Derivaatasta ja derivoituvuudesta

Piia Lehtola

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2018

Tiivistelmä: Piia Lehtola, *Derivaatasta ja derivoituvuudesta*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 45 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2018.

Tässä tutkielmassa käsitellään derivaattaa ja siihen liittyviä ilmiöitä. Aluksi käydään läpi derivaatan ja jatkuvuuden yhteyttä, mitä on tutkittu matematiikassa paljon. Jo 1800-luvulla osoitettiin, että on olemassa jatkuva funktio, joka ei ole missään pisteessä derivoituva. Kuitenkin funktion derivoituvuudesta seuraa funktion jatkuvuus. Tätä ei pidä sekoittaa funktion derivaattafunktion jatkuvuuteen, sillä derivaattafunktiot eivät välttämättä ole jatkuvia. Niillä on kuitenkin vastaava ominaisuus kuin jatkuvilla funktioilla, eli välissäolevien arvojen olemassolo. Tästä seuraa, että derivaattafunktiolla voi olla vain oleellisia epäjatkuvuuspisteitä, eli pisteitä, joissa derivaattafunktion raja-arvoa ei ole olemassa tai se on ääretön.

Funktiot eivät ole aina derivoituvia. Tästä syystä on kehitetty yleistyksiä perinteisestä derivaatasta. Tässä tutkielmassa esitellään niistä Dinin derivaatat ja funktion johdos. Näiden avulla pystytään osoittamaan mahdollisesti derivoitumattomilla funktioilla vastaavanlaisia lauseita kuin perinteisellä derivaatalla.

Tietyt ominaisuudet funktioilla takaavat kuitenkin derivoituvuuden melkein kaikkialla niiden määrittelyjoukossa. Tällaisia ominaisuuksia ovat monotonisuus, rajoitetusti heilahtelevuus ja absoluuttinen jatkuvuus. Funktion johdoksien avulla voidaan osoittaa, että monotoniset funktiot ovat melkein kaikkialla derivoituvia. Tästä ominaisuudesta seuraa, että myös rajoitetusti heilahtelevat funktiot ja absoluuttisesti jatkuvat funktiot ovat melkein kaikkialla derioituvia.

Tutkielman lopussa käsitellään derivaatan integroimista ja osoitetaan, että jos funktio halutaan saada takaisin sen derivaattafunktiota integroimalla, on funktion oltava tällöin absoluuttisesti jatkuva. Vastaesimerkkinä toimii kuuluisa Cantorin funktio.

Sisältö

Johdanto

Nykyaikaiset, raja-arvon avulla esitetyt derivaatan ja jatkuvuuden määritelmät ovat peräisin 1800-luvulta Augustin Cauchylta. Jo ennen tarkkoja määritelmiä derivaatan ja jatkuvuuden yhteys kiinnosti matemaatikkoja. Tunnettu tulos oli, että funktion derivoituvuudesta seuraa sen jatkuvuus. Ajateltiin, että funktion jatkuvuus voisi myös taata sen derivoituvuuden, mutta 1800-luvulla selvisi, että on olemassa jatkuvia funktioita, jotka eivät ole derivoituvia missään pisteessä. Tämän jälkeen heräsikin kysymys, että millaiset funktiot ovat derivoituvia melkein kaikkialla.

Tämän tutkielman toisessa luvussa esitellään derivaatan ja jatkuvuuden määritelmät sekä epäjatkuvuustyyppien luokittelu. Lisäksi osoitetaan, että derivoituva funktio on jatkuva ja näytetään esimerkeillä, että jatkuva funktio ei ole derivoituva, eikä sillä välttämättä ole edes toispuoleisia derivaattoja olemassa. Lopuksi käsitellään vielä derivaattafunktion jatkuvuutta. Näytetään esimerkki funktiosta, jonka derivaattafunktio ei ole jatkuva. Funktion derivoituvuus ei siis takaa, että sen derivaattafunktio olisi jatkuva. Derivaattafunktion epäjatkuvuus voi olla kuitenkin vain oleellista epäjatkuvuutta, sillä derivaattafunktiolla ja jatkuvalla funktiolla on olemassa sama ominaisuus, joka on välissäolevien arvojen olemassaolo.

Tutkielman kolmannessa luvussa esitellään kaksi yleistystä perinteisestä derivaatasta. Nämä ovat Dinin derivaatat ja funktion johdos. Kaikki funktiot eivät ole perinteisessä mielessä derivoituvia ja derivaatan yleistyksillä voidaan osoittaa samantapaisia lauseita kuin perinteisellä derivaatalla funktioille, jotka eivät välttämättä ole derivoituvia. Tässä tutkielmassa osoitetaan Dinin derivaatalla funktion monotonisuus ja johdoksen avulla differentiaalilaskennan väliarvolausetta vastaava tulos. Lisäksi kappaleessa tutustutaan Vitalin peitelauseeseen, jonka mukaan reaaliakselilla sijaitseva joukko on mahdollista peittää numeroituvalla määrällä erillisiä välejä, joiden koko on approksimoitavissa niin pieneksi kuin halutaan. Tämä peitelause on tärkeässä roolissa, kun tutkielman neljännessä luvussa osoitetaan tietyille funktioille niiden derivoituvuutta.

Neljännessä luvussa päästään viimein vastaamaan, millaiset funktiot ovat derivoituvia melkein kaikkialla. Ensimmäinen näistä funktioluokista on monotoniset funktiot. Henri Lebesgue (1875-1941) osoitti ensimmäisenä monotonisten funktioiden olevan melkein kaikkialla derivoituvia. Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan ole Lebesguen alkuperäistä todistusta, vaan ominaisuus osoitetaan funktion johdoksien avulla. Kaksi muuta melkein kaikkialla derivoituvaa funktioluokkaa ovat rajoitetusti heilahtelevat ja absoluuttisesti jatkuvat funktiot. Funktion heilahtelulla tarkoitetaan summaa funktion arvojen erotuksien itseisarvoista välin jakopisteissä. Rajoitetusti heilahtelevilla funktioilla tämä heilahtelu on äärellistä. Tutkielmassa näytetään, että rajoitetusti heilahteleva funktio voidaan esittää kahden monotonisen funktion erotuksena, mikä takaa rajoitetusti heilahtelevien funktioiden derivoituvuuden melkein kaikkialla. Vastaavasti absoluuttisesti jatkuvat funktiot ovat myös rajoitetusti heilahtelevia, mikä takaa niiden derivoituvuuden melkein kaikkialla.

Viimeisessä kappaleessa käsitellään derivaatan integroimista ja erityisesti sitä, millaiset funktiot saadaan takaisin niiden derivaatasta integroimalla. Selviää, että funktion on oltava tällöin absoluuttisesti jatkuva. Vastaesimerkkinä esitellään kuuluisa Cantorin funktio.

Tutkielman ensimmäisessä kappaleessa käydään läpi tutkielmalle tärkeitä esitietoja raja-arvoista. Lisäksi tehdään lyhyt katsaus Lebesguen mitta- ja integraaliteoriaan, mikä on tärkeässä osassa tutkielman viimeisimmissä kappaleissa. Jokaisen kappaleen alussa on mainittu tärkeimmät kappaleessa käytetyt lähteet.

LUKU 1

Esitietoja

Tässä luvussa esitetään määritelmiä ja lauseita, joista suurimman osan oletetaan olevan lukijalle ennestään tuttuja ja joita tarvitaan tutkielman muissa kappaleissa esitietoina. Raja-arvoja käsittelevässä kappaleessa on käytetty lähdettä [**1**] ja mitta- ja integraaliteoriaa käsittelevässä kappaleessa lähdettä [**2**], ellei toisin mainita.

1.1. Raja-arvoista

MÄÄRITELMÄ 1.1. Funktion *raja-arvo pisteessä* x_0 on a, merkitään $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \qquad \text{kun} \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{ja} \quad x \neq x_0.$$

Funktiolle voidaan myös määritellä toispuoleiset raja-arvot.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Funktion *oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä* x_0 on a, merkitään $\lim_{x\to x_0+} f(x) = a$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \qquad \text{kun} \quad x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Vastaavasti funktion *vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä* x_0 on a, merkitään $\lim_{x\to x_0-} f(x) = a$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \qquad \text{kun} \quad x_0 - \delta < x < x_0.$$

Osoitetaan, että funktiolla on raja-arvo pisteessä x_0, jos toispuoleiset raja-arvot ovat samat.

LAUSE 1.3. *Olkoon I väli ja funktio $f : I \to \mathbb{R}$. Funktiolla on raja-arvo a pisteessä x_0, $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, jos ja vain jos funktion toispuoleisille raja-arvoille pätee*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a = \lim_{x\to x_0-} f(x).$$

TODISTUS. Olkoot funktion toispuoleiset raja-arvot samat, eli $\lim_{x\to x_0+} f(x) = a = \lim_{x\to x_0-} f(x)$. On siis löydettävä jokaiselle $\varepsilon > 0$ sellainen $\delta > 0$ siten, että kun $|x - x_0| < \delta$, niin $|f(x) - a| < \varepsilon$.
Olkoon siis $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{x\to x_0+} f(x) = a$, niin on olemassa $\delta_+ > 0$ siten, että $|f(x) - a| < \varepsilon$, kun $x_0 < x < x_0 + \delta_+$. Vastaavasti on olemassa $\delta_- > 0$ siten, että $|f(x) - a| < \varepsilon$, kun $x_0 - \delta_- < x < x_0$.
Valitaan nyt $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}$, jolloin $|f(x) - a| < \varepsilon$, kun $|x - x_0| < \delta$. Siis funktiolla on raja-arvo a pisteessä x_0.

Toisaalta, jos funktion raja-arvo on olemassa ja $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, niin jokaiselle $\varepsilon > 0$ on sellainen $\delta > 0$ siten, että kun $|x - x_0| < \delta$, niin $|f(x) - a| < \varepsilon$. Tällöin myös toispuoleisten raja-arvojen olemassaolo on selvää. □

Määritellään seuraavaksi jonoille ylä- ja alaraja-arvot. Nämä luvut ovat aina olemassa, mutta voivat saada arvon ∞ tai $-\infty$.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Olkoon jono $a_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots$. Jonon a_k *yläraja-arvo* eli *limes superior* on

$$\limsup_{k=1\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (\sup_{j\geq k} a_j)$$

ja vastaavasti jonon a_k *alaraja-arvo* eli *limes inferior* on

$$\liminf_{k=1\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (\inf_{j\geq k} a_j).$$

Yläraja-arvo ja alaraja-arvo voidaan määritellä myös funktioille [**2**].

MÄÄRITELMÄ 1.5. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $\delta > 0$. Funktion *yläraja-arvo* eli *limes superior* on

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \big(\sup\{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b], x \neq x_0\}\big)$$

ja vastaavasti funktion *alaraja-arvo* eli *limes inferior* on

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \big(\inf\{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b], x \neq x_0\}\big).$$

Osoitetaan, että funktiolla on raja-arvo pisteessä x_0, jos ja vain jos funktion ylä- ja alaraja-arvo ovat yhtäsuuret.

LAUSE 1.6. *Olkoon I väli ja funktio $f : I \to \mathbb{R}$. Funktiolla on raja-arvo a pisteessä x_0, $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, jos ja vain jos funktion ylä- ja alaraja-arvoille pätee*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = a = \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että funktiolla on raja-arvo pisteessä x_0, kun funktion ylä- ja alaraja-arvo ovat yhtäsuuret. Olkoot siis funktion ylä- ja alaraja-arvot $\limsup_{x\to x_0} f(x) = a = \liminf_{x\to x_0} f(x)$. On löydettävä jokaiselle $\varepsilon > 0$ sellainen $\delta > 0$ siten, että kun $|x - x_0| < \delta$, niin $|f(x) - a| < \varepsilon$.
Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska funktion f yläraja-arvo on a, niin funktion supremumit väleillä $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ lähestyvät lukua a, kun δ lähestyy nollaa. Tällöin luvulle ε on olemassa luku δ_s siten, että kun $x \in (x_0 - \delta_s, x_0 + \delta_s)$, niin $f(x) > a - \varepsilon$. Pätee siis

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \qquad \text{kun } x \in (x_0 - \delta_s, x_0 + \delta_s).$$

Vastaavasti koska a on funktion f alaraja-arvo, niin funktion infimumit väleillä $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ lähestyvät lukua a, kun δ lähestyy nollaa. Tällöin luvulle ε on olemassa luku δ_i siten, että kun $x \in (x_0 - \delta_i, x_0 + \delta_i)$, niin $f(x) < a + \varepsilon$. Saadaan siis

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \qquad \text{kun } x \in (x_0 - \delta_i, x_0 + \delta_i).$$

Nyt valitaan $\delta = \min\{\delta_s, \delta_i\}$. Tällöin jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \qquad \text{kun } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

eli

$$|f(x) - a| < \varepsilon \qquad \text{kun } |x - x_0| < \delta.$$

Siis funktion raja-arvo on siis olemassa ja $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

Olkoon nyt funktion raja-arvo olemassa ja $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, eli jokaiselle $\varepsilon > 0$ on sellainen $\delta > 0$ siten, että kun $|x - x_0| < \delta$, niin $|f(x) - a| < \varepsilon$.
Tällöin välillä $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ funktion ylärajaksi saadaan $a + \varepsilon$ ja funktion alarajaksi saadaan $a - \varepsilon$. Siis

$$a - \varepsilon \leq \inf\{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \leq \sup\{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \leq a + \varepsilon,$$

eli $|\inf\{f(x)\} - a| < \varepsilon$ ja $|\sup\{f(x)\} - a| < \varepsilon$. Tämä toteutuu kaikilla $\varepsilon > 0$, joten funktion ylä- ja alaraja-arvot ovat siis olemassa ja $\limsup_{x\to x_0} f(x) = a = \liminf_{x\to x_0} f(x)$. □

Kuten raja-arvoilla, myös ylä- ja alaraja-arvot voidaan määritellä toispuoleisesti.

Määritelmä 1.7. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $\delta > 0$. Funktion f *oikeanpuoleinen yläraja-arvo* on

$$\limsup_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \big(\sup\{f(x) : x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap [a, b], x \neq x_0\}\big)$$

ja *oikeanpuoleinen alaraja-arvo* on

$$\liminf_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \big(\inf\{f(x) : x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap [a, b], x \neq x_0\}\big).$$

Vastaavasti funktion *vasemmanpuoleinen yläraja-arvo* on

$$\limsup_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \big(\sup\{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap [a, b], x \neq x_0\}\big)$$

ja *vasemmanpuoleinen alaraja-arvo* on

$$\liminf_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \big(\inf\{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap [a, b], x \neq x_0\}\big).$$

Funktiolla on raja-arvo pistessä x_0, kun funktion toispuoleiset ylä- ja alaraja-arvot ovat yhtäsuuret.

Lause 1.8. *Olkoon I väli ja funktio $f : I \to \mathbb{R}$. Funktiolla on raja-arvo a pisteessä x_0, $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, jos ja vain jos funktion toispuoleisille ylä- ja alaraja-arvoille pätee*

$$\limsup_{x\to x_0+} f(x) = \liminf_{x\to x_0+} f(x) = a = \limsup_{x\to x_0-} f(x) = \liminf_{x\to x_0-} f(x).$$

Todistus. Lauseen todistus muodostuu osoittamalla ensin, että jos ja vain jos $\limsup_{x\to x_0+} f(x) = \liminf_{x\to x_0+} f(x)$, niin oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ on olemassa. Tämä tapahtuu kuten lauseen 1.6 todistuksessa, mutta välille $(x_0, x_0+\delta)$. Vastaavasti osoitetaan sama vasemmanpuoleiselle raja-arvolle. Tästä seuraa lauseen 1.3 perusteella raja-arvon olemassaolo. □

1.2. Mitta- ja integraaliteoriaa

Käydään läpi Lebesguen mitta- ja integraaliteoriasta tälle tutkielmalle oleellisimpia määritelmiä ja lauseita. Kappaleessa esitettäviä lauseita ei todisteta. Todistukset löytyvät lähteestä [**2**].

Sovitaan aluksi, että reaaliakselin avoimen välin $I = (a, b)$ pituus on $b - a$ ja välin I pituuden merkintä $m(I)$. Määritellään nyt Lebesguen ulkomitta.

MÄÄRITELMÄ 1.9. Olkoon joukko $A \in \mathbb{R}$ ja olkoon

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\},$$

missä I_k on avoin väli reaaliakselilla kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Luku $m^*(A)$ on joukon A *Lebesguen ulkomitta.*

MÄÄRITELMÄ 1.10. Joukko A on *nollamittainen*, jos $m^*(A) = 0$.

Sanotaan, että jokin ominaisuus pätee *melkein kaikkialla (m.k.) joukossa* A, jos on olemassa nollamittainen joukko E siten, että ominaisuus pätee joukossa $A \backslash E$.

Seuraavaksi tutustutaan Lebesguen ulkomitan ominaisuuksiin.

LAUSE 1.11. *Lebesguen ulkomitalle m^* on voimassa seuraavat ominaisuudet:*

i) $m^*(\emptyset) = 0$

ii) jos $A \subset E$, *niin* $m^*(A) \leq m^*(E)$ monotonisuus

iii) jos $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, *niin* $m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$ subadditiivisuus.

Lebesguen ulkomitan ongelmana on lauseen 1.11 kohdan *iii*) epäyhtälö. Joukkojen numeroituvan yhdisteen mitta ei välttämättä ole yhtäsuuri kuin joukkojen mittojen summa, edes pistevieraille joukoille. Tämä ominaisuus on kuitenkin voimassa pistevieraille Lebesgue-mitallisille joukoille.

MÄÄRITELMÄ 1.12. Joukko $E \subset \mathbb{R}$ on *Lebesgue-mitallinen*, jos kaikilla mielivaltaisilla joukoilla $E \subset \mathbb{R}$

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \backslash A).$$

Olkoon kaikkien reaaliakselin Lebesgue-mitallisten joukkojen kokoelma $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R})$, eli

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ on Lebesgue-mitallinen}\}.$$

Mitallisten joukkojen kokoelma muodostaa σ-algebran, eli tyhjä joukko, mitallisen joukon komplementti ja mitallisten joukkojen yhdiste ovat mitallisia joukkoja.

Lebesgue-mitallisille joukoille pätevät siis seuraavat ominaisuudet:

LAUSE 1.13.

i) joukko $A \subset \mathbb{R}$, *jolle* $m(A) = 0$, *on mitallinen*
ii) jos joukko $A \subset \mathbb{R}$ *on mitallinen, niin* A^C *on mitallinen*
iii) jos joukot $A_k \subset \mathbb{R}$ *ovat mitallisia kaikilla* $k \in \mathbb{N}$, *niin joukko* $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *on mitallinen*
iv) jos joukot $A_k \subset \mathbb{R}$ *ovat mitallisia kaikilla* $k \in \mathbb{N}$, *niin joukko* $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ *on mitallinen*

Kaikkien suppeinta reaaliavaruuden avoimet joukot sisältävää σ-algebraa kutsutaan *Borel-joukkojen σ-algebraksi* ja sen joukkoja *Borel-joukoiksi*. Borel-joukot ovat mitallisia, siis avoimet ja suljetut joukot sekä näiden numeroituvat yhdisteet ja leikkaukset ovat mitallisia.

Joukkojen mitalle haluttu ominaisuus täysadditiivisuus on voimassa Lebesguen ulkomitalle, kun rajoitutaan mitallisiin joukkoihin. Tämän takia määritellään joukkofunktio Lebesgue-mitallisilta joukoilta reaaliakselille. Tätä joukkofunktiota käytetään mittana Lebesgue-mitallisten joukkojen muodostamassa σ-algebrassa.

LAUSE 1.14. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mitallinen joukko ja olkoon joukkofunktio $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, $m(A) = m^*(A)$. Tällöin pätee*

i) $m(\emptyset) = 0$

ii) jos $A \subset E$, niin $m(A) \leq m(E)$

iii) olkoon $A_k \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mitallisia ja pareittain pistevieraita joukkoja kaikilla $k \in \mathbb{N}$, jos $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, niin $m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$.

Näin saatiin muodostettua mitta reaaliakselin joukoille. Seuraavaksi käydään läpi Lebesgue-integraalin muodostus.
Ei-negatiivisen funktion integraali muodostetaan ei-negatiivisten yksinkertaisten funktioiden yläraja-arvona. Yleinen integraali saadaan määriteltyä funktion positiivi- ja negatiiviosien erotuksena.
Määritellään siis alkuun karakteristinen funktio ja yksinkertainen funktio, joka saa äärellisen monta arvoa ja näiden arvojen lähtöjoukot ovat mitallisia. Lisäksi määritellään funktion mitallisuus.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}$. Tällöin joukon A *karakteristinen funktio* χ_A on muotoa:

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in A \\ 0 & \text{jos } x \notin A \end{cases}$$

MÄÄRITELMÄ 1.16. Olkoot $E_1, E_2, ..., E_n \subset \mathbb{R}$ pareittain pistevieraita mitallisia joukkoja ja $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Olkoon

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}.$$

Tällöin funktiota ϕ kutsutaan *yksinkertaiseksi funktioksi.*

MÄÄRITELMÄ 1.17. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$. Funktio f on *mitallinen*, jos kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$, joukko $E_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$ on mitallinen.

LAUSE 1.18. *Jos funktiot $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ...$ ovat mitallisia ja suppenevat kohti funktiota f, niin funktio f on mitallinen.*

Tämän jälkeen voidaan määritellä yksinkertaisen funktion integraali.

MÄÄRITELMÄ 1.19. Ei-negatiivisen, reaaliarvoisen yksinkertaisen funktion $\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ *integraali yli joukon* A on

$$\int_A \phi \; dm = \sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k \cap A)$$

Yksinkertaisen funktion integraalin avulla voidaan nyt määritellä ei-negatiivisen mitallisen funktion integraali.

MÄÄRITELMÄ 1.20. Olkoon $f : A \to [0, \infty]$ mitallinen. Funktion f *Lebesgue-integraali yli joukon* A on

$$\int_A f \; dm = \sup\{\int_A \phi \; dm : \phi \in \Phi_f\},$$

missä Φ_f on kokoelma yksinkertaisista funktioista, joille $\phi(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in A$.

MÄÄRITELMÄ 1.21. Sanotaan, että ei-negatiivinen, mitallinen funktio on *integroituva joukossa* A, jos $\int_A f \; dm < \infty$.

Päästäksemme määrittelemään yleisen integraalin, määritellään ensin funktion positiivi- ja negatiiviosa.

MÄÄRITELMÄ 1.22. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ mitallinen. Funktion *positiiviosa* on

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jos } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{jos } f(x) < 0 \; . \end{cases}$$

Vastaavasti funktion *negatiiviosa* on

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{jos } f(x) < 0, \\ 0 & \text{jos } f(x) \geq 0 \; . \end{cases}$$

Sekä funktion positiivi- että negatiiviosa on ei-negatiivinen. Yleinen funktion integraali voidaan siten määritellään ei-negatiivisten funktioiden integraalin avulla.

MÄÄRITELMÄ 1.23. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ mitallinen. Funktion f *Lebesgue-integraali yli joukon* A on

$$\int_A f \; dm = \int_A f^+ dm - \int_A f^- dm.$$

MÄÄRITELMÄ 1.24. Sanotaan, että mitallinen funktio $f = f^+ - f^-$ on *integroituva joukossa* A, jos sekä f^+, että f^- ovat integroituvia.

Lopuksi esitellään vielä tulos integraalin lineaarisuudesta ja kaksi tärkeää tulosta integraaliteoriasta. Kahden funktion summan integraali on funktioiden integraalien summa, eli integraali on lineaarinen.

LAUSE 1.25. *Olkoot f ja g reaaliarvoiset, mitalliset funktiot. Tällöin*

$$\int_A (f + g) \; dm = \int_A f \; dm + \int_A g \; dm. \qquad \text{integraalin lineaarisuus}$$

Ensimmäinen tärkeä lause integraaliteoriasta on monotonisen konvergenssin lause.

LAUSE 1.26. *Olkoon* $\{f_k\}$ *nouseva jono ei-negatiivisia, mitallisia funktioita siten, että* $f_k \to f$ *kaikilla* $x \in A$ *ja* $k \in \mathbb{N}$*. Jos* $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$*, niin*

$$\int_A f\ dm = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\ dm.$$

Toinen tärkeä tulos integraaliteoriassa on Fatoun lemma.

LAUSE 1.27. *Olkoon* $\{f_k\}$ *jono ei-negatiivisia, mitallisia funktioita siten, että* $f(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$ *m.k.* x*. Tällöin*

$$\int_A f\ dm \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\ dm.$$

LUKU 2

Derivaatta ja jatkuvuus

Nykymuotoiset, raja-arvojen avulla ilmaistut derivaatan ja jatkuvuuden määritelmät ovat peräisin Augustin Cauchylta 1800-luvun alusta. Tässä kappaleessa esitellään nuo määritelmät ja funktioiden epäjatkuvuustyypit. Lisäksi selvitetään mikä on derivoituvuuden ja jatkuvuuden yhteys, sekä voidaanko derivaattafunktion jatkuvuudesta sanoa jotain. Kappaleessa on käytetty lähdettä [**1**], ellei toisin mainita.

2.1. Derivaatan määritelmä

Funktion f kulkua tietyn pisteen x_0 ympäristössä voidaan arvioida pistettä sivuavan suoran eli tangentin kaltevuuden avulla. Tangentin kaltevuutta kuvaa taas sen kulmakerroin. Mitä suurempi kulmakerroin on, sitä jyrkempi tangenttisuora on.
Funktion tangentti pisteessä x_0 saadaan, kun kahden pisteen $(x, f(x))$ ja $(x_0, f(x_0))$ välille piirretään suora, eli sekantti, ja annetaan pisteen x lähestyä pistettä x_0. Pisteiden välinen suora lähestyy tällöin funktion tangenttisuoraa pisteessä x_0. Vastaavalla tavalla tangentin kulmakerroin k määritetään raja-arvona sekanttien kulmakertoimista pisteen x lähestyessä pistettä x_0.
Geometrisesti suoran kulmakerroin k voidaan ilmoittaa tangenttina suoran ja x-akselin välisestä kulmasta α, eli $k = \tan(\alpha)$. Suoran ja x-akselin välisen kulman tangentti saadaan taas funktion arvojen erotuksen ja vastaavien muuttujien arvojen erotuksen suhteesta, eli $\tan(\alpha) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Raja-arvon avulla tangentin kulmakertoimeksi saadaan siis

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tätä lukua kutsutaan myös funktion f derivaataksi pisteessä x_0. [**3**]

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon funktio f: (a,b) $\to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in (a, b)$. Sanotaan, että funktio f on *derivoituva pisteessä* x_0, jos raja-arvo

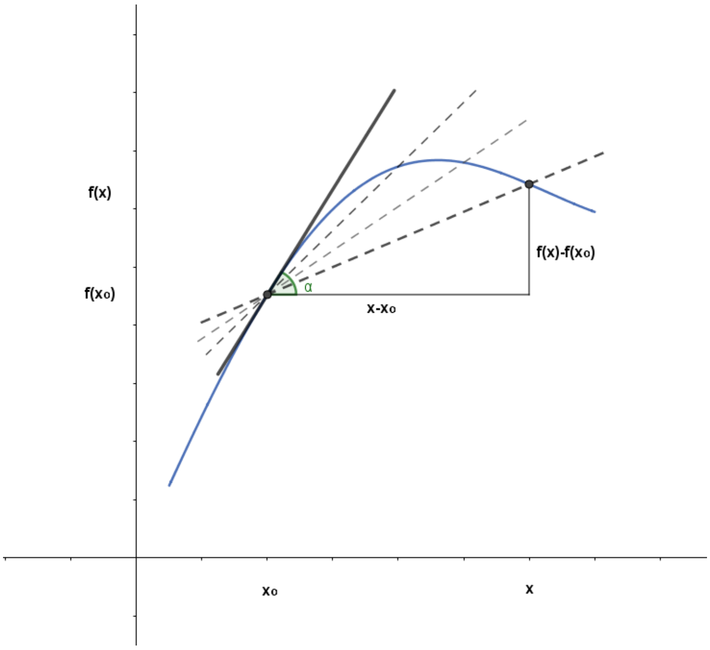
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

on olemassa ja äärellinen. Tällöin funktion f derivaatta pisteessä x_0 on kyseinen raja-arvo ja sen merkintä on $f'(x_0)$.

Sanotaan, että funktio f on *derivoituva välillä* I, jos funktiolla on derivaatta jokaisessa välin I pisteessä.
Osamäärää

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

kutsutaan funktion f *erotusosamääräksi pisteessä* x_0.



KUVA 2.1. Funktion tangentti pisteessä x_0 saadaan pisteiden $(x, f(x))$ ja $(x_0, f(x_0))$ välille piirrettyjen sekanttien raja-arvona, kun piste x lähestyy pistettä x_0.

Funktion derivaatat eri pisteissä muodostavat itsessään funktion, jota kutsutaan derivaattafunktioksi.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoon $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Funktion f *derivaattafunktio* on funktio $g : (a, b) \to \mathbb{R},\ g(x) = f'(x)$.

Funktiolle voidaan määritellä myös toispuoleiset derivaatat toispuoleisten raja-arvojen avulla.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoon funktio f: (a,b) $\to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in (a, b)$. Funktiolla f on *oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä* x_0, jos raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

on olemassa ja äärellinen.
Vastaavasti funktiolla f on *vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä* x_0, jos raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

on olemassa ja äärellinen.

Funktiolla on derivaatta tietyssä pisteessä, jos sen toispuoleiset derivaatat ovat siinä pisteessä olemassa ja samat. Tämä seuraa raja-arvon ominaisuuksista (1.3).

2.2. Jatkuvuus ja epäjatkuvuustyypit

Funktion jatkuvuudella tarkoitetaan funktion sellaista ominaisuutta, jossa muuttujan arvon muuttuessa mielivaltaisen vähän, funktion arvotkin vastaavilla muuttujan arvoilla eroavat toisistaan vain hyvin vähän.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in [a, b]$. Funktio on *jatkuva pisteessä* x_0, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \qquad \text{kun} \quad |x - x_0| < \delta$$

ja $x \in [a, b]$.

Sanotaan, että funktio f on *jatkuva välillä* I, jos funktio on jatkuva jokaisessa välin I pisteessä.

Funktion jatkuvuus tietyssä pisteessä voidaan määritellä myös raja-arvon avulla.

MÄÄRITELMÄ 2.5. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in [a, b]$. Funktio on jatkuva pisteessä x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Vertaamalla määritelmiä 2.4 sekä 2.5 ja raja-arvon määritelmää on selvää, että määritelmät vastaavat toisiaan.

Jos funktio ei ole jatkuva, sen sanotaan olevan epäjatkuva. Funktion epäjatkuvuustyypit voidaan luokitella jatkuvuuden määritelmän 2.5 avulla. Epäjatkuvuuspisteiden luokittelu auttaa myös hahmottamaan, millainen jatkuva funktio voi olla.
(1) *Poistuvassa epäjatkuvuudessa* funktion toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja samat, mutta eivät vastaa funktion arvoa vastaavassa pisteessä, eli $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Tällöin funktion saa jatkuvaksi määrittelemällä funktion uudestaan epäjatkuvuuspisteessä.
Esimerkiksi funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \neq 0, \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

on poistuva epäjatkuvuuskohta pisteessä $x = 0$. Määrittelemällä funktion toisin sen epäjatkuvuuspisteessä, eli $f(x) = 1$, kun $x = 0$, funktiosta saadaan jatkuva.

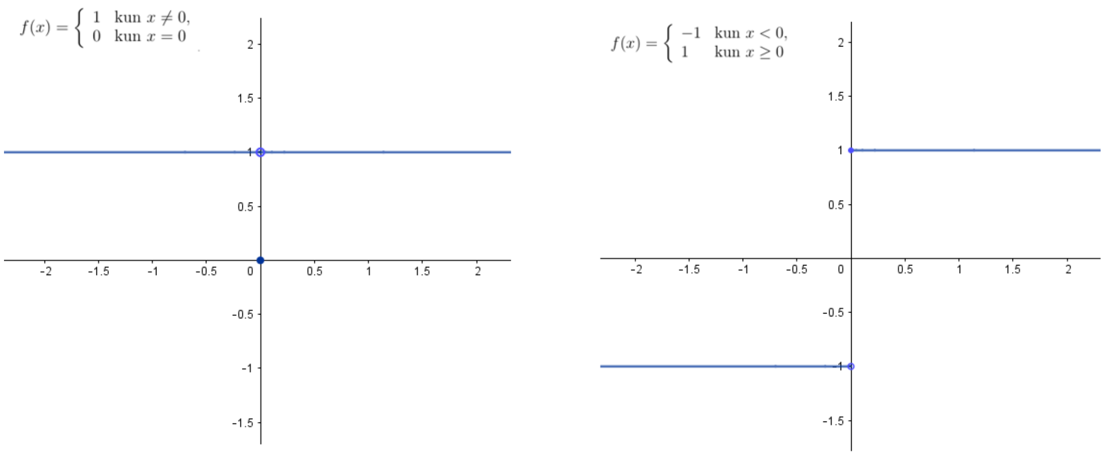
(2) *Hyppäysepäjatkuvuudessa* toispuoleiset raja-arvot pisteessä ovat olemassa, mutta eivät ole samat, eli $\lim_{x \to x_0 +} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 -} f(x)$. Esimerkiksi funtiolla

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{kun } x < 0, \\ 1 & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

on hyppäysepäjatkuvuus pisteessä $x = 0$.

Nämä epäjatkuvuustyypit ovat luontainen seuraus jatkuvuuden määritelmästä. Muuttujien arvojen ollessa mielivaltaisen lähellä toisiaan, jatkuvan funktion arvot vastaavissa pisteissä eivät voi poiketa toisistaan paljoa.

(3) *Olennaisissa epäjatkuvuuksissa* molempia tai toista toispuoleisista raja-arvoista ei ole olemassa tai on ääretön.



KUVA 2.2. Funktioilla on epäjatkuvuuskohdat pisteessä $x = 0$. Vasemmanpuoleisen funktion epäjatkuvuus on poistuvaa ja oikeanpuoleisella on hyppäysepäjatkuvuuskohta.

Tälläisiä tapauksia esiintyy muun muassa funktion heilahdellessa rajusti, kuten funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{kun } x \neq 0, \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

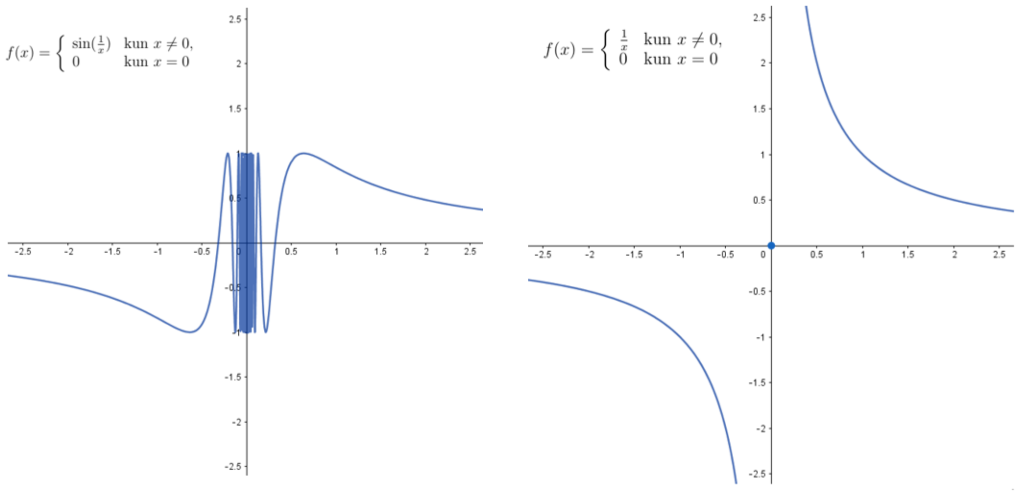
pisteessä $x = 0$. Jos otetaan kuinka pieni väli tahansa nollan ympäriltä, funktio saa tällä välillä arvoja väliltä $[-1, 1]$, joten raja-arvoa ei ole olemassa. Toisaalta funktio

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{kun } x \neq 0, \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä $x = 0$, sillä funktio $f(x) = x$ rajoittaa sini-funktion heilahtelua. Jatkuvakin funktio voi siis heilahdella tietyissä rajoissa.
Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{kun } x \neq 0, \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

funktion arvot kasvavat rajatta nollan lähellä. Toispuoleiset raja-arvot pisteessä $x = 0$ ovat siis ∞ ja $-\infty$, jolloin funktio ei ole jatkuva nollassa.



KUVA 2.3. Funktioilla on oleelliset epäjatkuvuuskohdat pisteessä $x = 0$.

2.3. Derivoituvuuden ja jatkuvuuden yhteys

Voidaan osoittaa, että funktion derivoituvuudesta seuraa funktion jatkuvuus.

LAUSE 2.6. *Olkoon funktio $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in (a, b)$. Jos f on derivoituva pisteessä x_0, niin f on jatkuva pisteessä x_0.*

TODISTUS. Jatkuvuuden määritelmän mukaan riittää osoittaa, että $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$. Kaikille $x \neq x_0$ on

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Koska f on derivoituva pisteessä x_0, niin

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

ja $\lim_{x\to x_0}(x - x_0) = 0$.
Tästä seuraa, että $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$, eli funktio on jatkuva. □

Lause ei kuitenkaan päde toisin päin. Esimerkiksi funktio $f(x) = |x|$ on jatkuva, mutta ei derivoituva pisteessä $x = 0$. Tämä selviää tutkimalla funktion toispuoleisia derivaattoja pisteessä nolla

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \to 0+, \\ -1 & \text{kun } x \to 0- \ . \end{cases}$$

Toispuoleiset derivaatat eroavat toisistaan, joten derivaattaa ei ole olemassa. Esimerkki osoittaa myös, että derivoituva funktio on ”sileä”, eikä siinä voi olla jyrkkiä kulmia, kuten itseisarvofunktiolla on origossa.

Jatkuvalla funktiolla ei välttämättä ole edes toispuoleisia derivaattoja olemassa, kuten alla oleva esimerkki osoittaa.

Esimerkki 2.7. Funktio

$$f(x) = \begin{cases} |x||\cos(\frac{1}{x})| & \text{kun } x \neq 0, \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

on jatkuva kahden jatkuvan alkeisfunktion tulona kaikilla $x \neq 0$. Lisäksi koska $|\cos(x^{-1})| \leq 1$ kaikilla $x \neq 0$, niin

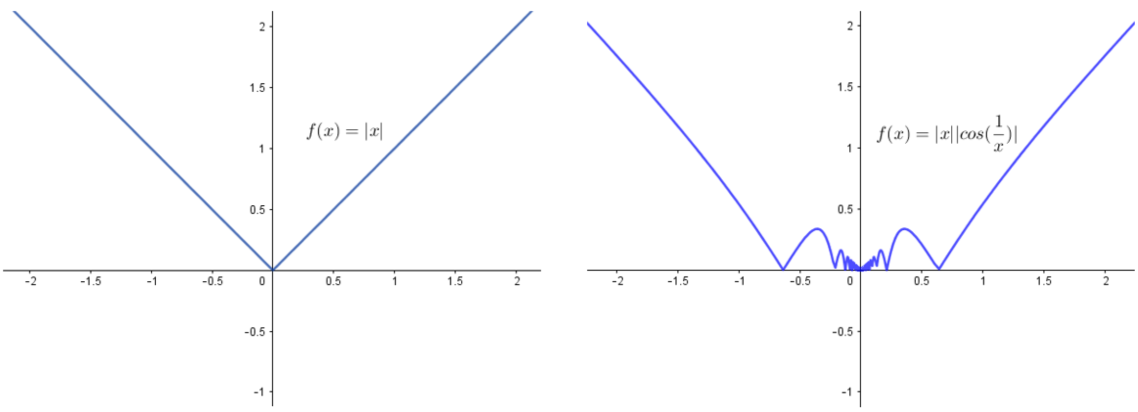
$$\lim_{x \to 0} |x||\cos(\frac{1}{x})| = 0 = f(0),$$

joten funktio on jatkuva myös pisteessä $x = 0$.

Funktion erotusosamäärä on

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x||\cos(\frac{1}{x})|}{x}.$$

Funktion $\cos(\frac{1}{x})$ heilahtelu aiheuttaa sen, että myös erotusosamäärä heilahtelee arvojen 0 ja 1 välillä lähestyttäessä nollaa oikealta puolelta. Tällöin raja-arvoa ei ole olemassa. Vastaavasti lähestyttäessä nollaa vasemmalta puolelta erotusosamäärän arvot heilahtelevat arvojen 0 ja -1 välillä. Funktiolla ei siis ole toispuoleisia derivaattoja.



Kuva 2.4. Funktiot ovat jatkuvia, mutta niillä ei ole derivaattaa pisteessä $x = 0$.

Edellisissä esimerkeissä jatkuvalla funktiolla on yksi piste, jossa se ei ole derivoituva. 1800-luvun alkupuolelle asti uskottiin, että jatkuvalla funktiolla on oltava derivaatta melkein kaikkialla määrittelyjoukossaan. Jatkuva funktio ei kuitenkaan välttämättä ole derivoituva missään pisteessä. Saksalainen matemaatikko Karl Weierstrass (1815-1897) oli ensimmäisten joukossa esittämässä tällaisen funktion ja kumosi siten 1800-luvun alkupuolelle asti kestäneet harhaluulot jatkuvan funktion derivoituvuudesta.

2.4. Derivaattaan liittyviä lauseita

Funktion derivaatan eräs tärkeä sovelluskohde on funktion ääriarvojen paikantaminen. Tässä apuna on seuraava lause, joka kertoo, että funktion ääriarvopisteessä funktion derivaatta saa arvon nolla.

LAUSE 2.8. *Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Jos on olemassa pisteen x_0 sisältämä väli $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, jossa $f(x) \geq f(x_0)$ kaikilla $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ja funktio on derivoituva pisteessä x_0, niin tällöin $f'(x_0) = 0$.*

TODISTUS. Koska funktiolla on paikallinen minini, eli $f(x) \geq f(x_0)$, välillä $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, niin tällöin

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ kun } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Vastaavasti

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ kun } x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Jos funktio on derivoituva pisteessä x_0, niin

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

siis on oltava $f'(x_0) = 0$. □

HUOMAUTUS 2.9. Lause 2.8 pätee myös funktion maksimille, eli kun $f(x) \leq f(x_0)$.

Alkeisdifferentiaalilaskennan ehkä tärkein lause on väliarvolause, joka yhdistää funktion arvot ja funktion derivaatan arvon jossain pisteessä toisiinsa. Väliarvolause kertoo, että pisteiden $(x, f(x))$ ja $(y, f(y))$ välille tehdyn sekantin kulmakertoimen arvo vastaa jossain pisteessä funktion derivaatan arvoa. Lauseen todistuksessa käytetään apuna väliarvolauseen erikoistilannetta, jossa funktion arvot kahdessa pisteessä ovat samat. Tällöin näiden pisteiden väliltä löytyy piste, jossa funktion derivaatan arvo on nolla. Lausetta kutsutaan nimellä Rollen lause.

LAUSE 2.10. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ välillä $[a, b]$ jatkuva ja välillä (a, b) derivoituva funktio. Jos $f(a) = f(b)$, niin tällöin on piste $c \in (a, b)$ siten, että $f'(c) = 0$.*

TODISTUS. Jos funktio on vakiofunktio, niin $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in (a, b)$, jolloin lause toteutuu missä tahansa pisteessä $c \in [a, b]$. Oletetaan siis, että funktio ei ole vakiofunktio.
Koska funktio on jatkuva, se saavuttaa suljetulla välillä $[a, b]$ maksimiarvonsa M ja minimiarvonsa m. Koska funktio ei ole vakiofunktio, niin ainakin toinen arvoista, M tai m, eroaa arvoista $f(a)$ ja $f(b)$. Olkoon siis tämä luku m, jolloin $m < f(a)$. Valitaan piste c siten, että $f(c) = m$. Koska $m < f(a) = f(b)$, niin $c \neq a$ ja $c \neq b$, eli $c \in (a, b)$. Lauseen 2.8 mukaan tällöin $f'(c) = 0$. □

Esitetään nyt differentiaalilaskennan väliarvolause.

LAUSE 2.11. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ välillä $[a, b]$ jatkuva ja välillä (a, b) derivoituva funktio. Tällöin on piste $c \in (a, b)$ siten, että*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Lauseen todistus onnistuu helposti Rollen lauseen avulla.

TODISTUS. Olkoon funktio

$$L(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Huomataan, että $L(a) = f(a)$ ja $L(b) = f(b)$. Olkoon nyt funktio

$$g(x) = f(x) - L(x).$$

Tällöin $g(x)$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b). Lisäksi $g(a) = 0 = g(b)$. Rollen lauseen 2.10 mukaan tällöin on siis piste $c \in (a, b)$ siten, että $g'(c) = 0$, joten derivoimalla funktiota g, nähdään, että $f'(c) = L'(c)$. Saadaan siis

$$f'(c) = L'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

joten väite on todistettu. □

Derivaatan väliarvolauseen avulla on helppo osoittaa, että jatkuvien funktioiden kulkusuunnan saa selville derivaatan arvon avulla.

LAUSE 2.12. *Olkoon* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivoituva funktio ja* $x, y \in (a, b)$.
(i)Jos $f'(x) \geq 0$ *kaikilla* $x \in (a, b)$, *niin* $f(y) \geq f(x)$ *kaikilla* $y > x$.
(ii)Jos $f'(x) > 0$ *kaikilla* $x \in (a, b)$, *niin* $f(y) > f(x)$ *kaikilla* $y > x$.
(i)Jos $f'(x) \leq 0$ *kaikilla* $x \in (a, b)$, *niin* $f(y) \leq f(x)$ *kaikilla* $y > x$.
(i)Jos $f'(x) < 0$ *kaikilla* $x \in (a, b)$, *niin* $f(y) < f(x)$ *kaikilla* $y > x$.

TODISTUS. Osoitetaan kohta (i). Muut kohdat osoitetaan vastaavalla tavalla. Olkoot siis pisteet $x, y \in (a, b)$ siten, että $x < y$. Väliarvolauseen 2.11 mukaan tällöin on piste $c \in (x, y)$ siten, että

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Koska $f'(c) \geq 0$ ja $(y - x) > 0$, niin $f(y) - f(x) \geq 0$, eli $f(y) \geq f(x)$. □

HUOMAUTUS 2.13. Jos funktiolla on lauseessa 2.12 esiintyvä ominaisuus $f(y) > f(x)$ kaikilla $y > x$, kutsutaan funktiota *kasvavaksi*. Vastaavasti, jos funktiolle pätee $f(y) < f(x)$ kaikilla $y > x$, niin funktio on *vähenevä*. Kasvavia ja väheneviä funktioita kutsutaan *monotonisiksi funktioiksi*. Monotonisiin funktioihin palataan kappaleessa 4.

2.5. Derivaattafunktion jatkuvuus

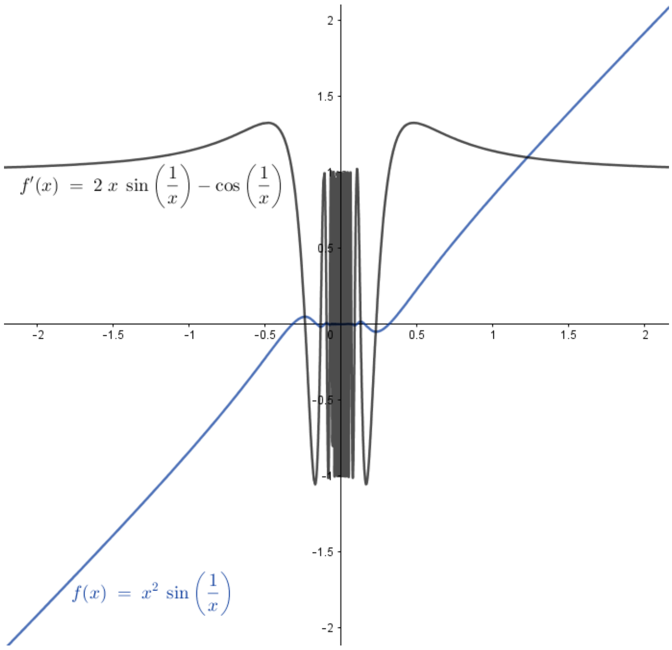
Aikaisemmin esitettiin tulos, että jos funktio on derivoituva, niin se on silloin myös jatkuva (2.6). Tätä ei pidä sekoittaa siihen, että funktion derivaattafunktio olisi jatkuva. Esitetään tästä esimerkki.

ESIMERKKI 2.14. Olkoon funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{kun } x \neq 0, \\ 0 & \text{kun } x = 0\ . \end{cases}$$

Tällöin funktion derivaatta on

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), \quad \text{kun } x \neq 0.$$



KUVA 2.5. Funktion f derivaattafunktio ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

Saadaksemme selville funktion derivaatan pisteessä $x = 0$ tutkitaan tilannetta derivaatan määritelmän avulla. Olkoon $x \neq 0$. Funktion erotusosamäärän itseisarvon raja-arvo origossa on

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \lim_{x\to 0} \left| x \sin(\frac{1}{x}) \right| \leq \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

Funktion derivaataksi pisteessä $x = 0$ saadaan siis $f'(0) = 0$.

Funktion derivaattafunktio on siis

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{kun } x \neq 0, \\ 0 & \text{kun } x = 0\ . \end{cases}$$

Jotta derivaattafunktio olisi jatkuva, olisi oltava $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. Funktio $\cos(\frac{1}{x})$ ei kuitenkaan suppene lähestyttäessä nollaa, sillä sen arvot heilahtelevat välillä $[-1, 1]$. Raja-arvoa ei siten ole olemassa. Funktion derivaatta ei siis ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

Derivaattafunktiolla on kuitenkin yhteinen ominaisuus jatkuvien funktioiden kanssa, sillä derivaattafunktiolle pätee jatkuvien funktioiden tavoin välissäolevien arvojen olemassaolo.

LAUSE 2.15. *Olkoon I väli ja $f : I \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Lisäksi olkoot luvut $a, b \in I$ siten, että $f'(a) \neq f'(b)$. Olkoon γ mikä tahansa luku välillä $(f'(a), f'(b))$. Tällöin on olemassa luku $c \in (a, b)$ siten, että $f'(c) = \gamma$.*

TODISTUS. Olkoon funktio $g(x) = f(x) - \gamma x$ ja oletetaan, että $f'(a) < f'(b)$. Tällöin

$$g'(a) = f'(a) - \gamma < 0 \qquad \text{ja} \qquad g'(b) = f'(b) - \gamma > 0.$$

Tällöin lauseen 2.12 perusteella on siis luvut $t_1, t_2 \in (a,b)$ siten, että $g(t_1) < g(a)$ ja $g(t_2) < g(b)$. Derivoituvana funktiona g on jatkuva ja se saavuttaa siis miniminsä välillä (a,b). Lauseen 2.8 perusteella on piste $c \in (a,b)$ siten, että

$$g'(c) = f'(c) - \gamma = 0 \qquad \text{eli } f'(c) = \gamma.$$

Lause voidaan osoittaa vastaavasti tilanteessa, jossa $f'(a) > f'(b)$. □

Tämän ominaisuuden avulla voidaan sanoa jotain derivaattafunktion jatkuvuudesta. Välissäolevan arvon toteutumisesta seuraa suoraan, että derivaattafunktiolla ei voi olla hyppäysepäjatkuvuuksia tai poistuvia epäjatkuvuuksia.
Esimerkiksi jos derivaattafunktiolla on hyppäysepäjatkuvuuspiste pisteessä x_0, niin on luvut α ja β siten, että $\lim_{x \to x_0+} f'(x) = \alpha$, $\lim_{x \to x_0-} f'(x) = \beta$ ja $\alpha \neq \beta$. Valitaan $a < x_0$ ja $b > x_0$. Tällöin väliltä $(f'(a), f'(b))$ löytyy arvo $\gamma \in (\alpha, \beta)$, jolle ei ole pistettä $c \in (a,b)$ siten, että $f'(c) = \gamma$. Vastaavasti voidaan todeta, ettei derivaattafunktiolla voi olla myöskään poistuvia epäjatkuvuuspisteitä. Derivaattafunktiolla voi kuitenkin olla oleellisia epäjatkuvuuskohtia, kuten esimerkki 2.14 osoittaa.

LUKU 3

Dinin derivaatta ja johdos

Funktion derivaatta ei välttämättä ole aina olemassa. Tämän vuoksi on kehitetty useita yleistyksiä perinteisestä derivaatasta. Näitä voidaan hyödyntää funktioihin, jotka eivät välttämättä ole derivoituvia perinteisessä mielessä. Tässä kappaleessa esitellään yleistetyistä derivaatoista Dinin derivaatat ja johdokset. Dinin derivaattoja käsittelevässä kappaleessa on käytetty lähdettä [**1**] ja johdoksia käsittelevässä kappaleessa lähdettä [**2**].

3.1. Dinin derivaatta

Dinin derivaatat ovat nimetty italialaisen matemaatikon Ulisse Dinin (1845-1918) mukaan. Esitetään aluksi Dinin derivaattojen määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoon funktio $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in (a, b)$. Määritellään neljä Dinin derivaattaa funktiolle f pisteessä x_0:
1. Dinin ylempi oikeanpuoleinen derivaatta

$$D^+f(x) = \limsup_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Dinin alempi oikeanpuoleinen derivaatta

$$D_+f(x) = \liminf_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3. Dinin ylempi vasemmanpuoleinen derivaatta

$$D^-f(x) = \limsup_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4. Dinin alempi vasemmanpuoleinen derivaatta

$$D_-f(x) = \liminf_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dinin derivaatat ovat olemassa jokaisella funktiolla jokaisessa avoimen välin pisteessä, jossa funktio on määritelty. Niiden arvo voi kuitenkin olla ∞ tai $-\infty$.

ESIMERKKI 3.2. Aikaisemmin esimerkissä 2.7 tarkasteltiin funktion

$$f(x) = \begin{cases} |x||\cos(\frac{1}{x})| & \text{kun } x \neq 0, \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

toispuoleisia derivaattoja ja todettiin, että funktion $\cos(\frac{1}{x})$ heilahtelu saa koko erotusosamäärän pisteessä $x = 0$ heilahtelemaan arvojen -1 ja 1 välillä. Tällöin funktiolla ei ole derivaatta pisteessä $x = 0$, ei edes toispuoleisia derivaattoja. Dinin derivaatat ovat kuitenkin olemassa ja niiden arvot ovat $D^+f(0) = 1, D_+f(0) = 0, D^-f(0) = 0$ ja $D_-f(0) = -1$.

Dinin derivaatoille päteekin, että funktio on derivoituva, jos ja vain jos kaikki Dinin derivaatat ovat olemassa ja yhtä suuria.

LAUSE 3.3. *Olkoon funktio $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Funktio on derivoituva pisteessä x_0, jos ja vain jos funktion Dinin derivaatat ovat yhtä suuria, eli*

$$D^+f(x_0) = D_+f(x_0) = D^-f(x_0) = D_-f(x_0).$$

TODISTUS. Väite seuraa suoraan lauseesta 1.8. □

Aikaisemmin osoitettiin perinteisellä derivaatalla, että jos derivoituvan funktion derivaatta on suurempaa kuin nolla, tiedetään, että funktion arvot kasvavat muuttujan arvon kasvaessa (2.12). Osoitetaan seuraavaksi yleisempi muoto tästä lauseesta Dinin derivaatalla.

LAUSE 3.4. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Jos $D^+f(x) > 0$ jokaisessa pisteessä $x \in [a, b)$, niin $f(x) < f(y)$, kun $x < y$ ja $x, y \in [a, b]$.*

TODISTUS. Osoitetaan aluksi, että $f(x) \leq f(y)$, kun $x < y$ ja $x, y \in [a, b]$ antiteesin avulla. Oletetaan siis, että oon pisteet c ja d välillä $[a, b]$ siten, että $a \leq c < d \leq b$ ja $f(c) > f(d)$. Olkoon y mikä tahansa piste väliltä $(f(c), f(d))$. Koska f on jatkuva, on piste $t \in (c, d)$ siten, että $f(t) = y$. Tällöin siis joukko

$$\{x : f(x) = y\} \cap [c, d]$$

ei ole tyhjä.
Olkoon $x_0 = \sup\{x : c \leq x \leq d \text{ ja } f(x) = y\}$. Koska f on jatkuva, niin $f(d) < y$, eli $x_0 < d$. Tästä seuraa, että kaikilla $x \in (x_0, d]$, $f(x) > y$. Lisäksi, koska joukko $\{x : f(x) = y\}$ on suljettu, niin $f(x_0) = y$. Näistä tiedoista kuitenkin seuraa, että olisi $D^+f(x_0) \leq 0$, mikä on ristiriita väitteen oletuksen $D^+f(x_0) > 0$ kanssa. Siis funktiolle pätee $f(x) \leq f(y)$, kun $x < y$.
Osoitetaan vielä, että epäyhtälö pätee ilman yhtäsuuruutta. Jos olisi $f(y) = f(x)$ jollain välillä, niin funktio olisi vakiofunktio. Tällöin olisi $f'(x) = 0$, mikä on jälleen ristiriidassa ehdon $D^+f(x_0) > 0$ kanssa lauseen 3.3 mukaan. Siis funktiolle pätee $f(x) < f(y)$, kun $x < y$. □

3.2. Johdos

Johdoksen määritelmässä hyödynnetään funktion erotusosamäärää. Ero perinteiseen derivaattaan on, että pistettä x_0 lähestytään suppenevaa jonoa pitkin.

MÄÄRITELMÄ 3.5. Luku α on funktion f *johdos* pisteessä x_0, jos on olemassa jono $\{h_k\} \to 0, (h_k \neq 0)$ siten, että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} = \alpha.$$

Merkitään funktion f johdosta pisteessä x_0 merkinnällä $Df(x_0)$.

Funktiolla voi olla useita arvoja johdokselle tietyssä pisteessä. Funktio onkin derivoituva, jos sen kaikki johdokset saavat saman, äärellisen arvon.

Johdoksen avulla voidaan yleistää differentiaalilaskennan väliarvolause (2.11) funktiolle, jonka ei tarvi olla derivoituva.

LAUSE 3.6. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ aidosti kasvava funktio ja joukko $E \subset [a, b]$. Jos jokaisessa pisteessä $x \in E$ on johdos $Df(x) < p$, niin silloin $m^*(f(E)) \leq pm^*(E)$.*

Lauseen todistuksessa tarvitaan Vitalin peitelausetta. Määritellään aluksi tämä peite.

MÄÄRITELMÄ 3.7. Olkoon joukko $E \subset \mathbb{R}$ ja $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ joukko suljettuja, aitoja välejä $(\mathcal{I} \neq \{x_0\})$ sekä $\mathcal{V} \subset \mathcal{I}$. Jos jokaiselle $x \in E$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa väli $V \in \mathcal{V}$ siten, että $x \in V$ ja $m(V) < \varepsilon$, niin joukkoa $\mathcal{V}$ kutsutaan joukon E *Vitalin peitteeksi.*

Seuraavaksi esitettävä Vitalin peitelause kertoo, että reaaliakselilla sijaitsevan joukon peitteestä on mahdollista valita edelleen joukon E melkein kokonaan peittävä numeroituva kokoelma erillisiä välejä, joiden kokoa voidaan approksimoida kuten halutaan.

LAUSE 3.8. Vitalin peitelause *Olkoon $\mathcal{V}$ joukon $E \subset \mathbb{R}$ Vitalin peite. Tällöin on olemassa joukon E peittävä numeroituva kokoelma välejä $\{V_k\}$ peitteestä $\mathcal{V}$ siten, että*

$$V_i \cap V_j = \emptyset, \ (i \neq j) \qquad \textit{ja} \qquad m(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) = 0.$$

TODISTUS. Osoitetaan väite rajoitetulle joukolle E.
Olkoon J mikä tahansa avoin väli, joka sisältää joukon E ja $\mathcal{V}_0$ kaikki ne välit, jotka kuuluvat peitteeseen $\mathcal{V}$ ja väliin J. Tällöin myös $\mathcal{V}_0$ on joukon E Vitalin peite.

Olkoon nyt $V_1 \in \mathcal{V}_0$. Jos $m(E \setminus V_1) = 0$, niin väite on todistettu. Jos ei ole, niin jatketaan seuraavalla tavalla:

Olkoon $V_1, V_2, ..., V_n$ pareittain pistevieraita välejä joukosta $\mathcal{V}_0$ ja F_n näiden joukkojen yhdiste, eli $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$. Jos nyt $m(E \setminus F_n) = 0$, niin väite on todistettu.

Jos ei, niin olkoon $G_n = J \setminus F_n$. Huomataan, että joukko G_n on avoin. Määritellään

$$\mathcal{V}_n = \{V \in \mathcal{V}_0 : V \subset G_n\}.$$

Koska $E \setminus F_n \neq \emptyset$ ja $\mathcal{V}_0$ on joukon E Vitalin peite, niin joukko $\mathcal{V}_n$ ei ole tyhjä. Nyt olkoon

$$S_n = \sup\{m(V) : V \in \mathcal{V}_n\}.$$

Tällöin $0 < S_n < \infty$, sillä peitteen $\mathcal{V}$ välit ovat aitoja ja toisaalta jokainen $V \in \mathcal{V}_0$ kuuluu myös joukkoon J, eli jokaisen joukon V mitta on rajoitettu.

Valitaan nyt $V_{n+1} \in \mathcal{V}_n$ siten, että $m(V_{n+1}) > \frac{1}{2} S_n$.
Koska $V_{n+1} \in G_n$, niin välit $V_1, V_2, ..., V_n, V_{n+1}$ muodostavat pareittain pistevieraan joukon peitteestä $\mathcal{V}_0$.

Jos valittuamme joukon V_{n+1}, joukko $\mathcal{V}_{n+1}$ on nollamittainen, niin prosessi päättyy. Jos $\mathcal{V}_{n+1}$ ei ole nollamittainen, niin jatketaan samalla tavalla, jolloin muodostuu numeroituva kokoelma välejä $\{V_k\}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $m(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) = 0$.

Olkoon $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ ja suljetut välit W_k siten, että jokaisella $k \in \mathbb{N}$, $m(W_k) = 5m(V_k)$ ja välin keskipiste on sama kuin välillä V_k. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(W_k) = 5\sum_{k=1}^{\infty} m(V_k) \leq 5m(J) < \infty. \tag{3.1}$$

Nyt osoitetaan, että

$$E\setminus F \subset \sum_{k=i}^{\infty} m(W_k) \qquad \text{kaikilla } i \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Olkoon $x \in E\setminus F$. Tällöin $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$. Valitaan jokin $i \in \mathbb{N}$ ja osoitetaan, että 3.2 pätee sillä. Poimitaan nyt jokin $V \in \mathcal{V}_0$ siten, että $x \in V \subset G_i$. Koska kaikilla $i \in \mathbb{N}$ G_i on avoin, niin tälläinen V on olemassa. Huomataan, että koska $x \in E\setminus F$ ja $x \in V$, niin valitsemamme V ei kuulu jonoon pistevieraita välejä $\{V_k\}$.

Olkoon $n = \min\{j : V \cap F_j \neq \emptyset\}$. Tällöin on oltava $n > i$, koska $V \subset G_i$, eli $V \cap F_i = \emptyset$ ja jono $\{F_k\}$ on laajeneva. Nyt siis $V \cap F_n \neq \emptyset$ ja koska n oli pienin valitsemamme indeksi, niin $V \cap F_{n-1} = \emptyset$. Tällöin $V \cap V_n \neq \emptyset$ ja $V \subset G_{n-1}$, mistä seuraa, että $m(V) \leq S_{n-1} < 2m(V_n)$. Määrittelyjemme mukaan välin W_n keskipiste on sama kuin välin V_n, mutta mitta on viisinkertainen, joten voidaan päätellä, että $V \subset W_n$. Koska $n > i$ ja $x \in V$, niin ollaan saatu, että $V \subset \bigcup_{k=i}^{\infty} W_k$, eli $x \in \bigcup_{k=i}^{\infty} W_k$.

Koska 3.2 pätee ja arvion 3.1 mukaan välien W_k mittojen summa on äärellinen, niin ollaan osoitettu, että $m(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) = 0$ ja koko väite on todistettu. $\square$

HUOMAUTUS 3.9. Vastaava todistus rajoittamattomalle joukolle E löytyy lähteestä [**4**].

Nyt voidaan todistaa lause 3.6.

TODISTUS. Lauseen 3.6 todistus
Olkoon $\varepsilon > 0$ ja rajoitettu, avoin joukko $G \subset \mathbb{R}$ siten, että $E \subset G$ ja $m(G) < m^*(E)+\varepsilon$. Jokaiselle $x_0 \in E$ on olemassa jono $\{h_k\} \to 0, (h_k \neq 0)$ siten, että jokaisella $n \in \mathbb{N}, [x_0, x_0 + h_n] \subset G$ ja

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} < p. \tag{3.3}$$

Olkoon jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$I_n(x_0) = [x_0, x_0 + h_n] \quad \text{ja} \quad J_n = [f(x_0), f(x_0 + h_n)].$$

Koska f on aidosti kasvava, niin $f(I_n(x_0)) \subset J_n(x_0)$ ja $J_n(x_0)$ on suljettu väli, ei yksittäinen piste sekä $m(J_n(x_0)) = |f(x_0 + h_n) - f(x_0)|$. Lisäksi $m(I_n(x_0)) = |h_n|$.

Tällöin epäyhtälön 3.3 perusteella

$$m(J_n(x_0)) < pm(I_n(x_0)).$$

Koska $\lim_{n\to\infty} |h_n| = 0$, niin $\lim_{n\to\infty} m(I_n(x_0)) = 0$. Tästä seuraa, että $\lim_{n\to\infty} m(J_n(x_0)) = 0$. Tällöin kokoelma välejä

$$\mathcal{V} = \{J_n(x_0) : x_0 \in E, n \in \mathbb{N}\}$$

muodostaa Vitalin peitteen joukolle $f(E)$. Lauseen 3.8 perusteella on siis olemassa numeroituva joukko pistevieraita suljettuja välejä $\{J_{n_i}(x_i)\}, i \in \mathbb{N}$ siten, että

$$m\Big(f(E)\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty} J_{n_i}(x_i)\Big) = 0.$$

Tällöin

$$m^*(f(E)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(J_{n_i}(x_i)) \leq p\sum_{i=1}^{\infty} m(I_{n_i}(x_i)).$$

Koska f on aidosti kasvava, niin $f(I_{n_i}(x_i)) \subset J_{n_i}(x_i)$ ja koska joukot $J_{n_i}(x_i)$ ovat pistevieraita kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin myös joukot $I_{n_i}(x_i)$ ovat pistevieraita kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(I_{n_i}(x_i)) = m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}(x_i)) \leq m(G) < m^*(E) + \varepsilon.$$

Ollaan siis saatu

$$m^*(f(E)) < p(m^*(E) + \varepsilon)$$

kaikilla $\varepsilon > 0$, joten $m^*(f(E)) \leq pm^*(E)$ ja väite on todistettu. □

On olemassa myös lausetta 3.6 vastaava lause, jossa joukon E kuvajoukon mitalle annetaan alaraja.

Lause 3.10. *Olkoon aidosti kasvava funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $E \subset [a, b]$. Jos jokaisessa pisteessä $x \in E$ on johdos $Df(x) > q > 0$, niin silloin $m^*(f(E)) \geq qm^*(E)$.*

Todistus. Todistus on samantapainen lauseen 3.6 kanssa, joten esitetään tästä todistuksesta vain pääpirteet ja eroavuudet. Yksityiskohdat voi tarkistaa edellisestä todistuksesta.

Oletetaan alkuun $\varepsilon > 0$ ja avoin joukko G siten, että $f(E) \subset G$ ja $m(G) < m^*(f(E))+\varepsilon$. Johdoksen olemassaolon johdosta muodostuu joukot $I_n(x_0) = [x_0, x_0 + h_n]$ ja $J_n = [f(x_0), f(x_0 + h_n)]$, joille pätee

$$m(I_n(x_0)) < \frac{1}{q} m(J_n(x_0)).$$

Nyt kokoelma välejä $\mathcal{V} = \{I_n(x_0) : x_0 \in E, n \in \mathbb{N}\}$ muodostaa Vitalin peitteen joukolle E, joten on olemassa numeroituva joukko pistevieraita suljettuja välejä $\{I_{n_i}(x_i)\}, i \in \mathbb{N}$ siten, että

$$m\Big(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}(x_i)\Big) = 0.$$

Tästä saadaan arvio

$$m^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_{n_i}(x_i)) \leq \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{\infty} m(J_{n_i}(x_i)).$$

Toisaalta

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(J_{n_i}(x_i)) = m(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_{n_i}(x_i)) \leq m(G) < m^*(f(E)) + \varepsilon.$$

Arviot yhdistämällä saadaan

$$m^*(E) < \frac{1}{q}(m^*(f(E)) + \varepsilon)$$

kaikilla $\varepsilon > 0$, joten $m^*(f(E)) \geq qm^*(E)$ ja väite on todistettu. $\square$

LUKU 4

Derivoituvia funktioita

Tässä kappaleessa käydään läpi erilaisia funktioluokkia, joihin kuuluvat funktiot ovat melkein kaikkialla derivoituvia. Suurin osa kappaleen todistuksista on lähteestä [**5**], mutta osa todistuksista on myös lähteestä [**2**].

4.1. Monotoninen funktio

MÄÄRITELMÄ 4.1. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $x_1, x_2 \in [a, b]$. Sanotaan, että funktio f on

1. *kasvava*, jos aina kun $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \leq f(x_2)$
2. *aidosti kasvava*, jos aina kun $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$
3. *vähenevä*, jos aina kun $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \geq f(x_2)$
4. *aidosti vähenevä*, jos aina kun $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$

Funktio on *monotoninen*, jos se on joko kasvava tai vähenevä. Lisäksi funktio on *aidosti monotoninen*, jos se on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Osoitetaan, että monotoninen funktio on melkein kaikkialla derivoituva. Käytetään todistuksessa hyväksi johdoksia (3.5).

LAUSE 4.2. *Monotoninen funktio on melkein kaikkialla derivoituva.*

TODISTUS. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kasvava. Tutkimalla tarvittaessa funktiota $f(x) + x$ voidaan olettaa, että funktio on aidosti kasvava.
Olkoon joukko $N \subset \mathbb{R}$ niiden pisteiden joukko, joissa funktiolla ei ole derivaatta, siis $N = \{x : f \text{ ei ole derivoituva pisteessä } x\}$. Jos funktio f ei ole derivoituva pisteessä x, niin tällöin siinä pisteessä johdos $Df(x)$ on ääretön tai johdokset pisteessä x ovat erisuuret, eli johdoksille pätee $D_1 f(x) < D_2 f(x)$. Tutkitaan näitä joukkoja erikseen.

Olkoon nyt E_∞ niiden pisteiden joukko, joissa johdos on ääretön, eli $E_\infty = \{x : Df(x) = \infty\}$. Koska f on kasvava, niin $f(E_\infty) \subset [f(a), f(b)]$. Lemman 3.10 avulla saadaan kaikille $q \in \mathbb{N}$

$$qm^*(E_\infty) \leq m^*(f(E_\infty)) \leq f(b) - f(a) < \infty.$$

Koska arvio pätee kaikille $q \in \mathbb{N}$, niin on oltava $m^*(E_\infty) = 0$.

Olkoon nyt $0 \leq p < q < \infty$ ja $E_{pq} = \{x :$ on johdokset $D_1 f(x)$ ja $D_2 f(x)$, joille pätee $D_1 f(x) < p < q < D_2 f(x)\}$. Lemmojen 3.6 ja 3.10 avulla saadaan

$$qm^*(E_{pq}) \leq m^*(f(E_{pq})) \leq pm^*(E_{pq}).$$

Koska $p < q$, niin tällöin on oltava $m^*(E_{pq}) = 0$.

Joukko $N \subset E_\infty \cup \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} E_{pq}$ ja saatiin, että sekä $m^*(E_\infty) = 0$, että $m^*(E_{pq}) = 0$, joten $m(N) = 0$. Siis monotoninen funktio on melkein kaikkialla derivoituva. □

4.2. Rajoitetusti heilahteleva funktio

Rajoitetusti heilahtelevien funktioiden määritelmän ja karakterisoinnin antoi Camille Jordan (1838-1922). Funktion heilahtelu tietyllä välillä tarkoittaa summaa funktion arvojen erotuksien itseisarvoista välin jakopisteissä. Rajoitetusti heilahtelevilla funktioilla pienin yläraja funktion heilahteluista kaikilla mahdollisilla välin jaoilla on äärellinen.

Määritelmä 4.3. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja olkoon $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ välin $[a, b]$ jako siten, että $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Funktion f *heilahtelu* on summa

$$V_P(f) := \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Funktion f *kokonaisheilahtelu* on supremum kaikista mahdollisista välin $[a, b]$ jaoista muodostuvista funktion heilahteluista, eli

$$V_a^b(f) := \sup \{V_P(f) : \text{P on välin } [a, b] \text{ jako}\}.$$

Funktio f on *rajoitetusti heilahteleva*, kun funktion kokonaisheilahtelu $V_a^b(f)$ on äärellinen.

Osoitetaan, että rajoitetusti heilahteleva funktio on melkein kaikkialla derivoituva. Tätä ennen on osoitettava muutama apulause. Ensin osoitetaan, että rajoitetusti heilahtelevalle funktiolle kokonaisheilahtelu yli tietyn välin on sama kuin kokonaisheilahtelujen summa yli välin kahden osavälin.

Lemma 4.4. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahteleva funktio ja olkoon $a < c < b$. Tällöin funktion kokonaisheilahtelulle pätee*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Tällöin on välin $[a, b]$ jako $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ siten, että

$$V_a^b(f) - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq V_a^b(f). \tag{4.1}$$

Jos c on yksi välin $[a, b]$ jakopisteistä, niin summa $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ voidaan jakaa kahteen osaan jakopisteen c kohdalta. Jos c ei ole yksi välin $[a, b]$ jakopisteistä, niin lisätään c jakopisteisiin ja muodostetaan uusi jako, jolle epäyhtälöt 4.1 pätevät.

Tämä on mahdollista, koska $V_a^b(f)$ on supremum kaikista mahdollisista välin $[a,b]$ jaoista muodostuvista heilahteluista.

Tällöin
$$V_a^b(f) - \varepsilon < V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$$
ja koska ε saadaan mielivaltaisen pieneksi, niin $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ ja väite on todistettu.

□

Seuraavaksi osoitetaan, että rajoitetusti heilahteleva funktio voidaan esittää kahden kasvavan funktion erotuksena.

LEMMA 4.5. *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahteleva funktio. Tällöin on kaksi aidosti kasvavaa funktiota g ja h, joille $f = g - h$.*

TODISTUS. Osoitetaan aluksi, että funktiot $V_a^x(f)$ ja $V_a^x(f) - f(x)$ ovat kasvavia. Kokonaisheilahtelu, eli $V_a^x(f)$ on pienin yläraja kaikista mahdollisista välin $[a,x]$ jaoista muodostuvista funktion heilahteluista. Funktion heilahtelu on summa ei-negatiivisista termeistä ja jaoteltavan välin pituuden kasvaessa summattavien termien määrä kasvaa. Tällöin siis, kun $y < z$, niin $V_a^y(f) \leq V_a^z(f)$ ja kokonaisheilahtelu $V_a^x(f)$ on funktiona kasvava.

Osoitetaan seuraavaksi, että $V_a^x(f) - f(x)$ on kasvava. Olkoon $y < z$. Tällöin lauseen 4.4 avulla
$$\Big(V_a^z(f) - f(z)\Big) - \Big(V_a^y(f) - f(y)\Big) = V_y^z(f) - \Big(f(z) - f(y)\Big) \geq 0,$$
koska kokonaisheilahtelun määritelmän mukaan $V_y^z(f) \geq |f(z) - f(y)|$. Siis myös $V_a^x(f) - f(x)$ on funktiona kasvava.

Olkoon nyt $g(x) = V_a^x(f) + x$ ja $h(x) = V_a^x(f) - f(x) + x$, jolloin rajoitetusti heilahteleva funktio $f(x)$ voidaan kirjoittaa muodossa
$$f(x) = g(x) - h(x) = \Big(V_a^x(f) + x\Big) - \Big(V_a^x(f) - f(x) + x\Big).$$
Olkoon $y < z$. Nyt
$$g(z) - g(y) = \Big(V_a^z(f) + z\Big) - \Big(V_a^y(f) + y\Big) = \Big(V_a^z(f) - V_a^y(f)\Big) + \Big(z - y\Big) > 0,$$
sillä funktio $V_a^x(f)$ osoitettiin kasvavaksi ja $z > y$. Siis funktio $g(x)$ on aidosti kasvava. Vastaavalla tavalla funktio $h(x)$ on aidosti kasvava, sillä
$$\begin{aligned} g(z) - g(y) &= \Big(V_a^z(f) - f(z) + z\Big) - \Big(V_a^y(f) - f(y) + y\Big) \\ &= \Big(V_a^z(f) - f(z)\Big) - \Big(V_a^y(f) - f(y)\Big) + \Big(z - y\Big) > 0, \end{aligned}$$
koska funktio $V_a^x(f) - f(x)$ osoitettiin kasvavaksi ja $z > y$. Siis väite on todistettu.

□

Rajoitetusti heilahtelevan funktion derivoituvuus melkein kaikkialla seuraa suoraan edellisestä lauseesta.

LAUSE 4.6. *Rajoitetusti heilahteleva funktio on melkein kaikkialla derivoituva.*

Todistus. Rajoitetusti heilahteleva funktio voidaan esittää kahden monotonisen funktion erotuksena. Lauseen 4.2 mukaan monotoniset funktiot ovat melkein kaikkialla derivoituvia. Rajoitetusti heilahteleva funktio on siis kahden melkein kaikkialla derivoituvan funktion erotus, jolloin se on melkein kaikkialla derivoituva. □

4.3. Absoluuttisesti jatkuva funktio

Absoluuttisesti jatkuvan funktion määritelmän antoi G. Vitali (1875-1932) vuonna 1908. Absoluuttisesti jatkuvien funktioiden luokalla on tärkeä rooli Lebesguen integraaliteoriassa, erityisesti derivoinnin ja integroinnin suhteen selventämisessä. Tutkielman viimeisessä kappaleessa tutustutaan aiheeseen tarkemmin. Tässä kappaleessa määritellään absoluuttinen jatkuvuus ja osoitetaan, että tällaiset funktiot ovat melkein kaikkialla derivoituvia. Lisäksi osoitetaan muutamia absoluuttisesti jatkuvien funktioiden ominaisuuksia.

Määritelmä 4.7. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funktio f on *absoluuttisesti jatkuva*, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemasssa $\delta > 0$ siten, että jos $\{[a_k, b_k]\}$ on mikä tahansa äärellinen tai numeroituva kokoelma suljettuja, toisiansa leikkaamattomia välejä väliltä $[a, b]$, joille $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$, niin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Esimerkki 4.8. Osoitetaan, että funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = x$ on absoluuttisesti jatkuva. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan $\delta = \varepsilon$. Nyt kaikilla toisiansa leikkaamattomilla kokoelmilla välejä $\{[a_k, b_k]\} \subset [a, b]$, joille pätee $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$, saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| < \delta = \varepsilon.$$

Siis funktio $f(x) = x$ on absoluuttisesti jatkuva.

Seuraavaksi osoitetaan, että absoluuttisesti jatkuvat funktiot ovat rajoitetusti heilahtelevia, mistä seuraa, että ne ovat derivoituvia melkein kaikkialla.

Lause 4.9. *Absoluuttisesti jatkuva funktio on rajoitetusti heilahteleva.*

Todistus. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva funktio ja olkoon $\varepsilon = 1$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos $\{[a_k, b_k]\}$ on äärellinen tai numeroituva kokoelma pistevieraita, suljettuja välejä väliltä $[a, b]$ ja $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} \big(f(b_k) - f(a_k)\big) < 1$ ja siten kokonaisheilahtelu välillä $[a_k, b_k]$ on $V_{a_k}^{b_k}(f) \leq 1$.

Valitaan välille $[a, b]$ jako $a = x_0 < x_1 < ...x_n = b$ siten, että kaikilla $k = 1, 2, ..., n$ osaväli $x_k - x_{k-1} < \delta$. Olkoon nyt P mikä tahansa välin $[a, b]$ jako. Voidaan olettaa, että jakovälit $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ kuuluvat jakoon P. Nyt kaikilla $k = 1, 2, ..., n$ välille $[x_k, x_{k-1}]$ jakoon P kuuluvien osavälien summa on pienempää kuin delta, koska $x_k - x_{k-1} < \delta$. Tällöin kaikilla $k = 1, 2, ..., n$ välille $[x_k, x_{k-1}]$ jakoon P kuuluvien funktion heilahtelujen summa on pienempää kuin yksi, koska funktio on absoluuttisesti jatkuva. Siis funktion kokonaisheilahtelulle pätee

$$V_a^b(f) = \sum_{k=1}^{n} V_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \leq \sum_{k=1}^{n} 1 = n < \infty,$$

eli funktio f on rajoitetusti heilahteleva. □

Nyt voidaan todistaa, että absoluuttisesti jatkuva funktio on melkein kaikkialla derivoituva.

LAUSE 4.10. *Absoluuttisesti jatkuva funktio on melkein kaikkialla derivoituva.*

TODISTUS. Absoluuttisesti jatkuva funktio on lauseen 4.9 mukaan rajoitetusti heilahteleva ja lauseen 4.6 perusteella rajoitetusti heilahteleva funktio on melkein kaikkialla derivoituva, joten absoluuttisesti jatkuva funktio on melkein kaikkialla derivoituva. □

Seuraavaksi esitetään muutamia absoluuttisesti jatkuvan funktion ominaisuuksia. Absoluuttisesti jatkuvat funktiot ovat selvästi myös jatkuvia, mikä seuraa suoraan absoluuttisen jatkuvuuden määritelmästä. Lisäksi absoluuttisesti jatkuvien funktioiden summa on absoluuttisesti jatkuva ja funktion kertominen vakiolla säilyttää sen absoluuttisen jatkuvuuden. Todistetaan nämä ominaisuudet. Todistus on kirjoittajan itse tekemä.

LEMMA 4.11. *Olkoon $c \in \mathbb{R}$ vakio sekä g ja h reaaliarvoiset, absoluuttisesti jatkuvat funktiot välillä $[a,b]$. Tällöin myös funktiot $f = cg$ ja $f = g+h$ ovat absoluuttisesti jatkuvia.*

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että funktio $f = cg$ on absoluuttisesti jatkuva. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja välin $[a,b]$ mikä tahansa jako $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Koska g on absoluuttisesti jatkuva, niin on sellainen $\delta > 0$, että $\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) < \delta$ ja $\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| < \varepsilon/|c|$. Nyt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} |cg(x_k) + cg(x_{k-1})| \\ &= |c| \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) + g(x_{k-1})| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että funktio $f = g + h$ on absoluuttisesti jatkuva. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja välin $[a,b]$ mikä tahansa jako $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Koska g ja h ovat absoluuttisesti jatkuvia, niin on sellaiset $\delta_g > 0$ ja $\delta_h > 0$, että $\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) < \min(\delta_g, \delta_h)$ ja $\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| < \varepsilon/2$ ja $\sum_{k=1}^{n} |h(x_k) - h(x_{k-1})| < \varepsilon/2$. Tällöin

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} \Big| \big(g(x_k) + h(x_k)\big) - \big(g(x_{k-1}) + h(x_{k-1})\big) \Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |h(x_k) - h(x_{k-1})| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Siis väite on todistettu. □

Eräs tärkeä ominaisuus absoluuttisesti jatkuvalla funktiolla on, että se kuvaa nollamittaisen joukon nollamittaiseksi. Tätä ominaisuutta kutsutaan *Lusinin ehdoksi.* Lisäksi jokainen absoluuttisesti jatkuva funktio on kahden absoluuttisesti jatkuvan ja aidosti kasvavan funktion erotus. Todistetaan ensin Lusinin ehto.

LEMMA 4.12. *Olkoon* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *absoluuttisesti jatkuva funktio. Tällöin jokaiselle nollamittaiselle joukolle* $E \in [a, b]$*,* $m(f(E)) = 0$.

TODISTUS. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että aina kun $\{[\alpha_k, \beta_k]\} \subset [a, b]$ on mikä tahansa äärellinen tai numeroituva kokoelma suljettuja, pistevieraita välejä jolle $\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k - \alpha_k) < \delta$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon$.

Olkoon nyt $G = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ avoin joukko siten, että $E \subset G$ ja $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$. Koska absoluuttisesti jatkuva funktio on myös jatkuva, niin tällöin

$$f(E) \subset f(G) \subset f\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]\Big).$$

Olkoon nyt α_k on sellainen piste, jossa funktio f saa pienimmän arvonsa välillä $[a_k, b_k]$ ja β_k sellainen piste, jossa funktio f saa suurimman arvonsa välillä $[a_k, b_k]$. Tällöin

$$f\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]\Big) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}[f(\alpha_k), f(\beta_k)],$$

eli

$$f(E) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}[f(\alpha_k), f(\beta_k)].$$

Saadaan siis, että

$$\begin{aligned} m^*(f(E)) \le m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}[f(\alpha_k), f(\beta_k)]) &\le \sum_{k=1}^{\infty} m^*([f(\alpha_k), f(\beta_k)]) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(f(\beta_k) - f(\alpha_k)\Big) < \varepsilon, \end{aligned}$$

sillä $\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k - \alpha_k) < \delta$. Koska ε voidaan valita mielivaltaisen pieneksi, niin $m(f(E)) = 0$.

□

Tämän jälkeen osoitetaan, että absoluuttisesti jatkuva funktio voidaan kirjoittaa kahden absoluuttisesti jatkuvan ja aidosti kasvavan funktion erotuksena.

LAUSE 4.13. *Olkoon* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *absoluuttisesti jatkuva funktio. Tällöin on kaksi absoluuttisesti jatkuvaa ja aidosti kasvavaa funktiota* g *ja* h*, joille* $f = g - h$.

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että funktiot $V_a^x(f)$ ja $V_a^x(f) - f(x)$ ovat absoluuttisesti jatkuvia.
Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $0 < \mu < \varepsilon$.
Koska f on absoluuttisesti jatkuva, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että kun $\{[a_k, b_k]\}$

on äärellinen kokoelma toisiaan leikkaamattomia suljettuja välejä väliltä $[a, b]$, joille $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, niin $\sum_{k=1}^{n} \big|f(b_k) - f(a_k)\big| < \mu$.

Tällöin lauseen 4.4 ja kokonaisheilahtelun määritelmän mukaan

$$\sum_{k=1}^{n} |V_a^{b_k}(f) - V_a^{a_k}(f)| = \sum_{k=1}^{n} V_{a_k}^{b_k}(f),$$

mikä on supremum summista

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} |f(x_{k,j}) - f(x_{k,j-1})|,$$

missä $a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < ... < x_{k,n_k} = b_k$ on välin $[a_k, b_k]$ jako.

Tällöin on

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} (x_{k,j} - x_{k,j-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

koska $\sum_{j=1}^{n_k}(x_{k,j} - x_{k,j-1}) \leq (b_k - a_k)$. Jolloin myös

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} |f(x_{k,j}) - f(x_{k,j-1})| < \mu.$$

Ollaan siis saatu

$$\sum_{k=1}^{n} |V_a^{b_k}(f) - V_a^{a_k}(f)| \leq \mu < \varepsilon,$$

eli $V_a^x(f)$ on absoluuttisesti jatkuva. Lisäksi f on oletuksen mukaan absoluuttisesti jatkuva, joten $V_a^b(f) - f(x)$ on kahden absoluuttisesti jatkuvan funktion erotuksena absoluuttisesti jatkuva lauseen 4.11 mukaan.

Olkoon nyt $g(x) = V_a^x(f) + x$ ja $h(x) = V_a^x(f) - f(x) + x$, jolloin absoluuttisesti jatkuva funktio $f(x)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x) = g(x) - h(x) = \Big(V_a^x(f) + x\Big) - \Big(V_a^x(f) - f(x) + x\Big).$$

Esimerkissä 4.8 osoitettiin, että funktio $f(x) = x$ on absoluuttisesti jatkuva ja juuri osoitettiin, että funktiot $V_a^x(f)$ ja $V_a^b(f) - f(x)$ ovat absoluuttisesti jatkuvia, joten funktiot g ja h ovat lauseen 4.11 mukaan absoluuttisesti jatkuvien funktioiden summana absoluuttisesti jatkuvia. Lisäksi lauseen 4.5 todistuksessa osoitettiin vastaavat funktiot g ja h aidosti kasvaviksi, joten väite on todistettu. $\square$

LUKU 5

Derivaatan integraali

Seuraavaksi tarkastellaan derivaatan integraalia ja erityisesti millaiset funktiot saadaan takaisin niiden derivaatasta integroimalla. Kappaleen päälauseessa 5.3 todetaan, että funktion on oltava tällöin absoluuttisesti jatkuva. Ominaisuuden välttämättömyydestä esitetään esimerkki funktiolla, jolla absoluuttinen jatkuvuus ei toteudu. Kappaleen lähteitä ovat [**2**] ja [**6**].

Alkuun osoitetaan kaksi apulausetta. Ensin osoitetaan kasvavalle funktiolle yläraja sen määrätystä integraalista.

LEMMA 5.1. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kasvava funktio. Tällöin sen derivaatta f' on mitallinen ja*

$$\int_a^b f' \, dm \leq f(b) - f(a).$$

TODISTUS. Laajennetaan funktiota f välille $[a, b+1]$ siten, että kun $b < x \leq b+1$, niin $f(x) = f(b)$. Olkoon nyt funktiot f_n kaikille $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = n\big(f(\frac{1}{n} + x) - f(x)\big).$$

Tällöin $f_n(x) \geq 0$ ja $f_n(x) \to f'(x)$, kun $n \to \infty$ melkein kaikilla $x \in [a, b]$ ja lauseen 1.18 mukaan f' on mitallinen.
Fatoun lemmaa (1.27) ja integraalin lineaarisuutta (1.25) käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}
\int_a^b f' \, dm &\leq \liminf_{n \to \infty} \int_a^b f_n \, dm \\
&= \liminf_{n \to \infty} n\Big(\int_a^b f(x + \frac{1}{n}) \, dm - \int_a^b f(x) \, dm\Big).
\end{aligned}$$

Nyt muuttujanvaihdolla saadaan

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n \to \infty} n\Big(\int_a^b f(x + \frac{1}{n}) \, dm - \int_a^b f(x) \, dm\Big) \\
&= \liminf_{n \to \infty} n\Big(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x) \, dm - \int_a^b f(x) \, dm\Big).
\end{aligned}$$

Koska $a < a + \frac{1}{n} < b < b + \frac{1}{n}$, niin integrointirajoja muuttamalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} n\Big(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\ dm - \int_a^b f(x)\ dm\Big)\\
&= \liminf_{n\to\infty} n\Big(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\ dm + \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\ dm - \big(\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\ dm + \int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\ dm\big)\Big)\\
&= \liminf_{n\to\infty} n\Big(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\ dm - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\ dm\Big)\\
&\leq \liminf_{n\to\infty} n\Big(\frac{f(b)}{n} - \frac{f(a)}{n}\Big) = f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Viimeisessä arviossa käytettiin tietoja $f(x) = f(b)$, kun $b < x \leq b+1$ ja f on kasvava.

Ollaan siis saatu, että

$$\int_a^b f'\ dm \leq f(b) - f(a),$$

eli väite on todistettu. □

Todistetaan vielä toinen apulause.

Lemma 5.2. *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, aidosti kasvava funktio ja olkoon A niiden pisteiden joukko, joissa funktiolla on derivaatta. Tällöin joukot A ja $f(A)$ ovat Borel-joukkoja ja*

$$m(f(A)) = \int_A f'\ dm = \int_a^b f'\ dm.$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että joukot A ja $f(A)$ kuuluvat Borel-joukkoihin. Joukkoon A sisältyy kaikki pisteet, joissa funktiolla on olemassa derivaatta. Jos funktio f on derivoituva pisteessä x, niin tällöin siinä pisteessä johdos $Df(x)$ on äärellinen ja johdokset pisteessä x ovat yhtäsuuret. Joukossa A on siis ne pisteet, joissa funktion johdokset ovat samat ja äärelliset. Näytetään alkuun, että joukko

$$E_p = \{x : \text{ pisteessä on olemassa johdos siten, että } Df(x) < p\}$$

on Borel-joukko kaikilla $p \in \mathbb{R}$. Määritellään joukot A_n kaikilla $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$A_n = \{x : \text{ on olemassa } y \in [a,b] \text{ siten, että } |x-y| < 1/n \text{ ja } f(y) - f(x) < p(y-x)\}.$$

Tällöin $E_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Koska funktio f on jatkuva, niin jokainen joukko A_n on avoin, joten E_p on avoimien joukkojen numeroituvana leikkauksena Borel-joukko.
Samalla tavoin joukko

$$E^q = \{x : \text{ pisteessä on olemassa johdos siten, että } Df(x) > q\}$$

on kaikilla $q \in \mathbb{R}$ Borel-joukko.
Tästä seuraa, että kun $p < q$, niin joukko $E_p^q = E_p \cap E^q$ on Borel-joukko. Nyt funktion kaikki pisteet, joissa funktio f ei ole derivoituva on joukkojen E_p^q yhdiste

kaikilla rationaalilukujen p ja q yhdistelmillä, eli $\bigcup_{p,q\in\mathbb{Q}} E_p^q$. Siis joukko pisteistä, joissa funktiolla ei ole derivaatta, on Borel-joukko. Lisäksi joukot

$$\{x: \text{ pisteessä johdokselle pätee } Df(x) = \infty\} = \bigcap_{q=1}^{\infty} E^q$$

ja

$$\{x: \text{ pisteessä johdokselle pätee } Df(x) = -\infty\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} E_{-p}$$

ovat Borel-joukkoja.
Tällöin siis joukko A on komplementti joukosta $\bigcup_{p,q\in\mathbb{Q}} E_p^q \cup \bigcap_{q=1}^{\infty} E^q \cup \bigcap_{p=1}^{\infty} E_{-p}$ ja joukko A on siten Borel-joukon komplementtina Borel-joukko.
Koska funktio f on aidosti kasvavana funktiona homeomorfismi, se kuvaa Borel-joukot Borel-joukoiksi, joten $f(A)$ on Borel-joukko.

Osoitetaan nyt, että

$$m(f(A)) = \int_A f' \, dm = \int_a^b f' \, dm.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Muodostetaan joukkoja A_k siten, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k = \{x : \frac{k-1}{n} \leq f'(x) < \frac{k}{n}\}.$$

Koska f on aidosti kasvava, niin $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Lemmoista 3.6 ja 3.10 saadaan, että $m(f(A_k)) \leq \frac{k}{n} m(A_k)$ ja $qm(A_k) \leq m(f(A_k))$ kaikilla $q < (k-1)/n$. Saadaan siis arviot

$$\frac{k-1}{n} m(A_k) \leq m(f(A_k)) \leq \frac{k}{n} m(A_k).$$

Toisaalta integraalin määritelmän ja joukkojen A_k määrittelystä saadaan arviot

$$\frac{k-1}{n} m(A_k) \leq \int_{A_k} f' \, dm \leq \frac{k}{n} m(A_k).$$

Näiden arvioiden avulla saadaan

$$\left| m(f(A_k)) - \int_{A_k} f' \, dm \right| \leq \left| \frac{k}{n} m(A_k) - \frac{k-1}{n} m(A_k) \right| = \frac{1}{n} m(A_k)$$

Koska $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ja $\int_A f' \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f' \, dm$, niin joukon A mitan ja joukon A yli otetun integraalin erotukseksi saadaan

$$
\begin{aligned}
\Big|m(f(A)) - \int_A f' \, dm\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\Big(m(f(A_k)) - \int_{A_k} f' \, dm\Big)\Big| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\Big|m(f(A_k)) - \int_{A_k} f' \, dm\Big| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}m(A_k) = \frac{1}{n}m(A) \leq \frac{b-a}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Siis väite on todistettu. □

Nyt voidaan osoittaa, että absoluuttisesti jatkuvat funktiot saadaan takaisin niiden derivaatasta integroimalla.

LAUSE 5.3. *Olkoon funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tällöin funktio on absoluuttisesti jatkuva, jos ja vain jos f on derivoituva m.k. $x \in]a,b[$, f' on Lebesgue-integroituva sekä*

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t)dt \text{ kaikilla } x \in [a,b].$$

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että jos f on derivoituva m.k. $x \in]a,b[$, f' on Lebesgue-integroituva ja funktion f integraalille pätee $f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t)dt$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin se on silloin absoluuttisesti jatkuva.

Vaihe 1. Osoitetaan väite ensin funktiolle, jonka derivaattafunktio on mitallisen joukon karakteristinen funktio. Olkoon siis mitallinen joukko $E \subset [a,b]$ ja sen karakteristinen funktio $f' = \chi_E$. Tällöin jokaiselle välille $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f' \, dm = m(E \cap (\alpha,\beta)).$$

Nyt annetulle $\varepsilon > 0$, olkoon $\delta = \varepsilon$ ja jos $\{(\alpha_i,\beta_i)\} \subset E$ ovat pistevieraita välejä siten, että $\sum_i(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, niin

$$\sum_i (f(\beta_i) - f(\alpha_i)) = \sum_i m(E \cap (\alpha_i,\beta_i)) < \delta = \varepsilon,$$

eli f on absoluuttisesti jatkuva.

Vaihe 2. Osoitetaan väite ei-negatiiviselle funktiolle. Olkoon siis $f : [a,b] \to [0,\infty]$. Ei-negatiivisen funktion integraali on määritelty supremumina integraaleista yksinkertaisille funktioille ϕ, joille $\phi < f$.Tällöin voidaan valita annetulla $\varepsilon > 0$ sellainen yksinkertainen funktio ϕ, jolle $\int_a^b g(x) \, dm < \varepsilon/2$, missä $g(x) = f(x) - \phi(x)$. Lisäksi vaiheen 1 perusteella voidaan valita $\delta > 0$ siten, että aina kun $\sum_i(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, niin $\sum_i(\phi(\beta_i) - \phi(\alpha_i)) < \varepsilon/2$. Tällöin integraalin lineaarisuuden perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_i (f(\beta_i) - f(\alpha_i)) &= \sum_i \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (g(x) + \phi(x)) \, dm \\
&= \sum_i \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g(x) \, dm + \sum_i \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \phi(x) \, dm \\
&\leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) \, dm + \sum_i (\phi(\beta_i) - \phi(\alpha_i)) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

eli f on absoluuttisesti jatkuva.

Vaihe 3. Osoitetaan väite nyt yleiselle funktiolle. Olkoon siis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Funktio voidaan kirjoittaa sen ei-negatiivisten positiivi- ja negatiiviosien avulla, eli $f = f^+ - f^-$ ja käyttää integraalin lineaarisuutta. Jos $(\alpha, \beta) \subset [a,b]$, niin

$$\begin{aligned}
|f(\beta) - f(\alpha)| = |\int_{\alpha}^{\beta} f \, dm| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f| \, dm &= \int_{\alpha}^{\beta} (f^+ + f^-) \, dm \\
= \int_{\alpha}^{\beta} f^+ \, dm + \int_{\alpha}^{\beta} f^- \, dm,
\end{aligned}$$

jolloin integraaleihin voidaan soveltaa vaihetta 2. Siis väite on todistettu.

Tämän jälkeen osoitetaan toinen suunta, eli jos funktio f on absoluuttisesti jatkuva, niin
i) f on derivoituva m.k. $x \in]a,b[$
ii) f' on Lebesgue-integroituva ja
iii)sen integraalille pätee $f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t)dt$ kaikilla $x \in [a,b]$.

i) Väite on todistettu lauseessa 4.10.

ii) Lauseessa 4.9 osoitettiin, että absoluuttisesti jatkuva funktio on rajoitetusti heilahteleva. Tällöin se on esitettävissä kahden monotonisen funktion erotuksena lauseen 4.5 mukaan. Edelleen lauseessa 5.1 osoitettiin, että monotonisille funktioille $\int_A f' \, dm \leq f(b) - f(a) < \infty$, eli funktion derivaatan f' integraali on äärellinen, eli se on integroituva.

iii) Osoitetaan nyt, että absoluuttisesti jatkuvalle funktiolle $f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t) \, dt$ kaikilla $x \in [a,b]$.
Olkoon joukko A niiden pisteiden joukko, jossa funktiolla f on derivaatta ja joukko $B = [a,b] \setminus A$. Oletetaan ensin, että funktio on aidosti kasvava. Lisäksi, koska funktio f on absoluuttisesti jatkuvana funktiona myös jatkuva, niin pisteiden a ja b kuvapisteiden erotuksen arvo on sama kuin sen kuvapisteiden mitta, eli $f(b) - f(a) = m(f([a,b]))$. Edelleen lemman 5.2 avulla saadaan, että

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= m(f([a,b])) = m(f(A)) + m(f(B)) \\ &= \int_A f' \; dm + m(f(B)). \end{aligned}$$

Koska f on aidosti monotoninen ja siten lauseen 4.2 mukaan melkein kaikkialla derivoituva, niin $m(A) = b - a$ ja $m(B) = 0$. Lisäksi funktio toteuttaa Lusinin ehdon (4.12), eli koska $m(B) = 0$, niin $m(f(B)) = 0$. Siten

$$f(b) - f(a) = \int_A f' \; dm + m(f(B)) = \int_a^b f' \; dm.$$

Yleinen absoluuttisesti jatkuva funktio voidaan kirjoittaa lemman 4.13 mukaan kahden absoluuttisesti jatkuvan, aidosti kasvavan funktion erotuksena, eli olkoon $f = g - h$, missä g ja h ovat absoluuttisesti jatkuvia aidosti kasvavia funktioita. Saadaan siis

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \Big(g(b) - g(a)\Big) - \Big(h(b) - h(a)\Big) \\ &= \int_a^b g' \; dm - \int_a^b h' \; dm = \int_a^b f' \; dm. \end{aligned}$$

Näin väite on saatu todistettua.

□

Seuraavaa esimerkkiä kutsutaan Cantorin funktioksi saksalaisen matemaatikon George Cantorin (1845-1918) mukaan.

Esimerkki 5.4. Määritellään aluksi *Cantorin joukko*. Olkoon väli $I = [0, 1]$. Poistetaan välin I keskeltä $\frac{1}{3}$-pituinen avoin väli $J_{11} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Tällöin jäljelle jää kaksi suljettua väliä, joiden pituudet ovat $\frac{1}{3}$. Välit ovat $I_{11} = [0, \frac{1}{3}]$ ja $I_{12} = [\frac{2}{3}, 1]$. Merkitään jäljelle jäävää joukkoa $C_1 = I_{11} \cup I_{12}$. Joukon C_1 mitta on $m(C_1) = \frac{2}{3}$.

Seuraavaksi poistetaan välien I_{11} ja I_{12} keskeltä avoimet välit J_{21} ja J_{22}, joiden pituudet ovat kolmasosa välin pituudesta. Tällöin jäljelle jäävä joukko on $C_2 = \bigcup_{j=1}^4 I_{2j}$. Joukko C_2 muodostuu siis neljästä suljetusta välistä I_{2j}, missä $j = 1, 2, 3, 4$ ja joiden pituus on $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. Joukon C_2 mitta on siis $m(C_2) = 4 \cdot \frac{1}{9} = (\frac{2}{3})^2$.

Jatketaan edelleen näin, jolloin kierroksella i jäljelle jäävä joukko C_i muodostuu 2^i kappaleesta suljettuja välejä I_{ij}, missä $j = 1, 2, ..., 2^i$, siis $C_i = \bigcup_{j=1}^{2^i} I_{ij}$. Joukon mitaksi saadaan $m(C_i) = (\frac{2}{3})^i$.
Nyt Cantorin joukko on leikkaus joukoista C_i, eli

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Kaikilla $i = 1, 2, ...$ joukot C_i ovat suljettujen välien yhdisteinä suljettuja ja $C_1 \supset C_2 \supset ...$, joten Cantorin joukko C on suljettu. Joukon mitaksi saadaan $m(C) = \lim_{i\to\infty} m(C_i) = \lim_{i\to\infty}(\frac{2}{3})^i = 0$.

Määritellään seuraavaksi *Cantorin funktio*. Olkoon

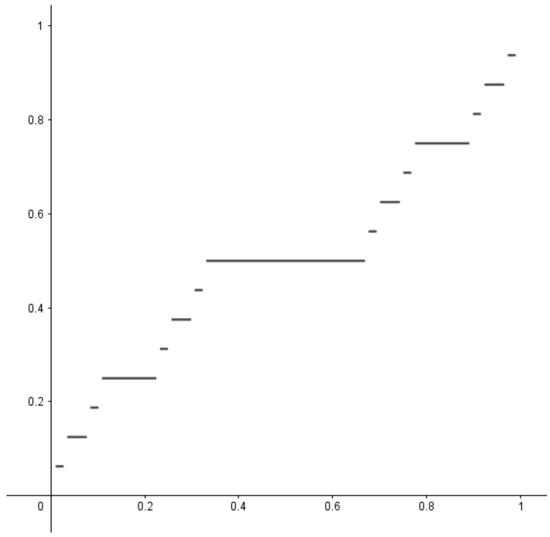
$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x = 0, \\ \frac{2j-1}{2^i} & \text{kun } x \in J_{ij}\ , \\ \sup\{\phi(t) : t \in I \backslash C, t < x\} & \text{kun } x \in C \backslash \{0\}\ . \end{cases}$$

Cantorin funktio on kasvava ja jatkuva. Funktio on melkein kaikkialla derivoituva, ja $\phi'(x) = 0$, kun $x \notin C$. Lisäksi Cantorin funktio on integroituva. Cantorin funktiota ei kuitenkaan saada takaisin integroimalla sen derivaattaa, sillä

$$\int_0^1 \phi'(x)\ dx = 0 \neq 1 = \phi(1) - \phi(0).$$

Yhtäsuuruus ei toteudu, sillä Cantorin funktio ei ole absoluuttisesti jatkuva. Tämän näkee, kun valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Olkoon nyt $\delta > 0$. Koska Cantorin joukko on nollamittainen, se voidaan peittää väleillä $\{[a_k, b_k]\}$, joille pätee $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$. Kuitenkin on

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\phi(b_k) - \phi(a_k)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$



Kuva 5.1. Cantorin funktion arvot joukoissa J_{ij}, kun $i = 1, 2, 3, 4$.

Esimerkki Cantorin funktiosta siis osoittaa, että funktion derivoituvuus melkein kaikkialla ja Lebesgue-integroituvuus ei riitä, vaan funktion on oltava myös absoluuttisesti jatkuva, jotta funktio saataisiin takaisin sen derivaattafunktiota integroimalla.

LIITE A

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko
$\lim_{x\to x_0} f(x)$	Funktion f raja-arvo pisteessä x_0
$\lim_{x\to x_0+/-} f(x)$	Funktion f oikean- ja vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä x_0
$\limsup_{x\to x_0} f(x)$	Funktion f yläraja-arvo pisteessä x_0
$\liminf_{x\to x_0} f(x)$	Funktion f alaraja-arvo pisteessä x_0
$m^*(E)$	Joukon E Lebesgue-ulkomitta
$m(E)$	Joukon E Lebesgue-mitta
$A\backslash E$	Joukon E erotus joukosta A
$\cup A_k$	Joukkojen A_k yhdiste
$\cap A_k$	Joukkojen A_k leikkaus
A^C	Joukon A komplementti
χ_A	Joukon A karakteristinen funktio
$f^+(x)$	Funktion f positiiviosa
$f^-(x)$	Funktion f negatiiviosa
$f'(x_0)$	Funktion f derivaatta pisteessä x_0
$D^{+/-}f(x)$	Dinin ylemmät derivaatat
$D_{+/-}f(x)$	Dinin alemmat derivaatat
$\mathcal{V}$	Vitalin peite
$Df(x_0)$	funktion f johdos pisteessä x_0
$V_P(f)$	Funktion f heilahtelu jaolla P
$V_a^b(f)$	Funktion f kokonaisheilahtelu välillä $[a, b]$

Lähdeluettelo

[1] Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner ja Andrew M. Bruckner: *Elementary Real Analysis.* toinen painos, 2008.

[2] Andrew M. Bruckner, Judith B. Bruckner ja Brian S. Thomson: *Real Analysis.* Prentice-Hall, 1997.

[3] Richard Courant, Fritz John: *Introduction to Calculus and Analysis 1.* Springer, 1999.

[4] Edwin Hewitt, Karl Stromberg: *Real and Abstract Analysis.* Springer-Verlag, 1965.

[5] Soo Bong Chae: *Lebesgue Integration.* toinen painos, Springer-Verlag, 1995.

[6] Charles Chapman Pugh: *Real Mathematical Analysis.* Springer, 2002.