *on joukosta* Ω *ulospäin osoittava yksikkövektori.*

TODISTUS. Lausetta 2.15 soveltaen katso [9] Lause 2.9. □

2.2. Funktioiden approksimointi avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$. Käsittelemme hieman L^p-funktioiden teoriaa, jotta saamme käyttöön Lauseen 2.19 tuloksen. Tarvitsemme tätä lausetta, kun käsittelemme $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä otetun alkudatan alkuarvo-ongelmaa Lauseessa 5.4. Lauseet 2.17 ja 2.18 ovat luentomuistiinpanoista [8] ja siloittajia käsittelevä Lause 2.19 on DiBenedetton kirjasta [1]. Kirjassa annetaan silottajien alkuperäksi [5].

LAUSE 2.17. *Joukko* $C_0(\mathbb{R}^n)$ *on tiheässä joukossa* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *kaikilla* $1 \le p < \infty$. *Toisin sanoen kaikilla* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *ja kaikilla* $\epsilon > 0$ *on olemassa* $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *siten, että*

$$||f - \varphi||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \epsilon.$$

TODISTUS. Tavoitteenamme on palauttaa ongelma kompaktin joukon karakteristisen funktion tapaukseen. Olkoon $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Käyttäen dominoutua konvergenssiä ja funktioita $f\chi_{B(0,j)}$ voimme olettaa, että funktion f kantaja on rajoitettu. Jaamme funktion kahtia positiivi- ja negatiiviosaan $f = f^+ - f^-$, jolloin Minkowskin epäyhtälön 2.11 mukaan $||f||_p \le ||f^+||_p + ||f^-||_p$. Näin ollen voimme olettaa funktion f olevan ei-negatiivinen. Koska f on mitallinen funktio, on olemassa funktioon f kasvava jono $\{f_k\}$ yksinkertaisia funktoita siten, että $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f$. Tällöin myös $f_k(x)^p \nearrow f(x)^p$. Käyttäen monotonista konvergenssia meidän on riittävää arvioida funktioita f_k. Yksinkertaiset funktiot ovat muotoa

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{A_j},$$

jossa $c_j \in \mathbb{R}$, $A_j \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja ja χ_{A_j} on joukon A_j karakteristinen funktio. Käytämme Minkowskin epäyhtälöä Lauseesta 2.11

$$||f_k||_p \le \sum_{j=1}^m c_j ||\chi_{A_j}||_p.$$

Koska joukko A on mitallinen ja $m_n(A) < \infty$ on olemassa jono kompakteja joukkoja K_l siten, että $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset A$ ja $\chi_{K_l} \to \chi_A$. Käyttäen monotonista konvergenssia pääsemme kompaktin joukon karakteristen funktion tapaukseen. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko siten, että $K \subset G$ ja $m_n(G \setminus K) < \epsilon$. Ja olkoon $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \max\left\{0, \frac{\delta - d(x, K)}{\delta}\right\}, \text{ jossa}$$

$$\delta = \frac{d(K, \mathbb{R}^n \setminus G)}{2}.$$

Funktiolle φ pätee $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi_K \equiv 1$ ja sen kantaja kuuluu joukkoon G. Nyt laskemme

$$||\chi_K - \varphi||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_K(x) - \varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Voimme pienentää integrointijoukon joukoksi G, sillä molemmat funktiot ovat nollia sen ulkopuolella. Joukossa K molemmat funktiot saavat vain arvon yksi, jolloin integointi tämän joukon yli on nolla. Siis voimme käyttää integrointijoukkona joukkoa $G \setminus K$. Tässä joukossa $\chi_K \equiv 0$ ja $\varphi \leq 1$ jolloin saamme arvion

$$\begin{aligned} ||\chi_K - \varphi||_p &\leq \left(\int_{G \setminus K} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= m_n(G \setminus K)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

□

Lause 2.18. *Olkoon $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $h \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0.$$

Todistus. Jos $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, niin tällöin lause pätee, koska f on tasaisesti jatkuva ja integrointi on kompaktin joukon yli. Olkoon $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $\epsilon > 0$. Valitaan lauseen 2.17 avulla $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, jolla pätee $||f - \varphi||_p < \epsilon$. Nyt

$$\begin{aligned} ||f(x+h) - f(x)||_p &= ||f(x+h) - \varphi(x+h) + \varphi(x+h) - \varphi(x) + \varphi(x) - f(x)||_p \\ &\leq ||f(x+h) - \varphi(x+h)||_p + ||\varphi(x+h) - \varphi(x)||_p + ||\varphi(x) - f(x)||_p \\ &\leq 3\epsilon, \end{aligned}$$

kun $|h|$ on tarpeeksi pieni. □

Määrittelemme siloitus ytimen $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$J(x) = \begin{cases} ke^{-1/(1-|x|^2)}, & \text{jos } |x| < 1 \\ 0, & \text{jos } |x| \geq 1, \end{cases}$$

jossa $k > 0$ valitaan siten, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} J(x) dx = 1.$$

Kaikille $\epsilon > 0$ määrittelemme Friedrichsin [5] siloittajat $J_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$J_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} J\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big).$$

Funktion J ominaisuuksista seuraa, että $J_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja $J_\epsilon(x) = 0$, kun $|x| \geq \epsilon$ ja

$$\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x) dx = 1.$$

LAUSE 2.19. *Olkoon $u \in L^p(\Omega)$ jollain $1 \leq p < \infty$ ja J_ϵ kuten yllä. Tällöin $J_\epsilon * u$ on funktioiden J_ϵ ja u konvoluutio ja*

$$J_\epsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)u(y)dy.$$

Tälle konvoluutiolle pätee

i) $J_\epsilon * u \in L^p(\Omega)$ ja $||J_\epsilon * u||_{p,\Omega} \leq ||u||_{p,\Omega}$

ii) $\lim_{\epsilon \to 0} ||J_\epsilon * u - u||_{p,\Omega} = 0.$

TODISTUS. i) Kun $p = 1$ riittää vaihtaa integroinnin järjestys ja käyttää siloittajien ominaisuutta $\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon = 1$

$$\begin{aligned}
||J_\epsilon * u||_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)u(y)dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|u(y)|dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)| \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)dxdy = ||u||_1.
\end{aligned}$$

Kun $1 < p < \infty$ aloitamme jakamalla funktion J_ϵ kahteen osaan ja käytämme Hölderin epäyhtälöä 2.12

$$\begin{aligned}
|(J_\epsilon * u)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)^{\frac{p-1}{p}} J_\epsilon(x-y)^{\frac{1}{p}} |u(y)|dy \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Muistamme taas, että funktion J_ϵ integraali on yksi ja korotamme molemmat puolet lauseketta potenssiin p

$$|(J_\epsilon * u)(x)|^p = \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|u(y)|^p dy$$

Kuten tapauksessa $p = 1$ vaihdamme integroinnin järjestyksen

$$\begin{aligned}
||J_\epsilon * u||_p &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(J_\epsilon * u)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|u(y)|^p dydx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = ||u||_p.
\end{aligned}$$

Väitteen ii) todistamisessa teemme ensin arvion

$$\begin{aligned}
|(J_\epsilon * u)(x) - u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)u(y)dy - u(x) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|u(y) - u(x)|dy
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(z)|u(x-z) - u(x)|dz.$$

Jakaudumme taas kahteen tapaukseen muuttujasta p riippuen. Kun $p = 1$ arvioimme

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(J_\epsilon * u)(x) - u(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(z)|u(x-z) - u(x)|dzdx$$

ja tämän jälkeen vaihdamme integroinnin järjestyksen. Funktio J_ϵ on nolla joukon $B(0,\epsilon)$ ulkopuolella. Voimme siis pienentää integrointijoukon tähän palloon

$$= \int_{B(0,\epsilon)} J_\epsilon(z) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-z) - u(x)|dxdz.$$

Nyt kun ϵ on tarpeeksi pieni $|x - z|$ on pieni ja tällöin lauseen 2.18 avulla saamme tuloksen. Kun $p > 1$ teemme Hölderin epäyhtälössä saman arvion eksponenteille kuin kohdassa i)

$$|(J_\epsilon * u)(x) - u(x)| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(z)dz\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(z)|u(x-z) - u(x)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nyt kuten tapauksessa $p = 1$

$$\begin{aligned} ||J_\epsilon * u - u||_p &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(z)|u(x-z) - u(x)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \int_{B(0,\epsilon)} J_\epsilon(z) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-z) - u(x)|^p dxdz \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0. \end{aligned}$$

□

2.3. Lämpöyhtälön fysikaalinen tulkinta ja fundamentaaliratkaisu. Lämpöyhtälön fysikaalinen tulkinta on lainattu Evansin kirjasta [3]. Lämpöyhtälöllä kuvataan jonkin tiheyden u kuten lämmön tai liuoksen konsentraation muutosta ajassa. Olkoon U sileä joukko. Lämpömäärän muutos joukossa U ajan t suhteen on yhtäsuuri kuin kokonaisvirtaus joukon reunan lävitse

$$\partial_t \int_U u\, dx = -\int_{\partial U} F \cdot \nu\, dS.$$

Divergenssilausetta käyttäen saamme

$$-\int_{\partial U} F \cdot \nu\, dS = -\int_U \operatorname{div}(F)\, dx,$$

jonka jälkeen voimme päätellä, että $\partial_t u = -\operatorname{div}(F)$. Fysiikasta saamme $F = -a\nabla u$, jolloin vakiolla $a = 1$

$$\partial_t u = -\operatorname{div}(-\nabla u) = \Delta u.$$

Määritelmä 2.20. Kutsumme funktiota $\Gamma : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

lämpöyhtälön fundamentaaliratkaisuksi. Se on hyvin tärkeässä osassa muita ratkaisuja etsittäessä. Fundamentaaliratkaisu voidaan johtaa lämpöyhtälöstä ensiksi arvaamalla, että ratkaisu on säteestä riippuva, jolloin saadaan kaksi tavallista differentiaaliyhtälöä.

Tämä on tehty yksityiskohtaisesti LuK-tutkielmassani [9] kappale 3.1. Vakio $(4\pi)^{n/2}$ ei ole oleellinen ratkaisun käyttäytymisen kannalta, mutta tällä valinnalla saamme laskuja helpommin käsiteltäviksi.

LEMMA 2.21. *Normalisointivakiolla* $(4\pi)^{n/2}$ *kaikilla* $t > 0$ *pätee*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t)dx = 1.$$

TODISTUS. Suoraan laskemalla, katso [9] Lemma 3.2. □

LEMMA 2.22. *Kaikilla* $x \in \mathbb{R}^n$ *ja* $t > 0$ *fundamentaaliratkaisu* Γ *toteuttaa lämpöytälön.*

TODISTUS. Laskemme funktion Γ osittaisderivaatat ja Laplace operaattorin

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(x,t) &= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\frac{n}{2t}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\frac{|x|^2}{4t^2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\
\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x,t) &= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\frac{x_i}{2t}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\
\frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}\Gamma(x,t) &= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\frac{1}{2t}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\frac{x_i^2}{4t^2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\
\Delta\Gamma(x,t) &= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\frac{n}{2t}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\frac{|x|^2}{4t^2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

Nyt näemme, että $\Gamma_t(x,t) - \Delta\Gamma(x,t) = 0$. □

3. Jatkuva alkudata

Tutkimme ensimmäiseksi lämpöyhtälön alkuarvo-ongelmaa, jossa alkudatafunktio g on jatkuva ja rajoitettu. Ensin on hyvä perehtyä tähän yksinkertaisempaan tapaukseen, sillä lokaalisti integroituvan alkudatan tapauksella on paljon yhtäläisyyksiä tähän. Tämä kappale on koostettu LuK-tutkielmani [9] avulla, joka käyttää ensisijaisena lähteenä Evansin kirjaa [3].

LAUSE 3.1. *Olkoon* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *ja rajoitettu. Tällöin funktio* $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t)g(y)dy
\end{aligned}$$

on ratkaisu lämpöyhtälön alkuarvo-ongelmalle

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,t) = g(x), & \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

TODISTUS. Ensimmäiseksi näytämme funktion u jatkuvuuden. Olkoon $x, z \in \mathbb{R}^n$ ja $t, \epsilon, R > 0$. Aloitamme käyttämällä funktion g rajoittuneisuutta

$$|u(x,t) - u(x+z,t)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x-y,t) - \Gamma(x+z-y,t)|dy.$$

Jaamme integraalin kahteen palaan pallon $B(x, 3R)$ avulla. Saamme pallon sisällä laskettavan integraalin pieneksi, koska Γ on tasaisesti jatkuva. Arvioimme jäljelle jäänyttä kolmioepäyhtälöllä ylöspäin, jolloin saamme

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,3R)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy + C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,3R)} e^{-\frac{|x+z-y|^2}{4t}} dy + \epsilon.$$

Arvioimme ylöspäin kasvattamalla integrointijoukkoja ja laskemme integraalin napakoordinaateissa

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,R)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy + C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x+z,R)} e^{-\frac{|x+z-y|^2}{4t}} dy + \epsilon \\
&= C \int_R^\infty \int_{S^n} e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1} d\theta dr + \epsilon \\
&\leq C \int_R^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1} dr + \epsilon \\
&\leq C \int_R^\infty e^{-2r} e^r dr + \epsilon \\
&\leq Ce^{-R} + \epsilon \\
&\leq 2\epsilon,
\end{aligned}$$

kun R on suuri ja $|z|$ on pieni.

Toiseksi näytämme erotusosamäärän avulla, että ratkaisu u on derivoituva ja, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $t > 0$ pätee

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\Gamma(x-y,t)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y,t)dy.$$

Olkoon $\epsilon, h, R > 0$ ja $x, e_i = (0, ..., 1, ...0) \in \mathbb{R}^n$. Kuten edellä käytämme funktion g rajoittuneisuutta ja jaamme integroinnin kahteen osaan pallon $B = B(x, r)$ avulla

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\Gamma(x+he_i-y,t)dy - \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\Gamma(x-y,t)dy}{h} - \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)dy \right| \\
\leq & C\left| \frac{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \Gamma(x+he_i-y,t)dy - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \Gamma(x-y,t)dy}{h} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)dy \right| \\
&+ C\left| \frac{\int_B \Gamma(x+he_i-y,t)dy - \int_B \Gamma(x-y,t)dy}{h} - \int_B \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)dy \right| \\
\leq & C\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{\Gamma(x+he_i-y,t) - \Gamma(x-y,t)}{h} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)dy \right| \\
&+ C\left| \int_B \frac{\Gamma(x+he_i-y,t) - \Gamma(x-y,t)}{h} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)dy \right|.
\end{aligned}$$

Pallon ulkopuolella käytämme differentiaalilaskennan väliarvolausetta, jolla saamme pisteen ξ pisteiden x_i ja $x_i + h$ välistä. Pallon sisällä kirjoitamme funktioiden Γ erotuksen eri tavalla

$$\leq C\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(\xi-y,t) - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)dy \right|$$

$$+ C\left| \int_B \frac{1}{h} \int_0^h \frac{d}{dr}\Gamma(x + re_i - y, t)dr - \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x - y, t)drdy\right|.$$

Funktion Γ x_i-derivaatta on $-\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{x_i}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Voimme arvioida pallon ulkopuolen yli laskettavaa integraalia kuten jatkuvuustodistuksessa, koska vakiot ja kerroin x_i eivät vaikuta kyseisiin arvioihin. Pallon sisäpuolella käytämme funktion $\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma$ tasaista jatkuvuutta. Näin saamme

$$\begin{aligned}
&\leq \epsilon + C\int_B \frac{1}{h} \int_0^h \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x + re_i - y, t) - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x - y, t)\right|drdy \\
&\leq \epsilon + C\int_B \frac{1}{h} \int_0^h \epsilon \, drdy \\
&= \epsilon + C\epsilon,
\end{aligned}$$

kun R on suuri ja h on riittävän pieni. Funktion u muut derivaatat ja niiden jatkuvuus voidaan todistaa samaan tapaan. Nyt kun olemme näyttäneet, että saamme vaihtaa integroinnin ja derivoinnin järjestyksen voimme helposti osoittaa, että funktio u toteuttaa lämpöyhtälön

$$u_t - \Delta_x u = \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_t(x - y, t) - \Delta_x\Gamma(x - y, t))g(y)dy = 0.$$

Lopuksi todistamme vielä alkuarvoehdon täyttymisen eli näytämme, että kaikilla pisteillä $x_0 \in \mathbb{R}^n$ kun $x \to x_0$ ja $t \to 0_+$ niin $u(x, t) \to g(x_0)$. Aloitamme valitsemalla $\delta > 0$ siten, että kaikilla $y \in \mathbb{R}^n$ joilla $|y - x_0| \leq \delta$ pätee $|g(y) - g(x_0)| \leq \epsilon$. Käyttäen Lemmaa 2.21 saamme

$$|u(x, t) - g(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t)g(y)dy - g(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t)dy\right|.$$

Ensin yhdistämme integraalit ja sitten jaamme integraalin kahteen osaan palloa $B(x, \delta)$ käyttäen

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{B(x_0,\delta)} \Gamma(x - y, t)|g(y) - g(x_0)|dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} \Gamma(x - y, t)|g(y) - g(x_0)|dy \\
&=: I + J.
\end{aligned}$$

Pallon sisällä integroidessa voimme käyttää funktion g jatkuvuutta ja saamme

$$I \leq \int_{B(x_0,\delta)} \Gamma(x - y, t)\epsilon \, dy \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t)dy = \epsilon.$$

Osaa J laskettaessa $|y - x_0| \geq \delta$ ja koska $x \to x_0$ niin voimme olettaa että $|x - x_0| \leq \delta/2$. Näitä ja kolmioepäyhtälöä käyttäen teemme arvion

$$\begin{aligned}
&|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| \leq |y - x| + \delta/2 \leq |y - x| + |y - x_0|/2 \\
&\Rightarrow |y - x_0|/2 \leq |y - x|
\end{aligned}$$

Tätä arviota ja funktion g rajoittuneisuutta käyttäen saamme

$$J \leq C \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} \Gamma(x - y, t)dy$$

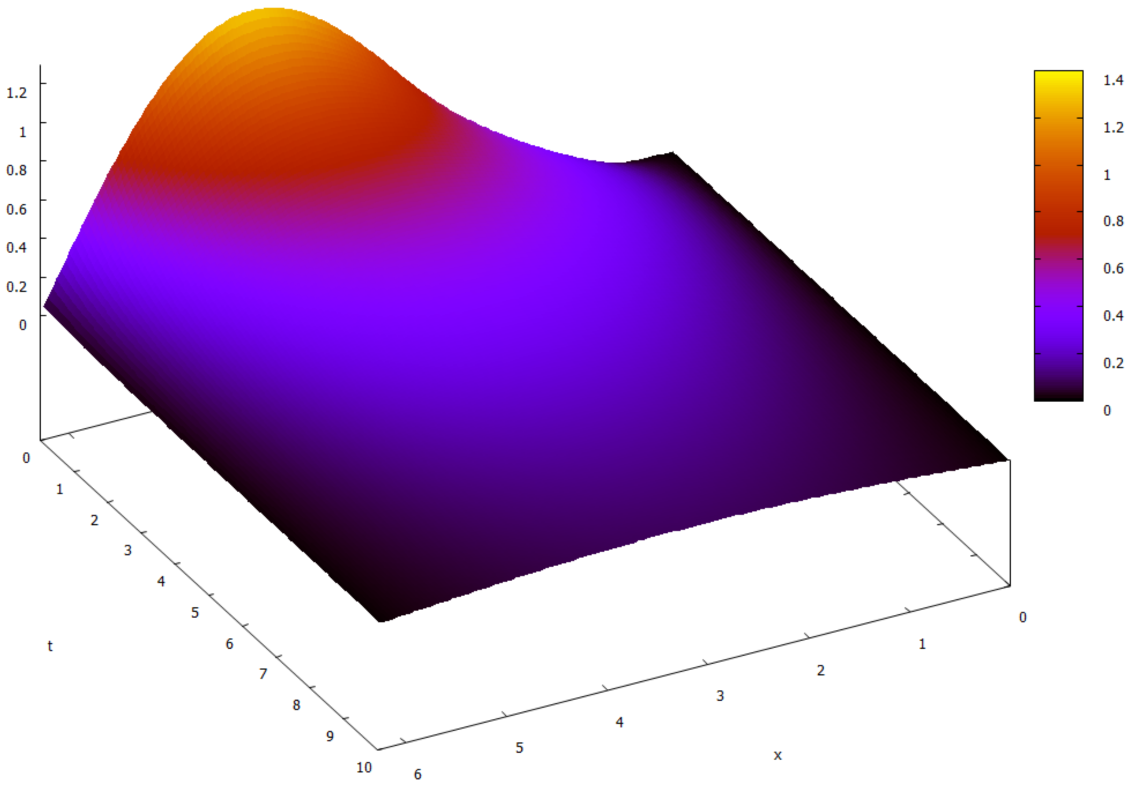
$$
\begin{aligned}
&= \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\
&\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}} dy \\
&= \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} \int_{S^n} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} d\theta dr.
\end{aligned}
$$

Muuttujan θ suhteen integroitava funktio on vakio ja se häviää vakioon C. Teemme muuttujan vaihdon $r^2 = 16tz^2$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\frac{\delta}{4t^{1/2}}}^{\infty} e^{-z^2} (4t^{1/2}z)^{n-1} 4t^{1/2} z dz \\
&= C \int_{\frac{\delta}{4t^{1/2}}}^{\infty} e^{-z^2} z^n dz \xrightarrow{t \to 0_+} 0.
\end{aligned}
$$

Viimeinen raja-arvo lasketaan kuten jatkuvuuden todistuksessa. $\square$

KUVA 1. Esimerkkikuva lämpöyhtälön alkuarvo-ongelman ratkaisun käyttäytymisestä yhdessä ulottuvuudessa. Alkudataksi on valittu $\sin(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}\sin(x)$.



3.1. Epähomogeeninen lämpöyhtälö. Seuraavaksi perehdymme epähomogeeniseen lämpöyhtälöön. Etsimme ratkaisua ongelmalle

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{cases}$$

jossa f on tunnettu jatkuva funktio $\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Etsimme ratkaisua Duhamelin periaatteen [2] avulla. Olkoon

$$v(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t-s) f(y,s) dy.$$

Tällöin $v(x,t,s)$ on ratkaisu ongelmalle

$$\begin{cases} v_t(x,t,s) - \Delta_x v(x,t,s) = 0, & \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ v(x,s,s) = f(x,s), & \mathbb{R}^n \times \{t=s\}, \end{cases}$$

joka on homogeeninen alkuarvo-ongelma, jossa aloitushetki on siirretty kohtaan $t = s$. Rakennamme ratkaisun epähomogeeniselle lämpöyhtälölle ratkaisun $v(x,t,s)$ avulla. Määrittelemme

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,s) ds.$$

Laskemme derivaatat funktiolle $u(x,t)$

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= v(x,t,t) + \int_0^t v_t(x,t,s) ds \\ &= f(x,t) + \int_0^t v_t(x,t,s) ds \\ \Delta u(x,t) &= \int_0^t \Delta v(x,t,s) ds \\ &= \int_0^t v_t(x,t,s) ds, \end{aligned}$$

ja huomaamme, että $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)$. Lisäksi $u(x,0) = \int_0^0 v(x,0,s) ds = 0$, joten $u(x,t)$ on epähomogeenisen lämpöyhtälön ratkaisu.

Lause 3.2. *Olkoon $f \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Tällöin funktio $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t-s) f(y,s) dy ds$$

on ratkaisu epähomogeeniselle lämpöyhtälölle.

Todistus. Funktion u derivaatta muuttujan t suhteen on

$$\begin{aligned} u_t(x,t) = &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s) f_t(x-y,t-s) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,t) f(x-y,0) dy, \end{aligned}$$

jossa jälkimmäinen termi seuraa analyysin peruslauseesta ja ketjusäännöstä. Funktion u Laplace-operaattori on

$$\Delta_x u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s)\Delta_x f(x-y,t-s)dyds,$$

joka voidaan laskea erotusosamäärällä samaan tapaan kuin Lauseessa 3.1. Ensimmäiseksi osoitamme, että funktio u toteuttaa epähomogeenisen lämpöyhtälön kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $t>0$. Aloitamme yhdistämällä derivaattoja sisältävät integraalit ja sen jälkeen jaamme tämän integraalin s-muuttujan suhteen kahteen osaan

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s)\big((\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)f(x-y,t-s)\big)dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s)f(x-y,0)dy \\
&= \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s)\big((-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y)f(x-y,t-s)\big)dyds \\
&\quad + \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s)\big((-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y)f(x-y,t-s)\big)dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,t)f(x-y,0)dy \\
&=: I^1 + I^2 + I^3.
\end{aligned}$$

Huomaa, että operaattorin Δ_x voi vaihtaa tässä tapauksessa operaattoriin Δ_y, koska kerroin -1 tulee kahteen kertaan, jolloin etumerkki ei muutu. Osaa I^1 laskiessa ensimmäiseksi vaihdamme integraalien järjestyksen

$$\begin{aligned}
I^1 &= \int_t^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s)\big((-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y)f(x-y,t-s)\big)dyds \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \int_\epsilon^t \Gamma(y,s)\frac{\partial}{\partial s}f(x-y,t-s)dsdy - \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s)\Delta_y f(x-y,t-s)dyds.
\end{aligned}$$

Valitsemme $R > 0$ siten, että funktion f kantaja on pallon $B(0,R)$ sisällä. Käytämme molemmissa paloissa osittaisintegrointia siirtämään derivaatat funktiolle Γ. Operaattoria Δ_y käsitellessä integointi voidaan rajoittaa joukkoon $B(0,2R)$, koska funktio f on nolla sen ulkopuolella. Näin ollen osittaisintegroinnissa pallon reunan yli laskettavat integraalit ovat nollia (katso Lause 2.16).

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \Big/_\epsilon^t \Gamma(y,s)f(x-y,t-s)dy + \int_{\mathbb{R}^n} \int_\epsilon^t \frac{\partial}{\partial s}\Gamma(y,s)f(x-y,t-s)dsdy \\
&\quad - \int_\epsilon^t \int_{B(0,2R)} \Delta_y\Gamma(y,s)f(x-y,t-s)dyds \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,t)f(x-y,0) + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,\epsilon)f(x-y,t-\epsilon)dy \\
&\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \int_\epsilon^t \frac{\partial}{\partial s}\Gamma(y,s)f(x-y,t-s)dyds - \int_{\mathbb{R}^n} \int_\epsilon^t \Delta_y\Gamma(y,s)f(x-y,t-s)dyds}_{=\int_{\mathbb{R}^n}\int_\epsilon^t [(\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y)\Gamma(y,s)]f(x-y,t-s)dyds=0}
\end{aligned}$$

$$= -I^3 + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,\epsilon) f(x-y, t-\epsilon) dy.$$

Oletuksen $f \in C_0^{2,1}$ ansiosta funktion f ensimmäisen ja toisen kertaluvun derivaatat ovat rajoitettuja. Arvioimme niitä osassa I^2 vakiolla ja saamme

$$|I^2| \leq \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s) C dyds \leq \epsilon C.$$

Yhdistämme yllä olevat arviot

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,\epsilon) f(x-y,t-\epsilon) dy - I^3 + \epsilon C + I^3 \\ &= f(x,t). \end{aligned}$$

Raja-arvo jossa $\epsilon \to 0$ lasketaan samaan tapaan kuin alkuarvoehdon toteutuminen Lauseessa 3.1. Näytämme vielä alkuarvoehdon toteutumisen. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska funktio f on rajoitettu, arvioimme sitä ylhäältä vakiolla ja saamme Lemman 2.21 avulla

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s) f(x-y, \epsilon - s) dyds \\ &\leq \lim_{\epsilon \to 0} C \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y,s) dyds \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} C\epsilon = 0. \end{aligned}$$

□

Integraalin ja derivaatan lineaarisuuden ansiosta saamme ratkaisun epähomogeeniselle alkuarvo-ongelmalle summaamalla edellisiä tuloksia.

LAUSE 3.3. *Lämpöyhtälön epähomogeeniselle alkuarvo-ongelmalle*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x), & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

saadaan ratkaisu kaavasta

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t-s) f(y,s) dyds.$$

TODISTUS. Merkitsemme ratkaisua $u = v + w$. Saamme ensimmäisen ehdon suoraan derivoimalla

$$u_t - \Delta u = v_t - \Delta v + w_t - \Delta w = 0 + f = f.$$

Ja toisen ehdon saamme laskemalla

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = g(x) + 0 = g(x).$$

□

3.2. Ratkaisun yksikäsitteisyys. Lämpöyhtälön alkuarvo-ongelman ratkaisu saadaan yksikäsitteiseksi, jos ratkaisun kasvunopeutta rajoitetaan. Seuraavaksi todistamme kasvuehdon avulla lämpöyhtälölle maksimiperiaatteen ja sen avulla todistamme ratkaisun yksikäsitteisyyden. Myöhemmin kappaleessa 4 näytämme, että kasvuehto on välttämätön oletus yksikäsitteisyyden saavuttamiseksi. Kappaleessa on käytetty lähteenä Evansin kirjaa [3]. Lauseen 3.5 todistuksen alkuperäksi kirjassa annetaan [15] ja Lauseen 3.6 todistukselle [7].

MÄÄRITELMÄ 3.4. Olkoon Ω avoin ja yhtenäinen joukko. Määrittelemme joukot

$$\begin{aligned}\Omega_T &= \Omega \times (0,T)\\ \partial_p\Omega_T &= (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]).\end{aligned}$$

LAUSE 3.5. *Maksimiperiaate rajoitetussa joukossa. Olkoon Ω avoin ja yhtenäinen joukko ja olkoon $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\partial_p\Omega_T)$ ratkaisu lämpöyhtälölle joukossa Ω_T. Tällöin*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\partial_p\Omega_T} u.$$

TODISTUS. Katso [3] luku 2 Lause 4. □

LAUSE 3.6. *Maksimiperiaate rajoittamattomassa joukossa. Olkoon $g \in C(\mathbb{R}^n)$ ja $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ ratkaisu ongelmalle*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0,T)\\ u = g, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\}.\end{cases}$$

Lisäksi jos funktion u kasvu on rajoitettua siten, että joillakin $\alpha, C > 0$

$$u(x,t) \le Ce^{\alpha|x|^2}, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T],$$

niin

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

TODISTUS. Kiinnitämme luvun $\mu > 0$ ja pisteen $y \in \mathbb{R}^n$ ja määrittelemme apufunktion

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T-\epsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-\epsilon-t)}}.$$

Tällöin funktio v toteuttaa lämpöyhtälön $v_t - \Delta v = 0$ joukossa $\mathbb{R}^n \times (0,T)$. Olkoon $r > 0$, $\Omega = B(y,r)$ ja $\Omega_T = B(y,r) \times (0,T)$. Aluksi oletamme, että $4\alpha T < 1$ ja valitsemme $\epsilon > 0$ siten, että $4\alpha(T+\epsilon) < 1$. Tavoitteenamme on näyttää

$$v(y,t) \le \sup_{\overline{\Omega}_T} v \le \sup_{\partial_p\Omega_T} v \le \sup_{\mathbb{R}^n} g,$$

jonka jälkeen saamme

$$u(y,t) = \lim_{\mu\to 0} v(y,t) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Ensimmäinen epäyhtälö on selvä, koska piste y kuuluu joukkoon $\overline{\Omega}_T$. Toisen epäyhtälön saamme rajoitetun joukon maksimiperiaatteesta 3.5. Kolmatta varten katsomme joukkoa $\partial_p \Omega_T$ kahdessa osassa. Ensin katsomme "pohjaa" eli $x \in \Omega$ ja $t = 0$. Tällöin

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T-\epsilon)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-\epsilon)}} \le u(x,0) = g(x).$$

"Seinillä" eli joukossa jossa $|x-y| = r$ ja $0 \le t \le T$ käytämme ensin funktion u kasvuehtoa

$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(x,t) - \frac{\mu}{(T-\epsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T-\epsilon-t)}} \\ &\le Ce^{\alpha|x|^2} - \frac{\mu}{(T-\epsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T-\epsilon-t)}} \end{aligned}$$

Teemme kolmioepäyhtälöllä arvion $|x| \le |x-y| + |y| \le r + |y|$ ja oletuksesta $4\alpha(T+\epsilon) < 1$ saamme

$$\frac{1}{4(T+\epsilon)} > \alpha \Rightarrow \frac{1}{4(T+\epsilon)} = \alpha + \gamma$$

jollakin $\gamma > 0$. Käyttäen näitä kahta saamme funktiolle v arvion

$$\begin{aligned} v(x,t) &\le Ce^{\alpha(r+|y|)^2} - \frac{\mu}{(T-\epsilon)^{n/2}} e^{(\alpha+\gamma)r^2} \\ &\le \sup_{\mathbb{R}^n} g, \end{aligned}$$

koska jälkimmäisen termin r^2 kerroin $\alpha + \gamma$ on suurempi kuin ensimmäisen termin r^2 kerroin α. Tällöin kun r on riittävän suuri erotus on pieni. Lopuksi toteamme vielä, että jos alussa tekemämme oletus $4\alpha T < 1$ ei ole tosi, valitsemme $T' = 1/(8a)$ ja jaamme välin $[0,T]$ pienempiin väleihin $[0,T'], [T', 2T'] \ldots$ ja käytämme yllä olevia laskuja jokaiselle välille. □

Lause 3.7. *Olkoon $g \in C(\mathbb{R}^n)$ ja $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Tällöin ongelmalla*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

on korkeintaan yksi kasvuehdon

$$|u(x,t)| \le Ce^{\alpha|x|^2}, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$$

toteuttava ratkaisu joukossa $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.

Todistus. Olkoon u ja v kaksi kasvuehdon toteuttavaa ratkaisua. Tällöin funktiolle $u - v$ pätee

$$\begin{cases} (u-v)_t - \Delta(u-v) = u_t - \Delta u - (v_t - \Delta v) = f - f = 0, & \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u - v = g - g = 0, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

ja

$$|u(x,t) - v(x,t)| \le |u(x,t)| + |v(x,t)| \le 2Ce^{\alpha|x|^2}.$$

Funktio $u - v$ on siis ratkaisu homogeenisen lämpöyhtälön alkuarvo-ongelmalle ja näin ollen voimme soveltaa siihen maksimiperiaatetta

$$u - v \le \sup_{\mathbb{R}^n}(g - g) = 0.$$

Teemme saman toisinpäin lasketulle erotukselle $v - u$ ja sen jälkeen voimme todeta, että funktiot ovat samat. $\square$

4. Yksikäsitteisyyden vastaesimerkki

Tässä kappaleessa näytämme, että ratkaisun yksikäsitteisyys ei ole totta ilman ratkaisun kasvua rajoittavaa ehtoa. Teemme sen rakentamalla yhdelle alkuarvo-ongelmalle triviaalin nollaratkaisun lisäksi toisen nollasta poikkeavan ratkaisun. Kappale seuraa DiBenedetton kirjan [1] luvun 5 kappaletta 5. Kirjassa annetaan vastaesimerkin alkuperäislähteeksi Tychonovin julkaisu [14].

Lause 4.1. *On olemassa nollasta poikkeava ratkaisu alkuarvo-ongelmalle*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0, & \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Todistus. Määrittelemme apufunktion $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ja sen avulla funktion $u : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Olkoon

$$\varphi(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

sekä

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Suoraan laskemalla saamme

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n}\varphi(0)\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0 \\ \frac{d^2}{dx^2}u &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)2n(2n-1)\frac{x^{2n-2}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\varphi(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{d}{dt}u, \end{aligned}$$

jos derivaattojen siirtäminen summien sisälle on sallittua. Tästä näemme, että funktio u on lämpöyhtälön alkuarvo-ongelman ratkaisu. Meidän on vielä todistettava, että saamme viedä raja-arvon ja derivaatan summan sisälle. Saamme tehdä sen, jos yllä olevat sarjat ovat tasaisesti suppenevia (katso esimerkiksi Rudinin kirja [12] Lause 7.17). Tätä varten etsimme tasaisesti suppenevan sarjan, jossa on funktiossa u esiintyvää sarjaa suuremmat termit.

Käytämme funktion u derivaattatermin arvioimiseen kompleksianalyysin Cauchyn lausetta. Funktio φ on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Samaistamme t-akselin kompleksitason reaaliakselin kanssa. Kun $t > 0$ on kiinnitetty, ympyrän muotoinen polku

$$\gamma = \{z = t + \frac{t}{2}e^{i\theta}, 0 < \theta \leq 2\pi\}$$

ei kosketa origoa. Tällöin Cauchyn lauseen mukaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(z)}{(z-1)^{n+1}}dz.$$

Arvioimme tätä ylöspäin

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_\gamma \frac{e^{-Re(z^{-2})}}{|z-t|^{n+1}}|dz|.$$

$|z-t|^{n+1} = (t/2)^{n+1}$, koska integroimme ympyrän γ kehällä. Käyttäen tätä laskemme eteenpäin

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\right| \leq \frac{n!2^{n+1}}{2\pi t^{n+1}}\int_0^{2\pi} e^{-Re((t+\frac{t}{2}e^{i\theta})^{-2})}\left|\frac{t}{2}ie^{i\theta}\right|d\theta.$$

Koska $Re()$ termi on positiivinen $e^{-Re()}$ saa suurimman arvonsa, kun $Re()$ on lähellä nollaa. Arvioimme eksponenttia

$$Re\Bigg((t+\frac{t}{2}e^{i\theta})^{-2}\Bigg) = Re\Bigg(t^{-2}\frac{1}{1+e^{i\theta}+\frac{1}{4}e^{i2\theta}}\Bigg) = t^{-2}\frac{1}{1+\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta} \geq \frac{1}{4t^2},$$

koska nimittäjän suurin arvo on 4, kun $0 < \theta \leq 2\pi$. Nyt saamme

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\right| \leq \frac{n!2^n}{2\pi t^n}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{4t^2}}d\theta = n!\frac{2^n}{t^n}e^{-\frac{1}{4t^2}}.$$

Käyttäen tätä arviota palaamme arvioimaan funtiossa u esiintyvää sarjaa

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} n!\frac{2^n}{t^n}e^{-\frac{1}{4t^2}}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq e^{-\frac{1}{4t^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t^n}\frac{x^{2n}}{n!}.$$

Toisessa epäyhtälössä käytimme Stirlingin [13] epäyhtälöä

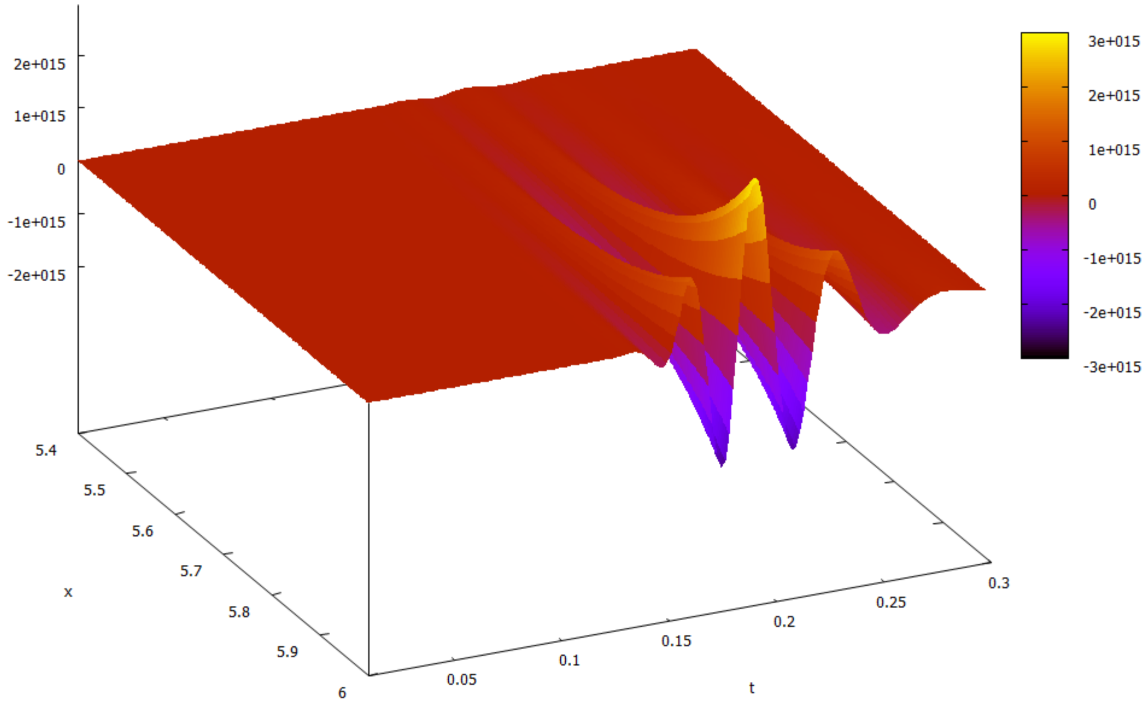
$$\frac{2^n n!}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!}.$$

Olkoon $x \in \mathbb{R}, t > 0$ ja $a > 0$. Tällöin kaikilla $|x| < a$ sarja on rajoitettu suppenevalla sarjalla

$$e^{-\frac{1}{4t^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t^n}\frac{a^{2n}}{n!} = e^{-\frac{1}{4t^2}}e^{\frac{a^2}{t}}.$$

Näin ollen sarja suppenee tasaisesti jokaisen pisteen $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$ ympäristössä.
$\square$

Kuva 2. Ensimmäiset 21 termiä yksikäsitteisyyden vastaesimerkkifunktion sarjasta.



5. Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä otetulle alkudatalle

Alkuarvo-ongelman alkudatan g ei tarvitse olla jatkuva, jotta ongelmalle löytyy ratkaisu. Tässä kappaleessa osoitamme, että lokaalisti integroituva alkudata riittää. Tulokset ovat samankaltaisia kuin jatkuvan alkudatan tapauksessa ja todistuksistakin löytyy samat ideat, mutta alkuarvojen käsittely on monimutkaisempaa. Lämpöyhtälön toteutumisen todistus Lauseessa 5.1 on itse kehitetty käyttäen Lauseen 3.1 ideoita. Lauseen toinen väite ja Lause 5.4 ovat DiBenedetton kirjasta [1] luvusta 5 kappaleet 4 ja 6.

Lause 5.1. *Olkoon $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ja g toteuttaa kasvuehdon $|g(x)| \leq C_0 e^{\alpha_0 |x|^2}$ melkein kaikilla $|x| \geq r_0$ joillakin $C_0, \alpha_0, r_0 > 0$. Tällöin funktio*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t) g(y) dy$$

toteuttaa lämpöyhtälön joukossa $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ kaikilla $T \in (0, \frac{1}{4\alpha_0})$.

Lisäksi kaikilla $\epsilon \in (0, \frac{1}{8\alpha_0})$ on olemassa vakiot $\alpha, C, r > 0$, jotka riippuvat vakioista C_0, α_0, r_0, n ja ϵ siten, että kaikilla $|x| > r$ ja kaikilla $0 < t < \frac{1}{8\alpha_0}$

$$|u(x,t)| \leq \Gamma\left(\epsilon, \frac{\epsilon^2}{2n}\right) ||g||_{1,B(0,r_0)} + C e^{\alpha |x|^2}.$$

Todistus. Kuten jatkuvan alkudatan tapauksessa kappaleessa 3 haluamme näyttää, että funktion u derivaatat saa viedä integraalin sisälle, jolloin lämpöyhtälön toteutumisen näyttäminen on helppoa. Toisin sanoen haluamme osoittaa, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $t \in (0, \frac{1}{4\alpha_0})$ pätee

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-y,t)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)g(y)dy.$$

Teemme tämän käyttäen erotusosamäärää. Kiinnitetään x ja t ja olkoon $e_i = (0,\dots,1,\dots,0)$ yksikkövektori ja $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Aloitetaan arviointi jakamalla integraalit kahteen käyttäen palloa $B(0,r)$, jossa $r > r_0$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x+he_i-y,t)g(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-y,t)g(y)dy}{h} - \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right| \\
=&\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\big(\Gamma(x+he_i-y,t)-\Gamma(x-y,t)\big)g(y)}{h} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right| \\
\leq&\left|\int_{B(0,r)}\frac{\big(\Gamma(x+he_i-y,t)-\Gamma(x-y,t)\big)g(y)}{h} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right| \\
&+\left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}\frac{\big(\Gamma(x+he_i-y,t)-\Gamma(x-y,t)\big)g(y)}{h} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right| \\
=:& I+J.
\end{aligned}$$

Pallon sisällä käytämme väliarvolausetta ja löydämme pisteen ξ pisteiden $x-y+he_i$ ja $x-y$ väliseltä janalta, jolle pätee

$$\Gamma(x-y+he_i,t)-\Gamma(x-y,t) = h\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(\xi,t).$$

Käytämme funktion $\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma$ tasaista jatkuvuutta ja saamme

$$I \leq \int_{B(0,r)}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(\xi,t) - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)\right|g(y)dy \leq \epsilon,$$

kun h on riittävän pieni. Pallon ulkopuolella käytämme funktion g kasvuehtoa. Vaihdamme tarvittaessa $g(x) = 0$ joukossa jossa $|x| \geq r_0$ ja g ei toteuta kasvuehtoa. Tämä ei vaikuta integraalin suuruuteen, koska joukko on nollamittainen. Kasvuehdon avulla saamme

$$\begin{aligned}
J =&\left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}\frac{1}{h}\Big(\Gamma(x-y+he_i,t)-\Gamma(x-y,t)-h\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y,t)\Big)g(y)dy\right| \\
\leq&\left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x-y+he_i|^2}{4t}} - \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} + \frac{h}{(4\pi t)^{n/2}}\frac{x_i}{2t}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right)C_0e^{\alpha_0|y|^2}dy\right| \\
\leq&\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}\frac{C}{h}\left|e^{-\frac{|x-y+he_i|^2}{4t}} + \frac{hx_i-2t}{2t}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right|e^{\alpha_0|y|^2}dy \\
\leq&\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}\frac{C}{h}2\max\left\{e^{-\frac{|x-y+he_i|^2}{4t}}, \left|\frac{hx_i-2t}{2t}\right|e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right\}e^{\alpha_0|y|^2}dy.
\end{aligned}$$

Käsittelemme maksimitapaukset erikseen. Ensimmäisessä tapauksessa kun r on suuri $|x + he_i|$ on mitättömän pieni $|y|$ verrattuna. Merkitsemme

$$|x + he_i - y|^2 \geq (1 - \delta)|y|^2$$

ja valitsemme r niin suureksi, että yllä olevalle $\delta > 0$ pätee

$$\frac{1}{4\alpha_0} - \frac{\delta}{4\alpha_0} > t \Rightarrow \frac{1-\delta}{4t} > \alpha_0.$$

Käyttäen tätä arviota saamme

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \frac{C}{h} e^{-\left(\frac{1-\delta}{4t} - \alpha_0\right)|y|^2} dy \leq \epsilon$$

riittävän isolla r, sillä $|y|^2$ kerroin on negatiivinen. Toinen maksimitapaus käsitellään samoin, koska eksponenttifunktion kerroin ei vaikuta tähän integraaliin.

Näin ollen olemme saaneet näytettyä, että erotusosamäärän ja integraalin, jossa derivointi on viety sisään, erotus on niin pieni kuin haluamme riittävän pienellä h ja isolla r.

Koska funktion Γ kaikki derivaatat ovat jatkuvia ja rajoitettuja, korkeamman asteen derivaatat ja niiden jatkuvuus saadaan näillä samoilla todistuksilla. Nyt voimme osoittaa, että u toteuttaa lämpöyhtälön

$$u_t - \Delta u = \int \frac{\partial}{\partial t}\Gamma g - \int \Delta\Gamma g = \int (\frac{\partial}{\partial t}\Gamma - \Delta\Gamma) g = 0.$$

Lopuksi näytämme funktion u kasvun rajoittuneisuuden. Kiinnitämme $\epsilon \in (0, \frac{1}{8\alpha_0})$ ja $x \in \mathbb{R}^n$ siten, että $|x| > r_0 + \epsilon := r$. Kirjoitamme funktion u määrittelevän integraalin kahdessa osassa

$$\int_{|y|<r_0} \Gamma(x-y,t)g(y)dy + \int_{|y|>r_0} \Gamma(x-y,t)g(y)dy := I^1 + I^2.$$

Ensimmäistä integraalia arvioidessa $|x - y| > \epsilon$, jolloin

$$|I^1| \leq \sup_{t \geq 0} \Gamma(\epsilon, t) ||g||_{1,B(0,r_0)} \leq \Gamma\left(\epsilon, \frac{\epsilon^2}{2n}\right) ||g||_{1,B(0,r_0)}.$$

Funktion Γ supremumin löydämme funktion muodon ja sen derivaatan nollakohdan avulla.

Toisen integraalin arvioimisen aloitamme tekemällä muuttujanvaihdon $y - x = 2\sqrt{t}\eta$

$$|I^2| \leq \int_{|x+2\sqrt{t}\eta|>r_0} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\eta|^2} (2\sqrt{t})^n g(x + 2\sqrt{t}\eta) d\eta.$$

Seuraavaksi käytämme funktion g kasvuehtoa

$$|I^2| \leq \int_{|x+2\sqrt{t}\eta|>r_0} \frac{C_0}{\pi^{n/2}} e^{-|\eta|^2} e^{\alpha_0 |x+2\sqrt{t}\eta|^2} d\eta$$

ja arvioimme eksponenttia ylöspäin

$$|x + 2\sqrt{t}\eta|^2 \leq \big(|x| + 2\sqrt{t}|\eta|\big)^2 \leq 2^2\big(|x|^2 + (2\sqrt{t}|\eta|)^2\big) \leq 4|x|^2 + 8t|\eta|^2.$$

Tällöin kaikilla x joilla $|x| > r_0 + \epsilon$ saamme

$$|I^2| \leq C_0 \pi^{-n/2} e^{4\alpha_0 |x|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(1-8\alpha_0 t)|\eta|^2} d\eta.$$

Integraali suppenee, koska $t < \frac{1}{8\alpha_0}$. Näin ollen $|I^2| \leq C e^{\alpha |x|^2}$, jossa

$$\begin{aligned} C &= C_0 \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(1-\alpha_0 8t)|\eta|^2} d\eta \text{ ja} \\ \alpha &= 4\alpha_0. \end{aligned}$$

□

Huomautus 5.2. Lauseessa 5.1 joukko, jossa funktion u kasvu on rajoitettua ei ole optimaalinen. On mahdollista kasvattaa muuttujan t lähtöjoukkoa hieman katso [1] luku 5 Propositio 4.1.

Seuraavaksi käsittelemme alkuarvo-ongelmaa $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alkudatalla. Toisin kuin jatkuvassa tapauksessa reunaehdon toteutuminen ei ole yksinkertainen raja-arvo.

Määritelmä 5.3. Kun sanomme, että alkudata on otettu $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä tarkoitamme, että kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{R}^n$ pätee

$$||u(\cdot, t) - g||_{1,K} \to 0,$$

kun $t \to 0_+$.

Lause 5.4. *Olkoon $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ja g toteuttaa Lauseen 5.1 kasvuehdon. Tällöin kaikilla $T \in (0, \frac{1}{4\alpha})$ alkuarvo-ongelmalla*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u(x,0) = g(x), & \text{alkudata otettu } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ mielessä} \end{cases}$$

on olemassa ratkaisu

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t) g(y) dy,$$

joka on yksikäsitteinen Lauseen 3.6 kasvuehdon toteuttavien funktioiden luokassa.

Todistus. Lämpöyhtälön toteutuminen on Lauseessa 5.1. Alkuarvoehdon toteutumisen todistamiseksi riittää osoittaa, että kaikilla $p \geq r_0$ pätee

$$\lim_{t \to 0_+} ||u(\cdot, t) - g||_{1, B_p} = 0,$$

sillä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ jokainen kompakti joukko K kuuluu johonkin palloon $B_p = B(0,p)$ kunhan $p > 0$ on riittävän suuri. Kun p on kiinnitetty, kehitämme lauseen 2.19 avulla funktiojonon $\{g_m\}$, jossa $g_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$ ja

$$\begin{aligned} &||g_m - g||_{1, B_{2p}} \to 0, \text{ kun } m \to \infty \text{ sekä} \\ &|g_m(x)| \leq C e^{\alpha |x|^2}, \text{ kun } |x| \geq r_0 \text{ kaikilla } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Koska Lemman 2.21 mukaan funktion Γ integraali on yksi, melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$|u(x,t) - g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t) g(y) dy - g(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t) |g(y) - g(x)| dy.$$

Lisäksi melkein kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$ saamme kolmioepäyhtälöllä

$$|g(y) - g(x)| \leq |g(y) - g_m(y)| + |g_m(x) - g(x)| + |g_m(y) - g_m(x)|.$$

Yhdistämällä nämä kaksi arviota saamme kolme integraalia joita arvioimme erikseen

$$\begin{aligned}
||u(\cdot, t) - g(\cdot)||_{1,B_p} &= \int_{B_p} |u(x,t) - g(x)| dx \\
&\leq \int_{B_p} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t)|g(y) - g_m(y)| dy dx \\
&\quad + \int_{B_p} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t)|g_m(y) - g_m(x)| dy dx \\
&\quad + \int_{B_p} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t)|g_m(x) - g(x)| dy dx \\
&= I^1 + I^2 + I^3.
\end{aligned}$$

Jaamme integraalin I^1 vielä kahteen osaan

$$\begin{aligned}
I^1 &\leq \int_{B_p} \int_{|y|<2p} \Gamma(x-y,t)|g(y) - g_m(y)| dy dx \\
&\quad + \int_{B_p} \int_{|y|>2p} \Gamma(x-y,t)|g(y) - g_m(y)| dy dx \\
&= I^{1,1} + I^{1,2}.
\end{aligned}$$

Joukko, jossa $|y| = 2p$ jää pois, mutta integraali ei pienenny, koska joukko on nollamittainen. Ensiksi vaihdetaan integroinnin järjestys ja tuodaan $|g(y) - g_m(y)|$ ulos x-integraalista ja tämän jälkeen käytetään Lemmaa 2.21 funktion Γ integraaliin

$$\begin{aligned}
I^{1,1} &= \int_{|y|<2p} |g(y) - g_m(y)| \int_{B_p} \Gamma(x-y,t) dx dy \\
&\leq \int_{|y|<2p} |g(y) - g_m(y)| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t) dx dy \\
&= ||g - g_m||_{1,B_{2p}}.
\end{aligned}$$

Osaa $I^{1,2}$ arvioidessa $|y-x| > p$, koska $|x| < p$ ja $|y| > 2p$. Teemme muuttujanvaihdon $y - x = 2\sqrt{t}\eta$ ja käytämme kasvuehtoa funktioille g ja g_m

$$\begin{aligned}
I^{1,2} &\leq \int_{B_p} \int_{|y|>2p} \Gamma(x-y,t)(|g(y)| + |g_m(y)|) dy \\
&\leq \int_{B_p} \int_{|\eta|>\frac{p}{2\sqrt{t}}} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\eta|^2} 2C e^{\alpha|2\sqrt{t}\eta + x|^2} 2^n \sqrt{t}^n d\eta dx.
\end{aligned}$$

Arvioimme eksponenttia

$$\alpha|2\sqrt{t}\,\eta + x|^2 \leq \alpha 4|x|^2 + 8\alpha t|\eta|^2 \leq 4\alpha p^2 + 8\alpha t|\eta|^2$$

Nyt lauseke ei enää riipu muuttujasta x ja joukon B_p yli laskettavasta integraalista tulee joukon mitta $|B_p|$

$$I^{1,2} \leq 2C\pi^{-n/2}|B_p|e^{4\alpha p^2} \int_{|\eta|>\frac{p}{2\sqrt{t}}} e^{-(1-8\alpha t)|\eta|^2} d\eta.$$

Kun t on tarpeeksi lähellä nollaa $(1-8\alpha t) > \frac{1}{2}$, jolloin

$$I^{1,2} \leq 2C\pi^{-n/2}|B_p|e^{4\alpha p^2} \int_{|\eta|>\frac{p}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} d\eta \xrightarrow{\text{t}\to 0_+} 0.$$

Olkoon $\sigma \in (0,1)$. Jaamme myös integraalin I^2 kahteen osaan

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{B_p} \int_{|x-y|<\sigma} \Gamma(x-y,t)|g_m(y) - g_m(x)|dydx \\ &\quad + \int_{B_p} \int_{|x-y|>\sigma} \Gamma(x-y,t)|g_m(y) - g_m(x)|dydx \\ &= I^{2,1} + I^{2,2}. \end{aligned}$$

Kuten aikaisemmin nollamittaisen joukon pois jättäminen ei pienennä integraalia. Olkoon $h_m(\cdot)$ funktion g_m jatkuvuusmoduli eli funktio joka kuvaa tasaisen jatkuvuuden määrää. Tällöin integraalista $I^{2,1}$ tulee

$$I^{2,1} \leq h_m(\sigma) \int_{B_p} \int_{|x-y|<\sigma} \Gamma(x-y,t)dydx \leq h_m(\sigma)|B_p|.$$

Integraali $I^{2,2}$ on samankaltainen kuin $I^{1,2}$. Käytämme samaa muuttujanvaihtoa $y - x = 2\sqrt{t}\,\eta$

$$\begin{aligned} I^{2,2} &\leq \int_{B_p} \int_{|\eta|>\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\eta|^2} |g_m(2\sqrt{t}\eta + x) + g_m(x)|(2\sqrt{t})^n d\eta dx \\ &\leq \pi^{-n/2} \int_{B_p} \int_{|\eta|>\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}} e^{-|\eta|^2} |g_m(2\sqrt{t}\eta + x) + g_m(x)| d\eta dx. \end{aligned}$$

Kaikilla $t > 0$ ja $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$|g_m(2\sqrt{t}\eta + x) + g_m(x)| \leq |g_m(2\sqrt{t}\eta + x)| + |g_m(x)|$$

Jos $2\sqrt{t}|\eta| < 2p$, niin $2\sqrt{t}|\eta| + |x| < 3p$ ja tällöin

$$|g_m(2\sqrt{t}\eta + x)| + |g_m(x)| \leq 2||g_m||_{\infty,B_{3p}}.$$

Jos $2\sqrt{t}|\eta| > 2p$, niin käytämme kasvuehtoa ja saamme

$$\begin{aligned} |g_m(2\sqrt{t}\eta + x)| + |g_m(x)| &\leq Ce^{\alpha|2\sqrt{t}\eta + x|^2} + ||g_m||_{\infty,B_{2p}} \\ &\leq Ce^{4\alpha p^2 + 8\alpha t|\eta|^2} + ||g_m||_{\infty,B_{2p}}. \end{aligned}$$

Näin ollen molemmissa tapauksissa toimiva arvio on

$$|g_m(2\sqrt{t}\eta + x) + g_m(x)| \leq Ce^{4\alpha p^2 + 8\alpha t|\eta|^2} + 2||g_m||_{\infty,B_{3p}}.$$

Arvion jälkeen integraali ei enää riipu muuttujasta x ja sen yli laskettavasta integraalista tulee joukon B_p mitta

$$\begin{aligned} I^{2,2} &\leq \pi^{-n/2}|B_p| \int_{|\eta|>\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}} e^{-|\eta|^2}\big(Ce^{4\alpha p^2+8\alpha t|\eta|^2} + 2||g_m||_{\infty,B_{3p}}\big)d\eta \\ &\leq C\int_{|\eta|>\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}} e^{-|\eta|^2} + C\int_{|\eta|>\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}} e^{-(1-8\alpha t)|\eta|^2}d\eta \end{aligned}$$

Kuten integraalissa $I^{1,2}$ kun t on tarpeeksi pieni $(1-8\alpha t) > \frac{1}{2}$ ja tällöin saamme

$$I^{2,2} \xrightarrow{t\to 0_+} 0.$$

Integraalissa I^3 huomaamme, että $|g_m(x) - g(x)|$ ei ole muuttujasta y riippuvainen ja taas käyttäen Lemmaa 2.21 saamme

$$I^3 = ||g_m - g||_{1,B_p} \leq ||g_m - g||_{1,B_{2p}}.$$

Lopulta yhdistämällä kaikki osat saamme

$$\int_{B_p} |u(x,t) - g(x)|dx \leq 2||g_m - g||_{1,B_{2p}} + O^{1,2}(t) + |B_p|h_m(\sigma) + O^{2,2}(t).$$

Nyt kaikilla $m \in \mathbb{N}$ kun $\sigma \to 0$ ja $t \to 0$ saamme

$$\leq 3||g_m - g||_{1,B_{2p}},$$

joka on pieni tarpeeksi suurilla m jonon $\{g_m\}$ valinnasta johtuen.

Ratkaisun yksikäsitteisyyden todistamiseksi meidän täytyisi saada vastaavanlainen maksimiperiaate kuin Lauseessa 3.6. Todistus jää tämän työn laajuuden ulkopuolelle $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä otetun alkudatan aiheuttamien laskujen takia. □

6. Arvioita lähellä ajanhetkeä t=0

Olkoon funktio u lämpöyhtälön ratkaisu kuten Lauseessa 5.1. Tässä kappaleessa tutkimme funktioiden $|u|$ ja $|Du|$ käyttäytymistä, kun $t \to 0_+$. Tulemme tarvitsemään tämänkaltaisia arvioita, kun käsittelemme epähomogeenista alkuarvo-ongelmaa $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä. Lauseen 5.1 alkudatan g kasvua rajoittavassa ehdossa riittävän suurella C_0 voimme olettaa, että $r_0 = 0$, koska g on lokaalisti rajoitettu. Tämä kappale seuraa DiBenedetton kirjan [1] luvun 5 kappaletta 8, mutta laskuihin on lisätty runsaasti välivaiheita.

Lause 6.1. *Olkoon $g \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ funktio siten, että $|g(x)| \leq C_0e^{\alpha_0|x|^2}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ joillakin vakioilla $C_0 > 0$ ja α_0, ja olkoon u lämpöyhtälön ratkaisu kuten Lauseessa 5.1. Tällöin kaikilla $\rho > 0$ on olemassa vakiot A_0 ja A_1, jotka riippuvat vain vakioista ρ, n, α_0 ja C_0, joilla*

$$|u(x,t)| \leq A_0,$$
$$|Du(x,t)| \leq A_1 t^{-1/2}$$

kaikilla $x \in \overline{B}_\rho$ ja $0 < t \leq T/2$.

Todistus. Olkoon u ja g kuten yllä. Käyttäen muuttujanvaihtoa $y - x = 2\sqrt{t}\eta$ ja kasvuehtoa saamme

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t)|g(y)|dy \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (2\sqrt{t})^n\, e^{-|\eta|^2} |g(2\sqrt{t}\eta + x)| d\eta \\
&\le \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} C_0 e^{\alpha_0 |2\sqrt{t}\eta + x|^2} d\eta \\
&\le \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} C_0 e^{\alpha_0 (4|x|^2 + 8t|\eta|^2)} d\eta \\
&= \pi^{-n/2} C_0 e^{4\alpha_0 |\rho|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(1-8\alpha_0 t)|\eta|^2} d\eta
\end{aligned}$$

Kun t on riittävän pieni, niin $(1 - 8\alpha_0 t) \ge \frac{1}{2}$ ja napakoordinaatteja käyttäen saamme

$$|u(x,t)| \le \pi^{-n/2} \omega_n C_0 e^{4\alpha_0|\rho|^2} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-\frac{1}{2}r^2} dr := A_0,$$

jossa ω_n on n-ulotteisen yksikköpallon mitta. Lauseessa 5.1 osoitimme, että funktion u derivaatan saa viedä integraalin sisälle. Arvioimme samaan tapaan kuin yllä

$$\begin{aligned}
|Du(x,t)| &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-y|}{2t} \Gamma(x-y,t)|g(y)|dy \\
&\le \frac{1}{\pi^{n/2}\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta| e^{-|\eta|^2} |g(2\sqrt{t}\eta + x)| d\eta \\
&\le \frac{C_0 e^{4\alpha_0|\rho|^2}}{\pi^{n/2}\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta| e^{-(1-8\alpha_0 t)|\eta|^2} d\eta \\
&\le t^{-1/2} \pi^{-n/2} \omega_n C_0 e^{4\alpha_0|\rho|^2} \int_0^\infty r^n e^{-\frac{1}{2}r^2} dr := t^{-1/2} A_1,
\end{aligned}$$

jossa ω_n on yksikköpallon mitta. □

Määritelmä 6.2. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sanomme, että f on lokaalisti Hölder-jatkuva ja merkitsemme $f \in C^\delta_{loc}(\mathbb{R}^n)$, jos jollain $\delta \in (0,1)$ kaikille kompakteille joukoille $K \subset \mathbb{R}^n$ on olemassa vain luvusta n ja joukon K halkaisijasta riippuva vakio D, jolla

$$|g(x_1) - g(x_2)| \le D|x_1 - x_2|^\delta$$

kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

Seuraavaksi tutkimme ratkaisun u derivaattojen u_t ja $u_{x_i x_j}$ $i,j = 1,2,\ldots,n$ käyttäytymistä hieman tiukemmilla ehdoilla. Vaadimme, että alkudata g on lokaalisti Hölder-jatkuva.

Lause 6.3. *Olkoon funktiot u ja g kuten Lauseessa 6.1 ja lisäksi oletetaan, että $g \in C^\delta_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin kaikilla $\rho > 0$ on olemassa vain luvuista ρ, n, α_0, C_0 ja D riippuva vakio A, jolla*

$$|u_t(x,t)| + |u_{x_i,x_j}(x,t)| \le At^{\delta/2-1}$$

kaikilla $x \in \overline{B}_\rho$, $0 < t \le T$, $i,j = 1,2,\ldots,N$.

Todistus. Arvioimme ensin funktion u x_ix_j-osittaisderivaattoja

$$
\begin{aligned}
|u_{x_ix_j}(x,t)| &= \left|\frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}}\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right| \\
&\leq \sum_{h,k=1}^{n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial_{x_h}\partial_{x_k}}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right|.
\end{aligned}
$$

Ja arvioimme t-derivaattaa

$$
\begin{aligned}
|u_t(x,t)| &= \left|\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(-\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\frac{n}{2t}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}+\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\frac{|x-y|^2}{4t^2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right)g(y)dy\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-y|^2}{4t^2}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\sum_{h=1}^{n}(x_h-y_h)(x_h-y_h)}{4t^2}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right| \\
&\leq \sum_{h,k=1}^{n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial x_h\partial x_k}\Gamma(x-y,t)g(y)dy\right|.
\end{aligned}
$$

Aloitamme Lemman 2.21 tuloksesta

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-y,t)dy = 1.$$

Jos derivoimme yllä olevan yhtälön molemmin puolin, yhtäsuuruus säilyy. Lisäksi huomaamme, että jos vaihdamme funktion $\Gamma(x-y,t)$ x-derivaatat y-derivaattoihin yhtäsuuruus säilyy, koska kerroin -1 tulee kahteen kertaan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_h\partial x_k}\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-y,t)dy &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial x_h\partial x_k}\Gamma(x-y,t)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial y_h\partial y_k}\Gamma(x-y,t)dy = 0.
\end{aligned}
$$

Kerromme vielä yhtälön molemmat puolet luvulla $-g(x)$ ja laskemme summan muuttujien h ja k yli

$$-\sum_{h,k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial y_h\partial y_k}\Gamma(x-y,t)g(x)dy = 0.$$

Lisäämme näin kirjoitetun nollan funktion u derivaattojen arvioihin, yhdistämme integraalit ja otamme yhteisiä tekijöitä. Olemme saaneet summan muotoon

$$|u_t(x,t)| + |u_{x_ix_j}(x,t)| \leq 2\sum_{h,k=1}^{n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial y_h\partial y_k}\Gamma(x-y,t)(g(y)-g(x))dy\right|.$$

Summan termeistä joissa $h = k$ saamme

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2t}\Gamma(x-y,t)+\frac{(x_k-y_k)^2}{4t^2}\Gamma(x-y,t)\right)\\
\leq&\left(\frac{n}{2t}+\frac{|x-y|^2}{4t^2}\right)\Gamma(x-y,t).
\end{aligned}$$

Tapauksissa joissa $h \neq k$ saamme

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{h,k=1\\h\neq k}}^{n}\frac{(x_h-y_h)(x_k-y_k)}{4t^2}\Gamma(x-y,t)\\
=&2\sum_{k=2}^{n}\frac{(x_1-y_1)(x_k-y_k)}{4t^2}\Gamma(x-y,t)+2\sum_{k=3}^{n}\frac{(x_2-y_2)(x_k-y_k)}{4t^2}\Gamma(x-y,t)+\cdots\\
&+2\sum_{k=n-1}^{n}\frac{(x_{n-2}-y_{n-2})(x_k-y_k)}{4t^2}\Gamma(x-y,t)+2\frac{(x_{n-1}-y_{n-1})(x_n-y_n)}{4t^2}\Gamma(x-y,t).
\end{aligned}$$

Indeksien järjestystä vaihtamalla voimme olettaa, että

$$|(x_1-y_1)|\geq|(x_2-y_2)|\geq\cdots\geq|(x_n-y_n)|.$$

Näin ollen voimme arvioida kaikkia summan termejä ylöspäin

$$\begin{aligned}
\leq&2(n-1)\frac{(x_1-y_1)^2}{4t^2}\Gamma(x-y,t)+2(n-2)\frac{(x_2-y_2)^2}{4t^2}\Gamma(x-y,t)+\cdots\\
&+2\cdot 2\frac{(x_2-y_2)^2}{4t^2}\Gamma(x-y,t)+2\frac{(x_{n-1}-y_{n-1})^2}{4t^2}\Gamma(x-y,t)\\
\leq&2(n-1)\frac{|x-y|^2}{4t^2}\Gamma(x-y,t).
\end{aligned}$$

Käyttäen näitä kahta arviota palaamme takaisin funktion u t- ja x_ix_j-derivaattojen summan arvioon

$$\begin{aligned}
&\leq 4n\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|x-y|^2}{4t^2}+\frac{1}{2t}\right)\Gamma(x-y,t)|g(y)-g(x)|dy\\
&\leq 2n\int_{|y|<2\rho}\left(\frac{|x-y|^2}{2t^2}+\frac{1}{t}\right)\Gamma(x-y,t)|g(y)-g(x)|dy\\
&\quad+2n\int_{|y|>2\rho}\left(\frac{|x-y|^2}{2t^2}+\frac{1}{t}\right)\Gamma(x-y,t)|g(y)-g(x)|dy\\
&:=I_1+I_2.
\end{aligned}$$

Arvioimme I_1 osaa käyttämällä funktion g Hölder-jatkuvuutta ja sen jälkeen teemme muuttujanvaihdon $y-x=2\sqrt{t}\eta$

$$\begin{aligned}
H_1&\leq\frac{2nD}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{|y|<2\rho}\left(\frac{|x-y|^{2+\delta}}{2t^2}+\frac{|x-y|^{\delta}}{t}\right)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy\\
&=\frac{2nD}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{|y|<2\rho}\left(\frac{(2\sqrt{t})^{2+\delta}|\eta|^{2+\delta}}{2t^2}+\frac{(2\sqrt{t})^{\delta}|\eta|^{\delta}}{t}\right)e^{-|\eta|^2}(2\sqrt{t})^n d\eta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2nD}{\pi^{n/2}} \frac{2^\delta}{t^{1-2/\delta}} \int_{|y|<2\rho} (2|\eta|^{2+\delta} + |\eta|^\delta) e^{-|\eta|^2} d\eta \\
&\leq \frac{2nD}{\pi^{n/2}} \frac{2^\delta}{t^{1-2/\delta}} \omega_n \int_0^\infty r^{n-1}(2r^{2+\delta} + r^\delta) e^{-r^2} dr.
\end{aligned}
$$

Integraali suppenee termin e^{-r^2} ansioista, joten $I_1 \leq A_1 t^{\delta/2-1}$. Osaa I_2 arvioidessa käytämme samaa muuttujanvaihtoa, kolmioepäyhtälöä ja alkudatan g kasvuehtoa

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 2n \int_{|\eta|>\rho/2\sqrt{t}} \left(\frac{(2\sqrt{t})^2|\eta|^2}{2t^2} + \frac{1}{t} \right) \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\eta|^2} |g(x+2\sqrt{t}) - g(x)| (2\sqrt{t})^n d\eta \\
&\leq \frac{2n}{\pi^{n/2}} \int_{|\eta|>\rho/2\sqrt{t}} \frac{2|\eta|^2+1}{t} e^{-|\eta|^2} C_0 \big(e^{\alpha_0|x+2\sqrt{t}\eta|^2} + e^{\alpha_0|x|^2} \big) d\eta \\
&\leq \frac{2nC_0}{\pi^{n/2}} \int_{|\eta|>\rho/2\sqrt{t}} \frac{2|\eta|^2+1}{t} e^{-|\eta|^2} 2e^{\alpha_0(4|x|^2+8t|\eta|^2)} d\eta \\
&\leq \frac{4nC_0 e^{4\alpha_0 p^2}}{\pi^{n/2}} \int_{|\eta|>\rho/2\sqrt{t}} \frac{2|\eta|^2+1}{t} e^{-(1-8\alpha_0 t)|\eta|^2} d\eta.
\end{aligned}
$$

Kun t on tarpeeksi pieni, niin $(1-8\alpha_0 t) \geq \frac{1}{2}$ ja tällöin saamme arvion

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq t^{\delta/2-1} \sup_{t\in(0,1/4\alpha_0)} \frac{4nC_0 e^{4\alpha_0 p^2}}{\pi^{n/2}} \int_{|\eta|>\rho/2\sqrt{t}} \frac{2|\eta|^2+1}{t^{\delta/2}} e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} d\eta. \\
&:= A_2 t^{\delta/2-1}.
\end{aligned}
$$

Kuten edellä integraali suppenee termin $e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}$ ansiosta. Summaamalla arviot I_1 ja I_2 saamme lauseen tuloksen. □

7. Epähomogeeninen alkuarvo-ongelma $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä otetulla alkudatalla

Käsittelemme vielä epähomogeenista alkuarvo-ongelmaa $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä otetulla alkudatalla. Tämän kappaleen tulokset ovat DiBenedetton kirjasta [1] luvusta 5 kappaleesta 9. Ongelmamme on siis

$$
\begin{cases}
u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f, & \mathbb{R}^n \times (0,T] \\
u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \text{ alkudata otettu } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ mielessä.}
\end{cases}
$$

Oletamme, että $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ja että funktio g toteuttaa kasvuehdon kuten Lauseessa 5.1. Vaadimme funktiolta f sekä jatkuvuuden että kasvuehdon. Lisäksi vaadimme, että $f \in C^\delta_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Käsittelemme tapausta, jossa alkudata $g \equiv 0$, koska lineaarisuuden avulla saamme yleisen tapauksen ratkaisun summaamalla tämän ja homogeenisen tapauksen ratkaisut kuten Lauseessa 3.3.

Lause 7.1. *Olkoon $g \equiv 0$ ja f kuten yllä. Tällöin kaikilla $0 < T < \frac{1}{4\alpha_0}$ epähomogeenisellä alkuarvo-ongelmalla on olemassa ratkaisu $u : \mathbb{R}^n \times (0,T) \to \mathbb{R}$*

$$
u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y, t-s) f(y,s) dy ds.
$$

Ratkaisu on yksikäsitteinen Lauseen 3.6 kasvuehdon toteuttavien funktioiden luokassa.

TODISTUS. Kuten jatkuvan alkudatan tapauksessa kappaleessa 3.1, lähdemme kasaamaan ratkaisua Duhamelin periaatteen [2] mukaan integroimalla siirrettyjä ratkaisuja. Kun $0 < s < t \leq T$ ja $0 < t - s < T$ funktio

$$v(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t-s) f(y,s) dy$$

ratkaisee alkuarvo-ongelman

$$\begin{cases} v_t(x,t) - \Delta v(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (s,T) \\ v(\cdot,s,s) = f(\cdot,s), \end{cases}$$

joka on homogeeninen alkuarvo-ongelma, mutta aloitushetki on siirretty hetkeen s. Väitämme, että funktio

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,s) ds$$

ratkaisee epähomogeenisen alkuarvo-ongelman, kun $g \equiv 0$. Ensiksi osoitamme, että $u(x,0) = 0$ $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mielessä. Toisin sanoen haluamme, että

$$||u(x,t)||_{K,1} \to 0, \text{ kun } t \to 0_+$$

kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{R}^n$. Kiinnitetään joukko K ja valitaan $\rho > 0$ siten, että $K \subset B(0,\rho)$. Käyttäen Lauseen 6.1 tulosta saamme

$$\begin{aligned} \left| \int_K u(x,t) dx \right| &\leq \int_{B(0,\rho)} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t-s) f(y,s)\, dy \right| ds\, dx \\ &\leq \int_{B(0,\rho)} \int_0^t A\, ds\, dx \\ &= t|B(0,p)|A \xrightarrow{\mathrm{t}\to 0} 0. \end{aligned}$$

Epähomogeenisen lämpöyhtälön toteutumisen saamme suoraan laskemalla

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= v(x,t,t) + \int_0^t v_t(x,t,s) ds \\ &= f(x,t) + \int_0^t \Delta v(x,t,s) ds \\ &= f(x,t) + \Delta u(x,t), \end{aligned}$$

mikäli saamme siirtää derivaatat integraalin sisäpuolelle. Teemme tämän laskemalla derivaatat erotusosamäärää käyttäen. Aloitamme laskemalla derivaatan muuttujan t suhteen

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\int_0^{t+h} v(x,t+h,s)ds - \int_0^t v(x,t,s)ds}{h} - \left(\int_0^t v_t(x,t,s)ds + v(x,t,t) \right) \right| \\ =&\left| \int_0^t \frac{v(x,t+h,s) - v(x,t,s)}{h} - v_t(x,t,s)ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(x,t+h,s)ds - v(x,t,t) \right|. \end{aligned}$$

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen mukaan

$$v(x,t+h,s) - v(x,t,s) = h v_t(x,\xi_1,s),$$

jossa ξ_1 on $t+h$ ja t välissä. Ja integraalilaskennan väliarvolauseen mukaan

$$\int_t^{t+h} v(x,t+h,s)ds = hv(x,t+h,\xi_2),$$

jossa ξ_2 on $t+h$ ja t välissä. Funktioiden v ja v_t jatkuvuuden ansiosta

$$= \left| \int_0^t v_t(x,\xi_1,s) - v_t(x,t,s)ds + v(x,t+h,\xi_2) - v(x,t,t) \right| \leq \epsilon,$$

kun h on pieni. Väitteen $\Delta \int v = \int \Delta v$ saamme samaan tapaan käyttämällä erotusosamäärää ja differentiaalilaskennan väliarvolausetta ensin suuntaan x_i aloittaen lausekkeesta

$$\left| \frac{\int_0^t v(x+he_i,t,s)ds - \int_0^t v(x,t,s)ds}{h} - \int_0^t v_{x_i}(x,t,s)ds \right|.$$

Tämän jälkeen tekemällä saman funtiolle v_{x_i} uudestaan ja summaamalla muuttujan i ylitse päädymme tulokseen. $\square$

Lähdeluettelo

[1] E. DiBenedetto. *Partial differential equations*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995.

[2] J. M. C. Duhamel. Sur les vibrations d'une corde flexible chargée d'un ou plusieurs curseurs. *J. de École Polytechnique*, (17):1–36, 1843.

[3] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[4] J. B. J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.

[5] K. O. Friedrichs. The identity of weak and strong extensions of differential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55:132–151, 1944.

[6] O. L. Hölder. Über einen mittelwertsatz. *Göttingen Nachr.*, pages 38–47, 1889.

[7] F. John. *Partial differential equations*, volume 1 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1991.

[8] P. Koskela. Reaalianalyysi. Muistiinpanot kurssilta MATS311, 2015.

[9] J. Levänen. Lämpöyhtälö. Matematiikan LuK-aine, 2018.

[10] H. Minkowski. *Geometrie der Zahlen*. 1896.

[11] T. N. Narasimhan. Fourier's heat conduction equation: History, influence, and connections. *Reviews of Geophysics*, 37(1):151–172, 1999.

[12] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[13] J. Stirling. *Methodus differentialis*. 1730.

[14] A. N. Tychonoff. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Math. Sbornik*, 42(2):199–216, 1935.

[15] N. A. Watson. A theory of subtemperatures in several variables. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 26:385–417, 1973.