

Vakioleveät joukot

Jenni Grön

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: Jenni Grön, *Vakioleiveät joukot*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 40 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutkia vakioleiveitä joukkoja ja niihin liittyviä tuloksia. Vakioleiveät joukot ovat joukkoja, joiden leveys jokaiseen suuntaan on yhtä suuri. Tasossa tämä tarkoittaa sitä, että rajattaessa joukko kahden yhdensuuntaisen suoran väliin siten, että suorat juuri koskettavat joukkoa, suorien etäisyys on vakio riippumatta siitä, missä kohtaa suorat sivuavat joukkoa. Yksinkertaisin esimerkki vakioleiveästä joukosta on kiekko, mutta joukkoja on muitakin. Eräs tunnetuimmista vakioleiveistä joukoista on Franz Reuleaux’lta nimensä saanut Reuleaux’n kolmio, joka muodostetaan tasasivuisesta kolmiosta yhdistämällä viereiset kolmion kärjet ympyrän kaarella.

Työssä lähdetään liikkeelle konveksin joukon määritelmästä sekä tutustutaan konveksien joukkojen geometriaan yleisessä avaruudessa. Lisäksi tutustutaan hypertason ja tukitason määritelmiin ja todistetaan, että kompaktin ja konveksin joukon jokaisessa reunapisteessä on olemassa tukitaso. Seuraavaksi siirrytään joukon leveyden määrittelyyn, mistä päästään luontevasti tutkimaan vakioleiveitä joukkoja. Tämän jälkeen rajoitutaan tasoon, sillä vaikka vakioleiveitä joukkoja on tutkittu melko paljon, niistä tiedetään suhteellisen vähän \mathbb{R}^2 :sta korkeammissa ulottuvuuksissa.

Työn päätuloksena todistetaan Barbierin lause, jonka mukaan vakioleiveiden joukkojen piiri lasketaan kertomalla joukon halkaisija piillä, kuten lasketaan myös ympyrän piirin pituus. Lisäksi todistetaan, että edellä mainittu Reuleaux’n kolmio on vakioleiveä ja annetaan muita esimerkkejä tason vakioleiveistä joukoista. Kaksiulotteisten vakioleiveiden joukkojen pinta-aloille voidaan myös antaa rajat. Annetun levyisistä vakioleiveistä joukoista suurin pinta-ala on kiekolla ja pienin pinta-ala on Reuleaux’n kolmiolla. Lopuksi esitellään hieman kolmiulotteisten vakioleiveiden joukkojen eli kapaleiden muodostamistapoja sekä esimerkkejä niistä.

Vakioleiveillä joukoilla on myös monia sovelluskohteita. Niitä on käytetty vanhan-aikaisissa filmiprojektoreissa filmin liikuttamiseen, Wankelin moottorissa kiertomäntänä sekä poranterissä. Mielenkiintoisin näistä on poranterä, sillä vakioleiveisiin joukkoihin pohjautuvilla terillä on mahdollista porata neliön mallisia reikiä. Vakioleiveitä joukkoja voi löytää myös Iso-Britannian kolikoista, joista 20 ja 50 pennyn kolikot ovat muodoltaan vakioleiveitä.

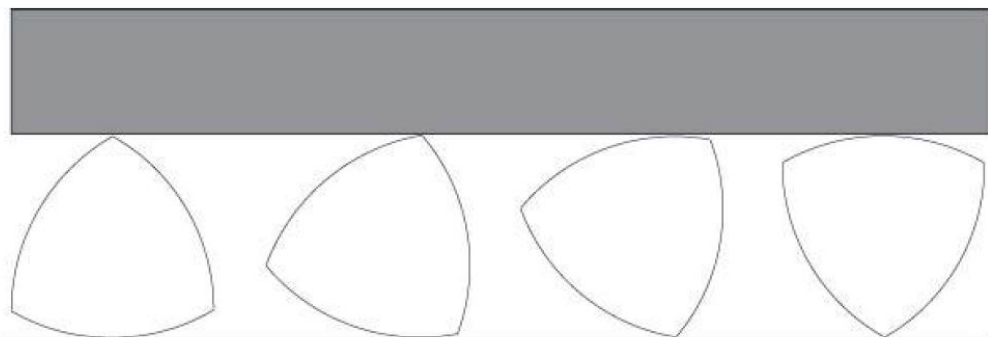
Sisältö

1	Johdanto	1
2	Konveksit joukot	4
2.1	Hypertasot	6
2.2	Konveksin joukon tukitasot	7
3	Vakioleveät joukot	12
3.1	Joukon leveys	12
3.2	Täydelliset joukot	14
4	Vakioleveät joukot \mathbb{R}^2:ssa	20
4.1	Barbierin lause	20
4.2	Cauchyn ja Croftonin kaava	24
4.3	Reuleaux'n kolmio	25
4.4	Kolmiulotteiset vakioleveät joukot	33
4.5	Vakioleveiden joukkojen sovelluksia	35

Luku 1

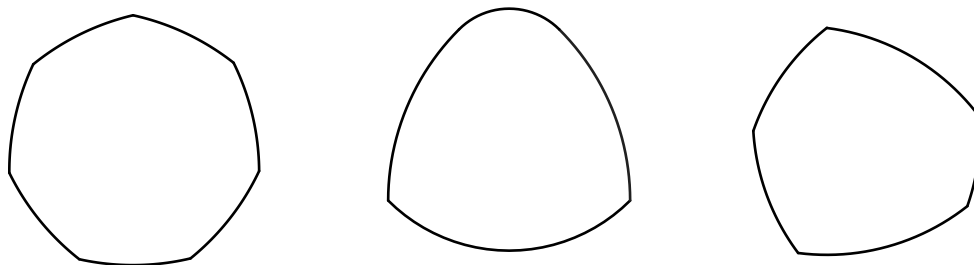
Johdanto

Painavien kuormien siirtämiseen voidaan käyttää rullia, joiden päällä kuormaa voidaan työntää. Useimmissa tapauksissa rulla on muodoltaan kiekko, jonka avulla kuormia on mahdollista kuljettaa tasaisesti tietyn etäisyyden päässä maasta. Tämä vähentää liikuttamiseen vaadittavaa voimaa. Kiekko ei kuitenkaan ole ainoa mahdollinen muoto rullan poikkileikkaukselle. Oleellista rullassa on sen poikkileikkaus: jos se liitetään kahden yhdensuuntaisen suoran (tai tason) väliin, poikkileikkauksen tulee osua pyöritettäessä tasaisesti kumpaankin suoraan. Poikkileikkauksen on siis oltava yhtä leveä joka suuntaan - se on siis vakioleveys.



Kuva 1.1: Sivukuva tilanteesta, jossa kuormaa (harmaa palkki) siirretään poikkileikkaukseltaan vakioleveyden rullien päällä. Kuva kirjasta *Geometry of Convex Sets* (Leonard & Lewis, 2015, [10, luku 4.4]).

Toinen lähestymistapa vakioleveysiin joukkoihin on lähteä liikkeelle kuviosta, joka vaikuttaa ympyrältä. Miten voidaan olla varmoja, että ympyrä todella on ympyrä ja mikä on riittävä todiste tälle? Onko ympyrällä sellaisia ominaisuuksia, jotka mielletään ympyrälle ominaisiksi, mutta toteutuvat myös ei-ympyrän muotoisissa kuvioissa? Ympyrän leveys joka suuntaan on sama, mutta riittääkö tämä ehdoksi sille, että kuvio on ympyrä? Osoittautuu, että on olemassa kuvioita, jotka ovat joka suuntaan yhtä leveitä, mutta joissa on silti havaittavissa selkeitä kulmia. Tällaisia kuvioita kutsutaan vakioleveysjoukoiksi. [2, luku 10].



Kuva 1.2: Esimerkkejä vakioleveistä joukoista, jotka eivät ole kiekkoja.

Kiekko on tietysti yksinkertaisin tason vakioleveä joukko, mutta ei ainoa. Toinen yleinen esimerkki on Reuleaux'n kolmio, joka esitellään tämän työn luvussa 4.3. Reuleaux'n kolmion esitteli Franz Reuleaux (1829-1905) ([10, luku 4.4]), joka todisti, että Reuleaux'n kolmiota voidaan kiertää neliön sisällä siten, että se osuu koko ajan neliön jokaiseen reunaan. Tätä oivallusta on myöhemmin hyödynnetty esimerkiksi filminprojektorissa [17, luku 7]. Vakioleveitä joukkoja on hyödynnetty myös esimerkiksi punnan kolikoiden muotoilussa, sillä 20 ja 50 pennyn kolikot ovat Reuleaux'n monikulmioiden muotoisia [2, luku 10]. Nämä ja muutama muu sovelluskohde vakioleveille joukoille esitellään työn luvussa 4.5.



Kuva 1.3: Iso-Britannian 20 pennyn kolikko.

Tässä työssä tutustutaan kompakteihin ja konvekseihin vakioleveisiin joukkoihin. Työ aloitetaan siis käsittelemällä kompaktien ja konveksien joukkojen ominaisuuksia yleisessä avaruudessa \mathbb{R}^n . Oleellisia tuloksia ovat lause 2.12, jonka mukaan kompaktille joukolle on olemassa annetun hypertason suuntainen tukitaso, sekä lause 2.15, jonka mukaan kompaktin ja konveksin joukon reunapisteessä on olemassa tukitaso. Seuraavaksi esitellään joukon leveyden käsite, minkä jälkeen päästään käsiksi vakioleveän joukon määritelmään ja ominaisuuksiin. Lauseessa 3.14 osoitetaan, että kompakti ja konvekksi vakioleveä joukko on täydellinen joukko, jolloin vakioleveään joukkoon ei voida lisätä pisteitä kasvattamatta joukon halkaisijaa.

Vaikka muutamia tuloksia vakioleveistä joukoista tiedetään yleisellä tasolla, suurin osa työssä käsiteltävistä vakioleveiden joukkojen ominaisuuksista pätee vain tasossa. Luvussa 4 rajoitutaan tasoon ja esitellään muun muassa *Barbierin lauseena* tunnettu

tulos (lause 4.3), jonka mukaan vakioleveiden joukkojen piiri lasketaan kuten ympyröiden: kertomalla joukon halkaisija piillä. Lisäksi osoitetaan, että edellä mainittu Reuleaux'n kolmio todella on vakioleveä ja annetaan muita esimerkkejä tason vakioleveistä joukoista. Toinen mielenkiintoinen lause luvussa 4 on lause 4.11, jonka mukaan vakioleveän joukon kulma on vähintään 120 astetta. Työn lopuksi esitellään vielä kolmiulotteisia vakioleveitä kappaleita sekä palataan edellä mainittuihin vakioleveiden joukkojen sovelluskohteisiin.

Työn päälähteenä on käytetty Leonardin ja Lewisin teosta *Geometry of Convex Sets* [10] sekä Egglestonin kirjaa *Convexity* [4]. Lisäksi ideoita on haettu lukemalla Bergerin *Geometry II*-teosta [1]. Yksittäisiä tuloksia on yhdistelty myös muista lähteistä. Työssä esiintyvät kuvat on pääsääntöisesti piirretty GeoGebralla, pois lukien kuvat 3.2 ja 3.4, jotka on piirretty Pythonilla. Tästä poikkeavien kuvien lähteet on mainittu kuvateksteissä.

Merkintöjä

<i>Merkintä</i>	<i>Selitys</i>
\overleftrightarrow{AB}	Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora
$d(H_1, H_2)$	Objektien H_1 ja H_2 välinen etäisyys
$m \perp l$	Suorat m ja l ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan
$m \parallel l$	Suorat m ja l ovat yhdensuuntaiset
$[a, b[$	Puoliavoin jana, joka sisältää pisteen a , mutta ei pistettä b
$\langle p, q \rangle$	Vektoreiden p ja q sisätulo
$\text{int } A$	Joukon A sisäpisteiden joukko

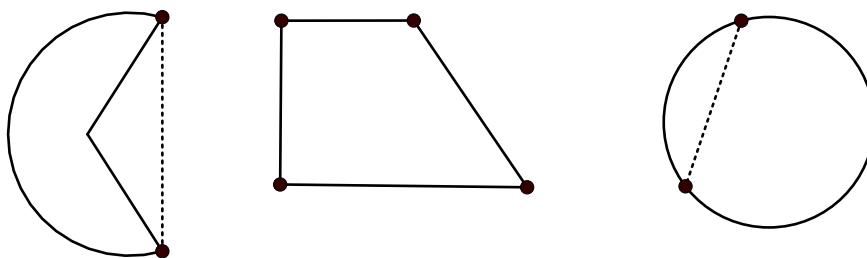
Luku 2

Konveksit joukot

Tässä luvussa määritellään työssä tarvittavia käsitteitä ja todistetaan konvekseja joukkoja käsitteleviä lauseita. Lukijan oletetaan olevan perillä geometrian aksioomista (lisää voi lukea esimerkiksi lähteestä [5]) sekä peruskäsitteistä, kuten joukkojen yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus. Työn kannalta oleellisia käsitteitä ovat kompakti ja konvekxi joukko. Kompakti joukko tarkoittaa euklidisessa avaruudessa \mathbb{R}^n suljettua ja rajoitettua joukkoa. Seuraavaksi määritellään konvekxi joukko hieman täsmällisemmin.

Määritelmä 2.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Joukko A on *konvekxi*, jos pisteille $x, y \in A$ pätee $(1 - \delta)x + \delta y \in A$ kaikilla $0 < \delta < 1$.

Jos $(1 - \delta)x + \delta y \in \text{int } A \forall \delta \in]0, 1[$ eli janan pisteet (päätepisteitä lukuunottamatta) ovat joukon A sisäpisteitä, niin A on aidosti konvekxi joukko.



Kuva 2.1: Esimerkit ei-konveksista, konveksista ja aidosti konveksista joukosta.

Konveksille joukolle pätee siis, että mitä tahansa kahta sen pistettä yhdistävä jana sisältyy myös kyseiseen joukkoon. Luonnollisena jatkumona osoitetaan, että konveksien joukkojen leikkaus on myös konvekxi.

Lause 2.2. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ konvekseja joukkoja. Tällöin myös niiden leikkaus on konvekxi.

Todistus. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ konvekseja joukkoja ja merkitään niiden leikkausta $C = A \cap B$. Otetaan pisteet x ja y siten, että $x, y \in C$. Koska C on joukkojen A ja B leikkaus, tällöin myös $x, y \in A$ ja $x, y \in B$. Koska nämä joukot ovat konvekseja, niin $[x, y] \subset A$ ja $[x, y] \subset B$. Koska jana $[x, y]$ sisältyy kumpaankin leikkauksen joukkoon, niin se sisältyy oleellisesti itse leikkaukseen eli $[x, y] \subset C$. Näin ollen myös C on konvekksi joukko. \square

Lause 2.3. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä ja suljettu konvekssi joukko. Tällöin jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ on olemassa yksikäsitteinen piste $p(A, x) \in A$ siten, että*

$$\|p(A, x) - x\| = \inf_{y \in A} \|y - x\|.$$

Todistus. Jos $x \in A$, niin $p(A, x) = x$, jolloin väite on selvä. Oletetaan siis, että $x \notin A$. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että suljetulle pallolle $\overline{B}(x, r)$ pätee

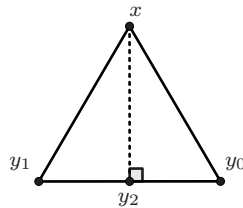
$$A \cap \overline{B}(x, r) \neq \emptyset.$$

Merkitään leikkausjoukkoa $A \cap \overline{B}(x, r) = A_r$. Nyt siis

$$\inf_{y \in A} \|y - x\| = \inf_{y \in A_r} \|y - x\|.$$

Koska leikkausjoukko A_r on kompakti ja kuvaus $f : y \mapsto \|y - x\|$ jatkuva, niin on olemassa piste $y_0 \in A_r$, jolle $f(y_0)$ on funktion minimiarvo joukossa A_r . On siis löydetty eräs ehdon toteuttava piste. Osoitetaan vielä, että piste on yksikäsitteinen.

Olkoon $y_1 \in A$ piste, jolle $f(y_1)$ on funktion f minimiarvo ja $y_1 \neq y_0$. Koska joukko A on konvekksi, myös pisteitä y_0 ja y_1 yhdistävä jana kuuluu joukkoon A , oleellisesti siis on piste $y_2 = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \in A$.



Nyt, Pythagoraan lauseen nojalla pisteelle y_2 pätee $\|y_2 - x\| < \|y_0 - x\|$ eli $f(y_2) < f(y_0)$, mikä on ristiriita. Tällöin siis ei voi olla toista minimikohtaa ja $p(A, x) = y_0$ on yksikäsitteinen. \square

Määritelmä 2.4. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Tällöin piste $p(A, x)$ on pisteen x *projektio* joukkoon A .

Piste $p(A, x)$ on siis joukon A pistettä x lähin piste. Lauseesta 2.3 seuraa, että kyseinen piste on olemassa ja yksikäsitteinen.

2.1 Hypertasot

Siirrytään tutkimaan hypertasoja. Hypertasolla tarkoitetaan käsiteltävän avaruuden aliavaruutta, joka on ulottuvuudeltaan yhtä pienempi. Tasossa \mathbb{R}^2 hypertaso on siis suora, \mathbb{R}^3 :ssa tavallinen taso. Määritellään hypertaso täsmällisesti, jolloin selvästi nähdään, että hypertaso jakaa avaruuden kahteen erilliseen osaan.

Määritelmä 2.5. Olkoot $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}$ vakioita. Lisäksi olkoon $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektori. Joukko

$$H_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = a\}$$

on parametrien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}$ määräämä *hypertaso*.

Jos merkitään $p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, saadaan hypertason määritelmälle tulkinta vektoreiden sisätulon avulla,

$$H_{p,a} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = a\},$$

missä p on hypertason $H_{p,a}$ normaalivektori.

Määritelmä 2.6. Olkoot $H_{p,a}$ ja $H_{q,b}$ avaruuden \mathbb{R}^n hypertasoja. Hypertasot ovat *yhdensuuntaiset*, jos ne eivät leikkaa tai ovat sama hypertaso. Ei siis ole olemassa $x \in \mathbb{R}^n$ siten, että $\langle p, x \rangle = a$ ja $\langle q, x \rangle = b$.

Edelliselle määritelmälle on helppo osoittaa, että hypertasot ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos niitä määrittävät normaalivektorit ovat yhdensuuntaiset. Esitellään ensin todistuksessa käytettävä aputuloks, jota ei tässä yhteydessä todisteta. Todistus käydään lineaarialgebran peruskurssilla (löytyy kurssin luentomonisteesta [14, s. 63]).

Lemma 2.7. *Olkoot $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus ja x_0 yhtälön $L(x) = c$ ratkaisu. Tällöin y_0 on yhtälön $L(x) = c$ ratkaisu jos ja vain jos $y_0 = x_0 + z$, missä z on yhtälön $L(x) = 0$ ratkaisu.*

Lause 2.8. *Hypertasot ovat yhdensuuntaiset, jos niitä määrittävät normaalivektorit ovat yhdensuuntaiset.*

Todistus. Olkoot $H_{p,a}$ ja $H_{q,b}$ hypertasoja kuten määritelmässä 2.6. Tutkitaan, onko hypertasoilla leikkausjoukko, joka toteuttaa yhtälöparin

$$\begin{cases} \langle p, x \rangle = a \\ \langle q, x \rangle = b. \end{cases} \quad (2.1)$$

Oletetaan, että niiden normaalivektorit p ja q ovat yhdensuuntaiset eli $p = \lambda q$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin kertomalla alemmaa yhtälöä λ :lla ja sijoittamalla $p = \lambda q$, saadaan yhtälöpari muotoon

$$\begin{cases} \langle \lambda q, x \rangle = a \\ \langle \lambda q, x \rangle = \lambda b, \end{cases}$$

mistä huomataan, että yhtälöparilla on ratkaisu vain, jos $a = \lambda b$. Tällöin $H_{p,a} = H_{q,b}$. Muussa tapauksessa hypertasot ovat yhdensuuntaiset.

Oletetaan seuraavaksi, että vektorit p ja q ovat lineaarisesti riippumattomia. Muodostetaan apukuvaus $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x) = (\langle p, x \rangle, \langle q, x \rangle)$. Nyt, koska vektorit p ja q ovat lineaarisesti riippumattomia, lineaarikuvaus L on surjektio ja sen kuvajoukon dimensio eli ulottuvuus on 2. Lineaarialgebran dimensiolauseen nojalla tällöin $\dim\{x \in \mathbb{R}^n : Lx = 0\} = n - 2$.

Tästä seuraa, että yhtälöparilla

$$\begin{cases} \langle p, x \rangle = 0 \\ \langle q, x \rangle = 0. \end{cases}$$

on olemassa ratkaisujoukko, joka muodostaa $n - 2$ -ulotteisen aliavaruuden. Tästä ja lemmasta 2.7 seuraa, että myös yhtälöparilla (2.1) on $n - 2$ -ulotteinen ratkaisujoukko kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ eli hypertasot $H_{p,a}$ ja $H_{q,b}$ leikkaavat aina. \square

Jatketaan määritelmän 2.5 merkinnöillä ja esitellään hypertasolle vielä yksi merkintätapa. Jos ajatellaan vektoreiden sisätuloa lineaarikuvauksen avulla, hypertaso on määrätyn kuvauksen alkukuva tietyllä vakion arvolla. Olkoot $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ja $l_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $l_p(x) = \langle p, x \rangle$ jatkuva lineaarikuvaus. Olkoon $a \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin hypertaso $H_{p,a}$ voidaan ilmaista kuvauksen l avulla seuraavasti

$$H_{p,a} = l_p^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : l_p(x) = a\}.$$

Määritelmä 2.9. $H_{p,a}$ jakaa avaruuden kahteen avoimeen puoliavaruuteen $H_{p,a}^-$ ja $H_{p,a}^+$, joille

$$\begin{aligned} H_{p,a}^- &= l_p^{-1}(] - \infty, a]) = \{x \in \mathbb{R}^n : l_p(x) < a\} \text{ ja} \\ H_{p,a}^+ &= l_p^{-1}(]a, \infty]) = \{x \in \mathbb{R}^n : l_p(x) > a\}. \end{aligned}$$

2.2 Konveksin joukon tukitasot

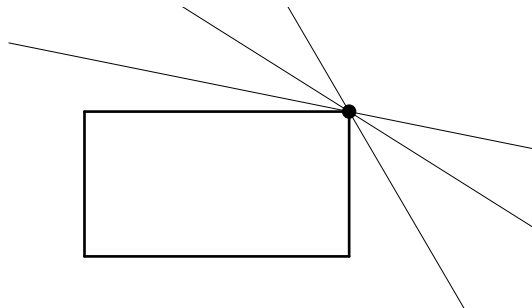
Määritelmä 2.10. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko. Hypertaso H on joukon A *tukitaso*, jos on piste $x \in A$ siten, että $x \in H$ ja joukko A on kokonaan toisessa hypertasoinen rajaamassa puoliavaruudessa.

Määritelmän 2.5 merkinnöillä ilmaistuna $H_{p,a}$ on joukon A tukitaso, jos on piste $x_0 \in A$ siten, että $\langle p, x_0 \rangle = a$ ja kaikille $x \in A$ joko $\langle p, x \rangle \leq a$ tai $\langle p, x \rangle \geq a$.

Määritelmä 2.11. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko ja hypertasot $H_{p,a}$ ja $H_{q,b}$ joukon A tukitasoja. Tukitasot ovat vastakkaiset, jos $H_{p,a} \parallel H_{q,b}$ ja joukko A on tukitasojen välissä.

Tukitason käsitteen voi helposti sekoittaa tangentin käsitteeseen. Joissakin tapauksissa nämä ovatkin samat, mutta yleisesti näin ei ole. Tukitaso on koko joukkoa koskeva ominaisuus, sillä koko joukon täytyy olla toisessa tukitason rajaamassa

puolitasossa. Tangentti taas on pisteittäinen ominaisuus, mikä tarkoittaa sitä, että tangentin olemassaoloa tarkastellaan vain tietyn pisteen suhteen. Pisteen ympäristön ulkopuolella ei ole mitään oletusta, miten tangentti käyttäytyy.



Kuva 2.2: Esimerkkejä suorakaiteen tukisuorista. Vaikka suorakaiteella ei ole olemassa tangenttia kulmapisteissä, tukisuoria on ääretön määrä.

Lause 2.12. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä kompakti joukko ja $H \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa hypertaso. Tällöin joukolle A on olemassa tukitaso, joka on yhdensuuntainen hypertason H kanssa.*

Todistus. Olkoon $H_{p,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \alpha\}$ hypertaso, missä $p \neq 0$. Koska A on kompakti, se on rajoitettu, ja on olemassa $M > 0$ siten, että Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön nojalla pätee

$$\langle p, x \rangle \leq \|p\| \|x\| \leq \|p\| M$$

kaikille $x \in A$. Tällöin $\mu = \sup\{\langle p, x \rangle : x \in A\} < \infty$.

Nyt luku $\mu - \frac{1}{k}$ ei ole joukon $\{\langle p, x \rangle : x \in A\}$ yläraja millään $k \geq 1$, jolloin

$$F_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mu \geq \langle p, x \rangle \geq \mu - \frac{1}{k}\right\} \cap A \neq \emptyset.$$

Joukot F_k ovat kompakteja ja sisäkkäisiä kaikilla $k \geq 1$, jolloin Cantorin leikkauslauseen [12, lause 6.9] nojalla

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset.$$

Jos x_0 kuuluu kyseiseen leikkaukseen, niin myös $x_0 \in A$ ja μ :n määritelmän nojalla $\langle p, x_0 \rangle \leq \mu$. Koska myös

$$x_0 \in \left\{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \geq \mu - \frac{1}{k}\right\} \cap A$$

kaikilla $k \geq 1$, mistä seuraa $\langle p, x_0 \rangle \geq \mu - \frac{1}{k}$, jolloin $\langle p, x_0 \rangle = \mu$.

Koska $\langle p, x \rangle \leq \mu$ kaikille $x \in A$ ja löydettiin piste $x_0 \in A$, jolle $\langle p, x_0 \rangle = \mu$, on

$$H_{p,\mu} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \mu\}$$

joukon A tukihypertaso pisteessä x_0 . Koska sekä $H_{p,\alpha}$ ja $H_{p,\mu}$ on määritelty saman vektorin p avulla, lauseen 2.8 nojalla hypertasot ovat keskenään yhdensuuntaiset. \square

Vastaavalla päättelyllä nähdään, että jos $\nu = \inf\{\langle p, x \rangle : x \in A\}$, hypertaso $H_{p,\nu}$ on joukon A tukitaso pisteessä x_1 , jossa $\langle p, x_1 \rangle = \nu$. Tukitasot $H_{p,\mu}$ ja $H_{p,\nu}$ ovat siis keskenään yhdensuuntaisia ja vastakkaisia.

Edellisen lauseen nojalla kompaktille joukolle on aina olemassa annetun hypertason suuntainen tukitaso. Lauseelle voidaan osoittaa myös niin sanotusti vastakkainen tulos, jonka mukaan kompaktin ja konveksin joukon jokaisessa reunapisteessä on olemassa tukitaso. Esitellään ensin kaksi lemmaa, joiden avulla haluttu tulos voidaan todistaa. Lemmat, lause ja niiden todistukset löytyvät lähteestä [7, s.31-32]. Koska tuloksissa ja todistuksissa on selvää, että pisteitä projisoidaan joukkoon A , yksinkertaistetaan merkintää jättämällä joukko A pois ja merkitsemällä $p(A, x) = p(x)$.

Lemma 2.13. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ suljettu ja konveksi epätyhjä joukko ja $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Tällöin on olemassa hypertaso H siten, että $p(x) \in H$ ja $H \perp (x - p(x))$, jolloin H on joukon A tukitaso.*

Todistus. Olkoot joukko A ja piste x kuten oletuksessa. Tällöin voidaan määritellä hypertaso H , joka kulkee pisteen $p(x)$ kautta ja on kohtisuorassa janaa $x - p(x)$ vasten. Osoitetaan, että H on joukon A tukitaso.

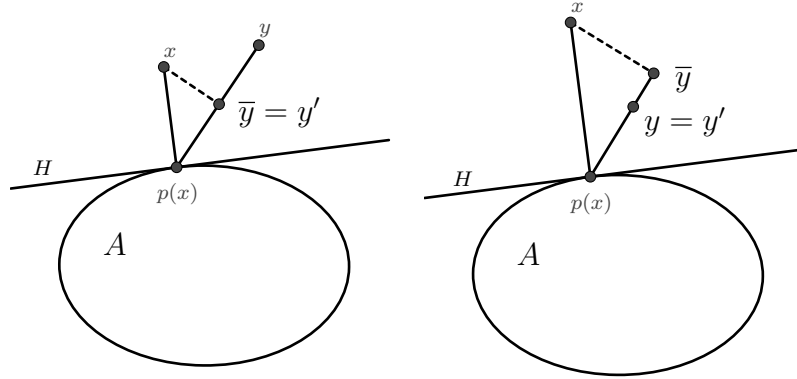
Selvästi $x \notin H$. Koska $p(x) \in H$ sekä $p(x) \in A$, riittää osoittaa, että $A \subset H^-$ tai $A \subset H^+$. Oletetaan, että piste $x \in H^-$, ja osoitetaan, että $A \subset H^+$. Toinen tapaus osoitetaan vastaavasti.

Tehdään antiteesi, että on olemassa piste $y \in A$ siten, että $y \in H^-$. Tällöin $\langle y - p(x), x - p(x) \rangle > 0$. Muodostetaan pisteen x kohtisuora projektio \bar{y} suoralle $\overleftrightarrow{p(x)y}$, jolloin Pythagoraan nojalla $\|\bar{y} - x\| < \|p(x) - x\|$. Pisteelle ei voi päteä $\bar{y} = p(x)$, sillä tällöin olisi $y \in H$, mikä on ristiriita antiteesin kanssa. Nyt, jos $\bar{y} \in]p(x), y]$, merkitään $y' = \bar{y}$. Jos taas $y \in]p(x), \bar{y}]$, niin merkitään $y' = y$.

Koska joukko A on konveksi, pisteiden y ja $p(x)$ välinen puoliavoin jana sisältyy joukkoon A , siis $]p(x), y] \subset A$. Molemmilla y' valinnoilla pätee siis $y' \in]p(x), y] \subset A$. Lisäksi, jos $y' = \bar{y}$, niin selvästi $\|y' - x\| = \|\bar{y} - x\| < \|p(x) - x\|$. Jos taas $y' = y$, niin vektorille $y' - x$ pätee

$$\begin{aligned} \|y' - x\|^2 &= \|y' - \bar{y}\|^2 + \|\bar{y} - x\|^2 \\ &< \|p(x) - \bar{y}\|^2 + \|\bar{y} - x\|^2 \\ &= \|p(x) - x\|^2 \\ \Rightarrow \|y' - x\| &< \|p(x) - x\|. \end{aligned}$$

Molemmissa tapauksissa päädytään siis tilanteeseen, jossa on löydetty piste $y' \in A$, joka on lähempänä pistettä x kuin projektiopiste, mikä on ristiriita. Tällöin antiteesi on väärä, eikä siis voi olla pistettä $y \in H^-$ ja $A \subset H^+$. \square



Kuva 2.3: Lemman 2.13 todistus eri y' valinnoilla.

Lemma 2.14. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä ja kompakti joukko ja pisteet $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin pisteiden x ja y projektioille joukkoon A pätee*

$$\|p(x) - p(y)\| \leq \|x - y\|.$$

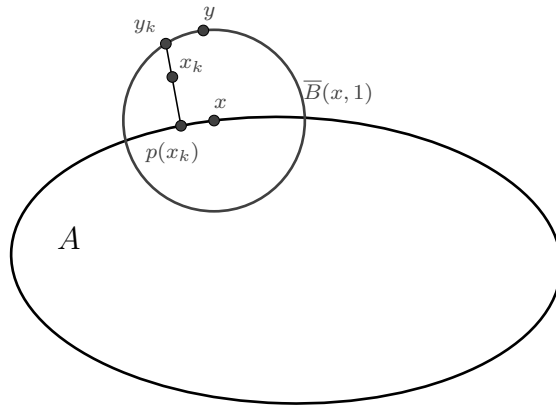
Todistus. Todistusta ei esitetä tässä työssä. Se löytyy lähteestä [7, s.32]. □

Lause 2.15. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja konvekksi joukko ja olkoon piste $x \in \partial A$. Tällöin joukolla A on olemassa tukitaso H siten, että $x \in H$.*

Todistus. Olkoon $B(x, 1)$ suljettu yksikköpallo. Koska $x \in \partial A$, niin jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_k \in \overline{B}(x, 1)$, $x_k \notin A$, siten, että $\|x - x_k\| < \frac{1}{k}$. Tällöin lemmän 2.14 nojalla

$$\|x - p(x_k)\| = \|p(x) - p(x_k)\| \leq \|x - x_k\| < \frac{1}{k}.$$

Koska pisteet x_k ja $p(x_k)$ ovat pallon $\overline{B}(x, 1)$ sisäpisteitä, on olemassa piste $y_k \in \partial \overline{B}(x, 1)$ siten, että $x_k \in [p(x_k), y_k]$ eli piste x_k on annettujen pisteiden välisellä janalla. Piste y_k on siis samalla suoralla pisteiden x_k ja $p(x_k)$ kanssa, jolloin täytyy olla $p(y_k) = p(x_k)$. Koska pallo $\overline{B}(x, 1)$ on kompakti, niin jono $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ on rajoitettu, jolloin Bolzanon ja Weierstrassin lauseen nojalla on olemassa suppeneva osajono $(y_{k_r})_{r=1}^{\infty}$, jolle $y_{k_r} \rightarrow y$. Vastaavasti on olemassa suppeneva osajono $(x_{k_r})_{r=1}^{\infty}$, jolle $x_{k_r} \rightarrow x$. Siispä $p(y_{k_r}) \rightarrow p(y)$ ja $p(y_{k_r}) = p(x_{k_r}) \rightarrow p(x) = x$, kun $r \rightarrow \infty$, mistä seuraa, että $p(y) = x$. Koska piste $y \in \partial \overline{B}(x, 1)$, täytyy olla, että $x \neq y$. Väite seuraa lemmasta 2.13. □



Kuva 2.4: Lauseen 2.15 todistus.

Luku 3

Vakioleveät joukot

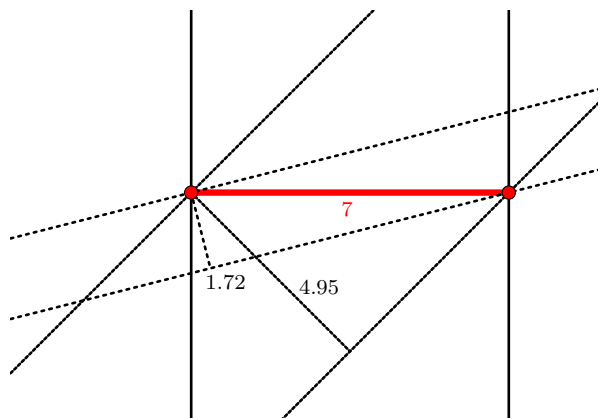
3.1 Joukon leveys

Tässä luvussa tutustutaan joukon leveyden määritelmään sekä vakioleveyteen. Aloitetaan leveyteen liittyvistä merkinnöistä maksimileveys w ja halkaisija diam .

Määritelmä 3.1. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko ja l suora \mathbb{R}^n :ssä. Lauseen 2.12 nojalla joukolla A on olemassa vastakkaiset tukitasot H_1 ja H_2 , jotka ovat kohtisuorassa suoraan l nähden. Tällöin joukon A leveys suoran l suuntaan on hypertasojen H_1 ja H_2 välinen etäisyys, merkitään $w_l(A) = d(H_1, H_2)$ ja *maksimileveys* on

$$w(A) = \max\{w_l(A) : l \in \mathbb{R}^n\}.$$

Bergerin [1, lemma 12.10.1] nojalla leveysfunktio on jatkuva, jolloin se saavuttaa maksimi- ja minimiarvonsa kompaktissa joukossa. Tästä syystä edellisessä määritelmässä käytetään maksimia eikä supremumia.



Kuva 3.1: Janan leveys riippuu valitusta suunnasta. 7 yksikön pituisen janan pituus janan suuntaisen suoran suhteen on 7, kun janaa vasten kulmassa olevan suoran suhteen janan pituus on pienempi.

Määritelmä 3.2. Olkoon $A \in \mathbb{R}^n$ kompakti ja konvekssi joukko. Jos joukon A leveys kaikkien suorien suuntaan on vakio eli $w_l(A) = a$ kaikilla $l \in \mathbb{R}^n$, joukko A on *vakioleveä*.

Havainnollistava esimerkki vakioleveästä joukosta tasossa on ympyrä: minkä tahansa kahden vastakkaisen tukisuoran (tässä tapauksessa voidaan puhua myös tangenteista) etäisyys toisistaan on aina kaksi kertaa ympyrän säde.

Määritelmä 3.3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä rajoitettu joukko. Tällöin joukon A halkaisija on joukon kahden pisteen välinen suurin etäisyys, toisin sanoen

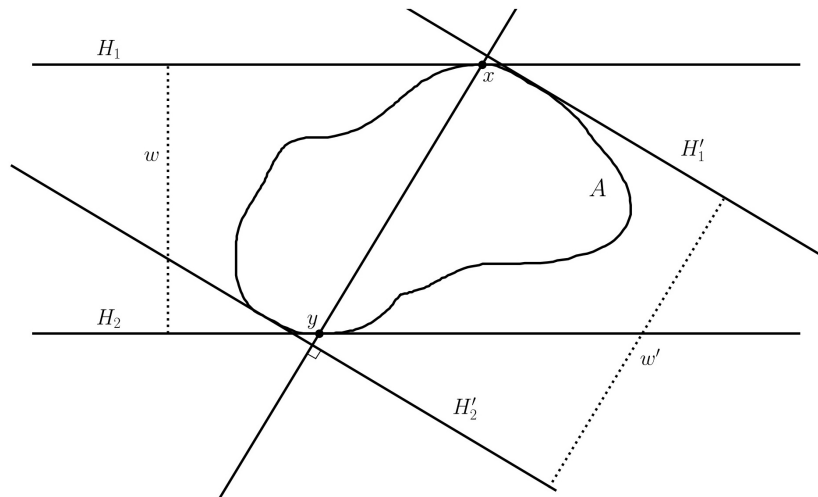
$$\text{diam}(A) = \sup \{ \|x - y\| : x, y \in A \}.$$

Joukon A ollessa rajoittamaton, $\text{diam}(A) = \infty$.

Lause 3.4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä ja kompakti joukko. Tällöin joukon A maksimileveys $w(A)$ on sama kuin joukon A halkaisija eli $w(A) = \text{diam}(A)$.

Todistus. Olkoon w joukon A maksimileveys ja olkoot H_1 ja H_2 keskenään yhdensuuntaisia tukitasoja joukolle A siten, että H_1 :n ja H_2 :n etäisyys on w . Olkoot $x, y \in A$ siten, että $x \in H_1$ ja $y \in H_2$. Osoitetaan, että $\|x - y\| = w$. Huomataan, että jos suora pisteiden x ja y kautta on kohtisuorassa tukitasoihin nähden, niin $\|x - y\| = w$, sillä $\|x - y\|$ on lyhin etäisyys tasojen välillä.

Oletetaan siis, että suora \overleftrightarrow{xy} ei ole kohtisuorassa tukitasoon H_1 nähden. Muodostetaan tukitasot H'_1 ja H'_2 siten, että ne ovat keskenään yhdensuuntaiset ja $\overleftrightarrow{xy} \perp H'_1$. Merkitään tasojen H'_1 ja H'_2 etäisyyttä w' , jolloin w' on joukon A leveys suoran \overleftrightarrow{xy} suuntaan.



Kuva 3.2: Lauseen todistus

Nyt, koska suora \overleftrightarrow{xy} ei ole kohtisuorassa tasoihin H_1 ja H_2 nähden, pätee epäyhtälö $w < \|x - y\|$. Lisäksi tukitasojen määritelmän nojalla pisteet x ja y ovat tasojen välissä eli $w < \|x - y\| \leq w'$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä w määriteltiin joukon A maksimileveytenä eli ei voi olla $w < w'$. Tästä seuraa, että täytyy olla $\overleftrightarrow{xy} \perp H_1$ ja $\|x - y\| = w$.

Osoitetaan vielä, että $\|x - y\| = \text{diam}(A)$: Olkoot $x_0, y_0 \in A$ mielivaltaiset pisteet ja olkoon w_0 joukon A leveys suoran $\overrightarrow{x_0 y_0}$ suuntaan. Tällöin

$$\|x_0 - y_0\| \leq w_0 \leq w = \|x - y\|$$

eli w on $\max\{\|x_0 - y_0\| : x_0, y_0 \in A\} = \text{diam}(A)$. □

Lauseen todistuksesta saadaan myös muita kiinnostavia tuloksia, joita käytetään myöhemmin. Esitetään nämä tulokset seurauksina.

Seuraus 3.5. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja konvekksi vakioleveä joukko. Jos joukon A leveys on δ , niin $\text{diam}(A) = \delta$. Lisäksi tällöin joukon jokainen reunapiste $a \in \partial A$ on δ :n pituisen lävistäjän päätepiste.*

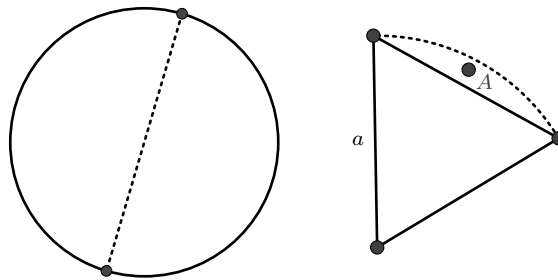
Seuraus 3.6. *Olkoon $A \in \mathbb{R}^n$ kompakti vakioleveä joukko, jolle $w(A) = \delta$. Olkoot lisäksi piste $x \in \partial A$ ja tukitaso H siten, että $x \in H$. Tällöin pisteen x kautta kulkevan tukitason H normaalisuora leikkaa joukkoa A janalla, jonka pituus on δ .*

3.2 Täydelliset joukot

Tässä luvussa keskitytään niin sanottuihin täydellisiin joukkoihin. Kyseinen termi kuvastaa joukon täydellisyyttä pisteiden lisäämisen osalta, eikä sitä tule sekoittaa metristen avaruuksien yhteydessä käytettyyn määritelmään täydellisestä joukosta.

Määritelmä 3.7. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko. Joukko A on *täydellinen* (pisteiden lisäämisen suhteen), jos kaikille $x \notin A$ pätee $\text{diam}(A \cup \{x\}) > \text{diam}(A)$.

Täydelliseen joukkoon ei siis voi lisätä pisteitä ilman, että sen halkaisija kasvaa. Esimerkkinä täydellisestä joukosta on suljettu pallo, kun taas \mathbb{R}^2 :n kolmio ei ole täydellinen joukko.



Kuva 3.3: Yksinkertainen esimerkki täydellisestä joukosta on kiekko. Tasasivuinen kolmio taas ei ole täydellinen joukko, sillä $\text{diam}(\Delta) = \text{diam}(\Delta \cup A) = a$.

Lause 3.8. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja konvekssi täydellinen joukko ja piste b sen reunasta $b \in \partial A$. Tällöin on olemassa piste $c \in A$, jolle $\|b - c\| = \text{diam}(A)$.*

Todistus. Koska A on kompakti, on olemassa piste $c \in A$ siten, että

$$\|b - c\| = \sup \{ \|b - y\| : y \in A \}.$$

Olkoon $\delta = \text{diam}(A)$. Määritelmän nojalla $\delta = \sup \{ \|x - y\| : x, y \in A \}$, joten jos $\|b - c\| < \delta$, niin $\delta - \|b - c\| > 0$. Koska b on joukon A reunapiste, on olemassa piste $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$ eli piste A :n komplementissa siten, että $\|z - b\| < \delta - \|b - c\| \Leftrightarrow \|z - b\| + \|b - c\| < \delta$.

Nyt siis kaikille $x \in A$ pätee

$$\|z - x\| \leq \|z - b\| + \|b - x\| \leq \|z - b\| + \|b - c\| < \delta,$$

mikä tarkoittaa

$$\text{diam}(A) \leq \text{diam}(A \cup \{z\}) = \sup \{ \|x - y\| : x, y \in A \cup \{z\} \} \leq \delta$$

ja koska $\text{diam}(A) = \delta$, niin myös $\text{diam}(A \cup \{z\}) = \delta$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa, että A olisi täydellinen joukko. Ei voi siis olla $\|b - c\| < \delta$ ja koska δ on supremum kaikista joukon A pisteiden erotuksista, täytyy olla $\|b - c\| = \delta$. \square

Ennen seuraavaa lausetta määritellään kaksi sen todistuksessa käytettävää käsitettä: sulkeuma ja konvekssi verho.

Määritelmä 3.9. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Joukon A *sulkeuma*, merkitään \bar{A} , on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon A , eli

$$\bar{A} = \bigcap \{ F \subset \mathbb{R}^n : A \subset F, F \text{ suljettu} \}.$$

Määritelmä 3.10. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Joukon A *konvekssi verho*, merkitään $\text{conv } A$, on pienin konvekssi joukko, joka sisältää joukon A , toisin sanoen

$$\text{conv } A = \bigcap \{ B \subset \mathbb{R}^n : A \subset B, B \text{ konvekssi} \}.$$

Lauseen 2.2 nojalla konvekssi verho tosiaan on konvekssi. Todistetaan seuraavaksi lause, jonka nojalla täydellinen joukko on kompakti ja konvekssi.

Lause 3.11. *Täydellinen joukko on kompakti ja konvekssi*

Todistus. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ täydellinen joukko, jolle $\text{diam}(A) = \delta$. Koska A on täydellinen, ei siinä voi olla "kuoppia tai reikiä". Joukon A on myös oltava suljettu, sillä muussa tapauksessa A :n reunapisteiden lisääminen ei kasvattaisi halkaisijaa eikä A olisi täydellinen. Siis $\text{diam}(\bar{A}) = \text{diam}(A) = \delta$. Lisäksi, koska joukko A sisältyy sulkeumaansa ja on täydellinen, niin tällöin $A = \bar{A}$.

Toisaalta, lähteen [10, esimerkki 3.3.9] nojalla rajoitetulle joukolle pätee, että $\text{diam}(\text{conv}(A)) = \text{diam}(A) = \delta$. Lisäksi, koska A sisältyy konvekssiin verhoonsa ja A on täydellinen, niin $A = \text{conv}(A)$. Siispä joukko A on kompakti ja konvekssi joukko. \square

Lause 3.12. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko, jolla on positiivinen halkaisija δ . Tällöin A on täydellinen joukko, jos ja vain jos A on δ -säteisten suljettujen pallojen, joiden keskipisteet kuuluvat joukkoon A , leikkaus.*

Todistus. Olkoon S δ -säteisten suljettujen pallojen leikkaus siten, että pallojen keskipisteet kuuluvat joukkoon A , toisin sanoen $S = \bigcap \{\overline{B}(a, \delta) : a \in A\}$.

" \Leftarrow " Oletetaan, että $A = S$, jolloin A on epätyhjä kompakti ja konvekssi joukko. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, jolloin on olemassa piste $a \in A$ siten, että $x \notin \overline{B}(a, \delta)$ eli $\|x - a\| > \delta$. Siispä $\text{diam}(A \cup \{x\}) \geq \|x - a\| > \delta = \text{diam}(A)$, jolloin A on täydellinen joukko.

" \Rightarrow " Oletetaan, että A on täydellinen joukko ja $\text{diam}(A) = \delta$. Tällöin lauseen 3.11 nojalla A on kompakti ja konvekssi joukko. Olkoon $x \in A$, jolloin $\|x - a\| \leq \delta$ kaikille $a \in A$. Tällöin $x \in S$ ja $A \subset S$.

Olkoon sitten $x \in S$, jolloin $\|x - a\| \leq \delta$ kaikilla $a \in A$. Tästä seuraa oletuksen nojalla, että $\delta = \text{diam}(A) \leq \text{diam}(A \cup \{x\}) \leq \delta \Rightarrow \text{diam}(A \cup \{x\}) = \delta$. Koska A on täydellinen joukko, niin täytyy olla $x \in A$ ja $S \subset A$.

Nyt siis $A = S = \bigcap \{\overline{B}(a, \delta) : a \in A\}$. □

Seuraavan lauseen muotoilusta on hyvä huomata: Ympyrän kaaren kaksi pistettä jakavat kaaren kahteen osaan. Nämä osat ovat joko samanmittaiset keskenään tai toinen on toista lyhyempi. Seuraava lause koskee δ -säteisten ympyröiden kaarista lyhyempää. Kaaret eivät voi olla yhtä pitkät, sillä tällöin olisi $\text{diam}(A) \geq 2\delta$.

Lause 3.13. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ täydellinen joukko, jolle $\text{diam}(A) = \delta$, ja pisteet $a, b \in A$. Tällöin A sisältää kaikki δ -säteisten ympyröiden lyhyemmät kaaret, jotka yhdistävät pisteet a ja b .*

Todistus. Todistetaan lause ensin suljetun pallon tapauksessa. Olkoon $\overline{B}(x, \delta)$ suljettu pallo \mathbb{R}^n :ssä ja lineaarisesti riippumattomat pisteet a, b ja c siten, että $a, b \in \overline{B}(x, \delta)$, $\|a - c\| = \delta$ ja $\|b - c\| = \delta$. Tällöin

$$\begin{aligned} \delta^2 &\geq \|a - x\|^2 \\ &= \|(a - c) + (c - x)\|^2 \\ &= \|a - c\|^2 + 2\langle (a - c), (c - x) \rangle + \|c - x\|^2 \end{aligned}$$

ja

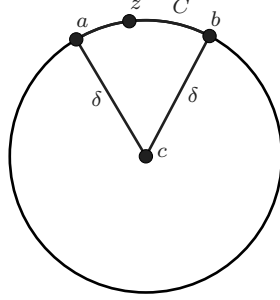
$$\begin{aligned} \delta^2 &\geq \|b - x\|^2 \\ &= \|(b - c) + (c - x)\|^2 \\ &= \|b - c\|^2 + 2\langle (b - c), (c - x) \rangle + \|c - x\|^2. \end{aligned}$$

Vähentämällä molemmista yhtälöistä puolittain oletuksen $\|a - c\| = \delta$ ja $\|b - c\| = \delta$, saadaan

$$2\langle (a - c), (c - x) \rangle + \|c - x\|^2 \leq 0 \tag{3.1}$$

$$2\langle (b-c), (c-x) \rangle + \|c-x\|^2 \leq 0. \quad (3.2)$$

Olkoon C pisteitä a ja b yhdistävä δ -säteisen ympyrän kaari ja piste $z \in C$. Voidaan olettaa, että ympyrän keskipiste on c ja koska C on eri puolella jännettä ab kuin piste c , niin vektoreiden $a-c$ ja $b-c$ muodostamassa kannassa pisteelle z eli vektorille $z-c$ saadaan seuraava komponenttieditys $z-c = \alpha(a-c) + \beta(b-c)$ joillekin $\alpha, \beta \geq 0$.



Nyt, koska pisteet a, b ja z ovat saman ympyrän kaarella, saadaan

$$\begin{aligned} \delta &= \|z-c\| = \|\alpha(a-c) + \beta(b-c)\| \\ &\leq \alpha\|a-c\| + \beta\|b-c\| \\ &= (\alpha + \beta)\delta \\ 1 &\leq \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Kertomalla yhtälö (3.1) α :lla ja yhtälö (3.2) β :lla ja laskemalla yhteen saadaan

$$0 \geq 2\langle \alpha(a-c), (c-x) \rangle + \alpha\|c-x\|^2 + 2\langle \beta(b-c), (c-x) \rangle + \beta\|c-x\|^2$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} 0 &\geq 2\langle \alpha(a-c) + \beta(b-c), (c-x) \rangle + (\alpha + \beta)\|c-x\|^2 \\ &\geq 2\langle (z-c), (c-x) \rangle + \|c-x\|^2. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \|z-x\|^2 &= \|z-c\|^2 + 2\langle (z-c), (c-x) \rangle + \|c-x\|^2 \\ &\leq \|z-c\|^2 = \delta^2 \end{aligned}$$

eli $\|z-x\| \leq \delta$, mikä tarkoittaa, että $z \in \overline{B}$ ja kaari C kuuluu joukkoon \overline{B} .

Oletetaan sitten, että joukko A ei ole suljettu pallo. Tällöin lauseen 3.12 nojalla joukolla pätee $A = \bigcap_{x \in A} \overline{B}(x, \delta)$. Joukko A siis sisältyy jokaiseen suljettuun palloon

eli $A \subset \overline{B}(x, \delta)$ kaikilla $x \in A$. Olkoot nyt pisteet $a, b \in A$ ja olkoon C c -keskisen, δ -säteisen ympyrän kaari, joka yhdistää pisteet a ja b . Edellä osoitettiin, että tällöin $C \subset \overline{B}(x, \delta)$ kaikilla $x \in A$. Tästä seuraa, että $C \subset \bigcap_{x \in A} \overline{B}(x, \delta) = A$. \square

Nyt voidaan todistaa täydellisten joukkojen yhteys vakioleveisiin joukkoihin. Käy nimittäin ilmi, että kompakti ja konvekksi joukko on vakioleveä täsmälleen silloin, kun se on myös täydellinen.

Lause 3.14. *Kompakti ja konvekksi joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on täydellinen joukko, jonka halkaisija on δ , jos ja vain jos A on vakioleveä joukko leveydellä δ .*

Todistus.

" \Leftarrow " Oletetaan, että A on vakioleveä joukko ja $\text{diam}(A) = \delta$. Olkoot $b \notin A$ ja piste $a \in A$ joukon A pistettä b lähin piste. Tällöin lauseen 2.15 nojalla joukolla A on tukitaso H_a , joka kulkee pisteen a kautta ja seurauksen 3.6 nojalla H_a on kohtisuorassa janaa ab vastaan. Vastakkainen tukitaso H_z A :lle sivuaa joukkoa pisteessä $z \in A$, jolloin z kuuluu janan ba jatkeeseen a :n yli. Jos näin ei olisi, $d(H_a, H_z) = \text{diam}(A) > \delta$, mikä on ristiriita joukon A vakiolevyyden kanssa.

Nyt siis $\|b - z\| > \|a - z\| = \text{diam}(A) = \delta$ eli $\text{diam}(A \cup \{b\}) > \text{diam}(A)$ kaikille $b \notin A$. Joukko A on siis täydellinen joukko.

" \Rightarrow " Oletetaan, että joukko A on täydellinen joukko ja sen halkaisija on $\text{diam}(A) = \delta$. Muodostetaan antiteesi, että A ei ole vakioleveä, jolloin sillä on minimileveys $\alpha < \delta$.

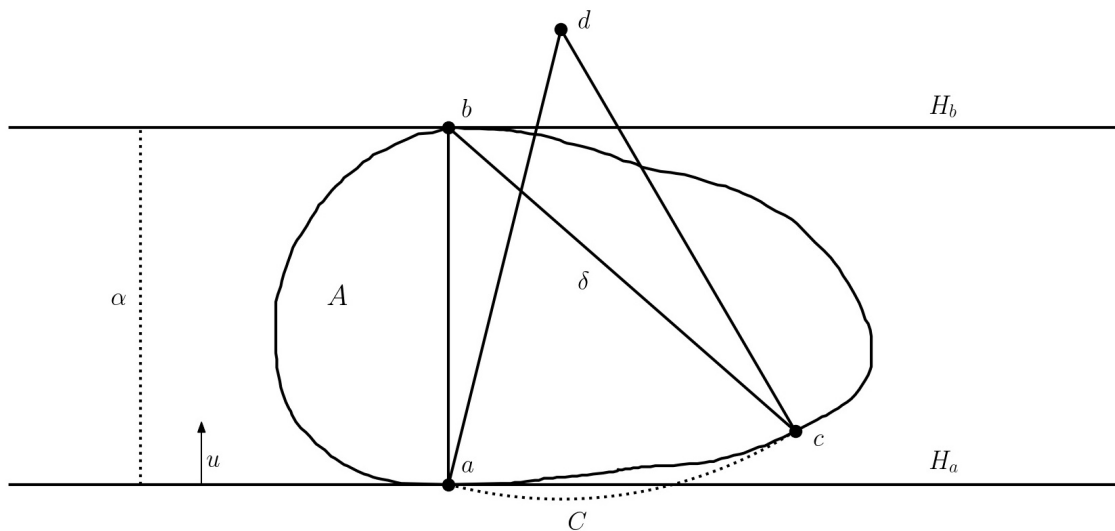
Olkoon u yksikkövektori siten, että joukon A leveys vektorin u suuntaan on minimileveys α . Koska A on konvekksi, lähteen [15, s. 370] lauseen 7.6.1 nojalla joukon A minimileveys ja minimihalkaisija ovat samat, jolloin on olemassa pisteet $a, b \in A$ siten, että jana ab on vektorin u suuntainen ja sen pituus on α . Määritellään puolitasot $H_{u,a}$ ja $H_{u,b}$ vektorin u ja sisätulon avulla:

$$H_{u,a} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = \langle u, a \rangle\} \text{ ja } H_{u,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = \langle u, b \rangle\}.$$

Nyt joukko A on tasojen välissä eli $A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, a \rangle \leq \langle u, x \rangle \leq \langle u, b \rangle\}$ ja tasot $H_{u,a}$ ja $H_{u,b}$ ovat joukon A tukitasoja. Lisäksi $H_{u,a}$ ja $H_{u,b}$ ovat kohtisuorassa vektoria u vasten ja niiden etäisyys toisistaan on $\|b - a\| = \alpha < \delta$.

Lauseen 3.8 nojalla on olemassa piste $c \in A$ siten, että $\|c - b\| = \delta$ ja Lauseen 3.12 nojalla kaikkien δ -säteisten suljettujen pallojen, joiden keskipiste on A :ssa, leikkaus on joukko A . Näin ollen, jos otetaan pisteet $x, y \in A$, Lauseen 3.13 mukaan δ -säteisen ympyrän kaari, jonka päätepisteitä ovat x ja y , kuuluu kokonaan joukkoon A .

Tarkastellaan nyt pisteiden a, b ja c määräämää kaksiulotteista tasoa. Olkoon d a - ja c -keskisten, δ -säteisten ympyröiden leikkauspiste ja olkoon C d -keskisen ympyrän kaari pisteiden a ja c välillä säteellä δ . Osoitetaan, että kaari C leikkaa tukitasoa $H_{u,a}$.



Kuva 3.4: Lauseen todistus

Koska $H_{u,a}$ on joukon A tukitaso, janojen ab ja ad välinen kulma on yhtä suuri kuin joukon A tangentin pisteessä a ja tangentin kaarelle C pisteessä a . Tämä seuraa siitä, että tangentit ovat vastaavia janoja vasten kohtisuorassa. Koska tangenttien välinen kulma on aidosti suurempi kuin nolla, osa kaarta C kulkee A :n tangentin alapuolella eli puolitasossa $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle < \langle u, a \rangle\}$. Kaari C leikkaa siis tasoa $H_{u,a}$, mikä on Lauseen 3.13 nojalla ristiriita oletuksen kanssa. Tällöin antiteesi on väärä ja joukon A on oltava vakioleveä joukko. \square

Luku 4

Vakioleveät joukot \mathbb{R}^2 :ssa

Tässä luvussa rajoitutaan tasoon ja esitellään tason vakioleveiden joukkojen ominaisuuksia. Luvussa esitellään muun muassa kaksi tapaa todistaa vakioleveiden joukkojen piirin kaava π kertaa halkaisija sekä annetaan esimerkkejä erilaisista vakioleveistä joukoista.

4.1 Barbierin lause

Aloitetaan piirin geometrisesta todistuksesta, joka tunnetaan *Barbierin lauseena*. Lausetta varten määritellään konveksin joukon piirin pituus (kuten lähteessä [17, s. 14]) sekä esitellään aputuloksena liittyen neljäkkään leikkaukseen yhdensuuntaisilla suorilla.

Määritelmä 4.1. Olkoon $K \in \mathbb{R}^2$ konvekssi joukko ja ∂K sen reuna. Tällöin ∂K on *konvekssi käyrä*, jonka pituus määritellään joukkoa K ulkopuolelta rajaavien monikulmioiden piirin raja-arvona, kun monikulmion sivun pituuden annetaan lähestyä nollaa. Tällöin monikulmion piirin pituus lähestyy konveksin käyrän ∂K pituutta.

Edellisessä määritelmässä konveksin käyrän pituus määritellään käyrää ulkopuolelta rajaavan monikulmion avulla. Lähteessä [17, s. 14] esitetään, että vastaavaan lopputulokseen päästään myös, jos käytetään konveksia käyrää sisäpuolelta rajaavaa monikulmiota.

Lause 4.2. *Olkoot pisteet $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ ja $\square ABCD$ neljäkäs. Olkoot lisäksi yhdensuuntaiset suorat l ja m etäisyydellä δ siten, että ne leikkaavat neljäkästä ja ovat kohtisuorassa neljäkkään lävistäjää BD vasten. Neljäkkään ja suorien l ja m välisen kaistaleen leikkaus on kuusikulmio, jonka piirin pituus on riippumaton suorien l ja m sijainnista.*

Todistus. Olkoot $\square ABCD$ neljäkäs ja suorat l ja m siten, että ne leikkaavat neljäkästä ja $d(l, m) = \delta$. Koska neljäkäs ja siitä leikkautunut kuusikulmio ovat symmetrisiä lävistäjän BD suuntaisen suoran suhteen, voidaan kuusikulmion piiri ilmaista kuvan 4.1 mukaisin merkinnöin $p = 2(AU + AX) + UV + XY$.

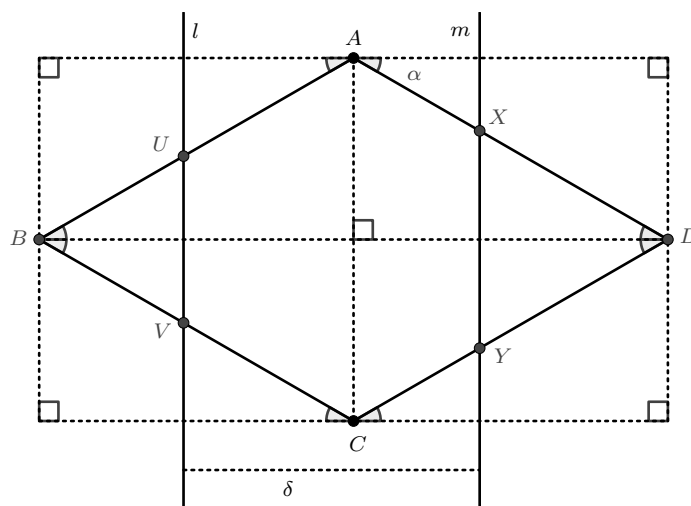
Huomataan, että kuvioon muodostuu suorakulmaisia kolmioita sekä samankoh-
taisia kulmia (kuva 4.1). Nyt siis trigonometrian avulla saadaan, että

$$AU \cos \alpha + AX \cos \alpha = \delta \Leftrightarrow AU + AX = \frac{\delta}{\cos \alpha}.$$

Lisäksi $UV = AC - 2AU \sin \alpha$ ja $XY = AC - 2AX \sin \alpha$, jolloin

$$\begin{aligned} UV + XY &= AC - 2AU \sin \alpha + AC - 2AX \sin \alpha \\ &= 2AC - 2 \sin \alpha (AU + AX) \\ &= 2(AC - \delta \tan \alpha). \end{aligned}$$

Nyt $p = \frac{2\delta}{\cos \alpha} + 2(AC - \delta \tan \alpha)$, mikä riippuu enää vain neljäkkään geometriasta
(kulmien suuruudesta ja lävistäjistä AC) sekä suorien l ja m etäisyydestä δ . \square



Kuva 4.1: Lauseen 4.2 todistus

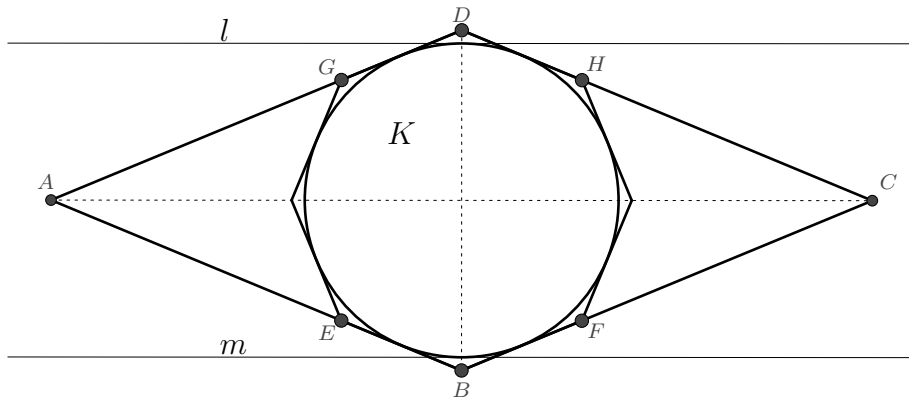
Seuraavaksi osoitetaan, että vakioleveiden joukkojen piirin pituus lasketaan sa-
moin kuin ympyröiden. Todistus pohjautuu tasakulmaisten monikulmioiden induk-
tion, missä tasakulmaisella monikulmiolla tarkoitetaan monikulmiota, jonka kaikki
kulmat ovat yhtä suuret. Tämä eroaa säännöllisestä monikulmiosta siinä, että sään-
nöllisessä monikulmiossa kulmien lisäksi myös monikulmion sivut ovat keskenään yhtä
pitkiä, mikä ei välttämättä päde tasakulmaisille monikulmioille.

Lause 4.3. (Barbierin lause) *Olkoon $Q \subset \mathbb{R}^2$ tason konvekssi osajoukko. Jos Q on vakioleveä joukko ja $w(Q) = \delta$, niin joukon Q piiri on $\pi\delta$.*

Todistus. Olkoot $Q \subset \mathbb{R}^2$ konvekssi ja vakioleveä joukko leveydellä δ sekä $K \subset \mathbb{R}^2$
suljettu kiekko halkaisijalla δ . Huomataan, että jos rajataan molemmat joukot K ja
 Q mahdollisimman pienellä neliöllä, neliöiden sivut ovat pituudeltaan δ eli neliöt ovat
yhtenevät. Tällöin neliöiden piirit ovat samat. Käytetään tätä havaintoa induktioto-
distuksen pohjana.

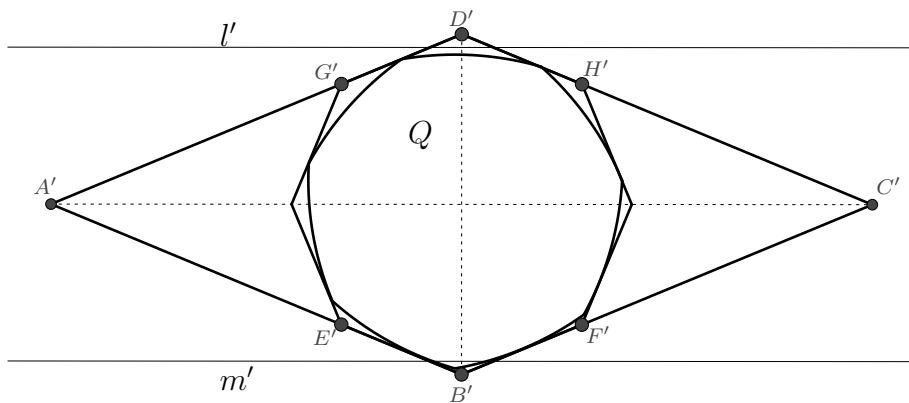
Olkoon $n > 2$ ja oletetaan, että tasakulmaisilla 2^n -kulmioilla, jotka rajaavat joukkoja Q ja K , on sama piiri. Osoitetaan, että sama pätee myös tasakulmaisille 2^{n+1} -kulmioille.

Tutkitaan kiekkoa K rajaavaa 2^n -kulmiota: Olkoot BE ja DH kulmion vastakkaiset sivut, samoin kuin sivut BF ja DG . Jatketaan sivuja BE ja DG siten, että ne leikkaavat, olkoon leikkauspiste A ja tehdään samoin sivuille BF ja DH ja olkoon niiden leikkauspiste C . Muodostuneen nelikulmion vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja molemmat korkeudet δ , jolloin $\square ABCD$ on neljäkäs.



Kuva 4.2: Todistus kiekolle K .

Kuten edellä, tutkittaessa vakioleveää joukkoa Q rajaavaa 2^n -kulmiota ja sen sivuja $B'E'$, $D'H'$, $B'F'$ ja $D'G'$, saadaan muodostettua myös Q :lle neljäkäs. Olkoon se $\square A'B'C'D'$, jonka korkeus on δ . Nyt siis neljäkkäät ovat yhteneviä.



Kuva 4.3: Joukon Q tapaus.

Olkoot suorat l ja m kiekon K tukisuoria siten, että ne ovat kohtisuorassa lävistäjää BD vastaan. Samoin olkoot suorat l' ja m' joukon Q tukisuoria kohtisuorassa

lävistäjää $B'D'$ vastaan. Suorien l ja m , kuten myös l' ja m' , etäisyys on δ . Koska tukisuorat leikkaavat neljäkäästä, Lauseen 4.2 nojalla niiden väliin jäävä osa neljäkkäästä on kuusikulmio, jonka piirin pituus on vakio.

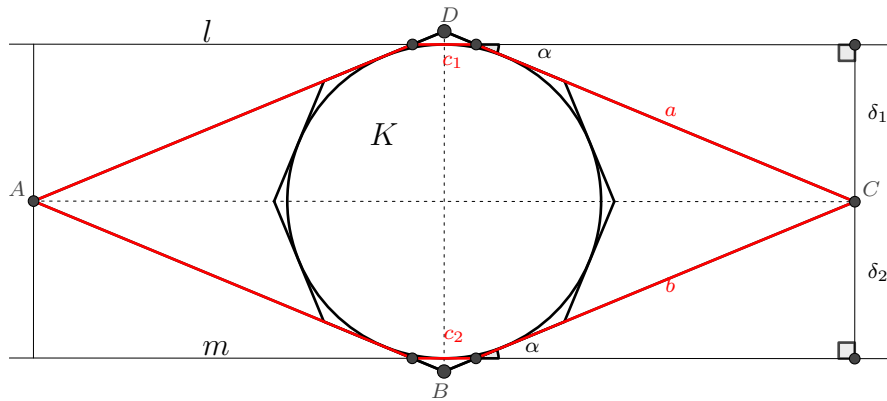
Tarkastellaan nyt syntyneitä kuusikulmioita joukoille Q ja K , olkoot ne $P(Q)$ ja $P(K)$ vastaavasti. Koska neljäkkäät ovat yhtenevät, niiden piirit ovat samat. Tällöin neljäkkäistä leikattujen kuusikulmioiden piirit ovat keskenään samat ja edelleen leikkauksen ulkopuolelle jääneiden osien piirit ovat samat molemmille joukoille Q ja K . Osat koostuvat kahdesta tasakylkisestä kolmiosta, joiden huippukulmat ovat yhtä suuret.

Muodostetaan neljäkkäälle $\square ABCD$ leikkaavien suorien l ja m avulla suorakulmaiset kolmiot, kuten kuvassa 4.4. Kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoiset, sillä niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret. Koska kateettien δ_1 ja δ_2 summa on $\delta_1 + \delta_2 = \delta$, niin tällöin kolmioiden hypotenuusien eli leikkaantuneen kuusikulmion $P(K)$ vierekkäisten sivujen summaksi tulee

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{\delta_1}{\sin \alpha} + \frac{\delta_2}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\delta}{\sin \alpha}, \end{aligned}$$

mikä riippuu nyt ainoastaan neljäkkäästä. Koska neljäkäs on symmetrinen janan BD suhteen, saadaan kuusikulmion $P(K)$ piirin pituudeksi

$$p(P(K)) = c_1 + c_2 + \frac{2\delta}{\sin \alpha}.$$



Kuva 4.4: $P(K)$:n piirin (punainen) laskeminen.

Toistamalla päättely joukolle Q , saadaan kuusikulmion $P(Q)$ piiriksi

$$p(P(Q)) = c'_1 + c'_2 + \frac{2\delta}{\sin \alpha}.$$

Edelleen, koska Lauseen 4.2 mukaan kuusikulmioiden piirit ovat samat, saadaan

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{2\delta}{\sin \alpha} &= p(P(K)) = p(P(Q)) = c'_1 + c'_2 + \frac{2\delta}{\sin \alpha} \\ c_1 + c_2 &= c'_1 + c'_2. \end{aligned}$$

Siis 2^n -kulmiota leikkaavien osuuksien summa on sama molemmille joukoille. Toisaalta nämä kolmioiden kannat ovat uuden 2^{n+1} -kulmion sivuja. Tehdään edellä oleva päättely jokaiselle vastakkaiselle kulmaparille 2^n -kulmioista joukoille K ja Q (edellä tehty kulmapareille B ja D sekä B' ja D'): muodostetaan neljäkkäät, leikataan niitä tukisuorilla ja saadaan 2^{n+1} -kulmioiden sivut. Huomataan, että 2^{n+1} -kulmioiden piiri on sama joukoille Q ja K .

Nyt kun 2^n -kulmioiden piirit ovat samat, niin myös 2^{n+1} -kulmioilla on sama piiri. Tällöin induktion nojalla 2^k -kulmioilla on samat piirit kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi, kun $n \rightarrow \infty$, 2^n -kulmiot lähestyvät joukkoja K ja Q , jolloin huomataan, että K :n ja Q :n piirit ovat samat. Koska kiekon K piiri saadaan kaavalla $\pi\delta$, niin myös joukon Q piiri saadaan kyseisellä kaavalla. \square

4.2 Cauchyn ja Croftonin kaava

Edellinen todistus on geometrinen lähestymistapa vakioleveän joukon piirin laske-
miseksi. Asian voi osoittaa myös analyttisemmin ajattelemalla joukon piiriä tason
käyränä, jolloin sen pituus voidaan laskea integroimalla. Bergerin [1, s. 60] lauseen
12.10.2 nojalla integroitu pituus käyrälle on sama kuin määritelmässä 4.1 esitelty
konveksin käyrän pituus.

Määritellään ensin termit polku ja polun pituus.

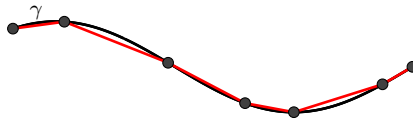
Määritelmä 4.4. Joukon $X \subset \mathbb{R}^n$ polku on jatkuva kuvaus $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \leq b$.

Polun pituus saadaan approksimoimalla polkua janoilla ja ottamalla tästä supremum: Olkoon $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b$ välin $[a, b]$ jako. Tällöin polun γ pituus on summa

$$\sup \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja supremum otetaan kaikkien välin $[a, b]$ jakojen yli.

Kun edellisen summan välin jakoa tihennetään (eli annetaan $n \rightarrow \infty$), saadaan murtoviiva lähestymään käyrää. Huomaa, että välin $[a, b]$ jaon ei tarvitse olla tasavälinen.



Kuva 4.5: Polku γ ja sen pituutta approksimoivat janat (punaisella).

Lause 4.5. Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva polku ja olkoon $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sen derivaatta. Tällöin polun γ pituus saadaan integraalista

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'\| dt.$$

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [11, Lause 1.3.1] □

Lause 4.6. (Cauchyn ja Croftonin kaava) *Olkoot γ konvekksi ja suljettu sileä käyrä ja $W_\gamma(t)$ käyrän projektio kulman t suhteen. Tällöin käyrän γ pituus voidaan laskea integroimalla sen erisuuntaisia projektioita eli*

$$L(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} W_\gamma(t) dt.$$

Todistus. Lauseen todistus sivuutetaan, löytyy lähteestä [8, luku 2, lause 3.6]. □

Koska vakioleveiden joukkojen reunan projektio minkä tahansa kulman suhteen on vakio, saadaan Cauchyn ja Croftonin kaavan avulla helposti laskettua vakioleveän joukon piirin pituus.

Esimerkki 4.7. Olkoon $Q \in \mathbb{R}^2$ vakioleveä joukko, jonka leveys on δ . Joukkoa rajaava käyrä on sileä, konvekksi ja suljettu, jolloin sen pituus voidaan laskea käyttämällä Cauchyn ja Croftonin kaavaa:

$$\begin{aligned} L(\gamma_Q) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} W_\gamma(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \delta dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \delta t \\ &= \frac{1}{2} \delta (2\pi - 0) \\ &= \pi \delta. \end{aligned}$$

Näin saadaan sama laskukaava vakioleveän joukon piirille kuin lauseessa 4.3.

4.3 Reuleaux'n kolmio

Tässä luvussa esitellään Reuleaux'n kolmiona tunnettu vakioleveä joukko, jota pidetään yksinkertaisimpana esimerkkinä vakioleveistä joukoista kiekkojen lisäksi. Aloitetaan muodostamalla Reuleaux'n kolmio.

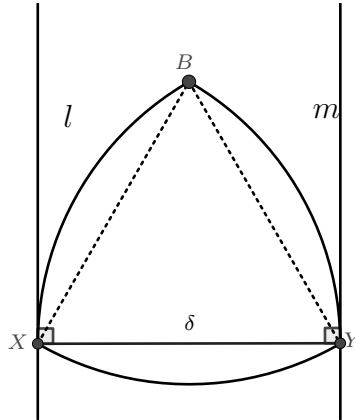
Esimerkki 4.8. Olkoon $\triangle ABC$ tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on δ . Yhdistetään pisteet B ja C ympyrän kaarella, jonka keskipiste on A ja säde δ . Vastaavasti yhdistetään pisteet A ja B ympyrän kaarella, jonka keskipiste on C , ja pisteet A ja C ympyrän kaarella, jonka keskipiste on B . Muodostuneiden kaarien rajaamaa aluetta kutsutaan Reuleaux'n kolmioksi.

Näytetään seuraavaksi, että Reuleaux'n kolmio todella on vakioleveä joukko. Todistuksessa käytetään selvyyden vuoksi merkintää $\text{arc}(A, B)$, jolla tarkoitetaan Reuleaux'n kolmion muodostavaa ympyrän kaarta, joka yhdistää pisteet A ja B .

Esimerkki 4.9. Olkoot A , B ja C Reuleaux'n kolmion kärjet ja R Reuleaux'n kolmio. Olkoon lisäksi R :n muodostavan tasasivuisen kolmion sivun pituus δ . Osoitetaan, että R on vakioleveä joukko leveydellä δ .

Olkoot suorat l ja m R :n vastakkaisia tukisuoria siten, että l sivuaa joukkoa R pisteessä X ja m pisteessä Y . Tällöin $l \parallel m$ ja pisteille X ja Y pätee jonkin seuraavista: joko molemmat pisteistä X ja Y ovat joukon R kärkiä, vain toinen on joukon R kärkipiste tai kumpikaan ei ole.

- Oletetaan ensin, että molemmat pisteistä X ja Y ovat joukon R kärkipisteitä. Symmetrisyyden vuoksi voidaan olettaa, että $X = A$ ja $Y = C$ (muut kärkiparit saadaan vastaavasti). Tällöin suora l on tangentti ympyrän kaarelle $\text{arc}(A, B)$ pisteessä A , jolloin $l \perp AC$, sillä AC on kaaren $\text{arc}(A, B)$ säde. Toisaalta AC on myös kaaren $\text{arc}(B, C)$ säde, jolloin $m \perp AC$, sillä m on kaaren $\text{arc}(B, C)$ tangentti pisteessä C . Suorat ovat siis kohtisuorassa janaa AC vastaan, jolloin $d(l, m) = \delta$.



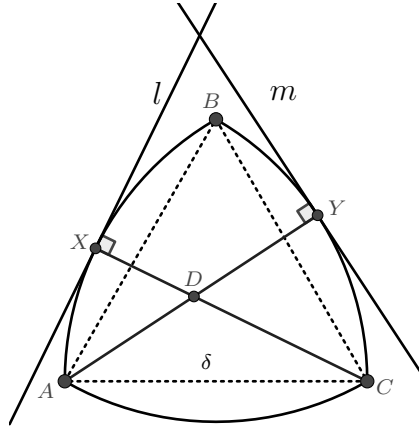
- Oletetaan, että vain piste X on joukon R kärkipiste, olkoon siis $X = A$. Tällöin $Y \in \text{arc}(B, C)$. Tällöin suora m on tangentti kaarelle $\text{arc}(B, C)$ pisteessä Y ja m on kohtisuorassa janaa YA vasten, sillä YA on kaaren muodostavan ympyrän säde. Tällöin $d(l, m) = d(Y, A) = \delta$.

Vastaavasti nähdään, että jos X on B tai C tai Y on kiinnitetty kärkipiste, suorien l ja m etäisyys on aina δ .

- Oletetaan, että kumpikaan pisteistä X ja Y eivät ole joukon R kärkipisteitä. Olkoot tällöin $X \in \text{arc}(A, B)$ ja $Y \in \text{arc}(B, C)$. Kuten edellisessä kohdassa, suora m on kohtisuorassa janaa YA vasten, samoin suora l on kohtisuorassa janaa XC vasten. Koska alussa oletettiin, että $l \parallel m$, niin joko $\overleftrightarrow{XC} \parallel \overleftrightarrow{YA}$ tai $\overleftrightarrow{XC} = \overleftrightarrow{YA}$. Jos olisi $\overleftrightarrow{XC} = \overleftrightarrow{YA}$, niin koska $Y, C \in \text{arc}(B, C)$, olisi oltava $Y = C$. Samoin saadaan, että $X = A$. Tämä on kuitenkin ristiriita siihen, että pisteet X ja Y eivät olisi joukon R kärkiä.

Oletetaan siis, että $\overleftrightarrow{XC} \parallel \overleftrightarrow{YA}$ eli ne eivät leikkaa. Koska $Y \in \text{arc}(B, C)$, niin jana YA on pistettä A lukuunottamatta aidosti janojen AB ja AC välissä, jolloin se kulkee kolmion $\triangle ABC$ lävitse. Samoin nähdään, että jana XC kulkee kolmion $\triangle ABC$ lävitse. Lisäksi pisteiden X ja Y määrittelystä seuraa, että X ja C ovat eri

puolella janaa YA . Tällöin on olemassa piste D siten, että $D \in XC$ ja $D \in YA$ eli D on janojen leikkauspiste. Tämä on ristiriita $\overleftrightarrow{XC} \parallel \overleftrightarrow{YA}$ kanssa.

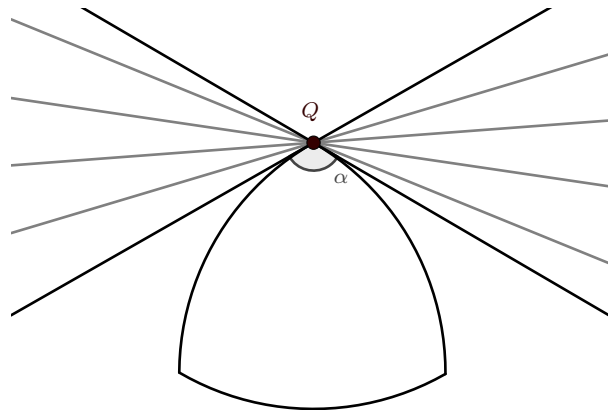


Nyt oletuksesta, että X ja Y eivät ole joukon R kärkipisteitä on päädytty ristiriitaan, jolloin oletus on väärä. Näin ollen kahdesta vastakkaisesta tukisuorasta ainakin toisen on sivuttava joukkoa R kärkipisteessä, jolloin niiden etäisyys on δ . Koska joukon R halkaisija on aina δ , joukko R eli Reuleaux'n kolmio on vakioleveä.

Tutkitaan seuraavaksi vakioleveän joukon kulmia. Määritelmä ja lause löytyvät kirjasta [13, s. 172-174].

Määritelmä 4.10. Olkoot A vakioleveä joukko ja piste Q siten, että joukolla A on pisteessä Q useita tukisuoria. Tällöin sanotaan, että piste Q on joukon A *kulmapiste*.

Lisäksi, pisteessä Q olevat tukisuorat muodostavat *kimpun*, jolla on olemassa äärimmäiset alkiot. Joukon A *kulma* pisteessä Q on näiden äärimmäisten tukisuorien välinen kulma (katso kuva 4.6).

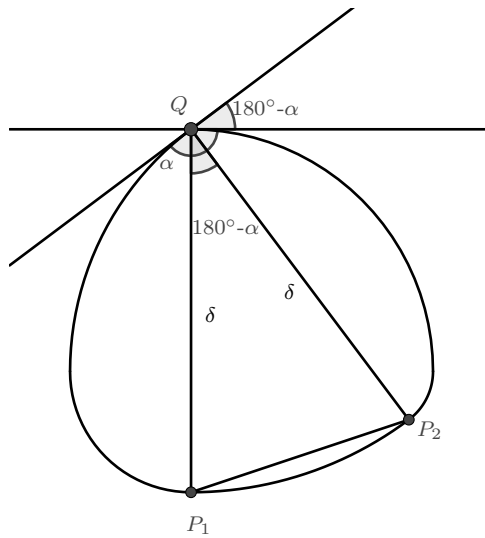


Kuva 4.6: Vakioleveän joukon kulman muodostuminen. Kulma α eli $\sphericalangle Q$ muodostuu mustien suorien väliin, kimpun muut tukisuorat harmaalla.

Lause 4.11. Vakioleveän joukon kulman suuruus on vähintään 120° . Jos vakioleveällä joukolla on 120 asteinen kulma, kyseessä on Reuleaux'n kolmio.

Todistus. Olkoon $A \in \mathbb{R}^2$ vakioleveä joukko ja $\text{diam}(A) = \delta$. Olkoon $Q \in A$ piste siten, että Q on joukon A kulmapiste ja olkoon $\sphericalangle Q = \alpha$. Koska kulman suuruus määritetään kahden tukisuoran välisenä kulmana, niin tällöin kulman $\sphericalangle Q$ vieruskulma tukisuorien leikkauspisteen suhteen on $180^\circ - \alpha$.

Muodostetaan tukisuorille normaalit pisteeseen Q ja merkitään normaalien ja joukon A toisia leikkauspisteitä P_1 ja P_2 . Tällöin $\sphericalangle P_1QP_2 = 180^\circ - \alpha$. Koska A on vakioleveä ja janat QP_1 ja QP_2 kohtisuorassa tukitasoihin nähden, seurauksen 3.6 nojalla janojen QP_1 ja QP_2 pituudet ovat δ .



Kuva 4.7: Lauseen ensimmäisen osan todistus

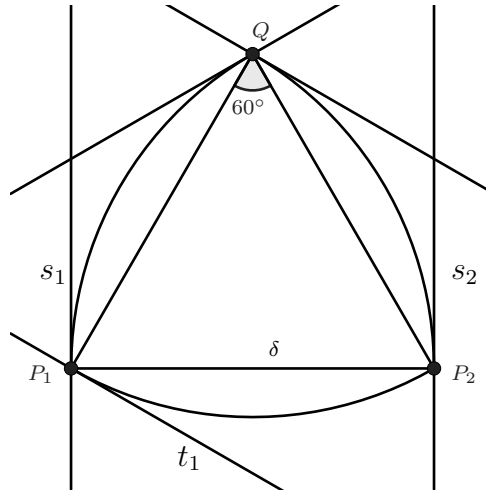
Nyt siis pisteiden P_1 ja P_2 välinen joukon A reunan osa on ympyrän kaari, olkoon se kaari C , jonka keskipiste on Q ja säde δ . Kaaren C keskuskulma on $180^\circ - \alpha$. Jälleen, koska $P_1, P_2 \in A$ ja A on vakioleveä, niin $d(P_1, P_2) \leq \delta$. Muodostuneen tasakylkisen kolmion $\triangle QP_1P_2$ kyljet ovat pituudeltaan δ ja kanta korkeintaan δ , jolloin sen huippukulma $\sphericalangle P_1QP_2$ on korkeintaan 60° . Nyt siis

$$\begin{aligned} \sphericalangle P_1QP_2 = 180^\circ - \alpha &\leq 60^\circ \\ \alpha &\geq 120^\circ. \end{aligned}$$

Oletetaan seuraavaksi, että $\alpha = 120^\circ$. Edellisen yhtälön nojalla $\sphericalangle P_1QP_2 = 60^\circ$ ja $\triangle P_1QP_2$ on tasasivuinen kolmio. Sivun P_1P_2 pituus on siis δ . Koska joukon A leveys on myös δ , janaa P_1P_2 vasten kohtisuorassa olevien tukisuorien s_1 ja s_2 täytyy kulkea pisteiden P_1 ja P_2 kautta.

Aiemmin todettiin, että pisteiden P_1 ja P_2 välinen joukon A osa on ympyrän kaari C , jolloin pisteen P_1 kautta ei kulje vain tukisuora s_1 vaan myös kaaren C tangenttisuora t_1 . Koska tangenttisuora t_1 sivuaa joukkoa vain pisteessä P_1 , niin t_1 on myös joukon A tukisuora. Koska pisteessä P_1 on olemassa usempi tukisuora, niin

piste P_1 on joukon A kulmapiste. Lisäksi tukisuoran s_1 ja janan P_1P_2 välinen kulma on 90° , samoin kuin kaaren C tangentin t_1 ja säteen QP_1 . Tällöin suorien s_1 ja t_1 välinen kulma on $90^\circ + 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Siispä $\sphericalangle P_1 = 120^\circ$.



Kuva 4.8: Lauseen toisen osan todistus

Vastaavasti nähdään, että myös piste P_2 on joukon A kulmapiste ja kulma $\sphericalangle P_2 = 120^\circ$, jolloin joukolla A on kolme kulmapistettä, joilla on samat ominaisuudet: kulman koko ja kulmien välissä olevan kaaren keskuskulma, minkä lisäksi kulmapisteiden muodostama kolmio on symmetrinen. Tällöin joukko A on Reuleaux'n kolmio. \square

Lopuksi esitellään tulos vakioleveyden joukkojen pinta-alojen vertailuun. Lause tunnetaan Blaschken ja Lebesguen lauseena ja sille on esitetty useita eri todistuksia. Eräs esimerkki todistuksesta löytyy Egglestonilta [4, s. 128-130]. Tässä työssä todistus sivuutetaan.

Lause 4.12. (Blaschken ja Lebesguen lause) *Pinta-alaltaan pienin vakioleveä joukko, jonka leveys on δ , on Reuleaux'n kolmio.*

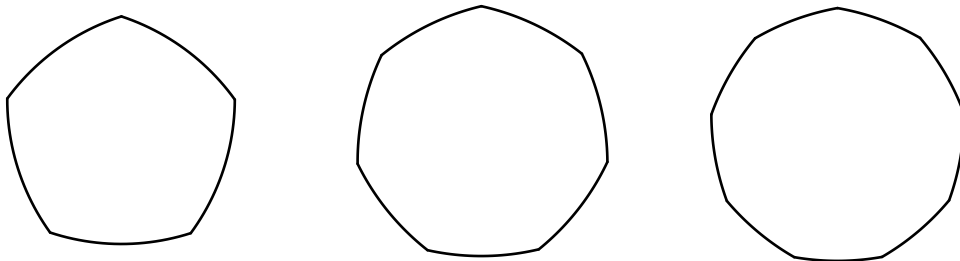
Huomautus 4.13. δ :n levyisten vakioleveyden joukkojen pinta-alalle voidaan antaa myös yläraja. Joukoista, joilla on sama piiri, ympyrän pinta-ala on suurin. [4, s. 128]. Barbierin lauseen 4.3 nojalla kaikilla samanlevyisillä vakioleveillä joukoilla on sama piiri, jolloin yhdistämällä nämä kaksi huomautusta saadaan, että samanlevyisistä vakioleveistä joukoista suurin pinta-ala on ympyrällä ja pienin edellisen lauseen nojalla on Reuleaux'n kolmiolla.

Esimerkki 4.14. Reuleaux'n kolmio ei ole ainut vakioleveä joukko, joka saadaan muodostettua säännöllisestä monikulmiosta. Olkoon P säännöllinen viisikulmio ja pisteet A, B, C, D ja E sen kärjet. Koska P on säännöllinen, sen lävistäjien pituus on vakio δ .

Muodostetaan nyt A -keskinen, δ -säteinen ympyrän kaari, joka yhdistää pisteet C ja D . Vastaavalla tavalla yhdistetään viereiset kärkipisteet ympyrän kaarella, jonka

keskipiste on pisteitä yhdistävän janan vastakkainen kärki. Samoin kuin Reuleaux'n kolmion kohdalla, nyt voidaan osoittaa, että ympyröiden kaarien rajaama joukko on vakioleveä (osoittamalla, että vastakkaisista tukitasoista vähintään toisen on sivuttava joukkoa kulmapisteessä, jolloin tukitasojen etäisyys on ympyrän kaaren säde eli δ).

Vastaavalla tavalla voidaan konstruoida muita vakioleveitä joukkoja käyttäen pohjana säännöllistä monikulmioita, jossa on pariton määrä kärkiä, sillä konstruktion tarvitaan kärki ja sen vastakkainen sivu. Näin on vain monikulmioilla, joissa on pariton määrä kärkiä. Kyseisellä konstruktiolla saatavia vakioleveitä joukkoja kutsutaan monesti Reuleaux'n monikulmioiksi.

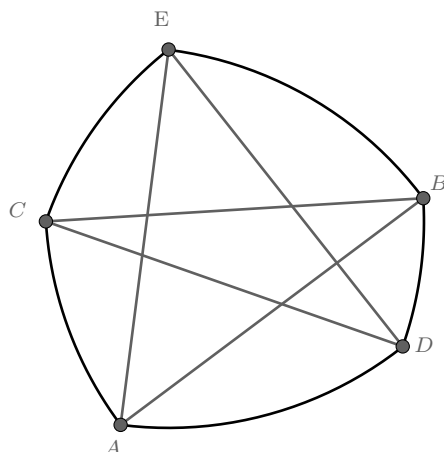


Kuva 4.9: Vakioleveitä joukkoja, joiden pohjana on käytetty säännöllisiä viisi-, seitsen- ja yhdeksänkulmioita.

Tähän mennessä vakioleveitä joukkoja on muodostettu käyttäen pohjana konvek-sia ja säännöllistä joukkoa. Kuitenkin vakioleveän joukon voi konstruoida mistä tahansa kolmiosta ja jopa itseään leikkaavasta monikulmiosta (esimerkiksi tähtimäiset monikulmiot). Säännölliselle tähtimäiselle monikulmiolle väite on selvä: säännöllisen monikulmion sisään voidaan muodostaa säännöllinen tähti, jonka kärjet ovat samat kuin monikulmion. Tällöin vakioleveä joukko muodostetaan kuten esimerkissä 4.14. Näytetään seuraavaksi, miten ei-säännöllisestä tähtimäisestä monikulmiosta saadaan konstruoituja vakioleveä joukko.

Esimerkki 4.15. Olkoot pisteet A, B, C, D ja E siten, että janat AB, BC, CD, DE ja AE ovat yhtäpitkiä ja janat leikkaavat toisiaan. Olkoon janojen pituus δ . Janat muodostavat viisisakaraisen tähden.

Aloitetaan pisteestä A ja piirretään δ -säteinen kaari pisteestä B pisteeseen E , $\text{arc}(B, E)$. Jatketaan käyttämällä vuorotellen jokaista kärkeä keskipisteenä, ja piirretään ympyrän kaaret $\text{arc}(A, C)$, $\text{arc}(E, C)$, $\text{arc}(A, D)$ ja $\text{arc}(B, D)$. Yhdistämällä saadut kaaret muodostuu kuvan 4.10 joukko, olkoon se T .



Kuva 4.10: Vakioleveä joukko T .

Joukkoa ei täsmällisesti osoiteta vakioleveäksi, mutta perustellaan sitä hieman: Kuten Reuleaux'n kolmiossa, myös joukolle T pätee, että vastakkaisista tukisuorista toisen on kuljettava kärjen kautta, olkoon se kärki A . Koska piste A on joukon T kulmapiste, määritelmän 4.10 nojalla joukolla on useita tukisuoria pisteessä A . Nämä tukisuorat muodostavat kimpun, ja jokaiselle tukisuoralle löytyy yhdensuuntainen tukisuora, joka sivuaa joukkoa T kärjen A vastaisella ympyrän kaarella tai sen päätepisteissä (pisteessä B tai E). Molemmissa tapauksissa tukisuorien etäisyys toisistaan on sama kuin kaaren säde, joka oli δ .

Vastaavalla perustelulla muille kärjille saadaan, että joukko T todella on vakioleveä joukko, jonka leveys jokaiseen suuntaan on δ .

Edellä olevilla konstruktiolla saadaan aikaan vakioleveitä joukkoja, joissa on kulmia (kuten esimerkiksi kuvasta 4.9 huomataan). Vakioleveissä joukoissa ei kuitenkaan aina ole kulmia, vaikka kyseessä ei olisikaan kiekko. Kirjassa *Mathematical models* ([3, s. 211]) esitellään, miten mitä tahansa mielivaltaista kolmiota käyttämällä voidaan konstruoida vakioleveä joukko, jossa ei ole yhtään kulmaa.

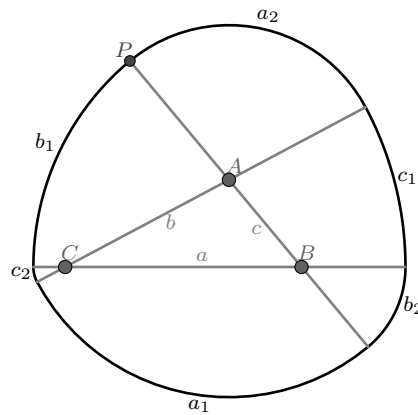
Esimerkki 4.16. Olkoon $\triangle ABC$ mielivaltainen ja olkoot kärkeä A vastaava sivun pituus a , pistettä B b ja pistettä C c . Olkoon lisäksi δ siten, että δ on suurempi kuin minkään kahden kolmion sivun pituuden summa.

Muodostetaan kolmion sivuille jatkeet ja piirretään seuraavat ympyräkaaret:

- Kaari a_1 , jonka keskipiste on A ja säde $\delta - a$, toiselle puolelle sivua a kuin piste A .
- Kaari a_2 , jonka keskipiste on A ja säde $\delta - b - c$, samalle puolelle sivua a kuin piste A .
- Kaari b_1 , jonka keskipiste on B ja säde $\delta - b$, toiselle puolelle sivua b kuin piste B .

- Kaari b_2 , jonka keskipiste on B ja säde $\delta - a - c$, samalle puolelle sivua b kuin piste B .
- Kaari c_1 , jonka keskipiste on C ja säde $\delta - c$, toiselle puolelle sivua c kuin piste C .
- Kaari c_2 , jonka keskipiste on C ja säde $\delta - b - a$, samalle puolelle sivua c kuin piste C .

Nyt, kuten kuvasta 4.11 huomataan, kaaret leikkaavat toisiaan sivujen jatkeilla. Kun otetaan yhdiste sivujen jatkeiden väliin jäävistä ympyrän kaarista (leikkauspisteet mukana), saadaan vakioleveä joukko.



Kuva 4.11: Kulmattoman vakioleveän joukon muodostaminen

Osoitetaan, että saatu joukko on vakioleveä. Olkoot H_{a_1} ja H_{a_2} joukon tukisuoria siten, että ne ovat keskenään yhdensuuntaisia ja sivuavat joukkoa kaarilla a_1 ja a_2 vastaavasti. Tukisuorat ovat nyt kaarien tangentteja. Tällöin tukisuorat ovat kohtisuorassa kaartien säteitä vastaan ja $d(H_{a_1}, H_{a_2}) = \delta - a + \delta - b - c = 2\delta - a - b - c$.

Tutkitaan seuraavaksi kaarien leikkauspisteitä: Olkoon piste P kaarien a_2 ja b_1 leikkauspiste sivun AB jatkeella. Huomataan, että tangentti kaarelle a_2 pisteessä P on sama kuin tangentti kaarelle b_1 pisteessä P , sillä tangentteja vastaavien kaarien säteet (jana AP ja jana BP) ovat samalla suoralla. Tällöin siis säteitä vastaan kohtisuorien suorien täytyy olla samat.

Vastaavalla päättelyllä muille vastakkaisille tukisuorille saadaan, että tukisuorat siirtyvät "portaattomasti" ympyrän kaarelta toiselle ja tukisuorien etäisyys toisistaan on koko ajan $2\delta - a - b - c$. Saatu joukko on siis vakioleveä.

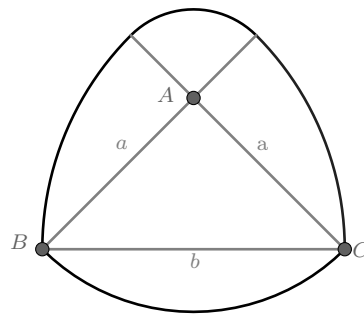
Edellisillä esimerkeillä on saatu muodostettua vakioleveitä joukkoja, jotka muodostuvat kolmesta kaaresta (Reuleaux'n kolmio) ja kuudesta kaaresta (kuva 4.11). Näytetään seuraavaksi, miten voidaan konstruoida vakioleveä joukko, joka muodostuu neljästä ympyrän kaaresta.

Esimerkki 4.17. Olkoon $\triangle ABC$ tasakylkinen kolmio siten, että piste A on kolmion huippu. Olkoot lisäksi kolmion kylkien pituudet a ja kannan b siten, että $b > a$. Muodostetaan sivuille jatkeet ja aloitetaan kaarella, jonka keskipiste on piste A ja säde a . Pisteet B ja C sisältyvät siis kaarelle.

Seuraavaksi, keskipisteenä piste B ja säteenä b , muodostetaan ympyrän kaari pisteestä C sivun AB jatkeelle. Vastaavasti, piste C keskipisteenä, muodostetaan b -säteinen kaari pisteestä B sivun AC jatkeelle. Viimeiseksi muodostetaan kaari, jonka keskipiste on A ja säde $b - a$, sivun AB jatkeelta sivun AC jatkeelle.

Jos toinen tukisuorista kulkee kärjen B kautta, toinen tukisuora sivuaa joukkoa kärjen vastakkaisella kaarella tai pisteessä C ja tukisuorien etäisyys toisistaan on b . Kyseessä on samanlainen päättely kuin Reuleaux'n kolmion tapauksessa. Kaarien leikkauspisteissä, joissa ei ole kulmaa, tukisuorat ovat kaarien tangentteja ja siirtyvät portaattomasti kaarelta toiselle kuten esimerkissä 4.16.

Tapauksessa, jossa tukisuora sivuaa joukkoa toisella A -keskisistä kaarista, yhdensuuntainen tukisuora sivuaa joukkoa vastakkaisella A -keskisellä kaarella, jolloin tukisuorien etäisyys on $a + (b - a) = b$, kuten edellisessä tilanteessa. Tästä voimme päätellä, että saatu joukko on vakioleveä ja sen leveys on b .



Kuva 4.12: Neljän kaaren muodostama vakioleveä joukko

4.4 Kolmiulotteiset vakioleveät joukot

Kuten tasossa, myös avaruudessa on vakioleveitä joukkoja. Niiden muodostaminen ei tosin ole aivan yhtä helppoa kuin kaksiulotteisessa tapauksessa. Muodostamalla Reuleaux'n tetraedri kolmanteen ulottuvuuteen vastaavalla tavalla kuin Reuleaux'n kolmio \mathbb{R}^2 :seen ei tuotakaan vakioleveää joukkoa. Kirjassa *Convex figures* ([17, s. 81]) esitellään, miten niin sanottua Reuleaux'n tetraedria muokkaamalla voidaan muodostaa avaruuden vakioleveä joukko eli kappale. Seuraavaksi käydään läpi kyseinen konstruktio, mutta jätetään osoittamatta, että saatu kappale todella on vakioleveä.

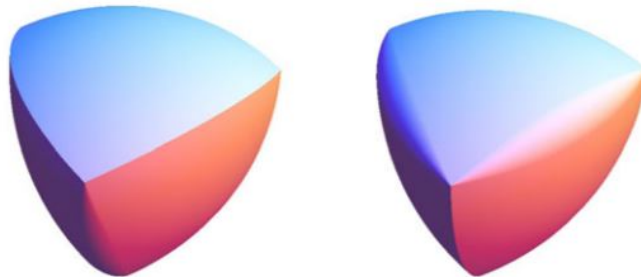
Esimerkki 4.18. Olkoon $ABCD \subset \mathbb{R}^3$ säännöllinen tetraedri, jonka särmän pituus on h . Muodostetaan jokaiselle tahkolle pallopinta, jonka keskipisteenä on vastakkainen kärki ja säteenä h . Esimerkiksi tahkolle $\triangle BCD$ muodostetaan pallopinta, jonka

keskipiste on A siten, että pisteet B , C ja D sisältyvät pallopintaan. Tuloksena saadaan pyöristetyn tetraedrin näköinen kappale. Muodostunutta kappaletta kutsutaan usein Reuleaux'n tetraedriksi, merkitään R_3 .

Seuraavaksi kiinnitetään kärki A ja jatketaan tetraedrin tahkoja siten, että ne leikkaavat kärjen A vastaisen tahkon reunoilla. Poistetaan jatkettujen tahkojen leikkaamat 3 kiilamaista osaa R_3 :sta. Korvataan osat kiertämällä tahkon ja R_3 :n leikkauspinnan kaarta tetraedrin särmän suhteen. Näin saadaan siis kolmiulotteinen kappale, joka on muodostettu tetraedrista niin sanotusti pyöristämällä yhden tahkon reunoja.

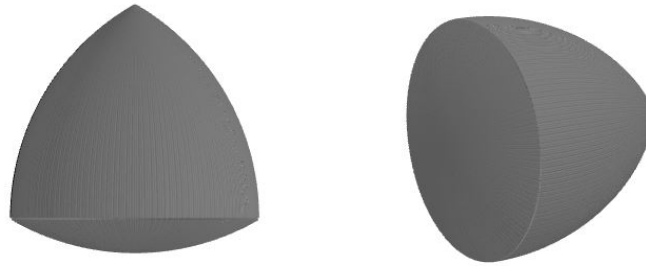
Reuleaux'n tetraedria voidaan muokata myös niin, että kiinnitetään kärki, josta lähtevät särmät pyöristetään, kuten edellä tehtiin tahkon reunoille: Olkoon R_3 kuten edellä ja kiinnitetään kärki A . Tällä kertaa jatketaan tetraedrin tahkoja, jotka sisältävät kärjen A ja poistetaan R_3 :sta kärjestä A lähtevät tahkojen jatkeiden leikkaukset. Täydennetään syntyneet "kolot" kiertämällä tahkon ja R_3 :n leikkauspinnan kaarta tetraedrin särmän suhteen.

Tällä tavalla konstruoituja kappaleita sanotaan *Meissnerin kappaleiksi* ([9, s.96-97]) niin, että ensimmäinen kappale on M_F ja toinen M_V . Kuvassa 4.13 on havainnollistettu näitä kappaleita.



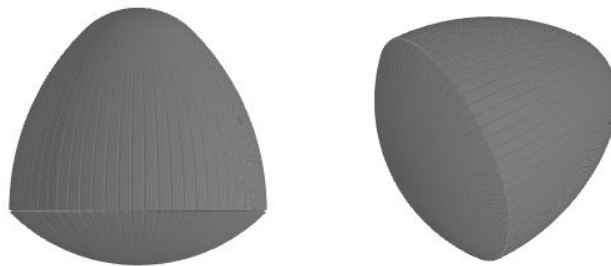
Kuva 4.13: Meissnerin kappaleet M_V (pyöristetetyt särmät alhaalla) ja M_F (pyöristetetyt särmät päällimmäisen tahkon reunoilla). Kuva artikkelista *Meissner's Mysterious Bodies* (Kawohl & Weber, 2011, [9, s. 97]).

Edellä esitellyt kappaleet eivät kuitenkaan ole yksinkertaisimmat Meissnerin kappaleista tai itse asiassa edes kolmiulotteisista vakioleveistä kappaleista. Artikkelissa *Meissner's Mysterious Bodies* [9, s. 96] esitellään myös tason joukoista rotaation avulla saatavia kappaleita, jotka ovat vakioleiveitä. Lähtökohtana on ottaa tason vakioleiveä joukko ja kiertää sitä symmetria-akselinsa ympäri pyörähdyskappaleeksi. Saadut kappaleet ovat vakioleiveitä. Seuraavaksi esitellään Reuleaux'n kolmiosta saatava vakioleiveä kappale: Olkoon R_2 Reuleaux'n kolmio kuten esimerkissä 4.8. Joukolla on kolme symmetria-akselia, joista jokainen kulkee yhden kärjen kautta. Valitaan akseli kärjen A kautta. Ikään kuin kiinnittämällä Reuleaux'n kolmio akseliin kiinni, pyöräytetään joukko akselin ympäri, jolloin tuloksena on kolmiulotteinen kappale, joka on vakioleiveä.



Kuva 4.14: Reuleaux'n kolmiosta muodostettu pyörähdyskappale.

Esitellään vielä toinen rotaatiolla saatava vakioleveä joukko. Otetaan esimerkissä 4.17 muodostettu joukko, jonka symmetria-akseli s kulkee pisteen A kautta ja on kohtisuorassa sivua BC vasten. Kiertämällä joukkoa 360° akselin s ympäri saadaan kuvassa 4.15 oleva kappale.



Kuva 4.15: Esimerkin 4.17 vakioleveän joukon pyörähdyskappale.

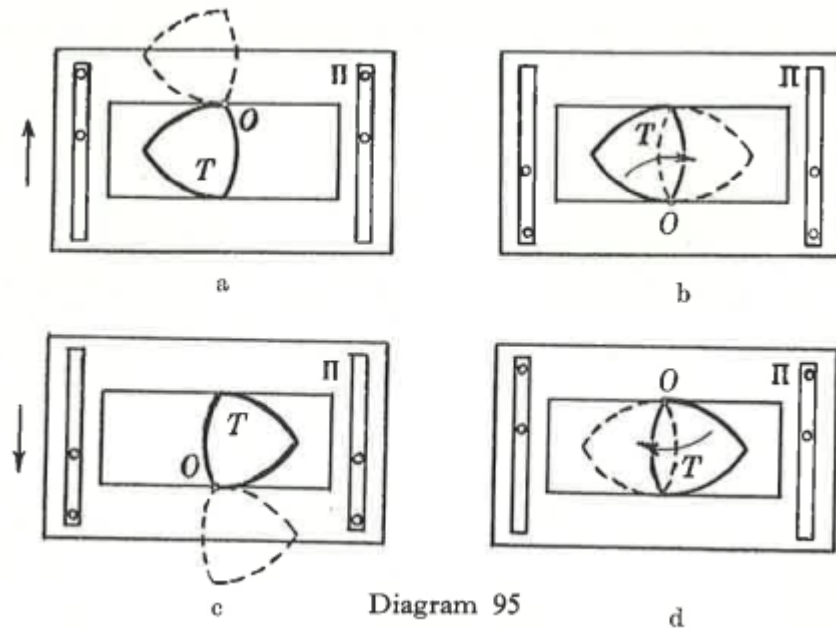
4.5 Vakioleveiden joukkojen sovelluksia

Tässä luvussa esitellään muutamia sovelluskohteita. Erityisesti Reuleaux'n kolmiota on käytetty sovellusten pohjana, sillä Franz Reuleaux todisti, että Reuleaux'n kolmiota voidaan kiertää neliön sisällä siten, että se osuu koko ajan neliön jokaiseen reunaan. Tätä ajatusta on sovellettu muun muassa poranterissä, joilla voidaan porata neliön mallisia reikiä. Muita sovelluskohteita vakioleveille joukoille ovat esimerkiksi vanhanaikaiset filmiprojektorit, Wankelin moottori sekä Iso-Britannian kolikot.

Reuleaux'n kolmion geometriaa on hyödynnetty muun muassa filmiprojektorin toiminnassa. Vanhanaikaisessa projektorissa, jossa filmi heijastettiin valkokankaalle pysäytyskuvista, oleellista oli, että kuvan vaihtuminen ei näy katsojille. Tämä tarkoitti sitä, että kun kuva vaihtui, projektorissa oleva suljin esti kuvan näkymisen. Kun kuva oli kokonaan vaihtunut ja ruudussa näkyi vain yksi kuva, suljin avautui. Kaiken tämän täytyi tietysti tapahtua sekunnin murto-osissa, jotta video ei keskeydy. Filminauhan siirtämiseen käytettiin Reuleaux'n kolmiota, sillä kolmiota voidaan kier-

tää kuvassa 4.16 näkyvällä tavalla suorakaiteen sisällä. Avataan seuraavaksi hieman, miten Reuleaux'n kolmiota hyödynnettiin.

Olkoon Π levy, joka on kiinnitetty alustaan niin, että sitä voi liikuttaa ylös alas, mutta ei sivuttain. Keskellä levyä on suorakaiteen muotoinen aukko siten, että aukon sisälle asetettu Reuleaux'n kolmio T osuu aukon vastakkaisiin reunoihin. Kolmio T on kiinnitetty kulmastaan tasoa vasten kohtisuorassa olevaan akseliin O , jolloin kolmio pääsee pyörimään akselin ympäri liikuttaen samalla levyä Π . Kun R kiertyy 120° vastapäivään, levy Π nousee. Jatkamalla kiertoa 60° lisää, levy pysyy paikallaan. Kiertämällä taas 120° , levy laskee alas takaisin alkuasentoon. Täyden kierroksen täydentävä 60° ei liikuta levyä. [17, s.72].



Kuva 4.16: Filmiprojektorin toiminnan idea Reuleaux'n kolmiota hyödyntäen. Kuva kirjasta *Convex Figures* (Yaglom & Boltyanskii, 1961, [17, s.73])

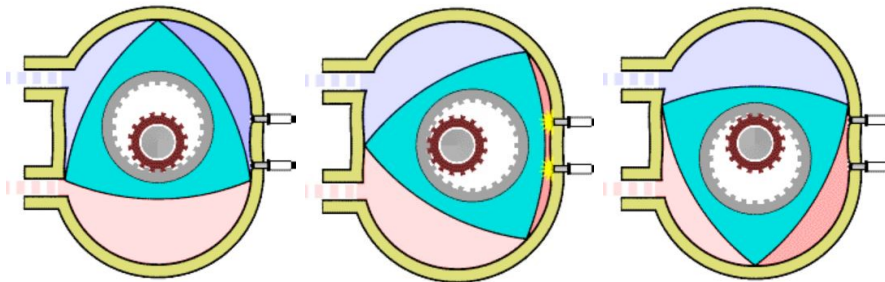
Edellä esitettyä mekanismia käytettiin filmin liikuttamiseen, sillä aina kun levy liikkui alas (kuva 4.16c), se liikkui myös filmiä yhden kuvaruudun verran alas.

Toinen sovelluskohde vakioleveille joukoille löytyy kolikoista. Iso-Britannian 20 ja 50 pennyn kolikot ovat Reuleaux'n seitsenkulmioita ja näin ollen vakioleveitä. Lisäksi Kanadan yhden dollarin kolikko on Reuleaux'n 11-kulmio. Tekemällä kolikoista kulmikkaita perinteisten kiekkojen sijaan, on kolikot vaikeampi väärentää. [10, luku 4.4]. Pitämällä kolikoiden leveys vakiona taataan se, etteivät kolikot jää automaatteihin niin helposti jumiin. Kolikko voidaan laittaa automaattiin miten päin tahansa sen ollessa vakioleveä. [2, luku 10].



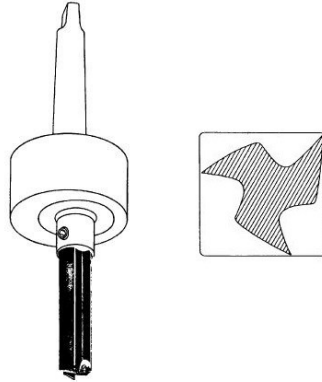
Kuva 4.17: Iso-Britannian 20 pennyn kolikko.

Kolmas sovelluskohde on Wankelin moottori tai kiertomäntämoottori. Siinä missä tavallisessa moottorissa on ylös alas liikkuva mäntä, Wankelin moottorissa on Reuleaux'n kolmiota mukaileva kiertomäntä, joka jakaa polttokammion kolmeen osaan. Ensimmäisessä osassa ilma sekoittuu polttoaineeseen, seuraavassa seoksen paine kasvaa, kun männän pyöriessä seoksen tila pienenee, ja viimeisessä osassa seos syttyy ja palaa räjähtämällä saaden männän jatkamaan pyörimistä (kuva 4.18).



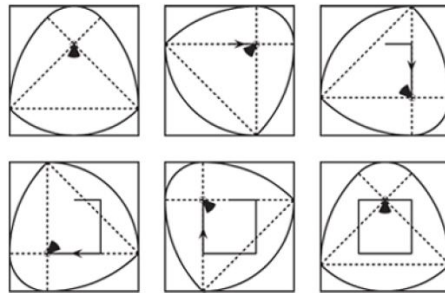
Kuva 4.18: Wankelin moottorin toimintaperiaate. Ylhäällä vasemmalla ilman sisään-tuloaukko, oikealla sytyttimet ja alhaalla vasemmalla palavan ilma-polttoaineseoksen poistoaukko. Pysäytyskuvat Wikimedia Commonsin animaatiosta ([16]).

Viimeisimpänä tässä työssä esiteltävistä sovelluskohteista esitellään Reuleaux'n kolmion käyttäminen poranteränä. Luvun alussa mainittiin, että Reuleaux'n kolmiota voidaan kiertää neliön sisällä siten, että kolmio osuu koko ajan kaikkiin neljään neliön sivuun. Jos tarkastellaan kolmion jättämää jälkeä, niin ilmenee, että Reuleaux'n kolmion pyöriessä sen reunat rajaavat lähes neliön muotoisen alueen. Alue on neliö, joka on kulmistaan hieman pyöristetty. Tätä ominaisuutta hyödyntäen englantilainen insinööri Henry James Watts kehitti vuonna 1914 poranterän, jolla pystyttiin poraamaan neliön muotoisia reikiä. Terä itsessään ei ole vakioleveytä (kuten kuvasta 4.19 nähdään), mutta se pohjautuu Reuleaux'n kolmioon. [6, luku 18]. Oleellista terän toiminnassa on se, että sitä ei pyöritetä akselinsa ympäri, vaan terän keskipiste liikkuu neliömäisellä uralla, jolloin terän kärjet piirtävät neliön porattavaan materiaaliin.



Kuva 4.19: Oikealla neliönmallisten reikien poraamiseen kehitetyn terän poikkileikkaus, vasemmalla Wattsin poran istukka ja itse terä. Kuva kirjasta *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions* (Gardner, 1969, [6, s. 214]).

Edellä oleva poranterä saa aikaan hieman pyöristetyn neliön, mutta teräväkulmainen neliö on mahdollista porata terällä, joka pohjautuu esimerkissä 4.17 esiteltyyn vakioleveään joukkoon. Kuvassa 4.20 esitellään, että jos poran terä asetetaan vakioleveään joukon pohjana olevan kolmion huippuun ja joukkoa kierretään neliön sisällä, terä rajaa täsmälleen neliön muotoisen alueen terävine kulmineen. [2, luku 10].



Kuva 4.20: Toinen neliönmallisen reiän poraamiseen kehitetty pora. Kuva kirjasta *How round is your circle? : where engineering and mathematics meet* (Bryant & Sangwin, 2011, [2, s. 130]).

Lähdeluettelo

- [1] BERGER, M. *Geometry II*. M. Cole ja S. Levy (käännös). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berliini, 1987.
- [2] BRYANT, J. ja SANGWIN, C. *How round is your circle? : where engineering and mathematics meet*. Princeton University Press, Princeton, 2011.
- [3] CUNDY, H. M. ja ROLLET, A. P. *Mathematical models*. Oxford University Press, Oxford, 1961.
- [4] EGGLESTON, H. G. *Convexity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1977.
- [5] EUKLEIDES. *The Thirteen Books of The Elements*. Toinen painos, Thomas L. Heath (Ed.). Dover Publications, New York, 1956.
- [6] GARDNER, M. *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*. The University of Chicago Press, Chicago, 1969.
- [7] HUG, D. ja WEIL, W. *A course of Convex Geometry*,
<https://www.fmf.uni-lj.si/~lavric/hug&weil.pdf>, luettu 25.4.2019.
- [8] IZMESTIEV, I. *Introduction to Differential Geometry*,
<http://homeweb.unifr.ch/Izmestie/pub/Teaching/DiffGeom16.pdf>, luettu 11.1.2019.
- [9] KAWOHL, B ja WEBER, C. *Meissner's Mysterious Bodies*. The Mathematical Intelligencer 33:3, s. 94-101, 2011.
- [10] LEONARD, I. E. ja LEWIS, J. E. *Geometry of Convex Sets*. Wiley, 2015.
- [11] PAPADOPOULOS, A. *Metric spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*. European Mathematical Society, Germany, 2005.
- [12] PARKKONEN, J. *Metriset avaruudet -luennot*. Syksy 2018.
- [13] RADEMACHER, H. ja TOEPLITZ, O. *The Enjoyment of Mathematics*. Princeton University Press, Princeton, 1966.
- [14] SAARIMÄKI, M. *Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopistopaino, Jyväskylä, 2012.

- [15] WEBSTER, R. *Convexity*. Oxford University Press, New York, 1994.
- [16] WIKIMEDIA COMMONS. *Animated description of the cycle*.
https://commons.wikimedia.org/wiki/Wankel_engine#/media/File:Wankel_Cycle_anim.gif, luettu 24.5.2019.
- [17] YAGLOM, I. M. ja BOLTYANSKII, V. G. *Convex figures*. P. J. Kelly ja L. F. Walton (käännös). Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.