

# Steinerin sisäellipsi

Maija Pynssi

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Kevät 2019

**Tiivistelmä:** Maija Pynssi, *Steinerin sisäellipsi* (engl. *Steiner inellipse*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 51 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tutkielmassa tutustutaan Steinerin sisäellipsiin. Steinerin sisäellipsiksi kutsutaan kolmion sisällä olevaa ellipsiä, joka sivuaa kolmion jokaista sivua sivun keskipisteessä. Steinerin sisäellipsi on ympyrä jos ja vain jos kolmio on tasasivuinen.

Tutkielman päätulokset ovat Steinerin lause ja Mardenin lause. Steinerin lauseen mukaan jokaisella kolmiolla on yksikäsitteinen Steinerin sisäellipsi. Mardenin lauseessa saadaan Steinerin sisäellipsin polttopisteet kompleksitason kolmannen asteen polynomin, jonka juuria ovat kolmion kärkipisteet, kriittisistä pisteistä. Tästä myös huomataan, että Steinerin sisäellipsi on ympyrä jos ja vain jos polynomin derivaatala on kaksoisjuuri. Tällöin kolmio on tasasivuinen. Lisäksi tutkielmassa osoitetaan, että Steinerin sisäellipsi on pinta-alaltaan suurin mahdollinen ellipsi, joka voidaan konstruoida kolmion sisälle.

Tutkielmassa myös tutustutaan Steinerin yksikkösisäellipsiin, joka on Steinerin sisäellipsin erikoistilanne. Tällöin kolmion kärkipisteet ovat yksikköympyrällä. Lopuksi käydään läpi yllättäviäkin tuloksia, kun huomataan geometriasta tuttujen Fermat'n pisteiden yhteys Steinerin sisäellipsien akseleihin. Lisäksi Fermat'n pisteiden avulla pystytään konstruoimaan Steinerin sisäellipsin polttopisteet.

Steinerin ja Mardenin lauseiden todistamista varten käytetään kompleksiaffineja kuvauksia. Kompleksiaffiinit kuvaukset kuvaavat kolmiot kolmioiksi ja säilyttävät janojen keskipisteet. Kompleksiaffineilla kuvauksilla Steinerin sisäellipsi kuvautuu kuvautuneen kolmion Steinerin sisäellipsiksi. Näin ollen kompleksiaffineilla kuvauksilla pystytään siirtämään, skaalaamaan ja kiertämään kolmiota haluttuun paikkaan, jolloin Mardenin lauseen todistaminen helpottuu alkuperäisen polynomin yksinkertaistuksessa.

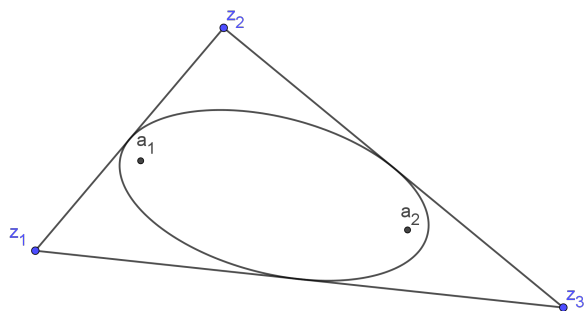
## Sisältö

Johdanto	1
Luku 1. Esitietoa	3
1.1. Kompleksiluvut ja niiden ominaisuuksia	3
1.2. Affiini kuvaus ja sen ominaisuudet	4
1.3. Ellipsi	5
Luku 2. Steinerin lause	7
Luku 3. Mardenin lause	21
Luku 4. Steinerin yksikkösisäellipsi	29
4.1. Blaschken ellipsi ja Steinerin yksikkösisäellipsi	31
4.2. Kuinka monta Steinerin yksikkökolmiota voi olla Steinerin yksikkösisäellipsillä?	35
4.3. Mitkä pisteet voivat olla Steinerin yksikkösisäellipsin polttopisteitä?	37
Luku 5. Steinerin sisäellipsin yhteys Fermat'n pisteisiin	39
5.1. Steinerin sisäellipsin polttopisteiden konstruoiminen	45
5.2. Tasakylkinen kolmio	47
Kirjallisuutta	51

## Johdanto

Tässä tutkielmassa tutustutaan Steinerin sisäellipsiin. Steinerin sisäellipsiksi kutsutaan kolmion sisällä olevaa ellipsiä, joka sivuaa kolmion jokaista sivua sivun keskipisteessä. Steinerin sisäellipsi on saanut nimensä sveitsiläisen matemaatikon Jakob Steinerin (1796–1863) mukaan. Steinerin sisäellipsiin voi tutustua seuraavassa GeoGebra-appletissa: <https://ggbm.at/evufeqfb>.

Lukion pitkän matematiikan geometrian MAA03-kurssilla todistetaan, että jokaisen kolmion sisälle voidaan konstruoida ympyrä, joka sivuaa kolmion jokaista sivua sivun keskipisteessä. Kuten myöhemmin tullaan huomaamaan tasasivuisen kolmion sisään piirretty ympyrä on Steinerin sisäellipsin erikoistilanne, jossa Steinerin sisäellipsi on ympyrä. Steinerin sisäellipsi on ympyrä jos ja vain jos kolmio on tasasivuinen.



KUVA 0.1. Steinerin sisäellipsi sivuaa kolmion jokaista sivua sivun keskipisteessä.

Tutkielman tärkeimpinä tuloksena voidaan pitää Steinerin lausetta ja Mardenin lausetta. Tutkielmassa osoitetaan, että kolmion  $\triangle z_1 z_2 z_3$  Steinerin sisäellipsin polttopisteet ovat kompleksitason polynomin  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$  kriittiset pisteet. Tämä on erikoistilanne Gaussin ja Lucasin lauseesta, joka sanoo polynomin kriittisten pisteiden kuuluvan polynomin juurien konvekseen verhoon. Tästä myös saadaan, että Steinerin sisäellipsi on ympyrä jos ja vain jos polynomin derivaatalla on kaksoisjuuri. Tällöin kolmio on tasasivuinen. Lisäksi Steinerin sisäellipsi on pinta-alaltaan suurin mahdollinen ellipsi, joka voidaan konstruoida kolmion sisälle.

Steinerin ja Mardenin lauseiden todistamista varten kerrataan ensimmäisessä luvussa kompleksiluvut ja niiden perusominaisuudet, koska tutkielmassa käsitellään kompleksitason polynomeja. Luvussa kerrataan myös affiinit kuvaukset, joiden avulla voidaan kompleksitason kuvioita siirtää, kiertää tai venyttää. Affiini kuvaus kuvaa kolmiot kolmioksi ja säilyttää janojen keskipisteet. Myöhemmin myös osoitetaan, että affiini kuvaus kuvaa kolmion Steinerin sisäellipsin polttopisteet kuvautuneen kolmion

Steinerin sisäellipsin polttopisteiksi. Affiinit kuvaukset ovat hyödyllisiä etenkin Mardenin lauseen todistamisessa, koska affiineilla kuvauksilla voidaan yksinkertaistaa alkuperäistä polynomia siirtämällä kolmiota haluttuun paikkaan. Lisäksi luvun lopussa kerrataan ellipsin muutama ominaisuus, joita tarvitaan päätulosten todistamisessa.

Toisessa luvussa keskitytään polynomin juurien ja kriittisten pisteiden väliseen yhteyteen. Luvussa todistetaan aluksi Gaussin ja Lucasin lause, jonka avulla tutkitaan kolmannen asteen kompleksipolynomin juuria ja sen kriittisiä pisteitä. Tästä päästään Steinerin lauseeseen, joka on luvun päätulos. Luvun lähteenä on käytetty Mindan ja Phelps'n artikkelia [2]. Kolmannessa luvussa todistetaan Mardenin lause käyttämällä kompleksiaffiineja kuvauksia. Mardenin lause todistetaan luvussa kahdella eri tavalla, jotka perustuvat Kalmanin ja Badertscherin artikkeleihin [3] ja [4].

Neljännessä luvussa tutustutaan Steinerin yksikkösisäellipsiin, joka on Steinerin sisäellipsin erikoistilanne. Tällöin kolmion kärkipisteet ovat yksikköympyrällä. Vastavasti Steinerin yksikkösisäellipsiä rajaavaa kolmiota kutsutaan Steinerin yksikkökolmioksi. Luvun tärkeimpänä tuloksena osoitetaan, että jos Steinerin yksikkösisäellipsi ei ole ympyrä, niin sillä on yksikäsitteinen Steinerin yksikkökolmio. Luvun tulokset perustuvat Gorkinin ja Skubakin artikkeliin [5].

Viidennessä luvussa tutustutaan yllättäviinkin tuloksiin, kun osoitetaan Steinerin sisäellipsin yhteys geometriasta tuttuihin Fermat'n pisteisiin. Fermat'n pisteiden ja kolmion painopisteen avulla pystytään konstruoimaan Steinerin sisäellipsin isoakseli. Lisäksi Fermat'n pisteiden avulla pystytään konstruoimaan Steinerin sisäellipsin polttopisteet. Luvun tulosten osoittamista varten käytetään Kiepertin koordinaatistoa. Luvun lähteenä on käytetty Scimemin artikkelia [6].

Tutkielmassa on myös linkkeinä GeoGebra-appletteja, jotka havainnollistavat tutkielman tuloksia. GeoGebra-applettien koodi pohjautuu tutkielmassa esiteltäviin tuloksiin. Tutkielman kaikki kuvat on myös tehty GeoGebralla.

## LUKU 1

### Esitietoa

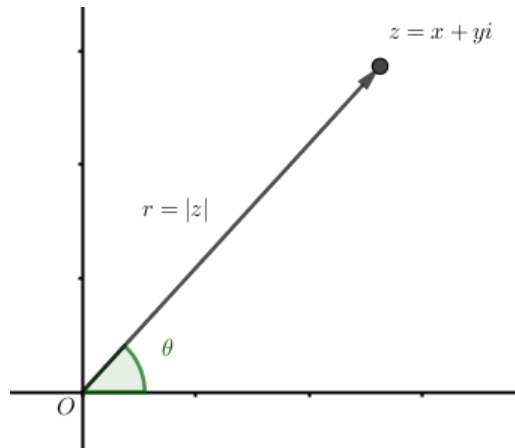
#### 1.1. Kompleksiluvut ja niiden ominaisuuksia

Kompleksiluku  $z = (x, y)$  on muotoa  $z = x + yi$ , missä  $x, y \in \mathbb{R}$  ja  $i$  on imaginaariyksikkö. Reaaliluku  $x = \operatorname{Re}(z)$  on kompleksiluvun  $z = x + yi$  reaaliosa. Reaaliluku  $y = \operatorname{Im}(z)$  on kompleksiluvun imaginaariosa.

Eulerin kaavalla  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$  jokainen kompleksiluku  $z = x + yi$  voidaan myös esittää muodossa

$$(1.1) \quad z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)),$$

missä  $r = |z|$  ja kulma  $\theta$  on positiivisen  $x$ -akselin ja vektorin  $Oz$  välinen kulma.



KUVA 1.1. Kompleksiluku  $z = x + yi$  voidaan esittää napakoordinaateilla  $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ .

**MÄÄRITELMÄ 1.1.** (Kompleksilukujen summa ja tulo) Olkoot  $z_1 = (x_1, y_1)$  ja  $z_2 = (x_2, y_2)$  kompleksilukuja. Kompleksilukujen summa on  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$  ja kompleksilukujen tulo on  $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ .

Kompleksiluvun  $z = x + yi$  kompleksikonjugaatti on  $\bar{z} = x - yi$ . Kompleksiluvun konjugaatti voidaan tulkita geometrisesti kompleksiluvun peilauksena  $x$ -akselin suhteen. Kompleksiluvulle  $z$  pätee

$$(1.2) \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

Yhtälössä (1.1) esiintyvä  $r$  on kompleksiluvun  $z$  itseisarvo eli *moduli*. Kompleksiluvun  $z$  moduli on reaaliluku

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Moduli  $|z|$  on pisteen  $z$  etäisyys origosta. Kompleksilukujen  $z_1 = x_1 + y_1i$  ja  $z_2 = x_2 + y_2i$  erotuksen moduli voidaan tulkita pisteiden  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  välisenä etäisyytenä. Seuraavat modulin ominaisuudet saadaan suoraan kompleksikonjugaatin ja modulin määritelmästä

$$(1.3) \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$(1.4) \quad |z|^2 = z\bar{z} = |\bar{z}|^2.$$

## 1.2. Affiini kuvaus ja sen ominaisuudet

Affiini kuvaus kompleksiavaruudessa on funktio

$$(1.5) \quad f(z) = Az + B\bar{z} + C,$$

missä  $z \in \mathbb{C}$  ja  $A, B$  ja  $C$  ovat kompleksisia vakioita. Kun  $C = 0$ , niin kuvaus on lineaarinen. Kompleksiluvuille lineaarikuvaus  $f$  on muotoa

$$f(z) = Az + B\bar{z},$$

missä  $A = a_1 + a_2i$  ja  $B = b_1 + b_2i$ . Lineaarikuvauksen  $f$  matriisi on

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ missä}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & -a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{pmatrix}.$$

Lineaarikuvaus  $f$  on bijektio jos ja vain jos sen matriisi  $M$  on kääntyvä matriisi eli sen determinantti on erisuuri kuin nolla. Koska  $\det M = |A|^2 - |B|^2$ , niin  $f$  on bijektio jos ja vain jos  $|A| \neq |B|$ .

Merkitään yksikköympyrää kirjaimella  $\mathbb{T}$ , jolloin  $r$ -säteinen origokeskinen ympyrä on  $r\mathbb{T}$ . Jos lineaarikuvaus  $f$  on bijektio, niin tällöin  $f$  kuvaa ympyrän  $r\mathbb{T}$  ellipsiksi, jonka keskipiste on origo. Jos  $E$  on ellipsi, jonka keskipiste on origo, niin on olemassa bijektiivinen lineaarikuvaus  $f$ , joka kuvaa ympyrän  $r\mathbb{T}$  ellipsiksi  $E$ .

Affiniin kuvausten (1.5) määrittelevä ominaisuus on, että kaikille kompleksiluvuille  $z$  ja  $w$  sekä mielivaltaiselle reaaliluvulle  $t$  pätee

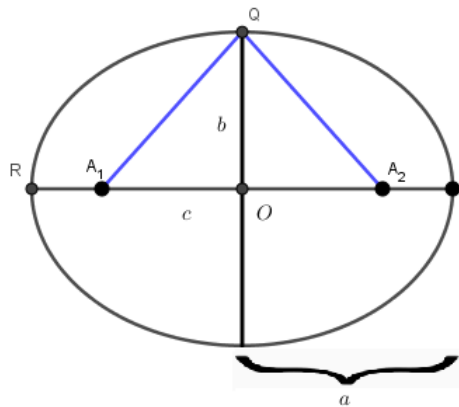
$$(1.6) \quad f((1-t)z + tw) = (1-t)f(z) + tf(w).$$

Affinit kuvaukset eivät välttämättä säilytä pituutta eivätkä kulmaa. Affiini kuvaus kuitenkin kuvaa suorat suoriksi, keskipisteet keskipisteiksi, painopisteet painopisteiksi sekä yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi suoriksi. Keskipisteiden säilyminen tulee suoraan yhtälöstä (1.6), kun  $t = 1/2$ . Lisäksi affiini kuvaus säilyttää tangentin sivuamispisteet.

### 1.3. Ellipsi

Ellipsi määritellään tason pisteiden joukkona, joiden etäisyyksien summa kahdesta annetusta pisteestä  $A_1$  ja  $A_2$  on vakio. Pisteitä  $A_1$  ja  $A_2$  kutsutaan ellipsin polttopisteiksi. Ellipsin keskipiste on polttopisteiden yhdysjanan  $A_1A_2$  keskipiste. Ellipsi on symmetrinen sekä polttopisteiden kautta kulkevan suoran että polttopisteiden välisen janan keskinormaalien suhteen.

Tarkastellaan seuraavaksi ellipsiä, joka ei ole ympyrä. Ellipsin isoakseliksi kutsutaan ellipsin pisintä halkaisijaa, joka kulkee polttopisteiden kautta. Pikkuakseliksi kutsutaan ellipsin lyhintä halkaisijaa. Tällöin pikkuakseli on kohtisuorassa isoakselia vasten.



KUVA 1.2. Ellipsi, jonka keskipiste on origo ja polttopisteet ovat  $A_1$  ja  $A_2$ .

Merkitään isoakselin puolikkaan pituutta kirjaimella  $a$  ja pikkuakselin puolikkaan pituutta kirjaimella  $b$  ja olkoon  $c$  ellipsin keskipisteen etäisyys polttopisteistä. Selvitetään seuraavaksi, miten nämä luvut liittyvät toisiinsa.

Lasketaan seuraavaksi etäisyyksien summa mielivaltaisesta ellipsin pisteestä polttopisteisiin. Siirretään ja kierretään affiinilla kuvauksella ellipsiä siten, että ellipsin keskipiste on origossa ja isoakseli on  $x$ -akseli. Tätä on havainnollistettu kuvassa 1.2. Valitaan ellipsin pisteeksi  $P$ , jonka koordinaatit ovat  $(0, a)$ , jolloin etäisyyksien summaksi saadaan

$$|A_1P| + |A_2P| = |A_1O| + |OP| + |A_2P| = c + a + (a - c) = 2a.$$

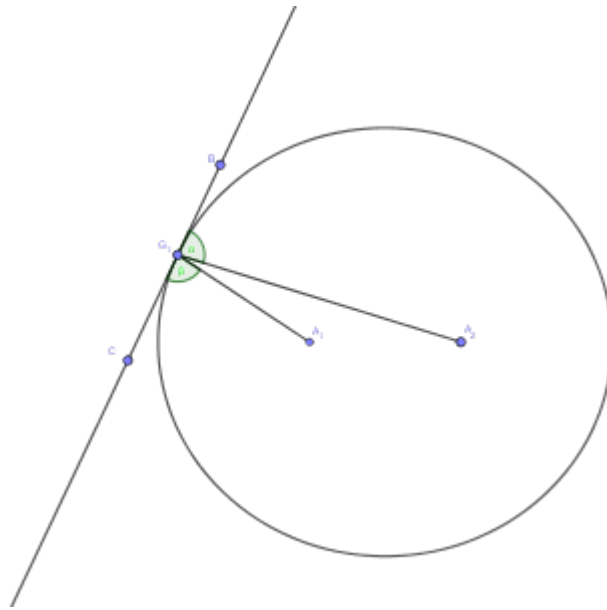
Lasketaan seuraavaksi etäisyyksien summa polttopisteistä ellipsin pisteeseen  $Q$ , jonka koordinaatit ovat  $(0, b)$ . Pythagoraan lauseen avulla saadaan molempien janojen  $A_1Q$  ja  $A_2Q$  pituudeksi  $\sqrt{b^2 + c^2}$ . Näin ollen

$$|A_1Q| + |A_2Q| = \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Koska ellipsin määritelmän nojalla etäisyyksien summa polttopisteistä mielivaltaiseen ellipsin pisteeseen on vakio, saadaan

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a,$$





KUVA 1.3. Kulmat  $\angle A_1G_1C$  ja  $\angle A_2G_1B$  ovat yhtä suuret.

josta

$$(1.7) \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

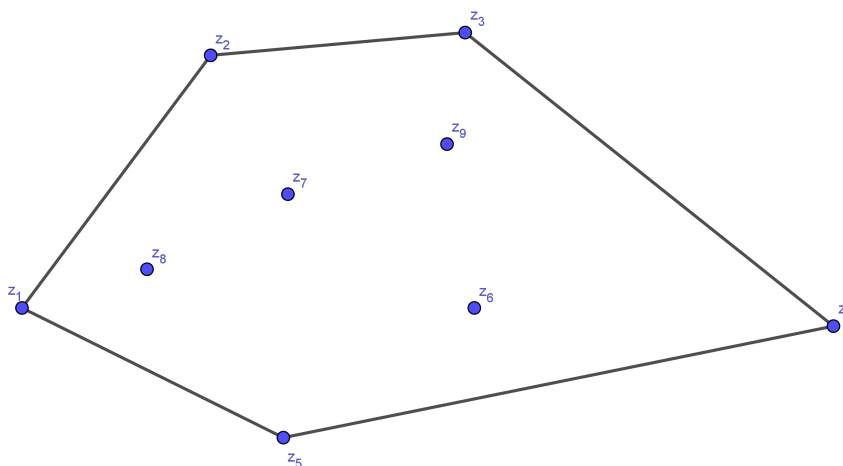
Ellipsin tangenteilla on myös erityinen ominaisuus: ellipsin polttopisteistä tangentin sivuamispisteeseen piirretyt janat kohtaavat tangentin yhtä suuressa kulmassa. Tätä on havainnollistettu kuvassa 1.3. Tämän ominaisuuden todistus löytyy artikkelista [7]. Tähän ominaisuuteen voi tutustua seuraavassa GeoGebra-appletissa: <https://www.geogebra.org/m/nfrzkpsz>.

## LUKU 2

### Steinerin lause

Tässä luvussa tutkitaan kompleksisen polynomin  $p(z)$  juurien ja sen kriittisten pisteiden yhteyttä. Polynomin derivaatan juuria kutsutaan *kriittisiksi pisteiksi* eli piste  $z'$  on kriittinen piste, jos  $p'(z') = 0$ . Tärkein yhteys saadaan Gaussin ja Lucasin lauseen avulla, jonka mukaan polynomin kriittiset pisteet kuuluvat polynomin juurien konvekseen verhoon. Lisäksi luvussa keskitytään tarkastelemaan kompleksitason kolmannen asteen polynomia, jonka juuria ovat kolmion kärkipisteet. Gaussin ja Lucasin lauseen nojalla kriittiset pisteet kuuluvat kolmion sisälle. Kuitenkin huomataan, että polynomin kriittiset pisteet ovat Steinerin sisäellipsin polttopisteet. Jos taas polynomin derivaatalla on kaksoisjuuri, niin Steinerin sisäellipsi on ympyrä. Tällöin kolmio on tasasivuinen.

**MÄÄRITELMÄ 2.1.** Pistejoukon  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  *konvekssi verho*  $H$  on pienin mahdollinen konvekssi monikulmio, joka sisältää pistejoukon  $Z$  kaikki pisteet.



KUVA 2.1. Pistejoukon  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_9\}$  konvekssi verho on konvekssi monikulmio.

**LAUSE 2.2.** (Gaussin ja Lucasin lause) Polynomin  $p(z)$  derivaatan  $p'(z)$  juuret sisältyvät polynomin juurien konvekseen verhoon.

TODISTUS. Olkoon polynomi  $P$   $n$ -asteen polynomi, joka voidaan ilmaista sen juurien  $a_1, \dots, a_n$  avulla muodossa

$$P(z) = \alpha \prod_{i=1}^n (z - a_i),$$

missä  $\alpha$  on polynomien korkeimman asteen termin kerroin. Olkoon  $z$  kompleksiluku, jolle pätee  $P(z) \neq 0$ . Ottamalla polynomista logaritmi ja derivoimalla tätä muuttujan  $z$  suhteen saadaan

$$\frac{d}{dz} \log(P(z)) = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - a_i}.$$

Jos kompleksiluku  $z$  on polynomien derivaatan  $P'$  juuri, niin tällöin saadaan

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{z - a_i} = 0.$$

Laventamalla kukin summattavista luvuista luvun  $z - a_i$  konjugaatilla saadaan modulin ominaisuuden (1.4) nojalla

$$\sum_{i=1}^n \frac{\bar{z} - \bar{a}_i}{|z - a_i|^2} = 0.$$

Tätä muokkaamalla saadaan

$$\bar{z} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - a_i|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - a_i|^2} \bar{a}_i.$$

Ottamalla konjugaatti molemmilta puolilta saadaan konjugaatin ominaisuuden (1.2) nojalla

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - a_i|^2} a_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - a_i|^2}}.$$

Merkitään  $\alpha_i = \frac{|z - a_i|^{-2}}{\sum_{i=1}^n |z - a_i|^{-2}}$ , jolloin  $z = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$ . Huomataan, että

$\alpha_i > 0$  kaikilla  $i$  ja  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ . Tästä nähdään, että  $z$  on polynomien  $p$  juurien  $a_i$  konvekssi kombinaatio, jolloin  $z$  kuuluu polynomien juurien konvekssiin verhoon.

Jos sekä polynomilla että sen derivaatalla on sama juuri eli  $P(z) = P'(z) = 0$ , niin tällöin saadaan

$$z = 1 \cdot a_i + \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n 0 \cdot a_j \right)$$

jollakin  $i$ . Näin ollen  $z$  on polynomin  $P$  juurien konvekssi kombinaatio, jolloin  $z$  kuuluu polynomin  $P$  juurien konvekssiin verhoon.  $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi kompleksitason kolmannen asteen polynomin juurien ja polynomin kriittisten pisteiden yhteyttä. Oletetaan, että kolmannen asteen polynomin juuret  $z_1$ ,  $z_2$  ja  $z_3$  ovat erillisiä ja että nämä pisteet eivät kuulu samalle suoralle. Oletetaan kolmannen asteen polynomin korkeimman asteen termin kertoimen olevan yksi eli  $a_3 = 1$ . Näin voidaan tehdä, sillä nollostasta eroavalla vakiolla jakaminen ei muuta polynomin juuria tai sen kriittisiä pisteitä. Näin ollen polynomi voidaan kirjoittaa muotoon  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ . Kun avataan sulut ja yhdistellään termejä, saadaan

$$(2.1) \quad p(z) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)z - z_1z_2z_3.$$

Polynomin derivaataksi saadaan

$$p'(z) = 3z^2 - 2(z_1 + z_2 + z_3)z + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3).$$

Merkitään kolmion  $\Delta_{z_1z_2z_3}$  painopistettä kirjaimella  $g$  eli  $g = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ . Sijoittamalla tämä polynomiin (2.1) saadaan

$$(2.2) \quad p(z) = z^3 - 3gz^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)z - z_1z_2z_3,$$

jolloin polynomin derivaatta on muotoa  $p'(z) = 3z^2 - 6gz + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)$ . Derivaatan juuret lasketaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla ja juuriksi saadaan

$$(2.3) \quad g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)}.$$

Yllä olevasta lausekkeesta huomataan, että juuret ovat symmetrisiä kolmion painopisteen  $g$  suhteen. Lisäksi Gaussin ja Lucasin lauseen nojalla polynomin derivaatan  $p'(z)$  juuret ovat joko kolmion  $\Delta_{z_1z_2z_3}$  sivuilla tai kolmion  $\Delta_{z_1z_2z_3}$  sisällä.

Todistetaan, että polynomin derivaatan  $p'(z)$  juuret ovat kolmion  $\Delta_{z_1z_2z_3}$  sisällä. Olkoon  $z'$  yksi polynomin kriittisistä pisteistä. Jos  $z_j$  olisi sekä polynomin  $p$  ja sen derivaatan kriittinen piste, niin tällöin polynomin juuren  $z_j$  kertaluku olisi vähintään kaksi. Näin ollen  $z' \neq z_j$ , koska polynomin  $p(z)$  juurien oletettiin olevan erillisiä. Gaussin ja Lucasin lauseen todistuksesta huomataan, että  $z' = \alpha_1z_1 + \alpha_2z_2 + \alpha_3z_3$ , missä

$$\alpha_i = \frac{|z' - z_i|^{-2}}{\sum_{i=1}^3 |z' - z_i|^{-2}}.$$

Kaavasta huomataan erityisesti, että  $\alpha_i$  on positiivinen eli  $\alpha_i > 0$ . Lisäksi huomataan, että  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ . Kriittinen piste  $z'$  on siis polynomin juurien  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  konvekssi kombinaatio. Huomataan kuitenkin, että  $z'$  ei ole kolmion  $\Delta_{z_1z_2z_3}$  kärkipiste eikä myöskään kolmion sivulla sijaitseva piste, koska tällöin jonkin kertoimen  $\alpha_i$

tulisi olla nolla. Näin ollen kriittisen pisteen  $z'$  täytyy olla kolmion  $\triangle_{z_1 z_2 z_3}$  sisällä.

Todistetaan seuraavaksi, että derivaatalla  $p'(z)$  on kaksoisjuuri jos ja vain jos kolmio on tasasivuinen. Tällöin polynomin derivaatan  $p'(z)$  juuri on kolmion painopiste. Yhtälöstä (2.3) huomataan, että derivaatalla  $p'(z)$  on kaksoisjuuri jos ja vain jos diskriminantti on nolla. Diskriminantti on nolla jos ja vain jos

$$(2.4) \quad 3g^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3.$$

Sijoittamalla tämä polynomiin (2.2) saadaan

$$p(z) = z^3 - 3gz^2 + 3g^2z - z_1 z_2 z_3 = (z - g)^3 - z_1 z_2 z_3 + g^3.$$

Olkoon  $\zeta = \sqrt[3]{z_1 z_2 z_3 - g^3}$ , jolloin polynomin  $p(z)$  juuret ovat muotoa  $g + \zeta$ ,  $g + \omega\zeta$  ja  $g + \omega^2\zeta$ , missä  $\omega = e^{2\pi i/3}$ . Polynomin juurista huomataan, että juuret ovat tasasivuisen kolmion kärkipisteet. Näin ollen derivaatalla  $p'(z)$  on kaksoisjuuri jos ja vain jos kolmio on tasasivuinen.

Kuten aiemmin huomattiin, niin bijektiivinen affiini kuvaus kuvaa ympyrän  $r\mathbb{T}$  ellipsiksi. Lasketaan seuraavaksi kyseisen ellipsin polttopisteet ja puoliakseleiden pituudet affiinin kuvauksen kertoimien avulla. Seuraavaa lausetta tarvitaan myös Steinerin lauseen todistamisessa.

**LAUSE 2.3.** *Jos  $f(z) = Az + B\bar{z} + C$  on bijektiivinen affiini kuvaus, niin tällöin ympyrä  $r\mathbb{T}$  kuvautuu ellipsiksi, jonka polttopisteet ovat  $C \pm 2r\sqrt{AB}$ . Lisäksi tämän ellipsin isoakselin puolikkaan pituus on  $(|A| + |B|)r$  ja pikkuakselin puolikkaan pituus on  $||A| - |B||r$ .*

**TODISTUS.** Voidaan olettaa, että  $C = 0$ , koska vakio  $C$  ei vaikuta kuvajoukon muotoon, vaan ainoastaan sen sijaintiin. Lineaarisuuden nojalla  $f(rz) = rf(z)$ , jolloin voidaan olettaa kuvattavan ympyrän säteen  $r$  olevan 1. Näin ollen kun tunnetaan yksikköympyrän kuvajoukko, niin muiden ympyröiden kuvajoukot saadaan skaalamalla säteellä  $r$ .

Käydään aluksi läpi tapaukset, joissa joko  $A = 0$  tai  $B = 0$ . Jos  $A = 0$ , niin tällöin  $f(z) = B\bar{z}$  ja siksi lineaarisuuden ja modulin ominaisuuden (1.3) nojalla  $|f(z)| = |B\bar{z}| = |B||\bar{z}| = |B||z| = |B|$  kaikilla  $z \in \mathbb{T}$ . Jos taas  $B = 0$ , niin tällöin  $f(z) = Az$ , jolloin lineaarisuuden nojalla  $|f(z)| = |A||z| = |A|$  kaikilla  $z \in \mathbb{T}$ . Näin ollen jos  $A = 0$  tai  $B = 0$ , niin yksikköympyrä kuvautuu origokeskiseksi ympyräksi, jonka säde  $r$  on joko  $|B|$  tai  $|A|$ .

Oletetaan, että  $A$  ja  $B$  ovat molemmat nollasta eroavia. Tällöin affiini kuvaus  $f$  kuvaa yksikköympyrän  $\mathbb{T}$  ellipsiksi. Osoitetaan, että kyseisen ellipsin polttopisteet ovat  $C \pm 2\sqrt{AB}$ , isoakselin puolikkaan pituus on  $|A| + |B|$  ja pikkuakselin puolikkaan pituus on  $||A| - |B||$ .

Yksikköympyrän parametrisaatio on  $t \mapsto e^{it}$ , jolloin yksikköympyrän kuvaus on muotoa  $f(e^{it}) = Ae^{it} + Be^{-it} = |A|e^{i(\theta+t)} + |B|e^{i(\varphi-t)}$ , missä  $A = |A|e^{i\theta}$  ja  $B = |B|e^{i\varphi}$ . Kolmioepäyhtälön ([10, s. 8]) avulla saadaan

$$(2.5) \quad ||A| - |B|| \leq ||A|e^{i(\theta+t)} + |B|e^{i(\varphi-t)}| \leq |A| + |B|.$$

Tästä epäyhtälöstä huomataan, että ellipsi sisältää ympyrän  $|z| = ||A| - |B||$  ja ellipsi on ympyrän  $|z| = |A| + |B|$  sisällä. Epäyhtälöstä huomataan, että yhtäsuuruus ylöspäin pätee jos ja vain jos  $e^{i(\theta+t)} = e^{i(\varphi-t)}$ . Tämä pätee, jos  $\theta + t = \varphi - t + 2n\pi$  jollekin kokonaisluvulle  $n$ . Yhtälöä muokkaamalla saadaan  $t = \frac{1}{2}(\varphi - \theta) + n\pi$ . Näin ollen pätee  $|f(e^{it})| = |A| + |B|$ , kun  $t = \frac{1}{2}(\varphi - \theta)$  tai  $t = \frac{1}{2}(\varphi - \theta) + \pi$ . Näinpä isoakselin puolikkaan pituus on  $a = |A| + |B|$ . Koska  $e^{i\varphi/2} = \sqrt{B}/|B|^{1/2}$  ja  $e^{i\theta/2} = \sqrt{A}/|A|^{1/2}$ , saadaan

$$f(e^{i(\varphi-\theta)/2}) = \frac{|A| + |B|}{|AB|^{1/2}} \sqrt{AB}.$$

Yhtälöstä huomataan, että isoakselin suuntavektori on  $\sqrt{AB}$ .

Vastaavanlaisesti epäyhtälöstä (2.5) huomataan, että yhtäsuuruus pätee alarajalla, kun  $e^{i(\theta+t)} = -e^{i(\varphi-t)}$ . Tämä pätee, kun  $\theta + t = \varphi - t + \pi + 2n\pi$  jollekin kokonaisluvulle  $n$  eli kun  $t = \frac{1}{2}(\varphi - \theta) + \frac{\pi}{2} + n\pi$ . Näin ollen pikkuakselin puolikkaan pituus on  $b = ||A| - |B||$ . Ellipsin keskipisteen ja ellipsin polttopisteen välinen etäisyys  $c$  voidaan laskea isoakselin puolikkaan ja pikkuakselin puolikkaan pituuksien avulla kaavasta (1.7), jolloin  $c = 2|A|^{1/2}|B|^{1/2}$ . Näin ollen polttopisteet ovat  $\pm 2\sqrt{AB}$ .  $\square$

Aiemmin tutkielmassa ei ole vielä osoitettu, että muilla kolmioilla kuin tasasivuisella kolmiolla on Steinerin sisäellipsi. Seuraava Steinerin lause on luvun päätulos. Sen mukaan jokaisella kolmiolla on olemassa yksikäsitteinen Steinerin sisäellipsi.

**LAUSE 2.4.** *(Steinerin lause) Mielivaltaiseen kolmioon pystytään konstruoimaan yksikäsitteinen ellipsi, joka sivuaa kolmion jokaista sivua sen keskipisteessä. Tällöin kolmion sivut ovat ellipsin tangentteja. Olkoot  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  kolmion kärkipisteet, jolloin ellipsin polttopisteet ovat*

$$g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)},$$

missä  $g = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$  on kolmion painopiste.

**TODISTUS.** Olkoon  $\triangle$  tasasivuinen kolmio, jonka kärkipisteet ovat  $1, \omega = e^{(2\pi i/3)}$  ja  $\omega^2$ . Olkoon kolmio  $\triangle_{z_1 z_2 z_3}$  mielivaltainen kolmio kompleksisessa avaruudessa, jolloin on olemassa aina yksikäsitteinen affiini kuvaus  $f(z) = Az + B\bar{z} + C$ , jolle pätee  $f(1) = z_1, f(\omega) = z_2$  ja  $f(\omega^2) = z_3$ . Kertoimet  $A, B$  ja  $C$  saadaan ratkaistua lineaarisesta yhtälöryhmästä, jonka yhtälöt ovat  $f(1) = z_1, f(\omega) = z_2$  ja  $f(\omega^2) = z_3$ .

Kertoimiksi saadaan

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) \\ B &= \frac{1}{3}(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) \\ C &= \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = g. \end{aligned}$$

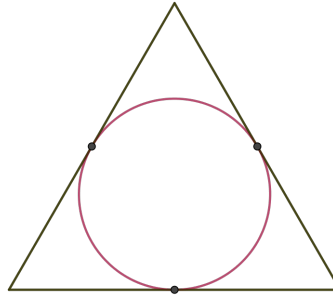
Kuvaus  $f$  on bijektio kompleksisessa avaruudessa, koska pisteet  $z_1$ ,  $z_2$  ja  $z_3$  eivät kuulu samalle suoralle. Tasasivuisen kolmion  $\triangle$  sisäympyrä on  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$ , joka sivuaa tasasivuisen kolmion sivuja niiden keskipisteissä. Affiinien kuvausten ominaisuuksien nojalla kuvaus  $f$  kuvaa ympyrän  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  ellipsiksi, joka sivuaa kolmion  $\triangle_{z_1 z_2 z_3}$  sivujen keskipisteitä. Seuraavaksi havaitaan, että

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{9}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + (\omega + \omega^2)(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)) \\ &= \frac{1}{9}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)) \\ &= \frac{1}{9}((z_1 + z_2 + z_3)^2 - 3(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)) \\ &= g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3), \end{aligned}$$

koska  $1 + \omega + \omega^2 = 0$ . Lauseen 2.3 nojalla kuvaellipsin polttopisteet saadaan yhtälöstä (2.3).

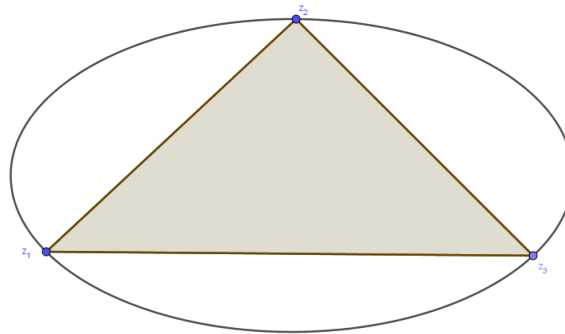
Osoitetaan seuraavaksi, että kolmiolla ei ole muita Steinerin sisäellipsejä. Olkoon  $E$  kolmion  $\triangle_{z_1 z_2 z_3}$  sisälle konstruoitu ellipsi, joka sivuaa kolmion jokaista sivua sivun keskipisteessä. Olkoon  $h$  bijektiivinen affiini kuvaus, joka kuvaa ympyrän  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  ellipsiksi  $E$ . Merkitään kolmion  $\triangle_{z_1 z_2 z_3}$  alkukuvaa  $\triangle_{Z_1 Z_2 Z_3}$ , jonka sisäympyrän  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  tangentteja ovat kolmion sivut ja ympyrä sivuaa kolmion jokaista sivua sen keskipisteessä. Lisäksi tiedetään, että ympyrän ulkopuolisen pisteen etäisyydet pisteen kautta piirrettyjen tangenttien sivuamispisteisiin ovat yhtä suuret. Valitsemalla vuorotellen jokainen kolmion kärkipiste ympyrän ulkopuoliseksi pisteeksi saadaan, että kolmio  $\triangle_{Z_1 Z_2 Z_3}$  on tasasivuinen. Koska tasasivuisen kolmion kärkipisteiden kautta piirretyn ympyrän säde on kaksinkertainen verrattuna kolmion sisään piirretyn ympyrän säteeseen, niin kolmion  $\triangle_{Z_1 Z_2 Z_3}$  kärkipisteet sijaitsevat yksikköympyrällä  $\mathbb{T}$ . Tästä seuraa, että affiinit kuvaukset ovat samat eli  $h = f$ , jolloin  $E$  on yksikäsitteinen Steinerin sisäellipsi. □

Steinerin lauseessa määritettyä ellipsiä kutsutaan *Steinerin sisäellipsiksi*. Steinerin sisäellipsin keskipiste on kolmion painopiste  $g$ . Lisäksi Steinerin sisäellipsi on ympyrä jos ja vain jos kolmio  $\triangle_{z_1 z_2 z_3}$  on tasasivuinen. Huomataan myös, että jos derivoidaan toisen kerran polynomia  $p(z)$ , saadaan  $p''(z) = 6z - 6g$ . Näin ollen toisen derivaatan juureksi saadaan kolmion painopiste  $g$ .



KUVA 2.2. Tasasivuisen kolmion tapauksessa Steinerin sisäellipsi on ympyrä.

HUOMAUTUS 2.5. Steinerin sisäellipsin lisäksi olisi mahdollista tarkastella *Steinerin ulkoellipsiä*, joka on kolmion  $\Delta z_1 z_2 z_3$  kärkipisteiden kautta kulkeva ellipsi, jonka keskipiste on kolmion  $\Delta z_1 z_2 z_3$  painopiste. Edellisen todistuksen merkinnöin Steinerin ulkoellipsi saadaan yksikköympyrän  $\mathbb{T}$  kuvajoukkona affiinissa kuvauksessa  $f$ .



KUVA 2.3. Steinerin ulkoellipsi kulkee kolmion kärkipisteiden kautta.

HUOMAUTUS 2.6. Steinerin lauseen todistuksen sivutuotteena saadaan kaava kolmion pinta-alalle kolmion kärkipisteiden avulla. Aluksi havaitaan, että Steinerin lauseessa esiintyneille kertoimille  $A$  ja  $B$  pätee

$$(2.6) \quad ||A|^2 - |B|^2| = \frac{2}{3\sqrt{3}} |\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1)|.$$

Pinta-alojen suhde saadaan determinantin geometrisena tulkintana

$$(2.7) \quad ||A|^2 - |B|^2| = |\det(f)| = \frac{A(\Delta z_1 z_2 z_3)}{A(\Delta)},$$

missä  $\det(f)$  on kuvauksen  $f$  lineaariosan  $Az + B\bar{z}$  determinantti ja  $\Delta$  on Steinerin lauseen todistuksessa esiintynyt tasasivuinen kolmio. Tasasivuisen kolmion pinta-ala



on  $A(\Delta) = 3\sqrt{3}/4$ , jolloin yhtälöiden (2.6) ja (2.7) avulla kolmion  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  pinta-alaksi saadaan

$$A(\Delta_{z_1 z_2 z_3}) = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1)|.$$

Kolmion sisälle konstruoiduista ympyröistä kolmion sivuja niiden keskipisteissä sivuavalla ympyrällä on suurin säde, jolloin sillä on myös suurin pinta-ala. Tämä ominaisuus pätee myös kolmion sisällä oleville ellipseille siten, että Steinerin sisäellipsillä on suurin mahdollinen pinta-ala. Todistetaan seuraavaksi aputulos, jossa tarkastellaan kolmion ja sen sisään piirrettyjen ympyröiden pinta-alojen suhdetta. Tämän jälkeen aputulosta käyttämällä pystytään todistamaan vastaavanlainen lause kolmiolle ja sen sisällä olevien ellipsien pinta-alojen suhteelle.

*LAUSE 2.7. Olkoon  $C$  mielivaltainen ympyrä, joka on kolmion  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  sisällä. Tällöin*

$$\frac{A(\text{ympyrä } C)}{A(\Delta_{z_1 z_2 z_3})} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

*ja että yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos kolmio  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  on tasasivuinen ja  $C$  on kolmion sivuja niiden keskipisteissä sivuava ympyrä.*

**TODISTUS.** Olkoon  $r$  kolmion  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  sisään piirretyn ja sen kaikkia sivuja sivuavan ympyrän säde. Ympyrän  $C$  pinta-alalle pätee epäyhtälö  $A(C) \leq \pi r^2$ , ja yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos ympyrä  $C$  sivuaa kolmion jokaista sivua. Riittää siis todistaa, että

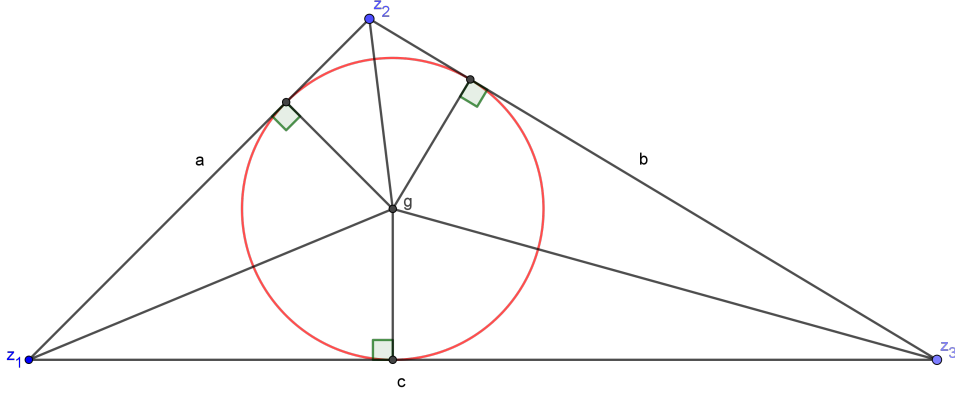
$$\frac{\pi r^2}{A(\Delta_{z_1 z_2 z_3})} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

missä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos kolmio  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  on tasasivuinen. Merkitään kolmion  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  sivuja kirjaimilla  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , jolloin kolmion puolipiiriksi  $s$  saadaan  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ . Heronin kaavalla [8, s. 37] saadaan kolmion  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  pinta-ala sivujen ja puolipiirin avulla

$$(2.8) \quad A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Kun piirretään janat kolmion  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  kärkipisteistä kolmion painopisteeseen  $g$ , saadaan kolme kolmiota  $\Delta_{z_1 z_2 g}$ ,  $\Delta_{z_2 z_3 g}$  ja  $\Delta_{z_1 z_3 g}$ , joiden kunkin korkeus on  $r$ . Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 2.4. Näin ollen kolmion  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned} A(\Delta_{z_1 z_2 z_3}) &= A(\Delta_{z_1 z_2 g}) + A(\Delta_{z_2 z_3 g}) + A(\Delta_{z_1 z_3 g}) \\ &= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \\ &= \frac{a+b+c}{2} r. \end{aligned}$$



KUVA 2.4. Kolmion pinta-ala saadaan kolmion puolipiirin ja kolmion sisään piirretyn ympyrän säteen avulla.

Yllä olevasta laskusta huomataan, että kolmion pinta-ala voidaan ilmoittaa sen sisään piirretyn ympyrän säteen  $r$  ja kolmion puolipiirin  $s$  avulla

$$(2.9) \quad A = rs.$$

Näin ollen yhtälöiden (2.8) ja (2.9) avulla saadaan

$$\begin{aligned} r^2 s &= \frac{A^2(\Delta z_1 z_2 z_3)}{s} \\ &= (s-a)(s-b)(s-c). \end{aligned}$$

Koska  $a, b, c, s > 0$ , aritmeettis-geometrisen epäyhtälön [9, s. 2] nojalla saadaan

$$((s-a)(s-b)(s-c)) \frac{1}{3} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} = \frac{s}{3},$$

missä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos  $a = b = c$  eli kolmio on tasasivuinen. Tästä seuraa, että  $r^2 \leq s^2/27$ , josta ottamalla neliöjuuri saadaan  $r \leq s/(3\sqrt{3})$ . Näin ollen

$$\frac{\pi r^2}{A(\Delta z_1 z_2 z_3)} = \frac{\pi r}{s} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

missä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos kolmio  $\Delta z_1 z_2 z_3$  on tasasivuinen. □

SEURAUUS 2.8. *Kolmion  $\Delta z_1 z_2 z_3$  sisällä olevalle ellipsille pätee*

$$\frac{A(\text{ellipsi } E)}{A(\text{kolmio } \Delta z_1 z_2 z_3)} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

*missä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos ellipsi  $E$  sivuaa kolmion jokaista sivua sivun keskipisteessä eli ellipsi  $E$  on Steinerin sisäellipsi.*

TODISTUS. Olkoon  $f$  affiini kuvaus siten, että  $f(1) = z_1$ ,  $f(\omega) = z_2$  ja  $f(\omega^2) = z_3$ . Tällöin affiini kuvaus ympyrästä  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  on Steinerin sisäellipsi  $E_0$  eli  $f(\frac{1}{2}\mathbb{T}) = E_0$ . Affiniin kuvausten ominaisuuden nojalla kaikki pinta-alat skaalautuvat samalla kertoimella, jolloin

$$\frac{A(E_0)}{A(\Delta z_1 z_2 z_3)} = \frac{A(\frac{1}{2}\mathbb{T})}{A(\Delta)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

missä  $\Delta$  on Steinerin lauseen todistuksessa esiintynyt tasasivuinen kolmio.

Olkoon nyt  $E$  mielivaltainen ellipsi kolmion  $\Delta z_1 z_2 z_3$  sisällä. Tällöin on olemassa affiini kuvaus  $h$ , joka kuvaa ympyrän  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  ellipsiksi  $E$ . Olkoon kolmion  $\Delta z_1 z_2 z_3$  alkukuva kuvauksessa  $h$  kolmio  $\Delta Z_1 Z_2 Z_3$ , joka sisältää ympyrän  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$ . Näin ollen lauseen 2.7 nojalla

$$\frac{A(E)}{A(\Delta z_1 z_2 z_3)} = \frac{A(\frac{1}{2}\mathbb{T})}{A(\Delta Z_1 Z_2 Z_3)} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

missä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos kolmio  $\Delta Z_1 Z_2 Z_3$  on tasasivuinen ja  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  on kolmion sisäympyrä. Steinerin lauseen todistuksesta siis saadaan, että ellipsin  $E$  täytyy olla Steinerin sisäellipsi, jotta yhtäsuuruus epäyhtälössä toteutuu.  $\square$

Seuraavaksi käsiteltävä Coolidgen lause antaa yhteyden Steinerin sisäellipsin polttopisteiden ja kolmion kärkipisteiden joukkoon *parhaiten sopivan suoran* välillä. Määritellään aluksi kompleksitason joukkoon parhaiten sopiva suora.

MÄÄRITELMÄ 2.9. Olkoot  $l$  suora ja  $d(z_j, l)$  pisteen  $z_j$  ja suoran  $l$  välinen etäisyys. Pistejoukkoon  $\{z_1, \dots, z_n\}$  *parhaiten sopiva suora* on suora  $l$ , joka minimoi summan

$$D = \sum_{j=1}^n d^2(z_j, l),$$

missä  $1 \leq j \leq n$ .

Todistetaan seuraavaksi aputuloksena, jota tarvitaan Coolidgen lauseen todistamisessa.

LAUSE 2.10. *Olkoot  $z_1, \dots, z_n$  kompleksitason pisteitä ja  $g = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j$  pistejoukon painopiste. Merkitään painopisteen ja pisteiden  $z_j$  etäisyyksien neliöiden summaa kirjaimella  $U$  eli  $U = \sum_{j=1}^n (z_j - g)^2 = \sum_{j=1}^n z_j^2 - ng^2$ .*

- Jos  $U = 0$ , niin tällöin jokainen suora, joka kulkee painopisteen  $g$  kautta, on parhaiten sopiva suora pistejoukolle  $\{z_1, \dots, z_n\}$ .*
- Jos  $U \neq 0$ , niin parhaiten sopiva suora pistejoukolle  $\{z_1, \dots, z_n\}$  on pisteen  $g$  kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen origosta pisteeseen  $\sqrt{U}$  kulkevan vektorin kanssa.*

TODISTUS. Olkoon suora  $l$  yksikkövektorin  $e^{-i\theta}$  normaali, jolloin sen yhtälö on muotoa

$$x\cos\theta + y\sin\theta = \operatorname{Re}(e^{-i\theta}z) = c$$

jollekin reaaliluvulle  $c$ . Koska  $d(z_j, l) = |\operatorname{Re}(e^{-i\theta}z_j) - c|$ , niin

$$(2.10) \quad D = \sum_{j=1}^n (\operatorname{Re}(e^{-i\theta}z_j) - c)^2.$$

Määritetään  $c$  ja  $\theta$  minimoimalla summa  $D$ , jolloin saadaan

$$0 = \frac{\partial D}{\partial c} = - \sum_{j=1}^n 2(\operatorname{Re}(e^{-i\theta}z_j) - c).$$

Muokkaamalla yhtälöä saadaan

$$\operatorname{Re} e^{-i\theta}(z_1 + z_2 + \dots + z_n) - nc = 0,$$

josta saadaan ratkaistua  $c$

$$(2.11) \quad c = \operatorname{Re} e^{-i\theta} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j \right).$$

Suoran  $l$  yhtälö on muotoa  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}z) = c$ , jolloin kaikki ne luvut  $z$ , jotka toteuttavat tämän ehdon, kuuluvat suoralle  $l$ . Kaavasta (2.11) huomataan, että painopiste  $g$  toteuttaa ehdon, joten  $g$  kuuluu pistejoukkoon parhaiten sopivalle suoralle  $l$  riippumatta summasta  $U$ . Jos  $w_j = z_j - g$ , niin tällöin yhtälöistä (2.10) ja (2.11) saadaan

$$D = \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}^2(e^{-i\theta}w_j).$$

Käyttämällä kompleksilukujen ominaisuuksia  $\operatorname{Re}(-iz) = \operatorname{Im} z$  ja  $\operatorname{Im}(z^2) = 2(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)$  saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial D}{\partial \theta} = 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(e^{-i\theta}w_j) \operatorname{Re}(-ie^{-i\theta}w_j) \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(e^{-i\theta}w_j) \operatorname{Im}(e^{-i\theta}w_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \operatorname{Im}(e^{-2i\theta}w_j^2) \\ &= \operatorname{Im} \left( e^{-i\theta} \sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Edellisestä yhtälöstä huomataan, että summan  $D$  kriittisessä pisteessä luvun  $\left( e^{-i\theta} \sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2} \right)^2$  imaginaariosa on nolla. Merkitään luvun reaaliosaa kirjaimella  $t$ , jolloin saadaan

$$e^{-i\theta} \sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2} = \begin{cases} \sqrt{t}, & \text{jos } t \geq 0 \\ i\sqrt{|t|}, & \text{jos } t < 0. \end{cases}$$

Summa  $D$  on muuttujan  $\theta$  suhteen vakio, jos  $t = 0$  eli  $\sum_{j=1}^n w_j^2 = U = 0$ . Tällöin jokainen suora, joka kulkee painopisteen  $g$  kautta, on parhaiten sopiva suora. Näin ollen lauseen a)-kohta on todistettu.

Todistetaan nyt lauseen b)-kohta, kun  $U \neq 0$  eli  $\sum_{j=1}^n w_j^2 \neq 0$ . Toisen kertaluvun derivaatan testillä pystytään osoittamaan, että  $t > 0$  antaa suurimman arvon, kun taas  $t < 0$  antaa minimiarvon. Kun  $t < 0$ , niin saadaan

$$ie^{i\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n w_j^2}{\left| \sum_{j=1}^n w_j^2 \right|}}.$$

Minimipisteessä siis vektori  $ie^{i\theta}$  on yksikkövektori vektorista, joka kulkee origon kautta pisteeseen  $\sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2}$ . Huomataan, että vektori  $ie^{i\theta}$  on kohtisuorassa vektoria  $e^{-i\theta}$  vasten, koska ristituloksi saadaan  $ie^{i\theta} \times e^{-i\theta} = 1 = |ie^{i\theta}||e^{-i\theta}|\sin\theta$ , jolloin vektorien välinen kulma  $\theta$  on  $90^\circ$ . Alussa oletettiin, että parhaiten sopiva suora  $l$  on yksikkövektorin  $e^{-i\theta}$  normaali, joten suora  $l$  on yhdensuuntainen origon kautta pisteeseen  $\sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2}$  kulkevan vektorin kanssa. Lisäksi aiemmin saatiin, että pistejoukon painopiste  $g$  kuuluu suoralle  $l$ .

Kun siis  $\sum_{j=1}^n w_j^2 \neq 0$ , niin tällöin summan  $D$  minimoi suora  $l$ , joka kulkee painopisteen  $g$  kautta ja on yhdensuuntainen origon kautta pisteeseen  $\sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2} = \sqrt{U}$  kulkevan vektorin kanssa.

□

Tarkastellaan nyt lausetta 2.10, kun oletetaan, että pisteet  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  eivät ole samalla suoralla. Tällöin pisteet  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  ovat kolmion kärkipisteitä, jolloin summa

$U$  on muotoa

$$\begin{aligned} U &= \sum_{j=1}^3 z_j^2 - 3g^2 \\ &= 9\left(\frac{1}{3}\sum_{j=1}^3 z_j\right)^2 - 2z_1z_2 - 2z_2z_3 - 2z_1z_3 - 3g^2 \\ &= 6\left(g^2 - \frac{1}{3}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)\right). \end{aligned}$$

Yhtälöstä (2.4) saadaan, että  $U = 0$  jos ja vain jos pisteet  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  ovat tasasivuisen kolmion kärkipisteitä. Lauseen 2.10 a)-kohdasta saadaan, että tasasivuisen kolmion kärkipisteiden  $z_j, 1 \leq j \leq 3$  joukkoon parhaiten sopiva suora on jokainen suora, joka kulkee kolmion painopisteen  $g$  kautta. Toisaalta jos kolmio  $\Delta_{z_1z_2z_3}$  ei ole tasasivuisen, niin lauseen 2.10 b)-kohdan nojalla parhaiten sopiva suora kulkee painopisteen  $g$  kautta ja on yhdensuuntainen vektorin  $\sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)}$  kanssa.

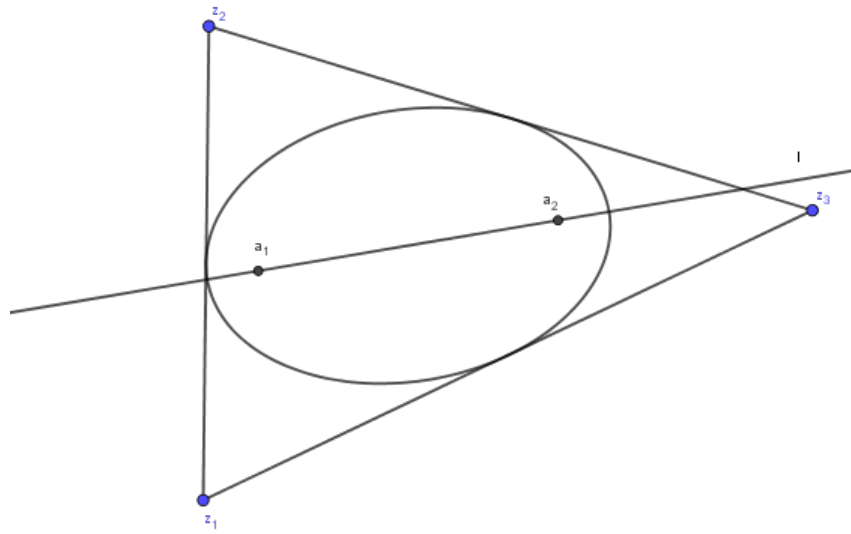
Seuraavaksi todistetaan Coolidgen lause, joka saadaan lauseen 2.10 seurauksena.

**SEURAUUS 2.11.** (*Coolidge*) Oletetaan, että kolmio  $\Delta_{z_1z_2z_3}$  ei ole tasasivuinen. Tällöin pistejoukkoon  $\{z_1, z_2, z_3\}$  parhaiten sopiva suora kulkee Steinerin sisäellipsin polttopisteiden kautta. Toisin sanoen jos  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ , niin tällöin parhaiten sopiva suora kulkee polynomin derivaatan  $p'(z)$  juurien kautta.

**TODISTUS.** Aiemmin todistettiin, että jos kolmio ei ole tasasivuinen, niin  $U \neq 0$ . Näin ollen lauseen 2.10 b)-kohdan nojalla parhaiten sopiva suora on yhdensuuntainen vektorin  $\sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)}$  kanssa. Lisäksi parhaiten sopiva suora kulkee kolmion painopisteen  $g$  kautta.

Yhtälöstä (2.3) nähdään, että vektori  $\sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)}$  on yhdensuuntainen vektorin kanssa, joka kulkee polynomin kriittisten pisteiden kautta. Näin ollen parhaiten sopiva suora kulkee polynomin derivaatan  $p'(z)$  juurien kautta. □

**HUOMAUTUS 2.12.** Olkoon  $p(z)$  kolmannen asteen polynomi, jolla on erilliset juuret  $z_1, z_2$  ja  $z_3$ , jotka eivät ole samalla suoralla. Olkoon  $\lambda$  mielivaltainen kompleksiluku ja olkoon  $p_\lambda(z) = p(z) + \lambda$ . Oletetaan, että polynomilla  $p_\lambda(z)$  on erilliset juuret  $z_1(\lambda), z_2(\lambda)$  ja  $z_3(\lambda)$  ja juuret eivät kuulu samalle suoralle. Koska  $p'_\lambda(z) = p'(z)$ , niin tällöin kolmioiden  $\Delta_{z_1(\lambda)z_2(\lambda)z_3(\lambda)}$  sisällä olevilla Steinerin sisäellipseilla on yhteiset polttopisteet ja kolmioiden kärkipisteillä on sama parhaiten sopiva suora muuttujasta  $\lambda$  riippumatta. Lisäksi kaikilla kolmioilla  $\Delta_{z_1(\lambda)z_2(\lambda)z_3(\lambda)}$  on sama painopiste.



KUVA 2.5. Kolmion, joka ei ole tasasivuinen, kärkipisteille  $z_1, z_2, z_3$  parhaiten sopiva suora  $l$  kulkee kolmion  $\triangle z_1 z_2 z_3$  Steinerin sisäellipsin polttopisteiden kautta.

## LUKU 3

### Mardenin lause

**LAUSE 3.1.** (Mardenin lause) Olkoon  $T$  kolmio  $\Delta z_1 z_2 z_3$  ja olkoon  $p(z)$  kolmannen asteen polynomi, jonka juuret  $z_1$ ,  $z_2$  ja  $z_3$  eivät ole samalla kompleksitason suoralla. Tällöin kolmion  $T$  Steinerin sisäellipsin polttopisteet ovat derivaatan  $p'(z)$  juuret.

Dan Kalman on nimennyt kyseisen lauseen matemaatikko Morris Mardenin mukaan, koska hän tutustui ensimmäisen kerran lauseeseen Mardenin kirjassa *Geometry of Polynomimials*. Lauseen on kuitenkin ensimmäisenä todistanut Jörg Siebeck vuonna 1864, joten lause tunnetaan myös Siebeckin lauseena. Todistetaan Mardenin lause käyttämällä affiinien kuvausten ominaisuuksia ja geometriaa. Mardenin lauseen todistamiseen tarvitaan kolme lemmaa, jotka todistetaan luvun alussa. Lemmat ja lauseen todistukset perustuvat Kalmanin artikkeliin [3].

Olkoon affiini kuvaus  $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  muotoa  $M(z) = \alpha z + \beta$ , missä  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat kompleksilukuja ja  $\alpha \neq 0$ . Kerroin  $\alpha$  voidaan esittää polaarisisä muodossa  $re^{i\theta}$ . Näin ollen affiini kuvaus  $M$  venyttää vakion  $r$  verran pistettä  $z$ , kiertää pistettä kulman  $\theta$  verran sekä siirtää pistettä vakion  $\beta$  verran. Affiinilla kuvauksella  $M$  voidaan siirtää, skaalata ja kiertää kolmiota mielivaltaiseen paikkaan.

Osoitetaan seuraavaksi, että Mardenin lause pätee pistejoukolla  $\{z_1, z_2, z_3\}$  jos ja vain jos se pätee myös kuvapisteteiden joukolla  $\{M(z_1), M(z_2), M(z_3)\}$ . Olkoot kolmion kärkipisteet  $z_j$  ja ellipsin polttopisteet polynomin derivaatan  $p'$  juuret. Kun kolmiota kuvataan funktiolla  $M$ , niin kolmion kuvajoukko on kolmio. Vastaavasti Steinerin sisäellipsi kuvautuu Steinerin sisäellipsiksi sekä alkuperäisen ellipsin polttopisteet kuvautuvat kuvautuneen ellipsin polttopisteiksi. Tarkastellaan polynomia  $p_M(z) = (z - M(z_1))(z - M(z_2))(z - M(z_3))$ , jonka juuret ovat polynomin  $p$  juurien kuvapisteteet. Merkitään tämän polynomin derivaattaa  $p'_M$ . Osoitetaan, että kuvaus  $M$  kuvaa derivaatan  $p'$  juuret derivaatan  $p'_M$  juuriksi. Korvataan  $z$  affiinilla kuvauksella  $M(z)$  alkuperäisessä polynomissa  $p_M$ . Tällöin saadaan

$$(3.1) \quad p_M(M(z)) = (M(z) - M(z_1))(M(z) - M(z_2))(M(z) - M(z_3)).$$

Koska  $M(z) - M(z_j) = \alpha z + \beta - (\alpha z_j + \beta) = \alpha(z - z_j)$ , niin yhtälö (3.1) voidaan kirjoittaa muotoon

$$p_M(M(z)) = \alpha^3 p(z).$$

Kun tätä derivoidaan muuttujan  $z$  suhteen molemmin puolin ja koska  $M'(z) = \alpha$ , saadaan

$$\alpha p'_M(M(z)) = \alpha^3 p'(z).$$



Jakamalla molemmat puolet nolasta eroavalla vakiolla  $\alpha$  saadaan yhtälö sievennettyä muotoon

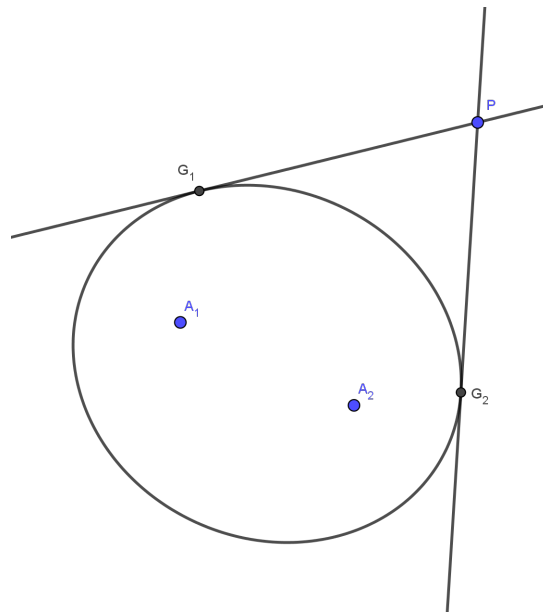
$$p'_M(M(z)) = \alpha^2 p'(z).$$

Yllä olevasta yhtälöstä huomataan, että jos polynomin  $p$  kriittinen piste on  $z'$ , niin tällöin  $M(z')$  on kriittinen piste polynomille  $p_M$ . Näin ollen kolmiota voidaan kiertää, siirtää tai skaalata siten että Steinerin sisäellipsin polttopisteet kuvautuvat kuvautuneen kolmion Steinerin sisäellipsin polttopisteiksi. Kompleksiaffineja kuvauksia käytetäänkin hyväksi seuraavien lemموjen ja Mardenin lauseen todistuksissa. Lisäksi huomataan, että derivaatalla  $p'$  on kaksoisjuuri jos ja vain jos  $p'_M$  on kaksoisjuuri.

Toisen asteen polynomin kertoimilla ja polynomin juurilla on yhteys, jota käytetään lemموjen todistuksissa. Olkoon toiseen asteen polynomi muotoa  $q(z) = z^2 + bz + c$  ja olkoot polynomin juuret  $z_1$  ja  $z_2$ . Polynomi voidaan esittää myös sen juurien avulla  $q(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2$ , jolloin polynomin kertoimet  $b$  ja  $c$  voidaan ilmaista juurien avulla

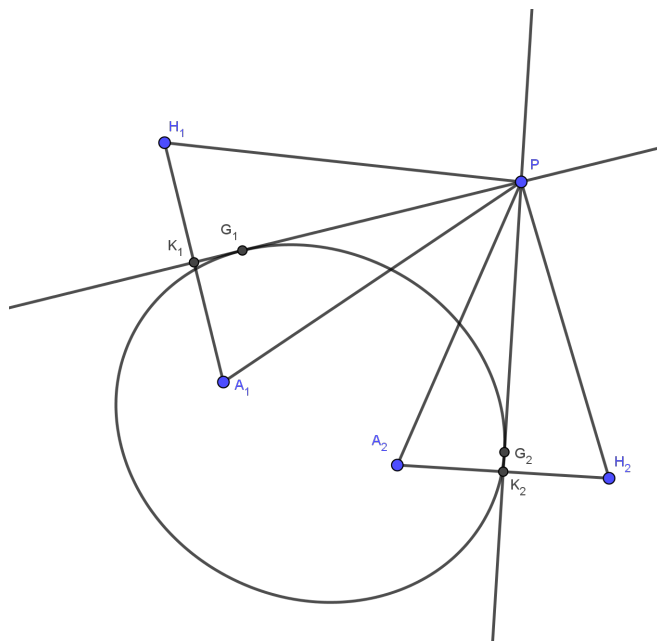
$$(3.2) \quad b = -(z_1 + z_2) \text{ ja } c = z_1z_2.$$

LEMMA 3.2. *Olkoot ellipsin polttopisteet  $A_1$  ja  $A_2$  sekä olkoon  $P$  ellipsin ulkopuolella oleva mielivaltainen piste. Ellipsille pystytään asettamaan kaksi tangenttia, jotka kulkevat pisteen  $P$  kautta. Olkoot  $G_1$  ja  $G_2$  tangentin ja ellipsin leikkauspisteitä. Tällöin  $\angle A_1PG_1 = \angle A_2PG_2$ .*



KUVA 3.1. Ellipsi, jonka polttopisteet ovat  $A_1$  ja  $A_2$  sekä  $P$  on mielivaltainen piste ellipsin ulkopuolella.

TODISTUS. Valitaan mielivaltainen piste  $P$ , jonka kautta voidaan piirtää kaksi tangenttia ellipsille. Merkitään tangentin sivuamispisteitä  $G_1$  ja  $G_2$ . Tätä on havainnollistettu kuvassa 3.1. Peilataan piste  $A_1$  pisteen  $G_1$  kautta kulkevan tangentin suhteen ja merkitään tätä pistettä  $H_1$ . Merkitään janan  $A_1H_1$  keskipistettä  $K_1$ . Kolmiot  $\triangle A_1K_1P$  ja  $\triangle H_1K_1P$  ovat yhteneviä SKS-säännön nojalla. Tästä saadaan, että  $PA_1 = PH_1$  ja  $\angle A_1PK_1 = \angle H_1PK_1$ . Vastaavanlainen päättely voidaan tehdä tangentin pisteelle  $G_2$ . Tätä on havainnollistettu kuvassa 3.2.

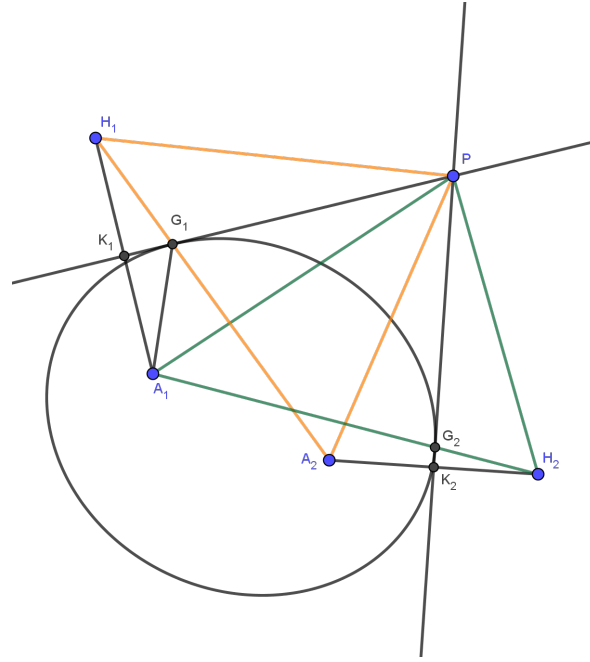


KUVA 3.2. Tasakylkiset kolmiot  $\triangle A_1H_1P$  ja  $\triangle A_2H_2P$ , joiden molempien kärkipiste on  $P$ .

Todistetaan seuraavaksi, että pisteet  $A_2$ ,  $G_1$  ja  $H_1$  kuuluvat samalle suoralle. Piirretään janat  $A_1G_1$  ja  $A_2H_1$ . Ellipsin sivuamispisteeseen piirretyt janat polttopisteistä kohtaavat tangentin samassa kulmassa, jolloin saadaan  $\angle A_1G_1K_1 = \angle A_2G_1P$ . Huomataan myös, että  $\angle A_1G_1K_1 = \angle H_1G_1K_1$ , koska jana  $PK_1$  on kohtisuorassa janaa  $A_1H_1$  vasten. Tästä seuraa, että  $\angle A_2G_1P = \angle H_1G_1K_1$ . Näin ollen pisteet  $A_2$ ,  $G_1$  ja  $H_1$  ovat samalla suoralla. Saman päätelmän voi tehdä vastaavanlaisesti pisteille  $F_1$ ,  $G_2$  ja  $H_2$ .

Osoitetaan, että kolmio  $\triangle H_1PA_2$  on yhtenevä kolmion  $\triangle A_1PH_2$  kanssa näyttämällä, että sivut vastaavat toisiaan. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 3.3. Aiemmin on jo todistettu, että  $PH_1 = PA_1$  ja  $PH_2 = PA_2$ . Nyt  $H_1A_2 = A_1G_1 + G_1A_2 = A_1G_2 + G_2A_2 = A_1H_2$ , missä on käytetty tietoa, että etäisyyksien summa ellipsin mielivaltaisesta pisteestä polttopisteisiin on vakio. Näin ollen kolmiot  $\triangle H_1PA_2$  ja  $\triangle A_1PH_2$  ovat yhteneviä SSS-säännön nojalla. Kolmioiden yhtenevyydestä seuraa, että  $\angle H_1PA_2 = \angle A_1PH_2$ . Lisäksi molemmat kulmat  $\angle H_1PA_2$  ja  $\angle A_1PH_2$  sisältävät kulman  $\angle A_1PA_2$ , jolloin saadaan  $\angle H_1PA_1 = \angle A_2PH_2$ . Haluttu tulos  $\angle G_1PA_1 = \angle A_2PG_2$  saadaan, koska tangentit puolittavat kulmat  $\angle H_1PA_1$  ja  $\angle A_2PH_2$ .

□



KUVA 3.3.  $\triangle H_1PA_2$  on yhtenevä kolmion  $\triangle A_1PH_2$  kanssa.

LEMMA 3.3. *Olkoot polynomi  $p(z)$  ja kolmio  $T$  kuten Mardenin lauseen oletuksissa. Olkoon  $E$  ellipsi, jonka polttopisteet ovat polynomien  $p(z)$  derivaatan juuret ja joka kulkee kolmion  $T$  sivun keskipisteen kautta. Tällöin tämä sivu on ellipsin tangentti.*

TODISTUS. Siirretään kolmiota ensiksi siten, että kolmion yksi sivuista on  $x$ -akselilla ja tämän sivun keskipiste asetetaan origoon. Olkoon tämän sivun pituus 2. Näin ollen kolmion kärkipisteet ja polynomien juuret ovat 1,  $-1$  ja  $\omega = a + bi$ , missä  $b > 0$ . Tällöin kompleksiluku  $\omega$  on  $x$ -akselin yläpuolella. Juurien avulla polynomi voidaan kirjoittaa muotoon

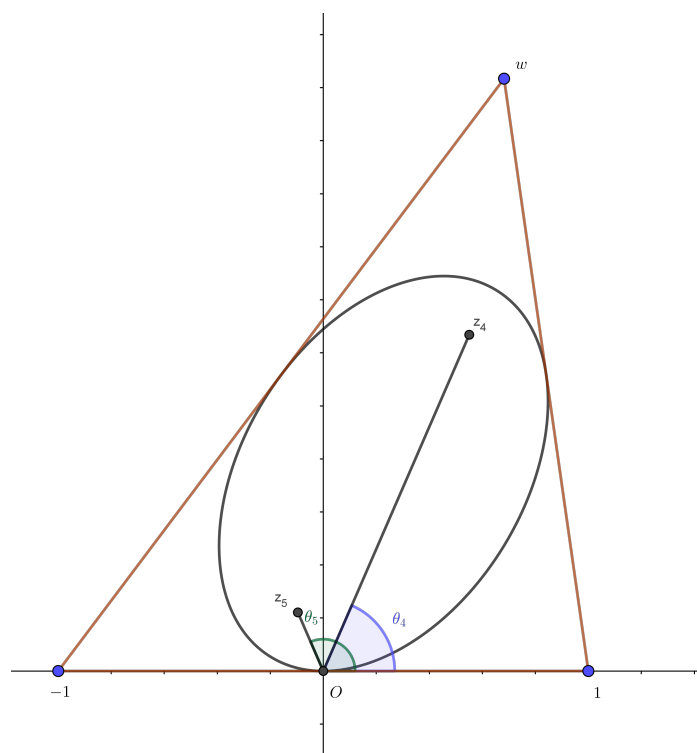
$$p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - \omega) = z^3 - \omega z^2 - z + \omega.$$

Polynomien derivaataksi saadaan

$$p'(z) = 3z^2 - 2\omega z - 1 = 3\left(z^2 - \frac{2\omega}{3}z - \frac{1}{3}\right).$$

Olkoot polynomien derivaatan  $p'(z)$  juuret  $z_4 = r_4 e^{i\theta_4}$  ja  $z_5 = r_5 e^{i\theta_5}$ , missä  $0 \leq \theta_4, \theta_5 < 2\pi$ . Tällöin polynomien derivaatasta  $p'(z)$  voidaan päätellä yhtälön (3.2) avulla, että  $z_4 + z_5 = \frac{2\omega}{3}$ , joten vähintään yhden polynomien derivaatan  $p'(z)$  juurista

tulee olla  $x$ -akselin yläpuolella. Lisäksi huomataan samasta yhtälöstä, että  $z_4 z_5 = -\frac{1}{3}$ . Koska kahden kompleksiluvun tulo on reaalinen, tästä saadaan  $\theta_4 + \theta_5 = \pi$ . Tästä voidaan päätellä, että molempien derivaatan juurien tulee olla  $x$ -akselin yläpuolella. Jos piirretään vektorit origon kautta näihin juuriin, huomataan vektorien ja  $x$ -akselien kulmien olevan toistensa supplementtikulmia. Näin ollen joko molemmat polynomien derivaatan juuret ovat  $y$ -akselilla tai toisen juuren ja positiivisen  $x$ -akselin välinen kulma on terävä kulma, jolloin toinen juurista tekee yhtä suuren kulman negatiivisen



KUVA 3.4. Kulmat  $\theta_4$  ja  $\theta_5$  ovat toistensa supplementtikulmia.

$x$ -akselin kanssa. Molemmissa tapauksissa polttopisteiden ja origon väliset janat tekevät  $x$ -akselin kanssa yhtä suuret kulmat. Ellipsin perusominaisuus on, että ellipsin polttopisteistä mihin tahansa ellipsin pisteeseen piirretyt janat kohtaavat tangentin samassa kulmassa. Näin ollen  $x$ -akseli on ellipsin tangentti. □

LEMMA 3.4. *Olkoon polynomi  $p(z)$ , jonka juuret ovat  $z_1, z_2$  ja  $z_3$ , ja olkoon  $T$  vastaavanlainen kolmio kuin Mardenin lauseessa. Olkoon ellipsin polttopisteet polynomin derivaatan  $p'(z)$  juuret sekä oletetaan, että ellipsi sivuaa yhtä kolmion  $T$  sivun keskipistettä. Tällöin kaksi muuta sivua ovat ellipsin tangentteja.*

TODISTUS. Olkoot polynomin juuret  $0, 1$  ja  $\omega$ , missä  $\omega = a + bi$ . Lisäksi oletetaan, että  $x$ -akseli on ellipsin tangentti. Polynomi  $p(z)$  voidaan kirjoittaa juurien avulla seuraavasti

$$p(z) = z(z - 1)(z - \omega).$$

Avaamalla sulut saadaan

$$p(z) = z^3 - (1 + \omega)z^2 + \omega z.$$

Derivoimalla polynomia saadaan polynomin derivaataksi

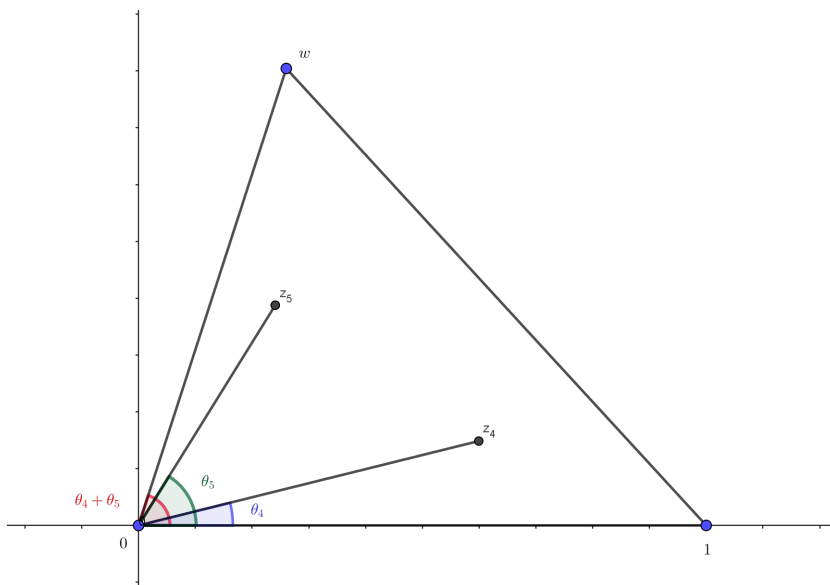
$$p'(z) = 3z^2 - 2(1 + \omega)z.$$

Huomataan yhtälön (3.2) avulla, että polynomin derivaatan juurille  $z_4$  ja  $z_5$  pätee  $z_4 + z_5 = \frac{2}{3}(1 + \omega)$ . Tästä seuraa, että vähintään yksi polynomin derivaatan  $p'(z)$  juurista on  $x$ -akselin yläpuolella. Lisäksi tiedetään, että nämä juuret ovat ellipsin polttopisteitä ja  $x$ -akseli on ellipsin tangentti. Näin ollen Gaussin ja Lucasin lauseen nojalla molemmat polynomin derivaatan  $p'(z)$  juuret ovat  $x$ -akselin yläpuolella, jolloin polynomin derivaatan juuret voidaan ilmaista kompleksisissa muodoissa  $z_4 = r_4 e^{i\theta_4}$  ja  $z_5 = r_5 e^{i\theta_5}$ , missä  $0 < \theta_4 \leq \theta_5 < \pi$ .

Yhtälöstä (3.2) huomataan, että  $z_4 z_5 = \omega/3$ . Merkitään  $\omega = r e^{i\gamma}$ , missä  $\gamma$  on  $x$ -akselin ja kolmion sivun  $O\omega$  muodostama kulma, jolloin saadaan yhtälö

$$3r_4 r_5 e^{i(\theta_4 + \theta_5)} = r e^{i\gamma}.$$

Yhtälöstä huomataan, että kulma  $\theta_4 + \theta_5$  on yhtä suuri positiivisen  $x$ -akselin ja kolmion sivun  $O\omega$  muodostaman kulman  $\gamma$  kanssa. Vastaavanlaisesti kolmion sivun  $O\omega$  ja janan  $Oz_5$  muodostama kulma on yhtä suuri kuin kulma  $\theta_4$ . Tätä on havainnollistettu kuvassa 3.5.

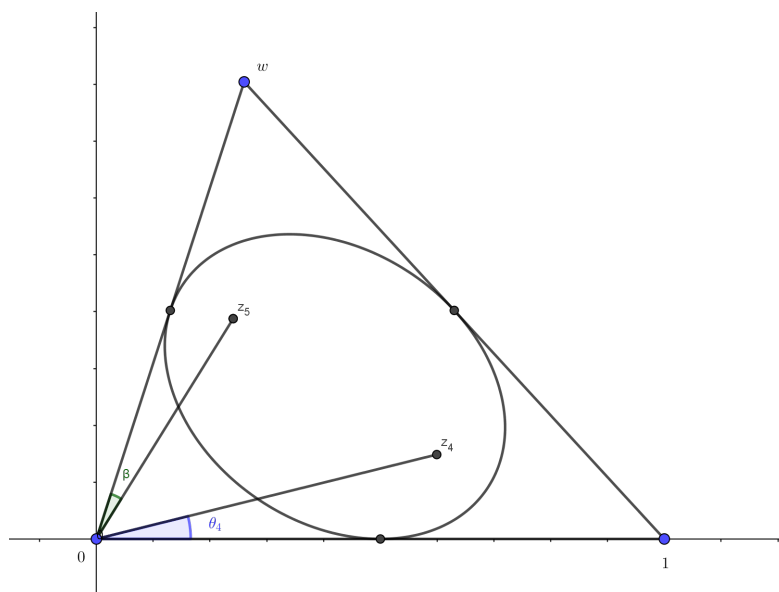


KUVA 3.5. Kulmien  $\theta_4$  ja  $\theta_5$  summa on samankokoinen kuin kulma  $x$ -akselin ja kolmion sivun  $O\omega$  välillä.

Osoitetaan, että origo ei kuulu ellipsille. Ellipsi sivuaa pistettä  $(\frac{1}{2}, 0)$ , joka on kolmion sivun  $O1$  keskipiste ja lisäksi  $x$ -akseli on ellipsin tangentti. Näin ollen origo ei kuulu ellipsille, joten  $x$ -akseli on yksi kahdesta origosta lähtevästä ellipsin tangentista. Merkitään toista tangenttia kirjaimella  $L$  ja osoitetaan, että tangentti  $L$  on kolmion sivu  $O\omega$ . Lemman 3.2 nojalla kulma  $\beta$  janan  $Oz_5$  ja tangentin  $L$  välillä on yhtä suuri kuin  $x$ -akselin ja janan  $Oz_4$  välillä oleva kulma, joka on yhtä suuri kuin kulma  $\theta_4$ . Aiemmin todistettiin, että  $\theta_4$  on lisäksi yhtä suuri kulma kuin janan  $Oz_5$  ja kolmion sivun  $O\omega$  muodostama kulma. Näin ollen tangentti  $L$  on siis kolmion sivu  $O\omega$ . Tätä on havainnollistettu kuvassa 3.6. Vastaavanlaisesti voidaan osoittaa, että kolmion sivu  $1\omega$  on ellipsin tangentti, kun kolmiota siirretään horisontaalisesti, niin että kolmion

kärkipisteet ovat  $-1$  ja  $0$ .

□



KUVA 3.6. Kolmion sivu  $O\omega$  sivuaa ellipsiä, koska kulmat  $\beta$  ja  $\theta_4$  ovat yhtä suuret.

TODISTUS. (Mardenin lause) Oletetaan, että polynomi  $p$ , sen juuret  $z_j$  ja kolmio  $T$  täyttävät Mardenin lauseen oletukset. Ellipsi voidaan konstruoida, kun tunnetaan ellipsin yksi piste sekä ellipsin polttopisteet. Konstruoidaan ellipsi  $E$  siten, että polttopisteinä ovat polynomien derivaatan  $p'$  juuret sekä ellipsi kulkee yhden kolmion sivun keskipisteen kautta. Lemmasta 3.3 seuraa, että kyseinen kolmion sivu on ellipsin  $E$  tangentti. Lemman 3.4 nojalla myös kaksi muuta sivua ovat ellipsin tangentteja. Todistetaan seuraavaksi, että näiden kahden sivun keskipisteet ovat ellipsin ja tangentin leikkauspisteitä. Konstruoidaan seuraavaksi ellipsi  $E'$  toisen sivun avulla kuin ellipsi  $E$ . Kun ellipsin polttopisteet ja tangentti tunnetaan, niin tangentin sivuamispiste määräytyy yksikäsitteisesti, koska janat polttopisteistä kohtaavat tangentin samassa kulmassa. Ellipseillä  $E$  ja  $E'$  on samat polttopisteet ja yksi kolmion sivu on niiden yhteinen tangentti, jolloin ellipseillä täytyy olla yhteinen piste tangentin sivuamispisteessä. Näin ollen ellipsit  $E$  ja  $E'$  vastaavat toisiaan. Tästä seuraa, että ellipseillä  $E$  ja  $E'$  on yhteinen piste myös kolmion toisen sivun keskipisteessä. Symmetrian nojalla kolmannen sivun keskipiste kuuluu myös molemmille ellipseille  $E$  ja  $E'$ . Alkuperäinen ellipsi  $E$  sivuaa kolmion jokaista sivua sivun keskipisteessä, jolloin ellipsi  $E$  on kolmion yksikäsitteinen Steinerin sisäellipsi.

□

Todistetaan Mardenin lause myös toisella tavalla. Todistus on esitetty Badertscherin kirjoittamassa artikkelissa [4].

TODISTUS. Siirretään kolmiota siten, että origo on kolmion painopiste  $g$ . Tällöin kolmion kärkipisteiden ja polttopisteiden summiksi saadaan

$$(3.3) \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ ja } a_1 + a_2 = 0.$$

Polttopisteet ovat toistensa vastalukuja, jolloin voidaan merkitä  $a_2 = -a_1$ . Tässä tapauksessa polynomin  $p$  derivaatta on

$$(3.4) \quad \begin{aligned} p'(z) &= (z - z_1)(z - z_2) + (z - z_1)(z - z_3) + (z - z_2)(z - z_3) \\ &= (z - z_1)(z - z_2) + (2z - (z_1 + z_2))(z - z_3). \end{aligned}$$

Toisaalta polynomin derivaatta voidaan kirjoittaa polynomin derivaatan juurien avulla

$$(3.5) \quad p'(z) = 3(z + a_1)(z - a_1)$$

Olkoon  $z_0$  kärkipisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävän janan keskipiste, jolloin siis  $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ . Sijoittamalla  $z_0$  muuttujan  $z$  paikalle yhtälöihin (3.4) ja (3.5) saadaan

$$(3.6) \quad 3(z_1 + a_1)(z_1 - a_1) = -\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)^2$$

Etäisyyksien summaa kärkipisteestä  $z_1$  polttopisteisiin  $a_1$  ja  $-a_1$  voidaan tarkastella käyttämällä suunnikassääntöä ja yhtälöä (3.3) ( $z_1 + z_2 = -z_3$ ). Tästä saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 2(|z_0 + a_1| + |z_0 - a_1|)^2 &= 2|z_0 + a_1|^2 + 2|z_0 - a_1|^2 + 4|(z_0 + a_1)(z_0 - a_1)| \\ &= 4|z_0|^2 + 4|a_1|^2 + \frac{1}{3}|z_1 - z_2|^2 \\ &= |z_1 + z_2|^2 + 4|a_1|^2 + \frac{1}{3}|z_1 - z_2|^2 \\ &= \frac{1}{3}(|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2) + \frac{2}{3}|z_1 + z_2|^2 + 4|a_1|^2 \\ &= \frac{2}{3}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) + 4|a_1|^2. \end{aligned}$$

Huomataan, että viimeinen summa on riippumaton kolmion sivun keskipisteen valinnasta. Näin ollen on olemassa ellipsi  $E$ , jonka polttopisteet ovat  $a_1$  ja  $-a_1$  eli  $a_2$  ja joka kulkee jokaisen sivun keskipisteen kautta. Näin ollen voidaan konstruoida ellipsi  $E$ , kun tiedetään polttopisteet ja yksi ellipsin pisteistä. Valitaan  $z_0$  ellipsin pisteeksi, jolloin lemmän 3.3 nojalla kolmion sivu  $z_1z_2$  on ellipsin tangentti. Lemmasta 3.4 saadaan, että kaksi muuta sivua ovat myös ellipsin tangenteja. Lisäksi saatiin, että kolmion sivujen keskipisteet ovat ellipsin pisteitä, jolloin ellipsi  $E$  on Steinerin sisäellipsi.

□

## Steinerin yksikkösisäellipsi

Luvussa tutustutaan tarkemmin Steinerin yksikkösisäellipsiin, joka on Steinerin sisäellipsin erikoistapaus. Steinerin yksikkösisäellipsiksi kutsutaan Steinerin sisäellipsiä, jota rajoittaa kolmio, jonka kärkipisteet ovat yksikköympyrällä. Luvussa määritellään äärellinen Blaschken tulo, jonka avulla pystytään perehtymään tarkemmin Steinerin yksikkösisäellipsiin. Luvussa merkitään avointa yksikkökierokkoa  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  ja yksikköympyrää kirjaimella  $\mathbb{T}$ . Steinerin yksikkösisäellipsiin pystyy tutustumaan seuraavalla GeoGebra-appletilla: <https://ggbm.at/jyvnd4bm>.

**MÄÄRITELMÄ 4.1.** Olkoot kolmion kärkipisteet yksikköympyrällä  $\mathbb{T}$ . Kolmion sisälle voidaan konstruoida ellipsi, joka sivuaa kolmion jokaista sivua sivun keskipisteessä. Tällaista Steinerin sisäellipsiä kutsutaan *Steinerin yksikkösisäellipsiksi*.

Vastaavanlaisesti jos Steinerin sisäellipsiä  $E$  rajoittaa kolmio, jonka kärkipisteet ovat yksikköympyrällä  $\mathbb{T}$ , niin kyseistä kolmiota kutsutaan *Steinerin yksikkökolmioksi*. Seuraavasta lemmasta saadaan ominaisuus Steinerin yksikkösisäellipsin polttopisteille.

**LEMMA 4.2.** *Olkoot kolmion  $\triangle z_1 z_2 z_3$  kärkipisteet yksikköympyrällä  $\mathbb{T}$ . Tällöin kolmion Steinerin yksikkösisäellipsin polttopisteille  $a_1$  ja  $a_2$  pätee  $2|a_1 a_2| = |a_1 + a_2|$ .*

**TODISTUS.** Olkoon  $p$  polynomi, jonka juuret ovat  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  ja olkoot polynomin derivaatan juuret  $a_1$  ja  $a_2$ . Tällöin polynomin  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$  derivaatta on  $p'(z) = 3z^2 - 2(z_1 + z_2 + z_3)z + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)$ . Lisäksi tiedetään polynomin derivaatan juurien olevan  $a_1$  ja  $a_2$ , jolloin saadaan polynomin derivaatta muotoon  $p'(z) = 3(z - a_1)(z - a_2)$ . Vertailemalla derivaattojen kertoimia saadaan

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 3a_1 a_2.$$

Kerrotaan seuraavaksi molemmat puolet termillä  $\overline{z_1 z_2 z_3}$ , jolloin voidaan supistaa termejä, koska yksikköympyrällä oleville kompleksiluvuille  $z_j$  ja sen konjugaatille pätee  $z_j \overline{z_j} = |z_j|^2 = 1$ . Näin yhtälö saadaan muokattua muotoon

$$(4.1) \quad \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 3a_1 a_2 \overline{z_1 z_2 z_3}.$$

Kolmion kärkipisteiden keskiarvo on kolmion painopiste ja polttopisteet ovat symmetrisiä kolmion painopisteen  $g$  suhteen. Näin ollen kolmion kärkipisteiden keskiarvo on yhtä suuri kuin polttopisteiden keskiarvo eli

$$(4.2) \quad \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$



Yhtälöistä (4.1) ja (4.2) saadaan, että  $\overline{z_1 z_2 z_3} a_1 a_2 = \frac{\overline{a_1} + \overline{a_2}}{2}$ . Tällöin

$$|\overline{z_1 z_2 z_3}|^2 |a_1 a_2|^2 = \frac{|\overline{a_1} + \overline{a_2}|^2}{4},$$

jolloin käyttämällä kompleksilukujen modulin ominaisuuksia (1.3) ja (1.4) saadaan yhtälö muotoon

$$4|a_1 a_2|^2 = |a_1 + a_2|^2.$$

Ottamalla neliöjuuri molemmilta puolilta saadaan haluttu tulos eli

$$2|a_1 a_2| = |a_1 + a_2|.$$

□

ESIMERKKI 4.3. Olkoot kolmion  $\triangle z_1 z_2 z_3$  kärkipisteet  $z_1 = (-1, 0)$ ,  $z_2 = (1, 0)$  ja  $z_3 = (0, 1)$ , jolloin kärkipisteet ovat yksikköympyrällä. Tällöin kolmion painopiste on  $g = (0, \frac{1}{3})$ . Lasketaan kolmion Steinerin yksikkösisäellipsin polttopisteet, jotka saadaan sijoittamalla kolmion painopiste  $g$  ja kärkipisteet kaavaan (2.3). Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} & \left(0, \frac{1}{3}\right) \pm \sqrt{\left(0, \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}((-1, 0)(1, 0) + (1, 0)(0, 1) + (-1, 0)(0, 1))} \\ &= \left(0, \frac{1}{3}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{9}, 0\right) + \left(\frac{1}{3}, 0\right)} \\ &= \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Steinerin yksikkösisäellipsin polttopisteiksi siis saatiin  $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$  ja  $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$ . Steinerin yksikkösisäellipsiä on havainnollistettu kuvassa 4.1.

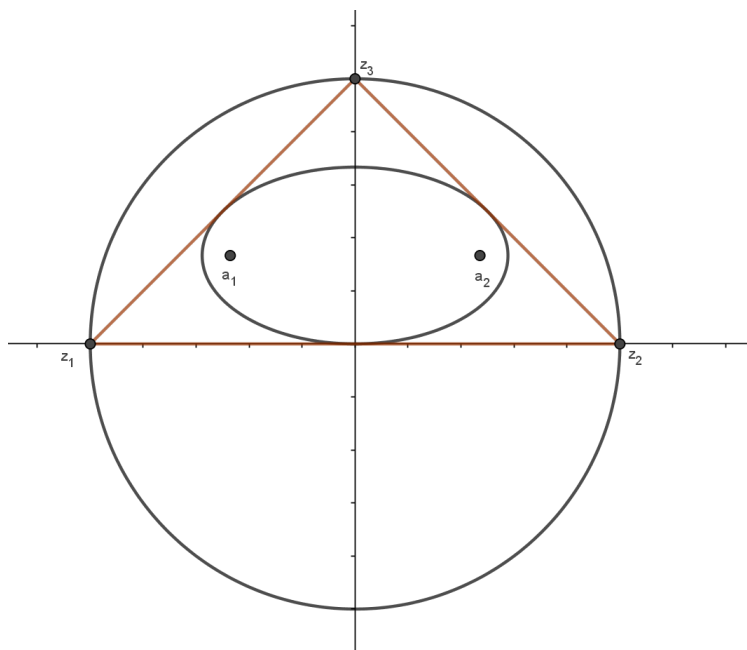
Lasketaan ensiksi  $2|a_1 a_2|$  polttopisteillä  $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$  ja  $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$ , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 2|a_1 a_2| &= 2\left| \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i\right) \right| \\ &= 2\left| -\frac{1}{3} \right| \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi polttopisteiden summan moduli eli  $|a_1 + a_2|$ , jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
|a_1 + a_2| &= \left| \left( -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i \right) + \left( \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i \right) \right| \\
&= \left| \frac{2}{3}i \right|. \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Huomataan, että  $2|a_1 a_2| = |a_1 + a_2|$ , mikä olikin odotettavaa lemmän 4.2 nojalla.



KUVA 4.1. Steinerin yksikkösisäellipsi, jonka polttopisteet ovat  $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$  ja  $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$ .

#### 4.1. Blaschken ellipsi ja Steinerin yksikkösisäellipsi

Tässä aluvussa tarkoituksena on tutustua Blaschken ellipsiin ja vertailla sitä Steinerin yksikkösisäellipsin kanssa. Lisäksi selvitetään, mitkä Blaschken ellipseistä ovat Steinerin yksikkösisäellipsejä. Määritellään aluksi äärellinen Blaschken tulo ja kerrataan Blaschken tulon muutama ominaisuus.

MÄÄRITELMÄ 4.4. Äärellinen Blaschken tulo on funktio

$$b(z) = \beta \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z},$$

missä  $|\beta| = 1$ ,  $a_j \in \mathbb{D}$  ja  $j = 1, \dots, n$ . Lukua  $n$  sanotaan Blaschken tulon  $b$  asteeksi.

Äärellinen Blaschken tulo kuvaa sekä yksikkökiekon  $\mathbb{D}$  että yksikköympyrän  $\mathbb{T}$  itseksensä. Lisäksi Blaschken tulo kuvaa avoimen yksikkökiekon ulkopisteet edelleen avoimen yksikkökiekon ulkopisteiksi. Blaschken tulon  $b$  ominaisuutena on, että  $n$ -asteen Blaschken tulo kuvaa  $n$  kappaletta erillisiä yksikköympyrän pisteitä samaksi yksikköympyrän pisteeksi  $\lambda$ .

Jatkossa tarkastellaan pelkästään kolmannen asteen Blaschken tuloa, jossa määritelmässä 4.4 mainitut pisteet  $a_j$  ovat  $0, a_1$  ja  $a_2$ . Tällöin Blaschken tulo  $b$  on muotoa

$$(4.3) \quad b(z) = z \left( \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \right) \left( \frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z} \right).$$

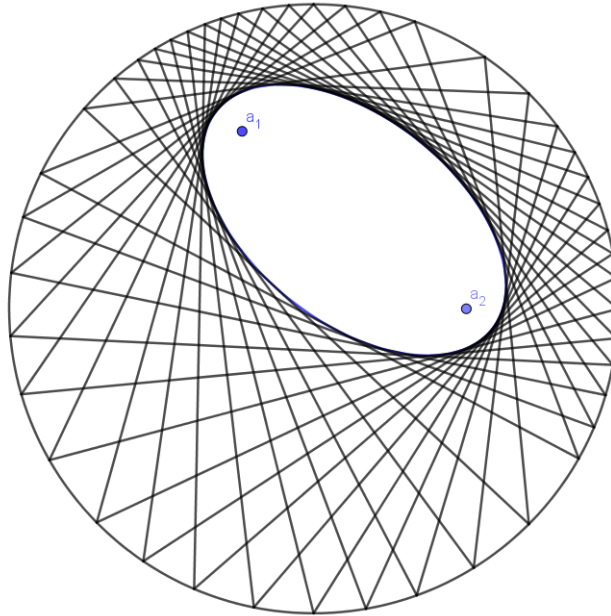
Määritellään seuraavaksi Blaschken tuloon  $b$  liittyvä ellipsi.

**MÄÄRITELMÄ 4.5.** Muotoa (4.3) olevaan kolmannen asteen Blaschken tuloon liittyvä Blaschken ellipsi on yhtälön

$$(4.4) \quad |z - a_1| + |z - a_2| = |1 - \overline{a_1}a_2|$$

toteuttavien pisteiden  $z$  muodostama ellipsi.

Ellipsiä (4.4) kutsutaan *Blaschken ellipsiksi*. Blaschken ellipsiä on havainnollistettu kuvassa 4.2.



KUVA 4.2. Blaschken ellipsi, jonka polttopisteet ovat  $a_1$  ja  $a_2$ .

**LAUSE 4.6.** Olkoon  $b$  muotoa (4.3) oleva Blaschken tulo ja  $E$  siihen liittyvä Blaschken ellipsi. Olkoot  $\lambda \in \mathbb{T}$  mikä tahansa ja  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{T}$  erillisiä pisteitä, jotka  $b$  kuvaa luvuksi  $\lambda$ . Tällöin jana  $z_1z_2$  on tangenti Blaschken ellipsille  $E$  pisteessä  $\zeta_1 =$

$(m_1 z_2 + m_2 z_1)/(m_1 + m_2)$ , missä luvut  $m_i$  saadaan funktion  $F(z) = \frac{b(z)/z}{b(z) - \lambda}$  osamurtoesityksestä

$$F(z) = \frac{m_1}{z - z_1} + \frac{m_2}{z - z_2} + \frac{m_3}{z - z_3}.$$

Vastaavasti kaksi muuta kolmion  $\Delta z_1 z_2 z_3$  sivua ovat ellipsin tangentteja, joiden sivuamispisteitä ovat  $\zeta_2$  ja  $\zeta_3$ .

Kääntäen, jokainen ellipsin piste on sivuamispiste ellipsin tangentille, joka kulkee erillisten yksikköympyrän pisteiden  $z_1$  ja  $z_2$  kautta, joille pätee  $b(z_1) = b(z_2)$ .

Sivuutetaan lauseen todistus, joka löytyy Daepin, Gorkinin ja Mortinin artikkelista [11].

Olkoon  $E$  Blaschken tuloon  $b$  liittyvä ellipsi ja valitaan yksikköympyrältä mikä tahansa piste  $z$ . Merkitään  $\lambda = b(z)$ , jolloin lauseen 4.6 mukaan löytyy kolmio, jonka yksi kärkipiste on  $z$  ja jonka kukin sivu on ellipsin  $E$  tangentti. Koska  $z$  on mielivaltaisen yksikköympyrän piste, niin tällaisia ellipsin rajaavia kolmioita löytyy äärettömän monta. Tätä kutsutaan Poncelet'n lauseeksi. Huomataan kuitenkin, että tällöin ellipsien ei tarvitse sivuta kolmion jokaista sivua sivun keskipisteessä. Tämän pystyy myös havaitsemaan kuvasta 4.2.

LEMMA 4.7. *Jokainen Steinerin yksikkösisäellipsi on Blaschken ellipsi.*

Sivuutetaan lemmän todistus, joka löytyy Frantzin artikkelista [12]. Seuraavat kaksi lausetta antavat ehdot, milloin Blaschken tuloon  $b$  liittyvä ellipsi on Steinerin yksikkösisäellipsi.

LAUSE 4.8. *Olkoot  $a_1$  ja  $a_2$  yksikkökiekon sisäpisteitä, ja olkoon  $b$  kolmannen asteen Blaschken tulo, joka on muotoa (4.3).*

*Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja keskenään:*

- (1) *On olemassa kolmannen asteen polynomi  $p$ , jonka juuret ovat yksikköympyrällä ja jonka derivaatan juuret ovat pisteet  $a_1$  ja  $a_2$ .*
- (2) *Blaschken tuloon  $b$  liittyvä ellipsi on Steinerin yksikkösisäellipsi.*
- (3) *Pisteille  $a_1$  ja  $a_2$  pätee  $2|a_1 a_2| = |a_1 + a_2|$ .*

TODISTUS. Oletetaan ensin, että (1) pätee, jolloin Mardenin lauseen nojalla polynomin  $p$  derivaatan juuret ovat kolmion  $\Delta z_1 z_2 z_3$  Steinerin sisäellipsin polttopisteet. Koska polynomin juuret ovat yksikköympyrällä, niin lemmän 4.2 nojalla yhtälö  $2|a_1 a_2| = |a_1 + a_2|$  pätee. Näin ollen (3) toteutuu.

Oletetaan, että (3) pätee ja todistetaan, että tällöin (1) pätee. Tarkastellaan aluksi erikoistapausta, jossa pisteistä  $a_1 = 0$  tai  $a_2 = 0$ . Tällöin (3) ehdon nojalla

$a_1 = a_2 = 0$ , jolloin esimerkiksi polynomi  $z^3 - 1$  täyttää (1) ehdot. Jos taas sekä  $a_1$  että  $a_2$  ovat nollasta eroavia, niin valitaan  $\lambda = (a_1 + a_2)/(2\overline{a_1 a_2})$ . Tällöin (3) nojalla  $|\lambda| = 1$ . Koska  $b$  on kolmannen asteen Blaschken tulo, on olemassa erilliset pisteet  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{T}$ , jotka  $b$  kuvaa pisteeksi  $\lambda$ .

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota  $Q(z) = b(z) - \lambda$ . Huomataan, että funktion  $Q$  juuria täytyy olla  $z_1, z_2$  ja  $z_3$ . Nyt saadaan

$$Q(z) = z \left( \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \right) \left( \frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z} \right) - \lambda.$$

Koska  $Q(z)$  on rationaalifunktio ja koska nimittäjän juuret ovat suljetun yksikkökierroksen ulkopuolella, niin riittää osoittajan juurien tarkastelu. Merkitään funktion  $Q(z)$  nimittäjää  $q(z)$ , jolloin saadaan

$$q(z) = z(z - a_1)(z - a_2) - \lambda(1 - \overline{a_1}z)(1 - \overline{a_2}z).$$

Huomataan, että polynomi  $q$  on kolmannen asteen polynomi, jonka kolmannen asteen termin kerroin on 1 ja jonka juuret ovat rationaalifunktion  $Q(z)$  juuret  $z_1, z_2$  ja  $z_3$ .

Modulin ominaisuudesta 1.4 seuraa, että  $|\lambda| = \lambda\overline{\lambda}$ , jolloin  $\lambda = 1/\overline{\lambda} = 2a_1 a_2 / (\overline{a_1} + \overline{a_2})$ . Avaamalla sulut ja käyttämällä tätä tietoa saadaan

$$\begin{aligned} q(z) &= z^3 - (a_1 + a_2 + \lambda\overline{a_1 a_2})z^2 + (a_1 a_2 + \lambda(\overline{a_1} + \overline{a_2}))z - \lambda \\ &= z^3 - \frac{3}{2}(a_1 + a_2)z^2 + 3a_1 a_2 z - \lambda. \end{aligned}$$

Tällöin derivaataksi saadaan  $q'(z) = 3(z^2 - (a_1 + a_2)z + a_1 a_2) = 3(z - a_1)(z - a_2)$ , jolloin  $q$  täyttää (1) ehdot. Näin ollen (1) ja (3) ovat ekvivalentteja keskenään.

Riittää enää osoittaa, että (1) ja (2) ovat ekvivalentteja keskenään, mistä seuraa että myös (2) ja (3) ovat ekvivalentteja keskenään. Oletetaan, että (1) pätee, jolloin Mardenin lauseen nojalla polynomin  $p$  kriittiset pisteet  $a_1$  ja  $a_2$  ovat Steinerin yksikkösisäellipsin  $E_1$  polttopisteet. Lemmasta 4.7 seuraa, että ellipsi  $E_1$  on Blaschken ellipsi. Koska alussa määriteltiin Blaschken tulo  $b$  siten, että sen juuret ovat  $0, a_1$  ja  $a_2$ ,  $E_1$  on Blaschken tuloon  $b$  liittyvä ellipsi. Näin ollen Blaschken tuloon  $b$  liittyvä ellipsi on Steinerin yksikkösisäellipsi, jolloin (2) pätee. Jos taas oletetaan, että (2) pätee, niin Mardenin lauseesta seuraa, että myös (1) pätee. Tällöin (1) ja (2) ovat ekvivalentteja keskenään. □

**LAUSE 4.9.** *Olkoon  $E$  Blaschken tuloon  $b$  liittyvä ellipsi. Tällöin  $E$  on Steinerin yksikkösisäellipsi jos ja vain jos on olemassa  $\lambda \in \mathbb{T}$  ja erilliset pisteet  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{T}$ , joille  $b(z_1) = b(z_2) = b(z_3) = \lambda$  siten, että*

$$\frac{b(z)/z}{b(z) - \lambda} = \frac{1/3}{z - z_1} + \frac{1/3}{z - z_2} + \frac{1/3}{z - z_3}.$$

**TODISTUS.** Oletetaan, ensiksi että  $E$  on kolmion  $\triangle z_1 z_2 z_3$  Steinerin yksikkösisäellipsi, missä  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{T}$ . Lemman 4.7 nojalla on olemassa kolmannen asteen Blaschken tulo  $b$ , joka määrittää ellipsin  $E$ . Blaschken ominaisuuden nojalla on olemassa  $\lambda \in \mathbb{T}$  siten, että  $b(z_1) = b(z_2) = b(z_3) = \lambda$ . Ellipsi  $E$  sivuaa janoja  $z_i z_j$  niiden keskipisteissä, jolloin lauseessa 4.6 esiintyvän kaavan nojalla tangentin sivuamispisteeksi  $\zeta_1$  saadaan

$$\zeta_1 = \frac{m_2 z_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 z_2}{m_1 + m_2} = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}.$$

Pisteet, jotka ovat muotoa  $az_1 + (1-a)z_2$ , missä  $0 \leq a \leq 1$ , ovat janalla  $z_1 z_2$ . Muuttujan  $a$  muuttuessa myös pisteen paikka muuttuu janalla. Näin ollen täytyy olla, että  $m_1/(m_1+m_2) = m_2/(m_1+m_2) = 1/2$ . Tästä seuraa, että  $m_1 = m_2$  ja symmetrian nojalla saadaan  $m_1 = m_2 = m_3$ . Lisäksi määritelmän nojalla  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ , jolloin saadaan  $m_j = 1/3$  kaikilla  $j = 1, 2, 3$ .

Todistetaan nyt väitteen toinen suunta eli oletetaan, että Blaschken tulo  $b$  on määritelty siten, että  $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$ . Lauseen 4.8 nojalla Blaschken ellipsin  $E$  ja kolmion  $\triangle z_1 z_2 z_3$  eräs yhteinen piste on  $\zeta_1 = (m_1 z_2 + m_2 z_1)/(m_1 + m_2)$ . Sijoittamalla lukujen  $m_1$  ja  $m_2$  paikalle  $1/3$  huomataan, että  $\zeta_1 = (z_1 + z_2)/2$ , mikä on janalla  $z_1 z_2$  keskipiste. Vastaavanlaisesti  $\zeta_2$  ja  $\zeta_3$  ovat janojen  $z_2 z_3$  ja  $z_1 z_3$  keskipisteitä. Näin ollen ellipsi  $E$  on Steinerin yksikkösisäellipsi. □

Tarkastellaan seuraavaksi kolmannen asteen polynomia  $p$ , jonka juuret ovat eriliset yksikköympyrän pisteet  $z_1, z_2$  ja  $z_3$ . Olkoot polynomien kriittiset pisteet  $a_1$  ja  $a_2$ , joita käytetään Blaschken tulon  $b$  määrittelyssä kaavassa (4.3). Lauseen 4.8 nojalla Blaschken tuloon  $b$  liittyvä Blaschken ellipsi on kolmion  $\triangle z_1 z_2 z_3$  Steinerin yksikkösisäellipsi. Lauseesta 4.9 saadaan seuraus, jossa nähdään polynomien  $p$  logaritmin derivaatan yhteys Blaschken tuloon  $b$ .

**SEURAUUS 4.10.** *Olkoon polynomi muotoa  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ , jossa  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  ovat erillisiä yksikköympyrän pisteitä. Olkoot polynomien  $p$  derivaatan kriittiset pisteet  $a_1, a_2 \in \mathbb{D}$ . Tällöin on olemassa kolmannen asteen Blaschken tulo  $b$ , jonka juuret ovat  $0, a_1$  ja  $a_2$  ja  $b(z_j) = \lambda$ , missä  $j = 1, 2, 3$ . Tällöin pätee*

$$F(z) = \frac{b(z)/z}{b(z) - \lambda} = \frac{1/3}{z - z_1} + \frac{1/3}{z - z_2} + \frac{1/3}{z - z_3} = \frac{p'(z)}{3p(z)}.$$

Tästä huomataan, että polynomien  $p$  kriittiset pisteet ovat myös  $b(z)/z$  juuria.

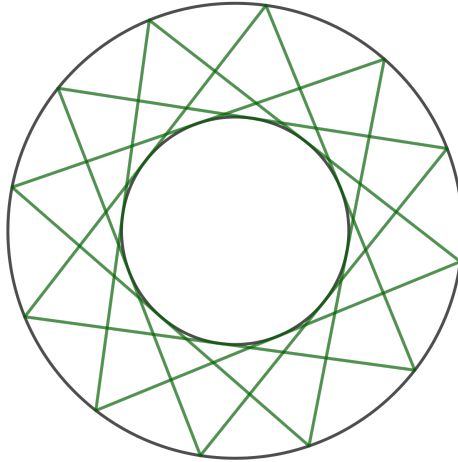
## 4.2. Kuinka monta Steinerin yksikkökolmiota voi olla Steinerin yksikkösisäellipsillä?

Tässä alaluvussa todistetaan, että jokaisella Steinerin yksikkösisäellipsillä, joka ei ole ympyrä, on yksikäsitteinen Steinerin yksikkökolmio. Käsitellään ensiksi erikoistapaus, jossa Steinerin sisäellipsi on ympyrä. Todistetaan, että tällöin Steinerin sisäellipsillä on äärettömän monta Steinerin yksikkökolmiota.

Olkoon Steinerin yksikkökolmio tasasivuinen kolmio. Tällöin polynomien  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$  derivaatalla on kaksoisjuuri ja derivaatan juureksi saadaan  $0$ . Näin ollen ympyrä voidaan konstruoida kolmion  $\triangle z_1 z_2 z_3$  sisälle siten, että origokeskinen ympyrä sivuaa kolmion jokaista sivua sivun keskipisteessä. Steinerin lauseen nojalla Steinerin sisäellipsi on yksikäsitteinen, jolloin saadaan ympyräksi

$C_r := \{z : |z| = r\}$  jollakin säteellä  $r$ , jolle pätee  $0 < r < 1$ . Laskemalla pystytään osoittamaan, että säteeksi saadaan  $r = \frac{1}{2}$ . Kiertämällä kolmiota saadaan äärettömän monta Steinerin yksikkökolmiota ympyrälle.

Oletetaan nyt, että Steinerin yksikkösisäellipsin polttopisteistä toinen on origossa eli  $a_1 = 0$ . Lemmasta 4.2 saadaan suoraan, että toisen polttopisteen  $a_2$  pitää olla myös origossa. Koska  $a_1 = a_2 = 0$ , niin Steinerin yksikkösisäellipsi on origokeskinen ympyrä  $C_{1/2}$ .



KUVA 4.3. Ympyrällä  $C_{1/2}$  on äärettömän monta Steinerin yksikkökolmiota, joita kuvassa on havainnollistettu neljä kappaletta.

Osoitetaan seuraavaksi, että ympyrä  $C_{1/2}$  on ainoa Steinerin yksikkösisäellipsi, jolla on useampi Steinerin yksikkökolmio. Seuraavasta lauseesta siis saadaan, että muilla Steinerin yksikkösisäellipseilla on yksikäsitteinen Steinerin yksikkökolmio. Lauseen todistuksessa käytetään edellisen alaluvun tuloksia.

LAUSE 4.11. *Olkoon  $E$  ellipsi, jonka polttopisteet  $a_1$  ja  $a_2$  ovat yksikkökierkon sisäpisteitä. Jos ellipsillä  $E$  on kaksi erillistä Steinerin yksikkökolmiota, niin tällöin  $E = C_{1/2}$ .*

TODISTUS. Lauseen 4.8 nojalla voidaan valita kaksi eri kolmannen asteen polynomia  $p$  ja  $q$  siten, että molempien polynomien kolmannen asteen termin kerroin on  $a_3 = 1$  ja polynomien juuret ovat erillisiä yksikköympyrän pisteitä ja polynomeilla on samat kriittiset pisteet  $a_1, a_2 \in \mathbb{D}$ . Nämä kriittiset pisteet määrittävät yksikäsitteisen Blaschken tulon  $b$ , joka esiintyy kaavassa (4.3). Seurauksen 4.10 nojalla on olemassa  $\gamma_j \in \mathbb{T}$  siten, että

$$\frac{p'(z)}{3p(z)} = \frac{b(z)/z}{b(z) - \gamma_1} \text{ ja } \frac{q'(z)}{3q(z)} = \frac{b(z)/z}{b(z) - \gamma_2}.$$

Ratkaisemalla näistä yhtälöistä  $b(z)$  saadaan

$$(4.5) \quad b(z) = \frac{z\gamma_1 p'(z)}{zp'(z) - 3p(z)} \quad \text{ja} \quad b(z) = \frac{z\gamma_2 q'(z)}{zq'(z) - 3q(z)}.$$

Polynomeilla on samat derivaatat, koska molempien polynomien kolmannen asteen termin kerroin on 1 ja molemmilla on samat kriittiset pisteet  $a_1$  ja  $a_2$ . Derivaatat ovat toisen asteen polynomeja, joten kaavan (3.2) avulla derivaatoiksi saadaan

$$p'(z) = 3z^2 - 3(a_1 + a_2)z + 3a_1a_2 = q'(z).$$

Koska  $p'(z) = q'(z)$ , niin yhtälöistä (4.5) saadaan

$$\gamma_1/(zp'(z) - 3p(z)) = \gamma_2/(zq'(z) - 3q(z)).$$

Jos  $\gamma_1 = \gamma_2$ , niin tällöin polynomit  $p$  ja  $q$  ovat samat, mikä on ristiriidassa alkuoletusten kanssa. Näin ollen  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , jolloin saadaan yhtälö

$$\gamma_1(zq'(z) - 3q(z)) = \gamma_2(zp'(z) - 3p(z)).$$

Lisäksi alkuoletuksista seuraa, että  $q(z) = p(z) + C$ , jolloin saadaan

$$(4.6) \quad 3\gamma_1 C = (\gamma_1 - \gamma_2)(zp'(z) - 3p(z)).$$

Polynomi  $p$  on muotoa  $p(z) = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$ , jolloin

$$zp'(z) - 3p(z) = -c_2z^2 - 2c_1z - 3c_0.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (4.6) saadaan, että  $c_1 = c_2 = 0$ . Tästä seuraa, että polynomi  $p$  on muotoa  $p(z) = z^3 + c_0$  jollakin  $c_0$ . Näin ollen polynomien  $p$  juuret ovat tasaisesti jakautuneet yksikkökieron reunalle. Vastaavanlaisella argumentilla saadaan polynomille  $q$  vastaavanlainen yhtälö, mutta eri vakiolla. Jos siis Steinerin sisäellipsillä on vähintään kaksi Steinerin yksikkökolmiota, niin kolmiot ovat tasasivuisia. Alaluvun 4.2 alussa todettiin, että jos Steinerin yksikkökolmio on tasasivuinen, niin Steinerin yksikkösisäellipsi on ympyrä. Näin ollen polynomien  $p$  ja  $q$  Steinerin sisäellipsi on ympyrä  $C_{1/2}$ . □

Lauseesta 4.11 saadaan, että Steinerin yksikkösisäellipseillä on yksikäsitteinen Steinerin yksikkökolmio jos ja vain jos Steinerin yksikkösisäellipsi ei ole ympyrä.

### 4.3. Mitkä pisteet voivat olla Steinerin yksikkösisäellipsin polttopisteitä?

Määritetään seuraavaksi pisteet, jotka voivat olla Steinerin yksikkösisäellipsin polttopisteitä. Olkoon  $a_1$  Steinerin yksikkösisäellipsin polttopiste ja  $a_1 \in \mathbb{D}$ . Alaluvun 4.2 nojalla jos  $a_1 = 0$ , niin tällöin myös  $a_2 = 0$ , jolloin Steinerin yksikkösisäellipsi on ympyrä  $C_{1/2}$ .

Oletetaan nyt, että  $a_1 \neq 0$ . Tällöin lauseen 4.8 nojalla ehdon

$$2|a_1a_2| = |a_1 + a_2|$$

tulee toteutua Steinerin yksikkösisäellipsin polttopisteille  $a_1$  ja  $a_2$ . Määritetään kaikki luvut  $z$  yksikköympyrässä, jolle pätee ehto  $2|a_1z| = |a_1 + z|$ . Olkoon



$T(z) = a_1z/(a_1 + z)$ , ja etsitään kaikki luvut  $z$ , joille  $|T(z)| = 1/2$ . Huomataan, että  $T$  on Möbius-kuvaus, jolloin Möbius-kuvaus kuvaa ympyrät joko ympyröiksi tai suoriksi [13, s. 120-122]. Yhtälön  $2|a_1z| = |a_1 + z|$  ratkaisujoukko on joko ympyrä tai suora, joka voidaan ajatella ääretönsäteiseksi äärettömyyden kautta kulkevaksi ympyräksi. Kuvauksen  $T$  ratkaisujoukoksi saadaan pistejoukko avoimessa yksikkökiekossa, jolle pätee  $T^{-1}\{w : |w| = 1/2\}$ .

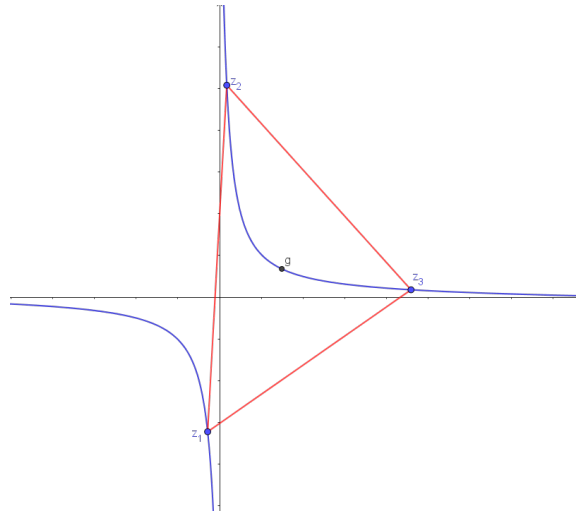
## Steinerin sisäellipsin yhteys Fermat'n pisteisiin

Luvussa tarkastellaan Steinerin sisäellipsin ja Fermat'n pisteiden yhteyttä. Huomataan, että Fermat'n pisteiden avulla pystytään konstruoimaan Steinerin sisäellipsin polttopisteet. Steinerin sisäellipsin ja Fermat'n pisteiden yhteyden löytämiseksi tehdään koordinaatistomuunnos Kiepertin koordinaatistoon.

Tarkastellaan Steinerin sisäellipsiä *Kiepertin koordinaatistossa*, joka on esitelty Scimemin artikkelissa [6, §2]. Koordinaatistomuunnos Kiepertin koordinaatistoon voidaan tehdä jokaiselle kolmiolle, joka ei ole tasakylkinen. Koordinaatistomuunnoksen tarkoituksena on asettaa kolmio siten, että sen Kiepertin hyperbelin yhtälöksi saadaan  $xy = 1$ . Kiepertin hyperbeliksi kutsutaan sitä yksikäsitteistä hyperbelia, joka kulkee sekä kolmion kärkipisteiden että kolmion painopisteen  $g$  kautta. Kiepertin hyperbelia on havainnollistettu kuvassa 5.1. Muunnoksen jälkeen kolmion  $T$  kärkipisteiksi saadaan  $z_1 = \left(x_1, \frac{1}{x_1}\right)$ ,  $z_2 = \left(x_2, \frac{1}{x_2}\right)$  ja  $z_3 = \left(x_3, \frac{1}{x_3}\right)$ . Kolmion  $\triangle z_1 z_2 z_3$  painopisteen koordinaatit ovat

$$(5.1) \quad g = (p/3, 3/p),$$

missä  $p = x_1 + x_2 + x_3$ . Luvussa 5.2 tarkastellaan tasakylkistä kolmiota, jolle ei voida tehdä kyseistä koordinaatistomuunnosta. Tasakylkiselle kolmiolle kuitenkin voidaan todistaa samat tulokset käyttämättä Kiepertin koordinaatistoa.



KUVA 5.1. Kiepertin hyperbeli kulkee kolmion painopisteen  $g$  ja kolmion kärkipisteiden kautta.

Artikkelissa [6, §6] osoitetaan, että Kiepertin koordinaatistossa Steinerin sisäellipsin yhtälöksi saadaan

$$3x^2 - ppy^2 - 2px + 6qy = 0,$$

missä  $p = x_1 + x_2 + x_3$  ja  $q = x_1x_2x_3$ . Yhtälöstä huomataan, että Steinerin sisäellipsin akselit ovat  $x$ -akselin ja  $y$ -akselin kanssa yhdensuuntaisia.

Steinerin ellipsin yhtälö voidaan myös esittää puoliakseleiden pituuksien  $a$  ja  $b$  avulla seuraavasti

$$\frac{(x - \frac{p}{3})^2}{a^2} + \frac{(y - \frac{3}{p})^2}{b^2} = 1,$$

missä puoliakseleiden neliöiden pituudet ovat  $a^2 = \frac{p^3 - 27q}{9p}$  ja  $b^2 = \frac{p^3 - 27q}{-3p^2q}$ .

Tutkimalla onko  $a^2 - b^2 = \frac{(p^3 - 27q)(pq + 3)}{9p^2q}$  positiivinen, saadaan selville onko isoakseli yhdensuuntainen  $x$ -akselin vai  $y$ -akselin kanssa. Merkitään  $t = pq + 3$ , jolloin saadaan kaksi tapausta:

- (1) Jos  $t < 0$  ja  $a > b$ , niin isoakseli on  $x$ -akselin kanssa yhdensuuntainen.
- (2) Jos  $t > 0$  ja  $a < b$ , niin isoakseli on  $y$ -akselin kanssa yhdensuuntainen.

Jos  $t = 0$ , niin  $a = b$ , jolloin Steinerin sisäellipsi on ympyrä ja kolmio  $T$  on tasasivuinen.

Steinerin sisäellipsin polttopisteiden koordinaatit voidaan määrittää Steinerin sisäellipsin keskipisteen ja polttopisteen välisen etäisyyden  $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$  avulla. Steinerin sisäellipsin keskipiste on sama kuin sitä rajoittavan kolmion painopiste  $g$ . Kun  $a > b$ , Steinerin sisäellipsin polttopisteet ovat isoakselilla, jonka yhtälö on  $y = \frac{3}{p}$ . Näin ollen Steinerin sisäellipsien polttopisteen  $y$ -koordinaatiksi saadaan suoraan  $\frac{3}{p}$ , kun taas  $x$ -koordinaatti saadaan kolmion painopisteen  $x$ -koordinaattiin lisäämällä luku  $\pm c$ . Vastaavanlainen päättely saadaan tehtyä, kun  $a < b$ . Tällöin Steinerin sisäellipsin polttopisteet sijaitsevat isoakselilla, jonka yhtälö on  $x = \frac{p}{3}$ . Steinerin sisäellipsien polttopisteiksi saadaan

$$(5.2) \quad A_{\pm} = \begin{cases} \left( \frac{p}{3} \pm c, \frac{3}{p} \right), & \text{jos } a > b \\ \left( \frac{p}{3}, \frac{3}{p} \pm c \right), & \text{jos } a < b, \end{cases}$$

missä  $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$ .

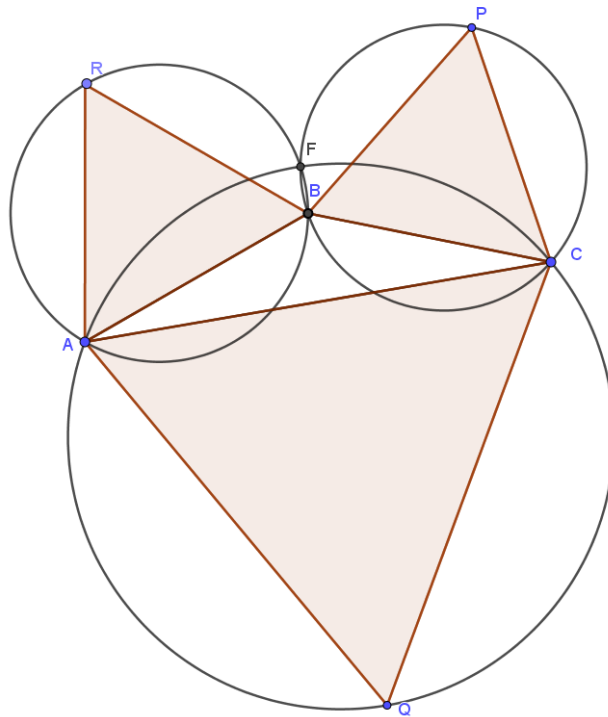
Merkitään  $u = \sqrt{\frac{-pq}{3}} = \frac{a}{b}$ . Parametri  $u$  mittaa Steinerin sisäellipsin eksentrisyyttä eli epäkeskeisyyttä  $e$ . Steinerin sisäellipseille eksentrisyys on  $0 \leq e < 1$  ja  $e = 0$  jos Steinerin sisäellipsi on ympyrä.

Kerrataan seuraavaksi Fermat'n pisteet ja niiden konstruointi, minkä jälkeen esitetään Fermat'n pisteiden koordinaatit Kiepertin koordinaatistossa.

Ranskalainen Pierre de Fermat'n (1601–1655) esitti Fermat'n-Steinerin probleeman ystävälleen Torricellille kirjeessä. Fermat'n-Steinerin probleemassa tuli löytää kolmen kylän välissä oleva risteys siten, että maanteiden yhteispituus olisi mahdollisimman lyhyt. Torricelli ratkaisi ongelman ja Torricellin oppilas Viviani julkaisi ratkaisun vuonna 1659. Lyhin mahdollinen risteyspiste on ensimmäinen Fermat'n piste, jos kolmion jokainen kulma on alle 120 astetta. Tätä pistettä kutsutaan kirjallisuudessa myös Torricellin pisteeksi. Jos kolmion jokin kulma on yli 120 astetta, niin tällöin risteyspiste on kyseisen kulman kärki. Steinerin sisäellipsien polttopisteiden konstruoinnissa tarvitaan ensimmäisen Fermat'n pisteen lisäksi myös toista Fermat'n pistettä, joka konstruoidaan samankaltaisesti kuin ensimmäinen Fermat'n piste. [14]

**MÄÄRITELMÄ 5.1.** Piirretään kolmion  $ABC$  ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot  $ARB$ ,  $BPC$  ja  $CQA$  ja konstruoidaan kunkin näistä ympärille ympyrä, joka kulkee kolmion kärkipisteiden kautta. Nämä kolme ympyrää leikkaavat samassa pisteessä, jota kutsutaan *ensimmäiseksi Fermat'n pisteeksi*  $F$ .

Ensimmäisen Fermat'n pisteen konstruointi on esitetty kuvassa 5.2.

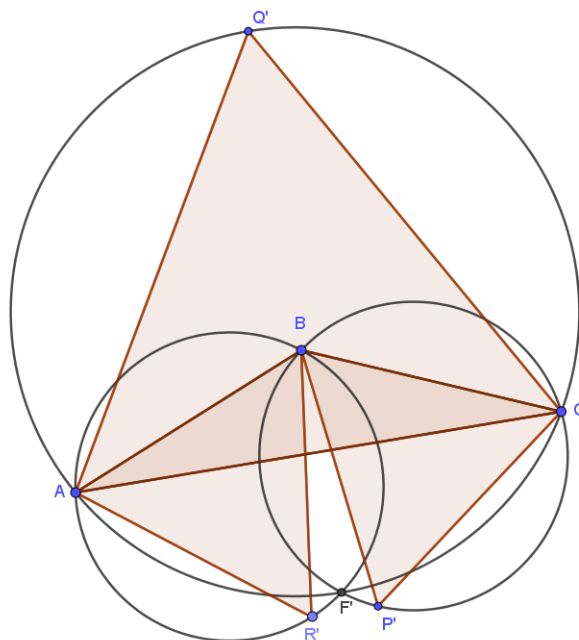


KUVA 5.2. Ensimmäinen Fermat'n pisteen  $F$  konstruointi

**HUOMAUTUS 5.2.** Kuvasta 5.2 huomataan, että Fermat'n ensimmäinen piste on kolmion  $\triangle ABC$  ulkopuolella. Tämä johtuu siitä, että kulma  $\angle ABC > 120^\circ$ . Tässä tapauksessa ratkaisu Fermat'n-Steinerin problemaan on kolmion kärkipiste  $B$ .

MÄÄRITELMÄ 5.3. Piirretään kolmion  $ABC$  sisäpuolelle tasasivuiset kolmiot  $AR'B$ ,  $BP'C$  ja  $CQ'A$  ja konstruoidaan kunkin näistä ympärille ympyrä, joka kulkee kolmion kärkipisteiden kautta. Nämä kolme ympyrää leikkaavat samassa pisteessä, jota kutsutaan *toiseksi Fermat'n pisteeksi*  $F'$ .

Toisen Fermat'n pisteen konstruointi on esitetty kuvassa 5.3.



KUVA 5.3. Fermat'n toisen pisteen  $F'$  konstruointi

Artikkelissa [6, §9] osoitetaan, että Fermat'n pisteiden koordinaatit Kiepertin koordinaatistossa voidaan ilmaista kolmion kärkipisteiden summan  $p$  ja tulon  $q$  avulla seuraavasti:

$$F = \left( \sqrt{\frac{-p}{3q}}, \sqrt{\frac{-3q}{p}} \right) \text{ ja } F' = \left( -\sqrt{\frac{-p}{3q}}, -\sqrt{\frac{-3q}{p}} \right).$$

Lausutaan Fermat'n pisteiden koordinaatit käyttämällä parametria  $u = \sqrt{\frac{-pq}{3}}$ . Fermat'n pisteen koordinaateiksi saadaan nyt

$$(5.3) \quad F = -\frac{u}{pq}(p, -3q) \text{ ja } F' = -\frac{u}{pq}(-p, 3q).$$

Huomataan, että janan  $FF'$  keskipiste on origo Kiepertin koordinaatistossa. Fermat'n pisteiden ja kolmion painopisteen  $g$  avulla pystytään määrittämään Steinerin sisäellipsin isoakseli ja Steinerin sisäellipsin akselien pituudet.

LAUSE 5.4. *Olkoot  $G$  kolmion painopiste,  $F$  Fermat'n ensimmäinen piste ja  $F'$  Fermat'n toinen piste. Steinerin sisäellipsin isoakseli kuuluu kulman  $\angle FGF'$  kulmanpuolittajalle. Akselien pituudet ovat  $||GF'| \pm |GF||$  eli kolmion painopisteen ja Fermat'n pisteiden etäisyyksien summan ja erotuksen itseisarvo.*

TODISTUS. Todistetaan ensin, että Steinerin sisäellipsin isoakseli kuuluu kulman  $\angle FGF'$  kulmanpuolittajalle. Tämä todistetaan osoittamalla, että peilaus  $\tau$  isoakselin suhteen kuvaa vektorin  $GF$  vektoriksi  $GF^\tau$ , joka on samansuuntainen vektorin  $GF'$  kanssa. Todistetaan tämä kahden tapauksen avulla.

*Tapaus 1:  $a < b$ .* Tässä tapauksessa  $u < 1$  ja isoakseli on  $y$ -akselin suuntainen. Käyttämällä kolmion painopisteen koordinaatteja (5.1) ja Fermat'n pisteiden koordinaatteja (5.3) vektoreiksi saadaan laskettua

$$\begin{aligned} GF &= F - G = \left( \frac{-u}{q} - \frac{p}{3}, \frac{3u}{p} - \frac{3}{p} \right), \\ GF^\tau &= \left( \frac{u}{q} + \frac{p}{3}, \frac{3u}{p} - \frac{3}{p} \right), \\ GF' &= \left( \frac{u}{q} - \frac{p}{3}, \frac{-3u}{p} - \frac{3}{p} \right). \end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi vektoreiden  $GF^\tau$  ja  $GF'$  ristitulo sekä pistetulo. Olkoon kompleksiluku muotoa  $z_i = x_i + y_i i$ . Tällöin kahden kompleksiluvun ristitulo on  $z_1 \times z_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1$ . Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} GF^\tau \times GF' &= \left( \frac{u}{q} + \frac{p}{3} \right) \left( \frac{-3u}{p} - \frac{3}{p} \right) - \left( \frac{3u}{p} - \frac{3}{p} \right) \left( \frac{u}{q} - \frac{p}{3} \right) \\ &= \frac{-3u^2}{pq} - \frac{3u}{pq} - u - 1 - \frac{3u^2}{pq} + u + \frac{3u}{pq} - 1 \\ &= \frac{-6u^2}{pq} - 2. \end{aligned}$$

Sijoittamalla  $u = \sqrt{\frac{-pq}{3}}$  yhtälöön saadaan ristituloksi nolla. Kompleksilukujen ristitulo voidaan myös laskea vektorien välisen kulman  $\theta$  avulla seuraavasti  $z_1 \times z_2 = |z_1||z_2|\sin\theta$ . Koska aiemmasta laskusta ristituloksi saatiin nolla ja  $|GF^\tau|, |GF'| \neq 0$ , niin vektorien välinen kulma on joko  $\theta = 0^\circ$  tai  $\theta = 180^\circ$ .

Lasketaan seuraavaksi pistetulo, joka lasketaan kompleksiluvuille  $z_1$  ja  $z_2$  kaavalla  $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$ . Pistetuloksi saadaan

$$\begin{aligned}
GF^\tau \cdot GF' &= \left(\frac{u}{q} + \frac{p}{3}\right)\left(\frac{u}{q} - \frac{p}{3}\right) + \left(\frac{3u}{p} - \frac{3}{p}\right)\left(\frac{-3u}{p} - \frac{3}{p}\right) \\
&= \frac{u^2}{q^2} - \frac{p^2}{9} + \frac{9}{p^2} - \frac{9u^2}{p^2} \\
&= \frac{(p^3 - 27q)(pq + 3)}{9p^2q} \\
&= b^2 - a^2.
\end{aligned}$$

Huomataan, että pistetuloksi saatiin positiivista, koska  $a < b$ . Näin ollen pistetulosta ja ristitulosta huomataan, että vektorit  $GF^\tau$  ja  $GF'$  ovat samansuuntaiset. Nyt pystytään laskemaan kolmion painopisteen  $G$  ja Fermat'n pisteiden välisten etäisyyksien summa ja erotus käyttämällä hyväksi vektorien  $GF^\tau$  ja  $GF'$  samansuuntaisuutta. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
|GF| + |GF'| &= |GF^\tau| + |GF'| = |GF^\tau + GF'| \\
&= \left| \left(\frac{u}{q} + \frac{p}{3}, \frac{3u}{p} - \frac{3}{p}\right) + \left(\frac{u}{q} - \frac{p}{3}, \frac{-3u}{p} - \frac{3}{p}\right) \right| = \left| \left(\frac{2u}{q}, \frac{-6}{p}\right) \right| \\
&= \sqrt{\frac{4u^2}{q^2} + \frac{36}{p^2}} = 2\sqrt{\frac{p^3 - 27q}{3p^2q}} = 2b \\
|GF| - |GF'| &= |GF^\tau| - |GF'| = |GF^\tau - GF'| \\
&= \left| \left(\frac{u}{q} + \frac{p}{3}, \frac{3u}{p} - \frac{3}{p}\right) - \left(\frac{u}{q} - \frac{p}{3}, \frac{-3u}{p} - \frac{3}{p}\right) \right| = \left| \left(\frac{2p}{3}, \frac{6u}{p}\right) \right| \\
&= \sqrt{\frac{4p^2}{9} + \frac{36u^2}{p^2}} = 2\sqrt{\frac{p^3 - 27q}{9p}} = 2a.
\end{aligned}$$

Huomataan, että summaksi saatiin pikkuakselin pituus  $2b$  ja erotukseksi isoakselin pituus  $2a$ .

*Tapaus 2:  $a > b$ .* Tässä tapauksessa  $u > 1$ , jolloin isoakseli on  $x$ -akselin suuntainen ja painopisteen  $G$  ja peilatus isoakselin suhteen Fermat'n pisteen  $F^\tau$  vektoriksi saadaan  $GF^\tau = \left(\frac{-u}{q} - \frac{p}{3}, \frac{-3u}{p} + \frac{3}{p}\right)$ . Lasketaan vektorien  $GF^\tau$  ja  $GF'$  ristitulo ja pistetulo vastaavanlaisesti kuin tapauksessa 1. Ristituloksi saadaan nolla ja pistetuloksi saadaan  $a^2 - b^2 > 0$ , jolloin vektorit  $GF^\tau$  ja  $GF'$  ovat samansuuntaiset. Näin ollen laskemalla saadaan  $|GF| + |GF'| = 2a$  ja  $|GF'| - |GF| = 2b$ .

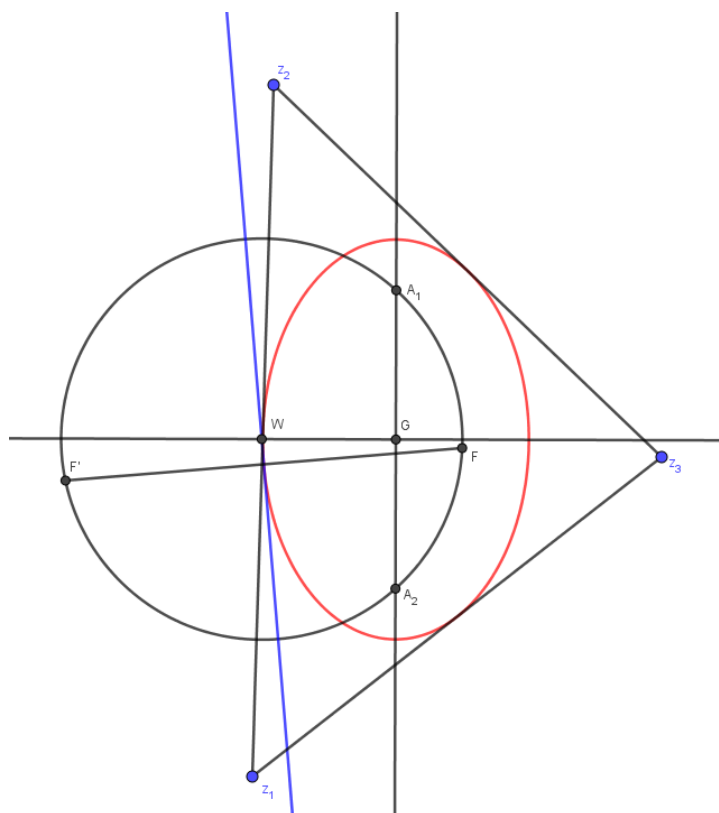
Tapaukset 1 ja 2 todistavat lauseen.

□

### 5.1. Steinerin sisäellipsin polttopisteiden konstruointi

Kun tiedetään kolmion painopiste  $g$  sekä konstruoidaan Fermat'n pisteet  $F$  ja  $F'$ , pystytään Steinerin sisäellipsin polttopisteet  $A_1$  ja  $A_2$  konstruimaan helposti seuraavien ohjeiden avulla:

- (1) Jatketaan Steinerin sisäellipsin iso- ja pikkuakseli suoriksi. Lauseen (5.4) nojalla saadaan isoakseli konstruomalla kulman  $\angle FGF'$  kulmanpuolittaja. Jatkettu pikkuakseli saadaan isoakselin normaalinä, joka kulkee pisteen  $G$  kautta.
- (2) Konstruoidaan janan  $FF'$  keskinormaali. Merkitään kyseistä keskinormaalia kirjaimella  $l$ .
- (3) Merkitään kirjaimella  $W$  keskinormaalien  $l$  ja jatkettujen pikkuakselien leikkauspistettä.
- (4) Konstruoidaan ympyrä, jonka keskipiste on  $W$  ja joka kulkee Fermat'n pisteiden  $F$  ja  $F'$  kautta.
- (5) Polttopisteet  $A_1$  ja  $A_2$  saadaan ympyrän ja isoakselin leikkauspisteistä.



KUVA 5.4. Steinerin sisäellipsin polttopisteet  $A_1$  ja  $A_2$  voidaan konstruoida Fermat'n pisteiden avulla.

Steinerin sisäellipsien polttopisteiden konstruointiin voi tutustua seuraavassa GeoGebra-appletissa: <https://ggbm.at/w559q6mz>.



Todistetaan seuraavaksi edellisellä sivulla tarvittu algoritmi Steinerin sisäellipsin polttopisteiden löytämiseksi.

LAUSE 5.5. *Steinerin sisäellipsin polttopisteet ovat isoakselin ja Fermat'n pisteiden kautta kulkevan ympyrän, jonka keskipiste on jatketulla pikkuakselilla, leikkauspisteet.*

TODISTUS. Todistus jaetaan kahteen tapaukseen.

*Tapaus 1:  $a > b$ .* Tällöin Steinerin sisäellipsin isoakseli on  $x$ -akselin suuntainen, jolloin isoakselin yhtälö on  $y = \frac{3}{p}$ . Steinerin sisäellipsin pikkuakseli on tällöin  $x = \frac{p}{3}$ . Janan  $FF'$  keskinormaali  $l$  on  $y = \frac{p}{3q}x$ , jolloin yhtälöparilla pikkuakselin ja keskinormaalin  $l$  leikkauspisteeksi saadaan  $W = \left(\frac{p}{3}, \frac{p^2}{9q}\right)$ . Ympyrän säde  $r$  saadaan selvittämällä vektorin  $WF$  pituus. Säteeksi saadaan

$$r = |WF| = \sqrt{\left(-\frac{u}{q} - \frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{3u}{p} - \frac{p^2}{9q}\right)^2} = \sqrt{\frac{p^4}{81q^2} + \frac{p^2}{9} - \frac{p}{3q} - 3\frac{q}{p}}.$$

Tällöin ympyrän yhtälö on

$$x^2 + y^2 - x\frac{2p}{3} - y\frac{2p^2}{9q} + \frac{p^2 + 9q^2}{3pq} = 0.$$

Lasketaan ympyrän ja isoakselin leikkauspisteet yhtälöparilla

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x\frac{2p}{3} - y\frac{2p^2}{9q} + \frac{p^2 + 9q^2}{3pq} = 0 \\ y = \frac{3}{p}. \end{cases}$$

Leikkauspisteiksi saadaan

$$\left(\frac{p}{3} \pm \sqrt{a^2 - b^2}, \frac{3}{p}\right).$$

Yhtälöstä (5.2) huomataan, että leikkauspisteet ovat Steinerin sisäellipsin polttopisteet.

*Tapaus 2:  $a < b$ .* Tällöin Steinerin sisäellipsin isoakseli on  $y$ -akselin kanssa yhdensuuntainen ja isoakselin yhtälö on  $x = \frac{p}{3}$ , ja pikkuakseli on  $x$ -akselin kanssa yhdensuuntainen, joka on  $y = \frac{3}{p}$ . Vastaavanlaisella tavalla kuin tapauksessa 1 ympyrän keskipisteen koordinaateiksi saadaan  $W = \left(\frac{9q}{p^2}, \frac{3}{p}\right)$ . Tällöin ympyrän säde on

$$r = |WF| = \sqrt{\frac{-p}{3q} + \frac{81q^2}{p^4} - \frac{3q}{p} + \frac{9}{p^2}}.$$

Ympyrän yhtälö on nyt

$$x^2 + y^2 - x \frac{18q}{p^2} - y \frac{6}{p} + \frac{p^2 + 9q^2}{3pq} = 0.$$

Yhtälöparista ympyrän ja isoakselin leikkauspisteiksi saadaan  $(\frac{p}{3}, \frac{3}{p} \pm \sqrt{b^2 - a^2})$ . Yhtälöstä (5.2) huomataan, että leikkauspisteet ovat Steinerin sisäellipsin polttopisteet.  $\square$

## 5.2. Tasakylkinen kolmio

Tasakylkiselle kolmiolle ei voida tehdä Kiepertin koordinaatistomuunnosta, joten todistetaan aiemmat tulokset tasakylkiselle kolmiolle  $T$  kuvaamalla kolmion kärkipisteet pisteiksi  $z_1 = (-1, 0)$ ,  $z_2 = (1, 0)$  ja  $z_3 = (0, h)$ . Kolmion painopisteeksi saadaan  $g = (0, \frac{h}{3})$ , joka on samalla Steinerin sisäellipsin keskipiste.

Oletetaan, että  $h > 0$  ja  $h \neq \sqrt{3}$ . Jos  $h = \sqrt{3}$ , niin tällöin kolmio on tasasivuinen. Tällöin Steinerin sisäellipsi on ympyrä, jonka keskipiste on kolmion painopiste ja säde  $r = \frac{h}{3}$ .

Tarkastellaan nyt yleistä tapausta, jossa Steinerin sisäellipsi ei ole ympyrä. Tällöin kolmion Steinerin sisäellipsin yhtälöksi saadaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - \frac{h}{3})^2}{b^2} = 1,$$

missä  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ja  $b = \frac{h}{3}$ .

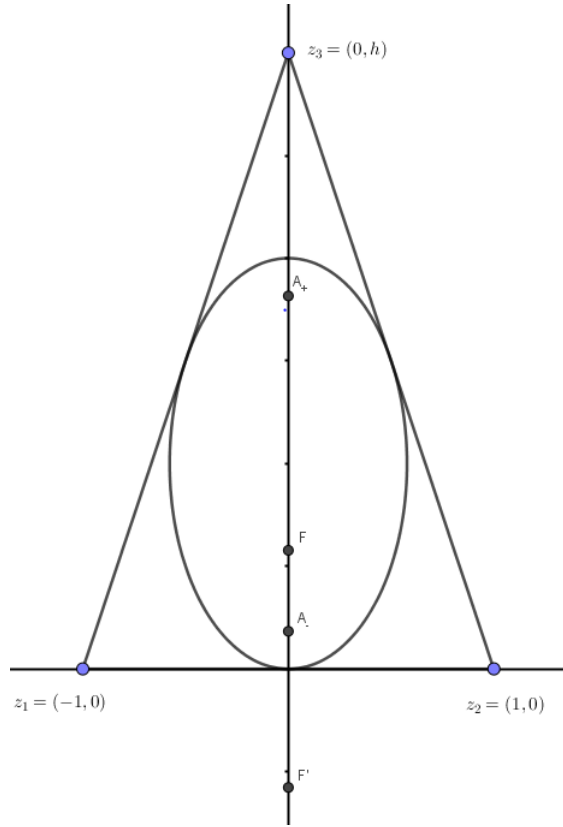
Steinerin sisäellipsin polttopisteet saadaan tarkastelemalla isoakselia ja Steinerin sisäellipsin keskipisteen ja polttopisteen välistä etäisyyttä  $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$ . Kun  $a > b$ , niin Steinerin sisäellipsin polttopisteet ovat isoakselilla, joka on  $y = \frac{h}{3}$ . Kun  $a < b$ , niin Steinerin sisäellipsin polttopisteet ovat isoakselilla, joka on  $x = 0$ . Näin ollen Steinerin sisäellipsin polttopisteiksi saadaan

$$(5.4) \quad A_{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{3}(\pm\sqrt{3 - h^2}, h), & \text{jos } a > b \\ (0, \frac{1}{3}(h \pm \sqrt{h^2 - 3})), & \text{jos } a < b. \end{cases}$$

Kolmion  $T$  Fermat'n pisteiden koordinaatit ovat

$$F = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}) \text{ ja } F' = (0, -\frac{\sqrt{3}}{3}).$$

Todistetaan nyt lauseet 5.4 ja 5.5 tasakylkiselle kolmiolle.



KUVA 5.5. Tasakylkisen kolmion Steinerin sisäellipsille voidaan todistaa samat tulokset kuin muillekin Steinerin sisäellipseille käyttämättä Kiepertin koordinaatistoa.

TODISTUS. (Lauseet 5.4 ja 5.5) *Tapaus 1:  $h < \sqrt{3}$ ,  $a > b$  ja  $c^2 = \frac{h^2 - 3}{9}$ .* Isoakseli on  $x$ -akselin suuntainen. Todistetaan ensiksi lause 5.4. Tällöin vektoreiksi saadaan

$$GF = \left(0, \frac{\sqrt{3} - h}{3}\right)$$

$$GF^\tau = \left(0, \frac{h - \sqrt{3}}{3}\right)$$

$$GF' = \left(0, \frac{-\sqrt{3} - h}{3}\right).$$

Vektorien ristituloksi saadaan  $GF^\tau \times GF' = 0$ , jolloin vektorien välinen kulma on joko  $0^\circ$  tai  $180^\circ$ . Pistetuloksi saadaan  $GF^\tau \cdot GF' = \frac{-h^2}{9} + \frac{1}{3} > 0$ , koska  $h < \sqrt{3}$ . Näin ollen ristitulosta ja pistetulosta saadaan, että vektorit  $GF^\tau$  ja  $GF'$  ovat samansuuntaiset.

Vektorien pituuksiksi saadaan

$$|GF'| = a + b = \frac{\sqrt{3} + h}{3} \text{ ja } |GF| = a - b = \frac{\sqrt{3} - h}{3}.$$

Tästä saadaan, että  $|GF'| - |GF| = 2b$  ja  $|GF'| + |GF| = 2a$ , mitä haluttiin osoittaa.

Todistetaan nyt lause 5.5. Tällöin polttopisteiden konstruoinnissa tarvittavan ympyrän, jonka keskipiste on  $W$ , yhtälö on

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{3} = 0$$

ja vektorin  $FF'$  keskinormaali on suora  $y = \frac{h}{3}$ . Yhtälöparilla ympyrän ja isoakselin leikkauspisteiksi saadaan

$$\left(\pm \frac{\sqrt{3-h^2}}{3}, \frac{h}{3}\right).$$

Huomataan, että leikkauspisteet ovat yhtälön (5.4) Steinerin sisäellipsin polttopisteet.

*Tapaus 2:*  $h > \sqrt{3}$ ,  $a < b$  ja  $c^2 = \frac{3-h^2}{9}$ . Tällöin isoakseli on  $y$ -akselin suuntainen. Tällöin vektoreiksi saadaan

$$GF = \left(0, \frac{\sqrt{3}-h}{3}\right) = GF^\tau$$

$$GF' = \left(0, \frac{-\sqrt{3}-h}{3}\right).$$

Ristituloksi saadaan  $GF^\tau \times GF' = 0$ , jolloin vektorien välinen kulma on joko  $0^\circ$  tai  $180^\circ$ . Pistetuloksi saadaan  $GF^\tau \cdot GF' = \frac{h^2}{9} - \frac{1}{3} > 0$ , koska  $h > \sqrt{3}$ . Näin ollen vektorit  $GF^\tau$  ja  $GF'$  ovat samansuuntaiset.

Vektorien pituuksiksi saadaan

$$|GF'| = \frac{\sqrt{3}+h}{3} = a+b \text{ ja } |GF| = \frac{h-\sqrt{3}}{3} = b-a.$$

Tästä saadaan, että  $|GF'| + |GF| = 2b$  ja  $|GF'| - |GF| = 2a$ , mitä haluttiin osoittaa. Todistetaan seuraavaksi lause 5.5.  $W$ -keskisen ympyrän yhtälö on sama kuin tapauksessa 1, kun taas Steinerin sisäellipsin isoakseli on  $x = 0$ . Ympyrän ja suoran leikkauspisteiksi saadaan

$$\left(0, \frac{1}{3}(h \pm \sqrt{h^2-3})\right).$$

Huomataan, että leikkauspisteet ovat yhtälön (5.4) Steinerin sisäellipsin polttopisteet.

Tapaukset 1 ja 2 yhdessä todistavat lauseet 5.4 ja 5.5 tasakylkiselle kolmiolle.  $\square$



## Kirjallisuutta

- [1] P. Kontkanen, R. Liira, K. Luosto, J. Nurmi, R. Nurmiainen, A. Ronkainen, S. Savolainen, *Pyramidi 3 - Geometria (1.-5.painos)*. Kustannusosakeyhtiö Tammi, Helsinki, 2005.
- [2] D. Minda, S. Phelps, *Triangles, Ellipses, and Cubic Polynomials*. The American Mathematical Monthly, Vol. 115, No. 8, 2008.
- [3] D. Kalman, *An Elementary Proof of Marden's Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 115, No. 4, 2008.
- [4] E. Badertscher, *A Simple Direct Proof of Marden's Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 121, No. 6, 2014.
- [5] P. Gorkin, E. Skubak, *Polynomials, Ellipses, and Matrices: Two Questions, One Answer*. The American Mathematical Monthly, Vol. 118, No. 6, 2011.
- [6] B. Scimemi, *Simple Relations Regarding the Steiner Inellipse of a Triangle*. Forum Geometricorum, Vol. 10, 2010.
- [7] J.H Foster, J.J Pedersen, *On The Reflective Property of Ellipses*. The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 4, 1980.
- [8] M. Lehtinen, *Matematiikan historian luentoja 2014*. Jyväskylän yliopisto.
- [9] A. Ernvall-Hytönen, *Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo*. Matematiikkalehti Solmu 1/2016.
- [10] A. Vähäkangas, *Kompleksilaskenta*. Jyväskylän yliopisto, 2017.
- [11] U. Daepf, P. Gorkin, R. Mortini, *Ellipses and Finite Blaschke Products*. The American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 9, 2002.
- [12] M. Frantz, *How Conics Govern Möbius Transformations*. The American Mathematical Monthly, Vol. 111, No. 9, 2004.
- [13] J. Roe, *Elementary Geometry: 1st. Edition*. Oxford University Press, New York, 1993.
- [14] S. Gueron, R. Tessler, *The Fermat-Steiner Problem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 5, 2002.