

Kvaterniot ja niiden yhteys avaruuden rotaatioihin

Veronika Kunttu

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: Veronika Kunttu, *Kvaterniot ja niiden yhteys avaruuden rotaatioihin* (engl. *Quaternions and their connection to Spatial Rotations*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 51 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tämän tutkielman tarkoituksena on näyttää, kuinka kolmiulotteisen reaaliavaruuden rotaatiot voidaan esittää kvaternioita käyttäen. Kvaterniot mielletään kompleksilukujen joukon laajennukseksi, mistä syystä tutkielman aluksi tarkastellaan kompleksilukujen joukkoa ja kompleksilukujen yhteyttä tason kiertoihin.

Kompleksilukujen joukko \mathbb{C} koostuu kompleksiluvuista $z = a + ib$, missä luvut a ja b ovat reaalilukuja ja i on imaginaariyksikkö, jolle pätee $i^2 = -1$. Kompleksiluvut $z = a + ib$ voidaan esittää kompleksitason pisteinä (a, b) , matriiseina, vektoreina tai napakoordinaatteina $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$. Viimeisimpänä mainittu napakoordinaattiesitys mahdollistaa tason kierron R_θ esittämisen kompleksilukuina. Kaksiulotteisen reaaliavaruuden kierrossa pisteen (a, b) kiertoa origon suhteen kulman θ verran vastapäivään vastaa kiertokuvaus $R_\theta(a, b)$, joka on lineaarinen isometria.

Kun yhteys kompleksilukujen ja tason kiertojen välillä on osoitettu, on luontevaa siirtyä tarkastelemaan vastaavaa yhteyttä kvaternioiden ja avaruuden rotaatioiden välillä. Kvaternioiden joukossa on kompleksilukujen joukosta tutun imaginaariyksikön i lisäksi kaksi muuta imaginaarista yksikköä, j ja k . Kvaterniot ovat muotoa $q = a1 + bi + cj + dk$, missä luvut a, b, c ja d ovat reaalilukuja. Edelleen kvaternioiden osajoukkoja ovat puhtaiden kvaternioiden joukko $\text{Im}(\mathbb{H}) = \{bi + cj + dk : b, c, d \in \mathbb{R}\}$ sekä reaalkvaternioiden joukko $\text{Re}(\mathbb{H}) = \{a1 : a \in \mathbb{R}\}$. Puolestaan avaruuden kiertokuvaus $R_{u,\theta}$ on lineaarinen isometria, missä on kiinnitetty kiertoakseli u , jonka kohtisuorassa komplementissa tason kiertokuvaus R_θ toimii luonnollisesti tason kiertona.

E erityisen kiinnostuneita tässä tutkielmassa ollaan puhtaiden kvaternioiden konjugointikuvauksesta $\varrho_t(q) = t^{-1}qt$, sillä puhtaiden kvaternioiden konjugointi vastaa kolmiulotteisen reaaliavaruuden rotaatioita. Kvaternioita käytetään avaruuden rotaatioiden tarkastelussa, koska monimutkaisten kiertojen tarkastelu helpottuu huomattavasti kvaternioiden konjugointikuvauksen avulla. Avaruuden kierron määrittämiseksi konjugointikuvauksen avulla riittää, että tiedetään rotaation kiertoakseli u sekä kiertokulma θ , sillä kiertokulman ja -akselin avulla saadaan selville kvaterniokonjugoinnin määräävä kvaternio t .

Sisältö

| | |
|--|----|
| Johdanto | 1 |
| Luku 1. Kvaternioiden historia | 3 |
| 1.1. Lyhyt katsaus Sir William Rowan Hamiltonin elämään | 3 |
| 1.2. Kvaternioiden synty | 4 |
| Luku 2. Kompleksiluvut | 5 |
| 2.1. Kompleksiluvut ja niiden algebralliset ominaisuudet | 5 |
| 2.2. Kompleksilukujen geometrinen tulkinta | 6 |
| 2.3. Kompleksilukujen yhteys tason kiertoihin ja venytyksiin | 8 |
| 2.4. Kompleksilukujen matriisiesitys | 12 |
| Luku 3. Kvaterniot | 15 |
| 3.1. Kvaternioiden määritelmä | 15 |
| 3.2. Kvaternioiden algebralliset ominaisuudet | 18 |
| 3.3. Kvaternioiden ominaisuuksia | 22 |
| Luku 4. Kvaternioiden yhteys avaruuden rotaatioihin | 29 |
| 4.1. Avaruuden rotaatiot | 29 |
| 4.2. Kvaternioiden konjugointikuvaus | 31 |
| 4.3. Avaruuden rotaatioiden esittäminen kvaternioina | 36 |
| Liite A. Esitietoja | 45 |
| 1.1. Algebraa | 45 |
| 1.2. Matriisilaskentaa | 46 |
| 1.3. Trigonometriaa | 46 |
| 1.4. Vektorilaskentaa | 47 |
| Liite B. Merkintöjä | 49 |
| Kirjallisuutta | 51 |

Johdanto

Tässä tutkielmassa tutustutaan kvaternioihin ja erityisesti siihen, kuinka niiden avulla voidaan esittää avaruuden \mathbb{R}^3 rotaatiot. Tutkielmassa tullaan huomaamaan, kuinka paljon avaruuden kiertojen tarkastelu helpottuu kvaternioiden avulla. Nykyään kvaternioita hyödynnetäänkin esimerkiksi kolmiulotteisten kiertojen tarkastelussa tietokonegrafikan sovelluksissa. Päälähteinä tutkielmassa on käytetty R. P. Burnin kirjaa *Groups: A Path to Geometry* [1], John Stillwellin teosta *Naive Lie Theory* [11] sekä Antti Vähäkankaan luentomonistetta *Kompleksilaskenta* [12].

Kvaternioiden joukko \mathbb{H} on saanut nimensä niiden löytäjän eli irlantilaisen matemaatikko Sir William Hamiltonin mukaan [11]. Tutkielma aloitetaan kvaternioiden historiaa käsittelevällä luvulla, missä tutustutaan Hamiltonin elämään sekä kvaternioiden syntyyn. Koska kvaterniot ovat kompleksilukujen joukon laajennus, tarkastellaan historian jälkeen yhden luvun ajan kompleksilukuja. Kompleksilukuja käsittelevässä tutkielman toisessa luvussa käydään läpi ensin kompleksilukujen ominaisuuksia sekä geometristä tulkintaa. Sen jälkeen siirrytään tarkastelemaan tason kiertoja kompleksilukujen avulla ja tähän kiertokuvaukseen palataan myöhemmin myös avaruuden rotaatioiden tarkastelussa. Luvun viimeisessä aliluvussa esitellään vielä kompleksilukujen matriisiesitys.

Kolmannessa luvussa siirrytään kompleksiluvuista kvaternioiden joukkoon. Tutkielman *Kvaterniot*-luvussa tullaan huomaamaan, että monet kompleksilukujen yhteydestä tutut ominaisuudet voidaan laajentaa kvaternioille. Luvun aikana tutustutaan kvaternioiden joukkoon sekä niiden algebraan ja ominaisuuksiin. Aluksi määritellään kvaternioiden joukko, esitellään reaalkvaterniot ja puhtaat kvaterniot, sekä tarkastellaan peruskvaternioita ja niiden ominaisuuksia. Kvaternioille määritellään myös kolme esitystapaa, vektori- ja matriisiesitys sekä avaruuden \mathbb{R}^4 piste-esitys. Tässä tutkielmassa kvaternioita tarkastellaan lähinnä niiden matriisiesitystä käyttäen. Lisäksi luvun aikana osoitetaan erityisesti isomorfisuus kvaternioiden joukon \mathbb{H} ja avaruuden \mathbb{R}^4 välillä. Kolmannen luvun lopuksi näytetään, että kvaternioiden joukko on itse asiassa vektoriavaruus, sekä määritetään puhtaiden kvaternioiden sisä- ja pistetulo.

Tutkielman viimeisessä luvussa päästään tarkastelemaan avaruuden rotaatioiden ja kvaternioiden yhteyttä. Aluksi määritellään tason kiertokuvausta käyttäen kolmiulotteisen reaaliavaruuden kierrot ja tarkastellaan tätä määritelmää yksinkertaisten esimerkkien avulla. Avaruuden rotaatioista siirrytään kvaternioiden konjugointokuvaukseen ja sen ominaisuuksiin. Kvaternioiden konjugointokuvausta käsittelevän aliluvun lopuksi näytetään, että puhtaiden kvaternioiden konjugointokuvaus voidaan tulkita kolmiulotteisen reaaliavaruuden lineaarisena isometriana. Kun avaruuden rotaatiot ja kvaternioiden konjugointokuvaus on määritelty, ryhdytään tarkastelemaan tutkielman

päätulosta eli avaruuden kiertoja kvaternioiden konjugointikuvausta käyttäen. Tutkielman päätulosta varten esitetään runsaasti aputuloksia, joihin viittaamalla kvaternioiden ja avaruuden kiertojen yhteys saadaan melko lyhyesti osoitettua. Todistuksen jälkeen päätulosta havainnollistetaan muutamalla esimerkillä. Näiden esimerkkien avulla lukija saa käsityksen siitä, miten puhtaiden kvaternioiden konjugointikuvausta voidaan käytännössä hyödyntää avaruuden kiertojen tarkastelussa. Samalla esimerkkien avulla pyritään näyttämään, kuinka hyödyllinen työkalu puhtaiden kvaternioiden konjugointikuvaus on avaruuden rotaatioiden tarkastelussa.

Kvaternioiden historia

Moni matemaatikko on törmännyt tarinaan siitä, kuinka kvaterniot saivat alkunsa. Pro gradun aluksi tutustutaankin lyhyesti kvaternioiden löytäjään, Sir William Rowan Hamiltoniin, sekä yleisesti kvaternioiden historiaan. Lähteinä tässä luvussa toimivat J. H. Conwayn ja D. A. Smithin teos *On quaternions and octonions* [2, s.7–8], N. Mukundan artikkeli *Sir William Rowan Hamilton* [5, s.493–497] sekä M. Nakanen artikkeli *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton* [6, s. 514–516].

1.1. Lyhyt katsaus Sir William Rowan Hamiltonin elämään

Irlantilainen matemaatikko William Rowan Hamilton syntyi Dublinissa elokuussa 1805. Hän oli neljäs perheen yhdeksästä lapsesta. Hamilton vaikutti lapsena ikäistään kypsemmältä ja hänen lahjakkuutensa oli huomattavissa jo varhaisella iällä. Muun muassa kolmevuotiaana hän luki englantia ja viisivuotiaana ymmärsi latinaa, hepreaa ja kreikkaa. Hamiltonin tieteellisen nerouden on arveltu tulleen hänen äitinsä puolelta, sillä hänen äitinsä suvussa oli monia kuuluisia tieteilijöitä.

Hamiltonin kiinnostus matematiikkaa kohtaan heräsi 15-vuotiaana. Jo 17 vuoden ikäisenä hän oli lukenut sekä Newtonin teoksen *Principia* että Laplacen teoksen *Mécanique céleste*. Vuonna 1823 hän aloitti opintonsa Dublinin Trinityn korkeakoulussa, josta hän valmistui 1827. Opiskellessaan vielä korkeakoulussa vuonna 1824 Hamilton lähetti Irlannin kuninkaalliselle akatemialle teoksensa *On Caustics*, joka sai positiivisen vastaanoton akatemialta. Myöhemmin vuonna 1827 hän julkaisi tämän teoksen, kun oli ensin korjannut ja laajentanut sitä. Julkaisun nimeksi tuli *A Theory of Systems of Rays*, jossa hän esitteli käsityksensä optiikan ominaispiirteistä. Hamilton julkaisi vielä kolme laajennusta tälle teokselle, vuosina 1828, 1830 ja 1832.

Jo samana vuonna kun Hamilton valmistui korkeakoulusta nimitettiin hänet Trinityn korkeakoulun tähtitieteen professoriksi ja Dunsink -observatorion johtajaksi. Puolestaan vuonna 1835 hänet lyötiin ritariksi sekä vuotta myöhemmin hänestä tuli Irlannin kuninkaallisen akatemian puheenjohtaja. Yksi Hamiltonin merkittävimmistä löydöistä matematiikassa olivat kvaterniot, jotka hän löysi vuonna 1843 ja joita hän tutki intohimoisesti lopun elämäänsä. Toinen päivä syyskuuta vuonna 1865 Hamilton menehtyi kihtiin Dublinissa. Ennen kuolemaansa hän sai tietää tulleensa valituksi Yhdysvaltojen kansainvälisen tiedeakatemian jäseneksi ensimmäisenä ulkomaalaisena.

Elämänsä aikana Hamilton myötävaikuttanut merkittävästi erityisesti algebran ja teoreettisen fysiikan kehitykseen. Tyypillisesti Hamiltonin tutkimukset on luokiteltu seuraaviin aihepiireihin: geometriseen optiikkaan, analyyttiseen dynamiikkaan sekä negatiivisten lukujen, kompleksilukujen ja kvaternioiden ominaisuuksien tutkimiseen.

1.2. Kvaternioiden synty

Hamilton oli tutkinut ennen kvaternioita kompleksilukuja ja löytänyt tavan esittää kompleksiluvut reaalilukupareina. Tästä kompleksilukujen ja kaksiulotteisen geometrian välisestä yhteydestä innostuneena hän ryhtyi etsimään vastaavaa korkeammalle ulottuvuudelle. Korkeamman algebran löytäminen kolmiulotteiselle geometrialle osoittautui kuitenkin haastavaksi, sillä Hamilton pyrki aluksi löytämään kolmiulotteista jakoalgebraa, jollaista ei ole. Kun Hamilton ymmärsi, että kolmiulotteisen jakoalgebran sijaan hänen tuli tarkastella neliulotteista algebraa, onnistui hän löytämään korkeamman algebran.

Ennen kuin Hamilton löysi kvaterniot lokakuun 16.päivänä vuonna 1843 tapasivat hänen lapsensa kysyä isältään lokakuun aamuina: ”No isä, osaatko kertoa lukukolmikoja?” Tähän vastauksena Hamilton joutui kerta toisensa jälkeen vaan pyörittämään päätään ja toteamaan, että vain yhteen- ja vähennyslasku onnistuu lukukolmikoilla. Merkittävä käännekohta tapahtui Hamiltonin kävellessä vaimonsa kanssa Dublinissa Irlannin kuninkaallisen akatemian tapaamiseen tuona yllä mainittuna lokakuun päivänä vuonna 1843, jolloin hän keksi perusyhtälöt kvaternioille i , j ja k :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Nämä perusyhtälöt Hamilton kaiversi Broughamin siltaan, mistä ne voi löytää vielä tänäkin päivänä.

Kvaternioiden löytämisen jälkeen Hamilton käytti lopun elämänsä tutkien kvaternioita ja niiden sovelluksia geometriaan. Vuonna 1853 eli kymmenen vuotta kvaternioiden löytämisen jälkeen Hamilton julkaisi kirjan *Lectures on Quaternions* ja myöhemmin Lontoossa vuonna 1866 kirjan *Elements of Quaternions*. Jonkin aikaa kvaterniot olivatkin muodikkaita matematiikassa. Yksi syy kvaternioiden suosion taustalla oli se, että paljon siitä mitä tehdään nykyään skalaareita ja avaruuden \mathbb{R}^3 vektoreita käyttäen tehtiin tuolloin reaalikvaternioiden ja puhtaiden kvaternioiden avulla. Kvaternioiden suosion aikaan perustettiin myös ”kvaternioiden koulu”, jota Hamiltonin kuoleman jälkeen johtivat Peter Tait ja Benjamin Peirce. Tait kirjoitti esimerkiksi kahdeksan kirjaa kvaternioista, missä keskityttiin erityisesti kvaternioiden sovelluksiin fysiikassa.

Kuitenkin merkittävä käännekohta kvaternioiden historiassa tapahtui, kun Josiah Willard Gibbs keksi modernit merkintätavat piste- ja ristitulolle. Tait ei ollut kovinkaan mielissään tästä Gibbsin oivalluksesta, vaan tuomitsi tämän notaation ”hermafrodiitiksi”. Kynäsota alkoi, kun kuuluisuudet kuten Kelvin ja Oliver Heaviside kritisoivat kirjoituksissaan kvaternioita. Lopulta kvaterniot hävisivät tämän sodan, mistä seurasi kvaternioiden joutuminen epäsuosioon.

LUKU 2

Kompleksiluvut

Tässä luvussa määritellään kompleksiluvut ja tutustutaan niiden algebrallisiin ominaisuuksiin, geometriseen tulkintaan ja matriisiesitykseen. Kompleksiluvut oletetaan lukijalle jo ennestään tutuiksi, mistä johtuen monet määritelmien ja tulosten todistukset ohitetaan. Luvun sisältö pohjautuu Antti Vähäkankaan luentomonisteeseen *Kompleksilaskenta* [12, s.1–21] sekä John Stillwellin teokseen *Naive Lie Theory* [11, s.1–7].

2.1. Kompleksiluvut ja niiden algebralliset ominaisuudet

Reaalilukujen joukon \mathbb{R} laajennusta, missä myös toisen asteen yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ on ratkaisut $x = \pm i$, kutsutaan *kompleksilukujen joukoksi*. Symbolia i , joka toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$, kutsutaan *imaginaariyksiköksi*.

MÄÄRITELMÄ 2.1. *Kompleksilukujen joukoksi* \mathbb{C} kutsutaan joukkoa

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\},$$

missä i on imaginaariyksikkö.

Kompleksilukuja merkitään usein symbolilla z . Kompleksiluvun $z = a + ib$ *reaaliosaksi* kutsutaan reaalilukua a , jota merkitään $\operatorname{Re}(z) = a$. Puolestaan kompleksiluvun z *imaginaariosa* on reaaliluku b , jota merkitään $\operatorname{Im}(z) = b$. Erityisesti siis $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$. Kompleksilukujen joukossa *nollaksi* kutsutaan alkioita $0 + i0$ ja *ykköseksi* alkioita $1 + i0$, ja näitä alkioita merkitään lyhyesti 0 ja 1 .

Kompleksiluvuilla pätevät yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Seuraavaksi esitettävät laskutoimitukset perustuvat tunnettuihin laskutoimituksiin reaaliluvuilla.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoot $z_1 = a + ib$ ja $z_2 = c + id$ kaksi kompleksilukua. Tällöin määritellään

- (1) yhteenlasku: $z_1 + z_2 = (a + b) + i(c + d)$,
- (2) vähennyslasku: $z_1 - z_2 = (a - b) + i(c - d)$,
- (3) kertolasku: $z_1 z_2 = (ac - bd) + i(bc + ad)$ ja
- (4) jakolasku: $z_1 / z_2 = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$, kun $c \neq 0$ tai $d \neq 0$.

Edellä esitettyjen laskusääntöjen ohella reaaliluvuista tutut kommutatiivisuus, assosiativisuus ja distributiivisuus pätevät kompleksiluvuille (katso määritelmä A.1). Näiden laskukaavojen todistukset perustuvat määritelmään 2.2.

Määritellään seuraavaksi kompleksilukujen yhteydessä usein esiintyvä käsite *kompleksikonjugaatti*.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoon kompleksiluku $z = a + ib$, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin kompleksiluvun z *kompleksikonjugaatti* on luku

$$\bar{z} = a - ib.$$

Kompleksikonjugaattien yhteen- ja kertolaskua koskevat seuraavat laskusäännöt.

LAUSE 2.4. *Olkoot z_1 ja z_2 kompleksilukuja. Tällöin*

- (1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- (2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$.

Lisäksi kompleksiluvun z ja sen kompleksikonjugaatin tulolle pätee seuraava lause.

LAUSE 2.5. *Olkoon $z = a + ib$ kompleksiluku. Tällöin*

$$z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

Aliluvun lopuksi määritellään vielä kompleksiluvun käänteisalkiot summan ja tulon suhteen. Jokaisella kompleksiluvulla $z = a + ib$ on yksikäsitteinen käänteisalkio summan suhteen eli alkio $-z$, sillä $z + (-z) = z - z = 0$. Kun kompleksiluku z on nolasta eroava, on myös kompleksiluvulla tulon suhteen yksikäsitteinen käänteisalkio $z^{-1} = 1/z$, joka toteuttaa yhtälön $zz^{-1} = 1$. Laventamalla käänteislukua $1/z$ luvun z kompleksikonjugaatilla \bar{z} saadaan $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$. Edelleen lauseen 2.5 nojalla käänteisluku tulon suhteen on siis $z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

2.2. Kompleksilukujen geometrinen tulkinta

Kompleksilukujen joukko \mathbb{C} voidaan tulkita tasona eli avaruutena \mathbb{R}^2 , jota kutsutaan *kompleksitasoksi*. Tällöin jokaista kompleksilukua $z = a + ib$ vastaa kompleksitason piste (a, b) , esimerkiksi kompleksilukua $3i$ vastaava kompleksitason piste on $(0, 3)$. Määritellään seuraavaksi kompleksitason akselit, *reaali-* ja *imaginaariakseli*.

MÄÄRITELMÄ 2.6. Kompleksitason osajoukkoa

$$\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x + i0 : x \in \mathbb{R}\}$$

kutsutaan *reaaliakseliksi* ja osajoukkoa

$$\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$$

imaginaariakseliksi.

Käyttäen edellä esitettyä määritelmää saadaan geometrinen tulkinta edeltävässä aliluvussa määritellylle kompleksikonjugaatille $\bar{z} = a - ib$. Kompleksilukua $z = a + ib$ vastaa kompleksitason piste (a, b) ja sen kompleksikonjugaattia $a - ib$ vastaava kompleksitason piste on $(a, -b)$. Näin ollen kompleksiluvun ja sen konjugaatin reaaliosat ovat samat eli $\operatorname{Re}(z) = a = \operatorname{Re}(\bar{z})$, mutta kompleksikonjugaatin imaginaariosa on sitä vastaavan kompleksiluvun imaginaariosan vastaluku eli $-\operatorname{Im}(z) = -b$. Toisin sanoen kompleksitasossa kompleksikonjugaatti on sitä vastaavan kompleksiluvun peilaus reaaliakselin suhteen. Vastaavasti voidaan esittää geometrinen tulkinta myös kompleksiluvun $z = a + ib$ tulon käänteisluvulle $z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$. Kompleksitasossa tätä tulon käänteislukua z^{-1} vastaa piste $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$, joka on kompleksitason pisteen (a, b) peilaus yksikköympyrän ja x -akselin suhteen.

Edelleen kompleksitason pisteet voidaan tulkita *vektoreina*. Toisin sanoen jos (a, b) on kompleksitason piste ja $z = a + ib$ sitä vastaava kompleksiluku, niin $z = a + ib$ tulkitaan vektorina origosta $(0, 0)$ pisteeseen (a, b) . Tarkastellaan seuraavaksi, miten reaalityyppisten yhteydestä tuttu itseisarvo voidaan yleistää kompleksiluvuille.

MÄÄRITELMÄ 2.7. Olkoon $z = a + ib$ kompleksiluku. Tällöin luvun z itseisarvo eli *moduli* on reaaliluku

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Moduli kertoo siis kompleksitason pisteen (a, b) etäisyyden origosta 0 tai vastavasti vektorin $z = a + ib$ pituuden. Esitetään yksi havainnollistava esimerkki kompleksiluvun modulin laskemisesta.

ESIMERKKI 2.8. Olkoon kompleksiluku $z = \cos \theta + i \sin \theta$, missä $\theta \in \mathbb{R}$. Tällöin trigonometriasta tutun tuloksen $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$ nojalla saadaan, että luvun z moduli on

$$|z| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = 1.$$

Seuraavat laskusäännöt ovat hyödyllisiä moduleilla laskettaessa.

LAUSE 2.9. *Olkoot z, z_1 ja z_2 kompleksilukuja. Tällöin pätee*

- (1) $|z|^2 = z\bar{z}$,
- (2) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Lauseen ensimmäinen kohta pohjautuu suoraan modulin määritelmään ja lauseeseen 2.5, sillä modulin määritelmän nojalla $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$ ja lauseen 2.5 nojalla $z\bar{z} = a^2 + b^2$. Edelleen lauseen toinen kohta saadaan helposti osoitettua ensimmäisen kohdan ja lauseen 2.4 kohtaa (2) käyttäen.

Edellä esitetystä kompleksiluvun modulista päästään siirtymään kompleksiluvun *napakoordinaattiesitykseen*.

MÄÄRITELMÄ 2.10. Olkoon (x, y) kompleksitason piste ja $z = x + iy$ sitä vastaava kompleksiluku. Tällöin luvun z *napakoordinaattiesitys* on

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja $r \geq 0$. Lukua θ kutsutaan kompleksiluvun z *argumentiksi*.

Toisaalta seuraavan lemmän nojalla napakoordinaattiesityksessä esiintyvää lukua r vastaa kompleksiluvun moduli.

LEMMA 2.11. *Olkoon kompleksiluku $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja $r \geq 0$. Tällöin pätee $r = |z|$.*

TODISTUS. Laskemalla kompleksiluvun modulit puolittain saadaan

$$|z| = |r(\cos \theta + i \sin \theta)|.$$

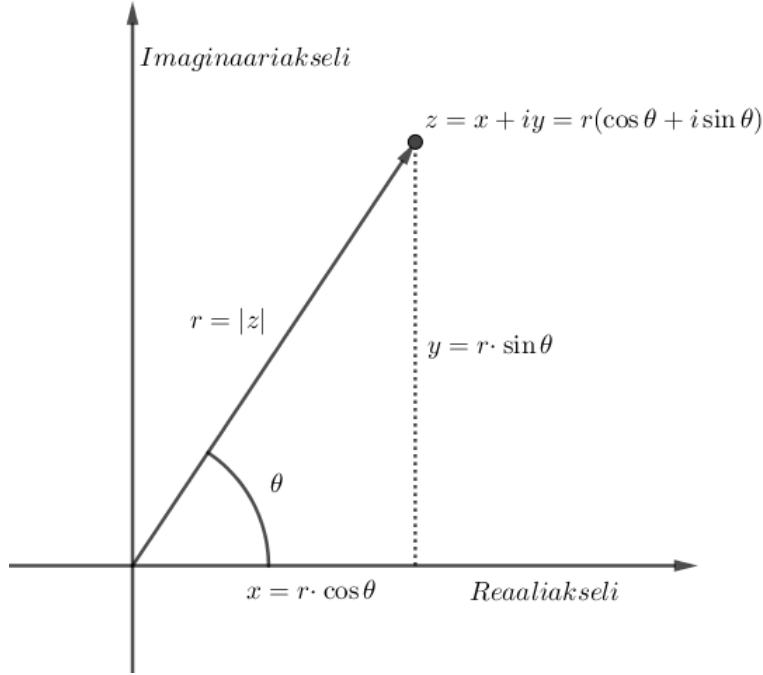
Lauseen 2.9 kohdan (2) nojalla edellä esitetyn yhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa muodossa $|r|(\cos \theta + i \sin \theta)|$. Koska luvulle $r \geq 0$ pätee $|r| = r$ ja lisäksi esimerkin 2.8 nojalla $|(\cos \theta + i \sin \theta)| = 1$, saadaan

$$|z| = r \cdot 1 = r.$$

□

Yllä osoitetun lemmän nojalla luku r kertoo siis kompleksitason pisteen z etäisyyden origosta. Näin ollen jatkossa kompleksiluvun z napakoordinaattiesitys voidaan kirjoittaa muodossa

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$



KUVA 2.1. Napakoordinaattiesitys.

ja tätä napakoordinaattiesitystä havainnollistetaan kuvassa 2.1. Nyt kompleksilukujen tulo voidaan ilmaista käyttämällä edellä määriteltyä napakoordinaattiesitystä.

LAUSE 2.12. *Olkoot $z_1 = r_1(\cos \theta + i \sin \theta)$ ja $z_2 = r_2(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kaksi kompleksilukua, missä $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ ja $r_1, r_2 \geq 0$. Tällöin kompleksilukujen tulo on*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)).$$

Lauseen täsmällinen todistus perustuu trigonometriasta tuttuihin laskusääntöihin $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ ja $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ sekä määritelmään 2.2. Lauseen nojalla tulon $z_1 z_2$ argumentti on kompleksilukujen z_1 ja z_2 argumenttien summa.

2.3. Kompleksilukujen yhteys tason kiertoihin ja venytyksiin

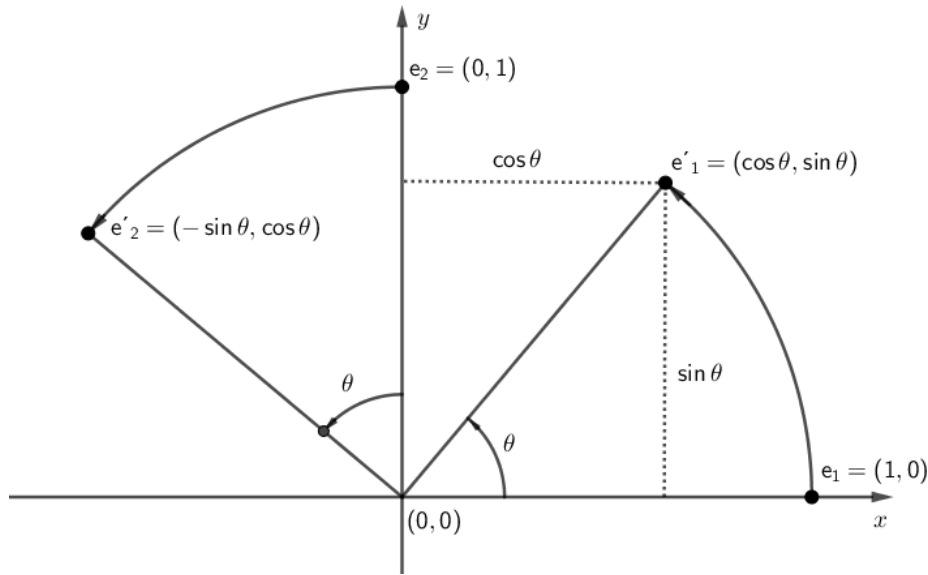
Aliluvun aluksi määritellään kiertokuvaus R_θ ja tämän jälkeen näytetään, että kiertokuvaus R_θ on lineaarinen kuvaus ja isometria. Tällöin kuvaus R_θ määrättyy siitä, miten se kuvaa kantavektorit. Olkoot $e_1 = (1, 0)$ ja $e_2 = (0, 1)$ tason \mathbb{R}^2 kantavektoreita. Tason kiertoa origon suhteen vastapäivään kulman θ verran vastaa kuvaus, joka kuvaa kantavektorit e_1 ja e_2 vektoreiksi

$$e'_1 = (\cos \theta, \sin \theta) \text{ ja } e'_2 = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

Tätä kantavektoreiden kuvautumista havainnollistetaan kuvassa 2.2.

Nyt tason vektori (x, y) , missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$, voidaan ilmaista kantavektoreiden e_1 ja e_2 avulla muodossa

$$(x, y) = x e_1 + y e_2.$$



KUVA 2.2. Tason kantavektoreiden kuvautuminen kierrossa.

Edelleen tason vektorin (x, y) kiertoa vastapäivään kulman θ verran vastaa vektori

$$\begin{aligned} (x', y') &= xe'_1 + ye'_2 \\ &= x(\cos \theta, \sin \theta) + y(-\sin \theta, \cos \theta) \\ &= (x \cos \theta, x \sin \theta) + (-y \sin \theta, y \cos \theta) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta). \end{aligned}$$

MÄÄRITELMÄ 2.13. Olkoot (x, y) tason \mathbb{R}^2 piste ja $\theta \in \mathbb{R}$. Tällöin kuvausta $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, missä

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

kutsutaan *kiertokuvaukseksi*.

Osoitetaan seuraavaksi, että edellä määritelty kiertokuvaus on itse asiassa lineaarinen kuvaus ja isometria.

LAUSE 2.14. *Kiertokuvaus* $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

on *lineaarikuvaus ja isometria*.

TODISTUS. Olkoot (x, y) , (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) tason \mathbb{R}^2 pisteitä ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin kuvaukselle R_θ pätee

$$\begin{aligned} &R_\theta(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= ((x_1 + x_2) \cos \theta - (y_1 + y_2) \sin \theta, (x_1 + x_2) \sin \theta + (y_1 + y_2) \cos \theta) \\ &= (x_1 \cos \theta + x_2 \cos \theta - y_1 \sin \theta - y_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \sin \theta + y_1 \cos \theta + y_2 \cos \theta) \\ &= (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) + (x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta, x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \\ &= R_\theta(x_1, y_1) + R_\theta(x_2, y_2), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
 R_\theta(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x \cos \theta - \lambda y \sin \theta, \lambda x \sin \theta + \lambda y \cos \theta) \\
 &= (\lambda(x \cos \theta - y \sin \theta), \lambda(x \sin \theta + y \cos \theta)) \\
 &= \lambda(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \\
 &= \lambda R_\theta(x, y).
 \end{aligned}$$

Näin ollen määritelmän A.13 nojalla kuvaus R_θ on lineaarikuvaus. Osoitetaan vielä, että kyseinen lineaarikuvaus on isometria eli pisteiden väliset etäisyydet säilyttävä lineaarikuvaus. Nyt määritelmän A.15 nojalla riittää näyttää, että kaikille tason \mathbb{R}^2 pisteille (x, y) on voimassa ehto $|R_\theta(x, y)| = |(x, y)|$. Korottamalla lineaarikuvauksen R_θ normi toiseen potenssiin ja käyttämällä trigonometriasta tuttua tulosta $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$, saadaan

$$\begin{aligned}
 |R_\theta(x, y)|^2 &= (x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 \\
 &= x^2 \cos^2 \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta + 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \cos^2 \theta \\
 &= x^2((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) + y^2((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \\
 &= x^2 + y^2 \\
 &= |(x, y)|^2.
 \end{aligned}$$

Ottamalla nyt yllä olevasta yhtälöstä neliöjuuri puolittain saadaan $|R_\theta(x, y)| = |(x, y)|$. Siten lineaarikuvaus R_θ on isometria. \square

Siirrytään tarkastelemaan, miten tason \mathbb{R}^2 kierto R_θ voidaan esittää kompleksilukuna $|z_\theta| = 1$.

LAUSE 2.15. *Olkoot (x, y) tason \mathbb{R}^2 piste ja $\theta \in \mathbb{R}$. Tällöin tason kiertokuvausta $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,*

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

vastaa kompleksitasossa kuvaus $R_\theta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$R_\theta(z) = z_\theta z,$$

missä $z = x + iy, z_\theta \in \mathbb{C}$ ja $|z_\theta| = 1$.

TODISTUS. Olkoot z_θ kompleksiluku, jolle pätee $|z_\theta| = 1$. Tällöin siis kompleksiluvun z_θ napakoordinaattiesitys on lemmän 2.11 nojalla

$$z_\theta = 1 \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Olkoon nyt (x, y) mielivaltainen tason \mathbb{R}^2 piste, joka voidaan edeltävän luvun nojalla samaistaa kompleksitason \mathbb{C} pisteeksi (x, y) . Tätä kompleksitason pistettä (x, y) vastaa kompleksiluku $z = x + iy$, jota kertomalla kompleksiluvulla z_θ saadaan lauseen 2.2 nojalla

$$\begin{aligned}
 z_\theta(x + iy) &= (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) \\
 &= x \cos \theta - y \sin \theta + i(x \sin \theta + y \cos \theta).
 \end{aligned}$$

Tätä tulosta vastaa kompleksitason piste $(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$, mikä on sama kuin tason \mathbb{R}^2 pisteen (x, y) kierto origon ympäri kulman θ verran. \square

Toisaalta kiertokuvaus voidaan esittää myös napakoordinaatteja käyttäen. Olkoot kompleksiluvut z ja z_θ , missä $|z_\theta| = 1$. Tällöin siis kompleksilukujen napakoordinaattiesitykset ovat $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ja $z_\theta = \cos \theta + i \sin \theta$, kun $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Edelleen lauseen 2.12 nojalla saadaan, että kompleksilukujen z ja z_θ tulo on

$$R_\theta(z) = r(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)).$$

Nyt havaitaan, että kuvapisteen argumentti saadaan lisäämällä pisteen z argumenttiin θ ja kiertokuvauksen normi on kompleksiluvun $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ normi eli $|R_\theta(z)| = |z| = r$. Kiertokuvauksessa siis kompleksitason piste z ja sen kuvapiste $R_\theta(z)$ sijaitsevat origo-keskisellä ja r -säteisellä ympyrällä $S(0, r)$. Jos argumentti θ on positiivinen, niin kiertosuunta ympyrällä $S(0, r)$ on vastapäivään ja vastaavasti jos argumentti on negatiivinen, on kiertosuunta myötäpäivään.

Siirrytään tason kiertojen tarkastelusta venytyksiin tasossa. Venytystä reaalityylillä $a > 0$ vastaa kuvaus, joka kuvaa tason kantavektorit $e_1 = (1, 0)$ ja $e_2 = (0, 1)$ vektoreiksi

$$e_1'' = (a, 0) \text{ ja } e_2'' = (0, a).$$

Edelleen tason vektorin (x, y) , missä $x, y \in \mathbb{R}$, venytystä reaalityylillä $a > 0$ vastaa vektori

$$\begin{aligned} (x'', y'') &= xe_1'' + ye_2'' \\ &= x(a, 0) + y(0, a) \\ &= (xa, ya). \end{aligned}$$

MÄÄRITELMÄ 2.16. Olkoot (x, y) tason \mathbb{R}^2 piste ja reaalityyliluku $a > 0$. Tällöin kuvausta $M_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, missä

$$M_a(x, y) = (xa, ya),$$

kutsutaan *venytyskuvaukseksi*.

Kyseinen kuvaus on lineaarinen, mikä on helppo todistaa vastaavasti kuin tason kierron tapauksessa. Toisin kuin tason kiertokuvaus, venytyskuvaus ei ole kuitenkaan isometria, sillä kun $a \neq 1$, niin saadaan

$$|M_a(x, y)|^2 = (xa)^2 + (ya)^2 = x^2a^2 + y^2a^2 \neq x^2 + y^2 = |(x, y)|^2.$$

Venytyskuvaus ei siis säilytä pisteiden välisiä etäisyyksiä.

Vastaavasti kuin tason \mathbb{R}^2 kiertokuvauksessa, voidaan myös venytys tasossa \mathbb{R}^2 esittää kompleksilukujen avulla.

LAUSE 2.17. *Olkoot (x, y) tason \mathbb{R}^2 piste ja reaalityyliluku $a > 0$. Tällöin tason venytyskuvausta $M_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,*

$$M_a(x, y) = (xa, ya),$$

vastaa kompleksitasossa kuvaus $M_a: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$M_a(z) = az,$$

missä $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

TODISTUS. Edellä esitetty lause on helppo osoittaa, sillä jos nyt (x, y) on mielivaltainen tason \mathbb{R}^2 piste, niin se voidaan edeltävän luvun nojalla samaistaa kompleksitason \mathbb{C} pisteeksi (x, y) . Edelleen kertomalla tätä kompleksitason pistettä (x, y) vastaavaa kompleksilukua $z = x + iy$ reaalityyppillä $a > 0$ saadaan, että

$$M_a(z) = az = a(x + iy) = ax + iay,$$

eli kompleksitason piste (x, y) kuvautuu venytyksessä kompleksitason pisteeksi (ax, ay) . \square

Kiertokuvauksen tavoin myös venytyskuvaus kompleksitasossa voidaan esittää napakoordinaatteja käyttäen. Kun kompleksiluvun z napakoordinaattiesitys on $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, niin venytyskuvauksen napakoordinaattiesitys on muotoa

$$M_a(z) = ar(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Näin ollen havaitaan, että venytyskuvauksen kuvapisteen normi on kompleksiluvun $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ normin ja reaalityyppillä $a > 0$ tulo eli $|M_a(z)| = a|z| = ar$.

2.4. Kompleksilukujen matriisiesitys

Edellisessä aliluvussa määriteltiin tason \mathbb{R}^2 kierto kuvaus R_θ vektoreiden avulla. Kyseinen kierto kuvaus voidaan toisaalta esittää myös matriisien avulla. Matriisiesityksessä kiertoa R_θ vastaa matriisi

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

ja tason pistettä (x, y) vastaa matriisi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Nyt tason pisteen (x, y) kierto origon ympäri vastapäivään kulman θ verran voidaan esittää matriisien avulla kertomalla tason pistettä (x, y) kuvaavaa matriisiä vasemmalta matriisillä R_θ , sillä tällöin matriisien laskusääntöjen nojalla saadaan

$$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Kierron vektoriesityksen ohella edellisessä aliluvussa näytettiin, että tason kierto R_θ voidaan esittää kompleksilukuna $z_\theta = \cos \theta + i \sin \theta$. Näytetään seuraavaksi, että myös yllä esitetty kierron matriisiesitys R_θ vastaa kompleksilukua $z_\theta = \cos \theta + i \sin \theta$. Kirjoitetaan nyt kierron matriisiesitys muodossa

$$R_\theta = \cos \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ja merkitään

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisien laskusääntöjä käyttäen saadaan

$$\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1i} = \mathbf{i1} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{i}^2 = -\mathbf{1},$$

ja tämän perusteella huomataan, että on luonnollista samaistaa matriisit $\mathbf{1}$ ja \mathbf{i} lukuihin 1 ja i . Näin ollen kompleksilukua $z_\theta = \cos \theta + i \sin \theta$ vastaava matriisiesitys on R_θ . Havainnollistetaan tätä kierron matriisiesityksen R_θ ja kompleksiluvun $z_\theta = \cos \theta + i \sin \theta$ välistä yhteyttä esimerkillä.

ESIMERKKI 2.18. Olkoot tason \mathbb{R}^2 kantavektorit $e_1 = (1, 0)$ ja $e_2 = (0, 1)$ ja olkoon tason vektori $u = (1, 2)$. Kierretään tason kantavektoreita $\frac{\pi}{6}$ radiaania origon suhteen vastapäivään. Tällöin kantavektoreiden kiertoa vastaa matriisi

$$R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Edelleen tason vektorin u kiertoa $\frac{\pi}{6}$ radiaania origon suhteen vastapäivään vastaa matriisi

$$R_{\frac{\pi}{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix},$$

joka voidaan esittää tason \mathbb{R}^2 pisteinä $(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{1}{2} + \sqrt{3})$. Puolestaan kompleksilukuja käyttäen saadaan, että kiertoa $R_{\frac{\pi}{6}}$ vastaa kompleksitason \mathbb{C} piste

$$z_{\frac{\pi}{6}} = \left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Koska tason \mathbb{R}^2 pisteet voidaan esittää kompleksitason \mathbb{C} pisteinä, niin tason \mathbb{R}^2 pistettä $(1, 2)$ vastaa kompleksitason piste $(1, 2)$. Siten määritelmän 2.2 nojalla saadaan, että kompleksitason pisteen $(1, 2)$ kiertoa $\frac{\pi}{6}$ radiaania origon suhteen vastaa kompleksitason piste

$$R_{\frac{\pi}{6}}(1, 2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)(1, 2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{1}{2} + \sqrt{3} \right).$$

Itse asiassa edellä esitetty kiertoa R_θ vastaavan kompleksiluvun $z_\theta = \cos \theta + i \sin \theta$ matriisiesitys voidaan yleistää kaikille kompleksiluvuille $z = a + ib$.

MÄÄRITELMÄ 2.19. Olkoon $z = a + ib$ kompleksiluku, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin kompleksiluvun z matriisiesitys on

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i},$$

missä $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

HUOMAUTUS 2.20. Jatkossa matriiseja merkitään lihavoidulla fontilla.

Nyt käyttämällä edellä esitettyä kompleksiluvun matriisiesitystä havaitaan, että kompleksiluvun $z = a + ib$ modulin neliö $|z|^2 = a^2 + b^2$ on sama kuin kompleksilukua z vastaavan matriisin *determinantti*.

LEMMA 2.21. *Olkoon $z = a + ib$ kompleksiluku, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee*

$$|z|^2 = \det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Lemma seuraa suoraan matriisin determinantin määritelmästä A.9 ja määritelmästä 2.7.

Aiemmin määritellyt kompleksilukujen algebralliset ominaisuudet voidaan esittää myös matriisien avulla. Tarkastellaan seuraavaksi kompleksiluvun z kompleksikonjugaatin \bar{z} ja kertolaskun käänteisalkion z^{-1} matriisiesityksiä. Määritelmän 2.3 nojalla kompleksilukua $z = a + ib$ vastaava kompleksikonjugaatti on $\bar{z} = a - ib$. Tätä kompleksikonjugaattia vastaava matriisiesitys on

$$\bar{z} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Hyödyntämällä edellä esitettyä kompleksikonjugaatin matriisiesitystä saadaan kompleksiluvun $z = a + ib$ tulon käänteisalkion $z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ matriisiesitys.

LAUSE 2.22. *Olkoon kompleksiluvun $z = a + bi \neq 0$ matriisiesitys $z = a\mathbf{1} + b\mathbf{i}$. Tällöin kompleksiluvulla on yksikäsitteinen käänteisalkio kertolaskun suhteen, nimittäin alkio*

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a\mathbf{1} - b\mathbf{i}),$$

joka toteuttaa yhtälön $zz^{-1} = \mathbf{1}$.

Lauseen todistuksessa hyödynnetään kompleksilukujen z ja z^{-1} matriisiesityksiä sekä matriisien kertolaskun laskusääntöä. Täsmällistä todistusta lauseelle ei esitetä, mutta myöhemmin kvaternioiden yhteydessä osoitetaan vastaava ominaisuus kvaternioille (katso lause 3.27).

LUKU 3

Kvaterniot

Kompleksilukujen joukosta siirrytään niiden laajennukseen, kvaternioihin. Luvussa määritellään aluksi kvaternioiden joukko ja esitetään kvaterniot avaruuden \mathbb{R}^4 pisteinä, vektoreina sekä matriiseina. Tämän jälkeen siirrytään kvaternioiden algebraan ja ominaisuuksiin. Lisäksi tarkastellaan kvaternioiden joukon ja avaruuden \mathbb{R}^4 yhteyttä sekä reaalikvaternioita. Lopuksi huomataan, että kvaternioiden joukko muodostaa vektoriavaruuden. Luvussa käsitellyt asiat pohjautuvat R. P. Burnin kirjaan *Groups: A Path to Geometry* [1, s.178–180], Juha Lehrbäckin ja Jouni Parkkosen luentomonisteseen *Lukuaalueet* [4, s.45–48] sekä John Stillwellin teokseen *Naive Lie Theory* [11, s.7–13].

3.1. Kvaternioiden määritelmä

Aloitetaan aliluku määrittelemällä peruskvaterniot ja kvaternioiden joukko. Kvaternioiden joukkoon tutustumisen jälkeen esitellään kvaternioille muutama eri esitystapa, jotka seuraavassa aliluvussa osoitetaan samoiksi. Aliluvun lopuksi tarkastellaan vielä peruskvaternioiden kertolaskun laskusääntöjä.

Aiemmassa luvussa määriteltiin kompleksiluvut reaalilukujen laajennuksena, missä yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ on ratkaisut $x = \pm i$. Edelleen kompleksilukujen laajennusta kutsutaan *kvaternioiden joukoksi*. Kvaternioiden joukossa esiintyviä symboleita $1, i, j$ ja k kutsutaan *peruskvaternioiksi*.

MÄÄRITELMÄ 3.1. *Kvaternioiden joukoksi* \mathbb{H} kutsutaan joukkoa

$$\mathbb{H} = \{a1 + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

missä $1, i, j$ ja k ovat *peruskvaternioita*. Peruskvaterniot toteuttavat yhtälön

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Kvaternioita merkitään usein symbolilla q . Kvaternioiden joukossa alkioita $0 + 0i + 0j + 0k$ kutsutaan *nollaksi* ja alkioita $1 + 0i + 0j + 0k$ *ykköseksi*, ja jatkossa näitä alkioita merkitään lyhyesti 0 ja 1 . Kun kompleksiluvuille määriteltiin reaali- ja imaginaariosa, niin vastaavasti kvaternioiden joukossa voidaan määritellä *reaalikvaternio* ja *puhdas kvaternio*.

MÄÄRITELMÄ 3.2. *Reaalikvaternioiksi* kutsutaan kvaterniota

$$q = a1,$$

missä a on reaaliluku ja $b = c = d = 0$. Puolestaan *puhtaaksi kvaternioiksi* kutsutaan kvaterniota

$$q = bi + cj + dk,$$

missä b, c ja d ovat reaalilukuja ja $a = 0$.

HUOMAUTUS 3.3. Jatkossa reaalikvaternioiden joukkoa merkitään

$$\operatorname{Re}(\mathbb{H}) = \{a\mathbf{1} : a \in \mathbb{R}\}$$

ja puhtaiden kvaternioiden joukkoa

$$\operatorname{Im}(\mathbb{H}) = \{bi + cj + dk : b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Kompleksilukujen tapauksessa todettiin, että kompleksilukujen joukko \mathbb{C} voidaan esittää avaruutena \mathbb{R}^2 eli tasona. Samoin kvaternioiden joukko \mathbb{H} on mahdollista tulkita neliulotteisena avaruutena \mathbb{R}^4 .

MÄÄRITELMÄ 3.4. Olkoon kvaternio $q = a\mathbf{1} + bi + cj + dk$, missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tällöin kvaternion \mathbb{R}^4 -esitys on avaruuden \mathbb{R}^4 piste

$$(a, b, c, d),$$

joka saadaan merkitsemällä $\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ ja $k = (0, 0, 0, 1)$.

Avaruuden \mathbb{R}^4 pisteiden lisäksi toinen tapa tulkita kvaterniot on esittää ne *vektoreina*. Vektoriesityksessä kvaternio $q = a + bi + cj + dk$ ajatellaan vektorina origosta $(0, 0, 0, 0)$ pisteeseen (a, b, c, d) . Tässä esityksessä peruskvaterniot $\mathbf{1}, i, j$ ja k samaisetaan lineaarisesti riippumattomiksi vektoreiksi, jotka muodostavat avaruuden \mathbb{R}^4 kannan.

Kolmas tapa tulkita kvaterniot on esittää ne matriisien avulla. Edellisessä luvussa todettiin, että kompleksiluku $z = a + ib$ voidaan esittää matriisina

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i}.$$

Kompleksilukujen tavoin myös kvaternioilla $q = a\mathbf{1} + bi + cj + dk$ on matriisiesitys. Tässä pro gradu -tutkielmassa kvaternioiden joukkoa \mathbb{H} käsitelläänkin pääsääntöisesti seuraavan matriisiesityksen avulla.

MÄÄRITELMÄ 3.5. Olkoon $q = a\mathbf{1} + bi + cj + dk$ kvaternio, missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $i^2 = -1$. Tällöin kvaternion q *matriisiesitys* on kompleksinen 2×2 -matriisi

$$q = \begin{bmatrix} a + id & -b - ic \\ b - ic & a - id \end{bmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

missä

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Kvaternioiden matriisiesityksestä havaitaan, että itse asiassa kompleksiluvut ovat eräs kvaternioiden erityistapaus, missä $c = d = 0$. Myöhempiä tuloksia varten esitetään vielä toinen tapa esittää kvaterniot matriisien avulla. Määritelmän 3.5 ohella kvaternioiden matriisiesitys voidaan ilmaista myös merkitsemällä $\alpha = a + id$ ja $\beta = b + ic$ sekä hyödyntämällä kompleksikonjugaattia.

HUOMAUTUS 3.6. Olkoon $q = a + bi + cj + dk$ kvaternio. Tällöin kvaternion q matriisiesitys voidaan kirjoittaa muodossa

$$q = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix},$$

missä $\alpha = a + id$ ja $\beta = b + ic$ sekä $\bar{\alpha}$ ja $\bar{\beta}$ niitä vastaavat kompleksikonjugaatit.

Tarkastellaan seuraavaksi peruskvaternioiden $1, i, j$ ja k matriisiesityksiä $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ ja \mathbf{k} . Määritellään näiden matriisiesityksien avulla peruskvaternioiden tulon laskusäännöt.

LAUSE 3.7. *Olkoot peruskvaternioiden $1, i, j$ ja k matriisiesitykset $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ ja \mathbf{k} kuten määritelmässä 3.5. Tällöin pätee*

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}, \\ \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}. \end{aligned}$$

TODISTUS. Osoitetaan, että matriiseille $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ ja \mathbf{k} pätee yhtälö $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$. Matriisien tulon laskusääntöä ja tulosta $i^2 = -1$ käyttäen saadaan, että

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{1}, \\ \mathbf{j}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix} = -\mathbf{1}, \\ \mathbf{k}^2 &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix} = -\mathbf{1}, \\ \mathbf{ijk} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan osoitettua muut peruskvaternioiden laskusäännöt eli $\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$ ja $\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$. \square

Edellä esitetyt peruskvaternioiden laskusäännöt voidaan myös kirjata taulukkoon seuraavasti.

TAULUKKO 1. Peruskvaternioiden kertolaskusäännöt.

| | | | | |
|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|
| \cdot | $\mathbf{1}$ | \mathbf{i} | \mathbf{j} | \mathbf{k} |
| $\mathbf{1}$ | $\mathbf{1}$ | \mathbf{i} | \mathbf{j} | \mathbf{k} |
| \mathbf{i} | \mathbf{i} | $-\mathbf{1}$ | \mathbf{k} | $-\mathbf{j}$ |
| \mathbf{j} | \mathbf{j} | $-\mathbf{k}$ | $-\mathbf{1}$ | \mathbf{i} |
| \mathbf{k} | \mathbf{k} | \mathbf{j} | $-\mathbf{i}$ | $-\mathbf{1}$ |

Merkitään edellä esiteltyjen kahdeksan matriisin muodostamaa joukkoa $M = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$. Tälle joukolle pätee seuraava lause.

LAUSE 3.8. *Joukko $M = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ varustettuna kertolaskulla on ryhmä.*

TODISTUS. Joukko M on selvästi epätyhjä. Matriisien kertolaskun laskusäännön eli lauseen A.8 nojalla joukon M kaikille alkiolle pätee kertolaskun assosiativisuus. Toisin sanoen, jos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in M$, niin pätee $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Lisäksi huomataan, että joukon neutraalialkio on $\mathbf{1}$.

Näytetään vielä, että jokaisella joukon M alkiolla on käänteisalkio. Nyt peruskvaternioiden laskusääntöjen nojalla saadaan, että matriisit \mathbf{i} ja $-\mathbf{i}$ ovat toistensa käänteisalkioita, sillä

$$-\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot (-\mathbf{i}) = -\mathbf{i}^2 = \mathbf{1}.$$

Vastaavasti saadaan, että matriisit $-\mathbf{j}$ ja \mathbf{j} ovat toistensa käänteisalkiot sekä matriisit $-\mathbf{k}$ ja \mathbf{k} toistensa käänteisalkiot. Puolestaan matriisien $\mathbf{1}$ ja $-\mathbf{1}$ käänteisalkiot ovat matriisit itse. Näin ollen kaikilla joukon M alkioilla on käänteisalkiot. Siten määritelmän A.2 nojalla joukko M varustettuna kertolaskulla on ryhmä. \square

3.2. Kvaternioiden algebralliset ominaisuudet

Aliluvussa tutustutaan kvaternioiden algebrallisiin ominaisuuksiin. Aluksi määritellään kvaternioiden laskusäännöt käyttämällä kvaternioiden matriisiesitystä sekä tulkintaa avaruuden \mathbb{R}^4 pisteinä. Aliluvun lopussa näytetään, että kuvaus kvaternioiden joukon \mathbb{H} ja neliulotteisen avaruuden \mathbb{R}^4 välillä on isomorfismi ja siten kvaternioiden matriisi- ja piste-esitystä voidaan käyttää rinnakkain.

Määritellään ensin kvaternioiden matriisiesityksen avulla kvaternioiden yhteen- ja kertolasku sekä skalaarilla kertominen. Edellisessä aliluvussa esitettyä kvaternioiden matriisiesitystä eli huomautusta 3.6 käyttäen voidaan määritellä kvaternion skalaarilla kertominen.

MÄÄRITELMÄ 3.9. Olkoot $\lambda \in \mathbb{R}$ ja kvaternio

$$q = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix},$$

missä $\alpha = a + id$ ja $\beta = b + ic$ sekä $\bar{\alpha}$ ja $\bar{\beta}$ niitä vastaavat kompleksikonjugaatit. Tällöin kvaternion q skalaarilla kertominen määritellään matriisiksi

$$\lambda q = \begin{bmatrix} \lambda\alpha & -\lambda\beta \\ \lambda\bar{\beta} & \lambda\bar{\alpha} \end{bmatrix}.$$

HUOMAUTUS 3.10. Olkoot kvaternio q ja reaaliluku λ . Tällöin

$$\lambda \cdot q = (\lambda \cdot \mathbf{1}) \cdot q.$$

Vastaavasti voidaan määritellä kvaternioiden yhteenlaskun ja tulon matriisiesitykset.

MÄÄRITELMÄ 3.11. Olkoot kaksi kvaterniota

$$q_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} \text{ ja } q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 \\ \bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix},$$

missä $\alpha_x = a_x + id_x$, $\beta_x = b_x + ic_x$, $\bar{\alpha}_x = a_x - id_x$ ja $\bar{\beta}_x = b_x - ic_x$, kun $x \in \{1, 2\}$. Tällöin kvaternioiden q_1 ja q_2 yhteenlasku määritellään matriisien summana

$$q_1 + q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\beta_1 - \beta_2 \\ \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

ja kertolasku matriisien tulona

$$q_1 q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \bar{\beta}_2 & -\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_1 \alpha_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 & -\bar{\beta}_1 \beta_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}.$$

Osoitetaan nyt, että kvaternioiden kertolasku on todella kvaternio.

LEMMA 3.12. *Kvaternioiden joukko on suljettu kertolaskun suhteen.*

TODISTUS. Olkoot kvaterniot q_1 ja q_2 kuten määritelmässä 3.11. Määritelmän 3.11 nojalla kvaternioiden kertolaskua vastaa matriisi

$$q_1 q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \overline{\beta_2} & -\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \overline{\alpha_2} \\ \overline{\beta_1} \alpha_2 + \overline{\alpha_1} \overline{\beta_2} & -\overline{\beta_1} \beta_2 + \overline{\alpha_1} \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Merkitään nyt $\alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \overline{\beta_2}$ ja $\beta_3 = \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \overline{\alpha_2}$. Hyödyntämällä lausetta 2.4 saadaan

$$\overline{\alpha_3} = \overline{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \overline{\beta_2}} = \overline{\alpha_1 \alpha_2} - \overline{\beta_1 \overline{\beta_2}} = \overline{\alpha_1 \alpha_2} - \overline{\beta_1} \beta_2$$

ja

$$\overline{\beta_3} = \overline{\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \overline{\alpha_2}} = \overline{\alpha_1 \beta_2} + \overline{\beta_1 \overline{\alpha_2}} = \overline{\alpha_1} \overline{\beta_2} + \overline{\beta_1} \alpha_2.$$

Edelleen kvaternioiden tulo voidaan kirjoittaa muodossa

$$q_1 q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_3 & -\beta_3 \\ \overline{\beta_3} & \overline{\alpha_3} \end{bmatrix}.$$

Siten huomautuksen 3.6 nojalla kvaternioiden tulo on kvaternio eli kvaternioiden joukko on suljettu kertolaskun suhteen. \square

Matriisien ohella kvaterniot voitiin määritelmän 3.4 nojalla tulkita avaruuden \mathbb{R}^4 pisteinä. Määritellään seuraavaksi tätä esitystapaa käyttäen kvaternioiden yhteen- ja kertolasku sekä skalaarilla kertominen.

MÄÄRITELMÄ 3.13. Olkoot kvaterniot $q = a1 + bi + cj + dk$, $q_1 = a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ ja $q_2 = a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ ja näitä vastaavat avaruuden \mathbb{R}^4 pisteet (a, b, c, d) , (a_1, b_1, c_1, d_1) ja (a_2, b_2, c_2, d_2) . Lisäksi olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin kvaternion q skalaarilla kertomista vastaa avaruuden \mathbb{R}^4 piste

$$\lambda(a, b, c, d) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d).$$

Puolestaan kvaternioiden q_1 ja q_2 yhteenlaskua vastaava piste on

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

ja kertolaskua vastaava piste on

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2, a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2, \\ a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2, a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2).$$

Edellä esitetty kvaternioiden kertolaskun määritelmä perustuu lähinnä peruskvaternioiden laskusääntöihin. Esitetään nyt yksi havainnollistava esimerkki tästä kvaternioiden tulon laskemisesta käyttäen määritelmiä 3.11 ja 3.13.

ESIMERKKI 3.14. Lasketaan ensin kvaternioiden piste-esitystä käyttäen kahden kvaternion $q_1 = 2 + 4i + j$ ja $q_2 = 3 + i + 2k$ tulo. Tätä kvaternioiden tuloa vastaa määritelmän 3.13 mukaan avaruuden \mathbb{R}^4 piste $(2, 16, -5, 3)$.

Kvaternioiden q_1 ja q_2 tulo voidaan laskea myös kvaternioiden matriisiesitystä käyttäen. Määritelmän 3.5 nojalla saadaan, että kvaternioita q_1 ja q_2 vastaavat matriisit

$$q_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4i - j \\ 4 - i & 2 \end{bmatrix} \text{ ja } q_2 = \begin{bmatrix} 3 + 2i & -1 \\ 1 & 3 - 2i \end{bmatrix}.$$

Edelleen määritelmää 3.11 käyttäen kvaternioiden tulo matriisiesitykseksi saadaan

$$q_1 q_2 = \begin{bmatrix} 2 + 3i & -16 + 5i \\ 16 - 15i & 2 - 3i \end{bmatrix}$$

ja tätä vastaa kvaternio $2 + 16i - 5j + 3k$. Koska määritelmän 3.4 nojalla kaikki kvaterniot voidaan esittää avaruuden \mathbb{R}^4 pisteinä, niin kvaterniota $2 + 16i - 5j + 3k$ vastaa piste $(2, 16, -5, 3)$.

Siirrytään tarkastelemaan kvaternioiden yhteen- ja kertolaskun laskusääntöjä. Määritellään ensin kvaternioiden yhteen- ja kertolaskun neutraalialkiot.

MÄÄRITELMÄ 3.15. Olkoon kvaternio $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. *Yhteenlaskun neutraalialkioksi* kutsutaan alkia

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{1} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

jolle pätee $q + \mathbf{0} = q$. Puolestaan *kertolaskun neutraalialkioksi* kutsutaan alkia

$$\mathbf{1} = 1\mathbf{1} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

joka toteuttaa yhtälön $q\mathbf{1} = q$.

Kvaternioille pätevät samat laskusäännöt yhteenlaskun suhteen kuin kompleksiluvuille.

LAUSE 3.16. *Olkoot kolme kvaterniota $q_1 = a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$, $q_2 = a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$ ja $q_3 = a_3\mathbf{1} + b_3\mathbf{i} + c_3\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}$. Tällöin kvaternioiden yhteenlaskulle pätee*

- (1) $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$ (*kommutatiivisuus*),
- (2) $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3$ (*assosiatiivisuus*).

Yhteenlaskun ohella myös kvaternioiden tulolle pätevät monet kompleksilukujen yhteydestä tutut laskusäännöt.

LAUSE 3.17. *Olkoot kolme kvaterniota $q_1 = a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$, $q_2 = a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$ ja $q_3 = a_3\mathbf{1} + b_3\mathbf{i} + c_3\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}$. Tällöin kvaternioiden kertolaskulle pätee*

- (1) $q_1(q_2q_3) = (q_1q_2)q_3$ (*assosiatiivisuus*),
- (2) $q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3$ (*distributiivisuus vasemmalta*),
- (3) $(q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3$ (*distributiivisuus oikealta*).

Kompleksilukujen joukosta poiketen kvaternioiden joukko ei ole kuitenkaan kommutatiivinen. Toisin sanoen jos q_1 ja q_2 ovat kaksi mielivaltaista kvaterniota, niin kvaternioiden tulolle ei päde $q_1q_2 = q_2q_1$. Kvaternioiden ei-kommutatiivisuus seuraa peruskvaternioiden tulo laskusäännöistä eli lauseesta 3.7. Esimerkiksi $jk \neq kj$, sillä $jk = i$ ja $kj = -i$. Myöhemmin kuitenkin huomataan, että kertolaskun ei-kommutatiivisuus on hyödyllinen ominaisuus, sillä se mahdollistaa avaruuden \mathbb{R}^3 kierrojen esittämisen kvaternioiden avulla.

Aliluvun lopuksi määritellään kuvaus kvaternioiden joukolta \mathbb{H} neliulotteiseen avaruuteen \mathbb{R}^4 ja osoitetaan, että kyseinen kuvaus on rengasisomorfismi. Todistetaan ensin seuraava aputuloks.

LEMMA 3.18. *Olkoon kuvaus $\alpha: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^4$,*

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d),$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tällöin kuvaus α on bijektio.

TODISTUS. Näytetään, että kuvaus α on bijektio eli injektio ja surjektio. Olkoot kvaterniot $q_1 = a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ja $q_2 = a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$ siten, että $\alpha(q_1) = \alpha(q_2)$. Tällöin kuvauksen α määritelmän nojalla $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, mistä seuraa, että $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$ ja $d_1 = d_2$. Näin ollen on oltava $q_1 = q_2$ eli kuvaus α on injektio.

Osoitetaan vielä, että kuvaus on surjektio eli jokaiselle maalijoukon alkioille $x \in \mathbb{R}^4$ löytyy lähtöjoukon alkio $q \in \mathbb{H}$ siten, että $x = \alpha(q)$. Olkoon $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ avaruuden \mathbb{R}^4 mielivaltainen piste, missä $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Nyt valitsemalla lähtöjoukon \mathbb{H} alkio

$$q = \begin{bmatrix} x_1 + x_4i & -x_2 - x_3i \\ x_2 - x_3i & x_1 - x_4i \end{bmatrix}$$

saadaan, että $\alpha(q) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Siten kuvaus α on myös surjektio. \square

Nyt voidaan osoittaa edellisen lemmän kuvausta α koskeva lause.

LAUSE 3.19. *Lemman 3.18 kuvaus α on rengasisomorfismi.*

TODISTUS. Edellä lemmassa 3.18 näytettiin, että kuvaus α on bijektio. Näin ollen rengasisomorfismin määritelmän A.6 nojalla riittää osoittaa, että kuvaus on lisäksi rengashomomorfismi.

Joukot \mathbb{H} ja \mathbb{R}^4 ovat selvästi renkaita (katso määritelmä A.4). Olkoot kaksi mielivaltaista kvaterniota

$$q_1 = a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k} = \begin{bmatrix} a_1 + id_1 & -b_1 - ic_1 \\ b_1 - ic_1 & a_1 - id_1 \end{bmatrix}$$

ja

$$q_2 = a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k} = \begin{bmatrix} a_2 + id_2 & -b_2 - ic_2 \\ b_2 - ic_2 & a_2 - id_2 \end{bmatrix}.$$

Tällöin kvaternioiden yhteenlaskun määritelmän 3.11 nojalla

$$\begin{aligned} \alpha(q_1 + q_2) &= \alpha\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 + (d_1 + d_2)i & -(b_1 + b_2) - (c_1 + c_2)i \\ (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2)i & a_1 + a_2 - (d_1 + d_2)i \end{bmatrix}\right) \\ &= \alpha((a_1 + a_2)\mathbf{1} + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k}) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) \\ &= (a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) \\ &= \alpha(q_1) + \alpha(q_2). \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi, miten kuvaus α kuvaa kvaternioiden q_1 ja q_2 tulon. Kvaternioiden tuloksi saadaan määritelmää 3.11 käyttäen

$$\begin{bmatrix} (a_1 + id_1)(a_2 + id_2) + (-b_1 - ic_1)(b_2 - ic_2) & (a_1 + id_1)(-b_2 - ic_2) + (-b_1 - ic_1)(a_2 - id_2) \\ (b_1 - ic_1)(a_2 + id_2) + (a_1 - id_1)(b_2 - ic_2) & (b_1 - ic_1)(-b_2 - ic_2) + (a_1 - id_1)(a_2 - id_2) \end{bmatrix}.$$

Edelleen tulomatriisin q_1q_2 alkiot ovat

$$\begin{aligned}
& (a_1 + id_1)(a_2 + id_2) + (-b_1 - ic_1)(b_2 - ic_2) \\
&= a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + i(a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2), \\
& (a_1 + id_1)(-b_2 - ic_2) + (-b_1 - ic_1)(a_2 - id_2) \\
&= -(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2) - i(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2), \\
& (b_1 - ic_1)(a_2 + id_2) + (a_1 - id_1)(b_2 - ic_2) \\
&= a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2 - i(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2), \\
& (b_1 - ic_1)(-b_2 - ic_2) + (a_1 - id_1)(a_2 - id_2) \\
&= a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 - i(a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2).
\end{aligned}$$

Näin ollen saadaan määritelmän 3.13 nojalla

$$\begin{aligned}
\alpha(q_1q_2) &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, \\
& a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2) \\
&= (a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) \\
&= \alpha(q_1)\alpha(q_2).
\end{aligned}$$

Lisäksi ykkönen kvaternioiden joukossa \mathbb{H} on alkio $\mathbf{1}$ ja vastaavasti avaruudessa \mathbb{R}^4 alkio $(1, 0, 0, 0)$, ja näille alkioille pätee

$$\alpha(\mathbf{1}) = \alpha\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1, 0, 0, 0).$$

Siten kuvaus α on määritelmän A.5 mukaan bijektiivinen rengashomomorfismi eli rengasisomorfismi. \square

Edellä osoitetun lauseen nojalla kvaternioiden matriisi- ja \mathbb{R}^4 -esitysten määritelmät ovat samat. Näin ollen näitä määritelmiä voidaan käyttää jatkossa rinnakkain.

3.3. Kvaternioiden ominaisuuksia

Tässä aliluvussa tarkastellaan kvaternioiden ominaisuuksia kvaternioiden matriisiesitystä käyttäen. Aliluvun aikana havaitaan, että monet kompleksiluvuille määritellyt ominaisuudet voidaan yleistää kvaternioille.

Kompleksilukujen yhteydessä määriteltiin kompleksikonjugaatti $\bar{z} = a - ib$. Vastaavasti kvaternioille voidaan määrittellä *kvaterniokonjugaatti*.

MÄÄRITELMÄ 3.20. Olkoon $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ kvaternio. Tällöin kvaternion q *kvaterniokonjugaatti* on

$$\bar{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

Kvaterniokonjugaatin matriisiesitystä ei saada kuitenkaan suoraan ottamalla kompleksikonjugaattia jokaisesta matriisin alkioista, vaan kvaterniokonjugaatin matriisiesitys muodostetaan seuraavan lauseen kuvaamalla tavalla.

LAUSE 3.21. *Olkoot q kvaternio ja \bar{q} sitä vastaava kvaterniokonjugaatti. Kvaterniokonjugaatin \bar{q} matriisiesitys $\bar{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ saadaan ottamalla kompleksikonjugaatti jokaisesta transponoidun matriisin q^T alkioista.*

TODISTUS. Olkoon kvaternio

$$q = \begin{bmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{bmatrix},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tällöin transpoosin määritelmän A.11 nojalla kvaternion matriisiesityksen transpoosi on

$$q^T = \begin{bmatrix} a + di & b - ci \\ -b - ci & a - di \end{bmatrix}.$$

Otetaan kompleksikonjugaatti jokaisesta matriisin q^T alkiosta, jolloin tuloksena saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} a - di & b + ci \\ -b + ci & a + di \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} - d \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Saatu matriisi voidaan kirjoittaa määritelmän 3.5 mukaan edelleen muodossa $a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$, joka on täsmälleen kvaternion q kvaterniokonjugaatti \bar{q} . \square

Aiemmassa luvussa näytettiin, että kahden kompleksiluvun summan konjugaatti on sama kuin kahden kompleksiluvun konjugaattien summa. Vastaava tulos pätee myös kvaterniokonjugaattien yhteenlaskulle. Sen sijaan kompleksilukujen tulo konjugaatille pätevää tulosta (katso lause 2.4) ei voida suoraan yleistää kvaternioille.

LAUSE 3.22. *Olkoon $q_1 = a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ja $q_2 = a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$ kaksi kvaterniota. Tällöin pätee*

- (1) $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$,
- (2) $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}$.

TODISTUS. Osoitetaan kvaterniokonjugaattien tuloa koskeva kohta (2), yhteenlaskua koskeva kohta (1) saadaan vastaavasti. Olkoot kvaterniot

$$q_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \text{ ja } q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

kuten huomautuksessa 3.6. Näitä kvaterniota vastaavat kvaterniokonjugaatit ovat lauseen 3.21 nojalla

$$\overline{q_1} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha_1} & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \text{ ja } \overline{q_2} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha_2} & \beta_2 \\ -\beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Edelleen kvaterniokonjugaattien $\overline{q_2}$ ja $\overline{q_1}$ tulo on määritelmän 3.11 mukaan

$$\overline{q_2} \overline{q_1} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha_2} \overline{\alpha_1} - \beta_2 \beta_1 & \overline{\alpha_2} \beta_1 + \beta_2 \alpha_1 \\ -\beta_2 \overline{\alpha_1} - \alpha_2 \beta_1 & -\beta_2 \beta_1 + \alpha_2 \alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi kvaternioiden tulo konjugaattia eli $\overline{q_1 q_2}$. Määritelmän 3.11 nojalla kvaternioiden tulo transpoosi on

$$(q_1 q_2)^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \overline{\beta_2} & \overline{\beta_1} \alpha_2 + \overline{\alpha_1} \overline{\beta_2} \\ -\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \overline{\alpha_2} & -\overline{\beta_1} \beta_2 + \overline{\alpha_1} \overline{\alpha_2} \end{bmatrix}.$$

Nyt ottamalla jokaisesta transponoidun matriisin $(q_1 q_2)^T$ alkiosta kompleksikonjugaatti saadaan tuloksena lauseen 3.21 nojalla kvaternioiden tulo konjugaatti eli

$$\overline{q_1 q_2} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \overline{\beta_2}} & \overline{\overline{\beta_1} \alpha_2 + \overline{\alpha_1} \overline{\beta_2}} \\ \overline{-\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \overline{\alpha_2}} & \overline{-\overline{\beta_1} \beta_2 + \overline{\alpha_1} \overline{\alpha_2}} \end{bmatrix},$$

joka voidaan lausetta 2.4 käyttäen kirjoittaa muodossa

$$\overline{q_1 q_2} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha_1} \overline{\alpha_2} - \overline{\beta_1} \beta_2 & \beta_1 \overline{\alpha_2} + \alpha_1 \beta_2 \\ -\overline{\alpha_1} \beta_2 - \overline{\beta_1} \alpha_2 & -\beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Koska kompleksilukujen tulo on kommutatiivinen, niin saadaan $\overline{q_2} \overline{q_1} = \overline{q_1 q_2}$. \square

Kvaterniokonjugaatista siirrytään tarkastelemaan *kvaternion modulia*. Kompleksilukujen tavoin myös kvaternioille voidaan määrittellä moduli $|q|$, joka kertoo kvaternion etäisyyden origosta.

MÄÄRITELMÄ 3.23. Olkoon $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ kvaternio. Tällöin kvaternion q *itseisarvo* eli *moduli* on reaaliluku

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Kompleksilukujen yhteydessä todettiin myös, että kompleksiluvun modulin neliö on sitä vastaavan matriisin determinantti. Vastaava tulos pätee myös kvaternioiden tapauksessa, toisin sanoen kvaternion modulin neliö voidaan määrittellä myös kvaterniota vastaavan matriisin determinanttina.

LEMMA 3.24. *Olkoon kvaternio $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Tällöin*

$$|q|^2 = \det q.$$

Edellä esitetty aputuloks on lyhyt todistaa käyttäen määritelmää 3.23, determinantin määritelmää A.9 sekä tietoa $i^2 = -1$, joten todistus ohitetaan. Osoitetaan sen sijaan seuraava yleisempi lause.

LAUSE 3.25. *Olkoot kvaterniot $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, $q_1 = a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ja $q_2 = a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$. Tällöin*

- (1) $q\overline{q} = \det q \mathbf{1} = |q|^2 \mathbf{1}$,
- (2) $|q_1 q_2| = |q_1| |q_2|$.

TODISTUS. Olkoon kvaternio

$$q = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix},$$

missä $\alpha = a + di$ ja $\beta = b + ci$. Lauseen 3.21 mukaan kvaternion q kvaterniokonjugaattia vastaa matriisi

$$\overline{q} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Siten määritelmää 3.11 käyttäen saadaan, että kvaternion q ja sen kvaterniokonjugaatin tulo on

$$q\overline{q} = \begin{bmatrix} \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} & \alpha\beta - \beta\alpha \\ \beta\overline{\alpha} - \overline{\alpha}\beta & \beta\beta + \overline{\alpha}\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} & 0 \\ 0 & \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} \end{bmatrix}.$$

Edelleen hyödyntämällä tietoa $i^2 = -1$ sekä määritelmää 2.2 saadaan, että

$$\begin{aligned} \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} &= (a + di)(a - di) + (b + ci)(b - ci) \\ &= a^2 + d^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Näin ollen kvaternion q ja sen kvaterniokonjugaatin tuloa vastaa määritelmän 3.5 nojalla matriisi

$$q\bar{q} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{bmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1}.$$

Nyt käyttämällä lemmaa 3.24 saadaan $q\bar{q} = \det q\mathbf{1} = |q|^2\mathbf{1}$.

Osoitetaan vielä, että kahden kvaternion tulon moduli on sama kuin kahden kvaternion modulien tulo. Olkoot

$$q_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} \text{ ja } q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 \\ \bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

kaksi kvaterniota. Tällöin kvaternioiden tulo on määritelmän 3.11 nojalla

$$q_1q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\bar{\beta}_2 & -\alpha_1\beta_2 - \beta_1\bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2 & -\bar{\beta}_1\beta_2 + \bar{\alpha}_1\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Siten lemmaa 3.24 ja kompleksilukujen tulon kommutatiivisuutta käyttäen saadaan, että kvaternioiden tulon modulin neliö on

$$\begin{aligned} |q_1q_2|^2 &= \det(q_1q_2) \\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\bar{\beta}_2)(-\bar{\beta}_1\beta_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2) - (\bar{\beta}_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2)(-\alpha_1\beta_2 - \beta_1\bar{\alpha}_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 + \beta_1\bar{\beta}_2\bar{\beta}_1\beta_2 + \bar{\beta}_1\alpha_2\beta_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2\alpha_1\beta_2 \end{aligned}$$

ja kvaternioiden modulien tulon neliö on

$$\begin{aligned} (|q_1||q_2|)^2 &= |q_1|^2|q_2|^2 \\ &= (\det q_1)(\det q_2) \\ &= (\alpha_1\bar{\alpha}_1 + \beta_1\bar{\beta}_1)(\alpha_2\bar{\alpha}_2 + \beta_2\bar{\beta}_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 + \beta_1\bar{\beta}_2\bar{\beta}_1\beta_2 + \bar{\beta}_1\alpha_2\beta_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2\alpha_1\beta_2. \end{aligned}$$

Nyt huomataan, että $|q_1q_2|^2 = (|q_1||q_2|)^2$ ja ottamalla tästä neliöjuuri puolittain saadaan $|q_1q_2| = |q_1||q_2|$. \square

Edellä osoitettuja tuloksia käyttäen saadaan seuraava lause.

LAUSE 3.26. *Olkoot kvaterniot $q_1 = a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ja $q_2 = a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$ sekä niitä vastaavat kvaterniokonjugaatit \bar{q}_1 ja \bar{q}_2 . Tällöin pätee*

$$(q_1q_2)(\bar{q}_1\bar{q}_2) = (\det q_1q_2)\mathbf{1} = (\det q_1 \cdot \det q_2)\mathbf{1} = (q_1\bar{q}_1)(q_2\bar{q}_2) = q_1(q_2\bar{q}_2)\bar{q}_1.$$

TODISTUS. Lausetta A.10 käyttäen voidaan matriisien q_1 ja q_2 tulon determinantti kirjoittaa matriisien determinanttien tulona eli

$$(\det q_1q_2)\mathbf{1} = (\det q_1 \cdot \det q_2)\mathbf{1}.$$

Koska määritelmän 3.15 nojalla matriisi $\mathbf{1}$ on tulon neutraalialkio, niin saadaan

$$(\det q_1 \cdot \det q_2)\mathbf{1} = (\det q_1)\mathbf{1} \cdot (\det q_2)\mathbf{1}.$$

Edelleen lauseen 3.25 mukaan kvaternion ja sen konjugaatin tulo on sama kuin kvaterniota vastaavan matriisin determinantin ja matriisin $\mathbf{1}$ tulo, joten $(q_1q_2)(\bar{q}_1\bar{q}_2) = (\det q_1q_2)\mathbf{1}$ ja $(\det q_1)\mathbf{1} \cdot (\det q_2)\mathbf{1} = (q_1\bar{q}_1)(q_2\bar{q}_2)$. Yhdistämällä edellä osoitetut saadaan

$$(q_1q_2)(\bar{q}_1\bar{q}_2) = (\det q_1q_2)\mathbf{1} = (\det q_1 \cdot \det q_2)\mathbf{1} = (\det q_1)\mathbf{1} \cdot (\det q_2)\mathbf{1} = (q_1\bar{q}_1)(q_2\bar{q}_2).$$

Osoitetaan vielä, että $(q_1\bar{q}_1)(q_2\bar{q}_2) = q_1(q_2\bar{q}_2)\bar{q}_1$. Käyttämällä yllä osoitettua ja lausetta 3.22 saadaan

$$(q_1\bar{q}_1)(q_2\bar{q}_2) = (q_1q_2)(\overline{q_1q_2}) = (q_1q_2)(\bar{q}_2\bar{q}_1) = q_1(q_2\bar{q}_2)\bar{q}_1.$$

□

Aiemmassa luvussa todettiin, että jokaisella kompleksiluvulla on käänteisalkio yhteen- ja kertolaskun suhteen. Vastaavasti myös jokaisella kvaterniolla on käänteisalkiot näiden peruslaskutoimitusten suhteen.

LAUSE 3.27. *Olkoon kvaternio $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Tällöin kvaternion käänteisalkio yhteenlaskun suhteen on*

$$-q = -a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k},$$

joka toteuttaa yhtälön $q + (-q) = \mathbf{0}$. Lisäksi jos kvaternio q on nolasta eroava, niin tällöin kvaterniolla on yksikäsitteinen kertolaskun käänteisalkio

$$q^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}),$$

jolle pätee $qq^{-1} = \mathbf{1}$.

TODISTUS. Olkoot kvaterniot $q, -q$ ja q^{-1} kuten lauseessa 3.27. Osoitetaan ensin, että $-q$ on yhteenlaskun käänteisalkio. Määritelmän 3.5 nojalla kvaterniot q ja $-q$ voidaan esittää muodossa

$$q = \begin{bmatrix} a + id & -b - ic \\ b - ic & a - id \end{bmatrix} \text{ ja } -q = \begin{bmatrix} -a - id & b + ic \\ -b + ic & -a + id \end{bmatrix}.$$

Edelleen laskemalla nämä matriisit yhteen saadaan $q + (-q) = \mathbf{0}$.

Osoitetaan vielä, että q^{-1} on kertolaskun käänteisalkio eli pätee $qq^{-1} = \mathbf{1}$. Määritelmän 3.23 nojalla $\det(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ja lauseen 3.21 nojalla $\bar{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$. Siten voidaan merkitä

$$q^{-1} = \frac{1}{\det(q)}\bar{q}.$$

Koska $\det(q)$ on reaaliluku, niin lauseen A.8 mukaan reaaliluvun $\frac{1}{\det(q)}$ paikkaa voidaan vaihtaa matriisitulossa. Tulo qq^{-1} voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$qq^{-1} = q \frac{1}{\det(q)}\bar{q} = \frac{1}{\det(q)}q\bar{q}.$$

Edelleen lauseen 3.25 kohdan (1) mukaan $q\bar{q} = \det(q)\mathbf{1}$, joten näin ollen

$$qq^{-1} = \frac{1}{\det(q)}\det(q)\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

□

Siirrytään tarkastelemaan reaalikvaternioita. Osoitetaan, että reaalikvaterniot muodostavat kvaternioiden kertolaskuryhmän keskuksen, minkä todistamiseksi tarvitaan seuraava aputuloks.

LEMMA 3.28. *Olkoon kvaternio $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Tällöin*

- (1) jos $q\mathbf{k} = \mathbf{k}q$, niin $b = c = 0$,
- (2) jos $q\mathbf{i} = \mathbf{i}q$, niin $c = d = 0$.

TODISTUS. Osoitetaan lauseen kohta (1), kohta (2) saadaan vastaavasti. Oletetaan, että $q\mathbf{k} = \mathbf{k}q$. Nyt kvaternio q voidaan määritelmän 3.5 nojalla kirjoittaa muodossa

$$q = \begin{bmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{bmatrix},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Lasketaan tulot $q\mathbf{k}$ ja $\mathbf{k}q$, jolloin saadaan

$$q\mathbf{k} = \begin{bmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ai - d & bi - c \\ bi + c & -ai - d \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{k}q = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ai - d & -bi + c \\ -bi - c & -ai - d \end{bmatrix}.$$

Oletuksen nojalla $q\mathbf{k} = \mathbf{k}q$, joten tulomatriisien $q\mathbf{k}$ ja $\mathbf{k}q$ alkioiden on oltava samat. Siten $bi - c = -bi + c$ ja $bi + c = -bi - c$. Edelleen koska a, b, c ja d ovat reaalilukuja, niin saadaan $b = c = 0$. \square

LAUSE 3.29. *Reaalikvaterniot muodostavat kvaternioiden kertolaskuryhmän keskuksen.*

TODISTUS. Olkoot reaalikvaternio

$$r = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$$

ja mielivaltainen kvaternio

$$q = \begin{bmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{bmatrix},$$

missä $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Osoitetaan ensin, että $rq = qr$ kaikilla $q \in \mathbb{H}$ eli toisin sanoen r kuuluu kvaternioiden kertolaskuryhmän keskuksen. Nyt

$$rq = \begin{bmatrix} ea + edi & -eb - eci \\ eb - eci & ea - edi \end{bmatrix}$$

ja

$$qr = \begin{bmatrix} ae + dei & -be - cei \\ be - cei & ae - dei \end{bmatrix}.$$

Koska kompleksilukujen tulo on kommutatiivinen, niin saadaan $rq = qr$. Siten reaalikvaternioiden joukko kuuluu kvaternioiden kertolaskuryhmän keskuksen.

Osoitetaan vielä, että kvaternioiden kertolaskuryhmän keskus on täsmälleen reaalikvaternioiden joukko. Oletetaan, että $r = e\mathbf{1} + f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$ on kvaternio ja että kaikille kvaternioille $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ pätee $rq = qr$. Koska oletuksen nojalla kaikki kvaterniot ovat kommutatiivisia kvaternion r kanssa, niin myös peruskvaternioille $\mathbf{k}, \mathbf{i} \in \mathbb{H}$ pätee $r\mathbf{k} = \mathbf{k}r$ ja $r\mathbf{i} = \mathbf{i}r$. Tällöin lemmän 3.28 mukaan on oltava $f = g = h = 0$, mikä tarkoittaa määritelmän 3.2 nojalla täsmälleen sitä, että r on reaalikvaternio. Lisäksi selvästi reaalikvaternioiden joukko on kvaternioiden joukon osajoukko. Näin ollen ryhmän keskuksen määritelmän A.3 mukaan reaalikvaterniot muodostavat kvaternioiden kertolaskuryhmän keskuksen. \square

Nyt on määritelty kvaternioiden summa ja reaalikerta sekä monia laskusääntöjä näiden laskutoimitusten suhteen. Huomataan, että monet näistä summaa ja reaalikertaa koskevista säännöistä ovat vektoriavaruudelta (katso määritelmä A.16) vaadittavia ehtoja. Jatkossa kvaternioiden joukko oletetaankin vektoriavaruudeksi, mutta täsmällinen todistus sivuutetaan.

HUOMAUTUS 3.30. Kvaternioiden joukko \mathbb{H} muodostaa vektoriavaruuden, jonka kanta on $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Tämä edellä esitelty vektoriavaruus on varustettu normilla, joka on esitetty määritelmässä 3.23. Lisäksi vektoriavaruuden aliavaruuksia ovat kvaternioiden joukon osajoukot eli reaalikvaternioiden joukko $\text{Re}(\mathbb{H})$ ja puhtaiden kvaternioiden joukko $\text{Im}(\mathbb{H})$. Vektoriesitystä käyttäen puhtaille kvaternioille voidaan määritellä sisä- ja ristitulo.

MÄÄRITELMÄ 3.31. Olkoot puhtaat kvaterniot $u = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $v = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Tällöin määritellään kvaternioiden *sisätulo*

$$u \bullet v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

ja *ristitulo*

$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Lineaarisesta algebrasta ja geometriasta muistetaan, että jos $u \bullet v = 0$, niin vektorit u ja v ovat ortogonaaliset eli $u \perp v$. Vastaavasti jos $u \times v = 0$, niin vektorit u ja v ovat yhdensuuntaiset, jota merkitään $u \parallel v$. Kvaternioiden joukon muodostaman vektoriavaruuden ominaisuuksia sekä puhtaiden kvaternioiden sisä- ja pistetulon määritelmiä tullaan hyödyntämään myöhemmin tutkielman luvussa 4.

Kvaternioiden yhteys avaruuden rotaatioihin

Kvaterniot-luvusta muistetaan, että kvaternioiden joukko \mathbb{H} on neliulotteinen vektoriavaruus (katso huomautus 3.30) ja että kuvaus $\alpha: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\alpha(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = (a, b, c, d)$ on lineaarinen isomorfismi (katso lause 3.19). Nämä tulokset mielessä pitäen lähdetään tarkastelemaan avaruuden kiertoja kvaternioiden avulla. Luvun päälähteenä käytetään R. P. Burnin kirjaa *Groups: A Path to Geometry* [1, s.180–183] ja ensimmäistä alilukua lukuunottamatta luku etenee pääsääntöisesti tämän kirjan mukaisessa järjetyksessä. Burnin kirjan ohella lähteenä toimii John Stillwellin teos *Naive Lie Theory* [11, s.14–18].

Ensimmäisessä aliluvussa esitetään määritelmä kolmiulotteisen reaaliavaruuden kierroille ja tarkastellaan näitä kiertoja lyhyesti esimerkkien avulla. Avaruuden \mathbb{R}^3 kierroista siirrytään tarkastelemaan kvaternioiden konjugointikuvausta ja sen ominaisuuksia. Puolestaan pro gradun viimeisessä aliluvussa kootaan yhteen kaikki edellä esitetyt tulokset ja niitä käyttäen osoitetaan, että kolmiulotteisen avaruuden kierrot voidaan esittää kvaternioina. Tätä kvaternioiden ja avaruuden \mathbb{R}^3 välistä yhteyttä havainnollistetaan lisäksi esimerkkeillä.

4.1. Avaruuden rotaatiot

Tässä aliluvussa tarkastellaan lyhyesti avaruuden \mathbb{R}^3 rotaatioita, jotta kolmiulotteisen avaruuden kierrot ovat tutut ennen seuraaviin alilukuihin siirtymistä. Aluksi lukija johdatellaan avaruuden rotaatioihin luvussa 2 esitetyn tason kiertojen avulla. Tämän jälkeen esitellään avaruuden kiertojen määritelmä ja havainnollistetaan näitä kolmiulotteisen avaruuden rotaatioita yksinkertaisilla esimerkeillä.

Aiemmin luvussa 2 tarkasteltiin tason \mathbb{R}^2 kiertoja. Tällöin kierroksi määriteltiin kuvaus $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, joka kuvaa tason kantavektorit e_1 ja e_2 vektoreiksi $e_1 \cos \theta - e_2 \sin \theta$ ja $e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta$. Siirryttäessä tason kierroista avaruuden \mathbb{R}^3 kiertoihin tarvitaan lisäksi kiertoakseli, joka pysyy paikallaan. Tämän kiertoakselin kohtisuorassa komplementissa tason kiertokuvaus R_θ toimii luonnollisesti avaruuden \mathbb{R}^2 kiertona. Avaruuden kierroille löytyy useita erilaisia määritelmiä ja seuraavaksi esitetään eräs määritelmä näille kierroille.

MÄÄRITELMÄ 4.1. Lineaarinen isometria $R_{u,\theta}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on kierto, jos on olemassa ortonormaalikanta $\{u, v, w\}$ siten, että

$$R_{u,\theta}(u) = u,$$

$$R_{u,\theta}(v) = v \cos \theta - w \sin \theta,$$

$$R_{u,\theta}(w) = v \sin \theta + w \cos \theta,$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$.

Luvussa 2 määriteltiin tason kiertokuvaukselle R_θ matriisiesitys

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Myös avaruuden rotaatiot voidaan esittää 3×3 -matriiseina, jotka ovat kuitenkin huomattavasti monimutkaisempia kuin tason kiertomatriisit. Näin ollen tässä yhteydessä ei esitetä avaruuden kierron yleistä matriisiesitystä, vaan sen sijaan tarkastellaan sellaisten kiertojen matriisiesityksiä, missä kierto suoritetaan jonkin koordinaattiakselin suhteen eli x-, y- tai z-akselin suhteen. Tällaisia kolmiulotteisen avaruuden kiertoja kutsutaan *peruskiertoiksi*. Kiertoa kulman θ verran vastapäivään koordinaattiakselin x suhteen vastaa matriisi

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Tässä peruskierrossa $R_{x,\theta}$ x-akseli pysyy siis paikoillaan ja ainoastaan yz-tasoa kierretään kulman θ verran vastapäivään akselin x suhteen. Alaindeksi x kertoo, minkä koordinaattiakselin suhteen tason kierto tapahtuu ja θ ilmaisee, kuinka paljon tasoa kierretään. Vastaavasti kuin kierto x-akselin suhteen, voidaan myös kierrot y- ja z-akselien suhteen ilmaista matriiseina. Kiertoa kulman θ verran vastapäivään z-akselin suhteen, missä kierretään xy-tasoa, kuvaa neliömatriisi

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puolestaan xz-tason kiertoa kulman θ verran vastapäivään y-akselin suhteen vastaa matriisi

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Havainnollistetaan seuraavaksi näitä peruskiertoja kahdella yksinkertaisella esimerkillä.

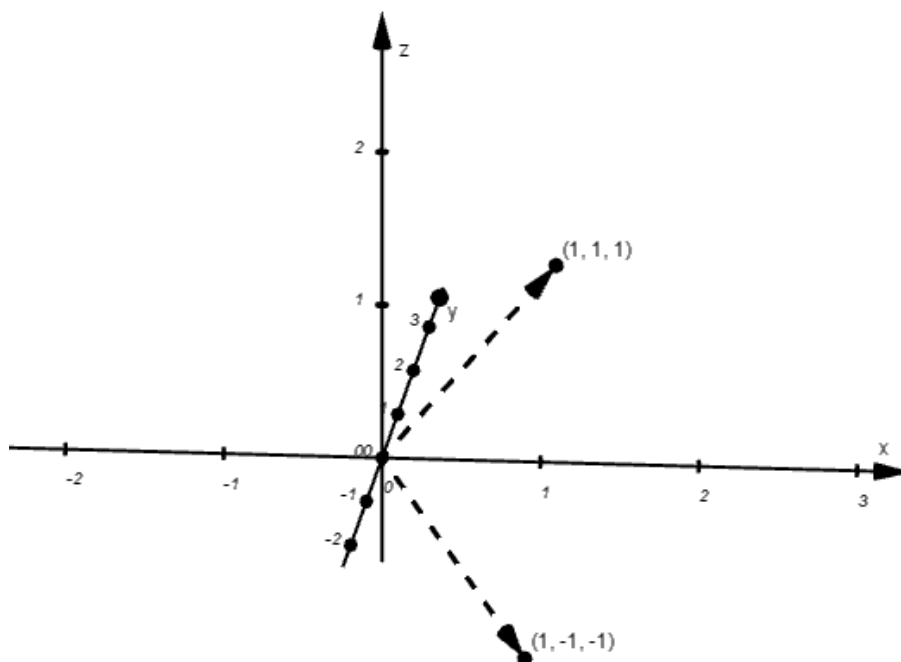
ESIMERKKI 4.2. Kierretään yz-tasoa 180 astetta vastapäivään x-akselin suhteen. Tätä peruskiertoa vastaa matriisi

$$R_{x,180^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ 0 & \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jos nyt avaruuden \mathbb{R}^3 vektorille $(1, 1, 1)$ halutaan suorittaa tämä peruskierto $R_{x,180^\circ}$, niin se saadaan kertomalla vektoria $(1, 1, 1)$ vastaavaa matriisiä vasemmalta peruskiertomatriisilla $R_{x,180^\circ}$ eli

$$R_{x,180^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Näin ollen saadaan, että vektorin $(1, 1, 1)$ kiertoa vastaa vektori $(1, -1, -1)$. Tätä kiertoa havainnollistetaan kuvassa 4.1.



KUVA 4.1. Peruskierto $R_{x,180^\circ}$ vektorille $(1, 1, 1)$.

ESIMERKKI 4.3. Kierretään xz -tasoa y -akselin suhteen 270 astetta vastapäivään, jolloin tätä kiertoa vastaavaksi matriisiksi saadaan

$$R_{y,270^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 270^\circ & 0 & \sin 270^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 270^\circ & 0 & \cos 270^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Edelleen jos nyt vektorille $(2, 4, 6) \in \mathbb{R}^3$ suoritetaan tämä peruskierto, saadaan

$$R_{y,270^\circ} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Siispä peruskierto $R_{y,270^\circ}$ kiertää vektorin $(2, 4, 6)$ vektoriksi $(-6, 4, 2)$.

Kuten edellä todettiin, ei avaruuden rotaatioiden käsittely ole kovinkaan yksinkertaista, sillä muun muassa niiden matriisiesitys on monimutkainen. Seuraavien alilukujen aikana tullaan kuitenkin huomaamaan, että kvaternioiden konjugointikuvauksen avulla näiden kiertojen tarkastelu helpottuu huomattavasti.

4.2. Kvaternioiden konjugointikuvaus

Seuraavaksi esitetään ja todistetaan tuloksia, joita tarvitaan kun avaruuden rotaatioita käsitellään kvaternioiden avulla. Erityisesti tutustutaan kvaternioiden konjugointikuvaukseen ja sen ominaisuuksiin. Lopuksi näytetään, kuinka konjugointikuvaus voidaan tulkita isometriana reaalissa kolmiulotteisessa avaruudessa.

Määritellään aluksi kvaternioiden *konjugointikuvaus*. Myöhemmin tullaan huomaamaan, että tämä kuvaus on hyvin oleellinen kolmiulotteisen reaaliavaruuden kiertojen käsittelyssä.

MÄÄRITELMÄ 4.4. Olkoot kvaternio $t \neq 0$. Kuvausta $\varrho_t: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$,

$$\varrho_t(q) = t^{-1}qt,$$

kutsutaan *konjugointikuvaukseksi* kvaternion t suhteen.

HUOMAUTUS 4.5. Mikäli asiayhteydestä käy selvästi ilmi konjugointikuvauksen kvaternio t , niin merkitään $\varrho := \varrho_t$.

Näytetään seuraavaksi, että lemmän 3.18 kuvauksen α , edellä määritellyn konjugointikuvauksen ϱ ja kuvauksen α käänteiskuvauksen yhdistetty kuvaus on lineaarinen bijektio. Osoitetaan kuitenkin ensin konjugointikuvausta koskeva aputulos.

LEMMA 4.6. *Konjugointikuvaus $\varrho: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\varrho(q) = t^{-1}qt$, on lineaarinen bijektio.*

TODISTUS. Olkoot kvaterniot q, q_1 ja q_2 sekä reaaliluku λ . Osoitetaan ensin, että konjugointikuvaus ϱ on lineaarikuvaus. Lauseen 3.17 nojalla kvaternioiden tulo on distributiivinen vasemmalta ja oikealta, joten saadaan

$$\varrho(q_1 + q_2) = t^{-1}(q_1 + q_2)t = t^{-1}q_1t + t^{-1}q_2t = \varrho(q_1) + \varrho(q_2).$$

Siten kaikille $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ pätee, että $\varrho(q_1 + q_2) = \varrho(q_1) + \varrho(q_2)$. Osoitetaan vielä, että $\varrho(\lambda q) = \lambda \varrho(q)$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$. Nyt lauseen 3.29 mukaan reaalkvaterniot muodostavat kvaternioiden kertolaskuryhmän keskuksen, joten

$$\varrho(\lambda q) = t^{-1}(\lambda q)t = t^{-1}(\lambda q \mathbf{1})t = \lambda \mathbf{1} t^{-1}qt = \lambda t^{-1}qt = \lambda \varrho(q).$$

Näin ollen konjugointikuvaus on lineaarikuvaus.

Seuraavaksi osoitetaan, että kuvaus ϱ on bijektio. Koska lineaarikuvaus on bijektio, jos se on injektio tai jos se on surjektio, niin riittää osoittaa kuvauksen $\varrho: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ injektiivisyys. Oletetaan, että $\varrho(q_1) = \varrho(q_2)$ eli $t^{-1}q_1t = t^{-1}q_2t$. Nyt kertomalla yhtälön molempia puolia ensin vasemmalta kvaterniolla t ja sitten oikealta kvaterniolla t^{-1} saadaan $\mathbf{1}q_1\mathbf{1} = \mathbf{1}q_2\mathbf{1}$ eli $q_1 = q_2$. Siten konjugointikuvaus on injektio ja edelleen bijektio. \square

Nyt tätä aputulosta käyttäen voidaan edelleen osoittaa seuraava yhdistetty kuvaus lineaariseksi bijektioksi.

LAUSE 4.7. *Olkoot kuvaus $\alpha: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^4$ kuten lemmassa 3.18 ja kuvaus $\varrho: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ kuten määritelmässä 4.4. Tällöin yhdistetty kuvaus $T_\alpha(\varrho): \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,*

$$T_\alpha(\varrho) = \alpha \circ \varrho \circ \alpha^{-1},$$

on lineaarinen bijektio.

TODISTUS. Lauseen 3.19 nojalla kuvaukselle α pätee

$$\alpha(q_1 + q_2) = \alpha(q_1) + \alpha(q_2)$$

kaikilla $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Puolestaan määritelmiä 3.9 ja 3.13 sekä kuvauksen α isomorfiisuutta käyttäen saadaan, että kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $q \in \mathbb{H}$ pätee yhtälö

$$\alpha(\lambda q) = \alpha(\lambda a \mathbf{1} + \lambda b \mathbf{i} + \lambda c \mathbf{j} + \lambda d \mathbf{k}) = \lambda \alpha(a \mathbf{1} + b \mathbf{i} + c \mathbf{j} + d \mathbf{k}) = \lambda \alpha(a, b, c, d) = \lambda \alpha(q).$$

Siten kuvaus α on lineaarinen, joten myös käänteiskuvaus α^{-1} lineaarikuvaus. Lisäksi edellä osoitetun lemmän 4.6 mukaan kuvaus ϱ on lineaarikuvaus. Koska lineaarikuvausten yhdistetty kuvaus on lineaarikuvaus, saadaan että kuvaus $T_\alpha(\varrho) = \alpha \circ \varrho \circ \alpha^{-1}$ on lineaarikuvaus. Osoitetaan vielä, että yhdistetty kuvaus $T_\alpha(\varrho)$ on bijektio. Lemmoja 3.18 ja 4.6 käyttäen voidaan todeta kuvausten α , ϱ ja α^{-1} olevan bijektioita. Edelleen saadaan, että näiden bijektioiden yhdistetty kuvaus $T_\alpha(\varrho) = \alpha \circ \varrho \circ \alpha^{-1}$ on bijektio. Havainnollistetaan tätä todistusta vielä seuraavalla kuvalla.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\varrho} & \mathbb{H} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{T_\alpha(\varrho)} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

□

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan konjugointikuvausta ϱ puhtaiden kvaternioiden $\text{Im}(\mathbb{H})$ joukossa. Yllä osoitettiin, että konjugointikuvaus ϱ kvaternioiden joukossa \mathbb{H} on lineaarinen bijektio. Myös puhtaiden kvaternioiden joukossa konjugointikuvaus on bijektio, mikä osoitetaan seuraavan lemmän jälkeen.

LEMMA 4.8. *Konjugointikuvaus ϱ kuvaa reaalikvaterniot reaalikvaternioiksi.*

TODISTUS. Olkoon $q \in \text{Re}(\mathbb{H})$ ja tällöin $\varrho(q) = t^{-1}qt$. Koska lauseen 3.29 nojalla reaalikvaterniot muodostavat kvaternioiden kertolaskuryhmän keskuksen, niin saadaan

$$\varrho(q) = t^{-1}qt = qt^{-1}t = q\mathbf{1} = q.$$

□

LAUSE 4.9. *Kuvaus $\varrho: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$, $\varrho(q) = t^{-1}qt$ on bijektio.*

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että kuvaus ϱ kuvaa todella puhtaat kvaterniot puhtaiksi kvaternioiksi. Aiemmassa lemmassa 4.8 osoitettiin, että kuvaus ϱ kuvaa reaalikvaterniot reaalikvaternioiksi. Tuosta lemmasta, kuvauksen ϱ lineaarisesta isomorfisuudesta ja huomiosta $\text{Im} \cap \text{Re} = \{0\}$ seuraa, että myös $\varrho: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$, sillä $\text{Re}(\mathbb{H})$ on kvaternioiden joukon \mathbb{H} aliavaruus.

Nyt voidaan näyttää, että kuvaus ϱ on bijektio puhtaiden kvaternioiden joukossa. Vastaavasti kuin lemmassa 4.6 saadaan osoitettua kuvauksen $\varrho: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ lineaarisuus. Lisäksi saman lemmän nojalla kuvaus $\varrho: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ on injektio ja tiedetään, että $\text{Im}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$, joten myös kuvauksen $\varrho: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ on oltava injektio. Näin ollen kuvaus ϱ puhtaiden kvaternioiden joukossa on lineaarikuvaus ja injektio, eli se on bijektio. □

Luvussa 3 näytettiin, että kuvaus α kvaternioiden joukolta \mathbb{H} avaruuteen \mathbb{R}^4 on rengasisomorfismi. Vastaava tulos pätee kuvaukselle, joka kuvaa puhtaat kvaterniot $\text{Im}(\mathbb{H})$ reaaliavaruuden \mathbb{R}^3 pisteiksi.

LAUSE 4.10. *Kuvaus $\beta: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}^3$,*

$$\beta(b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = (b, c, d)$$

on rengasisomorfismi.

Lauseen todistus menee vastaavasti kuin lemmassa 3.18 ja lauseessa 3.19, joten täsmällinen todistus sivuutetaan. Nyt lauseen nojalla puhtaiden kvaternioiden matriisi- ja \mathbb{R}^3 -esityksiä voidaan käyttää jatkossa rinnakkain. Lisäksi edellä osoitettua lausetta käyttäen saadaan, että kuvauksien β, ϱ ja β^{-1} yhdistetty kuvaus on lineaarinen isomorfismi.

SEURAUS 4.11. *Yhdistetty kuvaus* $T_\beta(\varrho): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T_\beta(\varrho) = \beta \circ \varrho \circ \beta^{-1}$$

on lineaarinen isomorfismi.

TODISTUS. Edellä esitetyn lauseen 4.10 nojalla kuvaus $\beta: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ on lineaarikuvaus, joten myös sen käänteiskuvaus $\beta^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ on lineaarinen. Koska lemmassa 4.6 näytettiin kuvauksen $\varrho: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ lineaarisuus, niin edelleen lineaarikuvausten yhdistetty kuvaus $T_\beta(\varrho) = \beta \circ \varrho \circ \beta^{-1}$ on lineaarinen. Lisäksi lauseiden 4.9 ja 4.10 nojalla kuvaukset ϱ, β ja β^{-1} ovat injektioita, joten myös niiden yhdistetty kuvaus $T_\beta(\varrho)$ on injektio. Kuvaus $T_\beta(\varrho)$ on siis lineaarinen injektio $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja siten kuvaus on lineaarinen isomorfismi. Vastaavasti kuin lauseen 4.7 todistuksessa, myös tätä todistusta voidaan havainnollistaa alla olevalla kuvalla.

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(\mathbb{H}) & \xrightarrow{\varrho} & \text{Im}(\mathbb{H}) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{T_\beta(\varrho)} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

□

Aliluvun lopuksi näytetään vielä, että konjugointikuvaus puhtaiden kvaternioiden joukossa $\text{Im}(\mathbb{H})$ voidaan itse asiassa tulkita avaruuden \mathbb{R}^3 isometriana. Osoitetaan ensin kuitenkin yksinkertaisempi tulos, jonka mukaan puhtaiden kvaternioiden joukossa konjugointikuvaus ϱ on isometria. Itse asiassa konjugointikuvaus ϱ koko kvaternioiden joukossa \mathbb{H} on isometria, mutta tässä yhteydessä riittää tarkastella konjugointikuvauksen rajoittumaa puhtaiden kvaternioiden joukkoon $\text{Im}(\mathbb{H})$.

LEMMA 4.12. *Olkoot kvaterniot q ja $t \neq 0$. Tällöin*

$$(t^{-1}qt)(\overline{t^{-1}qt}) = q\bar{q}.$$

TODISTUS. Lauseen 3.25 nojalla $q\bar{q} = \det q\mathbf{1}$. Koska determinantti on reaalityyppinen, niin determinanttien tulolle pätee kommutatiivisuus. Näin ollen lauseita A.10 ja 3.26 käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} (t^{-1}qt)(\overline{t^{-1}qt}) &= (t^{-1}\overline{t^{-1}})(q\bar{q}\overline{t}) \\ &= (t^{-1}\overline{t^{-1}})(q\bar{q})(t\bar{t}) \\ &= \det(t^{-1})\mathbf{1} \det q\mathbf{1} \det t\mathbf{1} \\ &= \det(t^{-1}) \det t \det q\mathbf{1} \\ &= \det(t^{-1}t) \det q\mathbf{1} \\ &= \det q\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Siten $(t^{-1}qt)(\overline{t^{-1}qt}) = q\bar{q}$.

□

LEMMA 4.13. Jos $q = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \text{Im}(\mathbb{H})$ ja $|\beta(q)| = x$, missä kuvaus $\beta: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ on kuten lauseessa 4.10, niin

$$q\bar{q} = x^2 \mathbf{1}.$$

TODISTUS. Lausetta 3.25 käyttäen saadaan, että $q\bar{q} = \det q \mathbf{1} = (b^2 + c^2 + d^2) \mathbf{1}$. Puolestaan määritelmän 3.23 nojalla $|\beta(q)| = x$ voidaan kirjoittaa muodossa $x = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$. Siten saadaan

$$q\bar{q} = (b^2 + c^2 + d^2) \mathbf{1} = x^2 \mathbf{1}.$$

□

Nyt edellä esiteltyjä lemmoja käyttämällä voidaan osoittaa, että konjugointikuvaus puhtaiden kvaternioiden joukossa on isometria.

LAUSE 4.14. Kuvaus $\varrho: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$, $\varrho(q) = t^{-1}qt$ on isometria, joka kiinnittää origon.

TODISTUS. Lemman 4.6 mukaan kuvaus $\varrho: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ on lineaarinen bijektio, joten $t^{-1}xt - t^{-1}yt = t^{-1}(x - y)t$. Lauseiden 3.25 ja 3.26 sekä lemموjen 4.12 ja 4.13 nojalla

$$\begin{aligned} |t^{-1}xt - t^{-1}yt|^2 \mathbf{1} &= \det(t^{-1}(x - y)t) \mathbf{1} \\ &= (t^{-1}(x - y)t)(\overline{t^{-1}(x - y)t}) \\ &= (x - y)(\overline{x - y}) \\ &= |x - y|^2 \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Ottamalla yhtälöstä neliöjuuri puolittain, saadaan $|x - y| = |\varrho(x) - \varrho(y)|$ eli kuvaus on isometria. Lisäksi selvästi $\varrho(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, joten kuvaus kiinnittää origon. Näin ollen kuvaus $\varrho: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ on origon kiinnittävä isometria. □

Seuraavaksi osoitetaan, että edeltävän lauseen tulos voidaan yleistää kuvausten β , ϱ ja β^{-1} yhdistetylle kuvaukselle. Toisin sanoen konjugointikuvaus puhtaiden kvaternioiden joukossa on itse asiassa avaruuden \mathbb{R}^3 isometria.

SEURAUUS 4.15. Yhdistetty kuvaus $T_\beta(\varrho): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T_\beta(\varrho) = \beta \circ \varrho \circ \beta^{-1}$ on origon kiinnittävä isometria.

TODISTUS. Edellä lauseessa 4.14 osoitettiin, että konjugointikuvaus ϱ on isometria, joka kiinnittää origon. Osoitetaan seuraavaksi vastaavat ominaisuudet kuvaukselle $\beta: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Olkoot puhtaat kvaterniot $q_1 = b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ja $q_2 = b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$. Koska lauseessa 4.10 näytettiin yhdistetty kuvaus $T_\beta(\varrho)$ rengasisomorfismiksi, niin pätee

$$\begin{aligned} |\beta(q_1) - \beta(q_2)| &= |(b_1, c_1, d_1) - (b_2, c_2, d_2)| \\ &= |(b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) - (b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k})| \\ &= |q_1 - q_2|. \end{aligned}$$

Lisäksi kuvaus β kiinnittää selvästi origon, sillä $\beta(\mathbf{0}) = (0, 0, 0)$.

Nyt on siis osoitettu, että kuvaukset β ja ϱ ovat isometrioita, jotka kiinnittävät origon. Koska vastaava tulos pätee myös kuvauksen β käänteiskuvaukselle β^{-1} , niin edelleen se pätee myös kuvausten β , ϱ ja β^{-1} yhdistetylle kuvaukselle $T_\beta(\varrho)$. □

4.3. Avaruuden rotaatioiden esittäminen kvaternioina

Kahdessa edeltävässä aliluvussa esiteltiin kvaternioiden konjugointikuvaus ja kolmiulotteisen avaruuden rotaatiot, ja seuraavaksi lähdetään osoittamaan yhteys näiden kuvausten välillä eli toisin sanoen osoitetaan tutkielman päätulos. Tätä tulosta varten tarvitaan kuitenkin liuta aputuloksia, jotka käydään läpi aliluvun alussa. Lopuksi päätulosta havainnollistetaan muutamalla esimerkillä.

Osoitetaan aluksi, että konjugointikuvaus ϱ_t pitää imaginaariosansa virittämän suoran paikallaan.

LAUSE 4.16. *Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $u \in \text{Im}(\mathbb{H})$, $t = a\mathbf{1} + bu$ ja kuvaus $\varrho_t: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\varrho_t(q) = t^{-1}qt$. Tällöin $ru = \varrho_t(ru)$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$.*

TODISTUS. Olkoon kvaternio $t = a\mathbf{1} + bu$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $u \in \text{Im}(\mathbb{H})$. Osoitetaan ensin, että tällöin $tu = ut$. Koska reaalityyppien a ja b paikkaa voidaan vaihtaa tulossa ja lisäksi lauseen 3.17 nojalla kvaternioiden tulo on distributiivinen vasemmalta ja oikealta, niin saadaan

$$tu = (a\mathbf{1} + bu)u = a\mathbf{1}u + buu = ua\mathbf{1} + ubu = u(a\mathbf{1} + bu) = ut.$$

Kun nyt kerrotaan edellä osoitettua yhtälöä $tu = ut$ vasemmalta kvaterniolla t^{-1} saadaan, että $u = t^{-1}ut$. Edelleen jos kerrotaan yhtälöä vasemmalta reaalityyppillä r voidaan yhtälö kirjoittaa muotoon $ru = t^{-1}rut = \varrho_t(ru)$. \square

Jatketaan kvaternioiden konjugointikuvauksen tarkastelua. Osoitetaan, että konjugointikuvauksen määräävä kvaternio t voidaan korvata kvaterniolla s , jonka normi on 1. Ennen tätä tulosta esitetään kuitenkin yksi aputulos sekä määritellään *yksikkökvaterniot*.

LEMMA 4.17. *Olkoot $s, t \in \mathbb{H}$. Tällöin kaikille kvaternioille q pätee $t^{-1}qt = s^{-1}qs$ jos ja vain jos $st^{-1} \in \text{Re}(\mathbb{H})$.*

TODISTUS. Oletetaan ensin, että kaikille kvaternioille q pätee $t^{-1}qt = s^{-1}qs$. Nyt kertomalla yhtälöä vasemmalta kvaterniolla s ja oikealta kvaterniolla t^{-1} voidaan yhtälö kirjoittaa lauseen 3.27 käyttäen muotoon $st^{-1}q = qst^{-1}$. Edelleen lauseen 3.29 nojalla reaalityyppiset kvaterniot muodostavat kvaternioiden kertolaskuryhmän keskuksen, joten on oltava $st^{-1} \in \text{Re}(\mathbb{H})$.

Oletetaan sitten, että $st^{-1} \in \text{Re}(\mathbb{H})$. Jälleen lauseen 3.29 käyttäen saadaan $st^{-1}q = qst^{-1}$. Jos nyt kerrotaan yhtälöä vasemmalta kvaternion s käänteisalkiolla ja oikealta kvaterniolla t , niin yhtälö saadaan muotoon $t^{-1}qt = s^{-1}qs$. \square

MÄÄRITELMÄ 4.18. Kvaterniota $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, missä $|q| = 1$, kutsutaan *yksikkökvaternioksi*. Puolestaan *puhtaaksi yksikkökvaternioksi* kutsutaan puhdasta kvaterniota $q = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, jonka normi on 1.

HUOMAUTUS 4.19. Jos kvaternio $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ on yksikkökvaternio, niin tällöin pätee $q^{-1} = \bar{q}$. Tämä tulos seuraa suoraan kvaternioiden kertolaskun käänteisalkion määritelmästä eli lauseesta 3.27.

Nyt edellä esitettyä lemmaa ja yksikkökvaternioiden määritelmää käyttäen saadaan seuraava tulos.

LAUSE 4.20. *Kaikille kvaternioille $t \neq 0$ on olemassa yksikkökvaternio s siten, että $t^{-1}qt = s^{-1}qs$ kaikilla $q \in \mathbb{H}$.*

TODISTUS. Valitaan $s = t/|t|$, jolloin $|s| = 1$. Nyt lauseiden 3.27 ja 3.25 nojalla $t^{-1} = \bar{t}/|t|^2$ ja $t\bar{t} = |t|^2\mathbf{1}$, joten saadaan

$$st^{-1} = \frac{t}{|t|} \cdot \frac{\bar{t}}{|t|^2} = \frac{1}{|t|} \cdot \frac{t\bar{t}}{|t|^2} = \frac{1}{|t|} \cdot \frac{|t|^2}{|t|^2} = \frac{1}{|t|}.$$

Koska $1/|t| \in \text{Re}(\mathbb{H})$, niin edellä osoitetun lemmän 4.17 mukaan kaikille kvaternioille q pätee $t^{-1}qt = s^{-1}qs$, kun $s = t/|t|$. \square

Edellä siis osoitettiin, että konjugointikuvauksen ϱ_t määräävä kvaternio t voidaan aina korvata yksikkökvaterniolla s . Osoitetaan nyt yksi aputuloks, minkä avulla saadaan johdettua uusi esitystapa tuolle yksikkökvaterniolle.

LEMMA 4.21. *Olkoot yksikkökvaternio $s = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ ja $\theta \in \mathbb{R}$. Jos $a^2 = \cos^2(\theta/2)$, niin $b^2 + c^2 + d^2 = \sin^2(\theta/2)$.*

TODISTUS. Kun $a^2 = \cos^2(\theta/2)$, niin kvaternion t normin neliö $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ voidaan kirjoittaa muodossa $\cos^2(\theta/2) + b^2 + c^2 + d^2$. Yksikkökvaternion normin neliö on 1, joten $\cos^2(\theta/2) + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Nyt vähentämällä yhtälön molemmilta puolilta $\cos^2(\theta/2)$ ja käyttämällä trigonometriasta tuttua kaavaa $\sin^2(\theta/2) = 1 - \cos^2(\theta/2)$ saadaan $b^2 + c^2 + d^2 = \sin^2(\theta/2)$. \square

LAUSE 4.22. *Yksikkökvaternio $s = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ voidaan kirjoittaa muodossa*

$$s = \cos(\theta/2)\mathbf{1} + \sin(\theta/2)u,$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja u on puhdas yksikkökvaternio.

TODISTUS. Oletuksen nojalla $|s| = 1$, joten normin määritelmää käyttäen saadaan $a, b, c, d \in [-1, 1]$. Näin ollen voidaan valita kulma $\theta/2$ siten, että $a = \cos(\theta/2)$. Lisäksi tällöin löydetään reaalityluvut e, f ja g , joille pätee $b = \sin(\theta/2)e, c = \sin(\theta/2)f$ ja $d = \sin(\theta/2)g$. Siten yksikkökvaternio s voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} s &= \cos(\theta/2)\mathbf{1} + (\sin(\theta/2)e)\mathbf{i} + (\sin(\theta/2)f)\mathbf{j} + (\sin(\theta/2)g)\mathbf{k} \\ &= \cos(\theta/2)\mathbf{1} + \sin(\theta/2)(e\mathbf{i} + f\mathbf{j} + g\mathbf{k}) \\ &= \cos(\theta/2)\mathbf{1} + \sin(\theta/2)u, \end{aligned}$$

kun merkitään $u = e\mathbf{i} + f\mathbf{j} + g\mathbf{k}$.

Osoitetaan vielä, että puhtaalle kvaterniolle u pätee $|u| = 1$. Koska $a = \cos(\theta/2)$, niin $a^2 = \cos^2(\theta/2)$. Näin ollen lemmän 4.21 mukaan on oltava $b^2 + c^2 + d^2 = \sin^2(\theta/2)$. Nyt edellä osoitetun nojalla $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = \sin(\theta/2)u$, joten saadaan

$$|b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}|^2 = |\sin(\theta/2)u|^2 = \sin^2(\theta/2).$$

Normin laskusääntöjä käyttäen voidaan kirjoittaa $|\sin(\theta/2)u|^2 = |\sin(\theta/2)|^2|u|^2 = \sin^2(\theta/2)|u|^2$ ja siten

$$\sin^2(\theta/2)|u|^2 = \sin^2(\theta/2).$$

Jakamalla nyt tämä yhtälö puolittain reaalityluvulla $\sin^2(\theta/2)$ saadaan $|u|^2 = 1$ eli $|u| = 1$. \square

Siirrytään tarkastelemaan puhtaiden kvaternioiden tuloa. Tutkielman kolmannesta luvusta muistetaan, että kvaternioilla on myös vektoriesitys. Lisäksi tuossa luvussa

määriteltiin puhtaiden kvaternioiden sisä- ja ristitulo (katso määritelmä 3.31). Seuraavan lauseen mukaan puhtaiden kvaternioiden tulo voidaan kirjoittaa sisä- ja ristitulon avulla.

LAUSE 4.23. *Olkoot $u, v \in \text{Im}(\mathbb{H})$. Tällöin puhtaiden kvaternioiden tulo on*

$$uv = -(u \bullet v)\mathbf{1} + u \times v.$$

TODISTUS. Koska aiemmin osoitettiin, että kuvaus $\beta: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \beta(b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = (b, c, d)$ on isomorfismi, niin kvaternioita u ja v vastaavat avaruuden \mathbb{R}^3 pisteet (u_1, u_2, u_3) ja (v_1, v_2, v_3) . Näiden pisteiden tulo on määritelmän 3.13 nojalla piste

$$uv = (u_1, u_2, u_3)(v_1, v_2, v_3) = (-u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3, u_2v_3 - u_3v_2, u_1v_3 - u_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Siten määritelmää 3.31 käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} uv &= -(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)\mathbf{1} + (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \\ &= -(u \bullet v)\mathbf{1} + u \times v. \end{aligned}$$

□

Jatketaan puhtaiden kvaternioiden tulon tarkastelua. Jos puhtaat kvaterniot ovat kohtisuorassa keskenään ja toinen puhtaista kvaternioista on puhdas yksikkökvaternio, niin tällöin näiden kvaternioiden tulolle pätee seuraava yhtälö.

LEMMA 4.24. *Olkoot $u, v \in \text{Im}(\mathbb{H})$ siten, että $|u| = 1$ ja $v \bullet u = 0$. Tällöin*

$$vu = v \times u = -uv = \bar{u}v = u^{-1}v$$

ja siten erityisesti $uvu = v$.

TODISTUS. Oletuksen nojalla $u, v \in \text{Im}(\mathbb{H})$ ja $v \bullet u = 0$, joten lausetta 4.23 käyttäen saadaan

$$vu = -(v \bullet u)\mathbf{1} + v \times u = v \times u.$$

Puolestaan reaalilukujen laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} v \times u &= (v_2u_3 - v_3u_2)\mathbf{i} + (v_1u_3 - v_3u_1)\mathbf{j} + (v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{k} \\ &= -(u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \\ &= -uv. \end{aligned}$$

Nyt oletuksesta $u \in \text{Im}(\mathbb{H})$ seuraa $-u = \bar{u}$ ja ehdosta $|u| = 1$ saadaan $u^{-1} = \bar{u}/|u|^2 = \bar{u}/1 = \bar{u}$. Siten on osoitettu

$$vu = v \times u = -uv = \bar{u}v = u^{-1}v.$$

Kun edellä osoitettua yhtälöä $vu = u^{-1}v$ kerrotaan vasemmalta kvaterniolla u saadaan $uvu = uu^{-1}v$ eli $uvu = v$. □

Edellisen aputuloksen avulla voidaan osoittaa uusi esitystapa kvaternion q konjugoinnille yksikkökvaterniolla s .

LAUSE 4.25. *Olkoot $v \in \text{Im}(\mathbb{H})$ ja yksikkökvaternio $s = \cos(\theta/2)\mathbf{1} + \sin(\theta/2)u$, missä $u \in \text{Im}(\mathbb{H})$ ja $|u| = 1$. Tällöin ehdosta $v \bullet u = 0$ seuraa*

$$s^{-1}vs = (\cos \theta)v + (\sin \theta)v \times u.$$

TODISTUS. Koska kvaterniolle s pätee $|s| = 1$, niin

$$s^{-1} = \bar{s}/|s|^2 = \bar{s} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)u.$$

Trigonometriasta muistetaan, että $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ ja $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$. Nyt hyödyntämällä edellä esitettyjä laskukaavoja, kvaternioiden distributiivisuutta ja lemmaa 4.24 saadaan

$$\begin{aligned} s^{-1}vs &= (\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)u)v(\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)u) \\ &= (\cos(\theta/2)v - \sin(\theta/2)uv)(\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)u) \\ &= \cos(\theta/2)\cos(\theta/2)v - \sin(\theta/2)\sin(\theta/2)uvu + \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)vu - \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)uv \\ &= \cos(\theta/2)\cos(\theta/2)v - \sin(\theta/2)\sin(\theta/2)v + \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)vu + \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)vu \\ &= (\cos(\theta/2)\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\sin(\theta/2))v + (\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) + \cos(\theta/2)\sin(\theta/2))vu \\ &= \cos(\theta)v + \sin(\theta)v \times u. \end{aligned}$$

□

Lisäksi lauseen 4.25 tilanteessa pätee, että kvaterniot $s^{-1}vs$ ja u ovat keskenään kohtisuorassa.

SEURAUUS 4.26. *Lauseen 4.25 tilanteessa*

$$(s^{-1}vs) \bullet u = 0.$$

TODISTUS. Lauseen 4.25 nojalla $v \bullet u = 0$ ja $s^{-1}vs = \cos\theta v + \sin\theta v \times u$. Siten lemmaa 4.24 ja kvaternioiden distributiivisuutta käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} (s^{-1}vs) \bullet u &= (\cos\theta v + \sin\theta v \times u) \bullet u \\ &= (\cos\theta v - \sin\theta uv) \bullet u \\ &= (\cos\theta - \sin\theta u)v \bullet u \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Kaikki edellä esitetyt tulokset huomioiden päästään viimein osoittamaan tutkielman päätulos. Osoitetaan siis, että kolmiulotteisen avaruuden rotaatiot voidaan esittää kvaternioiden konjugointikuvauksen avulla.

LAUSE 4.27. *Olkoot $s = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)u$, missä u on puhdas yksikkökvaternio. Tällöin konjugointikuvaus $\varrho_s: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$, $\varrho_s(q) = s^{-1}qs$, on avaruuden \mathbb{R}^3 rotaatio akselin u suhteen kulman θ verran.*

TODISTUS. Lauseen osoittamiseksi tulee näyttää, että puhtaiden kvaternioiden konjugointikuvaus voidaan esittää avaruuden \mathbb{R}^3 kiertokuvauksena ja että avaruuden \mathbb{R}^3 kiertokuvaus voidaan esittää puhtaiden kvaternioiden konjugointikuvauksena. Todistuksessa hyödynnetään lauseen 4.10 tulosta, jonka mukaan puhtaiden kvaternioiden matriisiesitystä ja \mathbb{R}^3 -esitystä voidaan käyttää rinnakkain.

Aloitetaan osoittamalla, että puhtaiden kvaternioiden konjugointikuvaus voidaan esittää kolmiulotteisen reaaliavaruuden kiertokuvauksena. Toisin sanoen näytetään, että annettu konjugointikuvaus $\varrho_s: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ toteuttaa avaruuden rotaation määritelmän 4.1 ehdot. Oletetaan, että on konjugointikuvaus $\varrho_s: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$,

$\varrho_s(q) = s^{-1}qs$, missä kvaternio $s = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)q_u \neq 0$ ja q_u on puhdas yksikkökvaternio. Olkoot lisäksi $q_v \in \text{Im}(\mathbb{H})$ siten, että $q_u \bullet q_v = 0$. Tällöin siis kvaterniot ovat keskenään ortogonaaliset. Valitaan nyt kvaternio q_w siten, että $q_w = q_u \times q_v$, ja tällöin puhtaiden kvaternioiden ristitulon määritelmän 3.31 nojalla $q_w \in \text{Im}(\mathbb{H})$. Näitä puhtaita kvaternioita $q_u = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $q_v = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ ja $q_w = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ vastaavat reaaliavaruuden \mathbb{R}^3 vektorit $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ ja $w = (w_1, w_2, w_3)$.

Ensin tulee osoittaa, että konjugointikuvaus on itse asiassa lineaarinen isometria kolmiulotteisessa reaaliavaruudessa. Aiemmin seurauksessa 4.11 näytettiin yhdistetty kuvaus $T_\beta(\varrho_s) = \beta \circ \varrho_s \circ \beta^{-1}$ lineaarikuvaukseksi ja puolestaan seurauksessa 4.15 todettiin yhdistetty kuvaus isometriaksi. Koska tuo yhdistetty kuvaus kuvaa avaruuden \mathbb{R}^3 pisteet edelleen avaruuden \mathbb{R}^3 pisteiksi, niin konjugointikuvaus ϱ_s voidaan tulkita lineaarisena isometriana avaruudessa \mathbb{R}^3 . Osoitetaan sitten, että u, v ja w muodostavat ortonormaalien kannan kolmiulotteisessa reaaliavaruudessa. Oletuksen nojalla $q_u \bullet q_v$ eli $u \bullet v = 0$, joten vektorit u ja v ovat ortogonaaliset. Lisäksi kvaternio q_w valittiin niin, että $q_w = q_u \times q_v$. Siten $w = u \times v$, joka ristitulon määritelmän nojalla tarkoittaa, että $w \perp u$ ja $w \perp v$. Näin ollen avaruuden \mathbb{R}^3 eräs ortonormaalikanta on $\{u, v, w\}$.

Seuraavaksi halutaan näyttää, että kvaternioita q_u , q_v ja q_w vastaaville vektoreille u, v ja w pätee

$$\varrho_s(u) = u, \quad \varrho_s(v) = v \cos \theta - w \sin \theta, \quad \varrho_s(w) = v \sin \theta + w \cos \theta,$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$. Lauseen 4.16 mukaan kuvaukselle $\varrho_s: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ pätee $r\varrho_s(q_u) = \varrho_s(rq_u)$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$, joten selvästi konjugointikuvaus kiinnittää kvaterniota q_u vastaavan vektorin u . Edelleen lauseita 4.20 ja 4.22 käyttäen saadaan, että kvaternio s voidaan valita yksikkökvaternioksi. Siten lauseen 4.25 ja ristitulon antisymmetrisyyden nojalla

$$\begin{aligned} \varrho_s(q_v) &= \cos(\theta)q_v + \sin(\theta)q_v \times q_u \\ (1) \quad &= \cos(\theta)q_v - \sin(\theta)q_u \times q_v \\ &= \cos(\theta)q_v - \sin(\theta)q_w. \end{aligned}$$

Puolestaan lemmaa 4.24 käyttäen saadaan $q_w \times q_u = q_wq_u$, $q_w = q_u \times q_v = q_uq_v$ ja $q_uq_vq_u = q_v$, joten kvaternion q_w konjugointi kvaterniolla s voidaan kirjoittaa seuraavasti

$$\begin{aligned} \varrho_s(q_w) &= \cos(\theta)q_w + \sin(\theta)q_w \times q_u \\ (2) \quad &= \cos(\theta)q_w + \sin(\theta)q_wq_u \\ &= \cos(\theta)q_w + \sin(\theta)q_uq_vq_u \\ &= \cos(\theta)q_w + \sin(\theta)q_v. \end{aligned}$$

Näin ollen korvaamalla yhtälöissä (1) ja (2) puhtaat kvaterniot niitä vastaavilla vektoreilla saadaan

$$\varrho_s(u) = u, \quad \varrho_s(v) = v \cos \theta - w \sin \theta, \quad \varrho_s(w) = v \sin \theta + w \cos \theta,$$

kuten haluttiinkin. Nyt huomataan avaruuden \mathbb{R}^3 rotaation määritelmää 4.1 tarkastelemalla, että konjugointikuvaus $\varrho_s: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ toteuttaa avaruuden rotaatiolta vaadittavat ehdot.

Osoitetaan sitten todistuksen toinen suunta, eli että kiertokuvaus $R_{u,\theta}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ voidaan esittää kvaterniokonjugaattina. Oletetaan aluksi, että on kiertokuvaus

$R_{u,\theta}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tällöin määritelmän 4.1 nojalla on siis avaruuden \mathbb{R}^3 ortonormaali-kanta $\{u, v, w\}$ siten, että

$$R_{u,\theta}(u) = u, \quad R_{u,\theta}(v) = v \cos \theta - w \sin \theta, \quad R_{u,\theta}(w) = v \sin \theta + w \cos \theta,$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$. Pisteitä $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ ja $w = (w_1, w_2, w_3)$ vastaavat puhtaat kvaterniot ovat $q_u = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $q_v = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ ja $q_w = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$. Etsitään nyt kvaternio s , jonka määräämä konjugointikuvaus $\varrho_s: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ vastaa annettua kiertokuvausta $R_{u,\theta}$.

Valitaan ensin konjugointikuvauksen määräävä kvaternio s . Aiemmin lauseessa 4.16 näytettiin, että jos q_u on puhdas kvaternio, niin tällöin konjugointi kvaterniolla $s = a\mathbf{1} + bq_u$ pitää kvaternion q_u paikallaan. Nyt $q_u \in \text{Im}(\mathbb{H})$, joten voidaan valita $s = a\mathbf{1} + bq_u$. Lisäksi koska kanta $\{u, v, w\}$ oletettiin ortonormaaliksi, niin $|u| = 1$ eli $|q_u| = 1$. Näin ollen lauseiden 4.20 ja 4.22 nojalla s voidaan kirjoittaa yksikkökvaterniona $s = \cos(\theta/2)\mathbf{1} + \sin(\theta/2)q_u$.

Osoitetaan nyt, että konjugointikuvaus valitulla yksikkökvaterniolla s toteuttaa yhtälöt

$$\varrho_s(q_u) = q_u, \quad \varrho_s(q_v) = q_v \cos(\theta) - q_w \sin(\theta), \quad \varrho_s(q_w) = q_v \sin(\theta) + q_w \cos(\theta).$$

Lauseen 4.16 nojalla ensimmäinen yhtälö $\varrho_s(q_u) = q_u$ toteutuu. Puolestaan kaksi muuta yhtälöä saadaan, kun hyödynnetään lausetta 4.25 ja tietoa, että $\{u, v, w\}$ on ortonormaalikanta. Koska avaruuden \mathbb{R}^3 eräs ortonormaalikanta on $\{u, v, w\}$, niin pareittain kannan vektoreiden u, v ja w pistetulot ovat nolliä sekä $v = u \times w$ ja $w = u \times v$. Erityisesti näitä kantavektoreita vastaaville puhtaille kvaternioille pätee siis $q_v = q_u \times q_w$, $q_w = q_u \times q_v$, $q_v \bullet q_u = 0$, $q_v \bullet q_w = 0$ ja $q_w \bullet q_u = 0$. Siten vastaavasti kuin aiemmin todistuksen kohdissa (1) ja (2) saadaan

$$\varrho_s(q_v) = q_v \cos(\theta) - q_w \sin(\theta), \quad \varrho_s(q_w) = q_v \sin(\theta) + q_w \cos(\theta).$$

Näin ollen löydettiin kvaternio s , jonka määräämä konjugointikuvaus $\varrho_s: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ vastaa annettua kiertokuvausta $R_{u,\theta}$. Toisin sanoen myös kolmiulotteisen reaaliavaruuden kiertokuvaus $R_{u,\theta}$ voidaan esittää kvaterniokonjugaattina. \square

Esitetään seuraavaksi muutama havainnollistava esimerkki tästä avaruuden \mathbb{R}^3 rotaatioiden ja kvaternioiden välisestä yhteydestä. Aloitetaan yksinkertaisella esimerkillä, missä tarkastellaan *Avaruuden rotaatiot*-aliluvussa esitettyä esimerkkiä.

ESIMERKKI 4.28. Esimerkissä 4.2 näytettiin, että jos vektorille $(1, 1, 1)$ suoriteetaan peruskierto $R_{x,180^\circ}$, niin tuloksena saadaan vektori $(1, -1, -1)$. Seuraavaksi sama kierto tehdään puhtaiden kvaternioiden konjugointikuvauksen avulla edeltävän lauseen 4.27 kuvaamalla tavalla. Vektoria $(1, 1, 1)$ vastaa puhdas imaginaarikvaternio $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Koska peruskierrossa $R_{x,180^\circ}$ kierto tapahtuu x-akselin suhteen, niin valitaan puhtaaksi yksikkökvaternioksi $u = i$. Lisäksi $\theta = 180^\circ$, joten konjugointikuvauksen määrääväksi yksikkökvaternioksi saadaan

$$s = \cos(180^\circ/2) + \sin(180^\circ/2)\mathbf{i} = \mathbf{i}.$$

Edellä määritellyn yksikkökvaternion s käänteiskvaternio on huomautuksen 4.19 nojalla $s^{-1} = \bar{s} = \cos(180^\circ/2) - \sin(180^\circ/2)\mathbf{i} = -\mathbf{i}$ ja edelleen peruskvaternioiden kertolaskusääntöjen eli lauseen 3.7 mukaan saadaan

$$\begin{aligned}\varrho_s(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) &= s^{-1}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})s \\ &= -\mathbf{i}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\mathbf{i} \\ &= (\mathbf{1} - \mathbf{k} + \mathbf{j})\mathbf{i} \\ &= \mathbf{i} - \mathbf{k}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{i} \\ &= \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Näin ollen kvaternion $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ konjugointia kvaterniolla s vastaa siis vektori $(1, -1, -1)$, eli konjugointikuvauksella päädyttiin saamaan lopputulokseen kuin kiertokuvauksella $R_{x,180^\circ}$.

Seuraavaksi siirrytään peruskierrosta hieman monimutkaisempaan avaruuden kiertoon.

ESIMERKKI 4.29. Kierretään vektoria $(1, 1, 1)$ akselin $(1, -2, 2)$ suhteen 180 astetta. Tällöin puhdas kvaternio $q = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vastaa vektoria $(1, 1, 1)$ ja puhdas kvaternio $u = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vastaa vektoria $(1, -2, 2)$. Aluksi huomataan, että $|u| \neq 1$, joten jaetaan puhdas kvaternio u modulillaan

$$u_1 = \frac{u}{|u|} = \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

Koska yllä lasketulle puhtaalle kvaterniolle u_1 pätee $|u_1| = 1$, niin voidaan laskea kvaternion q konjugoinnin määräävä kvaternio s

$$s = \cos(90^\circ) + \sin(90^\circ)u_1 = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Kvaternion s käänteiskvaternioksi saadaan huomautusta 4.19 käyttäen

$$s^{-1} = \cos(90^\circ) - \sin(90^\circ)u_1 = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Nyt lauseen 4.27 nojalla vektorin $(1, 1, 1)$ kiertoa kiertoakselin $(1, -2, 2)$ suhteen 180 astetta vastaa konjugointi

$$\varrho_s(q) = s^{-1}qs = \left(-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\left(\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right).$$

Koska $s^{-1}, q \in \text{Im}(\mathbb{H})$, niin puhtaiden kvaternioiden sisä- ja ristitulon määritelmiä (katso määritelmä 3.31) sekä lausetta 4.23 käyttäen saadaan

$$s^{-1}q = -(s^{-1} \bullet q)\mathbf{1} + s^{-1} \times q = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Siten kvaternioiden tulon määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\varrho_s(q) &= \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right)\left(\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) \\ &= -\frac{7}{9}\mathbf{i} - \frac{13}{9}\mathbf{j} - \frac{5}{9}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Tätä yllä laskettua puhdasta kvaterniota vastaa kolmiulotteisen avaruuden vektori $(-\frac{7}{9}, -\frac{13}{9}, -\frac{5}{9})$, joka siis kertoo vektorin $(1, 1, 1)$ kierron akselin $(1, -2, 2)$ suhteen 180 astetta.

Esitetään vielä yksi esimerkki, jossa näytetään, kuinka lauseen 4.25 tulosta voi hyödyntää avaruuden kiertojen tarkastelussa.

ESIMERKKI 4.30. Lasketaan konjugointikuvausta $\varrho_s: \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ käyttäen kolmiulotteisen reaaliavaruuden vektorin $(2, 1, -2)$ rotaatio, missä vektoria kierretään kiertoakselin $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ suhteen 30 astetta. Vektoria $(2, 1, -2)$ vastaava puhdas kvaternio on $v = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ja puolestaan vektoria $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ vastaava puhdas kvaternio on $u = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$. Konjugoinnin määräävä kvaternio s on tällöin

$$s = \cos(15^\circ)\mathbf{1} + \sin(15^\circ)u,$$

jonka normiksi saadaan

$$\begin{aligned} |s| &= \sqrt{(\cos(15^\circ))^2 + \left(\sin(15^\circ) \cdot \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\sin(15^\circ) \cdot \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\sin(15^\circ) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\right)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Siten kvaternio s on yksikkökvaternio. Nyt huomataan, että puhtaan kvaternion u normi on

$$|u| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1,$$

joten u on itse asiassa puhdas yksikkökvaternio. Lisäksi puhtaiden kvaternioiden v ja u sisätulolle pätee

$$v \bullet u = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

Näin ollen ristitulon määritelmän 3.31 ja lauseen 4.25 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \varrho_s(v) &= \cos(30^\circ)v + \sin(30^\circ)v \times u \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + \frac{1}{2}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= (\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} - \sqrt{3}\mathbf{k}) + (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}) \\ &= (\sqrt{3} + 1)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\mathbf{j} + \left(-\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

ja tätä puhdasta kvaterniota vastaa vektori $(\sqrt{3} + 1, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1, -\sqrt{3} + \frac{1}{2})$. Siispä vektorin $(2, 1, -2)$ kiertoa 30 astetta kiertoakselin $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ suhteen vastaa vektori $(\sqrt{3} + 1, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1, -\sqrt{3} + \frac{1}{2})$.

Yllä osoitettiin siis puhtaiden kvaternioiden konjugointikuvaus hyödylliseksi työkaluksi avaruuden rotaatioiden käsittelyssä sekä havainnollistettiin tätä esimerkein. Edelleen kvaternioista voidaan siirtyä *oktonioiden joukkoon* \mathbb{O} . Oktoniot muodostavat 8-ulotteisen jakoalgebran, mikä ei ole assosiativinen. Oktonioihin lukija voi halutessaan perehtyä lisää esimerkiksi J. H. Conwayn ja D. A. Smithin teoksesta *On quaternions and octonions: Their geometry, arithmetic, and symmetry* [2].

LIITE A

Esitietoja

Liitteessä palautellaan lukijalle mieleen joitakin peruskäsitteitä ja tuloksia, joihin tullaan viittaamaan tutkielman aikana. Esitiedot on jaoteltu neljään osaan: algebraan, trigonometriaan sekä matriisi- ja vektorilaskentaan. Esitetyt määritelmät ja tulokset pohjautuvat Tero Kilpeläisen luentomonisteeseen *Yhden reaaliuuttujan analyysin perusteet* [3], Kai Rajalan kurssimonisteisiin *Algebra* [8] ja *Algebra 1* [9] sekä Mikko Saarijärven luentomonisteeseen *Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa* [10].

1.1. Algebraa

MÄÄRITELMÄ A.1. Reaalilukujen a, b ja c yhteen- ja kertolaskulle on voimassa

- (1) $a + b = b + a$ ja $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutatiivisuus),
- (2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ ja $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (assosiatiivisuus),
- (3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributiivisuus).

MÄÄRITELMÄ A.2. *Ryhmäksi* kutsutaan laskutoimituksella \star varustettua epätyhjää joukkoa G , missä laskutoimitukselle \star pätevät seuraavat ehdot

- (1) kaikilla $a, b, c \in G$ pätee $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$,
- (2) on olemassa neutraalialkio $e \in G$ siten, että $e \star a = a \star e = a$ kaikilla $a \in G$,
- (3) kaikille $a \in G$ on olemassa käänteisalkio $d \in G$ siten, että $a \star d = d \star a = e$.

MÄÄRITELMÄ A.3. Ryhmän G *keskukseksi* $Z(G)$ kutsutaan joukkoa

$$Z(G) = \{a \in G : ag = ga \text{ kaikilla } g \in G\} \subset G.$$

MÄÄRITELMÄ A.4. *Renkaaksi* kutsutaan epätyhjää joukkoa A , joka on varustettu kahdella laskutoimituksella ja näille laskutoimituksille ovat voimassa seuraavat ehdot kaikilla $a, b, c \in A$

- (1) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- (2) $a + b = b + a$,
- (3) on olemassa $0_A \in A$ siten, että $a + 0_A = a = 0_A + a$ kaikilla $a \in A$,
- (4) kaikilla $a \in A$ on olemassa $d \in A$ siten, että $a + d = 0_A$,
- (5) $a(bc) = (ab)c$,
- (6) $a(b + c) = ab + ac$ ja $(a + b)c = ac + bc$,
- (7) on olemassa 1_A siten, että $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a$ kaikilla $a \in A$.

MÄÄRITELMÄ A.5. Olkoot renkaat A ja B . Kuvausta $f: A \rightarrow B$ kutsutaan *ren-gashomomorfismiksi*, jos $f(1_A) = 1_B$ ja kaikilla $a, b \in A$ pätee

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ ja } f(ab) = f(a)f(b).$$

MÄÄRITELMÄ A.6. Olkoot renkaat A ja B . *Rengasisomorfismiksi* kutsutaan kuvausta $f: A \rightarrow B$, joka on bijektiivinen rengashomomorfismi.

1.2. Matriisilaskentaa

Kompleksiarvoiset matriisit toimivat vastaavasti kuin reaaliarvoiset matriisit [11]. Siten seuraavat laskusäännöt ja ominaisuudet pätevät kompleksiarvoisille matriiseille.

LAUSE A.7. *Olkoot A, B ja C kolme $m \times n$ -matriisia sekä reaalityyppiset α ja β . Tällöin matriisien yhteen- ja kertolasku toteuttavat seuraavat säännöt*

- (1) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- (2) $A + B = B + A$,
- (3) $A + 0 = A$,
- (4) $A + (-1)A = 0$,
- (5) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
- (6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- (7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- (8) $1 \cdot A = A$.

LAUSE A.8. *Olkoot A, B ja C kolme matriisia, joiden yhteen- ja kertolaskut on määritelty. Tällöin pätevät seuraavat laskusäännöt*

- (1) $(AB)C = A(BC)$,
- (2) $A(B + C) = AB + AC$,
- (3) $(A + B)C = AC + BC$,
- (4) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ kaikilla reaalityyppisillä α ,
- (5) $A\mathbf{1} = A = \mathbf{1}A$,
- (6) $A\mathbf{0} = A = \mathbf{0}A$.

MÄÄRITELMÄ A.9. *Olkoot 2×2 -matriisi*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

missä $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$. Tällöin matriisin *determinantiksi* kutsutaan reaalityyppistä

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

LAUSE A.10. *Jos A ja B ovat kaksi samankokoista $n \times n$ -neliomatriisia, niin pätee*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

MÄÄRITELMÄ A.11. *Olkoon $m \times n$ -matriisi A . Matriisin A transpoosiksi kutsutaan $n \times m$ -matriisia $B = A^T$, missä $b_{ij} = a_{ji}$ kaikilla indekseillä i ja j .*

1.3. Trigonometriaa

LAUSE A.12. *Olkoot reaalityyppiset x ja y . Tällöin seuraavat yhtälöt pätevät*

- (1) $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$,
- (2) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$,
- (3) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

1.4. Vektorilaskentaa

MÄÄRITELMÄ A.13. Kuvausta $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kutsutaan *lineaarikuvaukseksi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot

- (1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja
- (2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $x \in \mathbb{R}^n$.

MÄÄRITELMÄ A.14. Olkoot joukot A ja B sekä joukon A alkiot a_1, a_2 . Kuvaus $f: A \rightarrow B$ on

- (1) *injektio*, jos $f(a_1) \neq f(a_2)$ aina, kun $a_1 \neq a_2$,
- (2) *surjektio*, jos jokaiselle $b \in B$ löytyy $a \in A$ siten, että $b = f(a)$,
- (3) *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio.

MÄÄRITELMÄ A.15. Bijektiota $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kutsutaan *isometriaksi*, jos

$$|f(a) - f(b)| = |a - b|$$

kaikilla $a, b \in \mathbb{R}^n$.

MÄÄRITELMÄ A.16. Olkoot x, y ja z kolme avaruuden \mathbb{R}^n vektoria sekä reaali-
luvut α ja β . Tällöin avaruutta \mathbb{R}^n kutsutaan *vektoriavaruudeksi*, jos sille pätevät seuraavat ehdot

- (1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (2) $x + y = y + x$,
- (3) $x + 0 = x$,
- (4) $x + (-x) = 0$,
- (5) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- (6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
- (7) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- (8) $1 \cdot x = x$.

MÄÄRITELMÄ A.17. Olkoot $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja $y = (y_1, y_2, y_3)$ kaksi avaruuden \mathbb{R}^3 vektoria. Tällöin vektorien x ja y *sisätuloksi* kutsutaan reaalilukua

$$x \bullet y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

ja *ristituloksi* vektoria

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Sisätulo on symmetrinen eli $x \bullet y = y \bullet x$, mutta ristitulo on antisymmetrinen, sillä $x \times y = -y \times x$.

LIITE B

Merkintöjä

| <i>Merkintä</i> | <i>Selitys</i> |
|---------------------------------|--|
| \mathbb{R} | Reaalilukujen joukko |
| \mathbb{C} | Kompleksilukujen joukko |
| \mathbb{H} | Kvaternioiden joukko |
| M | Peruskvaternioiden joukko $\{\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$ |
| $\operatorname{Re}(z)$ | Kompleksiluvun $z = a + bi$ reaaliosa $a \in \mathbb{R}$ |
| $\operatorname{Im}(z)$ | Kompleksiluvun $z = a + bi$ imaginaariosa $b \in \mathbb{R}$ |
| $\operatorname{Re}(\mathbb{H})$ | Reaalikvaternioiden joukko $\{a\mathbf{1} : a \in \mathbb{R}\}$ |
| $\operatorname{Im}(\mathbb{H})$ | Puhtaiden kvaternioiden joukko $\{bi + cj + dk : b, c, d \in \mathbb{R}\}$ |
| $ \cdot $ | Moduli eli itseisarvo |
| \bar{z} | Kompleksiluvun $z = a + bi$ kompleksikonjugaatti |
| \bar{q} | Kvaternion $q = a\mathbf{1} + bi + cj + dk$ kvaterniokonjugaatti |
| $R_\theta(x, y)$ | Kiertokuvaus tasossa \mathbb{R}^2 |
| $M_a(x, y)$ | Venytyokuvaus tasossa \mathbb{R}^2 |
| $R_{u, \theta}$ | Kiertokuvaus avaruudessa \mathbb{R}^3 |

Kirjallisuutta

- [1] R.P.BURN: *Groups: A path to geometry*. Cambridge University Press, 1985.
- [2] J. H. CONWAY, D. A. SMITH: *On quaternions and octonions: Their geometry, arithmetic, and symmetry*. A K Peters, 2003.
- [3] T. KILPELÄINEN: *Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2015.
- [4] J. LEHRBÄCK, J. PARKKONEN: *Lukualueet*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2010.
- [5] N. MUKUNDA: *Sir William Rowan Hamilton*. Resonance 21 (2016), no. 6, 493-510.
- [6] M. NAKANE: *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*. Historia Mathematica 30 (2003), no. 4, 514-516.
- [7] H. POLVINEN: *Kompleksiluvut ja kvaterniot kiertoina*. Pro gradu, Jyväskylän yliopisto, 2012.
- [8] K. RAJALA: *Algebra*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2016.
- [9] K. RAJALA: *Algebra 1: Ryhmät*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2017.
- [10] M. SAARIMÄKI: *Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa*. Luentomoniste 65, Jyväskylän yliopisto, 1926.
- [11] J. STILLWELL: *Naive Lie theory*. Springer, 2008.
- [12] A. VÄHÄKANGAS: *Kompleksilaskenta*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2018.