Poissonin yhtälö ja Greenin funktio

Ipa Puustinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: Ipa Puustinen, *Poissonin yhtälö ja Greenin funktio* (engl. *Poisson equation and Green's function*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 38 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tämän tutkielman tarkoituksena on muodostaa ratkaisufunktiot Laplacen ja Poissonin yhtälöille avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja sen avoimen osajoukon tapauksessa. Laplacen yhtälön avulla voidaan määritellä muun muassa harmoniset funktiot, joita etsittävät ratkaisufunktiotkin tulevat olemaan. Siten tutkielman aluksi tutkitaan harmonisia funktioita ja osoitetaan niitä koskevien lauseiden avulla, että tiettyjen differentiaaliyhtälöiden ratkaisut ovat yksikäsitteisiä. Tämän jälkeen ryhdytään tutkimaan Laplacen ja Poissonin yhtälöitä ensiksi koko avaruudessa.

Avoin osajoukko asettaa puolestaan uusia vaatimuksia ratkaisufunktioille, sillä joukon reunalla niiden on toteutettava eräitä ehtoja. Tätä varten määritellään ensiksi korjausfunktio tietyn differentiaaliyhtälön ratkaisuna ja sitä hyödyntäen määritellään Greenin funktio. Yleisen avoimen osajoukon tapauksessa varsinkin korjausfunktiolle on hyvinkin vaikea saada yksikäsitteistä esitysmuotoa eikä sen olemassaolokaan ole aina selvää. Tästä huolimatta esitetään Laplacen ja Poissonin yhtälöiden ratkaisukaavat avoimen osajoukon tapauksessa ja todistetaan ne. Tätä varten joudutaan olettamaan korjausfunktio olemassaolevaksi, eli tutkittava joukko on oltava suotuisa.

Korjausfunktio on kuitenkin hyvin keskeisessä roolissa Greenin funktion muodostamisessa ja siten myös ratkaisufunktioiden esittämisessä. Tästä syystä tutkielman lopussa käsitellään kaksi joukkoa, joissa korjausfunktiolle löydetään konkreettinen esitys: yksikköpallo ja puoliavaruus. Lopuksi esitetään vielä ratkaisufunktiot näissä joukoissa mahdollisimman konkreettisessa muodossa.

Sisältö

Johdanto

Pierre-Simon Laplace (1749–1827) oli ranskalainen matemaatikko ja fyysikko, joka oli keskeisessä roolissa matemaattisen fysiikan kehityksessä, missä fysiikan ongelmia pyritään ratkaisemaan matemaattisin keinoin. Laplace tutki muun muuassa kappaleen sähköistä potentiaalienergiaa ja osoittikin sen toteuttavan tietyn osittaisdifferentiaaliyhtälön, joka nykyisin tunnetaan Laplacen yhtälönä. Laplacen yhtälö esiintyy monessa eri fysiikan osa-alueessa, kuten lämmönjohtavuudessa ja sähkömagnetismissa. Esimerkiksi sähkömagnetismi rakentuu neljän Maxwellin yhtälön pohjalle, joista toinen yhtälö tunnetaan Gaussin lakina magnetismille. Tämä laki sanoo, että magneettikenttä toteuttaa Laplacen yhtälön, katso [**3**, s. 1137]. Tavallinen fysikaalinen tulkinta Laplacen yhtälölle on, että jonkin suureen kokonaisvuo sileän pinnan läpi on nolla. Matemaattisesti kyse on siitä, että

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

tutkittavalle funktiolle f. Tästä voidaankin yleistää tilanne, jossa osittaisderivaattojen summa ei olekaan nolla. Tätä yleistystä kutsutaan Poissonin yhtälöksi ja se on saanut nimensä ranskalaiselta Siméon Denis Poissonilta (1781–1840). Fysiikassa Poissonin yhtälö liittää esimerkiksi varaustiheyden ja kappaleen sähköisen potentiaalin yhteen, mikä saadaan Maxwellin 1. yhtälöstä [**3**, s. 1137] pienellä sijoituksella.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustua harmonisten funktioiden ominaisuuksiin sekä Greenin funktioon. Lisäksi tarkoitus on ratkaista näiden avulla Laplacen ja Poissonin differentiaaliyhtälöt avoimessa joukossa. Tavoitteena on myös saada muotoiltua konkreettiset ratkaisukaavat Dirichletin ongelmaan sekä Laplacen, että Poissonin yhtälöille käyttäen Greenin funktiota.

Luvuissa 1 ja 2 esitellään tarvittavia tuloksia, joista erityisesti Luku 1 on kooste tuloksista, joita ei todisteta, kuten vektorianalyysistä tutut Greenin lauseet. Lisäksi liitteeseen A on kerätty tutkielmassa usein esiintyviä merkintöjä. Luku 2 käsittelee harmonisia funktioita ja siinä määritellään harmoniset funktiot ensin Laplacen yhtälön avulla, kuten ne yleensä fysiikassa määritellään, ja sitten vahvempien matemaattisten tulosten kuten keskiarvoperiaatteen avulla. Sen jälkeen todistetaan harmonisille funktioille maksimi- ja minimiperiaate, joita käyttämällä voidaan todistaa luvuissa 3, 4 ja 5 tutkittavien osittaisdifferentiaaliyhtälöiden yksikäsitteisyys. Tällä haetaan tasapainoa lukujen välille, sillä osa lukujen 3 ja 4 laskuista on hyvinkin teknisiä, joten lukukokemuksen helpottamiseksi yksikäsitteisyystarkastelu tehdään jo luvussa 2.

Luvussa 3 määritetään ensiksi Laplacen yhtälö avaruuteen $\mathbb{R}^n$ ja todistetaan, että sille on olemassa konkreettinen ratkaisufunktio Φ. Tämän jälkeen tehdään Laplacen yhtälölle yleistys, jolloin päädytään Poissonin yhtälöön ja luonnollisesti sen ratkaisufunktioon lisäksi muotoillaan ratkaisufunktiolle kaava funktion Φ avulla. Luvussa 4 rajoitutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimeen osajoukkoon ja tutkitaan, miten edellisen luvun ratkaisufunktiot muuttuvat. Osajoukko asettaa ratkaisufunktiolle vaatimuksia joukon reunalla ja tätä varten määritellään Greenin funktio. Yleisimmät tavat kvantifioida vaatimukset reunalla ovat Neumannin ja Dirichletin ongelmat, joista tässä tutkielmassa käytetään Dirichletin ongelmaa. Muodostetaan uudet ratkaisufunktiot ensin Laplacen ja sitten Poissonin yhtälöiden Dirichletin ongelmille Greenin funktion avulla

Luvussa 5 valitaan tutkittaviksi joukoiksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallo ja ylempi puoliavaruus. Lasketaan näille joukoille Greenin funktiot ja sen jälkeen annetaan ratkaisufunktiot mahdollisimman konkreettisessa muodossa hyödyntäen Luvun 4 tuloksia.

Tutkielman pääasiallisena lähteenä on käytetty Lawrence C. Evansin kirjaa [**1**] sekä Juha Kinnusen tekemiä luentomuistiinpanoja [**2**] samasta kirjasta.

LUKU 1

Esitietoja

Tässä kappaleessa esitellään hyödyllisiä tuloksia, joita ei kuitenkaan todisteta, vaan ne oletetaan tunnetuiksi tuloksiksi. Lauseiden muotoilussa on käytetty Evansin kirjan [**1**] liitettä C.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $k \in \mathbb{N}$. Tällöin sanotaan että $\partial\Omega$ on C^k-säännöllinen, jos jokaiselle pisteelle $x_0 \in \partial\Omega$ on olemassa $r > 0$, C^k-funktio $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ ja koordinaatisto siten, että tarvittaessa koordinaatistoa pyörittämällä pätee

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\} \tag{1.1}$$

MÄÄRITELMÄ 1.2. Oletetaan, että $\partial\Omega$ on C^1-säännöllinen ja $x \in \partial\Omega$. Määritellään tällöin reunan yksikkönormaaliksi pisteessä x joukosta poispäin osoittava yksikkövektori $\nu(x)$, joka on kohtisuorassa pisteeseen x liittyvään tangenttitasoon nähden. Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega})$ normaaliderivaatta pisteessä $x \in \partial\Omega$ on

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nu(x) \cdot \nabla u(x) \tag{1.2}$$

kaikilla $x \in \partial\Omega$.

HUOMAUTUS 1.3. Olkoon $B(x_0, r)$ jokin avoin pallo avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja olkoon $x \in \partial B(x_0, r)$. Tällöin reunan yksikkönormaali ν on muotoa

$$\nu(x) = \frac{x - x_0}{r} \tag{1.3}$$

kaikilla $x \in \partial\Omega$. Tällöin erityisesti $|\nu(x)| = 1$.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Olkoon $\Omega \in C^1$ Olkoon $f \in C^1(\overline{\Omega})$ ja olkoon ν yksikkönormaali joukolle Ω. Tällöin funktion f normaaliderivaatta on

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \nabla f(x) \cdot \nu(x) \tag{1.4}$$

kaikille $x \in \Omega$.

Esitellään seuraavaksi Greenin lauseet:

LAUSE 1.5. *Olkoon Ω avoin joukko siten, että sen reuna $\partial\Omega$ on C^1-säännöllinen ja olkoon $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Tällöin pätee:*

$$\int_\Omega \Delta u(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) \tag{1.5}$$

$$\int_\Omega \nabla v(x) \cdot \nabla u(x)\ \mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\Delta v(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) u(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) \tag{1.6}$$

$$\int_\Omega (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)) \ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u(\sigma)\frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) - v(\sigma)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \right) \ \mathrm{d}S(\sigma) \tag{1.7}$$

Määritellään seuraavaksi keskiarvointegraali:

Määritelmä 1.6. Olkoon $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ja $R > 0$ Tällöin $S(\partial B(0,R))$ on pallon $B(0,R)$ reunan mitta ja se voidaan esittää muodossa

$$S(\partial B(0,R)) = \int_{\partial B(0,R)} 1 \ \mathrm{d}S(\sigma) = n\alpha(n)R^{n-1} \tag{1.8}$$

ja edelleen voidaan määritellä keskiarvointegraali

$$⨍_{\partial B(0,R)} f(\sigma) \ \mathrm{d}S(\sigma) = \frac{1}{S(\partial B(0,R))} \int_{\partial B(0,R)} f(\sigma) \ \mathrm{d}S(\sigma). \tag{1.9}$$

LUKU 2

Harmonisista funktioista

Tässä luvussa käsitellään harmonista funktiota u koskevia ominaisuuksia. Luku perustuu Evansin kirjan [**1**] lukuun 2.2.2. Määritellään harmoniset funktiot u Laplacen operaattorin Δ avulla:

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon Ω avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin osajoukko ja $u \in C^2(\Omega)$. Funktio u on harmoninen jos se toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x) = 0, \text{ kaikilla } x \in \Omega. \tag{2.1}$$

Havainnollistetaan tätä määritelmää seuraavalla esimerkillä:

ESIMERKKI 2.2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$. Tällöin funktio $f(x,y)$ on harmoninen koska

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = 2 - 2 = 0.$$

Seuraavaksi osoitetaan, että harmoniset funktiot voidaan karakterisoida niin sanotun keskiarvoperiaatteen avulla.

LAUSE 2.3. *Olkoon Ω avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin osajoukko ja $u \in C^2(\Omega)$. Funktio u on harmoninen, jos ja vain jos*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} u(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) = \fint_{B(x,\varepsilon)} u(y)\ \mathrm{d}y \tag{2.2}$$

jokaiselle $x \in \Omega$ ja $\varepsilon > 0$ siten, että $\overline{B}(x,\varepsilon) \subset \Omega$.

TODISTUS. Olkoon $x \in \Omega$. Olkoon $\varepsilon > 0$ siten, että $\overline{B}(x,\varepsilon) \subset \Omega$. Tällöin siis on oltava $\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$. Oletetaan ensiksi, että u on harmoninen ja sitten asetetaan

$$\varphi(\varepsilon) := \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} u(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x + \varepsilon s)\ \mathrm{d}S(s),$$

missä jälkimmäinen yhtäsuuruus saadaan muuttujanvaihdolla $\sigma = x + \varepsilon s$, josta $s = \frac{\sigma - x}{\varepsilon}$. Tällöin funktion φ derivaataksi muuttujan ε suhteen saadaan integrointi- ja derivointijärjestystä vaihtamalla

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varepsilon}(\varepsilon) = \fint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + \varepsilon s) \cdot s\ \mathrm{d}S(\sigma).$$

Tällöin tekemällä muuttujanvaihto takaisin saadaan

$$\fint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + \varepsilon s) \cdot s\ \mathrm{d}S(\sigma) = \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} \nabla u(\sigma) \cdot \frac{\sigma - x}{\varepsilon}\ \mathrm{d}S(\sigma).$$

Tällöin Määritelmän 1.4 nojalla saadaan:

$$\fint_{\partial B(x,\varepsilon)} \nabla u(\sigma) \cdot \frac{\sigma - x}{\varepsilon} \, \mathrm{d}S(\sigma) = \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma).$$

Palautetaan tämä keskiarvointegraali takaisin tavalliseksi integraaliksi Määritelmän 1.6 avulla, jotta siihen voidaan soveltaa Greenin ensimmäistä Lausetta (1.5):

$$\fint_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) = \frac{1}{S(\partial B(x,\varepsilon))} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma).$$

Tähän voidaan käyttää Greenin ensimmäistä lausetta (1.5) jolloin

$$\frac{1}{S(\partial B(x,\varepsilon))} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) = \frac{1}{S(\partial B(x,\varepsilon))} \int_{B(x,\varepsilon)} \Delta u(x) \, \mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

Käyttämällä vasta nyt oletusta, että u toteuttaa Laplacen yhtälön, saadaan

$$\frac{1}{S(\partial B(x,\varepsilon))} \int_{B(x,\varepsilon)} \Delta u(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Siispä funktion φ derivaatta on nolla. Tällöin funktio φ on vakio ja siten funktion u jatkuvuuden nojalla

$$\varphi(\varepsilon) = \lim_{t \to 0} \varphi(t) = \lim_{t \to 0} \fint_{\partial B(x,t)} u(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) = u(x),$$

kaikilla $\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$. Lisäksi napakoordinaattien avulla saadaan

$$\int_{B(x,\varepsilon)} u(y) \, \mathrm{d}y = \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(x,r)} u(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) \right) \, \mathrm{d}r. \tag{2.4}$$

Toisaalta Määritelmän 1.6 avulla saadaan

$$\int_{\partial B(x,r)} u(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) = S(\partial B(x,r)) \fint_{\partial B(x,r)} u(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) = S(\partial B(x,r))\varphi(r), \tag{2.5}$$

jolloin sijoittamalla yhtälö (2.5) yhtälöön (2.4) saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(x,r)} u(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) \right) \, \mathrm{d}r &= \int_0^\varepsilon S(\partial B(x,r))\varphi(r) \, \mathrm{d}r \\ &= u(x) \int_0^\varepsilon n\alpha(n) r^{n-1} \, \mathrm{d}r = u(x)\alpha(n)\varepsilon^n. \end{aligned}$$

Tällöin Määritelmän 1.6 nojalla saadaan

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} u(y) \, \mathrm{d}y = \fint_{B(x,\varepsilon)} u(y) \, \mathrm{d}y.$$

Täten toinen suunta on todistettu.

Todistetaan seuraavaksi toinen suunta, eli oletetaan nyt, että u toteuttaa ehdon

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} u(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) = \fint_{B(x,\varepsilon)} u(y) \, \mathrm{d}y$$

kaikilla $x \in \Omega$ ja $\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$. Tällöin funktiolle φ pätee

$$\varphi(\varepsilon) = \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} u(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) = u(x)$$

kaikilla $x \in \Omega$ ja $\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$. Täten funktio φ on siis vakio ja sen derivaatta on nolla. Oletetaan, että on olemassa piste $x \in \Omega$, jolle $\Delta u(x) \neq 0$. Voidaan olettaa, että $\Delta u(x) > 0$, koska toinen tapaus saadaan vastaavasti. Koska $u \in C^2(\Omega)$, on olemassa pallo $\bar{B}(x, \varepsilon) \subset \Omega$ siten, että $\Delta u(y) > 0$ kaikilla $y \in B(x, \varepsilon)$. Todistuksen aiemmassa osassa saatiin kaava (2.3), jonka johtamisessa ei tarvittu oletusta Laplacen yhtälön toteutumisesta. Muuttamalla tämä tulos tavalliseksi integraaliksi saadaan

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\varphi(\varepsilon) = C \int_{B(x,\varepsilon)} \Delta u(y)\ \mathrm{d}y,$$

jollekin vakiolle $C > 0$. Nyt kuitenkin pätee $\Delta u > 0$ kaikilla $y \in B(x, \varepsilon)$, jolloin saadaan

$$0 = C \fint_{B(x,\varepsilon)} \Delta u(y)\ \mathrm{d}y > 0.$$

Tämä on kuitenkin ristiriita, joten on oltava $\Delta u(x) = 0$ kaikilla $x \in \Omega$ ja siten u on harmoninen Määritelmän 2.1 nojalla. □

Seuraava lause tunnetaan harmonisten funktioiden maksimiperiaatteena:

Lause 2.4. *Olkoon $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmoninen avoimessa ja rajoitetussa joukossa Ω. Tällöin pätee*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \tag{2.6}$$

ja lisäksi jos Ω on yhtenäinen ja on olemassa piste $x_0 \in \Omega$ siten, että

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u,$$

niin tällöin funktio u on vakio joukossa Ω.

Todistus. Todistetaan ensiksi jälkimmäinen väite. Oletuksen nojalla on olemassa piste $x_0 \in \Omega$ siten, että

$$u(x_0) = M := \max_{\overline{\Omega}} u.$$

Valitaan $0 < \varepsilon < d(x_0, \partial\Omega)$ jolloin Lauseen 2.3 nojalla saadaan

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} u(y)\ \mathrm{d}y.$$

Koska funktio u on jatkuva ja M on sen maksimi, niin yhtäsuuruus tulee kysymykseen vain silloin kun u saa arvon M kaikissa pallon $B(x_0, \varepsilon)$ pisteissä eli $u(x) = M$ kaikilla $x \in B(x_0, \varepsilon)$.

Olkoon $y \in \Omega$. Koska joukko Ω on oletuksen nojalla yhtenäinen ja avoin, niin on olemassa polku $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ siten, että $\gamma(0) = x_0$ ja $\gamma(1) = y$. Määritellään seuraavaksi luku t_0 siten, että

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : u(\gamma(t)) = M\}. \tag{2.7}$$

Erityisesti joukko $T = \{t \in [0, 1] : u(\gamma(t)) = M\}$ on epätyhjä, sillä luku $t = 0$ kuuluu joukkoon T. Lisäksi T on rajoitettu, joten joukon supremum on olemassa. Tutkitaan seuraavaksi kolme mahdollista arvoa luvulle t_0: Jos $t_0 = 0$, niin pisteen $\gamma(t_0) = x_0$ ympäristössä on oltava pisteitä, joissa funktio u saa lukua M aidosti pienemmän arvon. Tämä on kuitenkin ristiriidassa tiedon $u(x) = M$ kaikilla $x \in B(x_0, \varepsilon)$ kanssa. Tutkitaan seuraavaksi tapaus $0 < t_0 < 1$. Tällöin pisteen $u(\gamma(t_0))$

missä tahansa ympäristössä on pisteitä, joissa funktio u saa arvon, joka ei ole M. Tutkitaan seuraavaksi pistettä $\gamma(t_0)$. Koska joukko Ω on yhtenäinen, niin toistamalla samat laskut kuin todistuksen alussa pisteelle x_0 saadaan pisteelle $\gamma(t_0)$ vastaava ympäristö kuin pisteelle x_0. Tällöin supremumin määritelmän ja yhdistetyn funktion $u \circ \gamma$ jatkuvuuden nojalla $u(\gamma(t_0)) = M$, jolloin pätee

$$u(x) = M, \text{ kaikilla } x \in B(\gamma(t_0), d(\gamma(t_0), \partial\Omega)).$$

Tämä on ristiriita, sillä tässäkin pallossa pitäisi olla piste, jossa funktion u arvo ei ole M. Siispä on oltava $t_0 = 1$, ja siten polun γ ja funktion u jatkuvuuksien nojalla $u(y) = u(\gamma(t_0)) = M$. Tällöin kaikilla $y \in \Omega$ pätee $u(y) = M$ ja funktio u on siten vakio joukossa Ω. Lisäksi funktio $u \in C(\overline{\Omega})$, joten tästä seuraa $u(y) = M$ kaikilla $y \in \overline{\Omega}$, jolloin funktio on vakio joukossa $\overline{\Omega}$.

Todistetaan vielä ensimmäinen väite: Olkoon $x_0 \in \overline{\Omega}$ siten, että

$$u(x_0) = \sup_{y \in \overline{\Omega}} u(y).$$

Piste x_0 voidaan valita tällä tavalla, koska joukko Ω on rajoitettu ja funktio u on jatkuva joukon Ω sulkeumassa jolloin funktio saa suurimman arvonsa jossakin joukon $\overline{\Omega}$ pisteessä. Tästä seuraa, että supremum saavutetaan ja

$$u(x_0) = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) = M.$$

Jos $x_0 \in \partial\Omega$, niin tällöin väite on selvä. Jos $x_0 \in \Omega$, niin jaetaan joukko Ω epätyhjiin yhtenäisiin avoimiin osajoukkoihin $\Omega_i, i = 1, 2, 3 \ldots$ siten, että $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$. Voidaan olettaa, että $x_0 \in \Omega_1$. Edellisen kohdan nojalla saadaan, että tällöin funktio u on vakio joukossa $\overline{\Omega_1}$. Erityisesti on olemassa piste $y \in \partial\Omega_1$ siten, että $u(y) = M = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y)$. Toisaalta $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$, jolloin on olemassa piste $y \in \partial\Omega$ siten, että $u(y) = M$. Tästä seuraa

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) = M = \max_{y \in \partial\Omega} u(y).$$

Siten funktion maksimi joukon Ω sulkeumassa on sen maksimi joukon Ω reunalla. $\square$

Vastaava tulos on myös olemassa harmonisen funktion minimille:

LAUSE 2.5. *Olkoon $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmoninen avoimessa ja rajoitetussa joukossa Ω. Tällöin pätee*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \tag{2.8}$$

ja lisäksi jos Ω on yhtenäinen ja on olemassa piste $x_0 \in \Omega$ siten, että

$$u(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} u,$$

niin tällöin funktio u on vakio joukossa Ω.

TODISTUS. Koska funktion u minimi on funktion $-u$ maksimi niin käyttämällä maksimiperiaatetta funktioon $-u$ saadaan

$$\max_{\overline{\Omega}} -u = \max_{\partial\Omega} -u,$$

mistä ensimmäinen väite seuraa. Vastaavasti toinen väite saadaan maksimiperiaatteen avulla sillä

$$-u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} -u.$$

Tällöin Lauseen 2.4 nojalla u on vakio koko joukossa Ω. □

Esitetään seuraavaksi funktio, joka voitaisiin osoittaa ei-harmoniseksi kuten Esimerkki 2.2, mutta käytetään tällä kertaa Lausetta 2.5, jolloin saadaan esimerkki kyseisen lauseen soveltamisesta:

ESIMERKKI 2.6. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2$. Tutkitaan tätä funktiota avaruuden $\mathbb{R}^2$ yksikköpallossa $B(0,1)$. Tällöin funktiolla f on globaali minimi origossa

$$\min_{\overline{B}(0,1)} f = f(0) = 0$$

kun taas funktion f arvo yksikköpallon reunalla on aina 1, joten erityisesti

$$\min_{\partial B(0,1)} f = 1.$$

Kuitenkin Lauseen 2.5 nojalla nämä minimit ovat yhtäsuuret harmonisille funktioille, joten tutkittava funktio f ei voi olla harmoninen yksikköpallossa. Toki tämä olisi myös helppo osoittaa suoraan laskemalla.

Maksimi- ja miniperiaatteiden avulla voidaan osoittaa tärkeä yksikäsitteisyystulos.

LAUSE 2.7. *Olkoon $g \in C(\partial\Omega)$ ja $f \in C(\Omega)$. Tällöin on olemassa korkeintaan yksi ratkaisufunktio $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, joka toteuttaa reuna-arvo-ongelman:*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \textit{kaikilla } x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \textit{kaikilla } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

TODISTUS. Oletetaan, että funktiot u ja $\tilde{u}$ ovat reuna-arvo-ongelman (2.9) ratkaisuja. Asetetaan $v := (u - \tilde{u})$. Tällöin

$$\Delta v = \Delta(u - \tilde{u}) = \Delta u - \Delta\tilde{u} = -f + f = 0$$

joukossa Ω. Vastaavasti reunalla $\partial\Omega$ pätee

$$v = u - \tilde{u} = g - g = 0.$$

Käytetään Lausetta 2.4, jonka nojalla $\max_{\Omega} v \leq 0$. Vastaavasti Lauseen 2.5 nojalla saadaan $\min_{\Omega} u \geq 0$. Tästä seuraa, että $v = 0$ joukossa Ω, mikä tarkoittaa, että $u = \tilde{u}$ joukossa Ω. Täten reuna-arvo-ongelman (2.9) ratkaisu on yksikäsitteinen. □

LUKU 3

Laplacen ja Poissonin yhtälöt avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Tässä luvussa käsitellään Laplacen ja Poissonin yhtälöiden ratkaisufunktioiden olemassaoloa yleisessä avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Luku pohjautuu Evansin kirjan [**1**] lukuun 2.2.1.

3.1. Laplacen yhtälö

Palautetaan ensiksi mieleen Laplacen yhtälö ja esitellään sille perusratkaisu.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoon Ω avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin osajoukko ja $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio siten, että $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Tällöin Laplacen yhtälöksi joukossa Ω kutsutaan osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x) = 0 \tag{3.1}$$

kaikilla $x \in \Omega$.

MÄÄRITELMÄ 3.2. Laplacen yhtälön perusratkaisu on $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{kun } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{kun } n \geq 3 \end{cases} \tag{3.2}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Tarkistetaan seuraavaksi, että perusratkaisu todella on Laplacen yhtälön ratkaisu.

LAUSE 3.3. *Määritelmän 3.2 perusratkaisu toteuttaa Laplacen yhtälön*

$$\Delta \Phi(x) = 0 \quad \textit{kaikilla} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{3.3}$$

TODISTUS. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ja merkitään

$$\tau(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Lasketaan funktion τ derivaatta muuttujan $x_i, i \in \{1, 2, \ldots, n, \}$ suhteen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} \cdot \frac{\partial (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}{\partial x_i} \\ &= \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{|x|}. \end{aligned}$$

Jaetaan todistus kahteen osaan $n \geq 3$ ja $n = 2$, joista todistetaan ensin tapaus $n \geq 3$. Olkoon $f(t) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{t^{n-2}}$ ja kirjoitetaan yhdistetty funktio $f \circ \tau$, jolloin saadaan

$$(f \circ \tau)(x) = f(\tau(x)) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} = \Phi(x),$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Lasketaan seuraavaksi funktion Φ ensimmäinen derivaatta muuttujan x_i suhteen. Yhdistetyn funktion derivointisäännöllä saadaan

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = f'(\tau(x)) \cdot \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{2-n}{|x|^{n-1}} \cdot \frac{x_i}{|x|} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i}{|x|^n}.$$

Lasketaan seuraavaksi tämän derivaatta muuttujan x_i suhteen, joka saadaan osamäärän derivointisäännöllä

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i}(x) &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i}{|x|^n}\right) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{|x|^n - x_i \cdot n x_i |x|^{n-2}}{|x|^{2n}} \\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{|x|^n - n x_i^2 |x|^{n-2}}{|x|^{2n}}.\end{aligned}$$

Nyt laskemalla nämä toisen kertaluvun osittaisderivaatat yhteen eri muuttujien x_i suhteen saadaan laplacen operaattori. Täten

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i}(x)\right) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{|x|^n - n x_i^2 |x|^{n-2}}{|x|^{2n}} \\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{n|x|^n - (n|x|^{n-2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2)}{|x|^{2n}} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{n|x|^n - (n|x|^{n-2} \cdot |x|^2)}{|x|^{2n}} \\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{n|x|^n - n|x|^n}{|x|^{2n}} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \cdot \frac{0}{|x|^{2n}} = 0.\end{aligned}$$

Siispä tapauksessa $n \geq 3$ Φ toteuttaa laplacen yhtälön kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Tapaus $n = 2$ todistetaan täsmälleen samalla tavalla, mutta käyttäen vain tasoon määriteltyä perusratkaisua Φ. Yksityiskohdat sivutetaan. $\square$

Edelleen osoitetaan, että Laplacen yhtälön perusratkaisu Φ on lokaalisti Lebesgue integroituva, toisin sanoen sen itseisarvon integraali yli pallojen $B(0,R), R > 0$, on äärellinen.

LEMMA 3.4. *Φ on lokaalisti Lebesgue-integroituva. Lisäksi*

$$\int_{B(0,R)} \Phi(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} R^2(|\log R| + \frac{1}{4}), & kun\ n = 2 \\ \frac{R^2}{2(n-2)}, & kun\ n \geq 3. \end{cases} \tag{3.4}$$

kaikilla $R > 0$.

TODISTUS. Jaetaan integroituvuustarkastelu kahteen osaan $n \geq 3$ ja $n = 2$. Olkoon $R > 0$ ja tutkitaan tapaus $n \geq 3$, jolloin $\Phi(x) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}}$. Laajennetaan integroimisalueeksi karakteristisen funktion avulla koko $\mathbb{R}^n$:

$$\int_{B(0,R)} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{B(0,R)}(x) \frac{1}{|x|^{n-2}} \, \mathrm{d}x.$$

Täten integraali voidaan muuttaa napakordinaatteihin

$$\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} \mathcal{X}_{B(0,r)}(\sigma)\frac{1}{|\sigma|^{n-2}} \,\mathrm{d}S(\sigma)\,\mathrm{d}r.$$

Pallon $B(0,r)$ reunalla pätee $|\sigma| = r$, joten $\frac{1}{|\sigma|^{n-2}}$ voidaan tuoda sisemmästä integraalista ulos:

$$\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_0^\infty \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B(0,r)} \mathcal{X}_{B(0,R)}(\sigma)\,\mathrm{d}S(\sigma)\,\mathrm{d}r.$$

Huomataan, että kun $r < R$, niin $\partial B(0,r) \subset B(0,R)$, jossa karakteristinen funktio saa arvon 1, muutoin arvo ja siten sisempi integraali on nolla. Käyttämällä Määritelmää 1.6 saadaan

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_0^\infty \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B(0,r)} \mathcal{X}_{B(0,R)}(\sigma)\,\mathrm{d}S(\sigma)\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_0^R \frac{1}{r^{n-2}} S(\partial B(0,r))\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

missä rajoitus $r < R$ on huomioitu integraalin rajoissa. Tästä edelleen laskemalla saadaan

$$\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_0^R \frac{1}{r^{n-2}} n\alpha(n) r^{n-1}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{n-2}\int_0^R r\,\mathrm{d}r = \frac{R^2}{2(n-2)} < \infty.$$

Siispä integraali on äärellinen tapauksessa $n \geq 3$. Tästä saadaan, että Φ on lokaalisti Lebesgue-integroituva. Tapaus $n = 2$ todistetaan vastaavasti jakamalla integroitava alue funktion Φ ominaisuuksien mukaan. Yksityiskohdat sivuutetaan. □

Osoitetaan seuraavaksi hyödyllinen arvio integraaleille, joissa Laplacen yhtälön perusratkaisu Φ esiintyy.

LEMMA 3.5. *Olkoon Φ kuten Määritelmässä 3.2 ja $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Tällöin seuraavat arviot ovat voimassa:*

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \leq \begin{cases} C\varepsilon^2|\log\varepsilon|, & \text{kun } n = 2\\ C\varepsilon^2, & \text{kun } n \geq 3\end{cases} \tag{3.5}$$

kaikilla $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(\sigma)||\frac{\partial g(\sigma)}{\partial\nu}|\,\mathrm{d}S(\sigma) \leq \begin{cases} C\varepsilon|\log\varepsilon|, & \text{kun } n = 2\\ C\varepsilon, & \text{kun } n \geq 3.\end{cases} \tag{3.6}$$

kaikilla $g \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Lisäksi huomautetaan, että kaavoissa (3.5) *ja* (3.6) *vakio C riippuu funktiosta g.*

TODISTUS. Tutkitaan ensiksi arviota (3.5). Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n$. Käytetään ensiksi kolmioepäyhtälöä ja sen jälkeen koska $g \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, niin $|g(y)|$ voidaan tuoda integraalista ulos ottamalla siitä supremum yli integroitavan joukon:

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n}|g(y)|\int_{B(0,\varepsilon)}|\Phi(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{3.7}$$

Lemman 3.4 nojalla Φ on lokaalisti integroituva kun $n \geq 3$. Soveltamalla tätä tulosta ja valitsemalla $R = \varepsilon$ yhtälössä (3.4) saadaan

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \ \mathrm{d}y = \frac{\varepsilon^2}{2(n-2)}.$$

Valitaan

$$c = \frac{\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)|}{2(n-2)}.$$

Jos puolestaan $n = 2$, niin Lemman 3.4 nojalla

$$\int_{B(0,R)} \Phi(x) \ \mathrm{d}x = \varepsilon^2(|\log \varepsilon| + \frac{1}{4}). \tag{3.8}$$

Toisaalta oletuksen nojalla saadaan

$$|\log \varepsilon| \geq |\log \frac{1}{2}| \Leftrightarrow 1 \leq \frac{|\log \varepsilon|}{|\log \frac{1}{2}|}.$$

Käytetään tätä arviota sieventämään saatua tulosta (3.8) jolloin saadaan

$$\varepsilon^2(|\log \varepsilon| + \frac{1}{4}) \leq \varepsilon^2(|\log \varepsilon| + \frac{|\log \varepsilon|}{4|\log \frac{1}{2}|}) = \varepsilon^2 \frac{4|\log \frac{1}{2}| + 1}{4|\log \frac{1}{2}|} |\log \varepsilon|.$$

Valitaan nyt

$$C = \frac{\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)|(4|\log \frac{1}{2}| + 1)}{4|\log \frac{1}{2}|}.$$

Sijoittamalla nämä saadut tulokset tutkittavaan integraaliin (3.7) saadaan

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \ \mathrm{d}y \leq \begin{cases} c\varepsilon^2 |\log \varepsilon|, & \text{kun } n = 2 \\ C\varepsilon^2, & \text{kun } n \geq 3, \end{cases}$$

jossa siis vakiot c ja C määrättiin aiemmin. Täten siis

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)||g(y)| \ \mathrm{d}y \leq \begin{cases} c\varepsilon^2 |\log \varepsilon|, & \text{kun } n = 2 \\ C\varepsilon^2, & \text{kun } n \geq 3. \end{cases}$$

Arvio (3.6) todistetaan lähes vastaavasti. Käyttämällä Määritelmää 1.4 saadaan

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(\sigma)||\frac{\partial g(\sigma)}{\partial \nu}| \ \mathrm{d}S(\sigma) \leq \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(\sigma)||\nabla g(\sigma) \cdot \nu(\sigma)| \ \mathrm{d}S(\sigma).$$

Integraalia voidaan vielä arvioida Cauchy–Schwarzin epäyhtälöllä, jolloin saadaan

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(\sigma)||\nabla g(\sigma) \cdot \nu(\sigma)| \ \mathrm{d}S(\sigma) \leq \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(\sigma)||\nabla g(\sigma)||\nu(\sigma)| \ \mathrm{d}S(\sigma).$$

Nyt koska funktio $g \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, niin sen gradientti on jatkuva ja kompaktikantajainen. Erityisesti gradientin ∇g normi on rajoitettu avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tällöin normista $|\nabla g|$ voidaan ottaa supremum, joka on äärellinen, ja tuoda se integraalista ulos. Lisäksi $|\nu(\sigma)| = 1$, koska ν on yksikkönormaali, joten päädytään epäyhtälöön

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(\sigma)||\nabla g(\sigma)||\nu(\sigma)| \ \mathrm{d}S(\sigma) \leq \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^n} |\nabla g(\sigma)| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(\sigma)| \ \mathrm{d}S(\sigma).$$

Havaitaan, että Φ on radiaalinen, eli pintaintegraali on helpompi laskea napakoordinaateissa. Kuitenkin Φ riippuu vain etäisyydestä $|x|$, joka on pallon $B(0,\varepsilon)$ pinnalla $|x|=\varepsilon$. Täten Φ on vakio pinnalla, joten se voidaan tuoda integraalista ulos jättäen:

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(\sigma)| \,\mathrm{d}S(\sigma) = |\Phi(\varepsilon\hat{e})| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} 1 \,\mathrm{d}S(\sigma), \tag{3.9}$$

missä $\hat{e} \in \mathbb{R}^n$ on mikä tahansa yksikkövektori. Määritelmien 1.6 ja 3.2 nojalla tämä jäljelle jäänyt integraali antaa

$$|\Phi(\varepsilon\hat{e})| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} 1 \,\mathrm{d}S(\sigma) = |\Phi(\varepsilon\hat{e})| S(\partial B(0,\varepsilon)) \leq \begin{cases} \varepsilon|\log\varepsilon| & \text{kun } n=2 \\ \frac{\varepsilon}{n-2} & \text{kun } n \geq 3. \end{cases}$$

Tällöin valitsemalla taas vakiot c ja C ja yhdistämällä tämä arvioon (3.9) saadaan

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(\sigma)||\nabla g(\sigma)\cdot\nu(\sigma)| \,\mathrm{d}S(\sigma) \leq \begin{cases} c\varepsilon|\log\varepsilon| & \text{kun } n=2 \\ C\varepsilon & \text{kun } n \geq 3. \end{cases}$$

Siispä väitetyt arviot pitävät paikkaansa. □

Muotoillaan seuraavaksi kaksi lemmaa liittyen Laplacen yhtälön perusratkaisuun.

Lemma 3.6. *Olkoon Φ kuten määritelmässä 3.2 ja $\nu(y)$ joukon $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,\varepsilon)$ reunan ulospäin osoittava yksikkönormaali $\nu(y) = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon}$. Olkoon myös $\varepsilon > 0$. Tällöin saadaan*

$$\frac{\partial\Phi(y)}{\partial\nu} = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \tag{3.10}$$

kaikilla $y \in \partial B(0,\varepsilon)$.

Todistus. Jaetaan todistus tapauksiin $n=2$ ja $n \geq 3$ ja tutkitaan ensiksi tapaus $n=2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi(y)}{\partial\nu} &= \nabla\Phi(y)\cdot\nu(y) = -\frac{1}{2\pi}\nabla\log|y|\cdot\nu(y) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|y|}\frac{y}{|y|}\cdot\left(-\frac{y}{|y|}\right) = \frac{1}{2\pi|y|} = \frac{1}{2\alpha(2)\varepsilon} \end{aligned}$$

kaikilla $y \in \partial B(0,\varepsilon)$. Tutkitaan seuraavaksi tapaus $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi(y)}{\partial\nu} &= \nabla\Phi(y)\cdot\nu(y) = \frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)}|y|^{1-n}\nabla|y|\cdot\nu(y) \\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{y}{|y|^n}\cdot\frac{-y}{|y|} = \frac{1}{n\alpha(n)}|y|^{1-n} = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \end{aligned}$$

kaikilla $y \in \partial B(0,\varepsilon)$. □

Lemma 3.7. *Olkoon $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ja Φ kuten Määritelmässä 3.2. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $x \in \mathbb{R}^n$ sekä ν joukon $B(0,\varepsilon)$ reunan ulospäin osoittava yksikkönormaali. Tällöin integraali*

$$\int_{\partial\overline{B}(0,\varepsilon)} \frac{\partial\Phi(\sigma)}{\partial\nu} f(x-\sigma) \,\mathrm{d}S(\sigma) \tag{3.11}$$

lähestyy reaalilukua $f(x)$ kun $\varepsilon \to 0$.

TODISTUS. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Nimetään tutkittava integraali seuraavasti:

$$\int_{\partial \overline{B}(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \nu} f(x-\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) =: R_\varepsilon.$$

Käytetään Lemmaa 3.6, jolloin integraali R_ε voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{\partial \overline{B}(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \nu} f(x-\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial \overline{B}(0,\varepsilon)} f(x-\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma).$$

Tästä saadaan Määritelmän 1.6 nojalla muokattua keskiarvointegraali

$$\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial \overline{B}(0,\varepsilon)} f(x-\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) = \fint_{\partial \overline{B}(x,\varepsilon)} f(\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma).$$

Olkoon $\delta > 0$. Koska f on jatkuva pisteessä x niin tällöin voidaan rajoittaa ε siten, että

$$|f(x) - f(y)| < \delta \quad \text{kun} \quad |x-y| \leq \varepsilon \tag{3.12}$$

Tutkitaan seuraavaksi integraalin R_ε ja funktion $f(x)$ erotuksen itseisarvoa:

$$\begin{aligned} |R_\varepsilon - f(x)| &= \left| \fint_{\partial \overline{B}(x,\varepsilon)} f(\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) - f(x) \right| \\ &= \left| \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} f(\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) - \fint_{\partial \overline{B}(x,\varepsilon)} f(x)\, \mathrm{d}S(\sigma) \right| \end{aligned}$$

Integraalin lineaarisuuden ja kaavan (3.12) nojalla voidaan arvioida

$$\left| \fint_{\partial \overline{B}(x,\varepsilon)} f(\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) - \fint_{\partial \overline{B}(x,\varepsilon)} f(x)\, \mathrm{d}S(\sigma) \right| \leq \fint_{\partial \overline{B}(x,\varepsilon)} |f(\sigma) - f(x)|\, \mathrm{d}S(\sigma) \leq \varepsilon.$$

Erityisesti tästä saadaan että $|R_\varepsilon - f(x)| \leq \varepsilon$. Tämä tarkoittaa sitä, että kun $\varepsilon \to 0$, niin tutkittava integraali $R_\varepsilon \to f(x)$. □

3.2. Poissonin yhtälö

MÄÄRITELMÄ 3.8. Olkoon Ω avaruuden $\mathbb{R}^n$ jokin avoin osajoukko. Lisäksi olkoon $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ $C^2(\Omega)$-funktio ja olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ annettu jatkuva funktio. Tällöin Poissonin yhtälöksi joukossa Ω kutsutaan osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \in \Omega. \tag{3.13}$$

LEMMA 3.9. *Olkoon $g \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ja $x, y \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $h \neq 0$ siten, että $|h| \leq 1$. Olkoon $1 \leq i \leq n$. Tällöin on olemassa $R > 0$ ja $M > 0$ siten, että*

$$\left| \frac{g(x-y+he_i) - g(x-y)}{h} \right| \leq M \mathcal{X}_{B(0,R)}(y)$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}^n$. Huomattavaa on, että luku R riippuu pisteestä x ja funktiosta g, mutta ei pisteestä y kun taas luku M riippuu pelkästään funktiosta g.

TODISTUS. Olkoon $y \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $r > 0$ siten, että funktion g kantaja kuuluu joukkoon $B(0,r)$. Tästä seuraa erityisesti, että $g(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus (B(0,r))$. Tutkitaan ensiksi tilanne, jossa $x-y \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,r+1)$. Tällöin $y \in \mathbb{R}^n \setminus B(x,r+1)$ ja erityisesti $x-y+he_i \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,r)$, koska $0 < |h| \leq 1$. Tästä seuraa $g(x-y+he_i) = 0$, jolloin saadaan

$$\left|\frac{g(x-y+he_i) - g(x-y)}{h}\right| = 0.$$

Jos puolestaan $x-y \in B(0,r+1)$, niin tällöin $y \in B(x,r+1)$. Käytetään differentiaali- ja integraalilaskennan väliarvolausetta [**5**, s. 274] funktioon

$$g(x-y+he_i) - g(x-y).$$

Sen nojalla on olemassa piste ξ janasegmentillä, jonka päätepisteet ovat $x-y$ ja $x-y+he_i$ siten, että

$$\left|\frac{g(x-y+he_i) - g(x-y)}{h}\right| = \left|\frac{\nabla g(\xi) \cdot he_i}{h}\right| \mathcal{X}_{B(x,r+1)}(y),$$

jossa karakteristinen funktio saadaan ehdosta $y \in B(x,r+1)$. Tätä voidaan vielä arvioida Cauchy–Schwarzin epäyhtälöllä

$$\left|\frac{\nabla g(\xi) \cdot he_i}{h}\right| \mathcal{X}_{B(x,r+1)}(y) \leq \frac{|\nabla g(\xi)||he_i|}{|h|} \mathcal{X}_{B(x,r+1)}(y) \leq |\nabla g(\xi)| \mathcal{X}_{B(x,r+1)}(y).$$

Nyt näistä arvoista $|\nabla g(\xi)|$ voidaan ottaa supremum yli avaruuden $\mathbb{R}^n$, sillä $|\nabla g|$ on oletusten nojalla jatkuva ja kompaktikantajainen funktio avaruudessa $\mathbb{R}^n$, joten se on rajoitettu. Täten supremum on äärellinen, jolloin saadaan

$$|\nabla g(\xi)| \mathcal{X}_{B(x,r+1)}(y) \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\nabla g(\xi)| \mathcal{X}_{B(x,r+1)}(y).$$

Valitaan $M := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\nabla g(\xi)| < \infty$. Edellä osoitetun perusteella saadaan siis

$$\left|\frac{g(x-y+he_i) - g(x-y)}{h}\right| \leq M \mathcal{X}_{B(x,r+1)}(y).$$

Valitaan $R = r + 2 + |x|$.Tällöin, jos $y \in B(x,r+1)$, niin kolmioepäyhtälön nojalla saadaan

$$|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| \leq r + 1 + |x| < r + 2 + |x| = R,$$

jolloin siis

$$B(x,r+1) \subset B(0,R).$$

Siten $\mathcal{X}_{B(x,r+1)}(y) \leq \mathcal{X}_{B(0,R)}(y)$ ja tästä saadaan

$$\left|\frac{g(x-y+he_i) - g(x-y)}{h}\right| \leq M \mathcal{X}_{B(x,r+1)}(y) \leq M \mathcal{X}_{B(0,R)}(y).$$

□

Osoitetaan seuraavaksi, että Poissonin yhtälölle on olemassa ratkaisu:

LAUSE 3.10. *Olkoot $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Tällöin Poissonin yhtälön $-\Delta u = f$ ratkaisu on*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y \quad \textit{kaikilla} \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.14}$$

ja u toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$
(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\ \mathrm{d}y$ *kaikilla* $1 \le i, j \le n$ *ja* $x \in \mathbb{R}^n$
(3) $-\Delta u(x) = f(x)$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}^n$

TODISTUS. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tekemällä muuttujanvaihto $z = x - y$ saadaan $u(x)$ muokattua sopivammaksi:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z) f(x-z)\ \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\ \mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Ryhdytään tutkimaan erotusosamäärää pisteessä x. Olkoon $h \in \mathbb{R}$ ja $-1 \le h \le 1$, $1 \le i \le n$ ja $e_i = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$, jossa 1 on paikassa i. Tällöin

$$
\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{f(x-y+he_i) - f(x-y)}{h}\ \mathrm{d}y
$$

integraalin lineaarisuuden nojalla. Ryhdytään nyt tutkimaan integroitavaa funktiota ja sitä varten kiinnitetään $y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$
\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)
$$

reaalilukujen joukossa, kun $h \to 0$. Toisaalta pätee

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{f(x-y+he_i) - f(x-y)}{h}\ \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Koska $x \in \mathbb{R}^n$ ja $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, niin integrandille on olemassa Lemman 3.9 nojalla $R > 0$ ja $M > 0$ siten, että seuraava arvio pätee:

$$
\left| \Phi(y) \frac{f(x-y+he_i) - f(x-y)}{h} \right| \le |\Phi(y)| M \mathcal{X}_{B(0,R)}(y),
$$

kaikilla $-1 \le h \le 1$ ja $y \in \mathbb{R}^n$. Edelleen Lemman 3.4 nojalla Φ on lokaalisti integroituva, joten tulo

$$
M|\Phi(y)|\mathcal{X}_{B(0,R)}(y)
$$

on integroituva. Täten voidaan käyttää Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta [**4**, s. 26] ja viedä raja-arvo interaalin sisälle seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \lim_{h \to 0} \frac{f(x-y+he_i) - f(x-y)}{h}\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\ \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Koska $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, niin $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ja soveltamalla nyt Lemmaa 3.9 ensimmäisiin osittaisderivaattoihin ja käyttämällä dominoidun konvergenssin lausetta kuten yllä, saadaan

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\ \mathrm{d}y.
$$

Valitaan seuraavaksi $g = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ja vastaavalla päättelyllä kuten yllä ja käyttämällä dominoidun konvergenssin lausetta nähdään, että $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Todistuksen yksityiskohdat sivuutetaan.

Olkoon nyt $x \in \mathbb{R}^n$ ja osoitetaan, että $\Delta u(x) = -f(x)$. Koska $\Phi(x)$ ei ole määritelty nollassa, vaan sen arvot lähestyvät ääretöntä, niin eristetään tämä alue pienen epsilon-säteisen pallon sisälle, joten olkoon $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Tällöin kaavan (3.15) nojalla saadaan:

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)\ \mathrm{d}y \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)\ \mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)\ \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Merkitään nyt

$$I_\varepsilon = \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)\ \mathrm{d}y$$

ja

$$J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)\ \mathrm{d}y.$$

Integraalia I_ε voidaan nyt arvioida Lemman 3.5 nojalla seuraavasti valitsemalla $g(y) = \Delta_x f(x-y)$, jolloin saadaan

$$|I_\varepsilon| \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\log \varepsilon| & \text{kun } n = 2 \\ C\varepsilon^2 & \text{kun } n \geq 3. \end{cases}$$

Laskemalla funktion $f(x-y)$ toisen kertaluvun derivaattoja muuttujan y suhteen saadaan

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} f(x-y) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y)\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}(x-y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_i}(x-y)$$

ja vastaavasti laskemalla toisen kertaluvun derivaattoja muuttujan x suhteen saadaan

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} f(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x-y).$$

Erityisesti saadaan

$$\Delta_y f(x-y) = \sum_i^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_i}(x-y) = \sum_i^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x-y) = \Delta_x f(x-y),$$

jolloin käyttämällä Greenin toista kaavaa (1.6) joukossa $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,\varepsilon)$ integraaliin J_ε valinnoilla $u(y) = \Phi(y)$ ja $v(y) = f(x-y)$ saadaan muokattua integraalia J_ε:

$$\begin{aligned}J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_y f(x-y)\ \mathrm{d}y \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla_y f(x-y)\ \mathrm{d}y + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(\sigma) \frac{\partial f(x-\sigma)}{\partial \nu}\ \mathrm{d}S(\sigma).\end{aligned}$$

Tässä ν on joukon $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,\varepsilon)$ reunan yksikkönormaali $\nu = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon}$. Määritellään

$$K_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla\Phi(y) \cdot \nabla_y f(x-y)\, \mathrm{d}y$$

ja

$$L_\varepsilon = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(\sigma) \frac{\partial f(x-\sigma)}{\partial \nu}\, \mathrm{d}S(\sigma).$$

Integraalia L_ε voidaan arvioida Lemman 3.5 avulla, jolloin saadaan

$$|L_\varepsilon| \leq \begin{cases} C\varepsilon|\log\varepsilon|, & \text{kun } n = 2 \\ C\varepsilon, & \text{kun } n \geq 3 \end{cases}.$$

Nyt käytetään Greenin toista kaavaa (1.6) integraaliin K_ε siten, että $v(y) = \Phi(y)$ ja $u(y) = f(x-y)$. Tällöin saadaan

$$K_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,\varepsilon)} \Delta_y \Phi(y) f(x-y)\, \mathrm{d}y - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \nu} f(x-\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma).$$

Nyt Lemman 3.3 nojalla $\Delta_y \Phi(y) = 0$, joten integraali yksinkertaistuu muotoon:

$$K_\varepsilon = -\int_{\partial \overline{B}(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \nu} f(x-\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma).$$

Tällöin Lemman 3.7 nojalla $K_\varepsilon \to -f(x)$. Nyt kun muistetaan, että $I_\varepsilon \to 0$ ja $L_\varepsilon \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$, niin saadaan

$$\Delta u(x) = I_\varepsilon + K_\varepsilon + L_\varepsilon \to -f(x), \text{ kun } \varepsilon \to 0.$$

Erityisesti siis havaitaan että $-\Delta u(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

LUKU 4

Laplacen ja Poissonin yhtälöt avoimessa joukossa

Edellisessä luvussa tutkittiin Poissonin yhtälöä koko avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tämä herättää kuitenkin kysymyksen siitä, että entä jos tutkittava joukko ei olekaan koko $\mathbb{R}^n$. Tässä luvussa tutkitaan miten Laplacen ja Poissonin yhtälöiden ratkaisut muuttuvat, kun rajoitutaan avoimeen rajoitettuun joukkoon Ω, jossa niille asetetaan reunaehto. Luku pohjautuu Evansin kirjan [**1**] lukuun 2.2.4.

4.1. Greenin funktio

Tässä luvussa esitellään Greeniin funktio korjaamaan Laplacen ja Poissonin yhtälöiden ratkaisuja (3.2) ja (3.14). Nämä eivät enää kelpaa, sillä niiden käyttäytymisestä joukon Ω reunalla ei tiedetä mitään. Tätä varten ratkaisuihin on lisättävä elementtejä takaamaan niiden käyttäytyminen hallitusti reunalla $\partial\Omega$. Määritellään tätä varten ensiksi kiinnitetylle x korjausfunktio ϕ_x.

MÄÄRITELMÄ 4.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko siten, että $\partial\Omega$ on C^1-säännöllinen. Määritellään korjausfunktio ϕ_x kiintälle $x \in \Omega$ siten, että se toteuttaa reuna-arvoyhtälön

$$\begin{cases} \Delta\phi_x(y) = 0, & \textit{kun } y \in \Omega \\ \phi_x(y) = \Phi(y - x), & \textit{kun } y \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Tässä vaaditaan, että korjausfunktio on $C^2(\Omega)$, sillä se toteuttaa Laplacen yhtälön tässä joukossa. Vaaditaan lisäksi, että korjausfunktio on $C^1(\partial\Omega)$, jotta sen normaaliderivaatta on olemassa joukon Ω reunalla. Tällöin saadaan, että $\phi_x \in C^2(\Omega) \cup C^1(\overline{\Omega})$.

HUOMAUTUS 4.2. Funktio ϕ_x on jatkuva reunalla $\partial\Omega$, sillä Φ on jatkuva origon ulkopuolella. Erityisesti jos $y \in \partial\Omega$ ja $x \in \Omega$ niin $x - y \neq 0$. Korjausfunktion ϕ_x olemassaolo ei ole Määritelmän 4.1 tietojen perusteella varmaa. Siispä seuraavissa tarkasteluissa oletetaan, että joukko Ω on valittu siten, että korjausfunktio on olemassa. Tarkemmin korjausfunktion olemassaoloon palataan myöhemmin.

Määritellään seuraavaksi tämän korjausfunktion avulla Greenin funktio:

MÄÄRITELMÄ 4.3. Olkoon Ω avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin rajoitettu osajoukko siten, että $\partial\Omega$ on C^1-säännöllinen. Määritellään Greenin funktio $G : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \{(x, x) : x \in \overline{\Omega}\} \to \mathbb{R}$ joukossa $\overline{\Omega}$ asettamalla

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \phi_x(y) \tag{4.2}$$

kaikilla $x \in \overline{\Omega}, y \in \overline{\Omega}$ ja $x \neq y$. Tässä ϕ_x on Määritelmän 4.1 mukainen korjausfunktio.

Huomautus 4.4. Olkoon G Määritelmän 4.3 mukainen Greenin funktio. Jos $x \in \overline{\Omega}$ ja $y \in \partial\Omega, x \neq y$, niin tällöin pätee $\phi_x(y) = \Phi(y-x)$. Tästä seuraa

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi_x(y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-x) = 0$$

kaikilla $x \in \overline{\Omega}$ ja $y \in \partial\Omega, x \neq y$. Tulos pätee myös symmetrisesti, sillä vektoreiden $x-y$ ja $y-x$ normit ovat yhtäsuuret. Tästä saadaan, että

$$\Phi(x-y) = \Phi(y-x),$$

jonka seurauksena korjausfunktiolle pätee

$$\phi_x(y) = \phi_y(x).$$

Esitellään seuraavaksi Greenin funktiota koskeva symmetriaominaisuus.

Lause 4.5. *Olkoon G Määritelmän 4.3 mukainen Greenin funktio. Tällöin kaikille $x, y \in \overline{\Omega}, x \neq y$, pätee*

$$G(x,y) = G(y,x). \tag{4.3}$$

Todistus. Olkoon $x, y \in \Omega, x \neq y$ ja merkitään kaikilla $z \in \overline{\Omega}$

$$v(z) := G(x,z), \quad w(z) := G(y,z).$$

Olkoon $0 < \varepsilon < \min\{|x-y|/3, d(x,\partial\Omega), d(y,\partial\Omega)\}$, jossa $d(x,\partial\Omega)$ on pisteen x etäisyys joukon Ω reunasta. Tutkitaan integraalia

$$\int_{\Omega\setminus(B(x,\varepsilon)\cup B(y,\varepsilon))} (v(z)\Delta w(z) - w(z)\Delta v(z))\ \mathrm{d}z.$$

Määritelmän 4.3 nojalla $\Delta v(z) = 0$ ja $\Delta w(z) = 0$ kun $x, y \neq z$. Täten tutkittava integraali on nolla. Soveltamalla tähän Greenin kolmatta lausetta (1.7) saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega\setminus(B(x,\varepsilon)\cup B(y,\varepsilon))} (v(z)\Delta w(z) - w(z)\Delta v(z))\ \mathrm{d}z \\
&= \int_{\partial(\Omega\setminus(B(x,\varepsilon)\cup B(y,\varepsilon)))} \left(v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma)w(\sigma)\right)\ \mathrm{d}S(\sigma).
\end{aligned}$$

Integroitava joukko voidaan purkaa auki seuraavasti:

$$\partial(\Omega \setminus (B(x,\varepsilon) \cup B(y,\varepsilon))) = \partial\Omega \cup \partial B(x,\varepsilon) \cup \partial B(y,\varepsilon)$$

Täten integraali voidaan jakaa kolmeen osaan.

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial(\Omega\setminus B(x,\varepsilon)\cup B(y,\varepsilon))} \left(v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma)w(\sigma)\right)\ \mathrm{d}S(\sigma) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma)w(\sigma)\right)\ \mathrm{d}S(\sigma) \\
&\quad + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma)w(\sigma)\right)\ \mathrm{d}S(\sigma) \\
&\quad + \int_{\partial B(y,\varepsilon)} \left(v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma)w(\sigma)\right)\ \mathrm{d}S(\sigma).
\end{aligned}$$

Huomautuksen 4.4 nojalla $v(\sigma), w(\sigma) = 0$ kun $\sigma \in \partial\Omega$. Täten

$$\int_{\partial\Omega} \left(v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma)w(\sigma) \right) \,\mathrm{d}S(\sigma) = 0.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}&\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(-v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) + \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma)w(\sigma) \right) \,\mathrm{d}S(\sigma)\\ &= \int_{\partial B(y,\varepsilon)} \left(v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma)w(\sigma) \right) \,\mathrm{d}S(\sigma).\end{aligned}$$

Nämä integraalit voidaan vielä jakaa kahteen osaan ja tutkitaan ensiksi itseisarvoisesti integraalia

$$\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} -v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) \,\mathrm{d}S(\sigma) \right|.$$

Funktiosta $|v(\sigma)|$ voidaan ottaa supremum pallossa $\bar{B}(x,\varepsilon)$, jolloin kolmioepäyhtälöllä saadaan

$$\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} -v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) \,\mathrm{d}S(\sigma) \right| \leq \sup_{\sigma \in \bar{B}(x,\varepsilon)} |v(\sigma)| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left| \frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) \right| \,\mathrm{d}S(\sigma).$$

Arvioidaan jäljelle jäävää integraalia Cauchy–Schwarzin epäyhtälöllä

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left| \frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) \right| \,\mathrm{d}S(\sigma) \leq \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\nabla w(\sigma)||\nu(\sigma)| \,\mathrm{d}S(\sigma).$$

Käytetään taas tietoa, että $|\nu(\sigma)| = 1$ pallon pinnalla. Lisäksi kirjoittamalla funktio w sen määritelmän avulla saadaan

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\nabla w(\sigma)||\nu(\sigma)| \,\mathrm{d}S(\sigma) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\nabla_\sigma G(y,\sigma)| \,\mathrm{d}S(\sigma).$$

Luvun ε määrittelyehdoista

$$\varepsilon < \min\{|x-y|/3, d(x,\partial\Omega), d(y,\partial\Omega)\},$$

seuraa, että piste y ei ole suljetussa pallossa $\bar{B}(x,\varepsilon)$. Tällöin funktio $|\nabla G(y,\sigma)|$ on rajoitettu pallossa $\bar{B}(x,\varepsilon)$. Siten se voidaan tuoda integraalin eteen:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\nabla_\sigma G(y,\sigma)| \,\mathrm{d}S(\sigma) \leq \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \sup_{y \in \bar{B}(x,\varepsilon)} |\nabla_\sigma G(y,\sigma)| \,\mathrm{d}S(\sigma)\\ &\leq \sup_{y \in \bar{B}(x,\varepsilon)} |\nabla_\sigma G(y,\sigma)| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} 1 \,\mathrm{d}S(\sigma).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Jäljelle jäävän integraalin arvo saadaan Määritelmästä 1.6, jonka jälkeen valitsemalla

$$C = \sup_{y \in B(x,\varepsilon_x)} |\nabla_\sigma G(y,\sigma)| n\alpha(n)$$

saadaan seuraava arvio:

$$\sup_{y \in B(x,\varepsilon_x)} |\nabla_\sigma G(y,\sigma)| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} 1 \,\mathrm{d}S(\sigma) \leq C\varepsilon^{n-1}.$$

Yhdistämällä tämä arvioon (4.4) saadaan

$$\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma)\right| \leq \sup_{\sigma\in B(x,\varepsilon)} |v(\sigma)| C\varepsilon^{n-1},$$

joka lähestyy nollaa kun $\varepsilon \to 0$. Tutkitaan sitten toista integraalia

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma). \tag{4.5}$$

Käyttämällä tietoa $v(\sigma) = \Phi(\sigma - x) - \phi_x(\sigma)$, saadaan integraalia (4.5) muokattua seuraavasti

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial(\Phi(\sigma - x) - \phi_x(\sigma))}{\partial \nu} w(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma).$$

Tästä voidaan vielä jakaa kahdeksi integraaliksi

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial(\Phi(\sigma - x) - \phi_x(\sigma))}{\partial \nu} w(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) \\ &= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi(\sigma - x)}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \phi_x}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma), \end{aligned} \tag{4.6}$$

joista tutkitaan ensiksi jäljimmäistä integraalia

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \phi_x}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma).$$

Käyttämällä Määritelmää 1.4 voidaan tätä integraalia muokata seuraavasti:

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \phi_x}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \nabla\phi_x(\sigma)\cdot\nu(\sigma) w(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma).$$

Lisäksi funktio w on jatkuva joukossa $\bar{B}(x,\varepsilon)$, koska piste y ei kuulu tähän suljettuun palloon, vaan on sen ulkopuolella. Sovelletaan Cauchy–Schwarzin epäyhtälöä, jonka jälkeen funktion w supremum voidaan tuoda integraalin eteen

$$\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \nabla\phi_x(\sigma)\cdot\nu(\sigma) w(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma)\right| \leq \sup_{\sigma\in\bar{B}(x,\varepsilon)} |w(\sigma)| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\nabla\phi_x(\sigma)|\ \mathrm{d}S(\sigma)$$

Huomautetaan, että funktio $|\nabla\phi_x(\sigma)|$ on rajoitettu tässä pallossa $\bar{B}(x,\varepsilon)$. Siten se voidaan tuoda integraalin eteen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\nabla\phi_x(\sigma)|\ \mathrm{d}S(\sigma) &\leq \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \sup_{\sigma\in\bar{B}(x,\varepsilon)} |\nabla\phi_x(\sigma)|\ \mathrm{d}S(\sigma) \\ &\leq \sup_{\sigma\in\bar{B}(x,\varepsilon)} |\nabla\phi_x(\sigma)| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} 1\ \mathrm{d}S(\sigma). \end{aligned}$$

Jäljelle jäävän integraalin arvo saadaan Määritelmästä 1.6, jonka jälkeen valitsemalla

$$C = \sup_{\sigma\in\bar{B}(x,\varepsilon)} |\nabla\phi_x(\sigma)| n\alpha(n)$$

saadaan seuraava arvio:

$$\sup_{\sigma\in\bar{B}(x,\varepsilon)} |\nabla\phi_x(\sigma)| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} 1\ \mathrm{d}S(\sigma) \leq C\varepsilon^{n-1}.$$

Yhdistämällä tämä arvio edelliseen saadaan

$$\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\nabla \phi_x(\sigma)| w(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) \right| \leq \sup_{\sigma \in \bar{B}(x,\varepsilon)} |w(\sigma)| C \varepsilon^{n-1},$$

joka lähestyy nollaa kun $\varepsilon \to 0$.

Tutkitaan seuraavaksi yhtälön (4.6) ensimmäistä integraalia. Tässä integraalissa normaaliderivaatta ν osoittaa pallon $B(x,\varepsilon)$ keskelle, mikä johtaa etumerkin vaihtumiseen. Koska $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x) = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x - \sigma)$, niin siirtämällä koordinaatistoa pisteeseen x saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x) w(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) &= \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x - \sigma - x) w(\sigma - x) \, \mathrm{d}S(\sigma) \\ &= \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(-\sigma) w(\sigma - x) \, \mathrm{d}S(\sigma). \end{aligned}$$

Tästä perusratkaisun normiriippuvuuden ja kahden muuttuanvaihdon jälkeen

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(-\sigma) w(\sigma - x) \, \mathrm{d}S(\sigma) \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma) w(x - \sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma),$$

jolloin tähän käytetetään Lemmaa 3.7, jolloin raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x) w(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) = -w(x).$$

Tekemällä vastaavat arviot pallolle $B(y,\varepsilon)$ saadaan siis

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(-v(\sigma) \frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) + \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma) \right) \, \mathrm{d}S(\sigma) = -w(x)$$

ja

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B(y,\varepsilon)} \left(v(\sigma) \frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma) \right) \, \mathrm{d}S(\sigma) = -v(y),$$

jolloin siis $w(x) = v(y)$. Täten

$$G(y,x) = -w(x) = -v(y) = G(x,y).$$

Siispä Greenin funktio on symmetrinen muuttujiensa suhteen. □

Osoitetaan tässä välissä yksi hyödyllinen aputulos koskien Greenin funktion käyttäytymistä:

LEMMA 4.6. *Olkoon G Määritelmän 4.3 mukainen Greenin funktio. Olkoon lisäksi $u \in C^2(\Omega) \cup C(\partial\Omega)$. Tällöin pätee:*

$$\begin{aligned} &-\int_{\partial\Omega} u(\sigma) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) + \int_{\Omega} \Delta u(y) \phi_x(y) \, \mathrm{d}y \\ &\qquad = \int_{\partial\Omega} \Phi(\sigma - x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x) \, \mathrm{d}S(\sigma). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Todistus. Tutkitaan seuraavaa integraalien erotusta:

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x)\, \mathrm{d}S(\sigma). \tag{4.8}$$

Käyttämällä Määritelmää 4.1 saadaan seuraava yhtäsuuruus:

$$\int_\Omega -\Delta u(y)\phi_x(y)\, \mathrm{d}y = \int_\Omega (\Delta\phi_x(y)u(y) - \Delta u(y)\phi_x(y))\, \mathrm{d}y$$

Tähän voidaan soveltaa Greenin lausetta (1.7) jolloin saadaan

$$\int_\Omega (\Delta\phi_x(y)u(y) - \Delta u(y)\phi_x(y))\, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \left(u(\sigma)\frac{\partial \phi_x}{\partial \nu}(\sigma) - \phi_x(\sigma)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\right) \mathrm{d}S(\sigma)$$
$$= \int_{\partial\Omega} \left(u(\sigma)\frac{\partial \phi_x}{\partial \nu}(\sigma) - \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\right) \mathrm{d}S(\sigma).$$

Tällöin siis

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(u(\sigma)\frac{\partial \phi_x}{\partial \nu}(\sigma) - \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\right) \mathrm{d}S(\sigma) + \int_\Omega \Delta u(y)\phi_x(y)\, \mathrm{d}y.$$

Tämä yhtäsuuruus voidaan nyt lisätä lausekkeeseen (4.8) muuttamatta sen arvoa, jolloin saadaan:

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x)\, \mathrm{d}S(\sigma)$$
$$= \int_{\partial\Omega} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x)\, \mathrm{d}S(\sigma)$$
$$+ \int_{\partial\Omega} \left(u(\sigma)\frac{\partial \phi_x}{\partial \nu}(\sigma) - \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\right) \mathrm{d}S(\sigma) + \int_\Omega \Delta u(y)\phi_x(y)\, \mathrm{d}y$$
$$= \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) - u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x) + u(\sigma)\frac{\partial \phi_x}{\partial \nu}(\sigma) - \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\right) \mathrm{d}S(\sigma)$$
$$+ \int_\Omega \Delta u(y)\phi_x(y)\, \mathrm{d}y$$
$$= \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) - \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) - u(\sigma)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x) - \frac{\partial \phi_x}{\partial \nu}(\sigma)\right)\right) \mathrm{d}S(\sigma)$$
$$+ \int_\Omega \Delta u(y)\phi_x(y)\, \mathrm{d}y$$
$$= -\int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial(\Phi(\sigma - x) - \phi_x(\sigma))}{\partial \nu}\, \mathrm{d}S(\sigma) + \int_\Omega \Delta u(y)\phi_x(y)\, \mathrm{d}y$$

Tähän voidaan sijoittaa Määritelmän 4.3 mukainen Greenin funktio jolloin saadaan

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x)\, \mathrm{d}S(\sigma)$$
$$= -\int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, \sigma)\, \mathrm{d}S(\sigma) + \int_\Omega \Delta u(y)\phi_x(y)\, \mathrm{d}y.$$

$\square$

4.2. Dirichletin ongelma Laplacen yhtälölle

Esitellään tässä kappaleessa Dirichletin ongelma Laplacen yhtälölle. Dirichletin ongelmassa etsittävää funktiota u kontrolloidaan myös joukon reunalla, toisin sanoen differentiaaliyhtälölle annetaan reunaehtoja:

MÄÄRITELMÄ 4.7. Olkoon Ω avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu osajoukko siten, että $\partial\Omega$ on C^1-säännöllinen. Olkoon funktio g jatkuva joukon Ω reunalla. Tällöin Dirichletin ongelmaksi Laplacen yhtälölle joukossa Ω kutsutaan reuna-arvoyhtälöä

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{kaikilla } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.9}$$

missä tuntematon funktio $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

Laplacen yhtälön ratkaisufunktio u voidaan esittää Greenin funktion avulla seuraavasti:

LAUSE 4.8. *Olkoon $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, joka toteuttaa yhtälön (4.9). Tällöin u on muotoa*

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(\sigma)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) \tag{4.10}$$

kaikilla $x \in \Omega$.

TODISTUS. Olkoon $x \in \Omega$ ja olkoon $\varepsilon > 0$ siten, että $B(x, 2\varepsilon) \subset \Omega$. Olkoon myös $y \in \Omega$. Tällöin käyttämällä Greenin kolmatta lausetta (1.7) seuraavaan integraaliin saadaan

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\setminus B(x,\varepsilon)} (u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y))\ \mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial(\Omega\setminus B(x,\varepsilon))} u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x)\ \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\partial(\Omega\setminus B(x,\varepsilon))} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma). \end{aligned}$$

Havaitaan että $\partial(\Omega \setminus B(x,\varepsilon)) = \partial\Omega \cup \partial B(x,\varepsilon)$. Tällöin edellinen integraali voidaan pilkkoa neljäksi integraaliksi seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(\Omega\setminus B(x,\varepsilon))} u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x) - \int_{\partial(\Omega\setminus B(x,\varepsilon))} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) \\ &= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x)\ \mathrm{d}S(\sigma) + \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x)\ \mathrm{d}S(\sigma) \\ &\quad - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\partial\Omega} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma). \end{aligned}$$

Merkitään näitä integraaleja I_1, I_2, I_3, I_4 vastaavassa järjestyksessä ilman etumerkkejä. Huomataan, että integraalia I_3 voidaan arvioida seuraavasti:

$$\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma)\right| \leq \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\Phi(\sigma - x)||\nabla u(\sigma)||\nu(\sigma)|\ \mathrm{d}S(\sigma).$$

Tästä voidaan ottaa funktion u gradientin supremum, koska gradientti on rajoitettu pallossa $\bar{B}_x := \overline{B}(x, d(x,\partial\Omega)/2)$ jolloin supremum on äärellinen. Käyttämällä lisäksi

Lemmaa 3.5 ja tietoa, että $|\nu(\sigma)| = 1$ pallon pinnalla saadaan

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\Phi(\sigma - x)||\nabla u(\sigma)||\nu(\sigma)| \, \mathrm{d}S(\sigma) \leq \sup_{\sigma \in \bar{B}_x} |\nabla u(\sigma)| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\Phi(\sigma - x)| \, \mathrm{d}S(\sigma)$$
$$\leq \begin{cases} \sup_{\sigma \in \bar{B}_x} |\nabla u(\sigma)| C\varepsilon |\log \varepsilon|, & \text{kun } n = 2 \\ \sup_{\sigma \in \bar{B}_x} |\nabla u(\sigma)| C\varepsilon, & \text{kun } n \geq 3 \end{cases},$$

joillekin vakioille C. Tästä seuraa se, että kun $\varepsilon \to 0$, niin integraali I_3 lähestyy nollaa. Havaitaan, että integraali I_1 on Lemman 3.7 mukainen, jolloin siitä saadaan

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(\sigma) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x) \, \mathrm{d}S(\sigma) \to u(x),$$

kun $\varepsilon \to 0$. Näistä saadaan, että kun $\varepsilon \to 0$, niin

(4.11)
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus B(x,\varepsilon)} (u(y)\Delta\Phi(y - x) - \Phi(y - x)\Delta u(y)) \, \mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon \to 0} I_1 + I_2 - \lim_{\varepsilon \to 0} I_3 - I_4$$
$$= u(x) + I_2 - I_4$$

Nyt muistetaan, että Φ on Laplacen yhtälön perusratkaisu, jolloin $\Delta\Phi(y - x) = 0$ kaikille $y \neq x$. Lisäksi oletuksen nojalla u toteuttaa Laplacen yhtälön joukossa Ω, joten $\Delta u(y) = 0$. Tällöin siis

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus B(x,\varepsilon)} (u(y)\Delta\Phi(y - x) - \Phi(y - x)\Delta u(y)) \, \mathrm{d}y = u(x) - I_4 + I_2.$$

Termejä siirtämällä saadaan

$$\begin{aligned} u(x) &= I_4 - I_2 \\ &= \int_{\partial\Omega} \Phi(\sigma - x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x) \, \mathrm{d}S(\sigma). \end{aligned}$$

Käyttämällä Lemmaa 4.6 ja oletusta, että u toteuttaa Dirichletin ongelman Laplacen yhtälölle eli $u(x) = g(x)$ joukon Ω reunalla ja $\Delta u(x) = 0$ kaikilla $x \in \Omega$, niin saadaan

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(\sigma) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, \sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma).$$

Siispä funktio u, joka toteuttaa Dirichletin ongelman Laplacen yhtälölle 4.7 on halutua muotoa. □

Huomautus 4.9. Jos yhtälössä (4.9) reuna-arvot määrittelevä funktio $g(x) = 0$ kaikilla $x \in \partial\Omega$, niin tällöin myös ratkaisufunktio u on nollafunktio sillä

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_{\partial\Omega} g(\sigma) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, \sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) \\ &= -\int_{\partial\Omega} 0 \cdot \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, \sigma) \, \mathrm{d}S(\sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \Omega$.

4.3. Dirichletin ongelma Poissonin yhtälölle

Yleistetään edellisessä luvussa käsitelty Dirichletin ongelma koskemaan myös Poissonin yhtälöä, joka on Laplacen yhtälön yleistys.

MÄÄRITELMÄ 4.10. Olkoon Ω avaruuden $\mathbb{R}^n$ jokin avoin ja rajoitettu osajoukko siten, että $\partial\Omega$ on C^1-säännöllinen. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ annettu $C^2(\Omega) \cup C(\overline{\Omega})$-funktio ja g jatkuva joukon Ω reunalla. Tällöin Dirichletin ongelmaksi Poissonin yhtälölle joukossa Ω kutsutaan osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{kaikilla } x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{kaikilla } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.12}$$

jollekin funktiolle $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

Esitellään seuraavaksi ratkaisufunktio u, joka on yhtälön (4.12) ratkaisu. Tässä hyödynnetään vastaavaa ratkaisufunktiota Dirichletin ongelmalle Laplacen yhtälölle:

LAUSE 4.11. *Olkoon $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, joka toteuttaa Määritelmän 4.10. Tällöin u on muotoa*

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(\sigma)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) + \int_{\Omega} f(y)G(x,y)\ \mathrm{d}y \tag{4.13}$$

kaikilla $x \in \Omega$.

TODISTUS. Olkoon $x \in \Omega$ ja olkoon $\varepsilon > 0$ siten, että $B(x, 2\varepsilon) \subset \Omega$. Olkoon myös $y \in \overline{\Omega}$. Hyödynnetään nyt yhtälöä (4.11), jossa siis

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega\setminus B(x,\varepsilon)} (u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y))\ \mathrm{d}y = u(x) - I_4 + I_2,$$

jossa integraalit I_2 ja I_4 ovat

$$I_2 = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x)\ \mathrm{d}S(\sigma)$$
$$I_4 = \int_{\partial\Omega} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma).$$

Käytetään tietoa, että Φ on Laplacen yhtälön perusratkaisu, jolloin $\Delta\Phi(y-x) = 0$ kaikille $y \neq x$. Termejä siirtämällä saadaan

$$\begin{aligned} u(x) &= I_4 - I_2 - \int_{\Omega} \Phi(y-x)\Delta u(y)\ \mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial\Omega} \Phi(\sigma - x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma - x)\ \mathrm{d}S(\sigma) \\ &\quad - \int_{\Omega} \Phi(y-x)\Delta u(y)\ \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Tähän voidaan nyt käyttää Lemmaa 4.6, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} u(x) = &- \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) \\ &- \int_{\Omega} \Phi(y-x)\Delta u(y)\ \mathrm{d}y + \int_{\Omega} \Delta u(y)\phi_x(y)\ \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Tästä yhdistämällä integraalit yli joukon Ω saadaan

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\Omega} \left(\Phi(y-x)\Delta u(y) - \Delta u(y)\phi_x(y)\right)\ \mathrm{d}y \\ &= -\int_{\partial\Omega} u(\sigma)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) - \int_{\Omega} \Delta u(y)\left(\Phi(y-x) - \phi_x(y)\right)\ \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tähän Määritelmän 4.3 mukainen Greenin funktio ja käytetään funktion u oletuksia $u(x) = g(x)$ joukon Ω reunalla ja $\Delta u(x) = -f(x)$ joukossa Ω. Täten

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(\sigma)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\sigma)\ \mathrm{d}S(\sigma) + \int_{\Omega} f(y)G(x,y)\ \mathrm{d}y.$$

Siispä funktio u, joka toteuttaa reuna-arvo-ongelman 4.10 on haluttua muotoa. $\square$

LUKU 5

Greenin funktio erityistapauksissa

Tässä luvussa määritetään Greenin funktiot puoliavaruudessa ja yksikköpallossa. Esitetään tämän jälkeen konkreettiset ratkaisukaavat Poissonin yhtälölle. Luku pohjautuu Evansin kirjan [**1**] lukuun 2.2.4 ja lisäksi Juha Kinnusen tekemään luentomonisteeseen [**2**].

5.1. Greenin funktio yksikköpallossa

Tutkitaan tässä kappaleessa Greenin funktiota yksikköpallossa $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Tehdään tämä heijastusmenetelmän avulla, jossa siis ongelmalliset pisteet heijastetaan pois tutkittavasta alueesta. Tätä varten määritellään pisteen x heijastus:

MÄÄRITELMÄ 5.1. Olkoon $x \in B(0,1), x \neq 0$. Tällöin sen heijastus joukosta $B(0,1)$ on

$$\hat{x} = \frac{x}{|x|^2}. \tag{5.1}$$

Erityisesti pätee, että $\hat{x} \notin B(0,1)$ kaikilla $x \in B(0,1)$.

Oletetaan jatkossa, että $n \geq 3$, sillä tapaus $n = 2$ on analoginen. Osoitetaan seuraavaksi, että korjausfunktio voidaan määritellä myös origoon, huolimatta sen ongelmallisuudesta.

LEMMA 5.2. *Olkoon $y \in B(0,1) \setminus \{0\}$ ja olkoon Φ Laplacen yhtälön perusratkaisu. Tällöin*

$$\lim_{x \to 0} \Phi(|x|(y - \hat{x})) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}. \tag{5.2}$$

TODISTUS. Olkoon $y \in B(0,1) \setminus \{0\}$. Muokataan funktiota $\Phi(|x|(y-\hat{x}))$ käyttäen hyväksi kaavaa (5.1) jolloin saadaan

$$\Phi(|x|(y - \hat{x})) = \Phi(|x|(y - \frac{x}{|x|^2})) = \Phi(|x|y - \frac{x}{|x|}).$$

Tutkitaan seuraavaksi tämän raja-arvoa kun $x \to 0$. Käyttäen tietoa $|\frac{x}{|x|}| = 1$ saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \Phi(|x|(y - \hat{x})) &= \lim_{x \to 0} \Phi(|x|y - \frac{x}{|x|}) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{||x|y - \frac{x}{|x|}|^{n-2}} \\
&= \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot 1 = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}.
\end{aligned}$$

□

Esitellään seuraavaksi kaksi lemmaa.

LEMMA 5.3. *Olkoon $x \in \overline{B}(0,1), x \neq 0$ ja olkoon $\hat{x}$ pisteen x heijastus. Tällöin funktio $\Phi(|x|(y-\hat{x}))$ on harmoninen avoimessa joukossa $B(0,1)$ muuttujan y suhteen.*

TODISTUS. Olkoon $x \in \overline{B}(0,1), x \neq 0$ ja $y \in B(0,1)$. Nyt Määritelmän 5.1 nojalla $\hat{x} \notin B(0,1)$. Erityisesti siis $y \neq \hat{x}$, mistä seuraa $y - \hat{x} \neq 0$. Tällöin on oltava myös $|x|(y-\hat{x}) \neq 0$, sillä $x \neq 0$, mistä saadaan Lauseen 3.3 nojalla

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi(|x|(y-\hat{x})) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_i \partial y_i}(|x|(y-\hat{x})) \left(\frac{\partial(|x|(y-\hat{x}))}{\partial y_i}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_i \partial y_i}(|x|(y-\hat{x})) \cdot |x|^2\right) \\
&= |x|^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_i \partial y_i}(|x|(y-\hat{x})) = |x|^2 \Delta\Phi(|x|(y-\hat{x})) = 0.
\end{aligned}$$

Tällöin Määritelmän 2.1 nojalla tarkasteltava funktio on harmoninen. □

Seuraava lemma on hyödyllinen tehtäessä tarkasteluita yksikköpallon reunalla.

LEMMA 5.4. *Olkoon $x \in B(0,1), x \neq 0$ ja $\hat{x}$ sen heijastus. Olkoon lisäksi $y \in \partial B(0,1)$. Tällöin pätee*

$$|x||y-\hat{x}| = |y-x|. \tag{5.3}$$

TODISTUS. Olkoon $x \in B(0,1), x \neq 0$ ja $\hat{x}$ Määritelmän 5.1 mukainen heijastus. Olkoon lisäksi $y \in \partial B(0,1)$, jolloin $y \cdot y = |y|^2 = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|x|^2|y-\hat{x}|^2 &= |x|^2 \left(\left(y - \frac{x}{|x|^2}\right) \cdot \left(y - \frac{x}{|x|^2}\right)\right) \\
&= |x|^2 \left(y \cdot y + \frac{x}{|x|^2} \cdot \frac{x}{|x|^2} - \frac{2x \cdot y}{|x|^2}\right) \\
&= |x|^2 \left(1 + \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x \cdot y}{|x|^2}\right) \\
&= |x|^2 + 1 - 2x \cdot y = (y-x) \cdot (y-x) = |y-x|^2.
\end{aligned}$$

Koska vektorin normi on positiivinen, niin ottamalla tästä neliöjuuri saadaan haluttu yhtäsuuruus. □

Määritellään seuraavaksi korjausfunktio yksikköpallolle, joka on määritelty koko yksikköpallossa käyttäen hyväksi Lemmaa 5.2.

LAUSE 5.5. *Olkoon $x \in B(0,1), x \neq 0$ ja $\hat{x}$ sen heijastus. Olkoon Φ Laplacen yhtälön perusratkaisu. Tällöin korjausfunktio yksikköpallolle on*

$$\phi_x(y) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}, & \textit{kun } x = 0 \\ \Phi(|x|(y-\hat{x})), & \textit{muutoin.} \end{cases} \tag{5.4}$$

kaikilla $y \in \bar{B}(0,1)$. *Lisäksi* ϕ_x *toteuttaa korjausfunktiolle asetetun reuna-arvoyhtälön*

$$\begin{cases} \Delta\phi_x(y) = 0, & \textit{kun } y \in B(0,1) \\ \phi_x(y) = \Phi(y-x), & \textit{kun } y \in \partial B(0,1). \end{cases} \tag{5.5}$$

kaikilla $x \in B(0,1)$.

Todistus. Tutkitaan ensiksi tapausta $y \in B(0,1)$. Lemman 5.3 nojalla korjausfunktio $\phi_x(y)$ on harmoninen joukossa $B(0,1)$, kunhan $x \neq 0$, jolloin se toteuttaa Laplacen yhtälön. Tapaus $x = 0$ ohitetaan, sillä se johtaa teknisiin, muttei olennaisiin yksityiskohtiin. Reunan tapauksessa käytetään Lemmaa 5.4, jonka nojalla

$$\phi_x(y) = \Phi(|x|(y - \hat{x})) = \Phi(y - x),$$

kun $y \in \partial B(0,1)$. Siten korjausfunktio on hyvin määritelty ja kelpaa yksikköpallon korjausfunktioksi yksikköpallossa. □

Täten Greenin funktio voidaan määritellä joukkoon $B(0,1)$ korjausfunktion avulla seuraavasti:

Lause 5.6. *Olkoon* $x, y \in B(0,1)$. *Tällöin Greenin funktio avaruuden* $\mathbb{R}^n$ *yksikköpallolle* $B(0,1)$ *on muotoa*

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi_x(y) \tag{5.6}$$

kaikilla $x \neq y$.

Todistus. Koska yksikköpallo on rajoitettu ja sen reuna on C^1-säännöllinen ja korjausfunktio (5.4) on tutkittavan joukon korjausfunktio, niin kaava (5.6) on yksikköpallon Greenin funktio. □

Lemma 5.7. *Olkoon* G *yksikköpallon Greenin funktio ja* ν *yksikköpallosta ulospäin osoittava normaalivektori. Tällöin Greenin funktion normaaliderivaatta muuttujan* y *suhteen on*

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}, \tag{5.7}$$

kaikilla $x \in \overline{B}(0,1), y \in \partial B(0,1), x \neq y$.

Todistus. Olkoon $x \in B(0,1), x \neq 0$ ja $y \in \partial B(0,1)$. Tällöin Määritelmän 1.4 ja Huomatuksen 1.3 nojalla voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \nabla_y G(x,y) \cdot \nu(y) = \nabla_y G(x,y) \cdot \frac{y}{|y|}. \tag{5.8}$$

Lasketaan seuraavaksi Greenin funktion osittaisderivaatat $\nabla_y G(x, y)$ käyttäen Lemmaa 5.4:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(y-x) - \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\Phi(|x|(y-\hat{x}))\right)\\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)}\left(\frac{1}{|y-x|^{n-1}}\frac{y_j-x_j}{|y-x|} - \frac{1}{||x||y-\hat{x}||^{n-1}}\frac{|x|(y_j-\hat{x}_j)}{|x||y-\hat{x}|}|x|\right)\\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)}\left(\frac{y_j-x_j}{|y-x|^n} - \frac{|x|^2 y_j - x_j}{|y-x|^n}\right)\\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)}\left(\frac{y_j-x_j}{|y-x|^n} - \frac{|x|^2 y_j - x_j}{|y-x|^n}\right) = -\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}y_j,\end{aligned}$$

kaikilla $j = 1, \ldots, n$. Muodostamalla näistä osittaisderivaatoista gradienttivektori saadaan

$$\nabla_y G(x,y) = -\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}y, \tag{5.9}$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöön (5.8) sekä käyttämällä tietoa $y \cdot y = |y|^2 = 1$ pallon pinnalla saadaan

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\nu}(x,y) = -\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}y \cdot \frac{y}{|y|} = -\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}. \tag{5.10}$$

□

Seuraavaksi voidaan esitellä Laplacen ja Poissonin yhtälöiden konkreettiset ratkaisufunktiot Lauseiden 4.8 ja 4.11 mukaisesti yksikköpallolle. Tutkitaan ensiksi reuna-arvo-ongelmaa (4.7) ja esitellään sille ratkaisufunktio.

LAUSE 5.8. *Olkoon $B(0,1)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallo. Olkoon funktio g jatkuva yksikköpallon reunalla ja $u \in C^2(B(0,1)) \cup C(\overline{B}(0,1))$. Tällöin ratkaisufunktio reuna-arvoyhtälölle*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \textit{kaikilla } x \in B(0,1) \\ u(x) = g(x) & \textit{kaikilla } x \in \partial B(0,1), \end{cases} \tag{5.11}$$

on muotoa

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)} \frac{g(\sigma)}{|\sigma - x|^n}\,\mathrm{d}S(\sigma) \tag{5.12}$$

kaikilla $x \in B(0,1)$.

TODISTUS. Koska yksikköpallo on rajoitettu ja yhtälö (5.12) on Lauseen 4.8 mukainen, niin sen nojalla funktio u todellakin on reuna-arvoyhtälön (5.11) ratkaisu. Ratkaisu saadaan haluttuun muotoon käyttämällä Lemmaa 5.7. □

Tutkitaan seuraavaksi millainen on vastaava ratkaisukaava Poissonin yhtälölle.

LAUSE 5.9. *Olkoon $B(0,1)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallo. Olkoon funktio g jatkuva yksikköpallon reunalla ja funktio $u \in C^2(B(0,1)) \cup C(\overline{B}(0,1))$. Tällöin ratkaisufunktio* *reuna-arvo-yhtälölle*

$$
\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \textit{kaikilla } x \in B(0,1) \\ u(x) = g(x) & \textit{kaikilla } x \in \partial B(0,1), \end{cases} \tag{5.13}
$$

on muotoa

$$
\begin{aligned} u(x) = {} & \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(\sigma)}{|\sigma - x|^n} \, \mathrm{d}S(\sigma) + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_\Omega \frac{f(y)}{|y-x|^{n-2}} \, \mathrm{d}y \\ & - \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_\Omega \frac{f(y)}{|y-\hat{x}|^{n-2}} \, \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5.14}
$$

kaikilla $x \in B(0,1), x \neq 0$.

Todistus. Olkoon $x \in B(0,1), x \neq 0$. Kirjoittamalla perusratkaisu Φ auki yhtälössä (5.4) saadaan

$$
\begin{aligned} \phi_x(y) = \Phi(|x|(y-\hat{x})) &= \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{(|x||y-\hat{x}|)^{n-2}} \\ &= \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|y-\hat{x}|^{n-2}} = \frac{1}{|x|^{n-2}} \Phi(y-\hat{x}). \end{aligned} \tag{5.15}
$$

Koska yksikköpallo on rajoitettu ja kaikki käsitelty tieto perustuu Lauseeseen 4.11, niin sen nojalla funktio u todellakin on Poissonin yhtälön ratkaisu. Ratkaisun muoto seuraa laskusta (5.15). □

5.2. Greenin funktio puoliavaruudessa

Tutkitaan tässä kappaleessa Greenin funktiota ylemmässä puoliavaruudessa

$$
\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\},
$$

$n \in \mathbb{N}$. On syytä huomauttaa, että tämä puoliavaruus ei ole rajoitettu, joten aiempien lukujen laskut eivät aivan suoraan sovellu tähän tapaukseen, mutta samoja ideoita voidaan käyttää. Määritellään ensiksi pisteen heijastus ylemmältä puoliavaruudelta sen reunan ylitse.

Määritelmä 5.10. Olkoon $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Tällöin sen heijastus joukosta $\mathbb{R}^n_+$ on

$$
\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n).
$$

Erityisesti huomataan, että $\tilde{x} \notin \mathbb{R}^n_+$.

Yksi Greenin funktion kriittisistä kohdista Määritelmän 4.1 mukainen korjausfunktio ja ensimmäiseksi onkin luotava tämän yhtälön (4.1) toteuttava funktio. Hyödynnetään tähän Laplacen yhtälön perusratkaisua Φ ja heijastusta $\tilde{x}$. Määritellään seuraavaksi korjausfunktio puoliavaruudelle $\mathbb{R}^n_+$:

Lause 5.11. *Olkoon* $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ *ja* $\tilde{x}$ *pisteen* x *heijastus. Tällöin korjausfunktio puoliavaruudelle* $\mathbb{R}^n_+$ *on*

$$
\phi_x(y) = \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n). \tag{5.16}
$$

Lisäksi $\phi_x(y)$ *toteuttaa korjausfunktiolta vaaditun reuna-arvo-ongelman* (4.1) *eli*

$$\begin{cases} \Delta\phi_x(y) = 0, & \textit{kun } y \in \mathbb{R}^n_+ \\ \phi_x(y) = \Phi(y-x), & \textit{kun } y \in \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{5.17}$$

TODISTUS. Olkoon $y \in \mathbb{R}^n_+$ ja $\tilde{x}$ kuten Määritelmässä 5.10. Tällöin erityisesti $y \neq \tilde{x}$ ja siten $y - \tilde{x} \neq 0$. Tällöin Lauseen 3.3 nojalla $\Delta\Phi(y - \tilde{x}) = 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}^n_+$, jolloin Määritelmän 2.1 nojalla korjausfunktio on harmoninen. Lisäksi jos yhtälössä (5.16) onkin $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ niin tällöin saadaan

$$\phi_x(y) = \Phi(y-\tilde{x}) = \Phi(y-x).$$

Tämä seuraa perusratkaisun Φ radiaalisuudesta, sillä $|y-\tilde{x}| = |y-x|$ ja täten reunaehto on täytetty. □

Määritellään seuraavaksi Greenin funktio puoliavaruudelle $\mathbb{R}^n_+$ hyödyntäen korjausfunktiota (5.16).

MÄÄRITELMÄ 5.12. Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ ja $\tilde{x}$ pisteen x heijastus. Greenin funktio puoliavaruudessa $\mathbb{R}^n_+$ on

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}) \tag{5.18}$$

kaikilla $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^n_+, x \neq y$.

LEMMA 5.13. *Olkoon* $x \in \mathbb{R}^n_+$ *ja* $\tilde{x}$ *pisteen* x *heijastus sekä* $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$. *Olkoon* G *puoliavaruuden Greenin funktio ja tällöin sen normaaliderivaatta muuttujan* y *suhteen on*

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^n} \tag{5.19}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n_+$ *ja* $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$.

TODISTUS. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n_+$ ja olkoon $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Nyt normaaliderivaatta ν on yksikkövektori $e = (0, \dots, -1)$. Tällöin voidaan yhtälössä (5.19) käyttäen Määritelmää 1.4 kirjoittaa

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \nabla_y G(x,y) \cdot \nu(y) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y). \tag{5.20}$$

Lasketaan seuraavaksi Greenin funktion osittaisderivaatta $\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y)$ ja käytetään tässä tietoa $|y-\tilde{x}| = |y-x|$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y-x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y-\tilde{x}) = \frac{1}{n\alpha(n)}\left(-\frac{y_n - x_n}{|y-x|^n} + \frac{y_n + x_n}{|y-\tilde{x}|^n}\right) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)}\left(\frac{-y_n + x_n}{|y-x|^n} + \frac{y_n + x_n}{|y-x|^n}\right) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^n}. \end{aligned}$$

□

Seuraavaksi voidaan esitellä konkreettiset ratkaisukaavat Dirichletin ongelmaan Laplacen ja Poissonin yhtälöille, kun tutkittavana joukkona on puoliavaruus $\mathbb{R}^n_+$. Esitellään ensiksi Laplacen yhtälölle ratkaisukaava mukaillen Lausetta 4.7:

LAUSE 5.14. *Olkoon $\mathbb{R}^n_+$ tutkittava puoliavaruus. Olkoon funktio g jatkuva sen reunalla. Tällöin ratkaisufunktio reuna-arvo-yhtälölle*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \textit{kaikilla } x \in \mathbb{R}^n_+ \\ u(x) = g(x) & \textit{kaikilla } x \in \partial\mathbb{R}^n_+, \end{cases} \tag{5.21}$$

on muotoa

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\sigma)}{|x-y|^n} \, \mathrm{d}S(\sigma) \tag{5.22}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Seuraava lause kertoo millainen on vastaava ratkaisufunktio Poissonin yhtälölle mukaillen Lausetta 4.11.

LAUSE 5.15. *Olkoon $\mathbb{R}^n_+$ tutkittava puoliavaruus. Olkoon funktio g jatkuva joukon $\mathbb{R}^n_+$ reunalla ja funktio $f \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cup C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Tällöin ratkaisufunktio reuna-arvo-yhtälölle*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \textit{kaikilla } x \in \mathbb{R}^n_+ \\ u(x) = g(x) & \textit{kaikilla } x \in \partial\mathbb{R}^n_+, \end{cases} \tag{5.23}$$

on muotoa

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\sigma)}{|x-y|^n} \, \mathrm{d}S(\sigma) + \int_\Omega f(y)(\Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})) \, \mathrm{d}y \tag{5.24}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n_+$.

TODISTUS. Vaikka nämä kaksi tulosta pohjautuvatkin aiemmissa luvuissa esitettyihin tuloksiin, niin ei näiden tulosten oletukset ole enää voimassa. Tästä johtuen tulee uusien tulosten toimivuus todentaa laskemalla. Tämä johtaa samankaltaisiin laskuihin kuin Lauseissa 4.7 ja 4.11, joten todistus sivuutetaan. $\square$

LIITE A

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
Ω	Avoin $\mathbb{R}^n$:n osajoukko.
$C(\Omega)$	Jatkuvat funktiot joukossa Ω.
$C^k(\Omega)$	k-kertaa jatkuvasti derivoituvat funktiot joukossa Ω.
$C_0^1(\Omega)$	Funktiot $f \in C^1(\Omega)$, joiden kantaja on kompakti Ω:n osajoukko.
$C^2(\Omega)$	Kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvat funktiot joukossa Ω.
$C_0^2(\Omega)$	Funktiot $f \in C^2(\Omega)$, joiden kantaja on kompakti Ω osajoukko.
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	Funktion $f \in C^1(\Omega)$ osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$	Funktion $f \in C^2(\Omega)$ toinen osittaisderivaatta muuttujien x_i ja x_j suhteen.
$\mathcal{X}_{B(0,R)}(y)$	Funktio, joka saa arvon 1, jos $y \in B(0,R)$, muutoin arvon 0.
S	Pintamitta.
$\alpha(n)$	Yksikköpallon tilavuus avaruudessa $\mathbb{R}^n$.
Δf	$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$
$\lvert x-y \rvert$	Vektoreiden x ja y etäisyys.
$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x)$	Funktion G normaaliderivaatta.
$d(x,E)$	Vektorin x etäisyys joukosta E.

Kirjallisuutta

[1] Lawrence C. Evans: *Partial Differential Equations 2nd Edition.* American Mathematical Society, 2010.

[2] Juha Kinnunen: *Partial Differential Equations.* Department of Mathematics and Systems Analysis, Aalto University, 2017.

[3] Randall D. Knight: *Physics for Scientists and Engineers: A strategic approach with modern physics. Third Edition.* Pearson Education Limited, 2014.

[4] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis. 3rd Edition.* WCB/McGraw-Hill, 1987.

[5] Michael Spivak: *Calculus. Third Edition.* Cambridge University Press, 1994.