

Seikkailu pallogeometriaan ja työkaluja GeoGebraan

Katariina Ristilä

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2018

Tiivistelmä: Katariina Ristilä, *Seikkailu pallogeometriaan ja työkaluja GeoGebraan*. Matematiikan pro gradu -tutkielma, 51 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2018.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustua yhteen epäeuklidiseen geometriaan, pallogeometriaan, ja verrata sitä koulumatematiikasta jokaiselle tuttuun euklidiseen geometriaan. Yksinkertaisuudessaan pallogeometria on geometriaa pallon pinnalla. Tutkitaan, mitä esimerkiksi suora ja kolmio tarkoittavat pallon pinnalla, ja minkälaisia ominaisuuksia niillä on. Pallogeometriaan tutustuminen syventää avaruuden ja aksioomaattisen järjestelmän ymmärtämistä. Yhden aksiooman poisjättäminen määrittääkin useita erilaisia geometrian malleja. Pallogeometria on käsitteenä samaan aikaan hyvin etäinen ja hyvin arkipäiväinen; harva tietää, mikä on isoympyrän määritelmä, mutta jokainen tarvitsee joskus karttaa, joka on joko pallo tai sen approksimaatio euklidisessa tasossa.

Tutkielman alussa määritellään yksikköpallo, joka toimii koko tutkielman pohjana, ja kaikki tutkielmassa esitetyt asiat tehdään yksikköpallolla. Sen jälkeen määritellään antipodi, isoympyrä, isometriat ja kolmiot. Näiden lisäksi tarkastellaan tuttuja trigonometrisiä funktioita ja muotoillaan sini- ja kosinilauseiden lisäksi myös Pythagoraan lause pallolle. Lopuksi vielä tarkastellaan, voidaanko palloa approksimoida euklidiseen tasoon ja pohditaan, voivatko tasokartat olla tarkkoja.

Palloon tutustumisen lisäksi tämän tutkielman ohella on tehty pallogeometriaa havainnollistavia työkaluja GeoGebraan, joka on lukiolaisille arkipäiväinen oppimisympäristö. Nämä työkalut esitellään viimeisessä luvussa. Nykyisten sähköisten ylioppilaskirjoitusten vuoksi lukion oppimateriaalit hyödyntävät paljon sähköisiä oppimisympäristöjä ja työkaluja, kuten GeoGebraa. Työkalujen tekemisen lisäksi tutkielmaan on haastateltu GeoGebraa oppimisvälineenä tutkinutta Jyväskylän yliopiston lehtoria Markus Hähkiöniemeä, joka kannustaa opettajia ja oppilaita rohkeasti tutustumaan GeoGebraan. Pallogeometria on monipuolinen ja erilainen näkökulma geometriaan koulumaailmaan tuotavaksi. Se on oppilaille ja opiskelijoille uudenlainen esimerkki ympäristöstä, jossa kaikki ei menekään niin kuin on euklidisessä tasossa totuttu.

Avainsanat: pallogeometria, pallo, epäeuklidinen geometria, Hilbertin aksioomajärjestelmä, paralleeliaksioma, trigonometria, kartta, maapallo, GeoGebra, GeoGebra-työkalut

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Hilbertin aksioomat	3
3	Pallogeometrian peruskäsitteet	6
3.1	Pallo	6
3.1.1	Isoympyrä pallon pinnalla	7
3.1.2	Pallokoordinaatit	14
4	Pallogeometrian ominaisuuksia	17
4.1	Isometriat	17
4.2	Pallotrigonometria	27
4.2.1	Pallokolmio	28
4.2.2	Pythagoraan lause	34
4.2.3	Pallokolmion sini- ja kosinilauseet	37
4.3	Maapallo ja karttasovellukset	41
5	Työkaluja GeoGebraan	44
5.1	GeoGebra opetuskäytössä	44
5.2	GeoGebra-työkalut	46
	Lähdeluettelo	49

Luku 1

Johdanto

Geometria tulee kreikan kielen sanasta *geometrein*, joka tarkoittaa maanmittausta. Maanmittaus kehittyi lopulta siten, että geometriassa tarkasteltiin pituuksien lisäksi myös kuvioita ja kappaleita. Koulumatematiikan geometria on kuvien ja kuvioiden tutkimista tasoissa ja avaruuksissa. Geometria on jo tuhansien vuosien ajan pohjautunut kreikkalaisen matemaatikon Eukleideen teokseen *Alkeet* (300 eaa.), jota pidettiin pitkään matemaattisen täsmällisyyden mallina. Teoksessa esitellään useimmat arkipäiväisimmät geometrian perusominaisuudet, kuten kolmion kulmien summa sekä Pythagoraan lause. Eukleides kasasi teokseen siihen aikaan mennessä selvitetyn ja tunnetun tasogeometrian perusteet ja muotoili ne perustuen aksioomiin ja postulaatteihin, jotka hän esitti itsestäänselvyyksinä. Noin 2000 vuoden ajan geometria perustui näihin muutamaan perusolettamukseen, joiden avulla Eukleides johti ja perusteli kaiken muun tasogeometrian. [4]

Epäeuklidinen geometria on 1800-luvun tärkeimpiä matemaattisia löydöksiä. Paralleelipostulaatin eli paralleeliaksioman tutkiminen johti useiden matemaatikkojen myötä siihen, että Eukleideen *Alkeiden* mukainen geometria ei ollutkaan enää ainoa ”oikea” geometria. Päädyttiin geometrioihin, joissa paralleeliaksioma ei päde. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) työsti epäeuklidista geometriaa julkaisematta siitä mitään. Työtä jatkettiin ja aiheesta ensimmäisinä julkaisivat János Bolyai (1802-1860) ja Nicolai Lobachevsky (1793-1856) [5].

Epäeuklidinen geometria jaotellaan hyperboliseen ja elliptiseen geometriaan; riippuen yhdensuuntaisten suorien lukumäärästä. Olkoot l suora ja P piste, joka ei ole suoralla l . Hyperbolisessa geometriassa on olemassa useita suoria, jotka kulkevat pisteen P kautta, mutta eivät leikkaa suoraa l . Elliptisessä geometriassa kaikki pisteen P kautta kulkevat suorat leikkaavat suoran l kanssa. Pallogeometria on elliptisen geometrian malli.

Pallogeometrian *piste* on euklidisen avaruuden \mathbb{R}^3 joukon $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

piste, ja pallogeometrian *suora* on avaruudessa \mathbb{R}^3 isoympyrä, joka myös kuuluu joukkoon $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tässä tutkielmassa tarkastellaan yksikköpallon geometriaa ja tutkitaan tutuimpia euklidisen geometrian lainalaisuuksia pallogeometriassa, sekä pohditaan miten tarkkoja esimerkiksi maapallosta tehdyt kartat ovat. Työssä määritellään ensin pallogeometrian peruskäsitteitä. Tutkitaan miltä esimerkiksi kolmiot ja suorat näyttävät pallolla ja minkälaisia ominaisuuksia niillä on. Tämän jälkeen tutustutaan isometrioihin, joiden avulla todistetaan pallogeometrian lauseita, kuten sini- ja kosinilauseet, sekä Pythagoraan lause. Lisäksi esitellään erilaisia opetuskäyttöön tarkoitettuja GeoGebra-sovellukseen tehtyjä työkaluja. Epäeuklidista pallogeometriaa vertaillaan työssä euklidiseen geometriaan, erityisesti Hilbertin aksioomiin. Nämä aksioomat esitellään seuraavassa luvussa.

Pallogeometria-luvut mukailevat lähteenä käytettyä David A. Brannanin teosta *Geometry* [1]. Tutkielmassa esiintyvät kuvat ovat kaikki GeoGebralla piirrettyjä lukuunottamatta kuvaa 4.16, jonka lähde on mainittu kuvatekstissä.

Luku 2

Hilbertin aksioomat

Alkeita kritisoitiin paljon ja Eukleideen työn on sanottu pohjautuvan arvailuihin ja kokeiluihin, eikä kaikkia Alkeissa esitettyjä lauseita ja väittämiä perusteltu vedenpitävästi. Vasta vuonna 1899 saksalainen matemaatikko David Hilbert (1862-1943) työsti Eukleideen aksioomajärjestelmää nykyaikaisempaan muotoon korjaten Alkeiden virheitä ja intuitioon pohjautuneita esityksiä. Hilbertin aksioomajärjestelmä onkin laajempi ja perustellumpi. Hilbertin aksioomista kolme ensimmäistä **H1**, **H2** ja **H3** käsittelevät peruskäsitteitä, pistettä ja suoraa, sekä niiden olemassaoloa. Ensimmäinen aksiooma on oleellisesti sama kuin Eukleideen ensimmäinen aksiooma, mutta jo toinen poikkeaa Eukleideen huterasta esityksestä.

H1 Jos pisteet P ja Q ovat eri pisteitä, on olemassa yksi ja vain yksi suora, joka kulkee sekä P :n että Q :n kautta.

H2 Jokainen suora sisältää vähintään kaksi eri pistettä.

H3 On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden jokaisen kautta.

Pistettä ja suoraa ei määritellä, vaan niitä pidetään itsestäänselvyksinä, eivätkä aksioomat riipu näiden tarkasta määritelmästä. Usein pisteet ovat alkioita ja suorat niiden joukkoja. Yllä olevat Hilbertin kolme ensimmäistä aksioomaa määrittelevät erilaisia geometrian malleja, riippuen mitä muita aksioomia oletetaan todeksi. Näiden ensimmäisen kolmen aksiooman nojalla Hilbert jatkoi vielä aksioomiaan käsitellen eri aiheita. Seuraavat neljä aksioomaa käsittelevät välissäoloa. Merkinnällä $A * B * C$ tarkoitetaan, että piste B on pisteiden A ja C välissä samalla suoralla.

H4 Jos $A * B * C$, niin A, B ja C ovat eri pisteitä samalla suoralla ja $C * B * A$.

- H5** Jos A ja B ovat eri pisteitä, on olemassa piste C siten, että $A * B * C$.
- H6** Jos A , B ja C ovat eri pisteitä samalla suoralla, niin yksi ja vain yksi seuraavista ehdoista on voimassa: $A * B * C$, $A * C * B$ tai $B * A * C$.
- H7** Olkoot A , B ja C eri pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla. Olkoon suora l siten, ettei yksikään pisteistä A , B , ja C ole suoralla l . Jos piste D on suoralla l siten, että $A * D * B$, on olemassa myös piste E suoralla l siten, että joko $A * E * C$ tai $B * E * C$.

Välissäolon käsitteen jälkeen Hilbertin aksioomien lista jatkuu janojen yhtenevyyksiä käsittelevillä aksioomilla. Merkinnällä $AB \cong CD$ tarkoitetaan sitä, että janat AB ja CD ovat yhtenevät eli yhtä pitkät. Puolisuora \overrightarrow{PQ} määritellään välissäolon avulla: Puolisuora \overrightarrow{PQ} on joukko, johon kuuluvat pisteet P ja Q , sekä ne pisteet A , joille pätee $P * Q * A$ tai $P * A * Q$. Piste P päässä se on siis kuin jana, mutta pisteen Q ohi se jatkuu suorana.

H8 Olkoot A ja B pisteitä ja \overrightarrow{PQ} mikä vain puolisuora. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi piste R puolisuoralla \overrightarrow{PQ} siten, että $AB \cong PR$.

H9 Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio eli

1. $AB \cong AB$ (relaatio on refleksiivinen).
2. Jos $AB \cong CD$, niin $CD \cong AB$ (relaatio on symmetrinen).
3. Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB \cong EF$ (relaatio on transitiivinen).

H10 Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.

Lisäksi Hilbert muotoili vastaavat aksioomat kulmien yhtenevyyksille. Eukleides todisti yhtenevän kulman olemassaolon konstruktiolla, mutta Hilbert asetteli tämän aksioomaksi. Kulma muodostuu kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran tai janan väliin. Kolmio muodostuu kolmesta janasta AB , BC ja CA , jotka ovat kolmion sivuja. Kolmion kärkiä ovat janojen päätepisteet A , B ja C .

H11 Olkoon $\angle ABC$ kulma, \overrightarrow{DE} puolisuora ja P piste, joka ei ole suoralla DE . Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi puolisuora \overrightarrow{DF} siten, että pisteet F ja P ovat samalla puolella suoraa DE ja $\angle ABC \cong \angle FDE$.

H12 Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

Lisäksi Hilbertin aksiomiin kuuluu kolmioiden yhtenevyydelle *SKS*-sääntö:

H13 Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\angle A \cong \angle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Eukleides määritti kaiken kaikkiaan viisi aksiomaa, joista yksi oli paralleeliaksioma, jonka myös Hilbert piti aksiomissaan mukana muotoillen sen hieman eri tavalla yhdensuuntaisuuden avulla. Yhdensuuntaiset suorat eivät leikkaa toisiaan, eikä niille siten ole yhteisiä pisteitä.

PA Olkoon l suora ja P piste, joka ei ole suoralla l . Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi suora m , joka kulkee pisteen P kautta ja joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa.

Nämä esitellyt aksiomat todeksi oletettuina perustavat euklidisen ta-
sogeometrian, johon entis- ja nykyaikojen koulumatematiikan geometria perustuu. Eukleideen paralleeliaksioman paikkansapitävyys oli niin kritisoitu, että Hilbert paranteli koko Eukleideen aksiomajärjestelmää ja nykyisin Hilbertin aksiomat ovatkin euklidisen geometrian perustana. Lopulta päädyttiin geometrian malleihin, joissa paralleeliaksiomaa ei pidettykään totena. [4], [5], [8]

Luku 3

Pallogeometrian peruskäsitteet

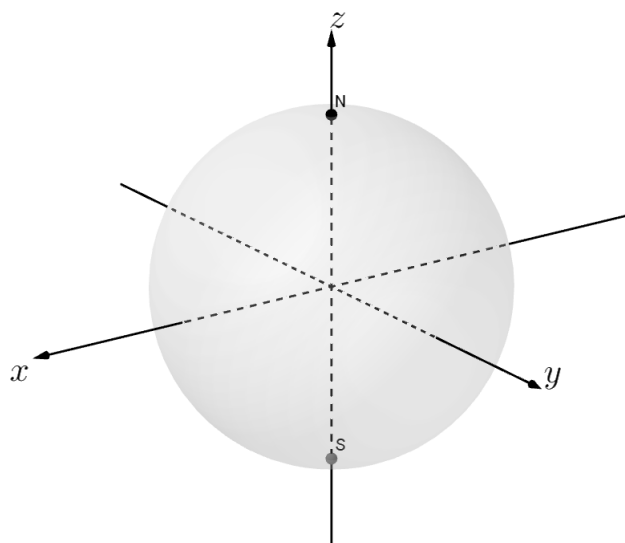
Aksiomaattinen järjestelmä oli pitkään ainoa tapa ajatella ja opettaa geometriaa, ja kaikki rakennettiin todeksi uskottujen aksioomien varaan. Jo yhden aksiooman poisjättäminen muuttaa saadun geometrian mallin ominaisuuksia ja mahdollisuuksia. Termistä suora tulee ensimmäisenä mieleen euklidisen tason suora, joka on yksikäsitteinen kahden pisteen määrittämänä. Suora määritellään siten, että se on lyhin reitti pisteestä toiseen. Pallo poikkeaa valtavasti euklidisestä tasosta pintana. Minkälainen suora on pallon pinnalla? Päteekö paralleeliaksioma tai muut euklidisen geometrian ominaisuudet epäeuklidisen avaruuden suoralle? Tässä luvussa tarkastellaan pallon määrittämän avaruuden ominaisuuksia. Tutkittavana joukkona on nimenomaan vain pallo ja sen pinta.

3.1 Pallo

Määritelmä 3.1. Pallo on niiden avaruuden \mathbb{R}^3 pisteiden joukko, joiden etäisyys r valitusta kiinteästä pisteestä O on vakio.

Huomautus 3.2. Pistettä O kutsutaan pallon *keskipisteeksi* ja etäisyyttä r pallon *säteeksi*, $r \in \mathbb{R}$.

Pallo voidaan siis määrittää yksikäsitteisesti silloin, kun tiedetään sen säde ja keskipiste. Tässä työssä keskitytään tutkimaan palloa, jonka säde on 1, siis $r = 1$, ja jonka keskipiste on avaruuden \mathbb{R}^3 origo, eli piste $(0, 0, 0)$. Tällaista palloa kutsutaan nimellä *yksikköpallo*. Merkitään yksikköpalloa jatkossa symbolilla S^2 . Yksikköpallon yhtälö avaruuden \mathbb{R}^3 karteesisissa koordinaateissa (x, y, z) on $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, missä $x, y, z \in \mathbb{R}$. Se leikkaa positiiviset x -, y - ja z -akselit vastaavassa järjestyksessä pisteissä $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ja



Kuva 3.1: Pohjois- ja etelänavat ovat z -akselin ja pallon leikkauspisteet, ja toistensa antipodit.

$(0, 0, 1)$. Positiivisen z -akselin leikkauspistettä kutsutaan pallon *pohjoisnavaksi* ja vastaavasti negatiivisen z -akselin ja pallon leikkauspistettä kutsutaan pallon *etelänavaksi* (kuva 3.1). Nämä pisteet ovat toistensa *antipodeja*. Tässä työssä termillä *pallo* tarkoitetaan vain määritelmän 3.1 mukaisen yksikkökuulan (eli joukon $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$) pintaa.

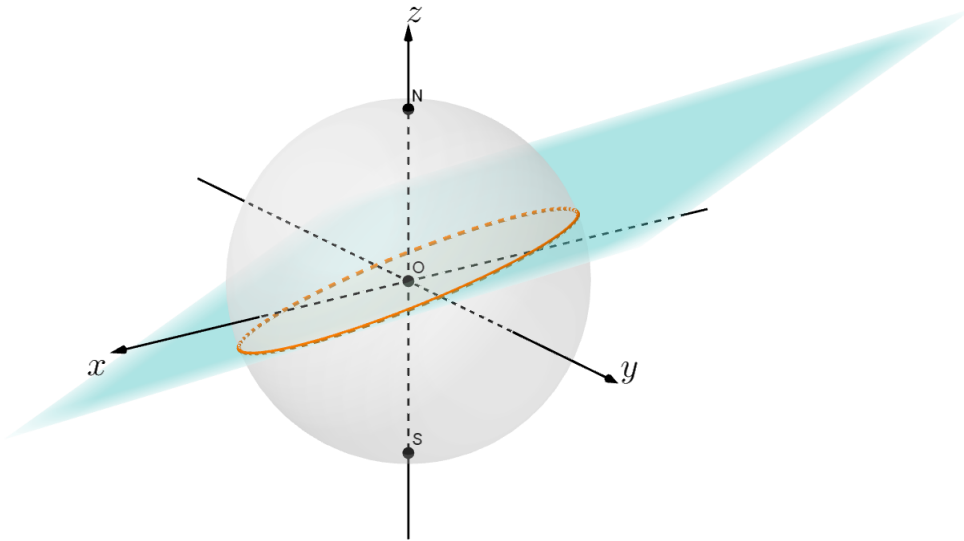
Määritelmä 3.3. Pallon S^2 pisteen $(x, y, z) \in S^2, x, y, z \in \mathbb{R}$ antipodi on piste $-(x, y, z) \in S^2$ eli $(-x, -y, -z)$. Pallon pisteet $(0, 0, 1)$ ja $(0, 0, -1)$ ovat toistensa antipodeja ja nimiltään vastaavasti pohjoisnava ja etelänava.

Kiinnitetään pallo (x, y, z) -koordinaatteihin siten, että pohjoisnava ja etelänava pysyvät aina määritelmän 3.3 mukaisina.

Huomautus 3.4. Antipodien kohtisuora etäisyys toisistaan (pallon läpi) on aina yhtä suuri kuin pallon halkaisija. Antipodien yhdysjana on pallon halkaisija.

3.1.1 Isoympyrä pallon pinnalla

Kun pallo lävistetään tasolla, joka kulkee pallon keskipisteen kautta, muodostuu pallon ja tason leikkauksesta tasolle ympyrä. Tämä tason ympyrä



Kuva 3.2: Isoympyrä on pallon ja sen keskipisteen kautta kulkevan tason leikkausjoukko.

muodostaa vastaavasti kuvion myös pallon pinnalle, ja sitä kutsutaan nimellä isoympyrä (kuva 3.2). Vastaavasti, jos taso ei kulje pallon keskipisteen kautta, on kyseessä pikkuympyrä.

Määritelmä 3.5. Isoympyrä on pallon ja sen keskipisteen kautta kulkevan tason leikkausjoukko.

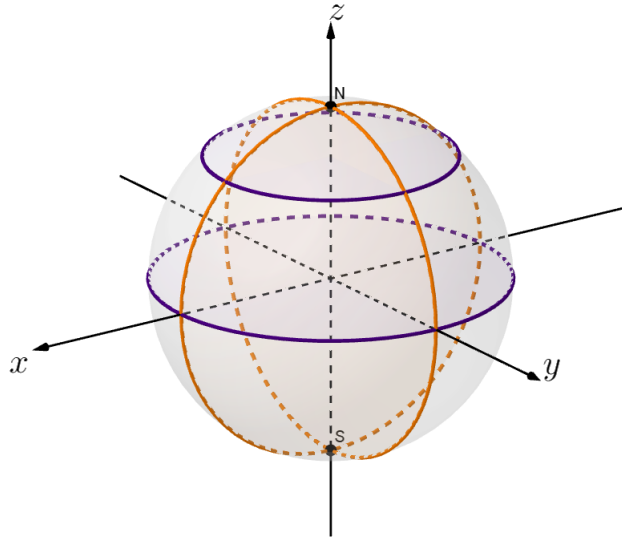
Huomautus 3.6. Isoympyrän säde on yhtä suuri kuin pallon säde.

Määritelmä 3.7. Isoympyrä, joka kulkee pallon pohjoisnavan kautta, on *pituuspiiri*. Kaikilla pallon pituuspiireillä on yhteinen halkaisija, joka kulkee pohjoisnavalta etelänavalle. Tätä halkaisijaa vastaan kohtisuorassa olevat pallon ja tason leikkausjoukot ovat pallon *leveyspiirejä*.

Huomautus 3.8. Vain yksi pallon leveyspiireistä on isoympyrä, ja sitä kutsutaan nimellä *päiväntasaaja*. Muut leveyspiirit ovat pikkuympyröitä (kuva 3.3).

Päiväntasaaja on siis isoympyrä, joka on muodostunut, kun (x, y) -taso leikkaa pinnan S^2 . Tällöin jokainen päiväntasaajan piste on muotoa $(x_0, y_0, 0)$ siten, että edelleen pätee $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, siis $x_0^2 + y_0^2 = 1$, missä $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Millainen on suora pallon pinnalla tai mitä ominaisuuksia suoralla on, jos se ei ole euklidisessä tasossa? Aksiomien mukaan euklidisen tason kaksi eri



Kuva 3.3: Pallon leveyspiireistä (kuvassa violetilla) vain päiväntasaaja on isoympyrä ja muut ovat pikkuympyröitä, kun taas jokainen pituuspiiri (kuvassa oranssilla) on isoympyrä.

suoraa voivat leikata toisensa korkeintaan yhdessä pisteessä, ja ne leikkaavat toisensa vain, jos ne eivät ole yhdensuuntaisia. Tarkastellaan seuraavaksi suoraa ja sen määritelmää pallon pinnalla.

Määritelmä 3.9. Suora l on isoympyrä pallolla S^2 .

Huomataan, että kaikki pallon eri suorat leikkaavat toisensa aina täsmälleen kahdessa eri pisteessä, sillä mitkä vain isoympyrät pallolla S^2 leikkaavat toisensa antipodipisteissä. Täten paralleeliaksioma ei päde pallolla, eikä pallolla ole yhdensuuntaisia suoria.

Lause 3.10. *Mitkä tahansa kaksi pallon pistettä, jotka eivät ole toistensa antipodeja, määrittävät aina täsmälleen yhden isoympyrän.*

Todistus. Olkoot pisteet P ja Q mitkä tahansa kaksi pallon pistettä siten, että ne eivät ole toistensa antipodeja. Pisteet P , Q ja O (avaruuden \mathbb{R}^3 origo) eivät siis ole samalla avaruuden \mathbb{R}^3 suoralla. Tällöin nämä kolme pistettä määrittävät yksikäsitteisen tason, ja minkä tahansa origon kautta kulkevan tason ja pallon leikkaus muodostaa yhden yksikäsitteisen isoympyrän. Kaksi pallon pinnan pistettä, jotka eivät ole toistensa antipodeja, määrittävät aina täsmälleen yhden suoran pallolla. \square

Jos pisteet P ja Q ovat toistensa antipodeja, määrittävät ne useita eri isoympyröitä (vertaa pituus- ja leveyspiirien määritelmään), sillä pallon halkaisijan ja origon sisältäviä tasoja on äärettömän monta.

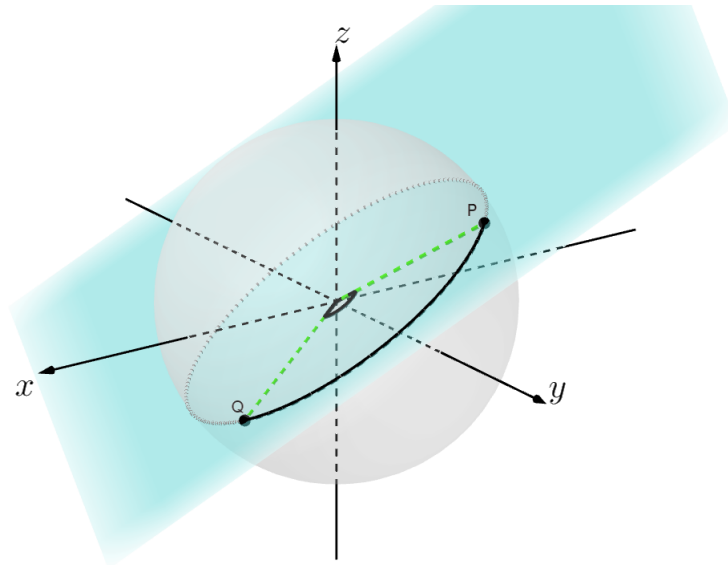
Ensimmäinen Hilbertin aksiooma ei sellaisenaan päde pallon pinnalla: jos pisteet ovat antipodipisteet on niiden määrittämiä isoympyröitä useita. Ensimmäinen aksiooma pätee siis vain, jos pisteet A ja B eivät ole antipodipisteet. Tämä ongelma voidaan korjata olettamalla antipodipisteet samoiksi, jolloin antipodit eivät aiheuta enää ongelmaa. Tosin tällöin pallo olisi vain puolikas pallo, ja muuttuisi siten kokonaan yksikköpallosta ympäristönä. Hilbertin toinen aksiooma pätee selvästi, sillä yhdellä isoympyrällä on aina piste ja sen antipodipiste. Myöskin kolmas aksiooma pätee, sillä esimerkiksi pisteet $(1, 0, 0)$ ja $(0, 1, 0)$ määrittävät yhden ainoan suoran: päiväntasaajan. Pisteet $(1, 0, 0)$ ja $(0, 1, 0)$ kuuluvat kyseiselle suoralle, mutta esimerkiksi piste $(0, 0, 1)$ ei kuulu päiväntasaajalle. Vastaavasti pisteet $(1, 0, 0)$ ja $(0, 0, 1)$, sekä pisteet $(0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$ määrittävät yhden suoran, jolle vastaavassa järjestyksessä pisteet $(0, 1, 0)$ ja $(1, 0, 0)$ eivät kuulu. Löydetään siis aina kolmas piste minkä vain pallon suoran ulkopuolelta siten, ettei piste kuulu suoralle.

Tarkastellaan seuraavaksi kulmia pallolla. Kahden eri euklidisen tason A ja B leikkauksena muodostuu euklidinen suora l . Tutkitaan tasossa A olevaa suoraa a , joka on kohtisuorassa suoraa l vastaan ja leikkaa suoran l pisteessä P . Olkoon nyt suora b tasossa B siten, että se leikkaa suoran l myös pisteessä P ja on kohtisuorassa suoraa l vastaan. Nyt suorien a ja b väliin muodostuu kulma, joka on tasojen A ja B välinen kulma. Tasojen A ja B välistä kulmaa sovelletaan myös keskuskulmassa. Pallon pisteet ovat avaruuden \mathbb{R}^3 pisteitä, ja näiden pisteiden keskuskulmalla tarkoitetaan pisteet origoon yhdistävien janojen välistä kulmaa tasossa, jonka nämä pisteet ja origo määrittävät.

Vastaavasti, kun puhutaan ympyröiden välisestä kulmasta, tarkoitetaan niiden leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välistä kulmaa tangenttien tasossa. Asiayhteydessä tarkennetaan, mistä neljästä muodostuvasta kulmasta on kulloinkin kyse.

Lause 3.11. *Olkoot P ja Q mitkä tahansa kaksi pallon S^2 pistettä. Pisteiden P ja Q välinen etäisyys pallon pintaa pitkin vastaa kaaren PQ keskuskulman $\angle POQ$ suuruutta siten, että $|PQ| = \angle POQ$.*

Todistus. Olkoot pisteet P ja Q pisteitä pallolla S^2 . Kaksi pistettä pallolla määrittävät aina jonkin isoympyrän (Lause 3.10). Tällöin ne ovat jonkin tason Π ja pallon S^2 leikkausjoukon pisteitä. Kun tarkastellaan tasoa Π , voidaan tutkia pallon keskipisteen (origon) O ja pisteiden P ja Q muodostamaa keskuskulmaa (kuva 3.4). Pisteiden P ja Q etäisyys isoympyrän kehää pitkin



Kuva 3.4: Pisteiden P ja Q välinen etäisyys määräytyy keskuskulman $\angle POQ$ mukaan.

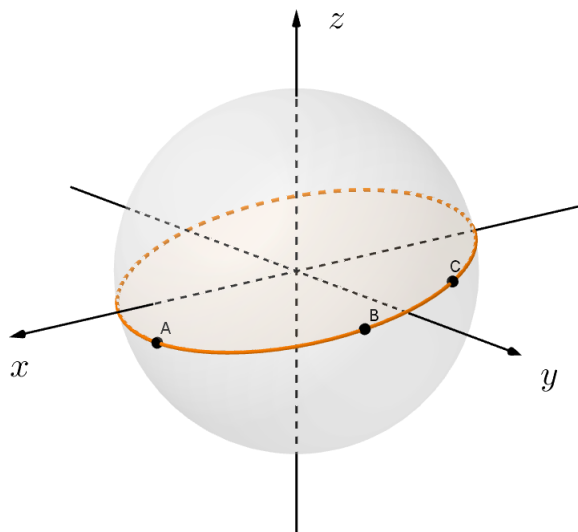
eli kaari PQ vastaa kulmaa $\angle POQ$. Tämä voidaan suoraan yleistää pallon pinnalle, sillä pisteiden P ja Q välinen kaari on pallon isoympyrällä, joka vastaa tason Π ympyrää.

Tiedetään siis ympyrälle, että sen keskuskulman $\angle POQ$ suuruuden suhde koko keskuskulmasta (2π), on ympyrän kaaren eli pallon janan pituuden $|PQ|$ suhde koko ympyrän kehän pituuteen $2\pi r$ [9]. Tästä saadaan edeltävän päättelyn nojalla $|PQ| = \frac{\angle POQ}{2\pi} \cdot 2\pi = \angle POQ$. \square

Tutkittaessa kahta mielivaltaista pallon pistettä P ja Q huomataan, ettei niiden määräämän isoympyrän polku PQ ole yksikäsitteinen pallolla. Pisteestä P voidaan kulkea kahta eri reittiä isoympyrää pitkin pisteeseen Q . Pisteet P ja Q ovat toistensa antipodeja, jos ja vain jos molemmat reitit isoympyrää pitkin pisteestä toiseen ovat yhtä pitkiä (tällöin mahdollisia isoympyröitäkin on useita). Jos taas pisteet P ja Q eivät ole toistensa antipodeja, on toinen reiteistä toista pidempi.

Määritelmä 3.12. Pallon pisteiden A ja B välinen jana AB on pisteiden A ja B kautta kulkevann isoympyrän osista lyhyempi.

Jatkossa siis termillä *jana* tarkoitetaan aina kahden pisteen määrittämän isoympyrän reiteistä lyhyempää. Janat ovat kongruentit kun ne ovat yhtä pitkät.



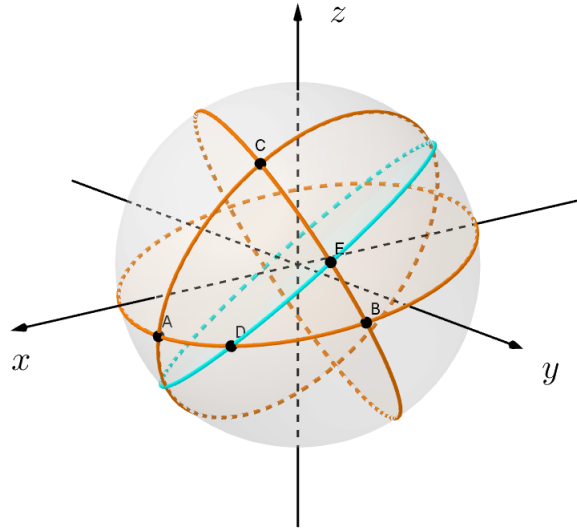
Kuva 3.5: Hilbertin kuudennen aksiooman vaihtoehdot ovat kaikki kolme yhtä aikaa voimassa.

Esimerkki 3.13. Olkoot pisteet P ja Q pallolla S^2 siten, että $P = (1, 0, 0)$ ja $Q = (0, 1, 0)$. Tiedetään, että janojen PO ja QO muodostaman keskuskulman $\angle POQ$ suuruus on $\frac{\pi}{2}$. Lauseen 3.11 nojalla saadaan nyt $|PQ| = \frac{\pi}{2}$.

Jana nousee käsitteenä tärkeään rooliin, kun palloa verrataan Hilbertin aksioomiin. Väissäolo on ongelmallinen käsite: Hilbertin aksioomat H4 ja H5 pätevät pallon pisteille, mutta kuudes aksiooma ei olekaan täsmällinen. Reitti pisteestä toiseen ei ole yksikäsitteinen isoympyrää pitkin, joten kuudennen aksiooman vaihtoehdot ovat kaikki yhtä aikaa voimassa pallon pisteille, jotka ovat samalla suoralla, eli samalla isoympyrällä. Kun tarkastellaan kuvan 3.5 isoympyrää, on jokainen piste kahden muun pisteen välissä, kun kuljetaan pisteestä toiseen sopivan suunnan kautta. Kun pisteiden väissäolo määritellään pallon pisteille janan avulla, saadaan aksioomat paikallisesti päteviksi myös pallolla. Väissäolon käsite ei kuitenkaan ole pallolla järkevä ja hyödyllinen käsite.

Määritelmä 3.14. Olkoot pisteet A , B ja C pallon S^2 pisteitä, jotka eivät ole toistensa antipodeja. Piste B on pisteiden A ja C välissä, jos piste B kuuluu janalle AC . Tällöin merkitään $A * B * C$.

Edellisen määritelmän nojalla tiedetään aina yksikäsitteisesti pisteiden järjestys. Näin ollen Hilbertin kuudes aksiooma saadaan paikallisesti päte-



Kuva 3.6: Hilbertin seitsemännen aksiooman mukainen tilanne: pisteet A , B ja C ovat eri pisteitä eri suorilta siten, ettei yksikään ole suoralla l (kuvassa turkoosi isoympyrä). Suora l leikkaa janat AB ja BC siten, että leikkauspisteille D ja E pätee $A * D * B$ ja $B * E * C$.

mään pallolla sellaisenaan. Välissäolon käsite ei kuitenkaan ole pallolla järkevä ja hyödyllinen käsite. Jos edellisen määritelmän pisteet A ja C olisivat toistensa antipodeja, olisivat kaikki pallon pisteet niiden välissä. Jos B on mikä tahansa piste, niin aina on olemassa pisteiden A ja B määrittämä isoympyrä, jolle myös molempien antipodipisteet kuuluvat. Myöskin Hilbertin seitsemäs aksiooma pätee pallogeometriassa (kuva 3.6). Yksi isoympyrä jakaa pallon kahteen alueeseen, jolloin pallon pisteitä voidaan verrata isoympyrään nähden ja kertoa kummalla puolella isoympyrää piste on.

Kahdeksas Hilbertin aksioomista ei ole pallogeometriassa relevantti, sillä pallon suorien eli isoympyröiden pituus on äärellinen. Puolisuora määritellään välissäolon avulla, ja kuten edellä todettiin, ei välissäoloa voida järkevästi määritellä pallolla. Oleellista on kuitenkin se, että minkä vain pallojanan AB kanssa pystytään määrittämään yhtä pitkä jana PR pisteiden P ja Q määrittämältä isoympyrältä (vertaa pallon pisteiden välisen etäisyyden määritelmä 3.11). Kuten aiemmin todettiin, janat ovat kongruentit, kun ne ovat yhtä pitkiä, jolloin selvästi siis myös janojen kongruenssiin liittyvät aksioomat H9 ja H10 pätevät pallogeometriassa.

Tarkastellaan seuraavaksi pallon kulmaa ja sen suuruuden määrittämistä. Isoympyröiden väliin muodostuu kulma, joka on isoympyröille niiden leik-

kauspisteeseen piirrettyjen tangettien välinen kulma.

Määritelmä 3.15. Olkoot pisteet A , B ja C pallon pisteitä, jotka eivät ole toistensa antipodeja eivätkä ne ole samalla suoralla. Olkoon isoympyrä c pisteiden A ja B määrittämä ja isoympyrä d pisteiden A ja C määrittämä. Isoympyröiden väliin muodostuu kulma BAC , jonka kärkipiste on A . Pallokulman suuruus on pisteeseen A piirrettyjen isoympyröiden c ja d tangenttien välinen kulma.

Isoympyröille voidaan muodostaa tangentit niiden leikkauspisteeseen. Tangentit kuuluvat tasoon, jonka leikkausjoukosta pallon kanssa isoympyrät muodustuvat. Tangentit muodostavat myös keskenään tason, johon molemmat kuuluvat ja joka on kohtisuorassa isoympyröiden tasoja vastaan.

Hilbertin yhdestoista aksiooma pätee pallogeometriassa, sillä kulman suuruus ja määrittäminen palautuvat suoraan euklidiseen tasoon edeltävällä päätteilyllä. Kulmat ovat aina yhtä suuret, jos kulman määrittämien isoympyröiden tangenttien väliset kulmat ovat yhtä suuret. Kulmat ovat kongruentit, jos ne ovat yhtä suuret. Selvästi kulmien yhtenevyys on myös ekvivalenssirelaatio pallolla.

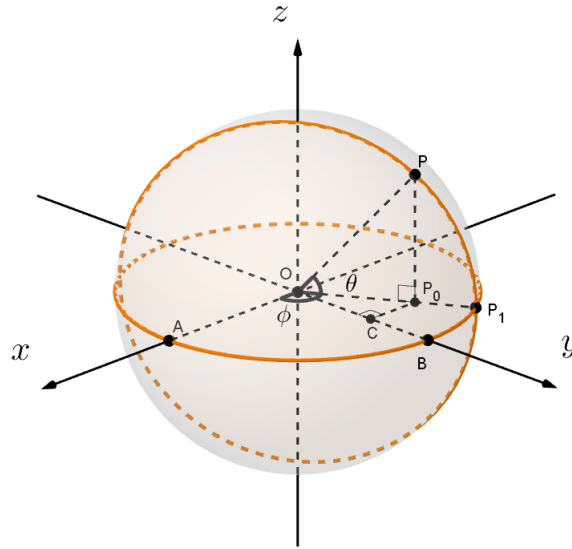
3.1.2 Pallokoordinaatit

Tutustutaan seuraavaksi pallokoordinaatteihin. Ne ovat samankaltaiset yksikköympyrän karteesisen koordinaattien $(x, y) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ja napa-koordinaattien (r, α) kanssa. Määritetään ensin päiväntasaajan positiiviseksi suunnaksi liikkuminen pisteeltä A pisteelle B , kun $A = (1, 0, 0)$ ja $B = (0, 1, 0)$ (kuva 3.7).

Olkoon nyt P_1 mikä vain piste päiväntasaajalla ja ϕ keskuskulman $\angle AOP_1$ suuruus ($0 \leq \phi < 2\pi$) positiiviseen suuntaan päiväntasaajalla. Nyt pisteelle P_1 saadaan koordinaatit $P_1 = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, kun tarkastellaan (x, y) -tason ympyräkoordinaatteja. Olkoon sitten P piste pohjoisnavan ja pisteen P_1 määrittämällä isoympyrällä siten, että se ei ole pallon pohjois- eikä etelänapa ja että se ei sijaitse päiväntasaajalla. Määritellään keskuskulman $\angle P_1OP$ suuruudeksi nyt θ siten, että $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Pisteen P koordinaatit saadaan janojen OC , CP_0 ja P_0P avulla. Jana CP_0 kertoo x -koordinaatin, jana OC kertoo y -koordinaatin ja jana P_0P kertoo z -koordinaatin. Jana P_0P on selvästi kulman θ määrittämänä $P_0P = \sin \theta$, siis $z = \sin \theta$. Vastaavasti jana OP_0 on $OP_0 = \cos \theta$ kulman θ määrittämänä. Tämän avulla saadaan x - ja y -koordinaatit. Janalle OC eli y -koordinaatille saadaan, että

$$\frac{OC}{OP_0} = \frac{y}{\cos \theta} = \sin \phi,$$



Kuva 3.7: Pallokoordinaattien määrittäminen.

eli $y = \cos \theta \sin \phi$.

Vastaavasti janalle CP_0 eli x -koordinaatille saadaan, että

$$\frac{CP_0}{OP_0} = \frac{x}{\cos \theta} = \cos \phi,$$

eli $x = \cos \theta \cos \phi$.

Nämä yhdistämällä saadaan koordinaatit

$$P = (x, y, z) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Määritelmä 3.16. Olkoon P piste pallolla S^2 . Piste P pallokoordinaatit ovat kulmat $\phi \in [0, 2\pi[$ ja $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kun sen karteesiset koordinaatit ovat $P = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta)$.

Määritelmän 3.16 mukaiset pallokoordinaatit voidaan ilmoittaa lukuparina (ϕ, θ) , joka jo pelkästään määrittelee yksikäsitteisesti, mistä pallon S^2 pisteestä on kyse. Tämä tutkielma keskittyy ainoastaan yksikköpalloon, jolloin pallon säteen oletetaan olevan $r = 1$. Pallokoordinaatit voidaan yleistää kaikille palloille lisäämällä pallokoordinaatteihin kolmannen termin, joka kertoo pallon säteen r . Esitysmuoto (r, ϕ, θ) kertoo siis lisäksi myös pallon säteen. Tämä antaa siis jokaisen avaruuden \mathbb{R}^3 pisteen. Pallokoordinaatteja (r, ϕ, θ) vastaava karteesisissa koordinaateissa on

$$(r, \phi, \theta) = (r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, r \sin \theta).$$

Maapallon pituus- ja leveyspiirit määritellään vastaavasti käyttämällä näitä kulmia ja puhumalla siten esimerkiksi *pohjoisesta leveydestä*. Tarkastellaan seuraavaksi pallon pituus- ja leveysasteita. Olkoon

$$P = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta)$$

pallon piste, missä $\phi \in [0, 2\pi[$ ja $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Kulmaa ϕ kutsutaan pisteen P pituusasteeksi ja kulmaa θ vastaavasti leveysasteeksi. Päiväntasaaja on ”nolla astetta leveyttä”. Leveysaste määrittelee, kuinka kaukana leveyspiiri on päiväntasaajasta. Jos maapallon piste on siis pohjoisella pallonpuolikkaalla, puhutaan pohjoisesta leveydestä päiväntasaajalta alkaen pohjoiseen päin, ja vastaavasti, jos piste on eteläisellä pallonpuolikkaalla, puhutaan eteläisestä leveydestä alkaen päiväntasaajalta kohti etelänapaa.

Vastaavasti pituusaste määrittelee, miten kaukana pituuspiiri on ”nolla-pituuspiiristä”, eli nollameridiaanista. Maapallon nollameridiaani on sovittu kulkemaan Iso-Britanniassa Greenwichin halki, minkä vuoksi sitä nimitetään myös Greenwichin meridiaaniksi. Aikaerot ja päivämääräraja kulkevat pituusasteiden mukaan. Karttasovelluksissa kulman suuruudesta käytetään yksikkönä asteita, mutta tässä työssä kaikki kulmien suuruudet ovat radiaaneina.

Esimerkki 3.17. Olkoon piste $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Pistein koordinaatit ovat muotoa $P = (\cos \phi \cdot \cos \theta, \sin \phi \cdot \cos \theta, \sin \theta)$. Tällöin on oltava

$$\begin{cases} \cos \phi \cdot \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \phi \cdot \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = 0. \end{cases}$$

Viimeisestä yhtälöstä saadaan, että $\theta = 0$. Tällöin $\cos \theta = 1$. Nyt saadaan

$$\begin{cases} \cos \phi = -\frac{1}{2} \\ \sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

jolloin $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Koordinaateiksi saadaan siten $P = (\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}, 0)$, ja piste sijaitsee pallolla pituusasteella $\frac{2\pi}{3}$ ja leveysasteella 0. Näin ollen pisteen pallokoordinaatit ovat $(\phi, \theta) = (\frac{2\pi}{3}, 0)$.

Luku 4

Pallogeometrian ominaisuuksia

4.1 Isometriat

Isometria on kuvaus, joka säilyttää pisteiden väliset etäisyydet. Jos siis $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on isometrinen kuvaus, pätee tällöin $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ kaikille pisteille $x, y \in \mathbb{R}^3$. Käytännössä avaruuden \mathbb{R}^3 isometria siis kuvaa yksikköpallon toiseksi yksikköpalloksi. Isometria saattaa kuitenkin ”pyöräyttää pallon suunnan toiseksi” vaihtaen esimerkiksi akselien suuntaa tai paikkaa.

Jos avaruuden \mathbb{R}^3 isometria kuvaa origon origoksi eli sille pätee $f(0) = 0$, niin tällöin isometria voidaan esittää kuvauksena $f(x) = Ax$, missä matriisi A on ortogonaalinen. Ortogonaaliselle matriisille A pätee $A^T A = I = A A^T$ ja lisäksi sen determinantti on $\det A = \pm 1$. Kierto on kuvaus, jonka kuvausmatriisin A determinantti on $\det A = 1$. Vastaavasti heijastusmatriisille B pätee $\det B = -1$. Isometriset kuvaukset $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = Ax$, joiden kuvausmatriisit ovat ortogonaalisia, ovat pallon isometrioita. Tarkastellaan isometrioita seuraavaksi pallolla: kuvaus tehdään siis pallon pisteille, eikä varsinaisesti pallolle tai kuulalle, joka on avaruudessa \mathbb{R}^3 . Pallon isometrioita hyödynnetään myöhempien lauseiden todistuksissa.

Tarkastellaan kolmea pallon kiertoa, jotka kukin tehdään eri akselien suhteen. Kun kiinnitetään x -akseli ja kierretään pallon pisteitä sen suhteen, (y, z) -taso kääntyy mukana. Sovitaan positiiviseksi kierron suunnaksi kierto, jossa y -akseli kiertyy kohti z -akselia.

Määritelmä 4.1. Kierto x -akselin suhteen kulman α verran, $\alpha \in [0, 2\pi[$, voidaan esittää matriisikuvauksena: $R(X, \alpha) : S^2 \rightarrow S^2$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$$

missä $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$.

Vastaavasti kierrossa y -akselin suhteen y -akseli kiinnitetään ja (x, z) -tasoa kierretään. Valitaan positiiviseksi suunnaksi kierto, jossa z -akseli kiertyy kohti x -akselia.

Määritelmä 4.2. Kierto y -akselin suhteen kulman β verran, $\beta \in [0, 2\pi[$, voidaan esittää myös matriisikuvauksena: $R(Y, \beta) : S^2 \rightarrow S^2$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$$

$$\text{missä nyt } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Edelleen myös z -akselin suhteen kierretään samaan tapaan kiinnittämällä z -akseli ja kiertämällä sitten tasoa (x, y) . Olkoon nyt kierto positiiviseen suuntaan x -akselin kierto kohti y -akselia.

Määritelmä 4.3. Kierto z -akselin suhteen kulman γ verran, $\gamma \in [0, 2\pi[$, voidaan esittää matriisikuvauksena: $R(Z, \gamma) : S^2 \rightarrow S^2$,

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$$

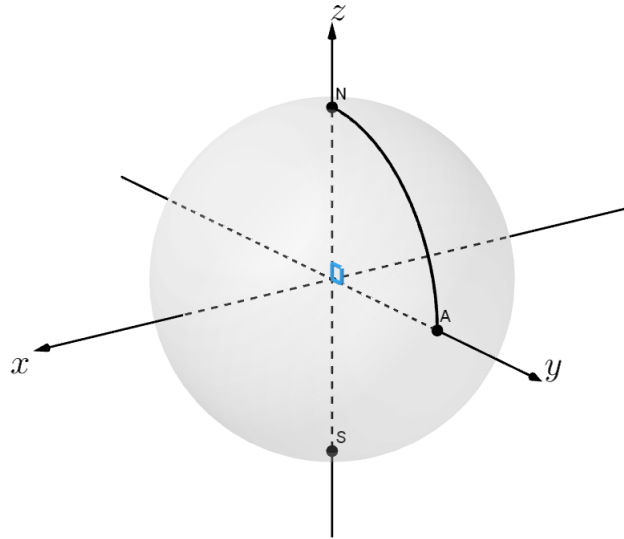
$$\text{missä } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Yksinkertaisimmissa kierroissa akselit kuvautuvat toisikseen. Kun esimerkiksi x -akselin suhteen kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran, positiivinen y -akseli kuvautuu positiivisen z -akselin paikalle ja positiivinen z -akseli kuvautuu negatiivisen y -akselin paikalle. Tutkitaan positiivista y -akselia (tällöin se tarkoittaa pallon pinnalla pistettä $(0, 1, 0)$) kierrossa x -akselin suhteen kulman $\frac{\pi}{2}$ verran: $R(X, \alpha) : S^2 \rightarrow S^2$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$$

Nyt siis $\mathbf{x} = (0, 1, 0)$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ja

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Kuva 4.1: Palloa kierretään x -akselin suhteen kulman $\frac{\pi}{2}$ verran, jolloin piste $A = (0, 1, 0)$ kuvautuu pisteeksi $N = (0, 0, 1)$. Kierron myötä positiivinen y -akseli siirtyy positiivisen z -akselin paikalle.

Nyt siis piste $(0, 1, 0)$ kuvautuu pisteeksi $(0, 0, 1)$, eli positiivinen y -akseli kierretään positiivisen z -akselin paikalle (kuva 4.1).

Lause 4.4. *Edellä esitellyille määritelmien 4.1-4.3 mukaisille kiertokuvauksille $R : S^2 \rightarrow S^2$, x -, y - ja z -akselien suhteen pätee*

$$\begin{aligned} R(X, -\alpha) &= R(X, \alpha)^{-1} \\ R(Y, -\beta) &= R(Y, \beta)^{-1} \\ R(Z, -\gamma) &= R(Z, \gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Todistus. Riittää, että lause todistetaan kierrolle x -akselin suhteen, sillä todistus on vastaanselvä myös akselien y ja z kiertojen suhteen. Jos yhdistetty kuvaus $R(X, -\alpha)R(X, \alpha)$ on identtinen kuvaus, on tällöin $R(X, -\alpha) = R(X, \alpha)^{-1}$. Tutkitaan siis päteekö yhdistetylle kuvaukselle $R(X, -\alpha)R(X, \alpha)$: $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, että $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned}
R(X, -\alpha)R(X, \alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ 0 & \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & -\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Yhdistetty kuvaus on identtinen kuvaus, jolloin lause pätee. \square

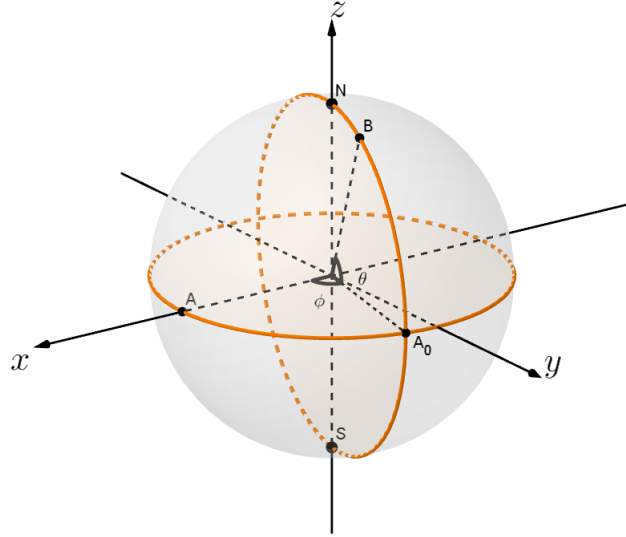
Lause 4.5. *Mikä tahansa pallon kierto on esitettävissä edellä esiteltyjen x -, y - ja z -akselien suhteen tehtyjen kiertojen yhdistettynä kuvauksena.*

Todistus. Tutkitaan ensin pisteen $A = (1, 0, 0)$ kiertoa R_0 mihin tahansa pisteeseen $B = (\cos \phi \cdot \cos \theta, \sin \phi \cdot \cos \theta, \sin \theta) \in S^2$, missä $\phi \in [0, 2\pi[$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Kierretään piste A ensin (x, y) -tasossa kulman ϕ verran siten, että kierretty piste A_0 on samalla isoympyrällä pohjoisnavan ja pisteen B kanssa (kuva 4.2). Kyseessä on siis kierto $R(Z, \phi)$. Nyt pisteen koordinaatit ovat $A_0 = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$.

Tämän jälkeen kierretään pistettä A_0 kulman θ verran kohti pistettä B pitkin suoraa, joka kulkee pisteiden B ja A_0 sekä pohjoisnavan kautta. Tämä kierto ei kuitenkaan ole alkuperäisten akselien x -, y - eikä z -suhteen, vaan ensimmäisellä kierrolla siirretyn y -akselin suhteen. Merkitään tätä kiertoa symbolilla $R(Y', \theta)$. Tämä kierto voidaan esittää kombinaationa, jossa on ensin palauttava kierto $R(Z, -\phi) = R(Z, \phi)^{-1}$, sitten kierto $R(Y, -\theta)$ ja vielä palauttamalla kierrolla $R(Z, \phi)$. Kyseessä on yhdistetty kuvaus pisteestä A_0 pisteeseen B :

$$R(Z, \phi)R(Y, \theta)R(Z, \phi)^{-1}.$$

Kun tähän yhdistetään vielä alkuun kierto pisteeltä A pisteelle A_0 , saadaan kuvaus



Kuva 4.2: Piste A on ensin kierretty pisteeseen A_0 ja sitten pisteeseen B .

$$\begin{aligned}
 R_0 &= R(Z, \phi)R(Y, \theta)R(Z, \phi)^{-1}R(Z, \phi) \\
 &= R(Z, \phi)R(Y, \theta) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi & -\sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Kun piste $A = (1, 0, 0)$ nyt kierretään edellä esitetyllä yhdistetyllä kuvauksella, saadaan

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi & -\sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix},$$

mikä on täsmälleen haluttu piste $B = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta)$.

Todistus voidaan yleistää minkä vain pinnan S^2 pisteen C kiertoa pisteeseen B vastaavalla päättelyllä: tehdään kierto pisteen $A = (1, 0, 0)$ kautta, siis kiertämällä piste C ensin pisteeseen A ja siitä edelleen pisteeseen B . \square

Pisteen $P = (x, y, z)$ heijastus päiväntasaajan määrittämän tason (eli tason $z = 0$) suhteen tuottaa pisteen $P' = (x, y, -z)$. Piste siis heijastetaan vaakatasossa olevan tason suhteen kohtisuorasti samalle etäisyydelle tasosta sen toiselle puolelle. Heijastus on kuvaus yleisen tason Π määrittämänä $R(\Pi) : S^2 \rightarrow S^2$,

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x},$$

missä $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ja \mathbf{A} on heijastustason määrittämä matriisi.

Lause 4.6. Tason Π suhteen heijastettaessa heijastuskuvauksen matriisi \mathbf{A} on muotoa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{bmatrix},$$

kun tason Π yhtälö on $ax + by + cz = 0$ siten, että $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ja $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Todistus. Origin sisältävän tason, jonka suhteen heijastus tehdään, yhtälö on muotoa $ax + by + cz = 0$ (a, b ja c on valittu siten, että $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, eli tason määrittävän vektorin $\mathbf{a} = (a, b, c)$ pituus on 1). Tason yhtälö voidaan nyt esittää muodossa

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0,$$

missä \mathbf{x} on vektori (x, y, z) .

Olkoon r heijastus tason Π suhteen pallolla S^2 . Pisteen \mathbf{x} heijastus on piste $r(\mathbf{x})$. Jana, joka yhdistää pisteet \mathbf{x} ja $r(\mathbf{x})$, on yhdensuuntainen tason Π määrittävän vektorin \mathbf{a} kanssa. Tällöin $r(\mathbf{x})$ voidaan esittää muodossa

$$r(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + t\mathbf{a},$$

jollakin parametrilla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Koska piste \mathbf{x} on pallon pinnan piste, pätee sen pituudelle

$$(\mathbf{x} + t\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} + t\mathbf{a}) = 1,$$

joka on

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2t(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) + t^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 1.$$

Koska $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$ ja $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$, saadaan

$$2t(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) + t^2 = 0.$$

Jos nyt olisi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$, niin silloin piste \mathbf{x} olisi tasossa Π , jolloin olisi $\mathbf{x} = r(\mathbf{x})$ ja $t = 0$. Jos taas $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \neq 0$, yhtälöstä $2t\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} + t^2 = 0$ saataisiin, että $2\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} + t = 0$, siis $2\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = -t$, koska $t \neq 0$. Tällöin

$$r(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}.$$

Esitetään $r(\mathbf{x})$ koordinaattien (x, y, z) avulla, jotta saadaan ratkaistua heijastuskuvauksen matriisi. Kun $\mathbf{a} = (a, b, c)$, saadaan

$$\begin{aligned} r(x, y, z) &= (x, y, z) - 2(ax + by + cz)(a, b, c) \\ &= (x, y, z) - (2a(ax + by + cz), 2b(ax + by + cz), 2c(ax + by + cz)) \\ &= (x - 2a(ax + by + cz), y - 2b(ax + by + cz), z - 2c(ax + by + cz)) \\ &= (x - 2a^2x - 2aby - 2acz, -2bax + y - 2b^2y - 2bcz, \\ &\quad -2cax - 2cbz + z - 2c^2z) \\ &= ((1 - 2a^2)x - (2ab)y - (2ac)z, -(2ba)x + (1 - 2b^2)y - (2bc)z, \\ &\quad (-2ca)x - (2cb)y + (1 - 2c^2)z). \end{aligned}$$

Nyt kuvaus $r(x, y, z)$ voidaan esittää matriisina

$$r(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 - 2a^2 & -2ba & -2ca \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2cb \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{bmatrix}.$$

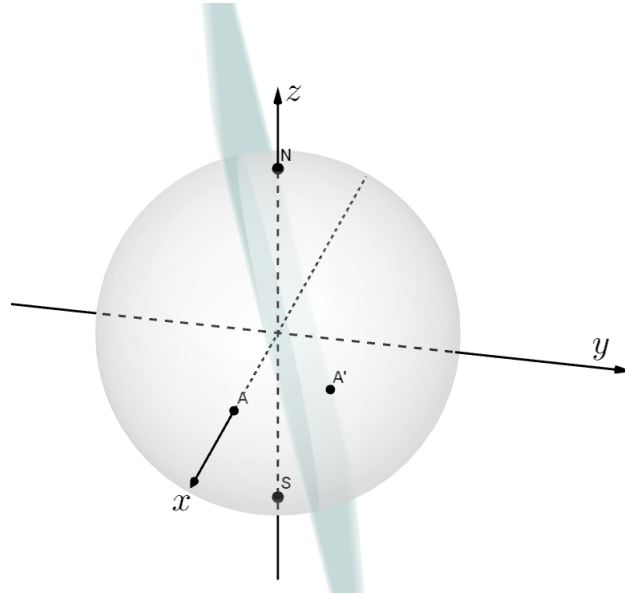
Saatu matriisi on täsmälleen sama kuin lauseessa esitetty. \square

Aiemmin todettiin, että päiväntasaajan määrittämän tason eli tason $z = 0$ suhteen heijastaminen heijastaa pisteen (x, y, z) pisteeksi $(x, y, -z)$. Tarkastellaan heijastusta vielä edellisen lauseen pohjalta. Tason yhtälö on $z = 0$, joten $a = 0 = b$ ja $c = 1$. Nyt saadaan matriisiksi \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriisi \mathbf{A} on siis kuvaus $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, joka kuvaa pisteen (x, y, z) pisteeksi $(x, y, -z)$, juuri kuten aiemmin pääteltiin.

Esimerkki 4.7. Olkoon tason Π yhtälö $-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 0$. Nyt tason määrävä yksikkövektori \mathbf{a} on $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Tämän tason Π mukaan muodostettu



Kuva 4.3: Piste A on heijastettu tason Π suhteen. Koordinaatistoa on hieman käännetty totutusta suunnasta, jotta heijastus olisi helpompi havaita.

heijastuskuvauksen matriisi on

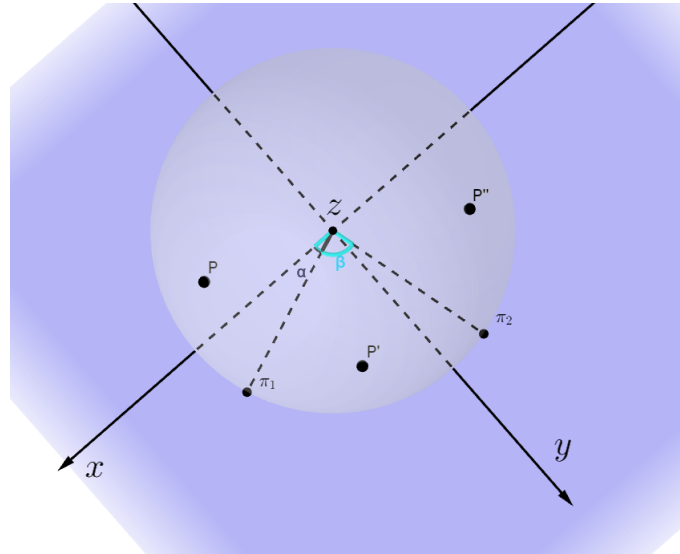
$$\begin{aligned}
 r(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 & -2\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2}} & -2\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 & -2\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}} & -2\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Tämä heijastus kuvaa esimerkiksi pisteen $A = (1, 0, 0)$ seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

siis piste $A = (1, 0, 0)$ kuvautuu pisteeksi $A' = (0, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$, kuten nähdään kuvasta 4.3.

Tarkastellaan nyt lauseita, jotka yhdistävät kierrot ja heijastukset toisiinsa: heijastukset saadaan myös kiertoina ja kierrot heijastuksina. Seuraava



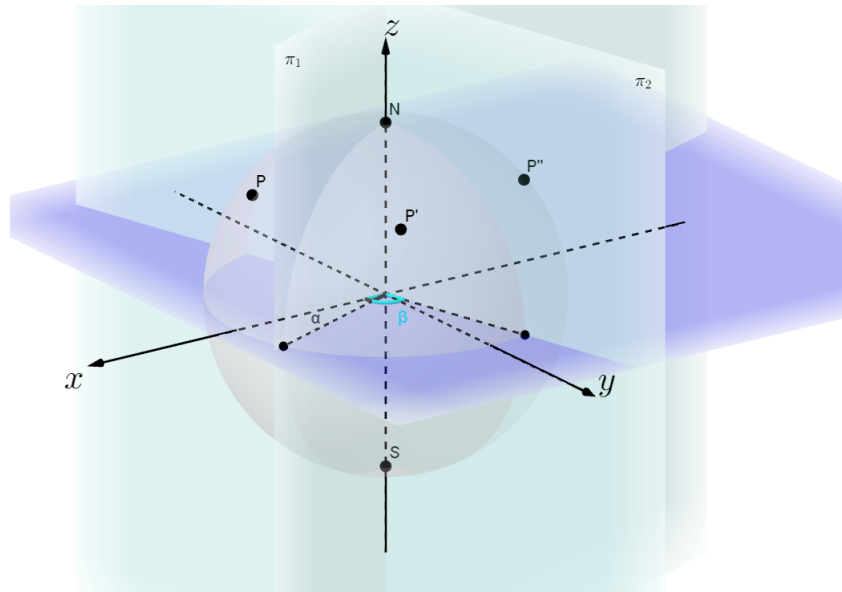
Kuva 4.4: Pisteen P heijastaminen tasojen π_1 ja π_2 suhteen yksinkertaistettuna (xy) -tasoon.

lause ja sen todistus ovat teorian yleistyksiä kaikille avaruuden \mathbb{R}^3 kierroille ja heijastuksille, mutta käyvät sellaisenaan myös pallolle S^2 , sillä pallon kierrot ja heijastukset ovat avaruuden \mathbb{R}^3 kiertojen ja heijastusten osajoukko.

Lause 4.8. *Kuvaus, joka on origon sisältävien tasojen π_1 ja π_2 suhteen tehtyjen heijastuksien yhdiste, on kierto tasojen π_1 ja π_2 leikkausjoukkona muodostuvan suoran suhteen.*

Todistus. Valitaan akselit x , y ja z siten, että origon kautta kulkevien tasojen π_1 ja π_2 leikkausjoukkona syntyvä suora on z -akseli. Kun nyt tutkitaan x - ja y -akseleiden tasoa, ovat tasot π_1 ja π_2 kohtisuorassa x - ja y -akseleiden tasoon nähden. Täten heijastukset eivät vaikuta nyt z -akselin koordinaatteihin lainkaan, jolloin voidaan jättää kyseinen suunta huomiotta ja yksinkertaistaa tilanne pelkästään (x, y) -tasoon (kuvat 4.4 ja 4.5).

Olkoot tason π_1 ja x -akselin välinen kulma suuruudeltaan α positiiviseen suuntaan (eli myötäpäivään) ja vastaavasti tason π_2 ja x -akselin välinen kulma suuruudeltaan β (kuva 4.5). Tutkitaan pistettä $P = (\phi, \theta)$, jonka koordinaatit ovat pallokoordinaatteja. Tason π_1 suhteen heijastaminen tuottaa pisteen $P' = (\alpha + (\alpha - \phi), \theta) = (2\alpha - \phi, \theta)$. Kun tämä edelleen heijastetaan tason π_2 suhteen, saadaan piste $P'' = (2\beta - (2\alpha - \phi), \theta) = (\phi + 2(\alpha - \beta), \theta)$. Saatu piste P'' on pallokoordinaattien mukaisesti saatu kiertämällä z -akselin suhteen kulman $2(\alpha - \beta)$ verran, siis kahdesti heijastamalla. \square



Kuva 4.5: Piste P on heijastettu ensin tason π_1 suhteen, ja sen jälkeen tason π_2 suhteen.

Edellisen lauseen perusteella voidaan todeta, että heijastus kahden eri isoympyrän määrittämän tason suhteen on sama kuin kierto isoympyröiden leikkauspisteiden määrittämän avaruuden \mathbb{R}^3 suoran suhteen kaksi kertaa isoympyröiden välisen kulman verran. Heijastustasojen leikkauksesta syntyvä suora on siis aina vastaavan kierron kiertoakseli.

Esitellään seuraavaksi lemma, jota tarvitaan lauseen 4.10 todistuksessa.

Lemma 4.9. *Isometria on yksikäsitteisesti määritelty, jos sen vaikutus tiedetään kolmeen eri pisteeseen, jotka eivät ole samalla isoympyrällä.*

Todistus. Olkoot pisteet P , Q ja R siten, etteivät ne ole samalla isoympyrällä, ja M mikä tahansa piste pallolla S^2 . Olkoon kuvaus t isometria, joka kiinnittää pisteet P , Q ja R . Nyt kuva $t(M)$ on ympyrällä, jonka keskipiste on P ja säde on PM . Kuva $t(M)$ on myös ympyrällä, jonka keskipiste on Q ja säde on QM . Oletuksen nojalla kuva $t(M)$ on ympyrällä, jonka keskipiste on R ja säde on RM . Kolme eri ympyrää voi kuitenkin leikata vain yhdessä pisteessä, jolloin pätee $M = t(M)$. Tällöin selvästi isometria on yksikäsitteisesti määrätty kolmen pisteen perusteella. Näin ollen kuvauksen on oltava identtinen kuvaus, sillä se kiinnittää jokaisen pisteen paikalleen.

Tämän nojalla voidaan todeta, että jos kaksi eri isometristä kuvausta f ja g kuvaavat pisteet P , Q ja R , jotka eivät ole samalla isoympyrällä, samoiksi pisteiksi, niin tällöin kuvaukset ovat samat, siis $f = g$. Kuvaus on siis

määritelty yksikäsitteisesti, kun sen vaikutus tiedetään kolmeen pisteeseen, jotka eivät ole samalla isoympyrällä. \square

Edellisen lemmän nojalla seuraavan lauseen todistuksen heijastuskuvaukset voidaan olettaa yksikäsitteiseksi.

Lause 4.10. *Jokainen pallon S^2 isometria on korkeintaan kolmesta eri isoympyröiden suhteen tehdyistä heijastuksista saatu kuvaus.*

Todistus. Olkoot nyt P, Q ja R mielivaltaiset kolme pistettä eri isoympyröiltä, ja olkoot P', Q' ja R' pisteiden kuvat jollain isometrialla $t : S^2 \rightarrow S^2$. Tarkastellaan nyt, saadaanko pisteet P, Q ja R kuvattua pisteiksi P', Q' ja R' korkeintaan kolmella eri heijastuskuvauksella.

Olkoon r_p heijastus, joka kuvaa pisteen P pisteeksi P' . Merkitään heijastuksen kuvaa pisteestä Q merkinnällä $r_p(Q) = Q_1$. Olkoon isoympyrä C kulmanpuolittaja kulmalle, joka muodostuu janojen $P'Q_1$ ja $P'Q'$ väliin. Isoympyrä C puolittaa myös pisteet Q_1 ja Q yhdistävän janan. Isoympyrän C suhteen tehtävä heijastus kiinnittää pisteen P' paikalleen (sillä $P' \in C$) ja heijastaa pisteen Q_1 pisteeksi Q' . Oletetaan, että heijastus kuvaa pisteen $r_p(R) = R_1$ pisteeksi R'' .

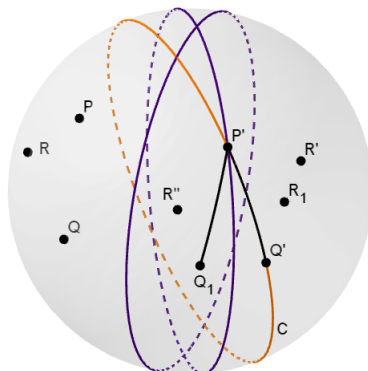
Janat $R'P'$ ja RP ovat selvästi isometrisen kuvauksen myötä yhtä pitkiä. Edelleen myös janat $R''P'$ ja RP , sekä janat $R''Q$ ja QR ovat keskenään yhtä pitkiä. Olkoot $|RP| = |R'P'| = |R''P'| = d_P$ ja vastaavasti $|R''Q| = |QR| = d_Q$. Pisteet R' ja R'' ovat molemmat siis kahden ympyrän kehällä: ympyrän, jonka säde on d_P ja keskipiste P' , ja ympyrän, jonka säde on d_Q ja keskipiste Q' .

Jos nyt pätee $R' = R''$, on alkuperäisen isometrian tuottamiin kuvapisteisiin P', Q' ja R' päästy kahdella heijastuskuvauksella. Tällöin lause siis pätee. Jos taas $R' \neq R''$, voidaan tehdä vielä kolmas heijastus pisteiden P' ja Q' läpi kulkevan isoympyrän suhteen, jolloin saadaan kuvattua R'' pisteeksi R' . Nyt on todistettu, että kolmen pisteen määrittämä isometria voidaan esittää kolmella eri heijastuksella S^2 , joten alkuperäinen väite seuraa Lemmasta 4.9. \square

Näitä tässä luvussa käsiteltyjä pallon isometrisiä ominaisuuksia hyödynnetään seuraavassa luvussa, kun todistetaan pallon trigonometrisiä lauseita pallokolmiolle.

4.2 Pallotrigonometria

Pallon kolmio muodostuu euklidisen tasogeometrian tapaan kolmesta eri suorasta ja niiden leikkauspisteiden määrittämisestä kolmion kulmista. Euklidises-



Kuva 4.6: Havainnollistus todistuksesta, jossa ensin heijastetaan siten, että piste P saadaan pisteeseen P' . Tämän jälkeen heijastetaan sellaisten tasojen suhteen, joihin P' kuuluu, jolloin P' saadaan kiinnitettyä.

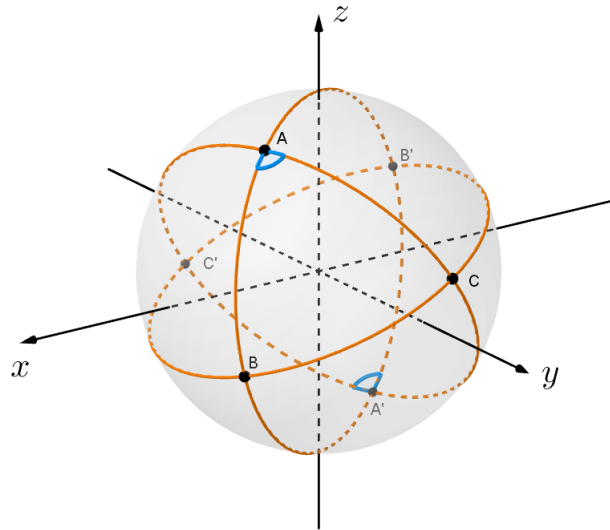
sa tasossa kolmion kulmien summan tiedetään olevan aina π , mutta kun kolmio muodostetaan samanlaisin ehdoin pallon pinnalle, kuinka suuri kolmion kulmien summa on silloin? Tässä luvussa tutustutaan pallokolmioon, pallokolmion kulmien summaan ja lisäksi muotoillaan ja todistetaan sini-, kosini- ja Pythagoraan lauseet pallokolmiolle.

4.2.1 Pallokolmio

Yksi kolmion $\triangle ABC$ määrittävistä isoympyröistä kulkee pisteiden A ja B kautta, toinen kulkee pisteiden B ja C kautta, ja kolmas kulkee pisteiden C ja A kautta. Isoympyrää pitkin voidaan kulkea kahta eri reittiä pisteestä toiseen. Täten kolmioita $\triangle ABC$ onkin useampi.

Yksi isoympyrä jakaa pallon pinnan kahteen alueeseen. Kun siihen lisätään toinen isoympyrä, puolittaa se molemmat alueet, ja näin saadaan neljä erillistä aluetta. Kolmas isoympyrä puolittaa vielä nämä alueet, jolloin muodostuu kahdeksan kolmion muotoista aluetta. Määritelmä, jonka mukaan kolmio muodostuu isoympyröiden leikkauspisteiden perusteella, määrittää siis kahdeksan eri kolmiota, jollei pisteille ole annettu tarkempia lisävaatimuksia (kuva 4.7).

Reitin suunta pisteestä toiseen voidaan määritellä yksikäsitteisesti reitin pituuden perusteella. Määritelmän 3.12 mukaan lyhyempi pisteiden A ja B määrittämän isoympyrän reiteistä pisteestä toiseen on nimeltään jana. Kolmio, jonka sivut ovat janoja, on aina nähtävissä kokonaan palloa kiertämällä,



Kuva 4.7: Pisteiden A , B ja C määrittämiä kolmioita on yhteensä kahdeksan kappaletta.

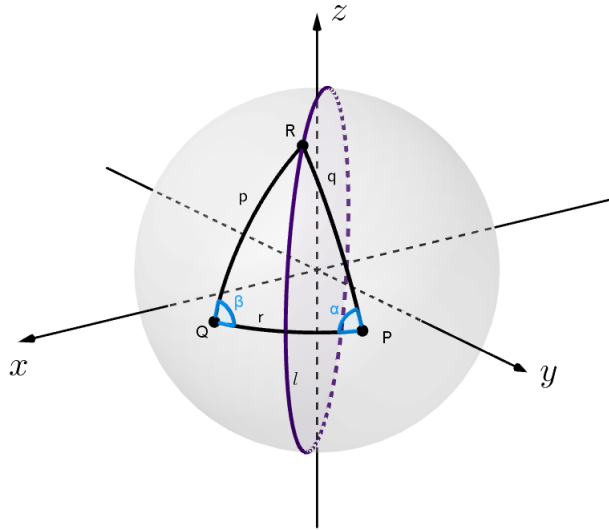
sillä jokainen sen sivuista on pituudeltaan korkeintaan $\pi:n$ verran.

Määritelmä 4.11. Olkoot pisteet A , B ja C siten, että ne eivät ole samalla isoympyrällä, eivätkä ne ole toistensa antipodeja. Pisteet A , B ja C määrittävät kolmion $\triangle ABC$. Tällöin janat AB , BC ja CA ovat kolmion sivut ja pisteet A , B ja C ovat kolmion kärjet.

Kolmion kulmat ja niiden suuruudet määritellään pallolla vastaavasti kuin euklidisessa tasossa. Sivujanojen väliin jäävä kulma kohti kolmatta sivua on kyseisen kärjen kulman suuruus. Pallokolmion kulman suuruus on alle $\pi:n$ verran. Koska kolmion sivu on jana, on sen pituus korkeintaan $\pi:n$ verran. Sivujanat ovat isoympyröiden osia, joten kolmion kulman suuruus on sama kuin sen sivujanojen määrittämien isoympyröiden välinen kulma.

Hilbertin kolmastoista aksiooma määrittää SKS-säännön kolmioiden yhtenevyyksille. Se pätee myös pallokolmiolle, sillä kulman A suuruus määrittää yksikäsitteisesti sivujanojen suunnan kärjestä lähtien myös pallolla, ja vastaavasti sivujanojen pituudet määrittävät yksikäsitteisesti kahden muun kärjen sijainnin. Myöskin edellä esitellyt isometriset ominaisuudet takaavat SKS-säännön toimivuuden. Niiden myötä muut euklidisen geometrian yhtenevyyssäännöt pätevät myös pallolla.

Lause 4.12. *Olkoon kolmio $\triangle PQR$ pallolla S^2 siten, että sen sivujen PQ , QR ja RP pituudet ovat vastaavassa järjestyksessä r , p ja q ja että $p = q$.*



Kuva 4.8: Kun janat p ja q ovat yhtä pitkät, ovat myös kulmat α ja β yhtä suuret.

Tällöin, kun kolmion kulmien P ja Q suuruudet ovat vastaavasti α ja β , pätee $\alpha = \beta$.

Todistus. Olkoon l isoympyrä pallon pinnalla siten, että se puolittaa kulman $\angle PRQ$ (kuva 4.8). Nyt heijastus isoympyrän l suhteen kuvaa pisteiden P ja R määräämän isoympyrän isoympyräksi pisteiden Q ja R läpi, ja päinvastoin, sillä heijastus on isometria ja $p = q$. Samoin se kuvaa kulmat α ja β toisikseen, jolloin $\alpha = \beta$. Lisäksi heijastus säilyttää pisteiden P ja Q kautta kulkevan isoympyrän ja kuvaa siksi kulmat α ja β toisikseen. \square

Euklidisessa tasogeometriassa kaksi suoraa leikkaavat toisensa aina korkeintaan yhdessä pisteessä. Tämän vuoksi kaksi suoraa ei voi milloinkaan muodostaa rajattua aluetta tasossa. Kun kahta suoraa tutkitaankin pallon pinnalla, huomataan, että kaksi suoraa (eli isoympyrää) rajaavat aina pinnalta alueen. Yksi isoympyrä jakaa pallon pinnan kahteen alueeseen. Kun pallolle lisätään toinenkin isoympyrä, jakaa se jo muodostuneet alueet vielä kahteen osaan: kaksi eri isoympyrää jakavat pallon pinnan neljään alueeseen. Monikulmion muodostamiseen tarvitaan pallon pinnalla siis vain kaksi suoraa, kun vastaavasti euklidisessa tasossa tarvitaan vähintään kolme suoraa.

Kahden isoympyrän rajaamaa pinnan aluetta kutsutaan *puolikuuksi*. Koska puolikuun kärkipisteet ovat toistensa antipodeja, on sen pinta-ala suoraan verrannollinen puolikuun kulmaan eli isoympyröiden väliseen kulmaan, joka

muodostuu isoympyröiden leikkauspisteeseen. Kuten pallokolmiollekin, niin myös puolikuun kulman suuruus voidaan määritellä isoympyröiden tasojen välisenä kulmana. Seuraavien määritelmien avulla voidaan johtaa kolmion kulmien summan ja kolmion pinta-alan suuruus.

Määritelmä 4.13. Olkoot A , B ja C pallon S^2 pisteitä, jotka eivät ole samalla isoympyrällä. Isoympyrät pisteiden A ja B , sekä pisteiden A ja C kautta muodostavat puolikuun K_A , jonka kärki on pisteessä A . Puolikuun K_A pinta-ala A_{K_A} on

$$\begin{aligned} A_{K_A} &= \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 \\ &= 2\alpha r^2, \end{aligned}$$

kun $\alpha = \angle BAC$ on puolikuun kulman suuruus ja r pallon säde.

Tällöin siis yksikköpallon puolikuun ala A_K on $A_K = 2\alpha$, kun α on puolikuun K kulman suuruus. Hyödynnetään tätä tietoa seuraavassa lauseessa, joka näyttää pallokolmion kulmien suuruuksien summan.

Lause 4.14. *Pallokolmion pinta-ala on $A_{\triangle ABC} = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB - \pi$.*

Todistus. Olkoot pisteet A , B ja C pallon S^2 pisteitä, jotka eivät ole samalla isoympyrällä. Nämä pisteet muodostavat kolme eri puolikuu-paria, joilla on jokaisella eri kärkipisteet. Yksikköpallon pinta-ala 4π voidaan esittää näiden puolikuiden avulla. Pisteiden ja niiden antipodipisteiden määräämät puolikuut täyttävät koko pallon pinnan (kuva 4.9). Jokainen puolikuu sisältää kolmion $\triangle ABC$ tai sen kanssa yhtenevän antipodipisteiden muodostaman kolmion $\triangle A'B'C'$ alan. Koko pallon alaksi saadaan Määritelmää 4.13 hyödyntämällä

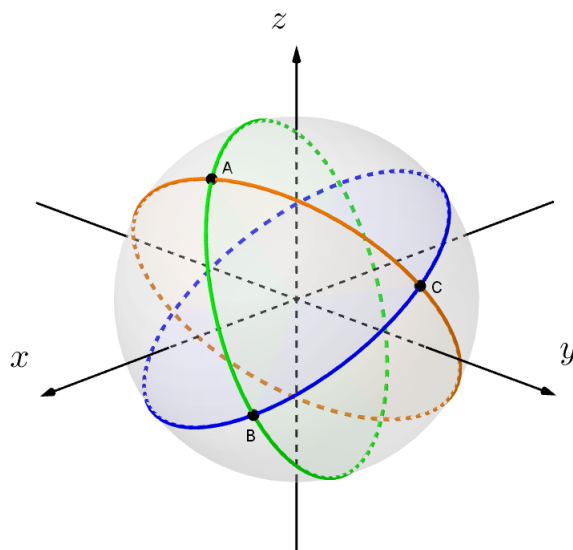
$$\begin{aligned} 4\pi &= 2A_{K_A} + 2A_{K_B} + 2A_{K_C} - 4A_{\triangle ABC} \\ &= 2 \cdot 2\angle BAC + 2 \cdot 2\angle ABC + 2 \cdot 2\angle ACB - 4A_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

Tämä saadaan vielä muotoon

$$A_{\triangle ABC} = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB - \pi.$$

□

Selvästi $A_{\triangle ABC} > 0$, jolloin edellinen lause antaa vastaavasti tiedon, että pallokolmion kulmien suuruuksien summa on aina suurempaa kuin luku π .



Kuva 4.9: Isoympyrät pisteiden A ja B , B ja C , sekä C ja A kautta rajaaavat pallon kolmeen puolikuu-pariin. Nämä puolikuut täyttävät koko pallon pinnan.

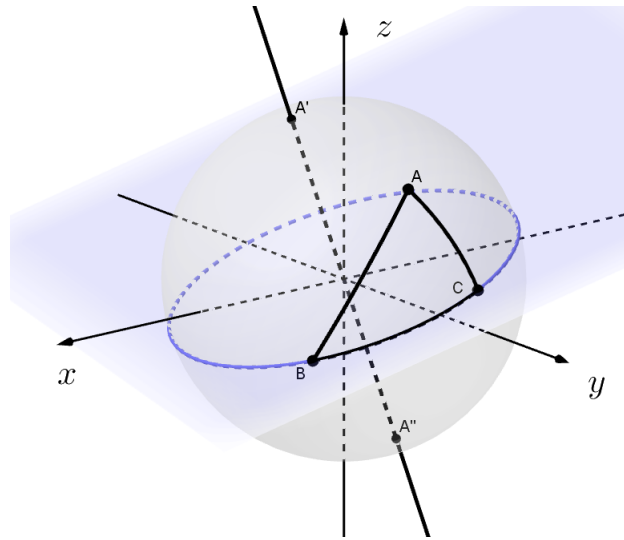
Seuraus 4.15. *Pallokolmion kulmien suuruuksien summa on suurempi kuin luku π .*

Mitä pienemmästä kolmiosta on kyse, sitä pienempi kulmien summan ylitys yli luvun π on, ja sitä "tasomaisemmasta" kolmiosta on kyse.

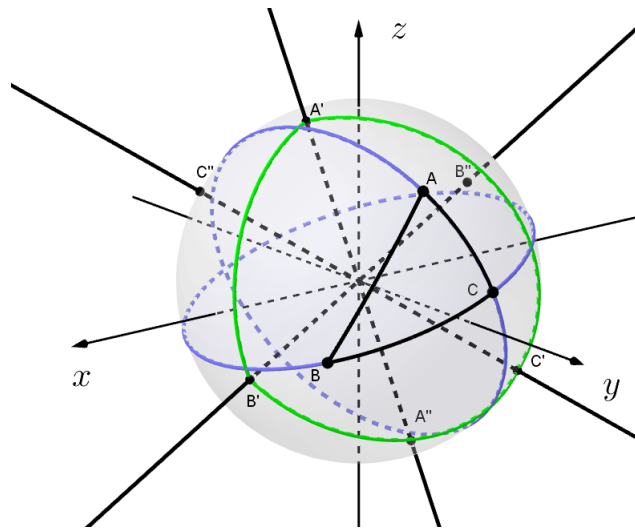
Esitellään seuraavaksi vielä pallokolmion kulmien summan suuruudelle toisen todistuksen pääpiirteet [10]. Tähän todistukseen tarvitaan apuna napakolmiolle määritelmä 4.16 sekä apulause napakolmion sivujen pituuksien ja kulmien yhteydestä.

Määritelmä 4.16. Olkoon $\triangle ABC$ mikä vain kolmio pallolla S^2 . Janan BC määrittämä isoympyrä muodostuu pallon ja tason leikkauksesta. Kyseisen tason normaalisuora pallon keskipisteestä $(0, 0, 0)$ leikkaa pallon kahdessa pisteessä, jotka ovat antipodeja. Olkoon näistä pisteistä nimeltään A' se, joka on samalla puolella pisteen A kanssa (kuva 4.10). Määritellään pisteet B' ja C' vastaavasti (kuva 4.11). Näin muodostunut kolmio $\triangle A'B'C'$ on kolmiota $\triangle ABC$ vastaava napakolmio.

Lause 4.17. *Napakolmion $\triangle A'B'C'$ sivujen pituudet a' , b' ja c' sekä kulmien suuruudet A' , B' ja C' ovat sitä vastaavan kolmion $\triangle ABC$ kulmien A , B ja C sekä sivujen a , b ja c täydennykset siten, että*



Kuva 4.10: Napakolmion ensimmäisen kärjen A' määrittäminen.



Kuva 4.11: Kuvassa napakolmio $\triangle A'B'C'$ määritettynä kolmiolle $\triangle ABC$.

$$(i) \quad A' = \pi - a$$

$$(ii) \quad B' = \pi - b$$

$$(iii) \quad C' = \pi - c$$

$$(iv) \quad a' = \pi - A$$

$$(v) \quad b' = \pi - B$$

$$(vi) \quad c' = \pi - C.$$

Todistus. Sivutetaan, katso [10] kohta 27. □

Edeltävän apulauseen lisäksi seuraavassa pallokolmioiden kulmien summan lauseessa hyödynnetään sitä tietoa, että napakolmion sivujen pituuksien summa on selvästi pienempi kuin luku 2π (katso lähteen [10] kohta 30).

Lause 4.18. *Pallokolmion $\triangle ABC$ kulmien A , B ja C summa on suurempi kuin luku π .*

Todistus. Olkoot a' , b' ja c' kolmiota $\triangle ABC$ vastaavan napakolmion $A'B'C'$ sivujen pituudet. Näiden summan tiedetään olevan pienempi kuin luku 2π . Tällöin saadaan, että

$$\pi - A + \pi - B + \pi - C < 2\pi,$$

josta saadaan edelleen, että

$$A + B + C > \pi.$$

Näin ollen pallokolmion kulmien summa on aina suurempi kuin luku π . □

4.2.2 Pythagoraan lause

Pythagoraan lause antaa euklidisen tason suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksille lausekkeen *kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypoteenuusan neliö*. Tutustutaan seuraavaksi pallon pisteiden välisiin etäisyyksiin sen pintaa pitkin. Sen myötä pystytään muotoilemaan Pythagoraan lause pallon kolmiolle.

Lause 4.19. *Olkoot pisteet $P = (p_1, p_2, p_3)$ ja $Q = (q_1, q_2, q_3)$ mitkä vain pisteet pallolla S^2 . Janan PQ pituudelle d pätee*

$$\cos d = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3.$$

Todistus. Olkoot pisteet $P = (p_1, p_2, p_3)$ ja $Q = (q_1, q_2, q_3)$ pallolla S^2 . Pisteiden P ja Q välinen (lyhin) etäisyys d on suoraan verrannollinen kulmaan $\angle POQ$, kun O on pallon S^2 origo. Tutkitaan pisteiden P ja Q määrittämää isoympyrää pallolla S^2 . Nyt tiedetään, että isoympyrän pituus on 2π . Kulma $\angle POQ$ määrittää, kuinka suuri osuus jana PQ on koko isoympyrästä:

$$d = \frac{\angle POQ}{2\pi} 2\pi = \angle POQ.$$

Kulma $\angle POQ$ saadaan ratkaistua vektorien P ja Q pistetulona, kun tiedetään seuraava:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\angle POQ),$$

joka saadaan edelleen muotoon

$$\cos d = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3,$$

mikä on täsmälleen sama kuin lauseessa esitetty. □

Lause 4.20 (Pythagoraan lause). *Olkoon $\triangle ABC$ pallon S^2 kolmio siten, että kulma C on suora. Jos $a = |BC|$, $b = |CA|$ ja $c = |AB|$, niin tällöin*

$$\cos c = \cos a \times \cos b.$$

Todistus. Kierretään palloa S^2 siten, että piste C on pohjoisnavalla eli $C = (0, 0, 1)$ ja että piste A saadaan (x, z) -tasoon (kuva 4.12). Tällöin pisteen A koordinaatit ovat $A = (\sin b, 0, \cos b)$, sillä $\cos(\frac{\pi}{2} - q) = \sin q$ ja $\sin(\frac{\pi}{2} - q) = \cos q$, mille vain kulmalle $q \in \mathbb{R}$, ja koska pisteelle A pallokoordinaattien kulmat ovat $\theta = \frac{\pi}{2} - b$ (janan CA määrittämänä) ja $\phi = 0$, sillä $x = 0$. Vastaavasti pisteelle B saadaan $B = (0, \sin a, \cos a)$, sillä $\theta = \frac{\pi}{2} - a$ ja $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Kierretään nyt palloa S^2 siten, että piste A kuvautuu pisteeksi C , eli kuvauksella $R(Y, -b)$. Tällöin piste C kuvautuu pisteeksi C' ja piste B pisteeksi B' . Tällöin

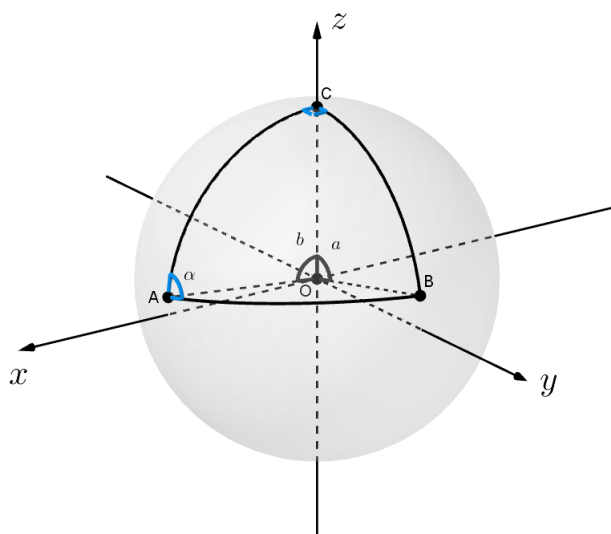
$$\angle CAB = \angle C'A'B' = \angle C'CB' = \alpha.$$

Kierron myötä pisteet A , $A' = C$ ja C' ovat kaikki samalla suoralla, jolloin pätee

$$\angle ACB' + \angle B'CC' = \pi,$$

jolloin saadaan edelleen, että

$$\angle ACB' = \pi - \alpha.$$



Kuva 4.12: Palloa on kierretty siten, että pallokolmion kärki C on saatu pisteeseen $(0, 0, 1)$. Tällöin piste A on (x, z) -tasossa ja piste B on (y, z) -tasossa.

Nyt siis pisteen B' pallokoordinaateille pätee $\phi = \angle ACB'$ ja $\theta = \frac{\pi}{2} - c$ (sillä $|CB'| = |AB|$). Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} B' &= (\cos(\pi - \alpha) \sin c, \sin(\pi - \alpha) \sin c, \cos c) \\ &= (-\cos \alpha \sin c, \sin \alpha \sin c, \cos c). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pisteen B' koordinaatit voidaan ilmoittaa myös kierto kuvauksen avulla:

$$\begin{aligned} R(Y, -b)B &= \begin{bmatrix} \cos b & 0 & -\sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin a \\ \cos a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin b \cos a \\ \sin a \\ \cos b \cos a \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Yhdistämällä nämä eri koordinaattiesitykset saadaan z -koordinaateista täsmälleen lauseen esitys

$$\cos c = \cos b \cos a.$$

□

Huomautus 4.21. Kun x on arvoltaan pieni, voidaan approksimoida, että $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$. Tällöin edellisen lauseen yhtälö $\cos c = \cos b \cos a$ saadaan muotoon

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}c^2 &\simeq (1 - \frac{1}{2}a^2)(1 - \frac{1}{2}b^2) \\ &= 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2b^2}{4} \\ &\simeq 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \end{aligned}$$

jolloin saadaan $c^2 = a^2 + b^2$, mikä on Pythagoraan lauseen esitys euklidisessä tasossa. Pienillä arvoilla a , b ja c eli pienillä pallokolmiolla pätee siis euklidisen tasogeometrian muoto Pythagoraan lauseesta.

4.2.3 Pallokolmion sini- ja kosinilauseet

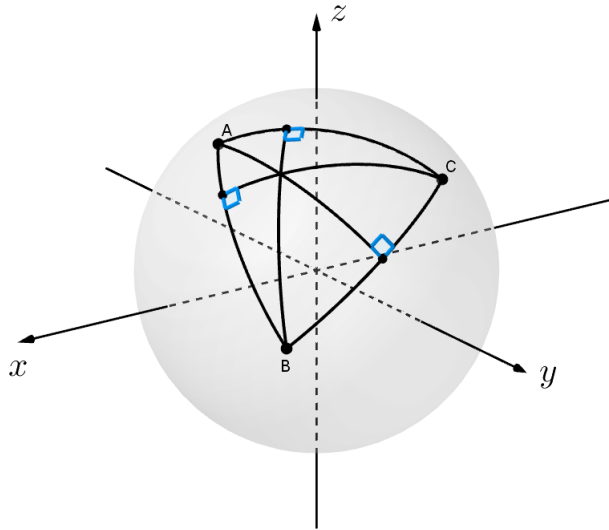
Edellisessä luvussa tutkittiin Pythagoraan lauseen esitystä pallolla. Jatketaan trigonometrian parissa tutkien sini- ja kosinilauseita pallokolmioille. Kuten euklidisessä tasogeometriassa, niin myös pallogeometriassa Pythagoraan lause on muodostettu suorakulmaiselle kolmiolle, ja vastaavasti sini- ja kosinilause kaikille pallokolmioille.

Pallokolmio $\triangle ABC$ koostuu siis kolmesta pallon pisteestä (A, B, C) ja niitä yhdistävistä janoista (AB, BC, CA). Jokaisesta kärjestä voidaan aina muodostaa vastakkaisen janan määrittämää isoympyrää vasten kohtisuora isoympyrä. Esimerkiksi kärjestä A voidaan muodostaa kärkien B ja C määrittämää isoympyrää vasten kohtisuora isoympyrä. Nämä isoympyrät leikkaavat toisensa pisteessä D ja sen antipodipisteessä D' . Jos piste D on nyt janalla BC , siis pisteiden B ja C välissä, muodostuu suorakulmaiset kolmiot $\triangle ADB$ ja $\triangle ADC$, jotka yhdessä muodostavat kolmion $\triangle ABC$. Jos taas piste D ei ole janalla BC , muodostuu suorakulmaiset kolmiot $\triangle ADB$ ja $\triangle ADC$, kuten kuvassa 4.14. Edelleen, jos piste $D = B$ tai $D = C$, oli kolmio $\triangle ABC$ valmiiksi suorakulmainen. Tällainen kohtisuora jana voidaan muodostaa jokaisesta kärjestä sitä vastaavalle sivujanalle (kuva 4.13).

Lause 4.22 (Sinilause aidolle pallokolmiolle). *Olkoon $\triangle ABC$ pinnalla S^2 siten, että sivujen AB, BC ja CA pituudet ovat vastaavassa järjestyksessä c, a ja b , ja kärkien A, B ja C kulmien suuruudet α, β ja γ . Tällöin pätee*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

Todistus. Olkoon kolmio $\triangle ABC$ pallolla S^2 , ja piste $D \in S^2$ siten, että jana CD on kohtisuorassa janaa AB vastaan ja että piste D kuuluu janalle AB .



Kuva 4.13: Jokaiseen kolmion kärkeen on piirretty sen vastakkaiselle sivulle kohtisuora pallojana. Näin muodostuneet kaksi uutta kolmiota ovat suorakulmaisia.

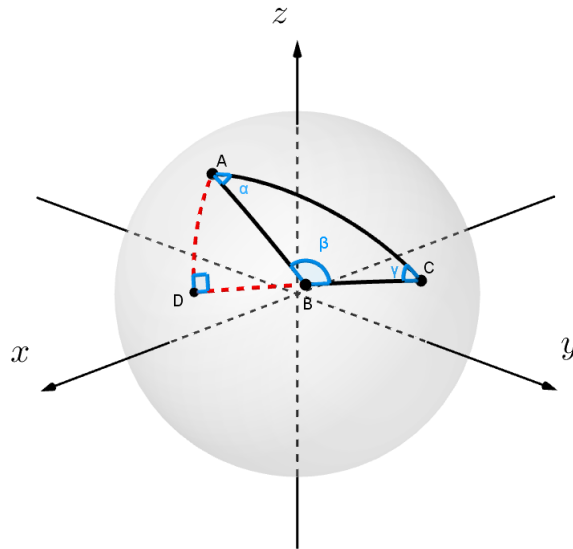
Nyt muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, $\triangle ADC$ ja BCD . Merkitään sivujen pituuksia siten, että $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ ja $CD = d$, ja kulmien suuruuksia siten, että $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$. Lauseen 4.20 todistuksen y -koordinaattiesitykset 4.1 ja 4.3 yhdistämällä kolmiolle $\triangle ADC$ saadaan

$$\sin \alpha = \frac{\sin d}{\sin b},$$

mikä voidaan edelleen esittää muodossa $\sin d = \sin \alpha \cdot \sin b$. Vastaavasti voidaan päätellä, että kolmiolle $\triangle BDC$ pätee $\sin d = \sin \beta \cdot \sin a$. Kun nämä yhdistetään, saadaan

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin b &= \sin \beta \sin a \\ \frac{\sin \alpha}{\sin a} &= \frac{\sin \beta}{\sin b}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan vielä tilannetta, jossa piste D ei kuulu janelle AB (kuva 4.14). Tällöin janaa AB vastaan kohtisuora jana CD on kolmion ulkopuolella, kuitenkin alle π :n päässä. Nyt muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota $\triangle ADC$ ja $\triangle CDB$. Merkitään sivujen pituuksia edelleen siten, että $AB = a$, $BC = a$, $CA = b$ ja $CD = d$ ja kulmien suuruuksia merkein $\angle BAC = \alpha$,



Kuva 4.14: Kuva lauseen 4.22 todistuksen tilanteesta, jossa piste D ei ole janalla AB , ja siten jana CD kulkee kolmion $\triangle ABC$ ulkopuolella.

$\angle CBA = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$. Vastaavasti kuin edellä saadaan nytkin kolmiolle ADC että

$$\sin \alpha = \frac{\sin d}{\sin b},$$

jolloin myös $\sin d = \sin \alpha \cdot \sin b$. Samaan tapaan saadaan kolmiolle $\triangle CDB$, että

$$\sin(\pi - \beta) = \frac{\sin d}{\sin a},$$

ja kun tiedetään, että $\sin(\pi - \beta) = \sin \beta$, saadaan $\sin d = \sin \beta \cdot \sin a$. Edelleen nämä yhdistämällä saadaan

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b}.$$

Kun tarkastelut tehdään vielä muodostamalla kohtisuora jana pisteestä A janaa BC kohti, saadaan vastaavalla päättelyllä todistettua myös yhtälön jälkimmäinen osa.

□

Lause 4.23 (Kosinilause aidolle pallokolmiolle). *Olkoon kolmio $\triangle ABC$ pinnalla S^2 siten, että sivujen AB , BC ja CA pituudet ovat vastaavassa järjestyksessä c , a ja b , ja kärkien A , B ja C kulmien suuruudet α , β ja γ . Tällöin*

pätee

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Todistus. Lauseen 4.20 todistusta voidaan käyttää myös tämän lauseen todistamiseen. Muutetaan pisteen B koordinaatit nyt muotoon

$$B = (\cos \gamma \sin a, \sin \gamma \sin a, \cos a)$$

(sillä nyt $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$). Kierretyn pisteen B' :n koordinaatit ovat

$$B' = (-\cos a \sin c, \sin a \sin c, \cos c).$$

Kierron $R(Y, -b)$ myötä saadut koordinaatit voidaan esittää seuraavalla tavalla

$$\begin{aligned} R(Y, -b) &= \begin{bmatrix} \cos b & 0 & -\sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma \sin a \\ \sin \gamma \sin a \\ \cos a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos b \cos \gamma \sin a - \sin b \cos a \\ \sin \gamma \sin a \\ \sin b \cos \gamma \sin a + \cos b \cos a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kun näistä yhdistetään z -koordinaatin esitykset, saadaan täsmälleen lauseen esitys

$$\cos c = \sin b \cos \gamma \sin a + \cos a \cos b.$$

Kuten euklidisessä tasossakin, myös tämä pallogeometrian esitys kosinilauseesta palautuu Pythagoraan lauseeksi, kun $\gamma = \frac{\pi}{2}$: tällöin $\cos \gamma = 0$, jolloin $\cos c = \cos a \cos b$. \square

Määritelmän 4.16 mukaista napakolmiota hyödyntämällä edeltävä kosinilause voidaan esittää myös pallokolmion kulmien suuruuksille. Lause 4.17 antaa kolmion kulmien suuruuksille ja sivujen pituuksille yhteyden, jota käyttämällä saadaan, että

$$\cos c = \cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma$$

ja lisäksi

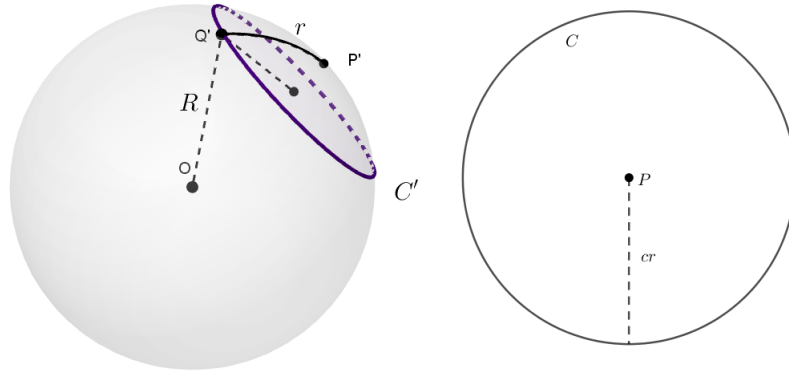
$$\sin b \cos \gamma \sin a + \cos a \cos b = -\sin \beta \cos c \sin \alpha + \cos \alpha \cos \beta.$$

Kun nämä yhdistetään, saadaan esitys

$$\cos \gamma = \sin \beta \cos c \sin \alpha - \cos \alpha \cos \beta.$$

Seuraus 4.24. *Olkoon kolmio $\triangle ABC$ pinnalla S^2 siten, että sivujen AB , BC ja CA pituudet ovat vastaavassa järjestyksessä c , a ja b , ja kärkien A , B ja C kulmien suuruudet α , β ja γ . Tällöin pätee*

$$\cos \gamma = \sin \beta \cos c \sin \alpha - \cos \alpha \cos \beta.$$



Kuva 4.15: Maapalloa kuvaavalla pallolla pikkuympyrä C' , sen piste Q' sekä keskipiste P' pallolle projisoituna.

4.3 Maapallo ja karttasovellukset

Maapalloa kuvaavat kartat ovat päivittäisessä käytössä. Karttoja on monin eri suhtein pienennettyjä: osa kuvaa yhtä kaupunginosaa ja osa kokonaisia kaupunkeja, maata tai maapalloa. Valtaosa kartoista on tehty euklidiseen tasoon, esimerkiksi paperille kuvattuna. Maapallo ei kuitenkaan ole muodoltaan taso, vaan pikemminkin pallo, jota on hieman litistetty pohjois- ja etelänavasta. Ideaalikartta säilyttäisi etäisyydet, kulmat, pinta-alat ja muodot oikeina, mutta onko sellaisen kartan tekeminen kuitenkaan mahdollista, jos pallon muotoinen maapallo kuvataan tasoon?

Pelkästään jo tutkittaessa kolmion muotoista aluetta sekä pallolla että euklidisessa tasossa huomataan, etteivät kulmien suuruudet säily. Olkoon esimerkiksi kolmio $\triangle ABC$ pallon pinnalla ja kolmio $\triangle PQR$ sitä vastaava kolmio tasoon piirrettyssä kartassa siten, että piste A vastaa pistettä P , piste B vastaa pistettä Q ja piste C vastaa pistettä R . Nyt pallokolmion $\triangle ABC$ kulmien suuruuksien summa on suurempi kuin luku π , kun taas kolmion $\triangle PQR$ kulmien summa on tasan π . Pallopinnan janat eivät siis tasoon kuvattuna säilytä kaikkia ominaisuuksiaan. Ideaalista tasokarttaa ei siis ole olemassa.

Euler osoitti jo vuonna 1775, ettei maapallon osaa voida esittää tasokarttana siten, että etäisyyksien suhteet säilyisivät. Osoitetaan tämä seuraavaksi. Olkoon E maapalloa kuvaava pallo keskipisteenä O ja säteenä R . Olkoon piste P' pallon pinnan pikkuympyrän C' keskipiste pallolle projisoituna. Ympyrän C' säde on r pallon pintaa pitkin (kuten kuvassa 4.15). Oletetaan, että $r < \frac{1}{2}\pi R$ eli jana r kulkee siis pisteestä P' pisteeseen $Q' \in C'$. Ympyrä C' rajaa pallon puolikkaan. Oletetaan, että ideaalikartta kuvaa pallon puolikkaan

tasoon T siten, että P ja C tasolla T ovat pallon E pisteen P' ja ympyrän C' kuvapistet. Kartalle kuvaaminen skaalaa pituudet jollakin vakiolla $c \in \mathbb{R}$, siis kaikki pisteet, jotka ovat pisteestä P' etäisyyden r päässä pallon pinnalla, ovat tasossa T pisteestä P etäisyyden cr päässä; ympyrä C' kuvautuu siis ympyräksi C tasossa T siten, että ympyrän C säde on cr ja kehän pituus $2\pi cr$.

Olkoot nyt piste Q' pikkuympyrän C' piste ja piste N' pisteestä Q' janalle OP' piirretyn kohtisuoran ja janan OP' leikkauspiste. Tällöin $\angle P'OQ' = \frac{r}{R}$, jolloin edelleen

$$Q'N' = R \sin(\angle P'OQ') = R \sin\left(\frac{r}{R}\right).$$

Koska jana $Q'N'$ on ympyrän C' säde, on ympyrän kehän pituus silloin $2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$. Vastaavasti ympyrän C kehän pituus on $2\pi cr$. Kun nämä yhdistetään, saadaan

$$2\pi cr = 2\pi cR \sin\left(\frac{r}{R}\right),$$

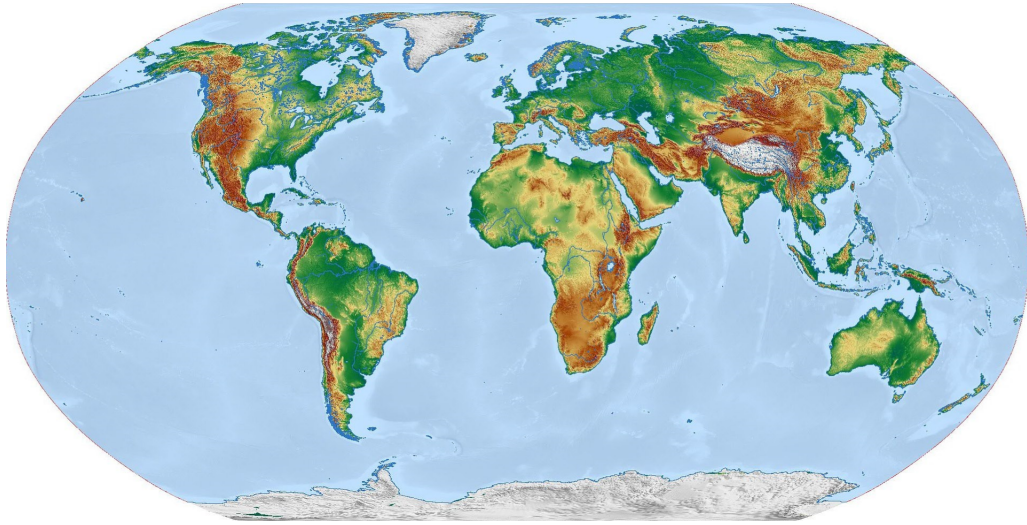
ja edelleen jakamalla luvulla $2\pi cr$ saadaan

$$1 = \frac{\sin\left(\frac{r}{R}\right)}{\frac{r}{R}}.$$

Tästä seuraa ristiriita, sillä $\frac{\sin x}{x} < 1$ kaikilla luvuilla $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Täten ei ole mahdollista muodostaa täsmällistä ja ideaalia tasokuvausta maapallon osasta.

Usein kartta approksimoidaan euklidiseen tasoon suorakulmion muotoisena, sillä euklidisessa tasossa pituudet ja kulmat ovat helposti laskettavissa ja kartasta tulee helposti tulkittava. Kun maapallo projisoidaan tasoon, esimerkiksi stereografisella projektiolla, muuttuvat pisteiden väliset etäisyydet [2], eikä approksimaatio karttaan ole siten hyvä. Mitä suuremmasta osasta maapalloa tasokartta on tehty, sitä suuremman virheen kartta aiheuttaa etäisyyksille. Maapallon kartta-approksimaatioissa etäisyyksien virhe on suuri, kun pohjoisnapaa kuvaa koko kartan yläreuna ja etelänapaa koko kartan alareuna niiden ollessa todellisuudessa yksittäisiä pisteitä (kuva 4.16). Mitä pienemmästä pallokolmiosta on kyse, sitä paremmin se voidaan approksimoida euklidisessa tasossa, kuten todettiin huomautuksessa 4.21.

Tapa, jolla on mitattu maapallon muotoa ja kokoa, erityisesti pituuspiirien pituutta, on tähtitieteilijä Friedrich George Wilhelm Struven (1793 - 1864) mukaan nimetty Struven ketju. Ennen satelliittien kehitystä maapallon muotoa on arvioitu maapallon pinnalta käsin. Tähän kehitettiin kolmiomittaus, joka määrittä maapallon pintaan tehtyjen kolmioiden avulla pituuspiirin pituuden. Kun mittauskolmio oli tarpeeksi pieni eli pintaa ikäänkuin



Kuva 4.16: Kuvassa yksi approksimaatio maapallosta euklidiseen tasoon. Lähde: <https://pixabay.com/fi/maailman-kartta-maailmankartta-2169040/>

katsottiin tarpeeksi läheltä, oli tulos kaikkein tarkin. Pieni pallokolmio pallolla muistuttaa euklidisen tason kolmiota. Struven ketju kulki Suomen halki, ja yksi mittauspisteistä on Jyväskylän Oravivuorella [11], joka on yksi Unescon maailmanperintökohteista.

Luku 5

Työkaluja GeoGebraan

Vuonna 2015 uudistunut lukion opetussuunnitelma ja ylioppilaskokeiden sähköistyminen haastavat erilaisten matemaattisten ohjelmien ja työtilojen toimivuuden ja monipuolisuuden sekä ennen kaikkea opettajien ja oppilaiden tietotekniset taidot. Kokelaiden tulisi hallita tietokoneella tekstin, laskujen ja kuvien tuottaminen vähintäänkin yhtä sujuvasti kuin käsin. Sähköinen ylioppilaskoe on jaettu A- ja B-osiin, joista jälkimmäisessä osassa kokelas saa käyttöönsä useita ohjelmia, joita ei ensimmäisessä osassa saa käyttää [12]. Yksi näistä ohjelmista on *GeoGebra*, joka toimii niin sovelluksena kuin nettiselaimessa maksuttomasti [3]. GeoGebralla voi muun muassa ratkaista yhtälöitä, piirtää funktioiden kuvaajia, luoda konstruktioita, analysoida tilastoja ja tutkia 3D-matematiikkaa.

5.1 GeoGebra opetuskäytössä

Jyväskylän yliopiston yliopistonlehtori Markus Hähkiöniemi (Dos., FT) on tutkinut muun muassa teknologia-avusteista matematiikan oppimista [6] ja tehnyt useita julkaisuja GeoGebran käytöstä opetuksessa. Dynaamisen geometriasovelluksen, esimerkiksi GeoGebran, on tutkittu helpottavan ja nopeuttavan ongelmanratkaisutehtävien ratkaisemista monin tavoin [7]. Avoin ongelmatehtävä antaa oppilaalle ja opiskelijalle itselleen mahdollisuuden ongelman rajaamiseen ja hypoteesin luomiseen. Tällainen avoin ongelmanratkaisu kehittää oppilaan ja opiskelijan itsenäistä työskentelyä ja omien ajatusten kritisointia. Avoimet ongelmanratkaisutehtävät haastavat oppilasta ja opiskelijaa soveltamaan aiemmin oppimiaan tietoja ja taitoja, ja siten edelleen kehittävät ajattelua.

Kun tehtävissä käytetään apuna dynaamisia matematiikkasovelluksia, kuten GeoGebraa, oppilas pystyy tekemään sopivalla lähikehitysvyöhykkeen

avustuksella päätelmiä hypoteesien toimivuudesta ja toimimattomuudesta. Tällaisten sähköisten oppimisympäristöjen käyttämisessä ei myöskään ole suuria riskejä vääränlaisista päätelmistä, ja opettaja voi pienellä perehtymisellä tuoda opetukseensa monipuolisuutta lisää. Kuten myös Hähkiöniemen artikkelissa [7] mainittiin, oppilaat ja opiskelijat oppivat tällaisten sovellusten käyttämisen hyvin nopeasti. Nuoret pysyvät hyvin teknologian kehityksen mukana, eivätkä he pitäneet Hähkiöniemen, Leppähön ja Viholaisen toteuttamassa tutkimuksessa [7] GeoGebraa haastavana, vaikka käyttivät sitä ensimmäistä kertaa. Artikkelissa mainittiinkin, että jo ensimmäinen kokemus dynaamisen geometriasovelluksen käytöstä ongelmanratkaisun apuna voi olla hyvin positiivinen kokemus.

Haastattelin Hähkiöniemeä tätä tutkielmaani varten hänen kokemuksistaan GeoGebrasta. Hän kokee sähköisten oppimateriaalien ja opetusvälineiden tuovan paljon mahdollisuuksia, mutta myös haasteita opetukseen. Sähköiset materiaalit ovat kehittyneet valtavasti; ennen sähköinen materiaali tarkoitti pdf-tiedostoa, kun nykyisin sähköinen järjestelmä pystyy antamaan palautetta vastauksesta ja ehkä tulevaisuudessa palautetta saa myös itse työkentelystä ja oppimisprosessista. Hähkiöniemi mainitsi tärkeänä mahdollisuutena myös oppimateriaalin muokattavuuden: painettua oppikirjaa ei enää muokata, mutta sähköiset materiaalit ovat helposti muokattavia. Ne antavat siten opettajalle mahdollisuuden toteuttaa erilaisia opetustapoja helpommin ilman kaiken materiaalin uudelleen tuottamista.

Sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa tärkeään rooliin nousee tehtävien tyyppi: tehtävien tulisi vaatia aineenhallintaa ja ymmärrystä eikä niillä saisi olla helposti arvattavia vastauksia. Tekstin tuottaminen tulee vaatimaan paljon resursseja ja Hähkiöniemi mainitsi yhtenä huolenaiheena sen, että ratkaisun hahmottelu jää pois ja vastaus pyritään kirjoittamaan suoraan kaavaeditorille. Tällöin ajattelusta tulee liian lineaarinen prosessi, mikä ei ole tarkoituksenmukaista. Työmäärää pidetään herkästi kaksinkertaisena, jos tehtävän ratkaisee ensin suttupaperille ja hahmottelee vasta sitten tietokoneella. Liian suoraviivaiset tehtävät puolestaan eivät haasta opiskelijoita tarpeeksi. Hähkiöniemi kokee välineistön hyväksi, kunhan tehtävät tukevat tarkoitustaan.

GeoGebran parhaana puolena Hähkiöniemi pitää opiskelijoiden mahdollisuutta itse löytää haastavampiakin sääntöjä helposti. Toisaalta taas Hähkiöniemi on huolestunut liian monista ja liian ”valmiista” työkaluista GeoGebrassa: työkalut antavat opiskelijalle paljon tietoa, ennen kuin hän edes ymmärtää tarvitsevansa sitä. Työkaluissa onkin oleellista se, minkälaisia ne ovat. Niitä tarvitaan matkalla tavoiteltuun, mutta liiallinen informaatiotulva ei kannusta opiskelijaa ajattelemaan itse.

GeoGebran on tutkittu tukevan oppimista tutkivassa matematiikassa. GeoGebran tuominen niin sanotusti ”tavalliselle” matematiikan tunnille on

helppoa ja tukee myös siellä oppimista. Sovelluksessa on valtavasti valmiita työkaluja ja tiedostoja, joilla opettaja voi itse havainnollistaa opetettavaa asiaa. Vaihtoehtoisesti opettaja voi myös tehdä itse vielä paremmat työkalut ja tiedostot, joita opiskelijat voivat käyttää apunaan oppitunnin aikana. Hähkiöniemi kannustaa opettajia tutustumaan GeoGebraan ja ottamaan sen rohkeasti mukaan opetukseen. Esimerkkien ei tarvitse olla viimeisteltyjä ja GeoGebrassa on paljon valmiita esimerkkejä. Opiskelijoille GeoGebra kannattaa pitää mahdollisimman yksinkertaisena ja mahdollisuuksien mukaan aloittaa työskentely tyhjällä GeoGebralla, jolloin opiskelijalla on mahdollisuus tehdä itse havaintoja tutkittavasta ongelmasta.

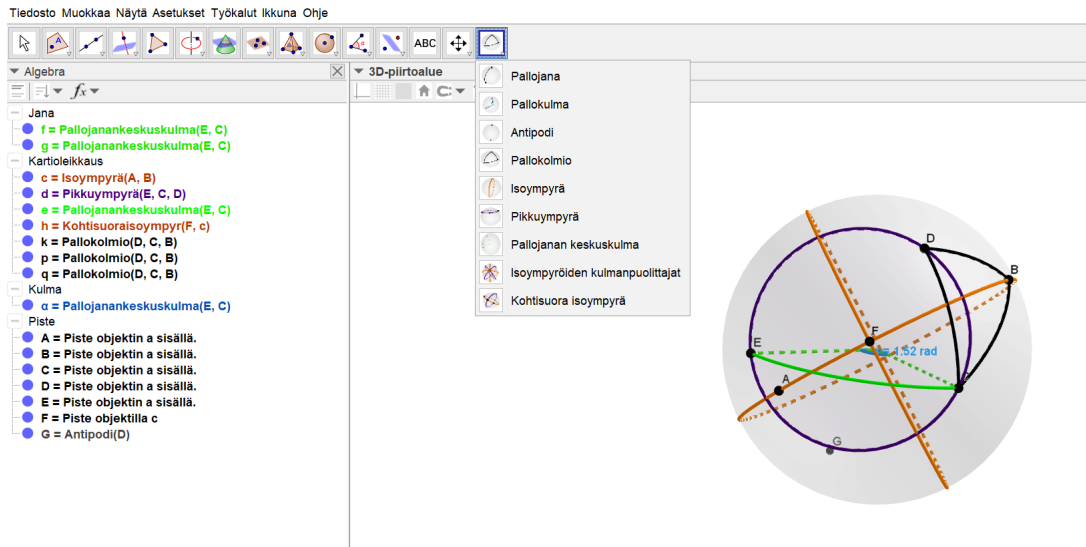
Itselläni suurin huolenaihe sähköistymisen maailmassa on käsinpiirtämisen ja kirjoittamisen taidon merkitys ja taidon menettäminen. Hähkiöniemi toteaaakin, että opettajien tulisi kannustaa opiskelijoita pitämään kynä ja paperi mukanaan ja hahmottelemaan aina ratkaisuaan myös paperille ja vasta sen jälkeen kirjoittamaan ratkaisunsa sähköisellä laitteella. Näin voidaan myös välttyä siltä, että tehtävien ratkaisemisesta ei tulisi liian suoraviivainen prosessi.

Hähkiöniemi rohkaisee opettajia kokeilemaan GeoGebraa ja muita sähköisiä työkaluja, ja ottamaan ne pienin askelin mukaan omaan opetukseensa. Hän ei pidä sähköistymistä uhkana, vaan mahdollisuutena. Opettajien vastuulle jää myös opiskelijoiden kannustaminen sähköisten työkalujen (muidenkin kuin laskimen) ottamiseen perinteisen kirjan, vihon ja kynän rinnalle.

5.2 GeoGebra-työkalut

Tein osana tätä tutkielmaa GeoGebraan työkaluja, jotka helpottavat pallogeometrian havainnollistamista, opettamista ja oppimista. Tekemäni työkalut ovat julkaistuna osoitteessa https://drive.google.com/drive/folders/1HfgbiDNBxyQFXm8v_dLSyZysMcdfh5Eh. GeoGebrassa on paljon valmiita työkaluja, mutta pallogeometrian havainnollistamiseen niitä ei vielä ole. Esimerkiksi isoympyrän piirtämiseen menee tovi ilman valmista työkalua, mutta työkalun valmistamisen myötä isoympyrä on kahden pisteen valitsemisen päässä. Oleellista jokaisen työkalun luomisessa oli kiinnittää pallo kiinteäksi valitsematta palloa objektina, vaan syöttämällä määritelmiin yhtälö $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Työkalujen muodostaminen sujui lopulta näppärästi, kun tunsin hyvin objektien taustat ja yksityiskohtaiset määritelmät.

Ensimmäisenä työkaluna tein Antipodin. Kyseinen työkalu luo valitun pisteen antipodin pallon pinnalle määritelmän 3.3 mukaan: siis valitsemalla pisteen (x, y, z) pallolta työkalu piirtää pisteen $(-x, -y, -z)$. Työkalun tekemiseksi piirsin ensin pisteen A pallolle, ja määritin pisteen $-A$ avulla

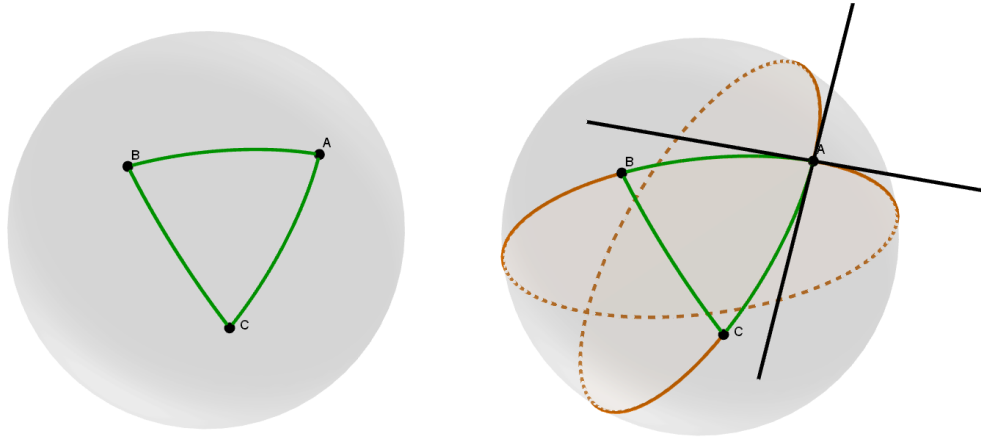


Kuva 5.1: GeoGebraan tekemäni työkalut.

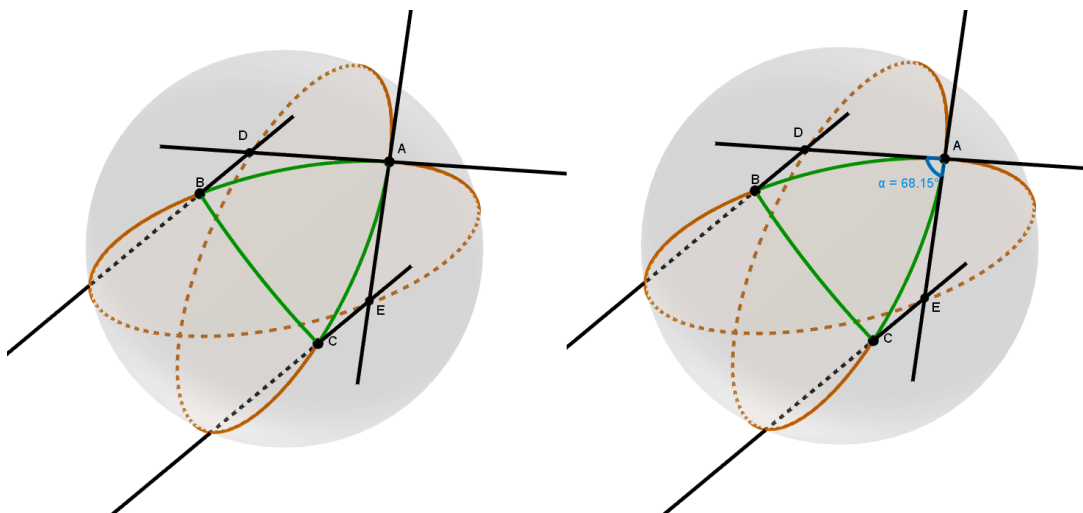
työkalun ”Antipodi”. Listassa ensimmäisenä työkaluna näkyy (kuva 5.1) pallojana, jota ennen olin tehnyt Isoympyrä-työkalun. Valitsin valmiita ympyrän työkaluja hyödyntämällä ympyräsektorin tuotettavaksi uudella työkalulla. Isoympyrä-työkalun tein määritelmän 3.5 mukaan: muodostin ensin tason, joka kulki origon ja kahden pallon S^2 pisteen kautta, sitten käytin valmista työkalua, joka muodosti tason ja pallon leikkausjoukon, ja tämä kyseinen leikkausjoukko oli haluamani isoympyrä. Pikkuympyrä-työkalun tein vastaavalla tavalla valiten kolme pallon pistettä siten, etteivät ne olleet toistensa antipodeja. Työkalun, joka piirtää pallokolmion, tein isoympyröiden avulla, määrittämällä nyt kuvaksi kolme janaa siten, että kuvana on pallokolmio.

Kulmien suuruudet on mahdollista tarkistaa työkalulla, joka laskee pallon suorien tai janojen välisen kulman. Tätä työkalua varten piirsin ensin pallokolmion $\triangle ABC$ (kuva 5.2 vasen reuna). Seuraavaksi piirsin pisteeseen A tangentit janoille AB ja AC eli janojen määräämille isoympyröille (kuva 5.2 oikea reuna). Jotta työkalu määrittäisi juuri oikean tangenttien välisen kulman, täytyi kulman mittaus kiinnittää vielä pisteiden B ja C puolelle. Sen tein piirtämällä tangenteille normaalit pisteisiin B ja C . Nyt pisteeseen A piirretyt tangentit leikkaavat normaalit pisteiden B ja C puolella, jolloin haluttu kulma muodostuu näiden leikkauspisteiden ja pisteen A väliin (kuva 5.3).

Näiden lisäksi tein kohtisuoran isoympyrän piirtämiselle yhden työkalun, joka toimii kaikissa tilanteissa: kun halutun isoympyrän piste ei ole kohtisuoralla isoympyrällä ja kun piste on kohtisuoralla isoympyrällä. Viimeisenä



Kuva 5.2: Vasemmalla pallokolmio $\triangle ABC$ ja oikealla pisteeseen A piirretyt tangentit janoille AB ja AC .



Kuva 5.3: Vasemmalla on tangenteille piirretyt normaalit pisteisiin B ja C , ja oikealla on pisteeseen A muodostunut kulma.

työkaluna piirsin isoympyröiden kulmanpuolittajat. GeoGebra antaa jokaiselle työkalulle myös käyttöohjeen, jonka avulla käyttäjä osaa valita oikeat objektit halutun tulosobjektin saavuttamiseksi.

Työkalujen avulla voidaan piirtää luvussa 3 esiteltyjä pallogeometrian peruskäsitteitä ja havainnollistaa luvussa 4 esiteltyjä pallogeometrian lauseita. Kun esimerkiksi janalle valitsee sen ominaisuuksista näytettäväksi nimen ja arvon, saa geogebbran laskemaan kyseiselle arvolle kosinin ja sinin, jolloin sini-, kosini- ja Pythagoraan lauseita voidaan havainnollistaa helposti. Kolmion kulmien suuruudella voidaan esimerkiksi havainnollistaa niiden summaa, ja sen riippuvuutta siitä, kuinka iso kolmio on palloon suhteutettuna. Työkirja myös näyttää määritelmän 3.16 mukaiset pallokoordinaatit (r, ϕ, θ) , kun pisteen ominaisuuksista valitsee pallokoordinaatit. Tässä ensimmäinen luku kertoo pallon säteen, joka on tekemässäni työkirjassa 1, sillä tein työkalut yksikköpallolle S^2 .

Työkalujen tekeminen oli todella antoisaa, ja auttoi minua syventämään aiemmin oppimaani pallogeometriasta. Jotta sain työkalut toimimaan kaikissa tilanteissa, minun tuli ymmärtää, miten mikäkin objekti on matemaattisesti määritelty, jotta osasin luoda objektin toimivana myös GeoGebralla. Työskentely pallogeometrian parissa loi minulle rohkeutta tarttua erilaisiin ja uusiin näkökulmiin opettajana. Koulumatematiikka on pitkälti euklidista geometriaa, mutta mielelläni toisin mukaan myös epäeuklidisen geometrian. Ehkä toisenlaisen näkökulman esitleminen auttaisi oppilaita ymmärtämään ja oivaltamaan euklidistakin geometriaa paremmin. Tähänkään geometriaan ei olisi päädytty, jollei kukaan olisi pohtinut erilaisia vaihtoehtoja ja kyseenalaistanut aiemmin todeksi väitettyä. Opettajana ja matemaatikkona haluan rohkaista oppilaita pohtimaan ja kokeilemaan hullujakin ideoita, ja rohkaista heitä siten luottamaan itseensä ja omiin kykyihinsä.

Tämä projekti kannusti minua myös luottamaan itseeni ja omaan osaamiseeni, ja siihen, että pystyn opettajana luomaan innostavia ja erilaisia oppimiskokemuksia. Oivalsin myös, miten monipuolinen ja hyvä opetusväline GeoGebra on, ja löysin oppimateriaalien ja ylioppilaskirjoitusten sähköistymisestä paljon erinomaisia uusia mahdollisuuksia. En malttaisi odottaa sitä päivää, kun pääsen soveltamaan kaikkia ideoitani ja testaamaan tekemiäni GeoGebra-työkaluja opetuskäytössä!

Lähdeluettelo

- [1] Brannan, David. Esplen, Matthew. Gray, Jeremy. *Geometry*. 2. painos. Cambridge University Press. 2012.
- [2] Coxeter, Harold Scott MacDonald. *Introduction to Geometry*. 2. painos. John Wiley & Sons, Inc. 1961.
- [3] GeoGebra-verkkosivusto. <https://www.geogebra.org/cms/en>. Luettu 20.3.2018
- [4] Greenberg, Marvin Jay. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. 2. painos. W. H. Freeman and Company, San Francisco. 1974.
- [5] Hartshorne, Robin. *Geometry: Euclid and Beyond*. 2. painos. Springer. 2000.
- [6] Hähkiöniemi, Markus. *GeoGebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa - Tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta*. Jyväskylän yliopisto. 2011.
- [7] Hähkiöniemi, Markus. Leppäaho, Henry. Viholainen, Antti. *Avoin ongelmanratkaisu teknologia-avusteisessa oppimisympäristössä*. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta. Suomen ainedidaktinen tutkimusseura ry, Helsinki. 2012.
- [8] Kurittu, Lassi. Hokkanen, Veli-Matti. Kahanpää, Lauri. *Geometria*. Jyväskylän yliopisto. Luettu 15.4.2018. <http://users.jyu.fi/~laurikah/Geometria/GeometriaA.pdf>
- [9] Lehtinen, Matti. *Geometrian perusteita*. Matematiikkalehti Solmu. 2011. <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria2011.pdf>
- [10] Todhunter, Isaac. *Spherical Trigonometry*. Honorary Fellow of St John's College, Cambridge. 5. painos. 1886.

- [11] UNESCO. *Struve Geodetic Arc*. Luettu 21.3.2018.
<http://whc.unesco.org/uploads/nominations/1187.pdf>.
- [12] Ylioppilastutkintolautakunnan verkkosivut. Luettu 19.1.2018.
<https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/digitaalinen-ylioppilastutkinto>.