

---

Puhtaiden lomittuneiden kubittien Bell-tyypin  
epälokaalisuus ja Gisinin teoreema



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

*Kirjoittaja:*  
Riku E. Järvinen

*Ohjaaja:*  
Professori Jukka Maalampi

Pro Gradu  
Fysiikan laitos  
Toukokuu 2018



*“Anybody who is not shocked by quantum theory has not understood it.”*

–Niels Bohr



## Kiitokset

Kiitän ohjaajaani Professori Jukka Maalampea kärsivällisyydestä työn pitkittyessä. Hän ehdotti aiheen valintaa Bellin epäyhtälöiden laajahkolta tutkimuskentältä ja sain itse päättää, mistä kirjoitan. Pitkäaikainen ystäväni Ville Toivanen auttoi useiden vaikeasti saatavien tietolähteiden keräämisessä. Runsaat kiitokset kuuluvat vanhemmilleni, ilman heidän tukeaan en olisi pystynyt työskentelemään niin vapaasti, kuin nyt oli mahdollista. Kiitän puolisoani Anastassiaa joustavuudesta ja kannustamisestani, hän antaa minulle iloa ja energiaa jokaiseen päivääni.

Jyväskylässä 21. toukokuuta 2018,

Riku E. Järvinen



## Tiivistelmä

Työn tavoitteena oli lokaalirealististen teorioiden ja kvanttimekaniikan lomittumisilmiön välisen relaation esittely Bell-tyypin epäyhtälöiden näkökulmasta, puhtaille lomittuneille kaksitilajärjestelmille. Lomittuminen on luonnon kvanttitason vuorovaikutusmekanismi ja resurssi, joka ei ilmene klassisessa fysiikassa. Se havainnollistaa joitakin kvanttimekaniikan ehkä kummalliselta vaikuttavia piirteitä. Lomittumisella on tärkeä rooli kvanttilaskennan ja kvantti-informaatioteorian tutkimuskentillä sekä sovellusalueilla.

Bell-tyypin epäyhtälö on klassisen todennäköisyysteorian kautta matemaattisesti johdettu ehto, joka asettaa tarkan ylärajan toisistaan kaukana olevien hiukkasten välisten yhteismittausten (tilastollisille) korrelaatioille, kun kyseessä on suuri hiukkasten ensemble. Päätelyn taustalla ovat objektiiviset ja lokaalit eli lokaalirealistiset oletukset, jotka kuulostavat ehkä intuitiivisesti luonnollisilta. Ne sanovat, että luontoa voidaan kuvata erillisten objektien avulla ja kaksi toisistaan kaukana olevaa objektia eivät voi vuorovaikuttaa keskenään siten, että vuorovaikutus etenisi valoa nopeammin. Kvanttiteoria kuitenkin sallii suuremman arvon korrelaatioille kuin klassinen todennäköisyysteoria.

Bellin teoreema on osoitettu myös kokeellisesti. Bell-kokeissa mitattava ominaisuus on tyypillisesti hiukkasen spin, polarisaatio tai vastaava dikotominen suure. Jos puhtaassa tilassa oleva kvanttimekaaninen järjestelmä ”rikkoo” Bell-tyypin epäyhtälöä (joka voi olla tilan muodosta riippuva) eli kvanttimekaniikka ennustaa mittaustuloksille epäyhtälön asettamaa ylärajaa suuremman korrelaation, on järjestelmä lomittunut. Tätä kutsutaan *Gisinin teoreemaksi*, joka kiteyttää hyvin työn tavoitteen.

Työssä tehtiin laajahko yhteenveto Bell-tyypin epäyhtälöiden historiasta ja kehityksestä, keskittyen mm. EPR-argumenttiin ja sen tulkintaan, piilomuuttujateorioiden tärkeimpiin ominaisuuksiin ja historiaan, Bellin teoreemaan, keskeisimpiin Bellin epäyhtälöihin ja niiden yleistyksiin sekä Bellin epäyhtälöiden kokeelliseen testaamiseen. Lisäksi osoitettiin Gisinin teoreema kahdelle kuditille sekä  $n$ :lle kubitille yleistetyssä GHZ-tilassa käyttäen Hardy-tyypin epäyhtälöä. Gisinin teoreema on teoreettinen työkalu, jonka avulla voidaan selvittää, onko annettu puhdas kvanttila lomittunut vai ei.





# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Matemaattiset perusteet</b>	<b>7</b>
2.1	<i>Hilbertin avaruudesta</i> . . . . .	7
2.1.1	Perusominaisuuksia . . . . .	7
2.1.2	Kanta ja superpositio . . . . .	8
2.1.3	Laskennallinen kanta . . . . .	9
2.1.4	Puhtaat ja sekoittuneet tilat . . . . .	10
2.1.5	Vaihetekijöistä . . . . .	10
2.1.6	Kubiteista . . . . .	11
2.2	<i>Hilbertin avaruuden operaattoreista</i> . . . . .	12
2.2.1	Perusominaisuuksia . . . . .	12
2.2.2	Projektioista . . . . .	14
2.2.3	Ominaisarvoista . . . . .	14
2.2.4	Odotusarvoista, mittaamisesta ja epämääräisyydestä . . . . .	15
2.2.5	Hermiittiset ja unitaariset operaattorit . . . . .	17
2.2.6	Tiheysoperaattori . . . . .	19
2.3	<i>Usean hiukkasen järjestelmät</i> . . . . .	20
2.3.1	Tilavektoreista . . . . .	20
2.3.2	Operaattoreista . . . . .	21
2.4	<i>Spin-1/2-hiukkasista</i> . . . . .	22
2.4.1	Perusominaisuuksia . . . . .	23
2.4.2	Paulin operaattorit . . . . .	23
2.4.3	Operaattorin $\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit . . . . .	25
2.4.4	Kahden spin 1/2 -hiukkasen mittauskorrelaatioita . . . . .	27
2.5	<i>Kvantttilojen lomittumisesta</i> . . . . .	29
2.5.1	Esimerkki: redusoitu tiheysoperaattori . . . . .	29
2.5.2	Lomittuminen operatiivisesta näkökulmasta . . . . .	30
2.5.3	Kahden hiukkasen järjestelmä . . . . .	31
2.5.4	Usean hiukkasen järjestelmä . . . . .	31
2.5.5	Lomittumisen havaitseminen . . . . .	32
2.5.6	Sekoittuneiden tilojen lomittumisesta . . . . .	33
2.5.7	Schmidtin hajotelma . . . . .	34
<b>3</b>	<b>EPR, Bell ja kvanttiteorian epälokaalisuudesta</b>	<b>37</b>
3.1	<i>Einstein, Podolsky, Rosen ja lokaali realismi</i> . . . . .	38

3.1.1	Lähtökohdat . . . . .	38
3.1.2	EPR jatkuville muuttujille . . . . .	39
3.1.3	Muotoilu spin- $1/2$ -hiukkasille . . . . .	41
3.1.4	EPR:n tulkinnasta . . . . .	42
3.2	<i>Lyhyesti piilomuuttujateorioista</i> . . . . .	46
3.2.1	Von Neumannin teoreema . . . . .	47
3.2.2	Kohti kontekstuaalisia piilomuuttujateorioita . . . . .	48
3.2.3	Piilomuuttujat Bellin teoreemassa . . . . .	49
3.3	<i>Bellin teoreema</i> . . . . .	52
3.3.1	Alkuperäinen todistus . . . . .	52
3.3.2	CHSH-epäyhtälö . . . . .	54
3.3.3	CH-epäyhtälöstä . . . . .	56
3.4	<i>Bellin teoreeman yleistämisestä</i> . . . . .	57
3.4.1	Epäyhtälöt muotoa $(n, 2, 2)$ . . . . .	58
3.4.2	Epäyhtälöt muotoa $(2, m, 2)$ . . . . .	59
3.4.3	Epäyhtälöt muotoa $(2, 2, d)$ . . . . .	59
3.4.4	Bell-tyyppin epäyhtälöt ja lomittumisen havaitsemisesta . . . . .	60
3.5	<i>Bellin epäyhtälöiden kokeellisesta tutkimuksesta</i> . . . . .	61
3.5.1	Fotonikokeiden perusteita ja historiaa . . . . .	62
3.5.2	Ensimmäisistä kaskaadiemissiokokeista . . . . .	63
3.5.3	Aspectin ryhmän fotonikokeista . . . . .	65
3.5.4	SPDC-fotonikokeista . . . . .	68
3.5.5	Kokeellisen tutkimuksen puutteita . . . . .	70
3.6	<i>Gisinin teoreema kahdelle hiukkaselle</i> . . . . .	73
3.6.1	Ominaisarvot $\hat{A}(\alpha)$ ja $\hat{B}(\beta)$ . . . . .	74
3.6.2	Korrelaation $\langle \hat{A}(\alpha) \otimes \hat{B}(\beta) \rangle$ laskeminen . . . . .	74
3.6.3	Ristiriita CHSH-epäyhtälön kanssa . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Epälokaalisuus ilman epäyhtälöitä</b> . . . . .	<b>79</b>
4.1	<i>GHZ-argumentti</i> . . . . .	80
4.1.1	Neljän kubitin malli . . . . .	80
4.1.2	Ristiriitainen oletusten joukko . . . . .	81
4.2	<i>Hardyn teoreema</i> . . . . .	83
4.2.1	Hardyn teoreeman todistus . . . . .	83
4.2.2	Todennäköisyyden maksimiarvo . . . . .	87
4.2.3	Huomioita Hardyn teoreemasta . . . . .	88
4.3	<i>Gisinin teoreema yleistetylle GHZ-tilalle</i> . . . . .	88
4.3.1	Hardyn epäyhtälö, $n$ kubitilla . . . . .	89
4.3.2	Todennäköisyyksien laskeminen . . . . .	91
4.3.3	Vaihetekijöiden valinta . . . . .	93
4.3.4	Todennäköisyyden $P(U_1 U_2 \cdots U_n   ++ \cdots +)$ lauseke . . . . .	95
4.3.5	Todennäköisyyden $P(U_1 U_2 \cdots U_n   ++ \cdots +)$ maksimi . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Johtopäätökset</b> . . . . .	<b>105</b>

# Kuvat

2.1	Bloch-kehä -esitys kubitista [192]. . . . .	12
2.2	Avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikkövektori $\mathbf{r}$ koordinaatistossa [46]. . . . .	25
2.3	Yksikkövektorit $\mathbf{r}_A$ ja $\mathbf{r}_B$ sekä vektoreiden väliset kulmat. . . . .	29
2.4	Kahden hiukkasen järjestelmän distillaatio-ominaisuuksia [53] . . . . .	34
3.1	Alkuperäinen EPR:n tilanne [210]. . . . .	40
3.2	Sternin-Gerlachin koe kahdelle spin-1/2-hiukkaselle [131]. . . . .	43
3.3	Kvanttimekaaninen (QM) ja klassinen (CF) korrelaatio kahdelle spin 1/2 -hiukkaselle [199]. . . . .	50
3.4	Klassisen korrelaation laskemisen geometria. . . . .	51
3.5	Aspect et al. kokeissa käytetty kaskaadiemissio [15]. . . . .	64
3.6	Aspect et al. kokeen [16] laitteisto. . . . .	66
3.7	Aspect et al. kokeen [16] tuloksia. . . . .	67
3.8	Akusto-optinen kytkin kokeessa [13]. . . . .	68
3.9	Skemaattinen kuva ei-kollinearisesta tyypin II SPDC-prosessista [237]. . . . .	69
3.10	Skemaattinen kuva modernista fotonikokeesta [124]. . . . .	71
4.1	Neljän spin-1/2-hiukkasen ajatuskoe [131] . . . . .	80
4.2	Todennäköisyys $P_n(x)$ , $n = 2$ [61]. . . . .	97
4.3	Todennäköisyys $P_n(x)$ , $n = 3, 4, 5, 6$ [61]. . . . .	98
4.4	Funktion $\Omega_3(x)$ kuvaaja. . . . .	100
4.5	Funktion $\Omega_n(x)$ kuvaaja, kun $n = 4, 5, 6$ . . . . .	103



# Luku 1

## Johdanto

Objektiivisessä fysikaalisessa todellisuudessa oleva ilmenee toisistaan erillisten, paikallisten objektien (hiukkasten<sup>1</sup>) kautta. Ne ”kantavat mukanaan” yksilöllisiä ominaisuuksiaan, kuten esimerkiksi objektin paikka ja nopeus. Ne ovat olemassa riippumatta siitä, mitataanko objekteja vai ei. Lokalisuuden periaatteen mukaan objekti ei voi olla vuorovaikutuksessa toisen, riittävän kaukana olevan objektin kanssa siten, että vuorovaikutus tai siihen liittyvä viestintä etenisivät valoa nopeammin.

Objektiivisuuden ja lokaalisuuden oletuksia noudattavia teorioita kutsutaan OL-teorioiksi tai lokaalirealistisiksi teorioiksi. Lokaalirealistista mallia kuvaa matemaattisesti yleensä *lokaali piilomuuttujamalli*. Realistisessa (ja deterministisessä) teoriassa kaikkien mittausten tulokset ovat ennalta määritetyt riippumatta siitä, tehdäänkö mittauksia vai ei. Käsitteiden määrittely juontaa juurensa 1930-luvulle, jolloin Einstein, Podolsky ja Rosen [93] (EPR) julkaisivat historiallisesti merkittävän kvanttimekaniikan epätäydellisyyttä argumentoivan artikkelin. Työ toimi lähtölaukauksena tutkimuksille, joissa tarkasteltiin kvanttimekaniikan täydentämistä erilaisilla lokaalirealistisilla teorioilla [26, 159, 241] ja toisaalta epälokaaleilla malleilla [38, 39].

1960-luvulla John S. Bell [25] osoitti, ettei kvanttimekaniikka ole lokaalirealistinen teoria. Verraten yksinkertaisessa kahden hiukkasen, esimerkiksi elektronin (fotonin) järjestelmässä, hiukkaset voivat olla sisäisten magneettisten momenttinsa eli spiniensä (lineaaristen polarisaatioidensa) suhteen voimakkaasti korreloituneita. Kvanttiteorian statistiset ennusteet järjestelmien ensemblelle tehtyjen mittausten tuloksille rikkovat mille tahansa lokaalirealistiselle teorialle voimassa olevia matemaattisia ehtoja. Näitä ehtoja kuvaavia epäyhtälöitä kutsutaan *Bell-tyypin epäyhtälöiksi* tai lyhyemmin *Bellin epäyhtälöiksi*. Keskeisenä tekijänä epäyhtälöiden muodostamisessa ovat kahden tai useamman hiukkasen yhteismittausten tuloksiin

---

1. Kuten artikkelissa [75], käytetään tässä työssä sanaa *hiukkanen* kuvaamaan havaittavaa ilmiötä määrättyssä paikassa, viittaamatta suoranaisesti mikroskooppisen, ”hiukkasmaisen” ja mahdollisesti ”ympäristöstään erillisen” objektin olemassaoloon. Jo Max Born [44] puhui hiukkaskäsitteestä luopumisesta ja käsitteen uudelleenmäärittelystä vuonna 1954. *Fysikaalinen järjestelmä* koostuu yhdestä tai useammasta hiukkasesta, joiden lukumäärää merkitään kirjaimella  $n$ .

liittyvät todennäköisyydet ja niistä johdettavat korrelaatiot<sup>2</sup>. Jos kvanttiteorian ennusteiden oletetaan pitävän paikkansa, mikä kokeellisen tutkimustiedon nojalla on erinomaisen perusteltua, täytyy vähintään toinen, joko objektiivisuus tai lokaalisuus, jättää pois fysikaalisen todellisuuden kuvailusta. Sanotaan, ettei kvanttimekaniikkaa voi simuloida lokaalirealistisella piilomuuttujamallilla. Ensimmäiset ”aukottomat” Bellin teoreemaan liittyvät kokeelliset havainnot tehtiin vasta vuonna 2015 [124, 138, 224], joskin jo 1980-luvun alkupuolella saatiin selvästi suuntaa antavia tuloksia [13, 16].

Bellin epäyhtälöiden rikkoutumisen taustalla on erityinen kvanttimekaniikan vuorovaikutusmekanismi nimeltään *lomittuminen*. Lomittunut tila saa alkunsa esimerkiksi spin-0-hiukkasen spontaanissa hajoamisessa kahdeksi spin-1/2-hiukkaseksi [37], lineaarisesti polarisoitujen fotonien kaskaadiemissiossa [15] tai fotonien spontaanissa parametrisessa alaspäin konversiossa [56, 167]. Lopputuotteena esiintyvien kahden hiukkasen mitattavien ominaisuuksien välille (spin, polarisaatio) muodostuu erityisen voimakas keskinäinen riippuvuusuhde, joka ei häviä edes hiukkasten välisen etäisyyden kasvaessa [218, 238]. Matemaattisesti kahden tai useamman lomittuneen hiukkasen tilaa tarkastellessa havaitaan, että koko järjestelmän tilasta saatavilla oleva täsmällinen tieto ei usein anna paljoakaan tietoa osajärjestelmien tiloista. Järjestelmä, joka voidaan täsmällisesti kuvata erillisten osiensa kautta, on *separoituva*. Tutkielmassa rajoitutaan tarkastelemaan *puhtaita* lomittuneita kvanttitiloja eli teoreettisia ideaalitapauksia, joiden muoto tunnetaan täsmällisesti. Keskitytään *kubitteihin* eli kaksitilajärjestelmiin erotuksena *kuditeista* eli monitilajärjestelmistä, joilla on enemmän kuin kaksi tilaa, esimerkiksi spin-1-hiukkanen ja sen kolme energiatilaa.

Vaikka lomittumisen esitellyt Schrödinger kirjoitti aiheesta jo 1930-luvulla [220], sai lomittuneiden tilojen tutkimus enemmän huomiota vasta 1990-luvun alkupuolelta lähtien kvanttilaskennan ja kvantti-informaatioteorian tutkimuskenttien sekä orastavien käytännön sovellusten (mm. tietoturva) esiinmarssin myötä. Erityisesti Bell-tyypin epäyhtälöiden ”rikkoutumiseen” läheisesti liittyviä lomittumisen ja kvantti-informaation sovellusalueita on kvanttikryptografiassa [30, 95, 216]. On mahdollista muodostaa koejärjestelyjä, joilla testataan annetun preparoidun tilojen ensemblen lomittumista. Sovellusten näkökulmasta kiinnostavia ovat maksimaalisesti lomittuneet tilat. Kahden hiukkasen tapauksessa näistä käytetään nimitystä *Bellin tilat* ja useamman hiukkasen tapauksessa *yleistetyt GHZ-tilat*.

Bellin teoreeman ohella on olemassa muita tapoja osoittaa kvanttimekaniikan erityinen luonne suhteessa lokaaliin realismiin, esimerkiksi Feynmanin muotoilema kaksoisrakokoe [49, 100] ja Kochen-Specker-argumentit [230, 233]. Näillä on omat heikkoutensa verrattuna Bellin ensimmäisenä esittelemään ja myöhemmin yleistettyyn, kokeelliseen testaukseen soveltuvaan epäyhtälörelaatioiden joukkoon.

---

2. Kvanttimekaanisen korrelaatiot ovat epälokaaleja siinä mielessä, että niitä ei voida kuvata lokaalirealistisella mallilla. Ne eivät kuitenkaan mahdollista valoa nopeampaa viestintää eli ovat signaalittomia (eng. *non-signaling*), sillä paikallisesti suoritettavia mittauksia ei voida käyttää viestien välittämiseen [148, s. 880].

Bellin epäyhtälöiden heikkous lomittumisen karakterisoinnissa on se, että ne eivät pysty näyttämään lomittumisen voimakkuutta tarkasti verrattuna erityisiin lomittumisen mittareihin (mm. entropiamitat ja geometriset mitat) eivätkä ne juurikaan yleisty lomittumisen havaitsemisen näkökulmasta useamman kuin kahden hiukkasen tapauksiin [235, 236].

Laaaja tutkimuskenttä on myös sekoittuneiden tilojen lomittuminen ja sen sovellukset, kuten mm. kvantti-virheenkorjaus [129, 148]. Sekoittunut tila kuvaa järjestelmää silloin, kun tilaa ei tarkasti tiedetä, mutta mahdollisten tilojen todennäköisyysjakauma tunnetaan. Tämä vastaa tilannetta laboratoriossa. Sekoittuneista kvanttituloista voidaan muodostaa pienempi joukko maksimaalisesti lomittuneita puhtaita tiloja [90, 192].

Tässä tutkielmassa keskitytään Bell-tyypin epäyhtälöiden ja kvanttilomittumisen välisen relaation kuvailuun puhtaiden lomittuneiden kubittien tapauksessa. Luvussa 2 esitellään tarvittava kvanttimekaniikan perusformalismi sekä muutamia luvussa 3 sekä 4 käytettäviä tuloksia spin- $1/2$ -hiukkasille. Luvussa 3 käsitellään Bell-tyypin epäyhtälöiden historiaa, piilomuuttujia, korrelaatiopohjaisia Bellin epäyhtälöitä ja epäyhtälöiden kokeellista tutkimusta sekä osoitetaan Gisinin teoreema kahden kuditin tapauksessa [62, 120]. Luvussa 4 tutustutaan Bellin teoreemaan pohjaviin lokaalin realismin testeihin, jotka eivät sisällä epäyhtälöitä [130, 131, 135, 136] vaan joissa testi perustuu algebralliseen ristiriitaan. Päätuloksena osoitetaan Gisinin teoreema eli puhtaiden tilojen lomittumisen ja Bell-tyypin epälokaalisuuden ekvivalenssi  $n$ :lle kubitille yleistetyssä GHZ-tilassa Hardyn NLWI-argumenttiin pohjautuvaa epäyhtälöä käyttäen [61, 189]. Gisinin teoreema todistettiin vuonna 2012 yleisimmässä muodossaan eli  $n$ :lle puhtaalle kuditille [255, 256].

## Tutkielmassa käytetyt merkinnät

Tutkielmassa käytetyt matemaattiset perusmerkinnät ovat taulukoissa I, II ja III. Taulukossa IV ovat yleisimmät käytetyt lyhenteet. Joidenkin erikoismerkintöjen osalta (luku) on merkitty sulkeisiin selityksen perään. Luvuissa 3 ja 4 lisämerkintöjä esitellään tarpeen mukaan. Yhtälöihin viitataan numerolla sulkumerkkien sisäpuolella, esimerkiksi yhtälö (2.4). Lukuihin ja kuviin viitataan pelkällä numerolla, esimerkiksi luku 3.3. Taulukoihin viitataan roomalaisilla numeroilla, esimerkiksi taulukko I. Suorien sitaattien numeroinnissa käytetään kreikkalaisia aakkosia, esimerkiksi sitaatti  $\delta$ .

**Taulukko I:** Merkinnät; avaruus ja kannat

Merkintä	Selitys
$n$	Hiukkasten lukumäärä ( <i>number</i> )
$m$	Mittauksen lukumäärä ( <i>measurement</i> )
$d, r$	Tilan vapausasteiden lukumäärä ( <i>dimension</i> )
$\mathbb{C}^d$	$d$ -ulotteinen Hilbertin avaruus
$ \psi\rangle$	Hilbertin avaruuden tilavektori eli tila.
$\langle\psi $	Duaali vektorille $ \psi\rangle$ .
$\langle\psi \phi\rangle$	Vektorien $ \psi\rangle$ ja $ \phi\rangle$ sisätulo
$\   \psi\rangle \  = \ \psi\  = \sqrt{\langle\psi \psi\rangle}$	Tilan $ \psi\rangle$ $\mathbb{L}_2$ -normi
$ \psi\rangle\langle\phi $	Vektorien $ \psi\rangle$ ja $ \phi\rangle$ ulkotulo
$ i\rangle$	Avaruuden $\mathbb{C}^d$ i:s yksikkökantavektori
$\mathbf{r}$	Yleinen yksikkövektori
$\{ 0\rangle,  1\rangle\}$	Kaksitilajärjestelmän laskennallinen kanta
$\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$	Kahden Hilbertin avaruuden $\mathbb{C}^d$ tensoritulo
$ \psi\rangle \otimes  \phi\rangle =  \psi\rangle \phi\rangle =  \psi\phi\rangle$	Vektorien $ \psi\rangle$ ja $ \phi\rangle$ tensoritulo
$ \Psi\rangle^\pm,  \Phi\rangle^\pm$	Bellin tilat (luku 2.3.1)
$ \psi\rangle_{\text{GHZ}}$	Yleinen GHZ-tila (luku 2.5.4)
$\mathcal{K}(\mathbb{C}^d) = \mathcal{K}$	Avaruuden $\mathbb{C}^d$ ortonormaali kanta



**Taulukko II:** Merkinnät; observaabelit ja operaattorit.

Merkintä	Selitys
$O$	Observeabeli nimeltään $O$
$\mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$	Avaruuden $\mathbb{C}^d$ lineaaristen operaattoreiden joukko
$\hat{O} (\in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d})$	Operaattori nimeltään $\hat{O}$ tai vastaava matriisi
$o_i$	Operaattorin $\hat{O}$ $i$ :s ominaisarvo
$ o_i\rangle$	Ominaisarvo $o$ vastaava ominaisvektori
$\hat{O}^*$	Operaattorin $\hat{O}$ kompleksikonjugaatti
$\hat{O}^\dagger$	Operaattorin $\hat{O}$ Hermiten konjugaatti, $\hat{O}^\dagger = (\hat{O}^*)^T$
$\hat{O}^T$	Operaattorin $\hat{O}$ transpoosi
$\hat{O}^{-1}$	Operaattorin $\hat{O}$ käänteisoperaattori, $\hat{O} \hat{O}^{-1} = I$
$\hat{A} \otimes \hat{B}$	Operaattoreiden $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ tensoritulo
$o_{ij}$	Operaattorin $\hat{O}$ matriisielementti kohdassa $ij$ .
$\hat{P}$	Projektio-operaattori
$\hat{B}_M$	Bell-Mermin-operaattori (luku 3.4.4)
$\rho$	Tiheysoperaattori
$\rho_A$	Redusoitu tiheysoperaattori osajärjestelmälle A
$\hat{U}$	Unitaarinen operaattori, $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = I$
$I$	Yksikköoperaattori, $I \psi\rangle =  \psi\rangle$
$\langle\psi \hat{O}\phi\rangle = \langle\psi \hat{O}^\dagger \phi\rangle$	Sisätulo, kun operaattori $\hat{O}$ mukana
$\mathcal{E}(\hat{O}) \equiv \langle\psi \hat{O} \psi\rangle \equiv \langle\hat{O}\rangle$	Operaattorin $\hat{O}$ odotusarvo puhtaassa tilassa $ \psi\rangle$
$\text{Tr}(\rho)$	Operaattorin $\rho$ jälki
$\text{Tr}(\rho\hat{O})$	Operaattorin $\hat{O}$ odotusarvo tilassa $\rho$
$\Delta\hat{O} = \langle\hat{O}^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle^2$	Operaattorin $\hat{O}$ dispersio eli varianssi

**Taulukko III:** Merkinnät; muut merkinnät.

Merkintä	Selitys
$P_{+-}$	Todennäköisyys, liittyy spin-mittauksiin
$c^*$	Kompleksiluvun $c$ kompleksikonjugaatti
$ \chi_{A+}\rangle$	Spin-aaltofunktio hiukkaselle A ominaisvektorin suuntaan
$ \chi_{A-}\rangle$	Spin-aaltofunktio hiukkaselle A ominaisvektoria päinvas- taiseen suuntaan
A, B	Kahden hiukkasen järjestelmän tarkasteltavat hiukkaset
$\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D$	Hiukkasen A, B, C tai D mittaussuunnan yksikkövektori
$\sigma_i, i = 1, 2, 3$	Paulin $2 \times 2$ spin-matriisi tai operaattori
$S_i, i = 1, 2, 3$	Spin-komponentti, $S_i = 1/2\sigma_i$
$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$	Paulin matriisit $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ sisältävä vektori
$s_\theta, s_{\theta/2}$	Lyhennysmerkinnät suureille $\sin(\theta)$ ja $\sin(\theta/2)$
$c_\theta, c_{\theta/2}$	Lyhennysmerkinnät suureille $\cos(\theta)$ ja $\cos(\theta/2)$
$\alpha_{AB}$	Mittaussuuntien $\mathbf{r}_A$ ja $\mathbf{r}_B$ välinen kulma
$e^{i\xi}$	Globaali vaihetekijä, $ e^{i\xi}  = 1$
$t_{\beta_k}$	Lyhennysmerkinnät suurelle $\tan(\beta_k)$
$\hbar = 1 = c$	Luonnolliset yksiköt
$\delta_{ij}$	Kroneckerin delta
$\epsilon_{ijk}$	Levi-Civita- eli permutaatiotensori
$\lambda$	Piilomuuttuja(t) (luku 3)
$\rho_\lambda$	Klassinen todennäköisyystiheys (luku 3)

**Taulukko IV:** Työssä käytetyt lyhenteet

Lyhenne	Selitys
EPR	Einstein-Podolsky-Rosen-argumentti (3.1)
EPRB	EPR-argumentti spin $1/2$ -hiukkasille (3.1.3)
GHZ / GHSZ	Greenberber-Horne-Zeilinger-argumentti (4.1)
KS	Kochen-Specker-argumentti (3.4)
PDC / SPDC	Spontaani parametrinen alaspäin konversio (3.5.4)
CHSH	Clauser-Horne-Shimony-Holt-argumentti (3.3.2)
CH	Clauser-Horne-argumentti tai epäyhtälö (3.3.3)
LHVT	Lokaali piilomuuttujateoria (3.2)
NLWI	Epälokaalisuus ilman epäyhtälöitä (4)
LOCC	Lokaalit operaatiot ja klassinen viestintä (2.5)

## Luku 2

### Matemaattiset perusteet

Tässä luvussa kerrataan tarpeellisilta osin kvanttimekaniikan perusteoriaa. Käsitteillä *kvanttimekaniikka* ja *kvanttiteoria* tarkoitetaan samaa asiaa. Muotoilu tehdään perinteisen tulkinnan mukaisesti. Kvanttimekaniikan postulaatit on sijoitettu matemaattisen formalismin joukkoon ja numeroitu teoksen [192] esittelyjärjestyksen mukaisesti. Ensimmäinen luku yhdistää asioita kirjoista [19, 46, 88, 105, 154, 155, 192, 199, 215] ja [37] sekä muutamista artikkeleista.

#### 2.1 Hilbertin avaruudesta

Tarkastellaan äärellisulotteisia kompleksiarvoisia täydellisiä sisätuloavaruuksia eli *Hilbertin avaruuksia*  $\mathbb{C}^d$ , missä  $d \in \mathbb{N}$  on avaruuden *dimensio*. Ääretönulotteisia Hilbertin avaruuksia ei käsitellä. Ne tulevat kyseeseen fysikaalisen järjestelmän jatkuvien suureiden, kuten paikan ja liikemäärän, kuvailussa. Kvanttimekaniikassa hiukkasen (järjestelmän) karakterisoi *aaltofunktio* eli *tila*  $\psi$ , joka antaa tietoa mm. hiukkasen paikasta, liikemäärästä, spinistä ja hiukkasen tilan aikariippuvuudesta sekä muista fysikaalisista ominaisuuksista, kun tilaan sovelletaan sopivia matemaattisia operaatioita (luku 2.2). Kvanttimekaniikan ensimmäinen postulaatti sanoo, että  $\psi$  antaa tarkimman mahdollisen tiedon järjestelmästä, mutta määrittää vain todennäköisyyksiä ja odotusarvoja mittaustuloksille (luku 2.2.4).

*Diracin notaation* mukaan avaruuden  $\mathbb{C}^d$  puhdasta *tilavektoria* merkitään  $|\psi\rangle$  (luku 2.1.4). Käsitellään tiloja, joilla on  $d \in \mathbb{N}$  vapausastetta mitattavan ominaisuuden suhteen. Tila  $|\psi\rangle$  voi muuttua muotoaan joko mittauksen (luku 2.2.4) tai unitaarisen aikakehityksen (luku 2.2.5) seurauksena. Tutkielmassa käytetään yksiköitä  $\hbar = 1 = c$ .

##### 2.1.1 Perusominaisuuksia

Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{C}$  ja  $|\psi\rangle, |\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathbb{C}^d$ . Avaruuden  $\mathbb{C}^d$  tunnetut perusoperaatiot vektoreille ja kompleksiluvuille, poislukien täydellisyys, ovat allekkain yhtälöissä

(2.1a)–(2.1e):

$$|\psi\rangle + |\phi\rangle = |\phi\rangle + |\psi\rangle, \quad (2.1a)$$

$$|\psi\rangle + (|\phi\rangle + |\chi\rangle) = (|\psi\rangle + |\phi\rangle) + |\chi\rangle, \quad (2.1b)$$

$$a(b|\psi\rangle) = (ab)|\psi\rangle = b(a|\psi\rangle), \quad (2.1c)$$

$$(a + b)|\psi\rangle = a|\psi\rangle + b|\psi\rangle, \quad (2.1d)$$

$$a(|\psi\rangle + |\phi\rangle) = a|\psi\rangle + a|\phi\rangle. \quad (2.1e)$$

Kompleksiarvoinen *sisätulo*  $\langle\psi|\phi\rangle \in \mathbb{C}$  on *konjugaattilineaarinen* (lineaarinen) ensimmäisen (toisen) vektorin suhteen ja siihen liitetään luonnolliseen tapaan  $\mathbb{L}_2$ -normi  $\| |\psi\rangle \| \equiv \|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1$ . Oletetaan jatkossa, että kaikki esiteltävät tilat  $|\psi\rangle$  ovat normitettuja.

Yhtälöt (2.2a)–(2.2f) alla tiivistävät sisätulon ja normin ominaisuudet avaruudessa  $\mathbb{C}^d$ :

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1, \quad (2.2a)$$

$$|\xi\rangle = (|\psi\rangle + |\phi\rangle) / \|\psi\rangle + |\phi\rangle\| \in \mathbb{C}^d, \quad (2.2b)$$

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*, \quad (2.2c)$$

$$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0, \quad \langle\psi|\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0, \quad (2.2d)$$

$$\langle c\psi|\phi\rangle = c^* \langle\psi|\phi\rangle, \quad \langle\psi|c\phi\rangle = c \langle\psi|\phi\rangle, \quad (2.2e)$$

$$|\langle\phi|\psi\rangle| \leq \|\phi\| \|\psi\|, \quad (2.2f)$$

$$\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|. \quad (2.2g)$$

Tulos (2.2f) on nimeltään *Schwarzin epäyhtälö* [105] ja tulos (2.2g) puolestaan *suunnikassääntö* [241]. Sisätulon  $\langle\phi|\psi\rangle$  vasemmanpuoleinen vektori  $\langle\phi| = (|\phi\rangle)^\dagger$  on (*Hermiten*) *konjugoitu* eli *duaali (bra-vektori)*, toisin sanoen lineaarikuvaus avaruudelta  $\mathbb{C}^d$  kompleksiluvuille. Vektoriavaruuden  $\mathbb{C}^d$  yksiulotteista *aliavaruutta* kutsutaan *säteeksi (ray)*. Tilat  $|\psi\rangle$  vastaavat säteitä siinä mielessä, että tilan kertominen globaalilla vaihetekijällä  $e^{i\xi}$  ei muuta tilan fysikaalisia ominaisuuksia, kuten odotusarvoa.

### 2.1.2 Kanta ja superpositio

Avaruudelle  $\mathbb{C}^d$  rakennetaan esimerkiksi Gramin-Schmidtin menetelmällä [192, s. 66] *ortonormaali kanta*, jatkossa lyhyesti *kanta*  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbb{C}^d) = \{|i\rangle\}_{i=1}^d$ . Kanta on *täydellinen tilajoukko*, joka pitää sisällään täsmälleen  $d$  keskenään lineaarisesti riippumattonta *kantatilaa* eli yksikkövektoria  $|i\rangle$ . Valitsemalla  $r \leq d$  kappaletta kantavektoreita rakennetaan  $r$ -ulotteinen *aliavaruus*  $\mathbb{C}^r$ . Kantatilat ovat ortonormaaleja eli  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ , missä  $\delta_{ij}$  on *kroneckerin delta*.

Puhdas tila  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$  (luku 2.1.4) ja sen duaali  $\langle\psi|$  voidaan lausua yhdistelminä

kantatiloista. Tätä kutsutaan *superpositioperiaatteeksi*:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d a_i |i\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix}, \quad (2.3a)$$

$$\langle\psi| = \sum_{i=1}^d a_i^* \langle i| = [a_1^*, \dots, a_d^*], \quad a_i \in \mathbb{C} \quad \forall i = 1, \dots, d. \quad (2.3b)$$

Termi  $a_i^*$  tarkoittaa vektorin  $|\phi\rangle$   $i$ :nnen kantavektorin kertoimen kompleksikonjugaattia. Kertoimet  $a_i$  sisältävät mahdollisesti *vaihetekijöitä*. Kahden vektorin  $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathbb{C}^d$ ,  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d a_i |i\rangle$ ,  $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^d b_j |j\rangle$  sisätulo  $\langle\psi|\phi\rangle \in \mathbb{C}$  kirjoitetaan ortonormaalien kannan  $\mathcal{K}$  avulla muodossa

$$\langle\psi|\phi\rangle = \sum_{i,j=1}^d a_i^* b_j \underbrace{\langle i|j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^d a_i^* b_i = [a_1^* \quad \dots \quad a_d^*] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Vektorin  $|\psi\rangle$  sisätulo kantavektorin  $|j\rangle$  kanssa antaa kertoimen  $a_j$ :

$$\langle j|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d a_i \langle j|i\rangle = \sum_{i=1}^d a_i \delta_{ij} = a_j \quad (2.5)$$

Sijoittamalla yhtälön (2.5) tulos yhtälöön (2.3) havaitaan, että

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d |i\rangle \langle i|\psi\rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^d |i\rangle \langle i| = I, \quad (2.6)$$

jossa  $I$  on yksikköoperaattori. Tulosta (2.6) kutsutaan *täydellisyysrelaatioksi* ja sitä tarvitaan useiden kvanttimekaniikan perustulosten todistuksissa.

### 2.1.3 Laskennallinen kanta

Kun  $d = 2$ , muodostavat avaruuden  $\mathbb{C}^2$  ortonormaalien kannan vektorit

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Tästä kannasta käytetään yleisesti nimitystä *laskennallinen kanta* tai *standardikanta*. Kanta voidaan tarvittaessa vaihtaa. Jos tila  $|\psi\rangle$  on esimerkiksi muotoa  $|\psi\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle)$ , esitetään  $|\psi\rangle$  vektoreiden  $|u\rangle = 2^{-1/2}[1 \ 1]^T$  ja  $|v\rangle = 2^{-1/2}[1 \ -1]^T$  muodostamassa kannassa täydellisyysrelaation (2.6) avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = I |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle \langle u| + |v\rangle \langle v|) (|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\langle u|0\rangle + \langle u|1\rangle)|u\rangle + \underbrace{(\langle v|0\rangle + \langle v|1\rangle)}_{=0}|v\rangle] \\ &= |u\rangle, \end{aligned} \quad (2.8)$$

eli tila  $|\psi\rangle$  on sama kuin kantavektori  $|u\rangle$ . Yleisemmin kannanvaihdosta vastaavat *unitaariset operaattorit* (luku 2.2.5).

### 2.1.4 Puhtaat ja sekoittuneet tilat

*Puhdas kvanttitila (pure state)*  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$  tunnetaan täsmällisesti. Käytännössä hyvin suunniteltu *preparointi* eli *esimittaus* tuottaa mahdollisimman puhtaita tiloja. Puhtaat tilat ovat kuitenkin teoreettisia idealisointeja. Joskus tila tunnetaan vain osittain, käytännön mittaussprosesseihin liittyy epätarkkuutta, eikä järjestelmä käytännössä koskaan ole täysin eristetty ympäristöstään<sup>1</sup>. Tällaisessa tapauksessa järjestelmää kuvaa ns. *sekoittunut tila*  $|\psi_S\rangle$  (*mixed state*) [6]:

$$|\psi_S\rangle = \sum_{i=1}^r p_i |\psi_i\rangle, \quad \forall i = 1, \dots, r : 0 \leq p_i \leq 1 \text{ ja } \sum_{i=1}^r p_i = 1, \quad (2.9)$$

Summaus yhtälössä (2.9) on kaikkien puhtaita tiloja  $|\psi_i\rangle \in \mathbb{C}^d$  vastaavien indeksein  $i$  yli, joilla on nollasta eroava todennäköisyys  $p_i$ . Huomaa, että Hilbertin avaruuden kantatilojen tunnettu lineaarikombinaatio on eri asia kuin sekoittunut tila  $|\psi_S\rangle$ . Tilat  $|\psi_i\rangle$  ovat lineaarikombinaatiota avaruuden  $\mathbb{C}^d$  kantatiloista eli  $|\psi_i\rangle = \sum_{j=1}^d \alpha_{ji} |j\rangle$ ,  $\alpha_{ji} \in \mathbb{C}$ .

Puhtaat tilat kuvaavat maksimaalista järjestelmästä saatavilla olevaa tietoa. Sekoittuneet tilat antavat epätäydellistä informaatiota ja esittävät ”tietämättömyyttä” puhtaasta tilasta, jossa järjestelmä on mittaushetkellä [230]. Puhutaan myös *puhtaista (sekoittuneista) ensembleistä* eli tilajoukoista, joihin kuuluu vain puhtaita (sekoittuneita) tiloja.

### 2.1.5 Vaihetekijöistä

Tarkastellaan esimerkkinä puhtaita tiloja  $|\psi\rangle$  ja  $|\psi'\rangle = e^{i\xi}|\psi\rangle$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . Tilat  $|\psi\rangle$  ja  $|\psi'\rangle$  ovat *globaalia vaihetekijää* (*overall / global phase*)  $e^{i\xi}$  vaille sama tila. Globaali vaihe ei vaikuta mittaustulosten statistiikkaan eli *odotusarvoihin* (luku 2.2.4) ja  $|e^{i\xi}| = 1$ . Jos  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$  ja  $|\psi'\rangle = e^{i\xi}|\psi\rangle$  ovat kaksi tilaa, operaattorille  $\hat{O}$  saadaan

$$\langle\psi'|\hat{O}|\psi'\rangle = \langle\psi|e^{-i\xi}\hat{O}e^{i\xi}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle \quad (2.10)$$

Täten globaalilla vaihetekijällä varustettu tai ilman vaihetekijää esiintyvä tila ovat fysikaalisessa mielessä ekvivalentteja. Vaihetekijän merkkiä ei voida tietää, sillä se ei näy kokeissa [19].

*Suhteellinen vaihe* viittaa vaihetekijään superposition osassa, esimerkiksi  $|\psi\rangle + e^{i\xi}|\psi'\rangle$ . Kun  $|\psi\rangle = |0\rangle$  ja  $|\psi'\rangle = |1\rangle$ , voidaan määritellä normitetut tilat

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \text{ ja } \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.11)$$

jotka eroavat suhteellisella vaiheella  $e^{i\pi} = -1$  eli  $2^{-1/2}(|\psi\rangle + |\psi'\rangle) = 2^{-1/2}(|\psi\rangle - e^{i\pi}|\psi'\rangle)$ . Suhteelliset vaiheet riippuvat valitusta tarkateltavan Hilbertin avaruuden kannasta  $\mathcal{K}$  ja aiheuttavat havaittavia eroja odotusarvoissa, joten yhtälön (2.11) tilat eivät ole fysikaalisessa mielessä ekvivalentteja.

1. Mittalaitteiston ja mitattavan hiukkasen vuorovaikuttaessa laitteiston ja hiukkasen tilat voivat olla myös *lomittuneita* (luku 2.5)

### 2.1.6 Kubiteista

*Kubitti* eli kvanttilaskennan bitti [222] (*qubit*) on kvanttimekaaninen tila  $\psi \in \mathbb{C}^2$ , joka muodostetaan kantatilojen  $|0\rangle$  ja  $|1\rangle$  lineaarikombinaationa:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (2.12)$$

Tavallinen eli klassinen bitti on aina määrättyssä tilassa, mutta kubitti voi ennen mitausta (luku 2.2.4) olla yhdistelmä kantatiloista (superpositioperiaate). Vastaavasti kahden kubitin järjestelmä voi olla yhdistelmä neljästä kantatilasta ja yleisemmin  $n$ :n kubitin järjestelmä  $2^n$ :stä tilasta. Teoriassa kubitit mahdollistavat erittäin suuren edun rinnakkaislaskennassa verrattuna tavallisiin bitteihin [81, s. 15].

Mitattaessa kubitin (2.12) arvo saadaan tulokseksi joko 0 todennäköisyydellä  $|\alpha|^2$  tai 1 todennäköisyydellä  $|\beta|^2$  eli kubitti on *dikotominen* (kaksiarvoinen). Aina havaitaan joko  $|0\rangle$  tai  $|1\rangle$ , ei molempia tai niiden yhdistelmää. Koska  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , voidaan yhtälö (2.12) kirjoittaa muodossa

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (2.13)$$

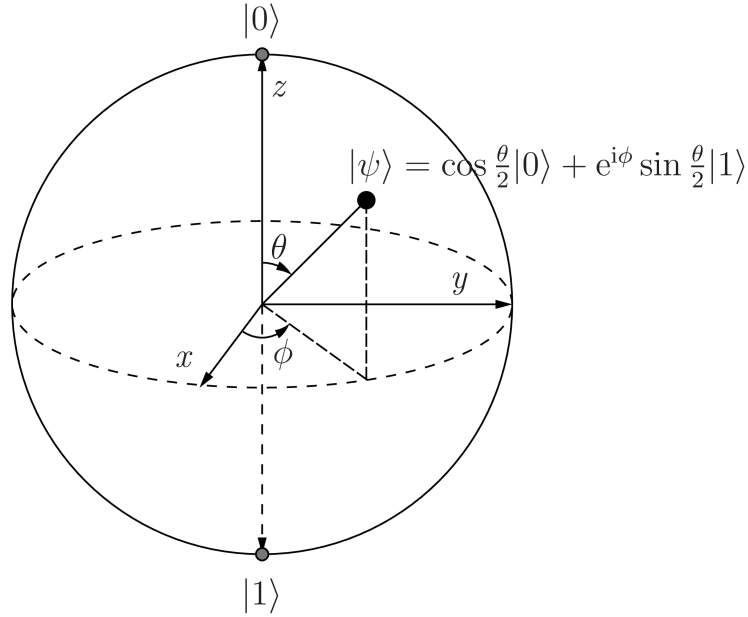
jossa kulmat  $\theta$  ja  $\phi$  määrittelevät pisteen *Blochin kehällä* (kuva 2.1) ja vastaavat avaruuden  $\mathbb{R}^3$  kiertoja (kuva 2.2). Esimerkiksi tila  $|0\rangle$  sijaitsee  $z$ -akselilla,  $|0\rangle + |1\rangle$   $x$ -akselilla ja  $|0\rangle + i|1\rangle$   $y$ -akselilla. Malli toimii hyvin yhden kubitin ominaisuuksien ja kubitille tehtävien lokaalien operaatioiden, kuten esimerkiksi kiertojen, ymmärtämisen tukena. Mallia ei voida suoraan yleistää useamman kubitin järjestelmille. Vastaava tiheysoperaattori on muotoa

$$\begin{aligned} |\psi\rangle\langle\psi| &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(I + \sigma \cdot \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

jossa  $\mathbf{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  on yleinen yksikkövektori.

Spin-1/2-hiukkaset ovat eräs kubitin ilmentymä todellisuudessa (tämän osoittaa esimerkiksi Sternin ja Gerlachin koe, luku 3.1.3). Niillä on tärkeä historiallinen merkitys *lokaalin realismin* ja kvanttimekaniikan yhteensopivuuden teoreettisessa tarkastelussa (luku 3). Myöhemmin esitettävien tulosten, kuten *Bellin epäyhtälön* ja *Gisinin teoreeman*<sup>2</sup> näkökulmista katsottuna valinta käyttää spin-1/2 -hiukkasta kubittina ei ole kuitenkaan ainoa mahdollinen. Kubitit realisoituvat kokeellisessa tutkimuksessa myös esimerkiksi fotonien polarisaatioina [199] tai elektronien energiatasoina [122]. Jos järjestelmällä on useampia tiloja ( $d \geq 3$ ), esimerkiksi korkeamman spinin tilat, puhutaan *kuditista* (*qudit*).

2. Bellin teoreemaa käsitellään luvussa (3.3) ja Gisinin teoreemaa luvussa 3.6.



**Kuva 2.1:** Blochin kehä -esitys kubitista [192].

## 2.2 Hilbertin avaruuden operaattoreista

Avaruuden  $\mathbb{C}^d$  vektoreita muuttavat toisiksi avaruuden vektoreiksi (kiertävät, skaalaavat, permutoivat järjestystä, ...) *operaattorit* eli *rajoitetut ja jatkuvat lineaarikuvaukset* avaruudelta  $\mathbb{C}^d$  itselleen:

$$\hat{O} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}, \quad \hat{O} : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d. \quad (2.15)$$

Joukko  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  on operaattoreiden joukko eli *operaattorialgebra*.

### 2.2.1 Perusominaisuuksia

Kun  $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  ja  $a, b \in \mathbb{C}$ , avaruudessa  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  ovat operaattorien laskutoimituksille voimassa ehdot

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}, \quad (2.16a)$$

$$\hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}) = (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C}, \quad (2.16b)$$

$$a(\hat{A} + \hat{B}) = a\hat{A} + a\hat{B}, \quad (2.16c)$$

$$(a + b)\hat{A} = a\hat{A} + b\hat{A}, \quad (2.16d)$$

$$a(b\hat{B}) = (ab)\hat{B}. \quad (2.16e)$$

Lineaarisuuden ansiosta tilaan operointi palautuu operointiin kantavektoreihin  $|i\rangle$ :

$$\hat{O}|\psi\rangle = \hat{O} \sum_{i=1}^d a_i |i\rangle = \sum_{i=1}^d a_i \underbrace{\hat{O}|i\rangle}_{\in \mathbb{C}^d}. \quad (2.17)$$



Lähtöavaruudella ja tuloavaruudella voivat olla eri dimensiot ja erilaiset ortonormaalit kannat. Tässä työssä käsitellään operaattoreita, joiden lähtö- ja tuloavaruuden dimensio on sama.

Operaattoreille  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  ei yleisesti päde  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ . Kun yhtälö on voimassa sanotaan, että operaattorit  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  *kommutoivat* eli operaattoreiden kommutaattori  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  on nolla. Kommutoivat operaattorit voidaan mitata samanaikaisesti samalla ”kiinnitetyllä” koejärjestelyllä. Operaattoreiden  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  *antikommutaattori* määritellään  $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$  ja jos  $\{\hat{A}, \hat{B}\} = 0$ , operaattorit  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  antikommutoivat.

Jokaista operaattoria vastaa kannan  $\mathcal{K}(\mathbb{C}^d)$  valinnasta riippuva *matriisiesitys*  $\text{Mat}(\hat{O}) \equiv \hat{O}$ . Täydellisyysrelaation (2.6) avulla saadaan

$$\hat{O} = I \hat{O} I = \sum_{i,j=1}^d |i\rangle\langle i| \hat{O} |j\rangle\langle j| = \sum_{i,j=1}^d \langle i| \hat{O} |j\rangle |i\rangle\langle j| = \sum_{i,j=1}^d o_{ij} |i\rangle\langle j|, \quad (2.18)$$

jossa elementit  $\langle i| \hat{O} |j\rangle = o_{ij} \in \mathbb{C}$  lasketaan vektoreiden  $|i\rangle$  ja  $\hat{O} |j\rangle$  sisätulosta jokaiselle  $i, j = 1, \dots, d$ .

Yksinkertaisimmillaan operaattori voidaan ajatella *ulkotulona*  $|\psi\rangle\langle\psi|$ , joka operoidessa tilaan  $|\phi\rangle$  antaa uuden tilan  $\langle\psi|\phi\rangle|\psi\rangle$ ,  $\langle\psi|\phi\rangle \in \mathbb{C}$ . Kun  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d a_i|i\rangle$  ja  $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^d b_j|j\rangle$ , saa ulkotulo  $|\psi\rangle\langle\psi|$  matriisimuodon

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & \cdots & a_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_1^* & a_1 a_2^* & \cdots & a_1 a_d^* \\ a_2 a_1^* & a_2 a_2^* & \cdots & a_2 a_d^* \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_d a_1^* & a_d a_2^* & \cdots & a_d a_d^* \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Yhtälön (2.4) nojalla  $\langle\psi|\phi\rangle|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d a_i^* b_i |\psi\rangle$ .

Algebralle  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  voidaan muodostaa *operaattoriavaruuden kanta* eli joukko lineaarisesti riippumattomia matriiseja, joiden lineaarikombinaationa saadaan mielivaltaisen operaattorin  $\hat{O} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  matriisimuoto. Esimerkiksi operaattorille  $\sigma_z = Z \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^2}$  (luku 2.4.2), jolle pätee  $Z|0\rangle = |0\rangle$  ja  $Z|1\rangle = -|1\rangle$ , lasketaan matriisielementit  $z_{ij}$  kannassa  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  seuraavasti:

$$z_{11} = \langle 0| Z |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad (2.20)$$

Vastaavasti  $z_{12} = 0 = z_{21}$  ja  $z_{22} = -1$ , jolloin  $Z$  saa muodon

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|. \quad (2.21)$$

Operaattori  $\hat{O}$  voi olla *kääntyvä* eli sillä on olemassa *käänteisoperaattori*  $\hat{O}^{-1}$ , joka määritellään ehdolla  $\hat{O} \hat{O}^{-1} |\psi\rangle = \hat{O}^{-1} \hat{O} |\psi\rangle = I |\psi\rangle = |\psi\rangle$ . Operaattorin  $Z$  käänteisoperaattori on  $Z$  itse eli  $Z^2 = I$ .

Operaattorin  $\hat{O}$  jälki  $\text{Tr}$  on lineaarikuvaus  $\text{Tr} : \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d} \rightarrow \mathbb{C}$ .  $\text{Tr}(\hat{O})$  on operaattoria  $\hat{O}$  vastaavan matriisin diagonaalialkioiden summa:

$$\text{Tr}(\hat{O}) = \sum_{i=1}^d \langle i | \hat{O} | i \rangle \quad (2.22)$$

Jälki on riippumaton valitusta kannasta eikä muutu unitarisella operaattorilla operoitaessa. Jos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  ja  $\hat{C}$  ovat mielivaltaisia operaattoreita, niin  $\text{Tr}(\hat{A} \hat{B} \hat{C}) = \text{Tr}(\hat{C} \hat{A} \hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B} \hat{C} \hat{A})$ . Avaruuden  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  operaattorit muodostavat sisätuloavaruu- den, kun sisätulo määritellään *Hilbertin-Schmidtin sisätulona* jäljen avulla:

$$\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}, \quad (\hat{A}, \hat{B}) \equiv \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B}) \quad (2.23)$$

Sisätuloon (2.23) liittyy *operaattorinormi*  $\|\hat{O}\|$ :

$$\|\hat{O}\| = \sqrt{\text{Tr}(\hat{O}^\dagger \hat{O})} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^d o_{ij}^* o_{ji}}, \quad (2.24)$$

### 2.2.2 Projektioista

*Ortogonaalinen projektio-operaattori*  $\hat{P} = \hat{P}_r$  eli lyhyesti *projektio* avaruuden  $\mathbb{C}^d$   $r$ -ulotteiseen aliavaruuteen  $\mathbb{C}^r$  saadaan täydellisyysrelaatiosta (2.6) summaamalla aliavaruuden virittävien vektorien  $\{|1\rangle, \dots, |r\rangle\}$  yli. Avaruuden  $\mathbb{C}^d$  kanta voidaan valita siten, että vektorit summataan indeksoinnin alusta lähtien:

$$\hat{P}_r = \sum_{i=1}^r |i\rangle\langle i| = \sum_{i=1}^r \hat{P}_i, \quad (2.25)$$

jossa  $\hat{P}_i$  on projektio 1-ulotteiseen aliavaruuteen. Projektiolle  $\hat{P}_r$  määritellään *ortogonaalinen komplementti* eli operaattori  $\hat{Q} \equiv I - \hat{P}_r$ , joka itsessään on projek- tio vektorien  $\{|r+1\rangle, \dots, |d\rangle\}$  virittämään avaruuteen. Projektiot laskennallisen kannan tiloille ovat

$$\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Projektiolle on voimassa  $\hat{P} = \hat{P}^* = \hat{P}^2$  ja projektion mahdolliset ominaisarvot ovat joko 1 tai 0.

### 2.2.3 Ominaisarvoista

Jokaiselle operaattorilla  $\hat{O} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  on olemassa joukko vektoreita  $|o_i\rangle \in \mathbb{C}^d$  ja kompleksilukuja  $o_i \in \mathbb{C}$ , joille pätee

$$\hat{O} |o_i\rangle = o_i |o_i\rangle, \quad |o_i\rangle \in \mathbb{C} \quad (2.27)$$

Arvoa  $o_i$  kutsutaan operaattorin  $\hat{O}$  ominaisarvoksi ja sitä vastaa yksi tai useampi ominaisvektori  $|o_i\rangle$ . Ominaisarvot ratkaistaan lineaarialgebran menetelmin karakteristisesta yhtälöstä  $\det(\hat{O} - o_i I) = 0$ .

Ominaisarvojen joukko muodostaa operaattorin  $\hat{O}$  spektrin eli mahdolliset mitausten tulokset (luku 2.2.4). Jos jokaista ominaisarvoa  $o_i$  vastaa täsmälleen yksi ominaisvektori  $|o_i\rangle$  sanotaan, että spektri on *degeneroimaton* ja operaattori  $\hat{O}$  on *maksimaalinen*. Kun sama ominaisarvo esiintyy spektrissä useita kertoja eli sitä vastaa useampi kuin yksi ominaisvektori, on spektri *degeneroitunut*. Rajoitutaan tässä degeneroitumattomaan tapaukseen. Degeneroitunutta tapausta käsittelee esimerkiksi artikkeli [20].

Operaattoria  $\hat{O}$  sanotaan (*ortogonaalisesti*) *diagonalisoituvaksi*, kun avaruudella  $\mathbb{C}^d$  on kanta  $\mathcal{K}$ , jossa matriisin  $\hat{O}$  lävistäjän ulkopuoliset matriisielementit  $o_{ij}$ ,  $i \neq j$  ovat nolliä. Ei-degeneroituneessa tapauksessa näitä kantoja on olemassa täsmälleen yksi. Yhtälöistä (2.18) ja (2.27) saadaan normaalin operaattorin  $\hat{O}$  *diagonaaliesitys* eli *spektraaliesitys*:

$$\hat{O} = \sum_{i,j=1}^d o_{ij} |i\rangle\langle j| = \sum_{i=1}^d o_i |o_i\rangle\langle o_i| = \sum_{o_i} o_i \hat{P}_{o_i} = \begin{bmatrix} o_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & o_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & o_d \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Operaattori  $\hat{P}_{o_i}$  on projektio ominaisarvoa  $o_i$  vastaavaan operaattorin  $\hat{O}$  ominaisvaruuteen.

## 2.2.4 Odotusarvoista, mittamisesta ja epämääräisyydestä

Ilmaisu ”fysikaalisella observaabelilla  $O$  on tietty arvo tilassa  $|\psi\rangle$ ” on sallittu siinä erikoistapauksessa, kun mittaus antaa täydellä varmuudella kyseisen arvon eli tila  $|\psi\rangle$  on observaabelia vastaavan *hermiittisen operaattorin*  $\hat{O}$  (luku 2.2.5) *ominaistila*. Yleisesti ei voida sanoa, että observaabelilla olisi määrätty arvo annetussa tilassa, vaan puhutaan *keskimääräisestä arvosta*. Operaattorin  $\hat{O}$  *statistinen odotusarvo*  $\mathcal{E}(\hat{O}) \equiv \langle \hat{O} \rangle$  on sisätulo  $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$ , mikäli  $|\psi\rangle$  on normitettu. Käyttämällä spektraaliesitystä (2.28) saadaan puhtaan tilan  $|\psi\rangle$  odotusarvoksi ei-degeneroituneessa tapauksessa painotettu summa ominaisarvoista  $o_i$ :

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \langle \psi | \left( \sum_{i=1}^d o_i |o_i\rangle\langle o_i| \right) | \psi \rangle = \sum_{i=1}^d |\langle o_i | \psi \rangle|^2 o_i = \sum_{i=1}^d p(o_i) o_i. \quad (2.29)$$

Ominaisarvon  $o_i$  todennäköisyys  $p(o_i) = |\langle o_i | \psi \rangle|^2$  tarkoittaa operatiivisessa mielessä frekvenssitulkintaa tilastolliselle ensemblelle suoritetuille mittauksille [43]. Kun suoritetaan mittaus ja siitä saadaan tulos  $o_i$ , on järjestelmän tila mittauksen jälkeen

$$|\psi\rangle = \frac{|o_i\rangle}{\sqrt{p(o_i)}}. \quad (2.30)$$

Yhtälöstä (2.30) käytetään nimitystä *projektiopostulaatti* tai *aaltofunktion romahdaminen*: Kun observaabelin  $O$  mittaus antaa tuloksena vastaavan operattorin  $\hat{O}$  ominasarvon  $o_i$ , on järjestelmä välittömästi mittauksen jälkeen arvoa  $o_i$  vastaavassa ominaistilassa  $|o_i\rangle$ .

Projektiomittaus voidaan toistaa ja heti suoritettun mittauksen jälkeen suoritettu uusintamittaus antaa saman tuloksen kuin ensimmäinen mittaus eli  $\hat{P}_j \hat{P}_i = \delta_{ij} \hat{P}_i$ . Voidaan kysyä, millä perusteella mittaaminen aiheuttaa järjestelmän aikakehitykseen ”välittömän” ja epäjatkuvan muutoksen? Kvanttimekaniikan tulkinnat, kuten mm. kööpenhaminalainen, stokastinen ja monimaailmatulkinta [19, 154, 157], pyrkivät tuomaan asiaan selkoa. Tällä hetkellä ei tiedetä, mikä tulkinnoista on oikea [169].

Tarkastellaan esimerkkinä kubittia laskennallisessa kannassa<sup>3</sup>. Tilojen  $|0\rangle$  ja  $|1\rangle$  mittaamiseen soveltuvat operaattorit ovat yhtälössä (2.26). Jos mitattava tila on  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ , todennäköisyys mittaustulokselle 0 on

$$p(0) = \langle \psi | \hat{P}_0 | \psi \rangle = |a|^2. \quad (2.31)$$

Tila mittauksen jälkeen on  $\hat{P}_0 |\psi\rangle / |a| = a|0\rangle / |a|$ , missä vaihetekijä  $a/|a|$  ei vaikuta odotusarvoihin (luku 2.1.5).

Kvantti-informaatioteoria sisältää useita avoimia ongelmia, joihin ratkaisuja etsitään yleisen mittausteorian avulla. Eräs ongelma on esimerkiksi löytää optimaalinen tapa erottaa toisistaan joukko ei-ortogonaalisia kvanttitiloja<sup>4</sup>. Kvanttimittausta kuvaa kokoelma  $\{\hat{M}_t\}$  mittauseraattoreita, missä  $t$  viittaa mittauksen tulokseen (kvanttimekaniikan kolmas postulaatti). Jos järjestelmän tila on  $|\psi\rangle$  ennen mittausta, todennäköisyys mittaustulokselle  $t$  on  $p(t) = \langle \psi | \hat{M}_t^\dagger \hat{M}_t | \psi \rangle$ . Järjestelmän tila mittauksen jälkeen on  $|\psi\rangle$  ja lisäksi pätee täydellisyysrelaatio erityisessä muodossa:

$$|\psi\rangle = \frac{\hat{M}_t |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{M}_t^\dagger \hat{M}_t | \psi \rangle}}, \quad (2.32a)$$

$$\sum_t \hat{M}_t^\dagger \hat{M}_t = I \Leftrightarrow 1 = \sum_t p(t) = \sum_t \langle \psi | \hat{M}_t^\dagger \hat{M}_t | \psi \rangle. \quad (2.32b)$$

Yleisen mittausteoriaa sovelletaan esimerkiksi POVM-mittauksissa (*Positive Operator-Valued Measure*). POVM-tarkastelulla voidaan erottaa toisistaan ei-ortogonaalisia kvanttiloja osassa mittaustapahtumia nielsenchuang.

Operaattorin  $\hat{O}$  *dispersio* eli *varianssi*  $\Delta_{|\psi\rangle}(\hat{O}) \equiv \Delta(\hat{O})$  tilassa  $|\psi\rangle$  on ei-negatiivinen reaalityyppinen luku, joka kuvaa  $\hat{O}$ :n tilastollista epävarmuutta eli mittaustulosten poikkeamaa odotusarvosta  $\langle \hat{O} \rangle$ :

$$\Delta(\hat{O}) = \langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2 = \langle \psi | \hat{O}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle^2. \quad (2.33)$$

3. Monipuolisempi esimerkki spinin mittauksesta mielivaltaisen yksikkövektorin suuntaan esitetään luvussa 2.4.3.

4. Ei-ortogonaalisia tiloja ei ole mahdollista erottaa toisistaan täydellä varmuudella mitattaessa [192]. Erottelu mahdollistaisi mm. valoa nopeamman viestinnän ja kubittien kloonauksen [86, 250].

Dispersio  $\Delta(\hat{O})$  katoaa täsmälleen silloin, kun tarkasteltava tila  $|\psi\rangle$  on operaattorin  $\hat{O}$  ominaistila. Kahden operaattorin  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  varianssien tulo toteuttaa *Heisenbergin epämääräisyysrelaation*<sup>5</sup>:

$$\Delta(\hat{A})\Delta(\hat{B}) \geq \frac{|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle|}{2}. \quad (2.34)$$

Epäyhtälön (2.34) perusteella kahta ei-kommutoivaa operaattoria vastaavia fysikaalisia observaabeleita ei voida mitata samanaikaisesti samalla koejärjestelyllä mielivaltaisella tarkkuudella. Relaatio (2.34) voidaan ottaa kvanttiteorian lähtökohdaksi ja sen perusteella voidaan johtaa yksinkertainen ei-relativistinen Schrödingerin yhtälö [19].

### 2.2.5 Hermiittiset ja unitaariset operaattorit

*Itseadjungoidut* eli äärellisulotteisessa tapauksessa ekvivalentisti *hermiittiset* operaattorit vastaavat kvanttiteoriassa fysikaalisia *observaabeleita* eli mitattavia suureita kuten liikemäärä, pyörimismäärä ja energia. Ne määritellään ehdoilla

$$\hat{O}^\dagger = (\hat{O}^T)^* = \hat{O}, \quad \langle\psi|\hat{O}\psi\rangle = \langle\psi\hat{O}^\dagger|\psi\rangle = \langle\hat{O}\psi|\psi\rangle. \quad (2.35)$$

Konjugoitu operaattori  $\hat{O}^\dagger$  operoi tilaan  $|\psi\rangle$  seuraavasti:  $\langle\psi|\hat{O}^\dagger|\phi\rangle = \langle\hat{O}\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{O}\psi\rangle^*$ . Tavallisesti tulkitaan, että  $\hat{O}$  operoi oikealle ja  $\hat{O}^\dagger$  vasemmalle. Jos  $\hat{O}$  on hermiittinen, tällä ei ole merkitystä. Kun  $c \in \mathbb{C}$  ja  $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$ , on voimassa  $(c\hat{A})^\dagger = c^* \hat{A}^\dagger$ ,  $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$  ja  $(|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|$ . Hermiittisen operaattorin ominaisarvot ovat reaalisia ja eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat keskenään ortogonaalisia.

Operaattori  $\hat{O}$  on *positiivinen*, jos kaikille  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$  on  $0 \leq \langle\psi|\hat{O}\psi\rangle$ . Positiivista operaattoria vastaavat ominaisarvot ovat ei-negatiivisia. Mikäli  $\langle\psi|\hat{O}\psi\rangle > 0$  sanotaan, että  $\hat{O}$  on *positiividefiniitti*. Mielivaltainen operaattori  $\hat{O} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  voidaan esittää kahden hermiittisen operaattorin  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  avulla muodossa

$$\hat{O} = \hat{A} + i\hat{B}, \quad \text{missä } \hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{O} + \hat{O}^\dagger) \text{ ja } \hat{B} = -\frac{i}{2}(\hat{O} - \hat{O}^\dagger). \quad (2.36)$$

Yhtälöstä (2.36) nähdään, että positiivinen operaattori on myös hermiittinen.

Hermiittiset operaattorit ovat määritelmänsä mukaan *normaaleja* eli kommutoivat adjungaattinsa kanssa,  $[\hat{O}, \hat{O}^\dagger] = 0$ . Normaali operaattori on hermiittinen, jos ja vain jos sen ominaisarvot ovat reaalisia. Yleisesti avaruuden  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  operaattori on diagonalisoituva, jos ja vain jos se on normaali [162]. Tuloksesta käytetään nimitystä *spektraaliteoreema*. Kommutoivilla hermiittisillä operaattoreilla  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  on samat ominaisfunktiot, ja löytyy kanta  $\mathcal{K} = \{|i\rangle\}_{i=1}^d$ , jossa ne molemmat ovat diagonaalisia

5. Epämääräisyysrelaatio voidaan johtaa käyttäen superpositioperiaatetta (2.3) ja Schwarzin epäyhtälöä (2.2f) nielsenchuang. Usein virheellisesti esitetään, perustuen Bohrin ja Heisenbergin kommentteihin objektin ja mittalaitteen erottamattomuudesta, että mittaaminen häiritsee mittauksen kohdetta ja ”mittaushäiriö” toimisi epämääräisyysrelaation teoreettisena perustana [157].

eli  $\hat{A} = \sum_{i=1}^d a_i |i\rangle\langle i|$  ja  $\hat{B} = \sum_{i=1}^d b_i |i\rangle\langle i|$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  kaikilla  $i = 1, \dots, d$  [192]. Fysikaalisesti ajatellaan, että  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  voidaan mitata samanaikaisesti ja tarkasti samalla kiinnitetyllä koejärjestelyllä.

Ehkä tunnetuin hermiittinen operaattori on Hamiltonin operaattori  $\hat{H}$ , jonka ominaisarvot kuvaavat fysikaalisen järjestelmän energiaa.  $\hat{H}$  esiintyy suljetun kvanttijärjestelmän aikaevoluution kuvailussa eli *ajasta riippuvassa Schrödingerin yhtälössä*:

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi\rangle. \quad (2.37)$$

Yhtälö (2.37) voidaan muotoilla myös *unitaarisen* operaattorin  $\hat{U}$  avulla. Unitariisuus määritellään yhtälöllä

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = I. \quad (2.38)$$

Kvanttimekaniikan toinen postulaatti sanoo, että suljettua järjestelmää tarkasteltaessa tilan  $|\psi\rangle$  evoluution  $|\psi\rangle(t_0) \rightarrow |\psi\rangle(t)$  (kun ei suoriteta mittauksia) määrää *unitaarinen aikakehitys*<sup>6</sup> [192]:

$$\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle. \quad (2.39)$$

Aikakehitysoperaattori  $\hat{U}(t)$  kirjoitetaan Hamiltonin operaattorin  $\hat{H}$  avulla muodossa  $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t)$ ; operaattorien aikakehitystä ei käsitellä työssä tarkemmin.

Unitaariset operaattorit  $\hat{U}$  vastaavat aikaevoluution ohella järjestelmälle suoritettavista lokaaleista operaatioista. Unitaarinen operointi tilaan  $|\psi\rangle$  säilyttää avaruuden  $\mathbb{C}^d$  sisätulon sekä normin ja on *reversiibeli*. Operaattori  $\hat{U}$  on *unimodulaarinen* eli operaattorin ominaisarvoille  $o_i \in \mathbb{C}$  pätee  $|o_i| = 1$  ja ominaisarvot sijaitsevat Blochin kehällä (kuva 2.1). Jos matriisi on sekä unitaarinen että hermiittinen, ovat sen mahdolliset ominaisarvot  $\pm 1$ . Unitaariset operaattorit ovat normaaleja ja täten diagonalisoituvia. Unitaarinen operaattori ei välttämättä ole hermiittinen. Esimerkiksi unitaarisen operaattorin

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

ominaisarvot  $o_{\pm} = (1 \pm i)/\sqrt{2}$  eivät ole reaalisia, joten operaattori ei ole hermiittinen.

Unitaaristen operaattoreiden avulla voidaan pilkkoa avaruuden  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  operaattoreita yksinkertaisempiin osatekijöihin eli positiivisten ja unitaaristen operaattoreiden tuloiksi. Operaattorille  $\hat{O} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$  on olemassa unitaarinen  $\hat{U}$  sekä yksikäsitteiset ja positiiviset  $\hat{A}, \hat{B}$  siten, että

$$\hat{O} = \hat{U} \hat{A} = \hat{B} \hat{U}, \quad (2.41)$$

6. Aikakehitysmalli on yhtäpitävä myös Heisenbergin yhtälön kanssa [169].

jossa  $\hat{A} \equiv \sqrt{\hat{O}^\dagger \hat{O}}$  ja  $\hat{B} \equiv \sqrt{\hat{O} \hat{O}^\dagger}$ . Tuloksesta käytetään nimitystä *polaarihajotelma*, ja sen avulla voidaan todistaa seuraava tulos [192]. Olkoon  $\hat{O} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$ . Tällöin on olemassa unitaariset operaattorit  $\hat{U}, \hat{V}$  ja sekä diagonaalimatriisi  $\hat{G}$ , jolle  $g_{ii} \geq 0$  kaikille  $i = 1, \dots, d$  siten että

$$\hat{O} = \hat{U} \hat{G} \hat{V}. \quad (2.42)$$

Tätä kutsutaan operaattorin  $\hat{O}$  *singulaariarvohajotelmaksi*. Tulosta (2.42) käytetään lukuisissa algoritmeissa laskennallisissa tieteissä sekä mm. Schmidtin hajotelman (luku 2.5.7) todistuksessa.

### 2.2.6 Tiheysoperaattori

Kvanttitilojen preparointi ei käytännössä koskaan tuota täysin puhtaita tiloja. Tarvitaan matemaattinen muotoilu kuvaamaan epätäydellisiä mittaustilanteita laboratorioissa. Näitä tilanteita vastaavat sekoittuneet tilat [199]. Kun järjestelmä koostuu useammasta osasta (luku 2.3), voi tilavektorien käyttö laskuissa olla työlästä. Vaihtoehtoisen tavan kuvailla järjestelmää tarjoaa *tiheysoperaattori*  $\rho$  (*tiheysmatriisi*). Tiheysoperaattori on kvanttimekaniikan vastine klassisen todennäköisyysteorian todennäköisyysjakaumalle  $\rho_\lambda$  (luku 3.2.3). Schrödinger [221, s. 447] kuvaili tiheysoperaattoria seuraavasti:

*It has formal character of a real physical variable, but the physical meaning of a wave function, that is to say it describes the instantaneous physical situation of the system.* (α)

Tarkastellaan sekoittuneen tilan yhtälöä (2.9). Kokoelmaa  $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$  kutsutaan *puhtaiden tilojen ensembleksi*. Tilat  $|\psi_i\rangle$  eivät välttämättä ole ortogonaalisia. Tiheysoperaattori  $\rho$  on

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.43)$$

jossa  $p_i$  on tilan  $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  todennäköisyys. Summaus voi sisältää enemmän tiloja kuin avaruuden dimensio, mutta kuitenkin äärellisen määrän. Puhtaan tilan  $|\psi\rangle$  tiheysoperaattori on projektio  $|\psi\rangle \langle \psi|$ . Jos järjestelmä on sekoittunut eli preparoitu todennäköisyydellä  $p_i$  tilaan  $\rho_i$ , kuvaa järjestelmää tiheysoperaattori  $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ . Voidaan ajatella, että jokaista operaattoria  $\rho_i$  vastaa ei-yksikäsitteinen ensemble  $\{|\psi_{ij}\rangle, p_{ij}\}$ , jolloin

$$\rho = \sum_{i=1}^d p_i \rho_i = \sum_{i=1}^d p_i \sum_{j=1}^d p_{ij} |\psi_{ij}\rangle \langle \psi_{ij}|, \quad (2.44)$$

jossa  $\rho_i = \sum_{j=1}^d p_{ij} |\psi_{ij}\rangle \langle \psi_{ij}|$  on sekoittuneeseen tilaan  $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  liittyvä tiheysoperaattori. Operaattorin  $\hat{O}$  odotusarvo  $\langle \hat{O} \rangle$  sekoittuneessa tilassa  $\sum_{i=1}^r p_i |\psi_i\rangle$  on

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{O}). \quad (2.45)$$

Mikäli tila  $\rho$  on puhdas, operaattorin  $\hat{O}$  odotusarvoksi saadaan

$$\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \hat{O}). \quad (2.46)$$

Operaattori  $\rho$  on positiivinen eli sen ominaisarvot ovat ei-negatiivisia [192, s. 101–102]. Puhtaalle tilalle on  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ , sekoittuneelle  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ , mikä nähdään laskemalla  $\text{Tr}(\rho^2) = \sum_{i=1}^d p_i^2$ : jos tila  $|\psi\rangle$  on puhdas, vain yksi  $p_i$  eroaa nolasta ja on 1, jos tila  $|\psi\rangle$  on sekoittunut, ainakin kaksi termiä  $p_i$  eroavat nolasta ja  $\sum_{i=1}^d p_i^2 < \sum_{i=1}^d p_i = 1$ . Operaattori  $\rho$  on hermiittinen, joten se voidaan diagonalisoida. Tällöin se voidaan esittää muodossa  $\rho = \sum_{i=1}^d o_i |o_i\rangle\langle o_i|$ , jossa  $0 \leq o_i \leq 1$  ja  $\sum_{i=1}^d o_i = 1$ .

## 2.3 Usean hiukkasen järjestelmät

Tähän asti on käsitelty yhtä hiukkastta. Esitelty teoria yleistyy suoraviivaisesti useammalle hiukkaselle *tensoritulon avulla*. Usean hiukkasen eli yhdistetyn järjestelmän tila-avaruus on tensoritulo osajärjestelmien tila-avaruuksista. Jos osajärjestelmät numeroidaan  $1, \dots, n$  ja  $i$ :s järjestelmä preparoidaan tilaan  $|\psi_i\rangle$ , on koko järjestelmän tila muotoa

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle. \quad (2.47)$$

### 2.3.1 Tilavektoreista

Olko avaruudet  $\mathbb{C}_A$  ja  $\mathbb{C}_B$  ja vastaavat dimensiot  $d$  ja  $r$ . Kahden hiukkasen yhdistetty tila-avaruus (*bipartite state*) on *tensorituloavaruus (tuloavaruus)*  $\mathbb{C}_A \otimes \mathbb{C}_B$ ,  $\dim(\mathbb{C}_A \otimes \mathbb{C}_B) = dr$ . Lineaariavaruus  $\mathbb{C}_A \otimes \mathbb{C}_B$  ”perii” Hilbertin avaruuden laskutoimitusten ominaisuudet. Kun avaruuksien  $\mathbb{C}_A$  ja  $\mathbb{C}_B$  kannat ovat  $\{|i\rangle\}_{i=1}^d$  ja  $\{|j\rangle\}_{j=1}^r$ , ovat tuloavaruuden kantavektorit  $|i\rangle \otimes |j\rangle \equiv |ij\rangle$ . Ortonormaalius yleistyy muodossa  $\langle i' \otimes j' | i \otimes j \rangle = \delta_{ii'} \delta_{jj'}$ . Tensoritulo on *multilineaarinen*: kun  $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d a_i |i\rangle \in \mathbb{C}_A$  ja  $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^r b_k |k\rangle \in \mathbb{C}_B$ , niin

$$|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = |\phi\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^r a_i b_k |ik\rangle. \quad (2.48)$$

Esimerkiksi kahden kubitin muodostama tensorituloavaruus  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{C}^{\otimes 2}$  on neliulotteinen. Avaruuden virittävät vektorit  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$  ja  $|11\rangle$ . Kubittien  $|\phi\rangle = u|0\rangle + v|1\rangle$  ja  $|\psi\rangle = e|0\rangle + f|1\rangle$  tuloksi  $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$  saadaan

$$\begin{aligned} |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle &= (u|0\rangle + v|1\rangle) \otimes (e|0\rangle + f|1\rangle) \\ &= ue|00\rangle + uf|01\rangle + ve|10\rangle + vf|11\rangle \\ &= ue \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + uf \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + ve \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + vf \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= ue \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + uf \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + ve \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + vf \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.49)$$



Tuloavaruudessa on olemassa tiloja, joita ei voida esittää tulontekijöiden avulla. Tunnettu esimerkki näistä ovat *Bellin tilat*

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle), \\ |\Phi\rangle^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Esimerkiksi tilalle  $|\Phi\rangle^- = 2^{-1/2}(|00\rangle - |11\rangle)$  tulisi yhtälön (2.49) perusteella olla samanaikaisesti voimassa  $uf = 0 = ve$  ja  $ue = 1/\sqrt{2} = vf$ , joka ei ole mahdollista. Tiloja, joita ei voida esittää muodossa (2.48), kutsutaan *lomittuneiksi tiloiksi* (*entangled states*). Mikäli tila voidaan esittää muodossa (2.48), se on *separoituva* eli tulotila. Lomittuminen on keskeinen fysikaalinen ilmiö kvanttilaskennan taustalla, ja sitä käsitellään tarkemmin luvussa 2.5.

Edellinen muotoilu yleistyy suoraviivaisesti useamman kuin kahden kubitin järjestelmille (*multipartite states*). Tarkastellaan  $2n$ -ulotteisen avaruuden  $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2$  tilaa  $|\psi\rangle$ . Avaruuden  $\mathbb{C}^{2n}$  laskennallinen kanta sisältää  $2^n$  keskenään ortogonaalista tilaa  $|i\rangle_1 |i\rangle_2 \dots |i\rangle_n$ , jossa kunkin osajärjestelmän kantatila  $|i\rangle_j$  saa arvon 0 tai 1. Esimerkki avaruuden  $\mathbb{C}^{2n}$  tilasta on *yleistetty GHZ-tila*, jota tarkastellaan luvussa 4.3.

### 2.3.2 Operaattoreista

Tila-avaruuksien  $\mathbb{C}^d$  ja  $\mathbb{C}^r$  operaattorit muodostavat oman tensorituloavaruudensa  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^d} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{C}^r}$ . Määritellään avaruudet  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}_i}$  siten, että ne sisältävät vain yhden osajärjestelmän  $\mathbb{C}_i$  tilaan operoivat operaattorit. Olkoot  $\hat{A} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}_A} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}^d}$ ,  $\hat{B} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}_B} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}^r}$ . operaattori  $\hat{A} \otimes \hat{B}$  on lineaarinen ja tiloille  $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d a_i |i\rangle$ ,  $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^r b_k |k\rangle$  on

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = \hat{A} |\phi\rangle \otimes \hat{B} |\psi\rangle = \sum_{i=1}^d a_i \hat{A} |i\rangle \otimes \sum_{k=1}^r b_k \hat{B} |k\rangle. \quad (2.51)$$

Kun operoidaan vain toisen järjestelmän tilaan, käytetään yksikköoperaattoria, esimerkiksi  $\hat{A} \otimes I$ . Operaattorien  $\hat{A} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}$  ja  $\hat{B} = \sum_{k,l=1}^r b_{kl}$  tensorituloa vastaa matriisiesitys (rivin ja sarakkeen pituus  $dr$ ) on

$$\hat{A} \otimes \hat{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \hat{B} & a_{12} \hat{B} & a_{13} \hat{B} & \dots & a_{1d} \hat{B} \\ a_{21} \hat{B} & a_{22} \hat{B} & a_{23} \hat{B} & \dots & a_{2d} \hat{B} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{d1} \hat{B} & a_{d2} \hat{B} & \dots & 0 & a_{dd} \hat{B} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Yhtälössä (2.52) termit  $a_{ij} \hat{B}$  kuvaavat alimatriiseja eli matriisi  $\hat{B}$  alkioita kerrotaan jokainen elementillä  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ . Operaattoreiden ominaisuudet kuten hermiittisyys, unitaarisuus ja positiivisuus yleistyvät suoraviivaisesti tensoritulon operaatioihin [192].

Kahden kubitin tensorituloavaruuden  $\mathbb{C}^{\otimes 2}$  operaattoreita vastaavat  $4 \times 4$  matriisit. Paulin matriisien (luku 2.4.2)  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$  ja yksikkömatriisin  $I$  tensoritulot (16 kpl) muodostavat operaattoriavaruuden  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^2} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{C}^2}$  kannan. Esimerkiksi

$$\sigma_x \otimes \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Tiheysoperaattori yleistyy suoraviivaisesti useamman hiukkasen järjestelmiin:

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_n = \bigotimes_{i=1}^n \rho_i. \quad (2.54)$$

Tarkastellaan esimerkkinä yhden kubitin kloonausta. Klassinen bitti voidaan kopioida suoraviivaisesti nykYTEKNIKALLA. Kysymys kuuluu, onko olemassa (reversiibeliä ja lokaalia) prosessia, jossa mielivaltaiselle tilalle  $|\psi\rangle$  on  $|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ ? Vastaus on *ei* [86, 114, 250]. Tehdään antiteesi eli oletetaan, että on olemassa unitaarinen  $\hat{U}$  siten, että

$$\hat{U}(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle, \quad |\psi\rangle \in \mathbb{C}^d. \quad (2.55)$$

Olkoon  $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^d$  toinen tila,  $|\phi\rangle \neq |\psi\rangle$ . Tällöin  $\hat{U}$  kloonaa myös tilan  $|\phi\rangle$ . Käyttämällä unitaarisuusehtoa  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = I$  saadaan

$$\begin{aligned} \langle \phi | \psi \rangle &= (\langle \phi | \otimes \langle 0 |)(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= (\langle \phi | \otimes \langle 0 |)(\hat{U}^\dagger \hat{U})(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= (\langle \phi | \otimes \langle 0 | \hat{U}^\dagger)(\hat{U} |\psi\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= (\langle \phi | \otimes \langle \phi |)(|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle) \\ &= \langle \phi | \psi \rangle \langle \phi | \psi \rangle \\ &= \langle \phi | \psi \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ehdon  $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^2$  nojalla olisi  $\langle \phi | \psi \rangle = 0$  tai  $\langle \phi | \psi \rangle = 1$  kaikille  $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathbb{C}^d$ , joka ei pidä paikkaansa. Kubitin kloonauksen mahdottomuudella on useita sovelluksia, kuten esimerkiksi kvanttikryptografia [30, 95].

## 2.4 Spin-1/2-hiukkasista

Alkeishiukkasilla kuten elektroneilla on sisäinen vapausaste, jonka käyttäytymistä kuvataan kvanttiteoriassa pyörimismäärän tavoin ja josta käytetään nimitystä *spin* [46, s. 299]. Spinin ei-relativistisen kvanttiteorian muotoili Pauli [195] vuonna 1927 ja relativistisen Dirac [87] vuotta myöhemmin. Spinille ei ole vastinetta klassisen fysiikan teoriassa.

Tässä työssä (erityisesti luvut 3 ja 4) käytetään useaan otteeseen esimerkkinä kubitista ei-relativistisia spin-1/2-hiukkasta. Matemaattinen muoto vastaa laskennallisen kannan tiloilla  $|0\rangle$  ja  $|1\rangle$  laskemista eli tila  $|0\rangle$  voi vastata spin  $+1/2$ -tilaa ja tila  $|1\rangle$  spin  $-1/2$ -tilaa. Kerrataan seuraavassa spin-1/2 -hiukkasiin liittyvät jatkon kannalta tarpeelliset tulokset.

### 2.4.1 Perusominaisuuksia

Spin-operaattori  $\hat{S}$  on vektorioperaattori, jolla on kolme komponenttia  $\hat{S} = (S_1, S_2, S_3)$ . Usein käytetään ns. *Paulin operaattoreita*  $\sigma_i$ , joille  $\sigma_i = 2S_i, i = 1, 2, 3$ . Kirjallisuudessa spin kuvataan toisinaan skemaattisesti prekessiomallilla [46], vaikka kyseessä on hiukkasen sisäinen vapausaste eikä spiniä tule tulkita siten, että hiukkanen pyörisi symmetria-akselinsa tai muun akselin ympäri [19]. Ei ole mielekäästä puhua yksittäisestä spin-vektorista tai sen suunnasta, sillä vektorin perusmääritelmän nojalla kaikkien spinin komponenttien pitäisi olla hiukkasen mittaushetkellä määriteltyinä ja tarkasti tiedossa [37]. Tämä ei ole mahdollista, sillä operaattorit  $S_i$  ja  $S_j, i \neq j$  eivät kommutoi. Tavallisemmin käytetään ilmaisua *keskimääräinen* suunta, joka vastaa *odotusarvoa*  $\langle \psi | \hat{S} \cdot \mathbf{r} | \psi \rangle$ , jossa  $\mathbf{r}$  on suunta jonka suhteen spinin projektiota tarkastellaan.

Spin tuo lisätekijän atomin magneettiseen dipolimomenttiin [192] ja elektronille magneettinen dipolimomentti on yhtä kuin elektronin spin. Elektronin tilan atomissa määrittävät yksikäsitteisesti pääkvanttiluku  $N$ , pyörimismäärän kvanttiluku  $L$ , spin-quanttiluku  $S$  (kokonaisspin) sekä magneettinen kvanttiluku  $M$  (spin-komponentti, esimerkiksi  $S_3$ ). Jos  $S$  on kokonaisluku, puhutaan *bosoneista* ja jos puoliluku, *fermioneista*. Luku  $M$  voi saada  $2S + 1$  eri arvoa välillä  $-S, -S + 1, \dots, 0, 1, S - 1, S$ .

Spin-1/2-hiukkaselle on  $S = 1/2$ . Spin valitun akselin suunnassa voi saavuttaa kaksi mahdollista arvoa, joko ”spin ylös” tai ”spin alas” eli  $M = \pm 1/2$ . Spin-komponentille  $S_3$  pätee seuraava ominaisarvoyhtälö:

$$S_3 |\chi_{S,M}\rangle = M |\chi_{S,M}\rangle = \pm \frac{1}{2} |\chi_{1/2, \pm 1/2}\rangle, \quad (2.57)$$

jossa  $|\chi_{S,M}\rangle$  on vastaava ominaisvektori (luku 2.4.3). Kun koordinaatisto on valittu sopivasti ja  $M = 1/2$ , on ominaisvektori laskennallisen kannan tila  $|0\rangle$  ja kun  $M = -1/2$ , tila  $|1\rangle$ . Spin-1/2-aaltofunktio  $|\chi_{S,M}\rangle$  liitetään hiukkasen paikka- ja aikariippuvaan aaltofunktioon  $\Psi_S(\mathbf{r}, t)$  kertomalla tämä laskennallisen kannan tiloilla  $|0\rangle$  ja  $|1\rangle$ :

$$\Psi = \sum_{M=-1/2}^{1/2} \Psi_S(\mathbf{r}, t) |\chi_{S,M}\rangle = \Psi_{1/2}(\mathbf{r}, t) |0\rangle + \Psi_{-1/2}(\mathbf{r}, t) |1\rangle = \begin{bmatrix} \Psi_{1/2}(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_{-1/2}(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

jossa alaindeksi  $S$  viittaa siihen, että hiukkasta vastaava Hamiltonin operaattori voi olla spin-riippuva [46]. Spin-tilan  $|\chi_{S,M}\rangle$  normitustekijät on yhtälössä (2.58) upotettu paikka-aikariippuvan aaltofunktion normitustekijöihin.

### 2.4.2 Paulin operaattorit

Hyödyllisiä unitaarisia ja hermiittisiä operaattoreita ovat *Paulin operaattorit*, joita merkitään  $\sigma_1, \sigma_2$  ja  $\sigma_3$ . Kvanttilaskennassa ne kuvaavat kubiteille suoritettavia (kvantti)loogisia operaatioita, ja kvantti-logiikkapiireistä puhuttaessa on

yleisessä käytössä notaatio  $\sigma_1 \equiv X$ ,  $\sigma_2 \equiv Y$  ja  $\sigma_3 \equiv Z$ . Operaattorit toteuttavat laskennallisen kannan tiloille  $|0\rangle$  ja  $|1\rangle$  seuraavan algebran [199]:

$$\begin{aligned}\sigma_1|0\rangle &= |1\rangle & \sigma_2|0\rangle &= i|1\rangle & \sigma_3|0\rangle &= |0\rangle \\ \sigma_1|1\rangle &= |0\rangle & \sigma_2|1\rangle &= -i|0\rangle & \sigma_3|1\rangle &= -|1\rangle.\end{aligned}\tag{2.59}$$

Algebraa (2.59) vastaa matriisiesitys eli *Paulin matriisit*

$$\sigma_1 = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\tag{2.60a}$$

$$\sigma_2 = i(-|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\tag{2.60b}$$

$$\sigma_3 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\tag{2.60c}$$

Matriisit  $\sigma_i$  kirjoitetaan lyhyesti vektorina  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , jolloin  $\hat{S} = \vec{\sigma}/2$ . Yhdessä yksikkömatriisin  $I$  kanssa matriisit  $\sigma_i$  muodostavat avaruuden  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^2}$  kannan. Kanta yleistyy tensoritulon kautta usean kubitin järjestelmiin, esimerkiksi kahden kubitin tiheysmatriisi  $\rho$  kirjoitetaan muodossa [199, s. 77]

$$\rho = \frac{1}{2} \left( I + \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i \right), \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, 3.\tag{2.61}$$

Paulin matriiseille pätevät kommutaatiorelaatiot

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k,\tag{2.62}$$

jossa  $\epsilon_{ijk}$  on permutaatiotensori eli *Levin-Civitan-tensori*

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{jos } (i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ tai } (2, 3, 1) \\ -1, & \text{jos } (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1) \text{ tai } (2, 1, 3) \\ 0, & \text{jos } i = j \text{ tai } j = k \text{ tai } k = i. \end{cases}\tag{2.63}$$

Operaattoreille  $\sigma_i$  pätevät antikommutaatiorelaatiot  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I$ , joista yhtälön (2.62) kanssa havaitaan

$$\begin{aligned}\sigma_i\sigma_j &= \delta_{ij}I + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ \Rightarrow \sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1, \quad \sigma_i^2 = I, \dots\end{aligned}\tag{2.64}$$

Paulin matriiseille pätee myös  $\det(\sigma_i) = -1$  ja  $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$ . Yhtälön (2.62) avulla voidaan osoittaa, että matriisien  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  kanssa kommutoiville operaattoreille  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  pätee

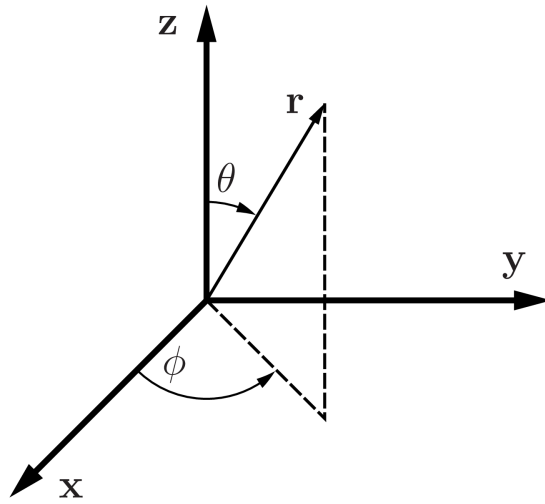
$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{A})(\vec{\sigma} \cdot \hat{B}) = \hat{A} \cdot \hat{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{A} \times \hat{B}).\tag{2.65}$$

### 2.4.3 Operaattorin $\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit

Kiinnitetään koordinaatisto kuvan 2.2 mukaisesti. Yleistä yksikkövektoria merkitään  $\mathbf{r}$ . Vektorin  $\mathbf{r}$  polaari- ja atsimutaalikulmat ovat  $\theta$  ja  $\phi$ , jolloin  $\mathbf{r}$  kirjoitetaan muodossa

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (r_x, r_y, r_z) \\ &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ &= (s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta).\end{aligned}\tag{2.66}$$

Yhtälössä (2.66) käytettiin lyhennysmerkintöjä  $\sin \theta \equiv s_\theta$  ja  $\cos \theta \equiv c_\theta$ .



**Kuva 2.2:** Avaruuden  $\mathbb{R}^3$  yksikkövektori  $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$  koordinaatistossa [46].

Lasketaan operaattoria  $\hat{S} = (S_1, S_2, S_3)$  vastaavan  $\mathbf{r}$ -suuntaisen ”projektion”  $\hat{S} \cdot \mathbf{r}$  ominaisarvot ja ominaisvektorit. Käytetään Paulin matriiseja, jolloin  $\hat{S} = \vec{\sigma}/2$ . Projektio-operaattorille  $\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}$  saadaan lauseke

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r} &= r_x \sigma_1 + r_y \sigma_2 + r_z \sigma_3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & r_x \\ r_x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -ir_y \\ ir_y & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_z & 0 \\ 0 & -r_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & -r_z \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.67}$$

Yhtälöt (2.67) ja (2.66) yhdistämällä saadaan toinen esitys operaattorille  $\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}$  kulmien  $\theta$  ja  $\phi$  avulla:

$$\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r} = \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta e^{-i\phi} \\ s_\theta e^{i\phi} & -c_\theta \end{bmatrix},\tag{2.68}$$

jossa on käytetty Eulerin kaavaa  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . Operaattoria  $\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}$  vastaava ominaisarvoyhtälö spin-aaltofunktiolle  $|\chi_{S,M}\rangle \equiv |\chi\rangle$  on

$$\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}|\chi\rangle = o|\chi\rangle \text{ eli } (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r} - oI)|\chi\rangle = 0. \quad (2.69)$$

Yhtälöllä (2.69) on yksikäsitteinen ratkaisu vain kun  $\det(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r} - oI) = 0$ . Ratkaisemalla toisen asteen yhtälö saadaan ominaisarvoiksi  $o_{\pm} = \pm 1$  eli riippumatta vektorin  $\mathbf{r}$  suuntavalinnasta vastaavat operaattoria  $\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}$  ominaisarvopari  $\pm 1$ . Kirjoitetaan spin-1/2-tila  $|\chi_{S,M}\rangle \equiv |\chi_{\pm M}\rangle$  muodossa  $a|0\rangle + b|1\rangle$ , missä  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Ominaisarvolle  $o_+ = 1$  saadaan yhtälöä (2.68) käyttäen

$$\begin{bmatrix} c_{\theta} & s_{\theta}e^{-i\phi} \\ s_{\theta}e^{i\phi} & -c_{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ac_{\theta} + bs_{\theta}e^{-i\phi} = a \\ as_{\theta}e^{i\phi} - bc_{\theta} = b. \end{cases} \quad (2.70)$$

Määritellään kompleksiluvut  $b = b'e^{i\phi/2}$  ja  $a = a'e^{-i\phi/2}$  ja sijoitetaan ne yhtälöön (2.70):

$$\begin{cases} a'c_{\theta}e^{-i\phi/2} + b's_{\theta}e^{-i\phi/2} & = a'e^{-i\phi/2} \\ a's_{\theta}e^{i\phi/2} - b'c_{\theta}e^{i\phi/2} & = b'e^{i\phi/2}. \end{cases} \quad (2.71)$$

Kertomalla yhtälöparissa (2.71) ylempää lauseketta vaihetekijällä  $e^{i\phi/2}$  ja alempaa  $e^{-i\phi/2}$ :llä saadaan yhtälöpari muotoon

$$\begin{cases} (1 - c_{\theta})(a')^2 & = s_{\theta}b'a' \\ (1 - c_{\theta})(b')^2 & = s_{\theta}b'a'. \end{cases} \quad (2.72)$$

Käyttämällä sinin ja kosinin identiteettejä  $s_{\theta/2} = \sqrt{(1 - c_{\theta})/2}$  ja  $c_{\theta/2} = \sqrt{(1 + c_{\theta})/2}$  voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} (1 - c_{\theta})(a')^2/2 & = (1 + c_{\theta})(b')^2/2 \\ s_{\theta/2}^2(a')^2 & = c_{\theta/2}^2(b')^2. \end{cases} \quad (2.73)$$

Muodosta (2.73) havaitaan, että täytyy olla  $a' = c_{\theta/2}$  ja  $b' = s_{\theta/2}$ , jolloin ominaisvektoriksi  $|\chi_+\rangle$  tulee

$$|\chi_+\rangle = \begin{bmatrix} c_{\theta/2}e^{-i\phi/2} \\ s_{\theta/2}e^{i\phi/2} \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Kerrotaan vektori  $|\chi_+\rangle$  globaalilla vaihetekijällä  $e^{i\phi/2}$ . Tämä ei muuta tilan  $|\chi_+\rangle$  odotusarvojen suuruuksia (luku 2.1.5) ja tarkoittaa kiertoa  $xy$ -tasossa kulman  $\phi$  verran. Näin saadaan ominaisvektori Blochin kehämallia (2.13) vastaavaan muotoon:

$$|\chi_+\rangle = \begin{bmatrix} c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2}e^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

Ominaisarvoa  $o = -1$  vastaavaksi ominaisvektoriksi saadaan edellisen kanssa analogisesti

$$|\chi_{-}\rangle = \begin{bmatrix} s_{\theta/2} \\ -c_{\theta/2}e^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Tarkastellaan erikoistapauksina spinin mittausta koordinaattiakselien suuntiin.  $x$ -akselin suunnassa  $\theta = \pi/2$ ,  $\phi = 0$  ja saadaan

$$|\chi_{x+}\rangle = \begin{bmatrix} c_{\pi/4} \\ s_{\pi/4}e^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

$$|\chi_{x-}\rangle = \begin{bmatrix} s_{\pi/4} \\ -c_{\pi/4}e^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

$y$ -akselilla on voimassa  $\theta = \pi/2$ ,  $\phi = \pi/2$ , jolloin  $|\chi_{y+}\rangle = 1/2[1 \ i]^T$  ja  $|\chi_{y-}\rangle = 1/2[i \ -1]^T$ .  $z$ -akselin suunnassa  $\theta = 0 = \phi$ , vastaavat ominaisvektorit ovat  $|\chi_{z+}\rangle = [1 \ 0]^T = |0\rangle$  ja  $|\chi_{z-}\rangle = [0 \ 1]^T = |1\rangle$ .

#### 2.4.4 Kahden spin $1/2$ -hiukkasen mittauskorrelaatioita

Johdetaan kvanttimekaaninen odotusarvo kahdelle spin  $1/2$ -hiukkaselle A ja B ns. *singlet-tilassa*, kun järjestelmän kokonaisspin on 0. Spinin säilymislain nojalla järjestelmän spin-aaltofunktio on muotoa [215]

$$|\psi(\mathbf{r})\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\chi_{A+}\rangle|\chi_{B-}\rangle - |\chi_{A-}\rangle|\chi_{B+}\rangle]. \quad (2.79)$$

Sijoittamalla yhtälöt (2.75) ja (2.76) yhtälöön (2.79) voidaan osoittaa, että tila  $|\psi(\mathbf{r})\rangle$  on riippumaton kannan valinnasta [131]:

$$|\psi(\mathbf{r})\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle) \equiv |\psi\rangle. \quad (2.80)$$

Tarkastellaan ensin todennäköisyyttä  $P_{++}$ , joka vastaa spin-mittausten tuloksia yksikkövektoreiden  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$  suuntiin. Vastaavasti  $P_{--}$  tarkoittaa, että mittausten tulokset osoittavat yksikkövektorien suuntia päinvastaisiin suuntiin. Määritellään myös todennäköisyydet  $P_{+-}$  ja  $P_{-+}$  samalla idealla. Osoitetaan lähdetä [231] seuraten, että

$$P_{++} = \frac{1}{2} s_{\alpha_{AB}/2}^2, \quad (2.81)$$

jossa  $\alpha_{AB}$  on  $\mathbf{r}_A$ :n ja  $\mathbf{r}_B$ :n välinen kulma. Suuntaan  $\mathbf{r}_k$ ,  $k = A, B$  oleva ominaisvektori  $|\chi_{\mathbf{r}_k}\rangle$  on yhtälön (2.75) perusteella muotoa

$$|\chi_{\mathbf{r}_k}\rangle = c_{\theta_k/2}|0\rangle + e^{i\phi_k} s_{\theta_k/2}|1\rangle. \quad (2.82)$$

Vektorien  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$  sisätulo on

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B &= s_{\theta_A} c_{\phi_A} s_{\theta_B} c_{\phi_B} + s_{\theta_A} s_{\phi_A} s_{\theta_B} s_{\phi_B} + c_{\theta_A} c_{\theta_B} \\ &= s_{\theta_A} s_{\theta_B} (c_{\phi_A} c_{\phi_B} + s_{\phi_A} s_{\phi_B}) + c_{\theta_A} c_{\theta_B} \\ &= s_{\theta_A} s_{\theta_B} c_{\phi_A - \phi_B} + c_{\theta_A} c_{\theta_B}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Identiteetistä  $s_{\alpha/2}^2 = \frac{1}{2}(1 - c_{\alpha})$  ja yhtälöstä (2.83) saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}s_{\alpha_{AB}/2} &= \frac{1}{4}(1 - c_{\alpha_{AB}}) \\ &= \frac{1}{4}(1 - \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B) \\ &= \frac{1}{4}(1 - s_{\theta_A} s_{\theta_B} c_{\phi_A - \phi_B} - c_{\theta_A} c_{\theta_B}),\end{aligned}\tag{2.84}$$

jossa on käytetty tietoa  $\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = \cos \alpha_{AB}$ . Todennäköisyys  $P_{++}$  on tilan  $|\psi\rangle$  tilalle  $|\chi_{\mathbf{r}_A} \chi_{\mathbf{r}_B}\rangle$  projektion odotusarvon neliö eli

$$\begin{aligned}P_{++} &= |\langle \psi | \chi_{\mathbf{r}_A} \chi_{\mathbf{r}_B} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \langle 01 - 10 | (c_{\theta_A/2} |0\rangle + e^{i\phi_A} s_{\theta_A/2} |1\rangle) (c_{\theta_B/2} |0\rangle + e^{i\phi_B} s_{\theta_B/2} |1\rangle) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| e^{i\phi_B} c_{\theta_A/2} s_{\theta_B/2} - e^{i\phi_A} c_{\theta_B/2} s_{\theta_A/2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ c_{\theta_A/2}^2 s_{\theta_B/2}^2 + c_{\theta_B/2}^2 s_{\theta_A/2}^2 - c_{\theta_A/2} c_{\theta_B/2} s_{\theta_A/2} s_{\theta_B/2} \underbrace{(e^{i(\phi_B - \phi_A)} + e^{i(\phi_A - \phi_B)})}_{=2c_{\phi_A - \phi_B}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(c_{\theta_A/2} s_{\theta_B/2} - c_{\theta_B/2} s_{\theta_A/2})^2}_{=s_{(\theta_A - \theta_B)/2}^2} - 2c_{\phi_A - \phi_B} c_{\theta_A/2} c_{\theta_B/2} s_{\theta_A/2} s_{\theta_B/2} + \right. \\ &\quad \left. + 2c_{\theta_A/2} c_{\theta_B/2} s_{\theta_A/2} s_{\theta_B/2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ s_{(\theta_A - \theta_B)/2}^2 + 2(1 - c_{\phi_A - \phi_B}) c_{\theta_A/2} s_{\theta_A/2} s_{\theta_B/2} c_{\theta_B/2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(1 - c_{\theta_A - \theta_B}) + \frac{1}{2}(1 - c_{\phi_A - \phi_B}) s_{\theta_A} s_{\theta_B} \right] \\ &= \frac{1}{4} [1 - s_{\theta_A} s_{\theta_B} c_{\phi_A - \phi_B} - c_{\theta_A} c_{\theta_B}].\end{aligned}\tag{2.85}$$

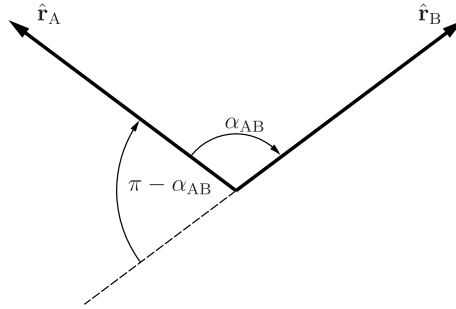
Viimeinen rivi täsmää yhtälön (2.84) viimeisen rivin kanssa eli väite on todistettu. Todennäköisyydet  $P_{--}$ ,  $P_{+-}$  ja  $P_{-+}$  saadaan geometrisella tarkastelulla kuvasta 2.3:

$$\begin{aligned}P_{+-} &= \frac{1}{2} s_{(\pi - \alpha_{AB})/2}^2 = \frac{1}{2} c_{\alpha_{AB}/2}^2 = P_{-+}, \\ P_{--} &= P_{++}.\end{aligned}\tag{2.86}$$

Kvanttimekaaninen odotusarvo (korrelaatiokerroin) mittaustulosten tulolle on todennäköisyyksien summa eli

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= 1 \cdot (P_{++} + P_{--}) - 1 \cdot (P_{+-} + P_{-+}) \\ &= P_{++} - P_{+-} - P_{-+} + P_{--} \\ &= s_{\alpha_{AB}/2}^2 - c_{\alpha_{AB}/2}^2 \\ &= -c_{\alpha_{AB}} \\ &= -\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B.\end{aligned}\tag{2.87}$$





**Kuva 2.3:** Yksikkövektorit  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$  sekä vektoreiden väliset kulmat.

Erikoistapauksessa  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B$  saadaan *täydellinen korrelaatio* eli nk. *EPRB:n tilanne*, josta puhutaan tarkemmin luvussa 3.1.3.

## 2.5 Kvanttitilojen lomittumisesta

Kvanttimekaniikassa *lomittunut tila* (*entangled state*) tarkoittaa useamman kuin yhden hiukkasen yhteistä tilaa, jonka osajärjestelmät eivät ole probabilistisesti riippumattomia [183]. Schrödinger [219] esitteli käsitteen lomittuminen<sup>7</sup> jo vuonna 1926, viitaten kahden hiukkasen tilaan, jota ei voida ilmaista osajärjestelmien tensoritulona [219]:

*“Maximal knowledge of a total system does not necessarily include total knowledge of all its parts, not even when these are fully separated from each other and at the moment are not influencing each other at all. . . . If two separated bodies, each by itself known maximally, enter a situation in which they influence each other, and separate again, then there occurs regularly that which I have just called entanglement of our knowledge of the two bodies.”*

### 2.5.1 Esimerkki: redusoitu tiheysoperaattori

Schrödingerin havainto tulee selvästi esille, kun tarkastellaan kahden hiukkasen A ja B tilan  $\rho_{AB}$  *redusoitua tiheysoperaattoria*  $\rho_A$ . Operaattori  $\rho_A$  osajärjestelmälle A määritellään yhtälöllä

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \text{Tr}_B(|a_1 b_1\rangle\langle a_2 b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|), \quad (2.88)$$

jossa  $|a_1\rangle$  ja  $|a_2\rangle$  ovat tiloja osajärjestelmän A tila-avaruudessa ja  $|b_1\rangle$  ja  $|b_2\rangle$  vastaavasti tiloja B:n tila-avaruudessa. Jos järjestelmä voidaan esittää tensoritulona

7. Alkuperäisessä artikkelissaan hän ei käyttänyt englannin kielen sanaa entanglement, vaan saksan sana Verschränkung, jonka voi englanniksi kääntää muotoon [209] *entwinement*, suomeksi *kietoutuminen*.

eli  $\rho_{AB} = \rho \otimes \rho'$ , antaa osittainen jälki osajärjestelmän tilan triviaalisti:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho \otimes \rho') = \rho. \quad (2.89)$$

Lomittumisilmiö havainnollistuu matemaattisesti superpositioperiaatteen ja tensorituloavaruuden rakenteiden seurauksena [81]. Katsotaan esimerkkinä yhtälön (2.50) puhdasta Bellin tilaa  $|\Phi\rangle^+ = 1/\sqrt{2}(|00\rangle + |11\rangle)$ . Vastaava tiheysoperaattori  $\rho_{\hat{B}}$  on muotoa

$$\begin{aligned} \rho_{\hat{B}} &= \frac{1}{2} (|00\rangle + |11\rangle) (\langle 00| + \langle 11|) \\ &= \frac{1}{2} |00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Ottamalla osittainen jälki ensimmäisen dimension suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B \left[ \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \right] \\ &= \frac{1}{2} [ |0\rangle\langle 0| \text{Tr}(|0\rangle\langle 0|) + |0\rangle\langle 1| \text{Tr}(|0\rangle\langle 1|) + \\ &\quad + |1\rangle\langle 0| \text{Tr}(|1\rangle\langle 0|) + |1\rangle\langle 1| \text{Tr}(|1\rangle\langle 1|) ] \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Yhtälön (2.91) perusteella koko järjestelmä on puhtaassa tilassa  $\rho_{\hat{B}}$ , mutta osajärjestelmä A on täysin sekoittunut eli  $\text{Tr}(\rho_A^2) = 1/2 < 1$ .

### 2.5.2 Lomittuminen operatiivisesta näkökulmasta

Lomittuminen on perustason kvanttiresurssi, jonka analysointi on osa kvantti-informaatioteorian tutkimuskenttää [192]. Kun tilaa  $|\psi\rangle$  ei voida preparoida käyttäen vain *lokaaleja operaatioita* (kierrot, polarisaatiosuunnan vaihto tms.) ja *klassista eli valoa hitaampaa viestintää* (lyhyesti *LOCC-operaatioita*), tilan sanotaan olevan lomittunut [22]. Ilmiötä pidetään kvanttiteknologian perustana [210]. Kvantti-informaatioteoriassa on lomittumiseen liittyen kolme keskeistä tavoitetta [148]:

- (i) Kuinka lomittumista havainnoidaan optimaalisesti, niin teoreettisesti kuin myös kokeellisesti.
- (ii) Kuinka estetään lomittumisen heikkeneminen eli degeneraatio.
- (iii) Kuinka karakterisoidaan, kontrolloidaan ja kvantifoidaan lomittumista.

Tarkastellaan seuraavassa puhtaiden kubittien lomittumisen määrittelyä. Sekoittuneen usean hiukkasen tilan lomittumisen ja sitä kautta mahdollisen epälokaalisuuden luonteen selvittäminen on äärimmäisen haastava ongelma [22, 60]. Lomittumisen määrän mittareita on tarkemmin käsitelty esimerkiksi teoksessa [192].

### 2.5.3 Kahden hiukkasen järjestelmä

Olkoon  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}_A \otimes \mathbb{C}_B$ ,  $\dim(\mathbb{C}_A) = d = \dim(\mathbb{C}_B)$ . Tilan  $|\psi\rangle$  sanotaan olevan *separoituva* eli tulotila, jos se voidaan ilmaista avaruuden  $\mathbb{C}^d$  tilavektorien  $|\psi_A\rangle$  ja  $|\psi_B\rangle$  tensoritulona eli muodossa

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle. \quad (2.92)$$

Muussa tapauksessa tila  $|\psi\rangle$  on *lomittunut*. Tiheysmatriisi  $\rho \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}_A} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{C}_B}$  on vastaavasti separoituva, jos se voidaan kirjoittaa muodossa [236]

$$\rho = \sum_{i=1}^d p_i |\psi_{A_i}\rangle \langle \psi_{A_i}| \otimes |\psi_{B_i}\rangle \langle \psi_{B_i}|, \quad (2.93)$$

jossa tilat  $|\psi_{A_i}\rangle \in \mathbb{C}_A$  ja  $|\psi_{B_i}\rangle \in \mathbb{C}_B$ .

Avaruuden  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  ortonormaalien kannan muodostavat *Bellin tilat* (ks. yhtälö (2.50)). Ne ovat maksimaalisesti lomittuneita, eli vastaavien tilojen ensemblelle laskettu statistinen kvanttimekaaninen mittauskorrelaatio eroaa suurimman mahdollisen määrän vastaavasta klassisesta mittauskorrelaatiosta (luku 3.3). Mikä tahansa puhdas tila, joka on lokaalin unitaarisen muunnoksen kautta liitoksissa johonkin Bellin tilaan, edustaa myös maksimaalisesti lomittunutta tilaa. Bellin tiloilla on keskeinen rooli lomittumisen sekä lokaalin realismin tutkimuksessa [153].

Kahden kubitin sekä kubitin ja kuditin tapauksissa ( $2 \otimes 2$ ,  $2 \otimes 3$ ) lomittuminen on täysin karakterisoitu sekä puhtaille että sekoittuneille tiloille [147, 205]. Korkeammassa dimensioissa tilanne muuttuu monimutkaisemmaksi.

### 2.5.4 Usean hiukkasen järjestelmä

Useamman kuin kahden hiukkasen tapauksessa suurin osa tensorituloavaruuden  $\mathbb{C}_1 \otimes \mathbb{C}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}_n$  tiloista on lomittuneita, sillä separoituvien tilojen avaruuden dimensio on  $\dim(\mathbb{C}_1) + \dim(\mathbb{C}_2) + \dots + \dim(\mathbb{C}_n)$ , kun koko avaruuden dimensio on  $\dim(\mathbb{C}_1) \cdot \dim(\mathbb{C}_2) \cdot \dots \cdot \dim(\mathbb{C}_n)$ .

Määritelmät (2.92) ja (2.93) yleistyvät useammalle hiukkaselle. Olkoot  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  tarkasteltavat hiukkaset. Kun hiukkasia kuvaava tiheysmatriisi on separoituva, kirjoitetaan se muodossa

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_{A_{1,i}}\rangle \langle \psi_{A_{1,i}}| \otimes \dots \otimes |\psi_{A_{d,i}}\rangle \langle \psi_{A_{d,i}}|. \quad (2.94)$$

Useamman hiukkasen järjestelmässä voi esiintyä hyvin erityyppisiä lomittumisen muotoja. Esimerkiksi kolmelle kubitille havaitaan separoituvat tilat, kahden hiukkasen välinen ei-maksimaalinen ja maksimaalinen lomittuminen sekä kolmen hiukkasen välinen lomittuminen [69, s. 2]. Usein kirjallisuudessa esiintyvä lomittunut  $n:n$  kubitin tila on *yleistetty GHZ-tila* [61, 131]

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{GHZ}} &= \alpha |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \dots \otimes |v_n\rangle + \beta |w_1\rangle \otimes |w_2\rangle \otimes \dots \otimes |w_n\rangle \\ &= \alpha |v_1 \dots v_n\rangle + \beta |w_1 \dots w_n\rangle, \end{aligned} \quad (2.95)$$

jossa  $\{|v_k\rangle, |w_k\rangle\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  on ortonormaali kanta hiukkasen  $k$  tila-avaruudessa ja kertoimille  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  pätee  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Tila  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$  on lomittunut, kun  $\alpha \neq 0 \neq \beta$ . Valinnalla  $\alpha = \pi/4 = \beta$  saavutetaan maksimaalisesti lomittunut tila, Bellin tilojen (2.50) yleistetty muoto. Mikä tahansa puhdas tila, joka on lokaalin unitaarisen muunnoksen kautta liitoksissa yleistettyyn GHZ-tilaan edellisellä kulmavalinnalla, edustaa myös maksimaalisesti lomittunutta tilaa.

### 2.5.5 Lomittumisen havaitseminen

Ensimmäinen menetelmä annetun tilan lomittumisen testaamiseksi oli *Bell-tyypin epäyhtälön*<sup>8</sup> voimassaolo [236]. Epäyhtälörelaatio, jonka kaikki separoituvat tilat toteuttavat, ei ole voimassa kaikille lomittuneille tiloille. Bellin epäyhtälöiden alkuperäinen tarkoitus oli osoittaa lokaalirealististen teorioiden ja kvanttiteorian välinen yhteensopimattomuus, kun puhutaan statistisista ennusteista kahden hiukkasen yhteismittausten korrelaatioille.

*Lomittumisindikaattori* (*entanglement witness*)  $W$  on ”sensitiivinen” observaabeli, joka havaitsee eron separoituvan ja lomittuneen tilan välillä [109]. Kahden hiukkasen A ja B tapauksessa tila  $\rho \in \mathbb{C}_A \otimes \mathbb{C}_B$  on lomittunut, jos ja vain jos on olemassa hermiittinen operaattori  $W$  siten, että [144]

$$\text{Tr}(W\rho) < 0. \quad (2.96)$$

Separoituville tiheysmatriiseille  $\rho_{\text{sep}}$  on  $\text{Tr} W\rho_{\text{sep}} \geq 0$ . Lomittumisindikaattorit liittyvät positiivisiin lineaarikuvauksiin, jotka eivät ole *täysin positiivisia* [156, 235]. Lineaarinen kuvaus  $\mathcal{L} : \mathcal{L}_{\mathbb{C}_A} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}_B}$  on positiivinen, jos se kuvaa kaikki  $X \in \mathbb{C}_A$ ,  $X \geq 0$  positiivisiksi  $\mathcal{L}(X) \geq 0$ . Kuvaus  $\mathcal{L}$  on *täysin positiivinen* jos ja vain jos  $I_n \otimes \mathcal{L}$  on positiivinen kuvaus [236].

Pienissä dimensioissa  $2 \otimes 2$  ja  $2 \otimes 3$  on tiheysmatriisiin  $\rho$  separoituvuudelle voimassa riittävä ja välttämätön ehto, ns. Peresin-Horodeckin-ehto eli *PPT-ehto* [201]

$$(I \otimes T)\rho \geq 0, \quad (2.97)$$

jossa  $T$  tarkoittaa transpoosioperaattorilla operointia toiseen osajärjestelmään.

Katsotaan esimerkkinä kuvauksen  $I \otimes T$  operointia yhtälön (2.90) tiheysmatriisiin  $\rho_{\hat{B}}$ :

$$\begin{aligned} I \otimes T \rho_{\hat{B}} &= I \otimes T \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|), \end{aligned} \quad (2.98)$$

sillä esimerkiksi

$$\begin{aligned} (I \otimes T)|00\rangle\langle 11| &= (I \otimes T)(|0\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1|) \\ &= |0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| \\ &= |01\rangle\langle 10|. \end{aligned} \quad (2.99)$$

8. Bellin epäyhtälö CHSH-muodossa oli ensimmäinen tarkka matemaattinen kriteeri lomittumiselle [246]. CHSH-epäyhtälöä käsitellään luvussa 3.3.2.

Yhtälön (2.98) viimeisen rivin operointi maksimaalisesti lomittuneeseen tilaan  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$  antaa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|) (|01\rangle - |10\rangle) \\ & = -(|01\rangle - |10\rangle) \end{aligned} \quad (2.100)$$

eli operaattorilla on ominaisarvo  $-1$ . Näin operaattori  $I \otimes T$  ei ole täysin positiivinen lineaarikuvaus ja käy lomittumisindikaattoriksi. Tulos (2.97) on välttämätön, mutta ei riittävä ehto lomittumiselle yleisessä tapauksessa [144]. Mainittujen lineaarikuvausten matemaattinen teoria ei ole vielä täysin tunnettu eikä aihetta käsitellä tutkielmassa tarkemmin.

Optimaalisten lomittumisindikaattorien kehittämisen tavoitteena on saada tehokas menetelmä tiedonsaannille tilan lomittumisesta ilman vaatimusta ylimääräiselle tiedolle tilasta (vrt. POVM- ja projektiiviset mittaukset sekä mittauksen jälkeinen tila, luku 2.2.4). Optimaalinen lomittumisindikaattori voi kokeellisesta näkökulmasta vähentää lomittumisen havainnoitamiseksi tarvittavien operaatioiden määrää verrattuna täydelliseen kvanttitalan tomografiaan, kun käytetään hyödyksi jo tiedettyjä preparoidun tilan ominaisuuksia [236]. Lomittumisindikaattorien optimointia on käsitelty artikkelissa [177].

Lomittumisindikaattorit ovat hyödyllisiä työkaluja myös lomittumisen kokeellisessa havaitsemisessa [150]. Lomittumisen kokeellista tutkimusta ei käsitellä tässä tutkielmassa yleisellä tasolla. Luvussa 3.5 esitetään katsaus Bell-tyypin epäyhtälöiden kokeelliseen tutkimukseen. Lomittumisen määrän mittareita ovat esimerkiksi *entropiamitat* [192] ja *geometriset mitat* [226].

### 2.5.6 Sekoittuneiden tilojen lomittumisesta

Sekoittuneiden lomittuneiden tilojen karakterisointi on hyvin vaativa ongelma [177], eikä yleistä ratkaisua edes kolmen kubitin lomittumiselle ole vielä löydetty [214]. Käyttämällä LOCC-operaatioita voidaan luoda annetusta (sekoittuneesta tai puhtaasta) tilojen ensemblesta pienempi lukumäärä korkeamman lomittumisen puhtaita tiloja. Prosesseista käytetään nimityksiä *purifikaatio* ja *distillaatio* [31, 32, 84]. Kapasiteetti luoda haluttuja puhtaita lomittuneita tiloja on perusvaatimus kvanttietokoneen rakentamiselle [236].

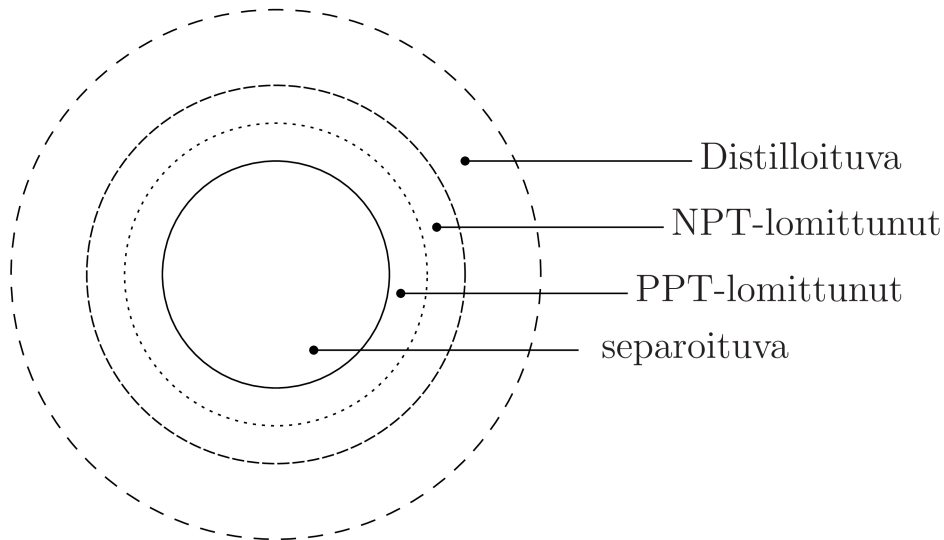
Purifikaatio on yksinkertainen matemaattinen keino ”puhdistaa” mahdollisesti sekoittunut tila  $|\psi\rangle$ . Määritellään uusi tila  $|\psi\rangle \otimes \{|i\rangle\}$ ,  $\{|i\rangle\}$  on avaruuden  $\mathbb{C}^d$  ortonormaali kanta. Tila  $|\psi\rangle \otimes \{|i\rangle\}$  on puhdas tensorituloavaruudessa, ja ottamalla redusoitu tiheysoperaattori  $\rho_A$  saadaan palautettua alkuperäinen tila [192]. Kannan valinta edellä oli mielivaltainen.

Tilan  $|\psi\rangle$  vuorovaikutus ympäristönsä sekä käytettävän mittalaitteiston kanssa yleensä vähentää tilan lomittumista ja puhtautta [53]. Näiden tekijöiden seurauksena tilaan syntyy *kvanttidekoherenssia* eli tilojen vaihekulmien järjestys superpositiossa katoaa osittain, jolloin informaatio vähenee ja entropia kasvaa. Dekoherenssia

pitää pystyä kontrolloimaan, jotta kvanttilaskenta olisi ylipäänsä mahdollista. Dekohereenssi luo lomittumista järjestelmän ja ympäristön tilojen välille, eli se ”sekoittaa” preparoituja tiloja.

Muuntoprosessia sekoittuneista tai puhtaista lomittuneista tiloista  $|\psi\rangle$  (ei-maksimaalinen lomittuminen) kohti puhtaita Bellin tiloja (2.50) LOCC-operaatioiden avulla kutsutaan *distillaatioksi*. Tilan  $|\psi\rangle$  tulee olla lomittunut, jotta se voi olla distilloituva. Kokeellisesti on osoitettu kahden kubitin sekoittuneen tilan distillaatio lokaaleja suodattimia käyttäen [243].

Kaikki lomittuneet (sekoittuneet tai puhtaat) kahden kubitin tilat [145] ja kaikki puhtaat lomittuneet  $n:n$  kubitin tilat ovat distilloituvia [90]. Käsitteellä *distilloituva lomittuminen* tarkoitetaan lomittumisen muotoa, jossa sekoittuneiden tilojen lomittuminen voidaan muuttaa puhtaiden Bell-parien lomittumiseksi [146]. Korkeamman dimension kuin  $2 \otimes 2$  ja  $2 \otimes 3$  tapauksille on olemassa lomittuneita tiloja, joille on myös voimassa PPT-ehto (2.97). Näitä tiloja kutsutaan *äärilomittuneiksi* (*bound entanglement*) [149], eikä niistä voida distilloida lomittumista. Kysymykseen, mitkä kvantttimekaaniset tilat ovat distilloituvia, ei ole vielä tyhjentävää vastausta [53]. Kuvassa 2.4 ovat kahden hiukkasen järjestelmän distillaatio-ominaisuudet lyhyesti.



**Kuva 2.4:** Kahden hiukkasen järjestelmän distillaatio-ominaisuuksia [53]. NPT-lomittuminen viittaa distilloituviin tiloihin, joilla on negatiivinen osittainen transpoosi.

### 2.5.7 Schmidtin hajotelma

Kahden hiukkasen järjestelmässä annetulle aaltofunktiolle  $|\psi\rangle$  on olemassa biortogonaalinen esitys eli  $|\psi\rangle$  voidaan esittää summana, jota tarkastellaan seuraavas-

sa [220]. Olkoon  $|\psi\rangle$  puhdas tila tuloavaruudessa  $\mathbb{C}_A \otimes \mathbb{C}_B$ ,  $\dim \mathbb{C}_A = \dim \mathbb{C}_B = d$ . Tällöin on olemassa<sup>9</sup> ortonormaalit kantatilat  $\{|i_A\rangle\} \in \mathbb{C}_A$  ja  $\{|i_B\rangle\} \in \mathbb{C}_B$  siten, että

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d s_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad (2.101)$$

jossa  $s_i$ :t ovat *Schmidtin kertoimia*. Schmidtin kertoimet toteuttavat ehdot  $\sum_{i=1}^d s_i = 1$  ja  $s_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, d$ ). Kantoja  $\{|i_A\rangle\}$  ja  $\{|i_B\rangle\}$  kutsutaan *Schmidtin kannoiksi* ja nollasta eroavien kertoimien  $s_i$  lukumäärää tilan  $|\psi\rangle$  *Schmidtin luvuksi*. Ortonormaalit kannat voidaan valita siten, että  $s_i \geq 0$  jokaiselle  $i = 1, \dots, d$ . Schmidtin luku on karkea mittari lomittumiselle kahden hiukkasen järjestelmässä [192]. Kaksiteilasysteemin tila  $|\psi\rangle$  on tulotila, jos ja vain jos sen Schmidtin luku 1. Mikäli avaruuksien dimensiot eroavat toisistaan, summaus Schmidtin hajotelmassa suoritetaan vain pienemmän dimension yli. Schmidtin hajotelma ei ole yksikäsitteinen annetulle lomittuneelle tilalle eli sama tila voidaan kirjoittaa useassa erilaisessa biortogonaalisessa muodossa [96].

---

9. Schmidtin hajotelman todistus esitetään kirjassa [199] ja artikkelissa [18]. Hajotelman olemassaolo voidaan todistaa singulaariarvohajotelman (2.42) erikoistapauksena [96, 191].





## Luku 3

### EPR, Bell ja kvanttiteorian epälokaalisuudesta

Vuonna 1935 Albert Einstein, Boris Podolsky ja Nathan Rosen (EPR) [93] osoittivat, että määrittelemällä sopivat *lokaalin realismin* ehdot fysikaalisen todellisuuden elementeille ei kvanttiteorian antama kuva fysikaalisesta todellisuudesta ole täydellinen [54, s. 1–2], [35, s. 111]. Niels Bohr kommentoi EPR-artikkelia pian sen julkaisemisen jälkeen [41]. Hän puolusti kvanttimekaniikkaa komplementaarisuuseriaatteen ja kvantti-kontekstuaalisuuden kautta ja kyseenalaisti EPR:n oletukset [210, s. 1730]. Hänen vastauksensa tarkasta sanomasta on ollut epäselvyyttä<sup>1</sup> ja filosofista väittelyä käydään siitä edelleen [103, s. 2]. EPR:n argumentaatiosta käytetään usein nimitystä *EPR-paradoksi* [192, s. 119], vaikka kyse ei oikeastaan ole paradoksista.

Kolmen vuosikymmenen ajan 1960-luvun puoliväliin saakka tiedeyhteisön argumentit EPR:n todellisuuskäsityksestä olivat luonteeltaan filosofisia [187, s. 940] ja Bohrin esiin tuomia näkemyksiä tuettiin lähes yksimielisesti [248, s. 1306]. Sitoutumista joko EPR:n tai heidän ”vastustajiensa” kannalle pidettiin makuasiana [14, s. 1] ja aiheeseen liittyvä tutkimus oli verraten vähäistä [54, s. 6]. John S. Bell esitti teoreettisen ratkaisun vuonna 1964 [25]. Hän muotoili EPR:n esittämien lokaalin realismin ehtojen, David Bohmin [37] EPR:n spin-muotoilun (EPRB) ja piilomuuttujiin<sup>2</sup> liittyvän tutkimuksensa [26] pohjalta epäyhtälön, jonka jokainen ehdot täyttävä teoria, nk. *lokaalirealistinen piilomuuttujateoria*, toteuttaa. Bell osoitti, että kvanttimekaniikka ei noudata epäyhtälöä eli *kvanttiteorian ennustamat statistiset kahden hiukkasen yhteismittausten korrelaatiot ovat voimakkaampia kuin vastaavat klassisen todennäköisyysteorian implikoimat korrelaatiot*. Toisin sanoen, ei ole olemassa lokaalirealistista mallia, joka kykenisi täydellisesti simuloimaan kvanttiteoriaa [77, s. 1886]. Nykyään käsitteellä Bellin epäyhtälö viitataan epäyhtälöihin, jotka on johdettu lokaalirealistisista oletuksista ja joilla voidaan

---

1. Maininnan arvoisia lähteitä ovat ainakin [134, s. 3–18], [248, s. 1307,1320], [77, s. 1921–1922] ja [157, s. 95]. EPR-argumentin yleistänyt Bell totesi [28, s. C2-59], että Bohr [41] mahdollisesti vain hylkäsi EPR:n esittämät väitteet ilman varsinaista todistusta. Bohrin vastaus ei kumonnut EPR:n logiikkaa, vaan pyrki vahvistamaan sen tosiasian, että kvanttiteoria voi käyttäytyä vastoin klassisen fysiikan tuomaa intuitiota, jopa todella ”epämiellyttävällä” tavalla [130, s. 69]. Bohrin kritiikki keskittyi EPR:n todellisuuskäsitykseen, tarkemmin aiheesta luvussa 3.1.4.

2. Piilomuuttujat ovat kvanttiteorian ulkopuolisia, ylimääräisiä parametreja, joita ehdotettiin täydentämään teoriaa EPR:n mielessä täydelliseksi teoriaksi (luku 3.2).

testata kvanttiteorian ja lokaalin realismin yhteensopivuutta. Epäyhtälöt ovat historiallisesti ensimmäinen separoituvuuskriteeri lomittuneille tiloille [235, 236]. Ne eivät kuitenkaan ole optimaalisia lomittumisen havaitsemisessa eivätkä pysty mittaamaan lomittumisen voimakkuutta tarkasti.

Bellin todistusta täydensivät oleellisella tavalla Clauser, Horne, Shimony ja Holt (CHSH) [76]. He muotoilivat vastaavan teoreeman ilman Bellin tekemää oletusta epärealistisille, täydellisille mittauskorrelaatioille. *CHSH-epäyhtälö* (3.21) on alan kokeellisessa tutkimuksessa kenties eniten käytetty ja parhaiten tunnettu Bell-tyyppinen epäyhtälö. Ensimmäisen luotettavan kokeellisen havainnon kvanttimekaniikan ja lokaalin realismin yhteensopimattomuudesta tekivät Alan Aspectin johtama tutkimusryhmä [13, 15, 16]. He mittasivat laservalolla viritetyistä kalsiumatomeista kaskaadiemittoituneiden fotonien lineaarisen polarisaation korrelaatioita [228, s. 22]. Koe sisälsi kuitenkin muutamia mahdollisia aukkoja ja ensimmäiset ”aukottomat” Bell-kokeet tehtiin vuonna 2015 [124, 138, 224]. Erityisesti Giustina et al. [124] suorittama fotonikoe sulki useita merkittäviä aukkoja, jättäen jäljelle vain välttämättömät oletukset, joita kokeellinen tutkimus aina käyttää ja joita ei voida koskaan varmentaa, kuten superdeterminismi.

### 3.1 Einstein, Podolsky, Rosen ja lokaali realismi

EPR [93] toi kvanttiteorialle ominaisen lomittumisilmiön [219, 247] näkyvästi tutkimuskentälle [210, s. 1728]. Paperi oli merkittävä tekijä ajamaan eteenpäin teorian epälokaalisuuden ja myöhemmin kvantti-informaatioteorian tutkimusta [248, s. 1325]. Seuraavaksi esitetään EPR:n päättely alkuperäisessä muodossaan, jonka jälkeen se muotoillaan uudelleen spin- $1/2$ -järjestelmälle.

#### 3.1.1 Lähtökohdat

EPR:n lähtökohtina olivat fysikaalisen teorian *täydellisyyden* ja *realismin* määrittely sekä oletus *lokaalisuudesta* eli että kaukana toisistaan olevat hiukkaset eivät vaikuta toistensa ominaisuuksiin tai lokaalien mittausten todennäköisyyksiin [54, s. 2–3]. EPR:n mukaan täydellisen teorian tulee välttämättä sisältää *suure*, vastaamaan jokaista fysikaalisen todellisuuden osapiirrettä [93, s. 777]:

“... every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory.” (β)

Realismilla EPR tarkoitti suureiden arvojen täsmällistä määrittämistä [93, s. 777]:

“If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.” (γ)

EPR totesi realismin ehdon olevan riittävä, mutta ei välttämätön.<sup>3</sup> EPR asetti seuraavat kaksi loogista ehtoa, jotka eivät voi olla voimassa yhtäaikaan [93, s. 778]:

- (i) Kvanttimekaanisen aaltofunktion antama kuva fysikaalisesta todellisuudesta ei ole täydellinen.
- (ii) Ei-kommutoiiviin operaattoreihin liittyvät fysikaaliset suureet eivät voi esiintyä samassa todellisuudessa.

Ehto (ii) seuraa suoraan realismin määritelmästä ( $\gamma$ ) ja epämääräisyysrelaatiosta (2.34), kun aaltofunktiolta oletetaan täydellisyys ( $\beta$ ) [157, s. 181–182]. EPR perusteli ehdon (i) seuraavalla ajatuskokeella. Kaksi hiukkasta A ja B vuorovaikuttavat, minkä jälkeen ne viedään matkan  $x_0$  päähän toisistaan (kuva 3.1). Matka on niin pitkä, että hiukkasten välillä ei voi olla ”oikeaa” (lokaalia) vuorovaikutusta, kun mittaaminen alkaa [93, s. 779]:

“... since at the time of measurement the two systems no longer interact, no real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done to the first system.” ( $\delta$ )

EPR:n näkemyksen lokaalisuudesta sanottiin olevan tavanomainen [210, s. 1728–1729] ja intuitiivinen [77, s. 1921] aikakauden fyysikoille. Einstein piti oletusta ehdottoman tärkeänä [28, s. C2-46] vielä vuosia EPR:n julkaisemisen jälkeen [199, s. 150], todettiin Einsteinin omaelämäkerrassa [251, s. 85]:

“But on one supposition we should, in my opinion, absolutely hold fast: the real factual situation of system S2 is independent of what is done with the system S1, which is spatially separated from the former.” ( $\varepsilon$ )

EPR perusteli lokaalisuuden ( $\delta$ ) ja realismin ( $\gamma$ ) avulla sopivien ei-kommutoivien suureiden, paikan  $x$  ja liikemäärän  $p$ , olemassaolon samassa todellisuudessa [103, s. 7–8] eli ristiriidan ehdon (ii) kanssa. Tarkastellaan seuraavaksi EPR:n ajatuskoetta.

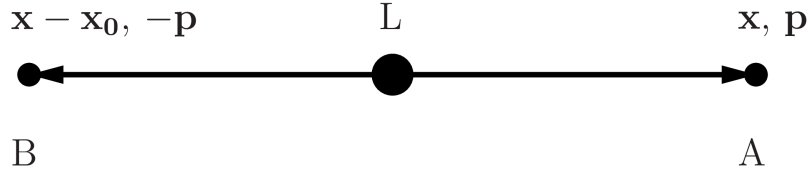
### 3.1.2 EPR jatkuville muuttujille

EPR käsitteli puhdasta lomittunutta kahden hiukkasen tilaa, jota kuvaa paikkaesityksessä aaltofunktio

$$\Psi(x_A, x_B) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/\hbar)(x_A - x_B + x_0)p} dp. \quad (3.1)$$

Yhtälössä (3.1)  $x_A$  on hiukkasen A koordinaatti(muuttuja),  $x_B$  hiukkasen B koordinaatti,  $x_0$  hiukkasten välinen (vakio)etäisyys ja  $p = p_A + p_B$  koko järjestelmän liikemäärä. Etäisyys  $x_0$  on niin suuri, ettei hiukkasten välillä ole suhteellisuusteorian näkökulmasta (hiukkaset liikkuvat hitaammin kuin valon nopeus) tiedonvälitystä mittausten tekemisen aikana (3.1).

3. EPR:n taustalla olevista minimaalisista oletuksista kirjoittavat mm. [35, 132, 227] ja [182].



**Kuva 3.1:** Alkuperäinen EPR:n tilanne [210, s. 1729]. Kaksi hiukkasta A ja B siirretään lähtöpisteestä L etäisyyden  $x_0$  päähän toisistaan. Hiukkasten paikka-koordinaattien välillä on täydellinen korrelaatio ja liikemäärien välillä täydellinen antikorrelaatio. Mittaamalla esimerkiksi hiukkaselle A joko paikan tai liikemäärän voidaan tuloksen perusteella määrätä vastaavan suureen arvo hiukkaselle B, vuorovaikuttamatta B:n kanssa millään tavoin.

Koko järjestelmän aaltofunktio  $\Psi$  tunnetaan, sillä suureita  $x_A - x_B$  ja  $p = p_A + p_B$  vastaavat operaattorit kommutoivat [19, s. 98]. Mittaamalla hiukkaselle A joko liikemäärä  $p_A$  tai paikka  $x_A$  voidaan, tehdystä valinnasta riippuen, hiukkaselle B päätellä joko liikemäärä  $p_B$  tai paikka  $x_B$  tarkasti. Ehdon ( $\gamma$ ) perusteella molemmat suureet vastaavat todellisuuden osapiirteitä. Niiden täytyy kuulua samaan todellisuuteen: Lokaalisuusoletuksen ( $\delta$ ) perusteella hiukkanen B (tai hiukkasta mittaava henkilö tai laite) ei voi tietää, kumpi suureista hiukkaselle A mitattiin, joten kummallekin on jo ennen mittauksen suorittamista määräytynyt tarkka arvo [25, s. 195], [248, s. 1316]. Schrödinger kuvasi tilannetta artikkelissaan [220, s. 559] seuraavasti (system No. 1 viittaa hiukkaseen B):

*“Yet since I can predict either  $x_1$  or  $p_1$  without interfering with the system No. 1 and since system No. 1, like a scholar in examination, cannot possibly know which of the two questions I am going to ask first: it so seems that our scholar is prepared to give the right answer to the first question he is asked, anyhow. Therefore he must know both answers.”* (ζ)

Jos kvanttimekaniikka olisi täydellinen teoria, sen pitäisi EPR:n määrittelyssä sisältää vastine jokaiselle todellisuuden elementille eli sekä hiukkasen B paikalle  $x_B$  että liikemäärälle  $p_B$ . Näin ei ole, sillä liikemäärä- ja paikkaoperaattori eivät kommutoi. Tämä on ristiriita ehdon (ii) kanssa<sup>4</sup> ja päätellään [102, s. 32–34], että (i) on voimassa eikä kvanttimekaniikka anna täydellistä kuvaa luonnosta. EPR:n tulos ei ole voimassa, jos todellisuuden elementit liittyvät samanaikaiseen

4. Klassisen fysiikan teoriassa ristiriitaa ei ole, sillä kaikilla hiukkasten mitattavilla ominaisuuksilla on täsmälliset arvot kaikkina ajanhetkinä ja mittaus ”näyttää” nämä arvot [81, s. 20–21].

mittaamiseen [93, s. 780]:

“... one would not arrive at our conclusion if one insisted that two or more physical quantities can be regarded as simultaneous elements of reality only when they can be simultaneously measured or predicted.” ( $\eta$ )

Huomion ( $\eta$ ) perusteella vain toinen hiukkaseen B liittyvistä suureista, joko paikka tai liikemäärä, voidaan kerrallaan määrittää tarkasti eli vain toinen niistä voi olla todellisuuden osapiirre [157, s. 184]. EPR huomautti, että ( $\eta$ ):n seurauksena hiukkasen B liikemäärän  $p_B$  ja paikan  $x_B$  todellisuus riippuisi siitä mitä hiukkaselle A mitattiin. Tämä ei kirjoittajien mukaan voi vastata järkevää todellisuuden määrittelyä ja tarkoittaisi lisäksi lokaalisuuden ( $\delta$ ) hylkäämistä [103, s. 11]. Niels Bohrin [41] vastaus EPR-artikkeliin kulminoitui oletuksen ( $\eta$ ) hyväksymiseen [134, s. 4].

EPR-artikkelin lopussa jätettiin auki kysymys, voisiko täydellinen fysikaalisen todellisuuden teoria olla olemassa. Tämä oli jonkinasteinen lähtölaukaus tutkimuksille, joissa kvanttimekaniikkaa pyrittiin täydentämään piilomuuttujilla (luku 3.2), jotka mahdollistaisivat järjestelmän täydellisen kuvailun [157, s. 254], [228, s. 7–8]. Einstein tosin mainitsi myöhemmin [94, s. 378], ettei hän uskonut kvanttimekaniikan olevan sopiva perusta tulevaisuuden fysiikan teorialle eikä kannattanut yhtäkään erityistä piilomuuttujateoriaa [157, s. 254].

### 3.1.3 Muotoilu spin- $1/2$ -hiukkasille

EPR:n ajatuskokeen toistaminen kokeellisessa mittauksessa ei ollut artikkelin ilmentymisen aikaan mahdollista. Osa tutkimuksesta keskittyi muotoilemaan argumentin käyttämällä jatkuvien muuttujien sijasta diskreettejä muuttujia [210, s. 1731], joille argumentin on arvioitu paremmin soveltuvan [154, s. 35]. David Bohm [37, s. 613–623] esitti vuonna 1951 EPR:n kanssa loogisesti ekvivalentin argumentin muotoilun kahdelle spin  $1/2$  -hiukkaselle, josta käytetään lyhyesti nimeä *EPRB*. Hiukkanen spin singlet -tilassa (luku 2.4.4) hajoaa kahdeksi spin  $1/2$  -hiukkaseksi A ja B siten, että kokonaisspinin arvo ei muutu. Kyseessä voi olla esimerkiksi protoni-protoni sirontakoe matalilla energioilla [215, s. 239] tai ensemble  $\pi^0$ -hiukkasia, jotka spontaanisti hajoavat elektroniksi ja positroniksi  $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ . Hiukkaset A ja B liikkuvat vastakkaisiin suuntiin. Hiukkasesta puhuttaessa tarkoitetaan suurta ensemblea identtisesti preparoituja hiukkasia.

Hiukkaselle A mitataan spin Sternin-Gerlachin laitteella [215, s. 1–5], [112, 203], jonka magneettikenttä on yksikkövektorin  $\mathbf{r}_A$  suuntainen (kuva 3.2). Mittauksen tulosta merkitään  $+1$ , jos spinin  $\mathbf{r}_A$ -suuntainen komponentti on ”ylöspäin” ja  $-1$  jos ”alaspäin”. Hiukkasen B spin mitataan vastaavalla laitteistolla, jonka magneettikenttä on vektorin  $\mathbf{r}_B$  suunnassa. Spin-aaltofunktio on yhtälön (2.50) perusteella

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle). \quad (3.2)$$

Tilalle  $|\psi\rangle$  laskettiin luvussa 2.4.4 hiukkasten A ja B yhteismittausten tulosten todennäköisyydet  $P_{**'}$  ja odotusarvo  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$ :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = P_{++} - P_{+-} - P_{-+} + P_{--} = -\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = -\cos(\alpha_{AB}), \quad (3.3)$$

jossa  $\alpha_{AB}$  on vektoreiden  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$  välinen kulma. Tapaus  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B$  on EPR:n tilanne eli *täydellinen kvanttimekaaninen antikorrelaatio*. Jos hiukkasten A ja B spinit mitataan samaan suuntaan, saadut tulokset ovat vastakkaiset eli  $+1$  ja  $-1$ , jolloin  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = -1$ . Hiukkasen A spinin mittaaja voi näin ollen päätellä hiukkasen B spin-komponentin arvon. Hän voi varmistaa tekemänsä päätelmän oikeellisuuden tiedustelemalla hiukkasen B-spinin mittaajalta arvoa jälkeinpäin. Lokaalisuusehdon ( $\delta$ ) nojalla hiukkaselle A suoritettu mittaus ei vaikuta hiukkaselle B tehtyihin mittauksiin. Reaalisuusehdon ( $\gamma$ ) perusteella mitattavaksi valittu komponentti on todellisuuden osapiirre hiukkaselle B.

Perinteinen kvanttimekaniikan tulkinta sanoo, ettei hiukkasilla ole hyvin määriteltyä spin-arvoa yhdenkään suunnan suhteen ennen kuin mittaus suoritetaan. EPR-argumentin nojalla hiukkaselle A voidaan mitata spin häiritsemättä millään tavoin hiukkasta B, jos hiukkaset ovat tarpeeksi kaukana toisistaan. Koska valinta mitata tietty spin-komponentti hiukkaselle A oli mielivaltainen, hiukkaselle B voidaan määrittää (täydellä varmuudella) minkä tahansa spin-komponentin arvo mittaamalla vastaava komponentti hiukkaselle A<sup>5</sup>. Näin ollen jokainen mittaussensiblen hiukkaspari sisältää useita todellisuuden elementtejä eli spin-komponenttien tarkkoja arvoja, esimerkiksi komponentit  $S_1$  ja  $S_2$ . Kvanttimekaniikan nojalla ei ole olemassa spin-1/2-hiukkasen tilaa, jonka kaikki spin-komponentit tiedettäisiin tarkasti ja ehdon ( $\beta$ ) perusteella kvanttimekaniikka ei siten voi olla täydellinen teoria.

Tilanteet, joissa mitattiin hiukkaselle B eri komponenttia kuin hiukkaselle A, eivät ole huomionarvoisia EPR:n tapauksessa ja käsitellään Bellin teoreeman yhteydessä luvussa luku 3.3.

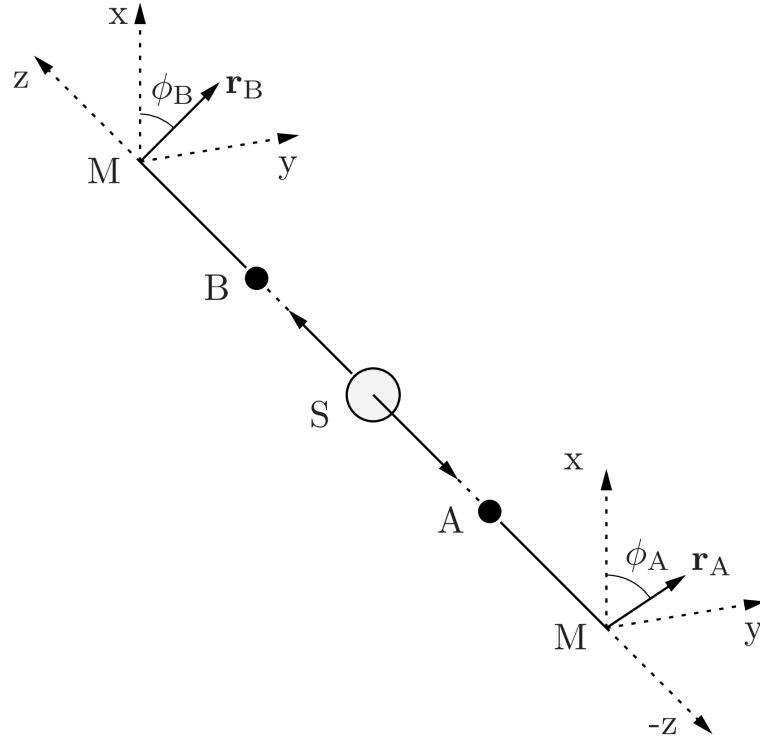
### 3.1.4 EPR:n tulkinnasta

EPR:n väittämä kvanttiteorian epätäydellisyydestä sai tutkijat pohtimaan kvanttitasoisen fysikaalisen todellisuuden luonnetta. Artikkelin voi nähdä kulminaationa ”Einsteinin koulukunnan” todellisuuskäsitykselle. EPR:n kirjoitusasuun muotoon liittyvien epäselvyyksien<sup>6</sup> ja ongelman filosofisen lähtökohdan vuoksi paperin sanoman tulkinnasta on julkaistu paljon tutkimuksia [102, s. 32].

EPR:n argumentoinnin on tulkittu tarkoittavan, että järjestelmän ominaisuudet ovat hyvin määriteltyinä olemassa riippumatta siitä, suoritetaanko järjestelmälle

5. Kirjallisuudessa puhutaan myös reaalisuusehdon ( $\gamma$ ) *heikosta* ja *vahvasta* muodosta [131, s. 1142], [153, s. 50]. Ensimmäisessä mittaus voitaisiin tehdä ja jos näin tehtäisiin, saataisiin pääteltyä tulos. Jälkimmäisessä puolestaan data mittauksesta päätelmän tekemiseen hiukkaselle B on jo olemassa ja vastaava koejärjestely kiinnitetty.

6. Fine [103, s. 5] sanoi, että EPR-artikkelin lopullisesta kirjoitusasusta vastasi Podolsky eikä Einstein lukenut artikkelin viimeistä versiota ennen sen lähettämistä julkaisuun maaliskuussa 1935. Toisaalta Jammer [157, s. 185] argumentoi, ettei ole tarkkaa tietoa siitä, mikä osa EPR-paperia on kunkin kirjoittajan käsialaa; pääidea oli lähes varmasti Einsteinin.



**Kuva 3.2:** Sternin-Gerlachin koe kahden spin- $1/2$ -hiukkasen järjestelmälle [131]. Hiukkaset etenevät lähtöpaikasta S kohti toisistaan kaukana olevia magneetteja M, joiden orientaatiot ovat  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$  ja orientaatioiden välinen kulma  $\phi_A - \phi_B = \alpha_{AB}$ . Kutakin magneettia seuraa kaksi ilmaisinta, jotka havaitsevat valitun mittaussuuntaan suhteen ylös- ja alaspäin kääntyneitä hiukkasia. Ilmaisimen roolia voi toimittaa esimerkiksi fluoresoiva levy. Levyyn osuva hiukkanen nostaa levyn elektroneja viritystilalle ja tilan purkautuessa emittoituneet fotonit havaitaan valopisteinä [7, s. 4]. EPR:n tilanteessa magneetit ovat samaan suuntaan,  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B$ . Erilaisia mittaussuuntia ja yhteismittausten tulosten tilastollisia korrelaatioita analysoi J. S. Bell [25] noin kolmekymmentä vuotta EPR:n julkaisun jälkeen (luku 3.3).

mittauksia vai ei. Puhutaan *puolueettoman tarkkailijan* mallista [54, s. 6], jossa mittaus passiivisesti heijastaa olemassa olevaa sen sijaan, että mittauksen kohde ja mittalaite yhdessä määrittäisivät observaabelin arvon [170, s. 4]. Niels Bohr [41] piti puolueetonta tarkkailua vanhanaikaisena ajattelumallina [248, s. 1305]. Hänen mukaansa fyysikaalisen suureen arvoa ei voinut ajatella ilman arvon mittaamiseen sopivaa koejärjestelyä [248, s. 1314], [99, s. 12].

EPR-artikkeli ja Niels Bohrin vastaus siihen ovat herättäneet runsaasti tieteellistä keskustelua<sup>7</sup> [248, s. 1308]. Seuraavassa esitetään käydyn keskustelun tärkeimpiä piirteitä.

Einstein valitti EPR-artikkelin oleellisen viestin jääneen piiloon formalismin alle [103, s. 5]. Hän ei omissa tarkasteluissaan koskaan käyttänyt formaaleina pitämiään reaalisuusoletusta ( $\gamma$ ) tai todellisuuden osapiirteiden käsitettä [29]. Hänen mukaansa *paradoksi*<sup>8</sup> [103, s. 16] lomittuneiden järjestelmien käsittelyssä ei ollut niinkään observaabelien epälokaali vaikuttaminen toisiinsa. Paradoksi oli pikemminkin vaihtoehtoisten tilafunktioiden määräytyminen yhdelle ja samalle todellisuudelle, välittömästi<sup>9</sup>, lokaalisuuden ( $\delta$ ) ollessa voimassa [102, s. 47–48], ks. [93, s. 779]:

*... it is possible to assign two different wave functions ... to the same reality (the second system after the interaction with the first).* ( $\vartheta$ )

EPR-argumentti on loogisesti pätevä eli johdettu tulos seuraa tehdyistä oletuksista [77, s. 1921], [21, s. 700]. Entä pitävätkö oletukset paikkansa, kun puhutaan luonnon käyttäytymisestä atomitasolla? Kvanttimekaniikan tulosten kanssa ne ovat ristiriidassa [141, s. 130], erityisesti oletus ( $\beta$ ) ei pidä paikkaansa [130, s. 69]. Mikäli havaintoihin perustuva kvanttiteorian kuva luonnosta on oikea, ovat EPR:n asettamat lähtökohdat epäsoivia todellisten fyysikaalisten ilmiöiden kanssa<sup>10</sup> [187, s. 940].

Niels Bohr totesi vastakirjoituksessaan [41], ettei EPR:n päättely sopinut yh-

---

7. Schrödinger osoitti, että EPR:n kirjoittajien esille tuoma tilanne on käsitteellisesti paljon monimutkaisempi kuin paperi antaa suoraan ilmi [157, s. 220–221] ja näki tapauksen osana laajempaa ongelmaa tiheysoperaattorin ei-yksikäsitteisyyteen nojaavalla todistuksella [220], [221, s. 447–450]. Margenau [184] kritisoi EPR:ää turvautumisesta projektiopostulaattiin ja Epstein [98] huomautti EPR:n perustuvan liian rajoitettuun formalismin käyttöön, sillä se ei ottanut huomioon teorian mahdollista aikariippuvuutta [157, s. 237].

8. Einstein käytti termiä useaan otteeseen [102, s. 47], ensimmäisen kerran kirjeessään Schrödingerille elokuussa 1935, josta Schrödinger otti termin käyttöönsä artikkelissa [220]. EPR ei käyttänyt sanaa alkuperäisessä artikkelissaan [28, s. C2–45] eikä koskaan viitannut työhönsä nimellä paradoksi; termi otettiin alan kirjallisuudessa yleisempään käyttöön myöhemmin [157, s. 186].

9. Einstein ei vastustanut mittaustulosten välistä korrelaatiota yleisesti, vaan pikemminkin sitä, että vuorovaikutus olisi välitön [28, s. C2–47]. Toisaalta hänen myöhempi näkemyksensä [92, s. 323–324] (englanninkielinen käännös [45, s. 172–173]) ilmaisee, ettei hän löytänyt kvanttiteoriasta tosiseikkaa liittyen siihen, että kahden tai useamman fyysikaalisen todellisuuden toisistaan riippumaton olemassaolo avaruuden eri osissa olisi mahdotonta.

10. Osittain tästä syystä on julkaistu artikkeleita, joissa EPR todetaan ”virheelliseksi” [248, s. 1306].



teen todellisten atomitason mittaustilanteiden kanssa [41, s. 697]. Hän muotoili ajatuskokeen paikan ja liikemäärän samanaikaisen mittaamisen mahdottomuudesta [44, s. 265–266] ja esitti oman pitkän ajan kuluessa muovautuneen näkemyksensä kvanttimekaniikan tulkinnasta [85, s. 17]. Hän kyseenalaisti EPR:n realismin ([77, s. 1885,1921], [102, s. 34]) ja lokaalisuuden ([134, s. 4], [199, s. 149–150]) sekä näiden kautta EPR:n käsityksen fysikaalisesta todellisuudesta<sup>11</sup>. Bohr väitti, että termiä *todellisuus* voidaan yksikäsitteisesti käyttää kvanttifysiikassa vain silloin, kun mittalaitteisto on kiinnitetty tehtävää mittausta varten [77, s. 1921–1922]. Hän lisäsi, etteivät lukuarvot sellaisinaan ole hyvin määriteltyjä [99, s. 12], vaan esimerkiksi hiukkasen paikka on hiukkasen ja mittalaitteen yhteinen ominaisuus [103, s. 28].

Bohrin ajattelun tukirankana oli klassisten suureiden<sup>12</sup> komplementaarinen käyttö kvanttitasoanalyysissä [157, s. 101]. Täsmällisesti määritellyn käsitteellisen mallin sijaan on rajoituttava toisensa poissulkeviin, mutta luonnollisiin fysikaalisiin ominaisuuksiin [38, s. 160,188]. Bohrin mukaan epätarkkuusrelaatio(t) kuten yhtälössä (2.34) annettu, määrittää kvantitatiiviset teoreettiset rajat konjugaattimuuttujien mittaustarkkuudelle [234, s. 203] ja kokeellinen tutkimus vaatii toisensa poissulkevat koejärjestelyt [157, s. 95–96]. Usein Bohrin vastauksen analysoinnin tutkimuksessa esitetään seuraava lainaus, joka viittaa sopivien kvanttitilojen<sup>13</sup> määrääytymisen mahdollisuuteen (kursiivit lisätty tekstiin) [41, s. 700]:

*“Of course there is in a case like that just considered no question of a mechanical disturbance of the system under investigation during the last critical stage of the measuring procedure. But even at this stage there is essential the question of an influence on the very conditions which define the possible types of predictions regarding the future behavior of the system. Since these conditions constitute an inherent element of the description of any phenomenon to which the term “physical reality” can be properly attached, we see that the argumentation of the mentioned authors does not justify their conclusion that quantum-mechanical description is essentially incomplete.”* (l)

Lainauksessa (l) havaitaan Bohrin ajattelutavan muutos puhua häiriöstä *semanttisena* käsitteenä konkreettisen mittaushäiriön sijaan. Ennen EPR:ää ja sitä pohjustavia Einsteinin fotonilaatikkokokeita 1930-luvulla Bohr sanoi, että muuttujan mittaamisen aiheuttama häiriö saa aikaan muutoksen fysikaalisessa mittaustilanteessa [157, s. 166], [42, s. 65]. Kommentin on tulkittu tarkoittavan, että mittausta hiukkaselle A vaikuttaa jollakin tavalla siihen, mikä on todellista hiukkaselle B [134, s. 4] eli kontribuoi tuloksiin, jotka kvanttiteoria ennustaa B:lle [103, s. 21].

11. EPR:n asettama ehto teorian täydellisyydelle ei ollut yleisesti käytössä [154, s. 36] ja Bohr sekä myöhemmin muut [131, s. 1142], [77, s. 1885] pitivät realismin oletuksen ( $\gamma$ ) sanamuotoa ”*can predict*” monimerkityksellisenä.

12. Bohrin mukaan klassisten käsitteiden käyttö oli tärkeää, sillä ihminen liittää maailmasta tekemänsä havainnot niiden avulla omaan kokemusmaailmaansa [157, s. 100–101].

13. Grete Hermann [139] esitti relationaalisen kvanttimekaanisen todellisuuden kuvaelman objektiivisen näkökulman sijaan jo ennen Bohria [157, s. 208–209].

Bohr ei maininnut artikkelissaan [41] tarkemmin, millainen vaikutus olisi luonteeltaan.

### 3.2 Lyhyesti piilomuuttujateorioista

1960-luvun alkupuolella parin hiljaisemman vuosikymmenen jälkeen<sup>14</sup> kiinnostus kvanttiteorian käsitteellisiin perusteisiin lisääntyi [249]. Teorian perinteisen tulkinnan probabilistinen näkemys aaltofunktion roolista [43, 44] herätti kysymyksen: noudattaako luonto ”itsessään” todennäköisyyspohjaisia sääntöjä vai toimiiko teoria ainoastaan statistisena approksimaationa deterministisestä todellisuudesta [183, s. 322]? Kvanttitason järjestelmien kuvailun aaltofunktion avulla ajateltiin olevan epätäydellinen [159, s. 828]. Motivaattoreina kvanttimekaniikan täydentämiseen olivat myös mittausingelma [36, 83, 249] sekä EPR [93], jonka esittelemät korrelaatiot kahden hiukkasen mittaustulosten välillä antoivat viitteitä siitä, että tulokset olisivat kenties määrittäneet jo lokaalin vuorovaikutuksen aikana vielä tuntemattomien tekijöiden välityksellä [157, s. 253–254]. Kvanttiteorian statistisuus nähtiin analogisena klassisen statistisen mekaniikan ja termodynamiikan yhteyden<sup>15</sup> kanssa [183, s. 324], [230, s. 4]. Kokeellisesti vielä ei pystytty tutkimaan kvanttimaailman ilmiöitä ”perustasolla”.

*Piilomuuttujateoria* (*local hidden variable theory*, LHVT; myös termit *piilomuuttujamalli* ja *piilomuuttujatulkinta*) olettaa kvanttimekaanisen kuvaelman olevan puutteellinen ja ehdottaa teorian täydennystä, jonka avulla tila pystytään kuvailemaan täydellisesti [77, s. 1922]. Teoria voi olla (EPR-)lokaali (*lokaalirealistinen teoria*, oletukset ( $\delta$ ) ja ( $\gamma$ )), jossa kielletään pitkän matkan välitön vuorovaikutus tai epälokaali<sup>16</sup> [38, 39]. Tutkimuksen alkuaikoina piilomuuttujat esitettiin yleensä lokaaleina [157, s. 263] ja implisiittisesti oletettiin determinismi<sup>17</sup> [75, s. 534]. Piilomuuttujien tutkimuskentän historiaa EPR:stä 1960-luvulle on sanottu sekavaksi ja kirjallisuudesta on vaikea löytää yleisesti hyväksyttyä määritelmää käsitteelle *piilomuuttuja* [157, s. 255–257, 262].

*Piilomuuttujat* (*piiloparametrit*, *lisäparametrit*) ovat varsinaisen kvanttiteorian ulkopuolisia tekijöitä, joita ei pystytä olemassa olevan tutkimustiedon ja mittaustekniikan puitteissa määrittämään täsmällisesti. Ne vaikuttavat mittaustuloksiin ja täydentävät fysikaalisen järjestelmän kuvailua [154, s. 38]. Piilomuuttujien

14. Vähäiseen tutkimukseen vaikuttivat mm. toinen maailmansota, laajalti ajatuskokeisiin perustuva ”usko” kvanttiteorian toimivuuteen sekä riittämätön tekniikka sopivien kokeiden tekemiseen [74, s. 70–71].

15. Klassisessa termodynaamikassa todennäköisyydet ovat seurausta siitä, että yksittäisten elementtien, esimerkiksi kaasumolekyylien, liikemäärää ja paikkaa ei tunneta tarkasti [182, s. 854].

16. Tässä tutkielmassa ei käsitellä epälokaaleja piilomuuttujateorioita. Niillä voi olla merkitystä kvantti-informaatioteorian ja kvanttikryptografian protokollien näkökulmasta [153, s. 48].

17. *Deterministinen piilomuuttujateoria* postuloi tilojen  $\{|\psi\rangle\}$  olemassaolon, joille kvanttimekaaniset observaabelit antavat aina määrättyt, täsmälliset arvot [77, s. 1888]. *Stokastisessa teoriassa* (myös nimellä *objektiivinen lokaali teoria* [75]) piilomuuttujat ja kokeelliset parametrit määrittävät ainoastaan todennäköisyyksiä mittaustuloksille [154, s. 39].

rakennetta ei yleensä esitetä tarkasti, vaan käytetään symbolia  $\lambda$  tilanteesta riippuen kuvaamaan yksittäistä piilomuuttujaa, muuttujien joukkoa tai muuttujien funktiota;  $\lambda$  voi olla jatkuva tai diskreetti. Jos piilomuuttujan  $\lambda$  arvo tiedettäisiin yksittäiselle järjestelmälle tilassa  $|\psi\rangle$ , voitaisiin ennustaa varmuudella minkä tahansa tilalle suoritettavan mittauksen tulos. Jos piilomuuttujien todennäköisyysjakauma tunnettaisiin, voitaisiin keskiarvoistamalla tuottaa kvanttiteorian ennusteet suurelle ensemblelle identtisiä järjestelmiä [157, s. 262]. Yksinkertaisemmillään  $\lambda$  antaa määrättyt arvot kaikille kvanttimekaanisen järjestelmän mitattaville ominaisuuksille.

Kvanttimekaniikka on ennustanut menestyksekkäästi kvantti-ilmiöiden kokeellisia tuloksia, joten piilomuuttujamallin tulisi olla sellainen, että se tuottaa kvanttimekaniikan ennusteet [183, s. 324]. Piilomuuttujien olemassaolo esimerkiksi Sternin-Gerlachin kokeen yhteydessä voisi käytännössä tarkoittaa kykyä ennustaa annetun atomin kääntyminen joko ylös- tai alaspäin. Tämä vaatisi lisätietoa atomista itsestään, magneetista sekä mahdollisesti atomin preparoinnista. Lisädata sisältäisi piilomuuttujat, jolloin kvanttiteorian statistinen luonne olisi seurausta fyysikaalisen tiedon epätarkasta määrittelystä [199, s. 155–156].

### 3.2.1 Von Neumannin teoreema

1920-luvulta lähtien on esitetty useita matemaattisia todistuksia, joilla pyritään osoittamaan lokaalit piilomuuttujat mahdottomiksi ja toisaalta myös tapoja esitellä ne kvanttiteorian yhteyteen [230, s. 59]. Von Neumann argumentoi<sup>18</sup> vuonna 1928 [241] kvanttiteorian ja dispersiottomien kvanttimekaanisten ensemblejen yhteensovittamista vastaan [199, s. 158]. Tarkasteltavaa hiukkasten ensemblea ei voida preparoida siten, että mielivaltaista observaabelia  $O$  vastaava operaattori  $\hat{O}$  toteuttaisi odotusarvolle  $\mathcal{E}$  yhtälön  $\mathcal{E}(\hat{O}^2) = [\mathcal{E}(\hat{O})]^2$  eli mikään tila ei voi asettaa samanaikaisesti arvoja kaikille kvanttimekaanisille observaabeleille [77, s. 1923]. Kvanttimekaaninen ensemble ei siis ole täysin deterministinen [55, s. 1].

Von Neumannin teoreemaan siteeraaminen yli kolmen vuosikymmenen ajan todistuksena kvanttimekaniikan täydellisyydelle aiheutti sekaannusta tutkimuskentällä [77, s. 1924].

Von Neumannin tulos pätee matemaattisesti [36, s. 461], mutta yksi sen oletuksista on fyysikaalisesti epäsopiva. Hermiittisten operaattorien  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  odotusarvoihin liittyen oletetaan operaattorin  $\hat{A} + \hat{B}$  olemassaolo, jolle pätee

$$\mathcal{E}(\hat{A} + \hat{B}) = \mathcal{E}(\hat{A}) + \mathcal{E}(\hat{B}). \quad (3.4)$$

Summausehtoa (3.4) pidettiin liian rajoittavana piilomuuttujille [183, s. 326], [230, s. 82], vaikka se pätee operaattoreille kvanttimekaniikassa.

Ehtoon (3.4) sisältyy myös oletus lineaarisesta relaatiosta annetun observaabelin sekä tarkasteltavan tilan välillä (yhtälöt 4.11 ja 4.12 artikkelissa [36]). Oletuksen

18. Koko todistus modernilla notaatiolla [8] ja heikommilla matemaattisilla oletuksilla [230].

nojalla käsiteltävien ensemblejen määrä rajoittuu<sup>19</sup> merkittävästi, sillä kvanttiteoriaa täydentävässä piilomuuttujamallissa relaatio voisi olla epälineaarinen. Toisin sanoen von Neumann tarkasteli pientä osaa mahdollisista piilomuuttujateorioista [39, s. 187] eikä osoittanut mahdottomaksi fysikaalisesti merkityksellistä piilomuuttujateorioiden luokkaa [55, s. 1]. Ilman ehtoa (3.4) todistus kaatuu, sillä lineaarisuus liittyy kiinteästi tiheysoperaattorin ominaisuuksiin.

### 3.2.2 Kohti kontekstuaalisia piilomuuttujateorioita

Piilomuuttujateorioiden tutkimus lähes pysähtyi von Neumannin todistuksen seurauksena [183, s. 326]. 1950-luvulla David Bohmin argumentit [38,39] epälokaaleista piilomuuttujista<sup>20</sup> yhdessä EPR:n kanssa lisäsivät kiinnostusta perehtyä todistukseen uudelleen [157, s. 292]. Vuonna 1957 Gleason [125] esitti teoreeman, jonka seurauksena<sup>21</sup> saadaan von Neumannin tulos Hilbertin avaruuden dimension ollessa vähintään kolme. Gleasonin teoreeman todistuksessa yhtälö (3.4) oletetaan piilomuuttujamallissa vain kommutoiville operaattoreille [55, s. 4]. Teoreeman nojalla kaikki kvanttimekaaniset todennäköisyydet ovat muotoa [154, s. 72]

$$p(\hat{P}_i) = \text{Tr}(\rho \hat{P}_i), \quad (3.5)$$

jossa  $\hat{P}_i$  on projektio-operaattori kantavektorin  $|i\rangle$  suuntaan ja  $p(\hat{P}_i)$  sitä vastaava todennäköisyys.

Gleasonin teoreeman seurauksessa oletettiin kontekstiriippumattomuus eli että observaabelin  $A$  mittaus antaa saman tuloksen riippumatta siitä, mitä muita observaabeleita mitataan samanaikaisesti [26, s. 451]. Kontekstuaalisuuden tärkeyden mainitsi jo 1930-luvulla Bohr [41] ja piilomuuttujatutkimuksessa siihen otti 1960-luvulla kantaa Bell [26]. Hän käsitteli teorioita, joissa odotusarvot ovat muotoa  $\mathcal{E}(A; K)$ , jossa  $K$  viittaa observaabelin  $A$  mittauksen kontekstiin<sup>22</sup> [154, s. 39]. Bell esitti kvanttimekaniikan ennusteet tuottavan yksinkertaisen kaksiulotteisen piilomuuttujamallin, joka on ristiriidassa oletuksen (3.4) kanssa ja kyseenalaisti näin von Neumannin piilomuuttujia vastustavan todistuksen relevanssin fysiikassa [50, s. 1379], [157, s. 303–304].

19. Ensimmäinen kritiikki rajoittuneisuudesta esitettiin vuonna 1935, kun Grete Hermannin [139] mukaan von Neumann ei huomionut todistuksessaan kaikkia mahdollisia ei-kvanttimekaanisia ensembleja [157, s. 274]. Kritiikki jäi vaille tiedeyhteisön huomiota [183, s. 326–327].

20. Bohmin ehdottamassa kvanttimekaniikan tulkinnassa observaabelin mittauksen tulos riippuu sekä mitattavan hiukkasen että mittalaitteiston piilomuuttujista [77, s. 1925], [157, s. 286].

21. Seuraus voidaan todistaa myös suoraan ilman Gleasonin teoreemaa käyttäen projektio-operaattoreita [26, s. 450–451]. Erikoistapaukset Gleasonin teoreeman todistuksesta kaksi- ja kolmeulotteisissa Hilbertin avaruuksissa ovat teoksessa [199, s. 193–195].

22. Kontekstuaalisuus voidaan edelleen ymmärtää *ontologisena (algebrallisena)* tai *ympäristöstä riippuvana* [140, s. 493], [154, s. 39]. Ensimmäinen viittaa mitattavien suureiden valintaan ja jälkimmäinen mittausjärjestelyihin, vrt. oletukset TI ja PI luvussa 3.2.3. Nämä johtavat erilaisiin epälokaalisuuden tyyppeihin [140, s. 481].

### 3.2.3 Piilomuuttujat Bellin teoreemassa

Määritellään lokaali piilomuuttuja  $\lambda \in \Lambda$ , joka kuvaa kahden spin-1/2-hiukkasen täydellistä tilaa  $|\psi\rangle$ . Avaruus  $\Lambda \subset \Omega$  liittyy tilafunktioon  $|\psi\rangle$  siten, että todennäköisyyksimitta  $\rho_{|\psi\rangle}(\Lambda)$  avaruudella  $\Omega$  kuvaa todennäköisyyttä löytää tila  $|\psi\rangle$  avaruudessa  $\Lambda$  [157, s. 262]. Avaruus  $\Omega$  sisältää kaikki mahdolliset piilomuuttujien arvot eri observaabeleille. Jatkossa merkitään  $\rho_{|\psi\rangle}(\lambda) \equiv \rho_\lambda$ .

Piilomuuttuja  $\lambda$  ennustaa hiukkasiin A ja B liittyvien yksikkövektorien  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$  suuntaisten spin-mittausten tulokset täsmällisesti (Sternin ja Gerlachin koe). Avaruus  $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r})$  sisältää tilat  $\lambda$ , jotka vastaavat täydellisen korrelaation tapauksia erilaisten yksikkövektoreiden  $\mathbf{r}$  suuntiin. Piilomuuttujat  $\lambda \in \Lambda$  ovat jakautuneet yli tilojen ensamblen todennäköisyysjakauman  $\rho_\lambda$  osoittamalla tavalla. Piilomuuttujien  $\lambda$  jakaumalle  $\rho(\lambda)$  on myös  $\rho_\lambda = \rho_\lambda(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$  kaikille mittaasetelmille  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$  eli jakauman muoto on riippumaton valitusta mittaasetelmasta [218, s. 1–2], [14, s. 3–4]. Lisäksi

$$\rho_\lambda \geq 0, \quad (3.6a)$$

$$\int_{\Lambda} \rho_\lambda \, d\lambda = 1. \quad (3.6b)$$

Seuraavat tilastolliset oletukset ovat voimassa mitattujen tulosten ja mittaasetelmien riippumattomuudesta hiukkasille A ja B<sup>23</sup> [154, s. 42]:

- (TI) *Tulosriippumattomuus*: Lokaalisuusoletuksen ( $\delta$ ) perusteella hiukkasen A mitattujen arvojen todennäköisyysjakauma ei vaikuta hiukkaselle B mitattujen arvojen jakaumaan. Ehdosta käytetään myös nimitystä *yksinkertainen lokaalisuus* (yhtälöt (1a) ja (1b) artikkelissa [21, s. 697]).
- (PI) *Parametriiriippumattomuus*: Kun piilomuuttuja(t)  $\lambda$  on määrätty, hiukkaset A ja B erotettu toisistaan ja mittaorientaatiot  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$  valittu, mittaustulos hiukkaselle A vektorin  $\mathbf{r}_A$  suuntaan eli  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda)$  ei riipu hiukkasesta B mittaavan analysaattorin orientaatiosta  $\mathbf{r}_B$ , mutta voi riippua muuttujasta  $\lambda$ . Vastaavasti B:n tulokset  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda)$  riippuvat  $\lambda$ :sta sekä suunnasta  $\mathbf{r}_B$ . Tästä käytetään myös nimitystä *ennustettava täydellisyys* (yhtälö 4 artikkelissa [21, s. 699]).

Odotusarvo hiukkaselle A mitatulle tulokselle A ja vastaavasti B hiukkaselle B eli  $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{B} | \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$  voi olla *korreloitunut* eli  $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{B} | \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) \neq \mathcal{E}(\mathbf{A} | \mathbf{r}_A) \mathcal{E}(\mathbf{B} | \mathbf{r}_B)$  [28, s. C2-54]. Piilomuuttuja(t)  $\lambda$  on määritelty siten, että ne sisältävät korrelaation. Jarrett [158] osoitti, että ehdot (TI) ja (PI) ovat yhdessä ekvivalentteja seuraavan ehdon kanssa, josta käytetään nimityksiä *vahva lokaalisuus* [21, s. 698], [158, s. 581–

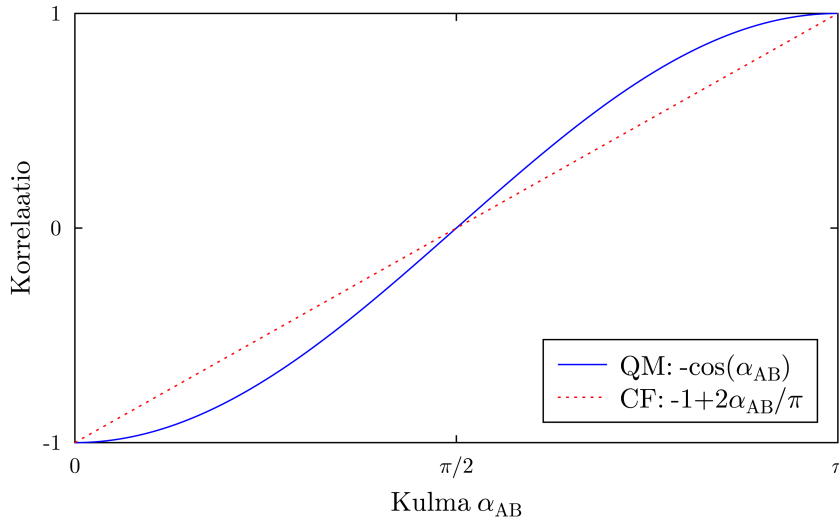
23. Kvanttimekaanisen lomittumisilmiön esittelyn yhteydessä jo Schrödinger [220] muotoili tulosja parametriiriippumattomuuden toisistaan erillisinä. Huomaa, että EPR-artikkelin [93, s. 779] lokaalisuusehto ( $\delta$ ) ei selvästi erottele tulosriippumattomuuden ja parametriiriippumattomuuden välillä. Tarkemmin oletuksista argumentoivat esimerkiksi [21, 158] ja [228].

582] ja *Bellin lokaalisuus* [228, s. 12]:

$$\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{B} | \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \lambda) = \mathcal{E}(\mathbf{A} | \mathbf{r}_A, \lambda) \mathcal{E}(\mathbf{B} | \mathbf{r}_B, \lambda) = \mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda). \quad (3.7)$$

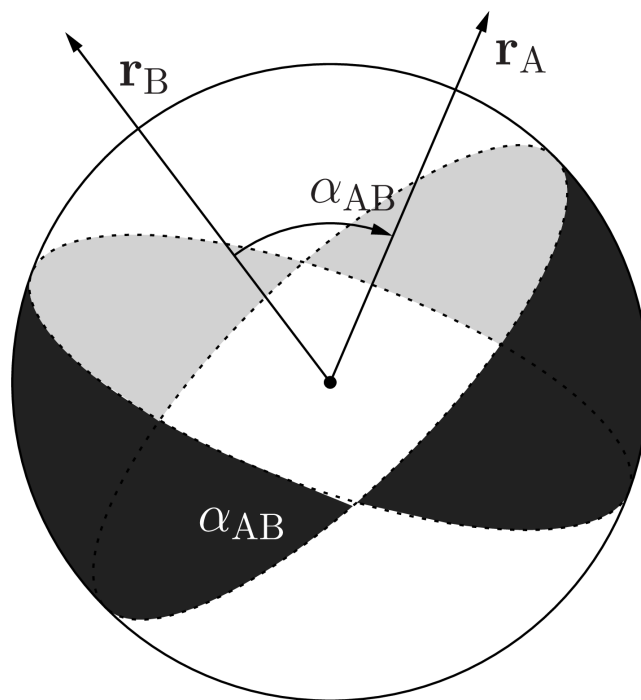
Yhtälössä (3.7) on merkitty  $\mathcal{E}(\mathbf{A} | \mathbf{r}_A, \lambda) = \mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda)$  ja vastaavasti B:lle. Huomaa, että  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) = \pm 1 = \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda)$  kaikille  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B \in \mathbb{C}^2$  ja  $\lambda \in \Lambda$ . Piilomuuttujat  $\lambda$  määräävät deterministisesti<sup>24</sup> tehtyjen mittausten tulokset. Tämä voidaan heikentää stokastisiin yhtälön (3.7) mielessä faktoroituviin piilomuuttujamalleihin [27, 75] vaikuttamatta seuraavaksi johdettaviin tuloksiin [101, 111]. Jokainen stokastinen piilomuuttujateoria voidaan muokata deterministiseksi käyttämällä ylimääräisiä piilomuuttujia [197].

Kuvissa 3.3 ja 3.4 on klassinen (CF) ja kvanttimekaaninen (QM) korrelaatio kahden spin-1/2-hiukkasen mittauksille, kun analysaattorit osoittavat suuntiin  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$ . Maksimaalisesti lomittuneelle tilalle kvanttimekaaninen korrelaatio on sinimuotoinen ja voimakkaampi kuin klassinen, lineaarinen korrelaatio kaikilla mittaussuuntautioiden välisillä kulmilla  $\alpha_{AB} \in (0, \pi)$  paitsi  $\alpha_{AB} = \pi/2$  [199, s. 161–162].



**Kuva 3.3:** Kvanttimekaaninen (QM) ja klassinen (CF) korrelaatio kahdelle spin-1/2-hiukkaselle vektorien  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$  välisen kulman  $\alpha_{AB}$  funktiona [199, s. 162]. Kvanttimekaaninen korrelaatio on voimakkaampi kuin klassinen kaikilla muilla kulmilla paitsi  $\alpha_{AB} = 0$  ja  $\alpha_{AB} = \pi/2$ .

24. Deterministisille teorioille yksinkertainen lokaalisuus ja vahva lokaalisuus ovat keskenään ekvivalentteja, sillä deterministinen teoria on aina täydellinen [158, s. 588 ja osa III].



**Kuva 3.4:** Klassisen korrelaation laskemisen geometrinen konstruktio. Varjostetuilla alueilla  $\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = 1$ , varjostamattomilla  $\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = -1$ . Klassinen korrelaatio  $CF = -1 + 2\alpha_{AB}/\pi$  lasketaan klassisen todennäköisysteorian avulla suoraviivaisesti [199, s. 161].

### 3.3 Bellin teoreema

Kolme vuosikymmentä EPR-argumentin julkaisun jälkeen John S. Bell [25] johti EPRB-argumenttiin (luku 3.1.3) perustuvan teoreettisen kriteerin lokaalin realismin testaamiselle [199, s. 162]. Hän käsitteli kahden hiukkasen yhteismittauksia, joissa yksikkövektorit  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$  voivat osoittaa eri suuntiin<sup>25</sup> eli vektorien välillä on kulma  $\phi_A - \phi_B = \alpha_{AB}$  (kuva 3.2). Kun mittauksia tehdään paljon ja kvanttiteorian ennusteita verrataan LHVT-oletuksista (luku 3.2.3) klassisen todennäköisyysteorian avulla johdettuun epäyhtälörelaatioon (3.12), havaitaan ristiriita [215, s. 241], [154, s. 37,41].

Nykyään termillä *Bellin teoreema* (*Bellin epäyhtälö*, *Bell-tyypin epäyhtälö*) tarkoitetaan kollektiivisesti alkuperäiseen tulokseen [25] tai sen ajatusmalliin pohjaavia tuloksia, jotka johdetaan samantapaisissa mutta yleisemmissä konstruktioissa<sup>26</sup> ja jotka osoittavat kvanttimekaniikan lokaalirealistisen tulkinnan mahdottomuuden [228, s. 1,9], epäyhtälörelaation tai muun loogisen päättelyn (luku 4) kautta. Teoreeman on sanottu olevan yksi tieteen [232, s. 271] ja modernin fysiikan perusteellisimmista tuloksista [74, s. 62], [12, s. 189]. Bellin epäyhtälöä havainnollistetaan myös mm. kuutiomallilla [209, s. 11–13], Venn-diagrammeilla [82, s. 162] tai tohtori Bertlmannin erivärisillä sukilla [28], [19, s. 131–133].

#### 3.3.1 Alkuperäinen todistus

Johdetaan Bellin epäyhtälö alkuperäisessä muodossaan. Käytetään luvussa 3.1.3 esitettyä EPRB-muotoilua sekä luvun 3.2.3 oletuksia. Klassinen odotusarvo  $\mathcal{E}(A, B | \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$  eli keskimääräinen todennäköisyys saada tulos A hiukkaselle A ja B hiukkaselle B on

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(A, B | \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) &= \int_{\Lambda} \rho_{\lambda} \mathcal{E}(A, B | \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \lambda) \, d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} \rho_{\lambda} A(\mathbf{r}_A, \lambda) B(\mathbf{r}_B, \lambda) \, d\lambda. \end{aligned} \tag{3.8}$$

25. Erityinen ominaisuus Bellin analyysissä EPR:ään verrattuna oli hiukkasten *erilaisten observaabelien analyysi* sen sijaan, että rajoituttaisiin tarkastelemaan täydellisiä korrelaatioita [228, s. 19]. Tähän suuntaan oli argumentoinut W. Furry jo vuonna 1936 (yhtälöt 9A ja 9B artikkelissa [108, s. 396]), tosin alan tutkimuksesta ei juuri löydy mainintaa Furryn ajattelusta tässä valossa. Furry osoitti myös, ettei klassisella todennäköisyysteorialla saada tiettyjen observaabelien yhteismittausten odotusarvoille samoja tuloksia kuin kvanttimekaniikalla.

26. Konstruktioissa johdetaan matemaattisesti ehto, jonka lokaalirealistinen (deterministinen tai stokastinen) piilomuuttujamalli asettaa klassisille korrelaatioille tarkasteltavaan mittaustilanteeseen liittyen. Deterministisen lokaalirealistisen teorian täydellinen tila antaa ainoastaan todennäköisyydet 0 ja 1 mahdollisille mittaustuloksille, kun stokastinen lokaalirealistinen teoria sallii myös muut todennäköisyydet väliltä (0, 1) [228, s. 39].



Kvanttimekaaninen odotusarvo<sup>27</sup> observaabelille  $(\vec{\sigma}_A \cdot \mathbf{r}_A)(\vec{\sigma}_B \cdot \mathbf{r}_B)$  on, yhtälö (2.87):

$$\langle (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}_A)(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}_B) \rangle = -\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = -\cos \alpha_{AB}. \quad (3.9)$$

Kulma  $\alpha_{AB}$  on vektorien  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$  välinen kulma. Osoitetaan, että odotusarvo (3.9) on ristiriidassa yhtälöstä (3.8) johdettavan epäyhtälörelaation kanssa. Koska  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) = \pm 1 = \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda)$  ja  $\rho_\lambda$  on normalisoitu todennäköisyysjakauma, yhtälön (3.8) oikea puoli on aina vähintään  $-1$ . Se saavuttaa miniminsä täydellisen anti-korrelaation tilanteessa  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B$  vain, jos  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) = -\mathbf{A}(\mathbf{r}_B, \lambda)$  kaikille  $\mathbf{r}_B \in \mathbb{C}^2$  ja  $\lambda \in \Lambda$  [231, s. 385]. Yhtälö (3.8) voidaan täten kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{B} | \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = - \int_{\Lambda} \rho_\lambda \mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) \mathbf{A}(\mathbf{r}_B, \lambda) d\lambda. \quad (3.10)$$

Määritellään yksikkövektori  $\mathbf{r}_C$  ja merkitään  $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{B} | \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$ . Yhtälön (3.10) avulla ja tuloksia  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_B, \lambda)^2 = 1$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda) = -\mathbf{A}(\mathbf{r}_C, \lambda)$  käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_C) &= - \int_{\Lambda} \rho_\lambda [\mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) \mathbf{A}(\mathbf{r}_B, \lambda) - \\ &\quad - \mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) \mathbf{A}(\mathbf{r}_C, \lambda)] d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} \rho_\lambda \mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) \mathbf{A}(\mathbf{r}_B, \lambda) [\mathbf{A}(\mathbf{r}_B, \lambda) \mathbf{A}(\mathbf{r}_C, \lambda) - 1] d\lambda. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Arvioimalla erotuksen itseisarvoa saadaan alkuperäinen *Bellin epäyhtälö*:

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_C)| &= \left| \int_{\Lambda} \rho_\lambda \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) \mathbf{A}(\mathbf{r}_B, \lambda)}_{\leq 1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \underbrace{[\mathbf{A}(\mathbf{r}_B, \lambda) \mathbf{A}(\mathbf{r}_C, \lambda) - 1]}_{\leq 0} d\lambda \right| \\ &\leq \int_{\Lambda} \rho_\lambda [1 - \mathbf{A}(\mathbf{r}_B, \lambda) \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{r}_C, \lambda)}_{-\mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda)}] d\lambda \\ &= 1 + \int_{\Lambda} \rho_\lambda \mathbf{A}(\mathbf{r}_B, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda) \\ &= 1 + \mathcal{E}(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ristiriita epäyhtälön (3.12) ja yhtälön (3.9) välillä havaitaan valitsemalla mittausasetelmaksi  $xy$ -tasossa kulmat  $\pi/4$ :n välein, hiukkaset etenevät  $z$  ja  $-z$ -suuntiin:  $\mathbf{r}_A = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{r}_B = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0)$  ja  $\mathbf{r}_C = (0, 1, 0)$ . Näillä valinnoilla seuraavat ovat voimassa:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = -\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = -\cos(\pi/4) = -1/\sqrt{2}, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_C) = -\cos(\pi/2) = 0, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C) = -\cos(\pi/4) = -1/\sqrt{2}. \quad (3.15)$$

27. Kaikki Bell-tyypin epäyhtälöt sisältävät yhteismittausten todennäköisyyksiä (tai korrelaatioita) ja odotusarvoja. Osoitettaessa kvanttimekaniikan ennusteiden yhteensopimattomuus epäyhtälöiden kanssa, vaihdetaan todennäköisyyksien ja odotusarvojen tilalle kvanttimekaniikan vasti-  
neet [153, s. 56] ja verrataan näiden antamia ennusteita johdettujen epäyhtälöiden ylärajoihin.

Sijoitus yhtälön (3.12) alimmalle riville antaa

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_C)| &\leq 1 + \mathcal{E}(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C) \\
| -1/\sqrt{2} | &\leq 1 - 1/\sqrt{2} \\
\sqrt{2} &\leq 1,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

joka ei pidä paikkaansa. Epäyhtälö (3.12) antaa identiteetin, kun asetetaan  $\mathbf{r}_A = \pm \mathbf{r}_B$  eli  $\alpha_{AB} = 0$  tai  $\alpha_{AB} = \pi$  eli teoreema ei sano mitään EPRB:n (luku 3.1.3) tapauksesta [130, s. 70–71]. Greenberger, Horne ja Zeilinger (GHZ) [130, 131] osoittivat, että myös EPRB:n tilanne on ristiriidassa kvanttiteorian kanssa, kun hiukkasia on kolme tai enemmän. GHZ-argumenttia käsitellään luvussa 4.1. Bellin teoreema on voimassa myös relativistisessä tapauksessa [21, s. 697–698].

### 3.3.2 CHSH-epäyhtälö

Tuloksen (3.12) todistuksessa oletettiin, että sopiville kulmavalinnoille  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$  on voimassa kokeellisesti epärealistinen täydellinen antikorraatio  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = 1$  [75, s. 526]. Vuonna 1969 Clauser, Horne, Shimony ja Holt (CHSH) [76] esittivät Bellin teoreeman version, joka soveltuu testattavaksi polarisoiduilla fotoneilla [77, s. 1884]. Koe-ehdotelma perustui Kocherin ja Comminsin [168] kokeen muokkaamiseen sopiville polarisaattorien kulmavalinnoille. CHSH-epäyhtälö on Bell-tyypin epäyhtälöistä tunnetuin [154, s. 43], yleisimmin kirjallisuudessa viitattu [153, s. 55] ja sitä kutsutaan Bellin teoreeman standardimuodoksi [2, s. 1]. Käyttäen luvun 3.3.1 merkintöjä ja oletuksia saadaan

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_C)| &\leq \int_{\Lambda} \rho_{\lambda} | \mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) - \\
&\quad - \mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda) | \, d\lambda \\
&= \int_{\Lambda} \rho_{\lambda} \underbrace{ | \mathbf{A}(\mathbf{r}_A, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) | }_{=1} \cdot \\
&\quad \cdot [1 - \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda)] \, d\lambda \\
&= \int_{\Lambda} \rho_{\lambda} [1 - \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda)] \, d\lambda \\
&= 1 - \int_{\Lambda} \rho_{\lambda} \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda) \, d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Määritellään mittaussuunta  $\mathbf{r}'_B$  siten, että  $\mathcal{E}(\mathbf{r}'_B, \mathbf{r}_B) = 1 - \delta$ , missä  $0 \leq \delta \leq 1$ . Jaetaan avaruus  $\Lambda$  kahteen osaan  $\Lambda_+$  ja  $\Lambda_-$  siten, että

$$\Lambda_{\pm} = \{ \lambda \mid \mathbf{A}(\mathbf{r}'_B, \lambda) = \pm \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) \}. \tag{3.18}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{r}'_B, \mathbf{r}_B) &= \int_{\Lambda} \rho_{\lambda} \mathbf{A}(\mathbf{r}'_B, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) \, d\lambda \\
&= \int_{\Lambda_+} \rho_{\lambda} \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{r}'_B, \lambda)}_{\mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda)} \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) \, d\lambda + \int_{\Lambda_-} \rho_{\lambda} \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{r}'_B, \lambda)}_{-\mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda)} \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) \, d\lambda \\
&= \int_{\Lambda_+} \rho_{\lambda} \, d\lambda - \int_{\Lambda_-} \rho_{\lambda} \, d\lambda \\
&= \underbrace{\int_{\Lambda} \rho_{\lambda} \, d\lambda}_{=1} - 2 \int_{\Lambda_-} \rho_{\lambda} \, d\lambda = 1 - \delta \\
&\Rightarrow \int_{\Lambda_-} \rho_{\lambda} \, d\lambda = \frac{\delta}{2}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Näin ollen saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \rho_{\lambda} \mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda) \, d\lambda &= \int_{\Lambda_+} \rho_{\lambda} \underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda)}_{\mathbf{A}(\mathbf{r}'_B, \lambda)} \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda) \, d\lambda + \\
&\quad + \int_{\Lambda_-} \rho_{\lambda} \underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{r}_B, \lambda)}_{-\mathbf{A}(\mathbf{r}'_B, \lambda)} \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda) \, d\lambda \\
&= \int_{\Lambda} \rho_{\lambda} \mathbf{A}(\mathbf{r}'_B, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda) \, d\lambda - \\
&\quad - 2 \int_{\Lambda_-} \rho_{\lambda} \mathbf{A}(\mathbf{r}'_B, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda) \, d\lambda \\
&\geq \mathcal{E}(\mathbf{r}'_B, \mathbf{r}_C) - 2 \int_{\Lambda_-} \rho_{\lambda} \underbrace{|\mathbf{A}(\mathbf{r}'_B, \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{r}_C, \lambda)|}_{\leq 1} \, d\lambda \\
&\geq \mathcal{E}(\mathbf{r}'_B, \mathbf{r}_C) - \delta \\
&= \mathcal{E}(\mathbf{r}'_B, \mathbf{r}_C) + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_B, \mathbf{r}_B) - 1,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

joka yhtälön (3.17) viimeiselle riville sijoitettuna antaa *CHSH-epäyhtälön*

$$|\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_C)| + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_B, \mathbf{r}_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_B, \mathbf{r}_C) \leq 2. \tag{3.21}$$

Ristiriita kvanttimekaanisen odotusarvon (3.9) kanssa tulee esiin kulmavalinnoilla  $\mathbf{r}_A = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ ,  $\mathbf{r}_B = (-1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{r}'_B = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$  ja  $\mathbf{r}_C = (0, 1, 0)$ , kun mittaukset tehdään  $xy$ -tasossa ja hiukkaset etenevät suuntiin  $z$  ja  $-z$ . Yhtälöön (3.21) sijoitus antaa

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_C)| + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_B, \mathbf{r}_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_B, \mathbf{r}_C) \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= 2\sqrt{2} \\
&< 2,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

joka ei pidä paikkaansa.

Mikäli CHSH-argumenttia tarkastellaan fotonien polarisaatiokorrelaatioiden valossa [199, s. 156–158], eroavat odotusarvon (3.9) muoto [19, s. 125–128] ja kulmavallinat edellisistä [199, s. 164–165]. Suurin määrä, jolla CHSH-epäyhtälön yläraja ylittyy, on  $\sqrt{2}$ . Tuloksesta käytetään nimitystä *Tsirel'sonin raja* [71, 174, 175, 240]. Raja saavutetaan kahden spin-1/2-hiukkasen maksimaalisesti lomittuneelle tilalle [206], kuten yhtälössä (3.22). Maksimaalinen ylärajan ylittäminen kuvaa voimakasta lomittumisilmiötä ja on kiinnostavaa, kun lomittumista käytetään resurssina kvanttilaskennassa.

Yhtälöstä (3.21) esitetään kirjallisuudessa hieman erilaisia muotoja. Esimerkiksi artikkelissa [77, s. 1890] on

$$|\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}_B)| + \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B) \leq 2, \quad (3.23)$$

joka saadaan suoraviivaisesti yhtälöstä (3.21) tekemällä vaihdot  $\mathbf{r}_A \rightarrow \mathbf{r}_B$ ,  $\mathbf{r}_B \rightarrow \mathbf{r}_A$ ,  $\mathbf{r}_C \rightarrow \mathbf{r}'_A$  ja huomaamalla, että  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = \mathcal{E}(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A)$  kaikille indekseille A, A', B ja B'. Yhtälössä esiintyvien mittaasuorientaatioiden permutaatio riippuu hieman oletuksista ja notaatiosta, joita käyttäen CHSH-epäyhtälö on johdettu. Erilaiset permutaatiot muodostavat keskenään ekvivalenssiluokan [151]. Itseisarvomerkit voidaan myös laittaa koko lausekkeen ympärille. Esimerkiksi artikkelissa [47, s. 27] on johdettu muoto

$$|\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)| \leq 2, \quad (3.24)$$

joka sopii hyvin CHSH-epäyhtälön ketjuttamiseen (luku 3.4). Epäyhtälön vasenta puolta voidaan merkitään lyhyesti  $\mathbb{S}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}'_B) \equiv \mathbb{S}_{\rho_\lambda}$  ja kirjoitetaan  $|\mathbb{S}_{\rho_\lambda}| \leq 2$ . Kvanttimekaaninen korrelaatio merkitään  $\langle (\sigma \cdot \mathbf{r}_A)(\sigma \cdot \mathbf{r}_B) \rangle \equiv \mathbb{S}_{|\psi\rangle}$ . Kvanttimekaanin ja lokaalin realismin välinen ristiriita (3.22) kirjoitetaan tällöin [24, s. 656]

$$\mathbb{S}_{|\psi\rangle} / \mathbb{S}_{\rho_\lambda} = \sqrt{2}. \quad (3.25)$$

### 3.3.3 CH-epäyhtälöstä

CHSH:n esityksessä polarisaattorin kohtaava foton joko läpäisee sen tai ei läpäise sitä eli on ”hiukkasmainen” [74, s. 91]. Esimerkiksi semiklassisessa säteilyteoriassa tämä ei pidä paikkaansa, sillä fotonia kuvataan aaltopakettina. CHSH:n muotoilu ei suoraan kosketa em. teorioihin nojaavia piilomuuttujateorioita, sillä aaltomainen foton voi osittain läpäistä ja osittain olla läpäisemättä polarisaattoria. Clauser ja Horne [75] muotoilivat CH-oletuksen ja vastaavan epäyhtälön, jonka mukaan todennäköisyys sopivasti määritellyn *objektin* havaitsemiselle, kun se on ohittanut polarisaattorin osittain tai kokonaan, ei voi olla suurempi kuin jos objekti ei olisi mennyt polarisaattorin läpi eli kun polarisaattori on poistettu (*no-enhancement*):

$$-1 \leq P(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) + P(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_B) + P(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B) - P(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}_B) - P(\mathbf{r}_A) - P(\mathbf{r}'_B) \leq 0. \quad (3.26)$$

Epäyhtälössä (3.26) esiintyvät todennäköisyydet  $P(*)$  korrelaatiokertoimien  $\mathcal{E}(*)$  sijaan. Huomaa kaksi viimeistä termiä, jotka koskevat yksittäisten fotonien havaitsemista.

Kaikille CH-oletuksen toteuttaville lokaalirealistisille teorioille CH-epäyhtälön ennuste redusoituu CHSH-epäyhtälön ennusteeseen [74, s. 86–87], [47, s. 29]. Näin ollen CHSH-epäyhtälö testaa determinististen LHVT:n ohella yleisempää objektiivisten lokaalien teorioiden (ja stokastisten LHVT:n) luokkaa [73, s. 1223]. CH-epäyhtälön ja siihen pohjaavien epäyhtälöiden, kuten esimerkiksi Eberhard-epäyhtälön [91] etuna on kokeellisessa tutkimuksessa CHSH-epäyhtälöön nähden se, että CH-epäyhtälöt eivät ole tasa-arvoista jakaumaa ja huomioivat myös ilmaisimilta kadonneet fotonit (luku 3.5.5).

### 3.4 Bellin teoreeman yleistämisestä

CHSH-epäyhtälö (3.23) on erikoistapaus laajasta yleisten korrelaatiopohjaisten eli standardimuotoisten Bell-tyypin epäyhtälöiden joukosta [148, s. 879]. Epäyhtälöjoukkoa voidaan tarastella todennäköisyysteorian ja konveksin analyysin menetel- millä [106, 202, 204, 235]. Bell-tyypin epäyhtälöiden etsiminen tarkoittaa *konveksin verhon ongelman (hull problem)* ratkaisemista [246, s. 032112-2]. Tavoitteena on selvittää konveksin monitahokkaan eli *korrelaatiopolytoopin* maksimaaliset sivutah- kot, jotka määrittävät epäyhtälörelaatioiden kautta, kun polytoopin kärkipisteet eli todennäköisyydet mittausennusteille tunnetaan. Epäyhtälörelaatio voi olla *opti- maalinen* eli ”tiukka”, jolloin tahko sijaitsee polytoopin reunalla tai epäoptimaali- nen [185, s. 1–2]. Tiukat epäyhtälöt ovat keskeisiä lomittumisen tarkastelussa, sillä niiden avulla LHVT:n asettaman ylärajan ylityksen määrästä voidaan päätellä lomittumisen voimakkuutta. Kaikkien Bell-tyypin epäyhtälöiden selvittäminen on laskennallisesti hyvin vaativa, *NP-täydellinen ongelma* [80, 204].

Yleisessä tapauksessa  $(n, m, d)$  tarkastelun kohteena on  $n$  kappaletta hiukkasia, joista jokaiselle mitataan  $m$  erilaista ei-kommutoivaa observaabelia ja näistä jokaisella on  $d$  vapausastetta. Tarkastelussa  $m$  ja  $d$  voivat erota eri hiukkasilla toisistaan eli  $m = m_n$  ja  $d = d_{m_n}$ . CHSH-epäyhtälö kuuluu luokkaan  $(2, 2, 2)$ . Tässä luvussa esitellään tärkeimpiä tapauksiin  $(n, 2, 2)$ ,  $(2, m, 2)$  ja  $(2, 2, d)$  liittyviä tuloksia. Muita yhdistelmiä vapausasteista käsitteleviä artikkeleita ovat esimerkiksi [176] ja [256]. Lisäksi puhutaan Bellin epäyhtälöiden roolista lomittumisilmiön havaitsemisessa.

Bellin teoreeman ohella ristiriidan LHVT:n ja kvanttiteorian välillä lomittuneil- le tiloille ilmentävät mm. Kochen-Specker (KS) -tyyliset<sup>28</sup> teoreemat [137, 198, 199, 230, 233], GHZ-argumentit [130, 131, 140] (luku 4.1), Hardy-tyypin epäyhtä- löt [61, 135, 136, 190, 255] (luku 4.2), kvanttikoodisanat [89, 189, 229] sekä matemaat- tiseen lyhdeteoriaan pohjautuvat kvanttiloogiset argumentit [1–3]. Nämä asettavat erilaisia vaatimuksia ja rajoituksia myös LHVT:n ominaisuuksille. Esimerkiksi

28. Kochenin ja Speckerin [230] tutkimuksen perusteella piilomuuttujien esittely kvanttimekaniik- kaan klassisen statistisen mekaniikan kanssa analogisella tavalla ei säilytä Hilbertin avaruuden operaattorialgebran rakennetta ja johtaa algebralliseen ristiriitaan. Kochen-Specker-teoreeman todistus alkuperäistä yksinkertaisemmalla vektorikonstruktioilla on kirjassa [199, s. 196–201]. Bellin teoreemasta poiketen KS-argumentit eivät ole tilariippuvia.

KS-teoreema [230] on voimassa vain deterministiselle LHVT:lle, sillä se käyttää kontrafaktuaalista päättelyä [228, s. 39–41]. Näitä tutkimussuuntia ei käsitellä tutkielmassa tarkemmin.

Bellin teoreema on suoraan tai epäsuorasti luonut useita käytännön sovelluksia ja tutkimusalueita, kuten mm. kvanttikryptografia [30, 95], supertiheä koodaus [33], kvanttiteleportaatio [34], kokonaislukujen jakaminen alkutekijöihin [229], hakutoiminto ja hajautettu laskenta [133] sekä kvantti-virheenkorjaus [32, 129]. Bell-tyypin epäyhtälöitä muotoillaan myös informaatioteorian kontekstissa [47, 48, 223] ja käytetään teoreettisina työkaluina epäyhtälöiden merkityksen tarkastelussa [47, s. 50]. Bell-tyypin epäyhtälöiden käytännön sovelluksiin ja kvantti-informaatioteoriaan ei perehdytä tutkielmassa tarkemmin.

### 3.4.1 Epäyhtälöt muotoa $(n, 2, 2)$

Kvanttilaskennan toteutuksen näkökulmasta olisi kiinnostavaa tietää, kuinka Bell-tyypin epäyhtälöitä muotoillaan äärelliselle määrälle kubitteja. Olkoon  $\mathcal{S}(s_1, \dots, s_n)$  mielivaltainen funktio indekseistä  $s_i \in \{-1, +1\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  jonka mahdolliset arvot ovat  $\pm 1$ . Yleinen mittauskorrelaatioita sisältävien Bell-tyypin epäyhtälöiden joukko tapauksessa  $(n, 2, 2)$ , *WWZB-epäyhtälöt* [151, 246], kuvataan esimerkiksi seuraavasti [151, s. 210401-2]:

$$\left| \sum_{s_1, \dots, s_n = \pm 1} \mathcal{S}(s_1, \dots, s_n) \sum_{k_1, \dots, k_n = 1, 2} s_1^{k_1-1} \dots s_n^{k_n-1} \mathcal{E}(k_1, \dots, k_n) \right| \leq 2^n. \quad (3.27)$$

Epäyhtälöitä on yhteensä  $2^{2^n}$  kappaletta, sillä funktion  $\mathcal{S}(s_1, \dots, s_n)$  indekseille  $s_i$  löytyy  $2^n$  vaihtoehtoa ja jokaista näistä vastaa dikotominen arvo. Mittaustuloksia  $k_1, \dots, k_n$  vastaava klassinen odotusarvo on  $\mathcal{E}(k_1, \dots, k_n)$ . Esimerkiksi tapauksessa  $n = 2$  saadaan CHSH-epäyhtälö, kun funktioksi valitaan

$$\mathcal{S}(s_1, \dots, s_n) = \sqrt{2} \cos[-\pi/4 + (s_1 + \dots + s_n - n) \cdot \pi/4]. \quad (3.28)$$

Funktiota (3.28) käyttäen havaitaan myös GHZ-argumenttia (luku 4.1) vastaava epäyhtälö [194, s. 4] sekä tunnettu Bell-tyypin epäyhtälöiden ryhmä nimeltään *MABK-epäyhtälöt* [10, 24, 166, 188], kun  $n \geq 3$  [246, s. 032112-6]. WWZB-epäyhtälöistä niille pätee maksimaalinen klassisen rajan ylitys  $\mathbb{S}_{|\psi\rangle}/\mathbb{S}_{\rho_\lambda} \propto 2^{n/2}$  eli ylärajan rikkoutuminen on eksponentiaalisesti verrannollinen hiukkasten lukumäärään  $n$  [10, s. 5376–5377]. Rajan ylitys saavutetaan käyttäen yleistettyä GHZ-tilaa  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$ , yhtälö (2.95) tai siitä lokaalilla unitaarilla muunnoksella johdettua tilaa [65, 66] valinnalla  $\alpha = 1/\sqrt{2} = \beta$ . Tilat  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$  ylittävät maksimaalisesti kaikkien WWZB-epäyhtälöiden asettamat ylärajat [246, s. 032112-7] eli ovat maksimaalisesti lomittuneita  $n:n$  kubitin tiloja.

Erilaiset funktiot  $\mathcal{S}(s_1, \dots, s_n)$  antavat odotusarvotermien  $\mathcal{E}(k_1, \dots, k_n)$  edessä olevien miinusmerkkien siirtymisen ja indeksien  $s_i$  permutaatioiden kautta erilaisia epäyhtälöitä, jotka kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan [151, s. 210401-2]. Epäyhtälöt (3.27) muodostavan täydellisen joukon. Toisin sanoen niistä voidaan

johtaa yleistetty Bellin epäyhtälö (yhtälö 5 artikkelissa [151]), joka on voimassa, jos ja vain jos on olemassa lokaalirealistisen malli yhteismittausten korrelaatioiden kuvailuun [194, s. 2–4].

Kun  $n$  on pariton ja tilan  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$  määritelmässä  $\beta$  on riittävän pieni, voidaan lokaaleja rotaatioita ja Eulerin teoremaa käyttäen osoittaa [152, s. 210402-3], että tilat  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$  toteuttavat kaikki korrelaatiofunktioita sisältävät Bell-tyypin epäyhtälöt. Täten Bell-tyypin epälokaalisuuden ja kvanttilomittumisen välistä ekvivalenssia puhtaille tiloille ei voida osoittaa käyttäen vain mittauskorrelaatioita sisältäviä Bellin epäyhtälöitä. Ongelman ratkaisussa edetään muotoilemalla erilainen Bell-tyypin epäyhtälö, joka sisältää todennäköisyyksiä. Korrelaatiot voidaan johtaa todennäköisyyksistä, mutta toinen suunta ei aina ole mahdollinen, sillä korrelaatiot eivät välttämättä sisällä kaikkia todennäköisyyksiä [61, 63]. Esimerkiksi CGLMP-epäyhtälö (3.31) luvussa 3.4.3 sisältää yhteismittausten todennäköisyyksiä, kuten myös Hardyn epäyhtälö (4.41) luvussa 4.3.1.

### 3.4.2 Epäyhtälöt muotoa $(2, m, 2)$

Tapausta  $(2, m, 2)$  tarkastellaan esimerkiksi ketjuttamalla CHSH-epäyhtälö (3.24) [47, 110, 196]. Valitsemalla epäyhtälölle (3.24) kaksi uutta mittaussuuntaa  $\mathbf{r}'_A$  ja  $\mathbf{r}''_B$  ja tekemällä vaihdot  $\mathbf{r}'_B \rightarrow \mathbf{r}''_B$ ,  $\mathbf{r}_B \rightarrow \mathbf{r}'_B$  ja  $\mathbf{r}'_A \rightarrow \mathbf{r}''_A$  saadaan epäyhtälö [47, s. 33–34]

$$|\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}''_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}''_A, \mathbf{r}''_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}''_A, \mathbf{r}'_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_B)| \leq 2. \quad (3.29)$$

Laskemalla epäyhtälöt (3.24) ja (3.29) yhteen muodostetaan ketjutettu epäyhtälö mittaussuunnille  $\mathbf{r}_A$ ,  $\mathbf{r}'_A$ ,  $\mathbf{r}''_A$ ,  $\mathbf{r}_B$ ,  $\mathbf{r}'_B$  ja  $\mathbf{r}''_B$ :

$$|\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}''_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}''_A, \mathbf{r}''_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}''_A, \mathbf{r}'_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_B)| \leq 4. \quad (3.30)$$

Vastaavalla tavalla muodostetaan yleinen ketjutettu korrelaatiomuotoinen epäyhtälö, kun mittaussuuntia on  $n$  kappaletta,  $n/2$  per havaitsija (yhtälö 4.5 artikkelissa [47]). Kun mittauskulmat valitaan tasavälein ja oletetaan täydelliset ilmaisimet, kasvattaa ketjutusten määrä epäyhtälön ylärajan ylittymisen määrää, kun mittauksia tehdään maksimaalisesti lomittuneelle tilalle [47, s. 35–40]. Esimerkiksi Aspectin [13] kokeessa (luku 3.5.1) saavutettua kvanttitehokkuutta  $\eta \approx 0,955$  käyttäen havaitaan, että ketjutukset tapauksissa  $n = 6$  ja  $n = 8$  kasvattavat rajan ylittymisen määrää, mutta suuremmalle  $n$  ylittymisen määrä pienenee [47, s. 42].

### 3.4.3 Epäyhtälöt muotoa $(2, 2, d)$

Perinteisiä Bell-tyypin epäyhtälöitä kutsutaan lomittumisen korrelaatiomanifestaatioksi [148, s. 879] ja Bellin alkuperäinen epäyhtälö (3.12) yleistyy suoraviivaisesti spin- $S$ -hiukkasille [186]. Epäyhtälöitä muotoillaan myös yhteismittausten todennäköisyyksien avulla, sillä korrelaatiot muodostetaan todennäköisyyksistä. Kahdelle kuditille *CGLMP-epäyhtälö* [79, 185] on optimaalinen, CHSH-epäyhtälön

”luonnollinen” yleistys [62, s. 060306-1]:

$$\begin{aligned}
2 \geq & \sum_{k=0}^{\lfloor d/2-1 \rfloor} \left(1 - \frac{2k}{d-1}\right) \left\{ \left[ \text{P}(A_1 = B_1 + k) + \text{P}(B_1 = A_2 + k + 1) + \right. \right. \\
& + \text{P}(A_2 = B_2 + k) + \text{P}(B_2 = A_1 + k) \left. \right] - \\
& - \left[ \text{P}(A_1 = B_1 - k - 1) + \text{P}(B_1 = A_2 - k) + \right. \\
& \left. \left. + \text{P}(A_2 = B_2 - k - 1) + \text{P}(B_2 = A_1 - k - 1) \right] \right\}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Yhtälössä (3.31)  $A_i, B_i$ ,  $i = 1, 2$  ovat osajärjestelmille A ja B tehtävät mahdolliset mittaukset. Mittaustulosten lukumäärä yhdelle observaabelille on  $d$  ja  $\lfloor d/2 - 1 \rfloor$  tarkoittaa pyöristämistä alaspäin seuraavaan kokonaislukuun. Todennäköisyyksille  $\text{P}(\ast)$  on voimassa

$$\text{P}(A_a = B_b + k) = \sum_{j=0}^{d-1} \text{P}(A_a = j, B_b = j + k \pmod{d}). \tag{3.32}$$

Tapaus  $d = 2$  epäyhtälö redusoituu CHSH-epäyhtälöksi. CGLMP-epäyhtälöä käyttäen voidaan osoittaa Gisinin teoreema [62, 120] kahdelle kuditille (luku 3.6). Tapausta  $(2, 2, d)$  on mahdollista käsitellä myös informaatioteoreettisten Bell-tyyppien epäyhtälöiden avulla [47, 48, 223], jotka sopivat myös ketjuttamiseen (luku 3.4.2), mutta eivät ole optimaalisia.

#### 3.4.4 Bell-tyyppien epäyhtälöt ja lomittumisen havaitsemisesta

Bell-tyyppien epälokaalisuuden ja lomittumisen välinen relaatio ei ole yksiselitteinen sekoittuneille tiloille [154, s. 22]. Kun tehdään projektiivisiä mittauksia, on olemassa sekoittuneita lomittuneita kvanttitiloja, jotka eivät riko CHSH-epäyhtälöä [70, 245]. Lomittuminen on välttämätön, mutta ei riittävä ehto epälokaalisuudelle. Puh-taille tiloille lomittuminen ja Bell-tyyppien epälokaalisuus kuitenkin ovat ekvivalentteja (luku 4.3). Lomittumisen havaitsemisen käsittely suhteessa Bell-tyyppien epäyhtälöihin on mielekästä, sillä epäyhtälöitä pystytään testaamaan kokeellisesti. CHSH-epäyhtälö kirjoitetaan operaattorimuodossa [49]

$$\hat{B} = \mathbf{r}_A \cdot \vec{\sigma} \otimes (\mathbf{r}_B + \mathbf{r}'_B) \cdot \vec{\sigma} + \mathbf{r}'_A \cdot \vec{\sigma} \otimes (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}'_B) \cdot \vec{\sigma}. \tag{3.33}$$

Operaattorista  $\hat{B}$  käytetään nimitystä *Bellin operaattori* [49, s. 3260], sillä operaattorin ominaistiloja ovat Bellin tilat (2.50). Operaattorimuoto on olemassa jokaiselle standardimuotoiselle Bell-tyyppien epäyhtälölle [179, 180]. Operaattorin  $\hat{B}$  avulla CHSH-epäyhtälö esitetään kompaktissa muodossa

$$\langle \hat{B} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{B}) \leq 2. \tag{3.34}$$

Bell-tyyppien epäyhtälöistä muodostettavat operaattorit liittyvät lomittumisindikaattoreihin (luku 2.5.5). Kahden hiukkasen tapauksessa (ja muutamissa erikoistapauksissa) voidaan jokainen standardimuotoinen Bell-tyyppinen epäyhtälö



muotoilla lomittumisindikaattorina [235, s. 321–323]. Esimerkiksi Bellin operaattoria  $\hat{B}$  vastaava lomittumisindikaattori on  $W = 2I - \hat{B}$ , joka ei kuitenkaan ole optimaalinen [150, s. 3]. Bellin tilaa  $|\psi\rangle = 1/2(|00\rangle \pm |11\rangle)$  vastaava optimaalinen lomittumisindikaattori on [150, s. 4]

$$W = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 \sigma_i, \quad (3.35)$$

jossa  $\sigma_0 = I$  ja  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ovat Paulin matriisit. Tilanteessa  $(n, 2, 2)$  esimerkki Bell-tyypin lomittumisindikaattorista on  $n:n$  kubitin Bell-Mermin-operaattori [188, 236]:

$$\hat{B}_M = \frac{1}{2i} \left[ \prod_{j=1}^n (\sigma_1^j + i\sigma_2^j) - \prod_{j=1}^n (\sigma_1^j - \sigma_2^j) \right]. \quad (3.36)$$

Operaattorin  $\hat{B}_M$  ominaisvektoreina ovat yleistetyt GHZ-tilat (2.95) valinnalla  $\alpha = 1/\sqrt{2} = \beta$  [236, s. 324].

Jokaiselle lomittuneelle tilalle ei ole olemassa korrelaatiomuotoista Bellin epäyhtälöä, jonka asettama raja ylittyisi [152, 245], mutta lomittumisindikaattori annetulle lomittuneelle tilalle löydetään aina [144]. Toisin sanoen Bell-tyypin epäyhtälöt operaattorimuodossa eivät havaitse kaikkia lomittuneita tiloja ja niitä voidaan pitää epäoptimaalisina lomittumista havainnoivina tekijöinä [150, s. 1–2], [148, s. 886]. Ei tiedetä, esiintyykö yhtälöiden rikkoutumista useamman hiukkasen sekoittuneille lomittuneille tiloille [236, s. 315]. Epäyhtälöillä on lomittumisen voimakkuuden määrittämisessä merkittävänä puutteena se, että klassisen ylärajan ylittymisen määrä on rajoitettu [154, s. 44].

Käyttämällä sopivaa Bell-Mermin-operaattorin (3.36) spektraaliesitystä [217] voidaan useiden ( $n \geq 3$ ) puhtaiden tilojen lomittumista tarkastella operaattorin  $\hat{B}_M$  varianssin kautta [67]. Tuloksena on neliömuotoinen epäyhtälö, joka johtaa maksimi-arvo-ongelman ratkaisuun. Näin voidaan testata esimerkiksi yleistetyt GHZ-tilan (2.95) lomittumista [67, s. 034306-2].

### 3.5 Bellin epäyhtälöiden kokeellisesta tutkimuksesta

Bell-kokeet testaavat lokaalia realismia, eivät kvanttimekaniikkaa [124]. Bell-tyypin epäyhtälöiden rikkoutuminen varmennettiin kokeellisella tutkimuksella ensimmäisen kerran vuonna 2015 [124, 138, 224]. Tutkimustulosten perusteella ei ole mielekäs-tä ylläpitää maailmankuvaa, jossa mitattujen korrelaatioiden selityksenä olisivat hiukkasten yhteisessä vuorovaikutuksessa alkunsa saaneet ominaisuudet, joita hiukkas-et ”kantaisivat” mukanaan. Esimerkiksi lomittuneet fotonit satojen metrien päässä toisistaan tulee käsittää yhdenä, erottamattomana objektina. On mahdotonta määrittää lokaali fysikaalinen teoria kummallekin fotonille erikseen [12, s. 190].

Bellin teoreeman [25] julkaisuhetkellä kvanttimekaniikka oli monelta osin kokeellisesti paikkansa pitäväksi osoitettu teoria, mutta Bellin tuloksen testaamiseen

suunniteltuja kokeita ei ollut tehty. Ensimmäisenä ei-klassista käytöstä ilmentävänä kokeena pidettiin Wu:n ja Shakhnovin [40, 252] koetta [154, s. 43], joka tutki positronien annihilaatiossa muodostuneiden fotoniparien Compton-sirontaa ja polarisaatioiden korrelaatiota. Koe näytti fotoniparien lomittumisen, mutta ilmaisimien alhaisen tehokkuuden vuoksi merkittäviä johtopäätöksiä ei voitu tehdä [40].

Ensimmäisen Bellin teoreemaan pohjautuvan kokeellisesti testattavaksi sopivan epäyhtälön ja hahmotelman fotoneja käyttävälle kokeelle esittivät CHSH [76] vuonna 1969. 1970-luvulta alkaen tehtiin useita kokeita [72, 73, 104], joiden tulokset olivat yhteneviä kvanttiteorian ennusteiden kanssa yksittäisiä poikkeuksia kuten [142] lukuun ottamatta. Kokeet sisälsivät myös selviä aukkoja (luku 3.5.5). 1980-luvun jälkeen kokeita on toteutettu mm. polarisoiduilla fotoneilla [13, 15, 16, 124, 173, 211, 238], spin-1/2-hiukkasilla [138], loukutuilla ioneilla [212], suprajohteilla [9], kvanttijohdon vaiheen ja liikemäärän avulla [143, 181, 208] sekä b-mesoneilla [126].

Rajoitutaan tarkastelemaan fotoniparien suurelle ensemblelle tehtyjä Bell-kokeita. Useampien hiukkasten välisen lomittumisen kokeellinen tutkiminen (esimerkiksi GHZ-kokeet [193]) on hankala ongelma käytännössä, sillä hiukkasten yhteishavaitsemisen todennäköisyys on verrannollinen yksittäisten ilmaisimien tehokkuuksien tuloon [228, s. 44]. Alkuperäiselle EPR-argumentille muotoilluista kokeista raportoi [210].

### 3.5.1 Fotonikokeiden perusteita ja historiaa

Fotonikokeet ovat Bell-kokeista todennäköisesti yleisimpiä [228, s. 26]. Näkyvän taajuuden alueen fotoneja mitataan tarkasti tavallisilla polarisaatioanalysaattoreilla. Tyypillisessä kokeessa (kuva 3.10) laservalo ja sitä seuraava kvanttioptinen laitteisto muodostavat parin korreloitua fotoneja, joiden yhteinen pyörimismäärä on nolla ja jotka ovat lomittuneessa ympyrä- tai lineaarisen polarisaation tilassa. Fotonit liikkuvat riittävän kauas toisistaan optisessa järjestelmässä ja saapuvat mittauspisteille, jotka on haluttuun mittausasemaan. Lineaarisen polarisaation tapauksessa fotonit havaitaan analysaattoreiden pystysuuntaisen tai vaakasuuntaisen polarisaation kanavissa.

Kokeissa mitataan *koinsidenssejä todellisille koinsidenssipareille*<sup>29</sup> eli kahteen ilmaisimeen lähes samanaikaisesti tarpeeksi pienen aikaikkunan sisään saapuneita fotoneja. Koinsidenssimittausten statistiikkaa verrataan kvanttiteorian ennusteisiin [19, s. 136]. Yksi keino löytää koinsidenssit on tarkastella dataa mittausten suorittamisen jälkeen, asettamalla aikaleima jokaiselle fotonille havaitsemishetkellä ja vertaamalla keskenään aikaleimoja kahden tai useamman ilmaisimen välillä [244].

---

29. Todellinen koinsidenssi tarkoittaa samassa fyysisessä prosessissa (hajoaminen, sironta) muodostuneiden ja emittoituneiden korreloitujen fotonien aiheuttamaa koinsidenssia. Mittalaitteiston epätäydellisyydestä johtuen osa havaituista koinsidensseista ei ole todellisia korreloitua fotonipareja, vaan vahinkoja, jotka voidaan vähentää tai olla vähentämättä mittaustuloksista riippuen tulosten analysoinnissa käytettävistä menetelmistä ja fotonilähteen ominaisuuksista. Vahinkojen jakauma on ajan suhteen erilainen kuin todellisten koinsidenssien jakauma, joka esimerkiksi kaskaadiemissiokokeissa noudattaa eksponentiaalista hajoamislakia.

Fotonikokeet jaetaan kahteen pääryhmään kokeissa käytetyn hiukkaslähteen mukaisesti: *kaskaadiemissiokokeet* ennen 1980-luvun loppua ja *spontaanin parametriseen alaspäin konversion* (SPDC) kokeet 1980-luvun lopulta eteenpäin. Yleisimmät kokeellisen tutkimuksen tulosten analysoinnissa käytetyt epäyhtälöt perustuvat joko CHSH-epäyhtälöön (luku 3.3.2) tai CH-epäyhtälöön (luku 3.3.3).

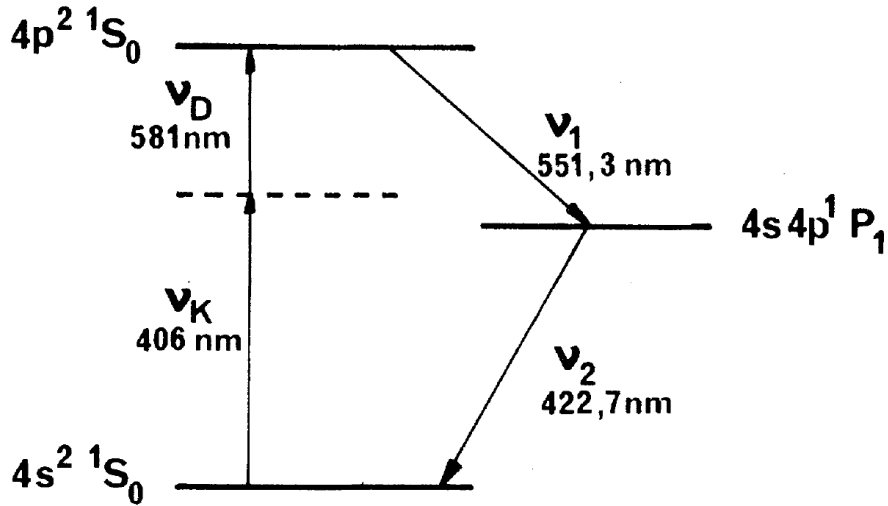
### 3.5.2 Ensimmäisistä kaskaadiemissiokokeista

Kokeissa kuten [13, 15, 16, 73, 104] käytettiin korreloitujen fotoniparien lähteenä kaskaadiemissiota kalsium- tai elohopea-atomeista (kuva 3.5). Atominen hajoaminen, jossa kaksi fotonia emittoituu, on kolmen kappaleen prosessi, jossa toisen fotonin suhteellinen suunta ensimmäisen fotonin suhteen voi olla mitä vain (täydellinen epävarmuus). Ainoastaan pieni osa fotoneista havaitaan ilmaisimilla ja tästä aiheutuu käytännön ongelmia [237, s. 10], erityisesti *havaitsemisaukko* (luku 3.5.5). Tilanne eroaa paljon Bellin artikkelin [25] tilanteesta, jossa kaikki emittoituneet hiukkaset ja niiden parit havaitaan sekä tiedetään, että hiukkaspari on emittoitunut [74, s. 85]. Kaskaadiemissiota käyttävissä kokeissa voi myös tapahtua niin, että toinen fotonit emittoituu (ja havaitaan) ilman ensimmäistä fotonit [228, s. 30]. Havainnoissa on myös taustasäteilyä, joka ei ole peräisin eksponentiaalisesta viritystilan purkautumisesta (todellisten koinsidenssien välinen aikaero kasvaa ajan kuluessa) ja on lähes lineaarista. Kaskaadiemissiota hyödyntävien fotonikokeiden periaatteet on kuvattu artikkelissa [73].

Mittaukset olivat 1970-luvulla teknisistä syistä työläitä toteuttaa [74, s. 81–82]. Kokeissa käytettiin yhden kanavan polarisaatioanalysointoreita, joissa vain toinen polarisaatiosuunta  $\mathbf{r}_A$  tai  $\mathbf{r}_B$  pääsee läpi ja ortogonaalinen suunta ei. Mitatut suureet olivat epätäydellisiä koinsidenssisummita  $+1$ -kanavissa eli muotoa  $R_{++}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$ , vrt. yhtälöt (3.37) ja (3.38). Jos fotonipari emittoituu ja toisella analysointorilla ei havaita fotonit, ei voida tietää, onko toinen fotonit hävinnyt heikkotehoiselta ilmaisimelta vai onko polarisaattori estänyt sen kulun. Jälkimmäinen tapaus tarkoittaisi onnistunutta polarisaatiomittauksta, edellinen ei. Koinsidenssisummita, kuten  $R_{+-}$  ja  $R_{-+}$ , ei voitu mitata suoraan vaan tarvittiin lisämittauksia, joissa yksi tai molemmat polarisaattorit oli poistettu [16, s. 91–92].

Ensimmäisen kokeellisen epäyhtälön johti CHSH [76]. CHSH oletti, että emittoituneiden fotonien yhteishavaitsemisen todennäköisyys on riippumaton analysointorien suunnista eli havaittu ensemble kelpaa edustamaan kaikkia emittoituneita tarkasteltavien aallonpituuksien fotoneja (jakauma on tasapuolinen), luku 3.5.5). Tästä syystä CHSH-muotoista epäyhtälöä käyttävässä kokeessa tarvitaan erittäin tehokkaita ilmaisimia. Lisäksi oletettiin, että kun fotonit kohtaa polarisaattorin, fotonit joko läpäisee sen tai ei läpäise eli fotonit on ”hiukkasmainen” (luku 3.3.3). Edelliset oletukset koskevat kaikkia kokeita, jotka käyttävät CHSH-muotoista epäyhtälöä.

CHSH:n ehdotelmassa epäyhtälön (3.21) odotusarvot eli korrelaatiokertoimet



**Kuva 3.5:** Kokeissa [13, 15, 16] käytetty kaskaadiemissio kalsiumatomista [15, s. 461]. Atomit "pumpattiin" selektiivisesti korkeammalle energiatasolle absorboimalla fotonit  $\nu_K$  ja  $\nu_D$ , viritystila purkautui ja polarisaatiokorreloituneet fotonit  $\nu_1$  ja  $\nu_2$  emittoituivat peräkkäin. Kalsiumatomilla on perustilassa uloimmalla  $4s$  -orbitaalilla kaksi elektoria, spinit vastakkaisiin suuntiin (singlet-tila).  $s$ -orbitaali on ympyräsymmetrinen eli kokonaispyörimismäärä  $J$  on nolla, tilaa merkitään  $4s^2 1S_0$  missä  $1S_0$  tarkoittaa singlet-tilaa, jolle  $L = 0$  ja alaindeksi 0 viittaa arvoon  $J = 0$ . Kun perustila viritetään, saadaan  $L = 1$  eli yksi elektori siirtyy  $4s$  -orbitaalilta  $4p$  -orbitaalille ja viritystila on  $4s 4p 1P_1$ , missä  $P$  viittaa arvoon  $L = 1$  ja vastaavasti alaindeksi 1 arvoon  $J = 1$ . Mikäli edelleen viritetään  $4s$ -orbitaalille jäänyt toinen elektroni  $4p$  -orbitaalille, konfiguraatioksi tulee  $4p^2$ , joka antaa kolme mahdollisuutta yhdistää pyörimismäärät. Yhdessä näistä saadaan  $L = 0$ ,  $S = 0$  jolloin  $J = 0$  ja tilaa merkitään  $4p^2 1S_0$ . Jos tila tuotetaan laboratoriossa, se käy läpi nopean kaskaadiemission tilan  $4s 4p 1P_1$  kautta perustilalle  $4s^2 1S_0$  ja emittoituu kaksi fotonia. Nettopyörimismäärä parille on 0, sillä  $J$  muuttuu  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$  ja fotonit ovat vastakkaisissa polarisaation tiloissa. Transitiossa  $4p^2 1S_0 \rightarrow 4s 4p 1P_1$  on ensimmäisen fotonin  $\nu_1$  aallonpituus 551,3 nm (vihreä) ja transitiossa  $4s 4p 1P_1 \rightarrow 4s^2 1S_0$  toisen fotonin  $\nu_2$  aallonpituus 422,7 nm (sininen) [19, s. 140–141]. Kaskaadiemission matematiikkaa on käsitelty artikkeleissa [75, s. 529] ( $J=010$ ) ja [107] ( $J=110$ ). Tyypillisiä kokeissa käytettyjä alkuaineita ovat mm. Ca ja Hg.

$\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$  ovat muotoa

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = \frac{N_{++}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) - N_{+-}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) - N_{-+}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) + N_{--}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)}{N_{++}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) + N_{+-}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) + N_{-+}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) + N_{--}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)}, \quad (3.37)$$

jossa  $N_{+-}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$  tarkoittaa niiden emittoituneiden fotoniparien lukumäärää, joilla on ensimmäiselle fotonille vertikaalinen polarisaatio (tai spin ylöspäin) ja toiselle fotonille horisontaalinen polarisaatio (tai spin alaspäin). CHSH johti kokeellisesti testattavan epäyhtälön [76, s. 882], [228, s. 22–23]:

$$\frac{|R(\alpha) - R(\alpha + \beta)| + R(\gamma) + R(\beta + \gamma) - R_1 - R_2}{R_0} \leq 0. \quad (3.38)$$

Kulmavalinnoille suhteessa yhtälöön (3.21) pätee  $\alpha = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ ,  $\beta = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B$ ,  $\gamma = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}'_B$ . Termit  $R(*)$  kuvaavat asetuksella  $*$  analyysoijalla havaittua osumien lukumäärää:  $R_0$  on osumien lukumäärä, kun molemmat polarisaattorit on poistettu (kaikki havaitut fotonit erillisessä mittauksessa),  $R_1$  kun polarisaattori 1 on poistettu ja  $R_2$  kun polarisaattori 2 on poistettu. Huomaa, että aina  $N(*) \geq R(*)$ . Suurin epäyhtälön (3.38) ”rikkoutuminen” havaitaan kulmavalinnoilla  $\alpha = \pi/8$ ,  $\beta = \pi/4$  ja  $\gamma = 7\pi/8$ , jotka vastaavat polarisaattorien suhteellisia orientaatiota  $\pi/8$  ja  $3\pi/8$ . Näitä kulmien arvoja käyttäen voidaan johtaa kaskaadiemissiokokeiden tulosten analyysissä käytetty *Freedmanin yhtälö* [104, s. 939], [228, s. 23]:

$$\frac{|R(\pi/4) - R(3\pi/4)|}{R_0} \leq \frac{1}{4}. \quad (3.39)$$

### 3.5.3 Aspectin ryhmän fotonikokeista

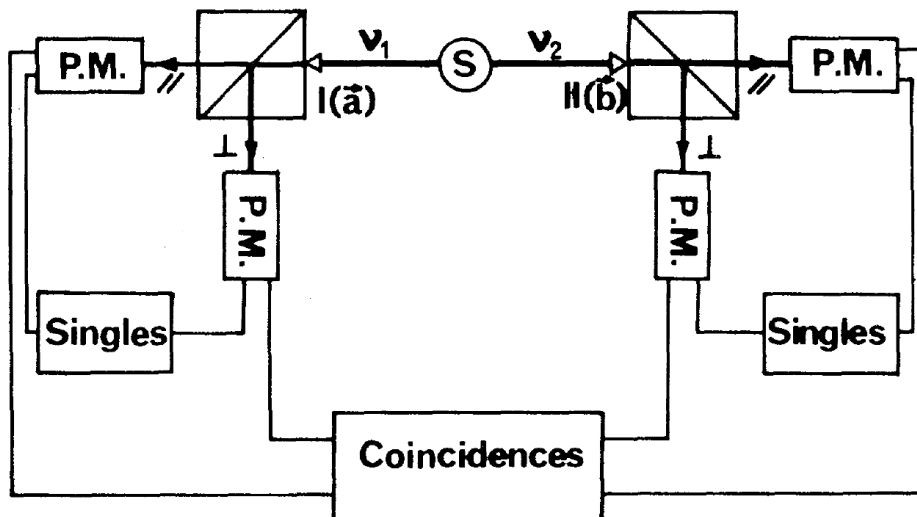
Aspect, Dalibard, Grangier ja Roger [13, 15, 16] tekivät 1980-luvun alkupuolella kokeita, jotka perustuivat CHSH:n [76] ehdotelmaan. Kokeiden sanottiin olevan ensimmäinen luotettava testi Bellin epäyhtälöiden rikkoutumiselle [148, s. 867]. Kokeissa mitattiin selektiivisesti viritettyjen<sup>30</sup> kalsiumisotooppien <sup>40</sup>Ca tuottamien kaskadiemissiofotonien lineaarisen polarisaation korrelaatioita (kuvat 3.6 ja 3.7). Aspectin kokeiden mittalaitteiston yksityiskohdista kuvaus on teoksissa [14, 19] ja [199].

Kokeessa [16] mitattiin ensimmäistä kertaa kaikki korrelaatiokertoimen (3.37) suureet<sup>31</sup> eli neljä erilaista koinsidenssisummaa yhdellä mittausajolla. Tähän käytettiin neliosaista koinsidenssien mittaustekniikkaa ja kahden kanavan polarisaatioanalyysoijareita. Mittaus oli muodoltaan lähempänä EPRB:tä (luku 3.1.3) kuin aiemmat Bell-kokeet. Mittaukset toistettiin neljälle eri kulmavalinnalle, jolloin testattiin suoraan epäyhtälöä (3.23). Mittaustuloksista havaittiin, että polarisaattorien orientaation muuttaminen ei muuttanut havaitun ensimblen kokoa [16, s. 92]. Koe sulki lokaalisuusaukon (ii) (luku 3.5.5), mutta jätti auki havaitsemisaukon

30. Aspect, Grangier ja Roger [15] käyttivät krypton-ionilaseria sekä säädettävää laseria (*dye laser*), joilla oli yhdensuuntaiset polarisaatiot ja säädettävä laser oli säädetty resonanssiin ensimmäisen kanssa. Kapea resonanssialue mahdollisti selektiivisen viritämisen [15, s. 461].

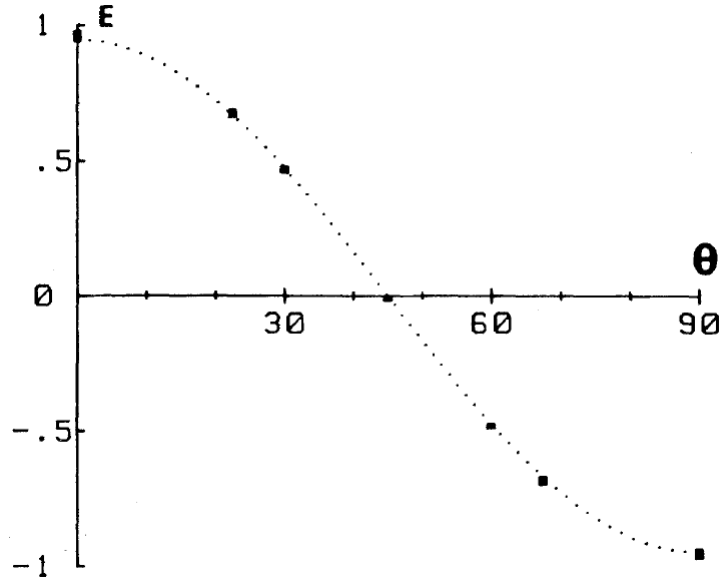
31. Korvataan emittoidut fotonit  $N(*)$  kokeellisilla suureilla  $R(*)$  eli havaituilla fotoneilla.

(i) [154, s. 43]. Koe rikkoi CHSH-epäyhtälön ylärajaa noin neljäkymmenen keskihajonnan verran, huomattavasti enemmän kuin aiemmat kokeet [228, s. 24], siitä huolimatta että ilmaisimina käytettyjen valomonistimien tehokkuudet olivat matalia. Saavutettu CHSH-epäyhtälön ylärajan ylitys oli noin 83 % maksimiarvosta  $\sqrt{2}$  (Tsi'nelsonin raja, luku 3.3.2). Kuvassa 3.7 on esitetty fotonipolarisaatioiden korrelaatio mittauskulman funktiona sekä vastaava kvanttiteorian ennuste.



**Kuva 3.6:** Kokeen [16] laitteisto. Fotonilähteenä käytettiin kalsiumisotoopin  $^{40}\text{Ca}$  kaskaadiemissiota (kuva 3.5). Polarisaattorit ovat kuutioita, jotka valmistettiin yhdistämällä kaksi prismaa ja niiden välissä oli ohut dielektrinen kalvo. Kukin polarisaattori asennettiin pyörítettävään mekanismiin, johon liittyi myös fotoilmaisin: tästä käytetään nimitystä *polarimetri*. Fotoilmaisimen edessä on aallonpituuden suodatin (422 nm tai 551 nm) [16, s. 92–93]. Koinsidenssi-ikkunan koko 20 ns on suuri verrattuna keskimääräiseen kaskaadin tilan elinaikaan 5 ns, joten kaikki todelliset koinsidenssit havaittiin. Vahingossa tapahtuneet koinsidenssit pääteltiin yksittäisten havaittujen fotonien summista (singles rates) [16, s. 93]. Kyseessä oli ensimmäinen koe, jossa mitattiin kaikki korrelaatiokertoimessa (3.37) esiintyvät suuret yhdellä kerralla. Mittaukset toistettiin neljälle eri kulmavaihtelulle.

Bell [28, s. C2-57] mainitsi, että aika tulisi sisällyttää lokaalia realismia testaaviin kokeisiin. Aspectin tutkimusryhmä konstruoi tätä varten ensimmäisen pyöriviä analysointilaitteita käyttävän kokeen [13]. Aiemmissa fotonikokeissa käytettiin staattisia koejärjestelyjä, joissa polarisaattorit pysyvät paikallaan mittaussarjojen aikana kyseenalaistaen lokaalisuusoletus ( $\delta$ ). On mahdollista muotoilla piilomuuttujamalleja, joissa mittalaitteet välittävät toisilleen valoa hitaampia signaaleja ennen mittausten aloittamista ja hiukkaselle A mitattu tulos (tai valittu mittaorientaatio) voisi vaikuttaa hiukkaselle B saataviin tuloksiin [13, s. 1805]. Kokeessa [13] käytettiin vesihautteessa eteneviä periodisia ääniaaltoja valon diffraktioon ja taajuuden siirtoon (Dopplerin ilmiö). Akusto-optinen kytkin [128] vaihtoi kahden polarisaattorin välillä [13, s. 1805], kuva 3.8. Valo sirosi liikkuvilta tasoilta vesihautteessa

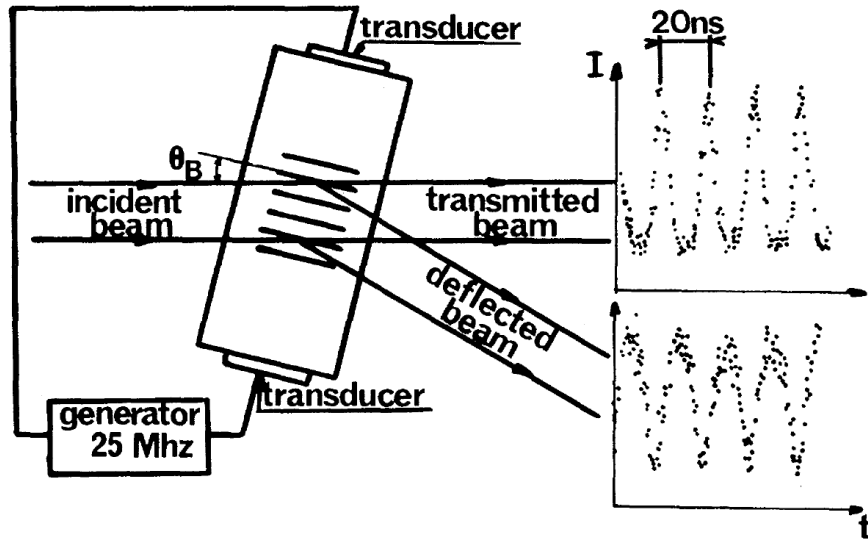


**Kuva 3.7:** Aspect et al. kokeen [16, s. 93] tuloksia. Tummat suuret pisteet näyttävät mitatut fotonipolarisaatioiden korrelaatiot mittauskulmille  $\alpha_{AB} = \pi/8, \pi/6, \pi/3$  ja  $3\pi/8$ . Katkoviivalla on merkitty kvanttimekaniikan ennuste mittaustuloksille.

etenevien ääniaaltojen seurauksena<sup>32</sup> Kun kytkin oli pois päältä, fotonit etenivät suoraan (suunnat  $\mathbf{r}_A$  ja  $\mathbf{r}_B$ ) ja kun kytkin oli päällä, ensimmäisen kertaluvun diffraktion suuntaan (suunnat  $\mathbf{r}'_A$  ja  $\mathbf{r}'_B$ ). Korkeamman kertaluokan diffraktioihin menevä osuus valosta oli merkityksettömän pieni [13, s. 1806]. Analysaattorien välillä vaihto tapahtui noin 10 ns välein ja keskimääräinen kaskaditilan elinaika oli 5 ns. Signaalin kulkemiseen vaadittava aika mittauspisteiden välillä oli 40 ns eli havainto paikassa A ja mittaasuorientaation vaihtuminen paikassa B tapahtuivat nopeammin kuin valo ehtisi kulkea paikasta A paikkaan B.

Kokeen [13] havaittiin ristiriita LHVT:n ja kvanttiteorian välillä (noin 5 keskihajontaa). Ongelmana oli yhden kanavan polarisaattorien käytön lisäksi se, että polarisaattioanalysaattoreiden vaihto ei ollut satunnaista vaan kvasiperiodista: laitteen asetukset eli ”tila” oli ennustettavissa jo muutaman vaihtojakson jälkeen [209, s. 15]. Lisäksi analysaattorien välimatka oli liian lyhyt, jotta ne olisi voitu alustaa satunnaisesti [12, s. 190]. On myös huomautettu, että pyörivillä analysaattoreilla toteutetut kokeet vain siirtävät lokaalisuusaukon (ii) mittaustilteiston osalta toiselle ratkaisematta itse ongelmaa [74, s. 95].

32. Kytkimenä toimiva seisova ultraääniaalto luotiin interferenssiaaltona laittamalla molempiin vesihautteen päihin piezoelektrinen muuntaja, joka tuotti päinvastaisiin suuntiin eteneviä ääniaaltoja 25 MHz taajuudella. Kytkimen käyttö oli ekvivalenttia sen kanssa, että polarisaattoreiden orientaatiota olisi muutettu hyvin nopeasti.



**Kuva 3.8:** Akusto-optinen kytkin kokeessa [13]. Molemmissa päissä vesihaudetta oli piezoelektrinen muuntaja, joka loi ääniaaltoja taajuudella 25 MHz. Saapuneeseen fotonivirtaan kohdistuva seisovan ultraääniaallon taajuus oli noin 50 MHz ja se käänsi fotoneja Braggin kulman  $\theta_B = 3 \cdot 10^{-3}$  rad verran.

### 3.5.4 SPDC-fotonikokeista

Kaskaadiemissiolähdettä käyttäen ei voida osoittaa lokaalin realismin ja kvanttimekaniikan yhteensopimattomuutta. Suurempi ilmaisimien tehokkuus vaatisi suuremman avaruuskulman käyttöä ja kaskaadiemission aikaansaamat polarisaatio-korrelaatiot heikkenevät suuremmalla avaruuskulmalla (yhtälö 4 artikkelissa [76]). 1980-luvun lopulla siirryttiin käyttämään *spontaanista parametrista alaspäin konversiota* [56, 115, 167, 225] (SPDC, myös *parametrinen sironna*) [172, s. 108–109] korreloitujen fotoniparien luomiseksi.

SPDC:ssä monokromaattista laservaloa tuottavan lähteen eli ”pumpun”<sup>33</sup> ultraviolettisäteilyn taajuusalueen fotonit (taajuus  $\omega_0$ ) osuvat kiteeseen ja osa fotoneista spontaanisti jakautuu pareiksi infrapunasäteilyn taajuusalueen fotoneja, joilla on alemmat taajuudet kuin laser-fotoneilla ( $\omega_1$  ja  $\omega_2$ ). Ne emittoituvat kiteen pinnalta pienen aikaikkunan (noin 100 femtosekuntia [172, s. 10,25]) ja pienen kulmakorrelaation (jopa pienempi kuin 1 mrad [172, s. 109]) sisään. Emittoituneiden fotonien (lineaariset) polarisaatiot ovat voimakkaasti korreloituneet, kuten myös fotonien liikemäärät ja energiat.

SPDC:tä käyttävissä kokeissa fotonit etenevät hyvin määriteltyihin suuntiin, joten kukin ilmaisin pystyy havaitsemaan koko fotonisuihkun ilman, että kvanttimekaanisessa korrelaatiofunktiossa tapahtuu merkittävää häviötä [47, s. 32–33]. SPDC on toisaalta erittäin tehoton prosessi, sillä noin  $10^{10}$  pumpun fonia tarvitaan yhden sopivan korreloidun fotoniparin luomiseen [237]. Periodisella rakenteella

33. Voidaan käyttää joko jatkuvaa tai pulssimaista laseria. Jälkimmäinen on tarpeen, jos halutaan määrittää täsmälleen fotoniparien muodostusajankohta [237, s. 11].



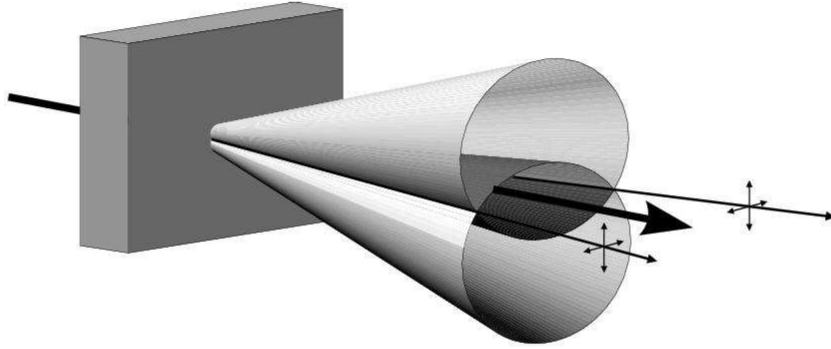
(*periodically poled*) valmistettu kide voi olla useita kertaluokkia tehokkaampi.

SPDC:tä esiintyy mm. ei-keskeissymmetrisissä kiteissä, joissa on kahtaistaittoa yhden akselin suhteen (*birefringence*) eli erilaiset aallonpituudet taittavat eri määrän kulkiessaan kristallin läpi [209, s. 115–117], [239, s. 166]. Esimerkiksi KDP-kristalli eli kaliumdivetyfosfaatti  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  [172, luku 2] tai litiumjodaatti  $\text{LiIO}_3$  on tavallinen tyyppin I konversiossa<sup>34</sup>, beeta-bariumboraatti BBO kuten  $\text{BaB}_2\text{O}_4$  tai kalium-titaani-fosfaatti ppKTP kuten  $\text{KTiOPO}_4$  tyyppin II konversiossa (kuva 3.9) [172, Liite D1]. SPDC:ssä energia ja liikemäärä säilyvät seuraavasti:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad (3.40a)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_0 = \hat{\mathbf{k}}_1 + \hat{\mathbf{k}}_2. \quad (3.40b)$$

Yhtälössä (3.40a) ja (3.40b) indeksi 0 viittaa pumppuun, indeksi 1 ensimmäiseen fotoniiin ja indeksi 2 toiseen fotoniiin. Ehdosta (3.40b) käytetään myös nimitystä vaihetekijöiden yhteensovittaminen [172, s. 18,256]. Tarkemmin PDC-kokeiden kuvailusta yhtälömuodossa raportoi [24].



**Kuva 3.9:** Skemaattinen kuva ei-kollineaarisesta tyyppin II SPDC-prosessista [237, s. 13]. Vertikaalisen polarisaation fotonit kuuluvat ylempään kartioon ja horisontaalisen alempaan. Korreloidun fotonit ovat sädekartioiden vastakkaisilla puolilla.

CH-epäyhtälö (luku 3.3.3) ja sen kanssa ekvivalentit epäyhtälöt, kuten esimerkiksi Eberhard-epäyhtälöt [91, 124], eivät käytä tasapuolisen jakauman oletusta. Ne ovat hyödyllisiä aukottoman Bell-kokeen suunnittelussa ja analyysissä (luku 3.5.5). Eberhardin epäyhtälössä ovat mukana myös tapahtumat, joita ilmaisimet eivät havaitse. Epäyhtälö on muotoa

$$\begin{aligned} &R_{oc}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) + R_{ou}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_B) + R_{eo}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}_B) + \\ &+ R_{uo}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}_B) + R_{oo}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B) - R_{oo}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Epäyhtälössä (3.41) todennäköisyyksien tai odotusarvojen tilalla ovat fotonien havaitut määrät  $R_{xy}(*).$  Alaindeksit  $x$  ja  $y$  vastaavat erilaisia havaintoja:  $o =$

34. Tyyppin I konversiossa emittoituneiden fotonien polarisaatiot ovat yhdensuuntaiset, tyyppin II konversiossa kohtisuorat toisiinsa nähden. Lineaarisen polarisaation tiloista voidaan muokata  $\lambda/4$ -levyllä korreloitua ympyräpolarisoituneita tiloja.

tavallinen polarisaatiosäde (ordinary ray),  $e$  = epätavallinen polarisaatiosäde (extraordinary ray) ja  $u$  = kadonnut foton (undetected). Eberhard oletti, että havaitsimien tehokkuus on vakio ja tiedetään. Näin voidaan optimoida kvanttityla, jolle havaitaan maksimaalinen lokaalirealistisen teorian ennustaman ylärajan rikkoutuminen. Epäideaalisella havaitsemistodennäköisyydellä maksimaalinen ylärajan rikkoutuminen tapahtuu ei-maksimaalisesti lomittuneelle tilalle, joka on muotoa

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} (|HV\rangle + r|VH\rangle) \quad (3.42)$$

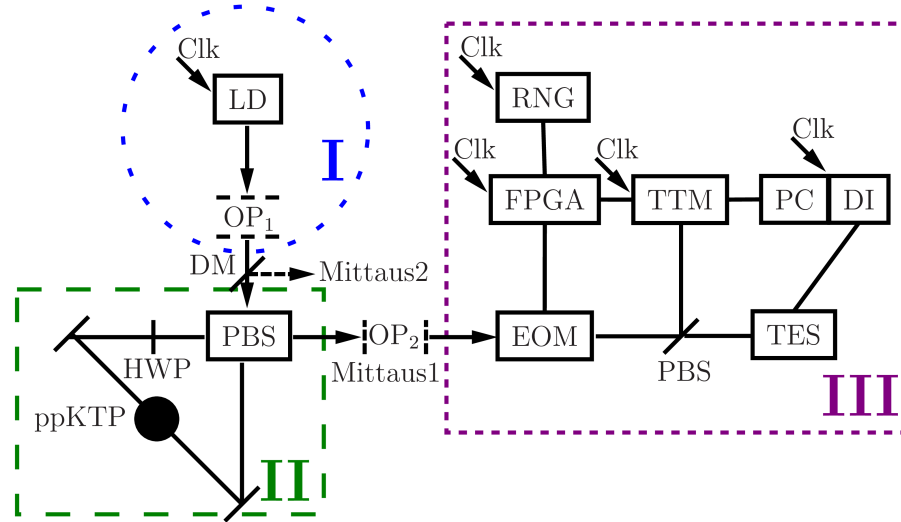
Kirjaimet  $H$  ja  $V$  viittaavat fotonien horisontaalisen ja vertikaalisen lineaarisen polarisaation tiloihin. CHSH-epäyhtälöä käytettäessä ilmaisimen tehokkuuden tulee olla suurempi kuin 82,8 % maksimaalisesti lomittuneille tiloille, mutta Eberhard-epäyhtälöä käytettäessä vähintään 66,7 % sopivasti valitulle Eberhard-tilalle [91, s. 47].

Giustina et al. [124] käyttivät Eberhard-muotoista epäyhtälöä aukottomassa Bell-kokeessa vuonna 2015. Koe sulki samanaikaisesti viisi mahdollista kokeellisen tutkimuksen aukkokohtaa (luku 3.5.5). Keskeistä kokeen suunnittelussa oli varmistaa ennen mittausten tekemistä, että laitteisto pystyy sulkemaan aukot, sillä kaikkia aukkoja ei nähdä mittaustulosta jälkeensä tarkastelemalla. Yksinkertaistettu skemaattinen esitys kokeen [124] laitteistosta on kuvassa 3.10. Tärkeimmät mittalaitteiston osat ovat monokromaattinen laserlähde (LD), Sagnac-interferometri sisältäen kiteen kuten esimerkiksi ppKTP, kvantti-satunnaislukugeneraattori (RNG) ja siihen liittyvä elektroniikka (FPGA), elektro-optinen modulaattori (EOM), polarisoiva säteenjakaja (PBS), tarkka ja tehokas ilmaisim (TES / SQUID), tarvittavat optiset elementit (OP) ja kaapelit sekä datankeruu ja siihen liittyvä elektroniikka (PC,DI). Mittalaitteiston yksityiskohtiin ei perehdytä tutkielmassa tarkemmin.

### 3.5.5 Kokeellisen tutkimuksen puutteita

Bellin epäyhtälöitä verifioivissa kokeissa on historiallisesti ollut useita aukkoja (*loophole*). Seuraavassa niistä kolme tärkeintä. Kaikki Bell-kokeet nojaavat tiettyihin oletuksiin, joita ei voida kokeellisesti varmentaa, kuten superdeterminismi.

- (i) *Havaitsemiseen liittyvä aukko (Detection loophole)* [75]. Havaitun hiukkasen vastakappaletta eli lomittuneen parin toista hiukasta ei aina havaita, eli osa hiukkasista katoaa ilmaisimilta. Tämä on tyypillistä fotonikokeissa. Oikeat polarisaattorianalyysaattorit eivät ole täydellisiä eivätkä välitä ilmaisimille kaikkia fotoneita, jotka niihin saapuvat. Polarisaattorien läpäisyominaisuudet voivat riippua niiden orientaatiosta [19, s. 136]. Ilmaisimien alhainen tehokkuus vaatii päätelmien tekemiseksi lisäoletusten käyttöä [183, s. 385]. Havaittujen hiukkasten määrä voi olla erittäin pieni verrattuna kaikkien emittoituneiden hiukkasten lukumäärään [209, s. 14], eli oletetaan *tasapuolinen jakauma (fair sampling)*. Oletuksen mukaan emittoituneen hiukkasparin yhteishavaitsemisen todennäköisyys on riippumaton analyysaattorien suun-



**Kuva 3.10:** Yksinkertaistettu skemaattinen kuva modernista fotonikokeesta [124, s. 250401–3]. Alueessa I ovat pulssitettu 405 nm aallonpituudella toimiva laserlähde LD ja laserin käsittelyyn liittyvä optiikka OP<sub>1</sub>, johon kuuluvat mm.  $\lambda/2$ - ja  $\lambda/4$ -aaltolevyt, Braggin diffraktiohila, polarisaattori sekä peilejä ja linssejä. Vastaavasti OP<sub>2</sub> sisältää joukon optisia elementtejä, mm. taajuussuotimen ja aaltolevyn. Kaikki optisia elementtejä ei ole merkitty kuvaan näkyviin. Alueessa II on polarisoiva säteenjakaaja PBS ja Sagnac-tyyppinen interferometri, jonka keskellä ppKTP-kristallia ”pumpataan” molemmista suunnista laserilla. Näin luotiin polarisaatiokorreloituja fotoneja tyyppin II SPDC-prosessissa. Puoliaaltolevy HWP vaihtoi horisontaalisen ja vertikaalisen polarisaation välillä. Toinen fotoni johdatettiin puoliläpäisevän peilin DM kautta Mittaus2-laitteistolle, joka on identtinen kuvassa esitetyn laitteiston Mittaus1 kanssa. Mittauspisteiden välimatka oli noin 58 metriä. Kohdassa III fotoni saapui satunnaislukugeneraattorin RNG ja erikoiselektronikan FPGA ohjaamaan elektro-optiseen modulaattoriin EOM, joka sisälsi polarisaattorin ja valitsi sopivan mittaasuuntaa. EOM:n läpäisy fotoni ohjattiin polarisoivan säteenjakaajan PBS kautta aika-arvomoduuliin TTM, joka rekisteröi fotonin saapumisaajan sekä noin 100 mK:n lämpötilaan jäädytetylle ilmaisimelle TES. Ilmaisimen antaman signaalin vahvistukseen käytettiin mm. SQUID:a ja vahvistinelektronikkaa, jonka jälkeen havainnot digitoitiin (DI) ja tallennettiin paikallisen tietokoneen PC kiintolevylle. Huomaa, että sekä laserlähde LD, satunnaislukugeneraattori RNG, elektronikka FPGA, aika-arvomoduuli TTM ja digitointielektronikka DI on synkronoitu samalla kellolla Clk. Alkuperäinen, tarkempi kuva koejärjestelystä on artikkelissa [124] kuva 1.

nista ja havaittu ensemble kelpaa edustamaan koko emittoitunutta ensemblea [228, s. 22]. Oletuksen paikkansapitävyyttä ei ole osoitettu kokeellisesti [228, s. 27]. Havainnoitavien hiukkasten valinta mittausten tekemisen jälkeen (*postselection*) voi jopa näyttää, että tietyt lokaalit kvanttitilat olisivat epälokaaleja [119, s. 155]. On mahdollista muotoilla lokaali piilomuuttujamalli, joka tuottaa jäljelle jääneestä datasta kvanttimekaniikan antamat ennusteet mittaustuloksille [196]. Loukutettuja ioneja käyttänyt koe [212] sulki havaitsemiseen liittyvän aukon, mutta jätti avoimeksi lokaalisuuteen liittyvän aukon (ii), sillä kokeessa käytetyt ionit olivat vain muutaman mikrometrin päässä toisistaan. Ensimmäinen fotonikoe, jossa havaitsemisaukko suljettiin, oli [123].

- (ii) *Lokaalisuuteen liittyvä aukko (Locality loophole)* [13] tai viestintäaukko (*communication loophole*) [228, s. 36] tarkoittaa, että tulosiippumattomuus TI ja parametriiippumattomuus PI (luku 3.2.3) ovat voimassa. Tiukka relativistinen separaatio hiukkasten välillä Bell-kokeissa saavutettiin ensimmäisen kerran kokeessa [244], mutta mittauksissa käytettyjen ilmaisimien tehokkuudet olivat liian matalia sulkemaan havaitsemiseen liittyvän aukon samalla [52, s. 220403-1]. Kokeet [244] ja [238] osoittivat, ettei lomittuminen katoa pitkilläkään etäisyyksillä<sup>35</sup>.
- (iii) Valinnan vapauden liittyvä aukko (*Freedom of choice loophole*) [218]. Lomittuneiden hiukkasten lähde voi jollakin tavalla kommunikoida ilmaisimien kanssa ja täten vaikuttaa mittaustuloksiin. Täten oletetaan, että mittausorientaatiot voidaan valita vapaasti tai satunnaisesti ilman, että muu järjestelmän osa vaikuttaa valintaan. Valinnan vapauden aukon sulkemiseksi käytetään nopeita kvanttisatunnaislukugeneraattoreita [218].

Myös muita mahdollisia aukkoja on olemassa mm. aika-samanaikaisuusaukko ja muistiaukko [124]. Aukottoman Bell-kokeen suorittaminen oli kiinnostavaa useasta syystä. Koe kertoi, ettei luontoa kvanttitasolla voida ajatella lokaalirealistisen todellisuuskäsityksen kautta. Kvantti-informaatioteoriassa kvanttiviestinnän protokollien turvallisuus perustuu aukottomuuteen [52, s. 220403-1]. Hensen et al. [138] suorittivat ensimmäisen aukottoman Bell-kokeen vuonna 2015 käyttäen timanttien spinejä. Kokeen tilastollinen merkitsevyys oli  $p = 0,039$  ja parempi  $p$ -arvo on saavutettu myöhemmissä kokeissa, kuten esimerkiksi [211].

---

35. Schrödinger ja W. Furry [108, 220] päättelivät 1930-luvulla toisistaan riippumattomasti, että lomittuminen katoaisi, kun hiukkasten välimatka kasvaa riittävästi [74, s. 68]. Tämä ei pidä paikkaansa [238, 244], tosin hyvin pitkillä matkoilla (useita satoja kilometrejä) tarvitaan erityisiä *kvanttitoistimia* [97].

### 3.6 Gisinin teoreema kahdelle hiukkaselle

Gisinin teoreema on perustulos, joka näyttää mahdollisuuden soveltaa Bell-tyypin epäyhtälöitä lomittumisen teoreettiseen käsittelyyn. Alkuperäinen teoreema<sup>36</sup> [59,118] kahdelle kubitille osoitti, että sopivasti valituille projektiivisille mittauksille ainoat puhtaat tilat, jotka eivät riko CHSH-epäyhtälöä (3.23), ovat tulotiloja [148, s. 878]. Vastaava tulos pätee kahdelle sekoittuneelle kubitille [147]. Gisin ja Peres [120] yleistivät puhtaiden tilojen todistuksen kahdelle kuditille. He totesivat myös, että spinin S singlet-tilaan preparoidut kaksi hiukasta rikkovat CHSH-epäyhtälöä maksimaalisesti mielivaltaisen suurelle arvolle S eli suuret kvanttiluvut eivät takaa järjestelmän klassista käyttäytymistä. Teoreema ”formalisoi intuition” sille, että lomittuminen on vain kvanttimekaaninen ilmiö [194, s. 8].

Seuraavassa esitetään todistus kahdelle kuditille, joka seuraa artikkelia [120] sekä kirjaa [199, s. 175–176]. Vaihtoehtoinen todistus käyttäen CGLMP-epäyhtälöä (3.31) tehtiin artikkelissa [62]. Gisinin teoreeman yleistys tapaukseen, jossa kubitteja on  $n$  kappaletta yleistetyssä GHZ-tilassa (2.95), käydään läpi luvussa 4.3.

Olkoon  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}_A \otimes \mathbb{C}_B$ ,  $\dim(\mathbb{C}_A) = d = \dim(\mathbb{C}_B)$ . Jos  $|\psi\rangle$  on lomittunut, on olemassa observaabelit  $A$  ja  $B$  sekä niitä vastaavat operaattorit  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  siten, että operaattorin  $\hat{A} \otimes \hat{B}$  ominaisarvot ovat  $\pm 1$  ja yhteysmittauksen korrelaatiot rikkovat CHSH-epäyhtälöä

$$|\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) - \mathcal{E}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}_B)| + \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_B) + \mathcal{E}(\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B) \leq 2. \quad (3.43)$$

Yhtälössä (3.43) on  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = \langle \hat{A} \otimes \hat{B} \rangle$ . Kirjoitetaan  $|\psi\rangle$  Schmidtin hajotelman (2.101) avulla muodossa

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d o_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad (3.44)$$

missä  $\{|i_A\rangle\}$  ja  $\{|i_B\rangle\}$  muodostavat observaabeleita  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  vastaavat ortonormaalit kannat avaruuksiin  $\mathbb{C}_A$  ja  $\mathbb{C}_B$ . Valitaan koordinaatisto ja kantatilojen vaihetekijät siten, että  $o_i \in \mathbb{R}$  kaikilla  $i$  ja numeroidaan kertoimet  $o_i$  järjestykseen  $o_1 \geq o_2 \geq \dots \geq o_{d-1} \geq o_d \geq 0$ . Myöhemmin yhtälössä (3.46) määriteltävien observaabeleiden valinta riippuu näin tarkasteltavasta tilasta  $|\psi\rangle$ . Olkoot  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_3$  matriiseja, joiden diagonaalilla ovat vastaavat Paulin matriisit  $\sigma_1$  ja  $\sigma_3$  eli

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

36. Teoreeman kahdelle kubitille osoittivat Capasso, Fortunato ja Selleri [59] vuonna 1973, mutta tulos sai nimensä Nicolas Gisinin [118] muotoillessa hieman elegantimman todistuksen 1991.

Jos  $d$  on pariton, valitaan  $(\Gamma_3)_{dd} = 0$  ja määritellään matriisi  $\Pi$ , jonka ainoa nollasta eroava elementti on  $\Pi_{dd} = 1$ . Jos  $d$  on parillinen,  $\Pi = 0$  kaikkialla. Määritellään operaattorit  $\hat{A}(\alpha)$  ja  $\hat{B}(\beta)$  muodossa

$$\begin{aligned}\hat{A}(\alpha) &= \Gamma_1 \sin \alpha + \Gamma_3 \cos \alpha + \Pi \\ \hat{B}(\beta) &= \Gamma_1 \sin \beta + \Gamma_3 \cos \beta + \Pi\end{aligned}\tag{3.46}$$

Seuraavassa käytetään lyhennysmerkintöjä  $\sin \alpha = s_\alpha$  ja  $\cos \alpha = c_\alpha$ .

### 3.6.1 Ominaisarvot $\hat{A}(\alpha)$ ja $\hat{B}(\beta)$

Olkoon  $d$  parillinen. Blokkimatriiseissa  $\hat{A}(\alpha)$  ja  $\hat{B}(\beta)$  sama blokki toistuu kahden indeksin jaksoissa. Kehittämällä determinantit  $\det[\hat{A}(\alpha) - oI]$  ja  $\det[\hat{B}(\beta) - oI]$  havaitaan, että matriisien ominaisarvot ovat samat kuin yhden blokin ominaisarvot. Tarkastellaan ensin matriisiä  $\hat{A}(\alpha) = \text{Diag}(\sigma_1 s_\alpha + \sigma_3 c_\alpha)$  ja käytetään karakteristisen polynomin muuttujana kirjainta  $a$ :

$$\begin{aligned}(\sigma_1 s_\alpha + \sigma_3 c_\alpha)|\psi\rangle &= a|\psi\rangle \\ \det(\sigma_1 s_\alpha + \sigma_3 c_\alpha - aI) &= 0 \\ \begin{vmatrix} c_\alpha - a & s_\alpha \\ s_\alpha & -c_\alpha - a \end{vmatrix} &= -(c_\alpha^2 + s_\alpha^2) + a^2 = 0 \\ &\Rightarrow a = \pm 1.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Vastaavasti matriisille  $\hat{B}(\beta)$ . Kun  $d$  on pariton, sisältävät matriisit  $\hat{A}(\alpha)$  ja  $\hat{B}(\beta)$  diagonaaliblokkien lisäksi elementin  $[\ ]_{dd} = 1$ , joten myös tässä tapauksessa matriisien ominaisarvoiksi saadaan  $\pm 1$ .

### 3.6.2 Korrelaation $\langle \hat{A}(\alpha) \otimes \hat{B}(\beta) \rangle$ laskeminen

Kun yhtälössä (3.44) esiintyvät kantavektorit  $|i_A\rangle$  ja  $|i_B\rangle$  ilmaistaan muodossa  $|i_A\rangle = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i:s \text{ alkio}}, 0, \dots, 0)$ , operoi  $\Gamma_1$  tilaan  $|i_A\rangle$  seuraavasti:

$$\Gamma_1|i_A\rangle = \begin{cases} (i_A + 1)|i_A\rangle, & i_A \text{ pariton ja } i_A \in [1, d-1] \\ (i_A - 1)|i_A\rangle, & i_A \text{ parillinen ja } i_A \in [2, d]. \end{cases}\tag{3.48}$$

Vastaavasti tilalle  $|i_B\rangle$ . Matriisi  $\Gamma_3$  operoi muodossa

$$\Gamma_3|i_A\rangle = \begin{cases} i_A|i_A\rangle, & i_A \text{ pariton} \\ -i_A|i_A\rangle, & i_A \text{ parillinen.} \end{cases}\tag{3.49}$$

Korrelaatio  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$  on

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) &= \langle \psi | \hat{A}(\alpha) \otimes \hat{B}(\beta) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | (\Gamma_1 s_\alpha + \Gamma_3 c_\alpha + \Pi) \otimes (\Gamma_1 s_\beta + \Gamma_3 c_\beta + \Pi) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \Gamma_1 s_\alpha \otimes \Gamma_1 s_\beta | \psi \rangle + \langle \psi | \Gamma_1 s_\alpha \otimes \Gamma_3 c_\beta | \psi \rangle + \\
&+ \langle \psi | \Gamma_1 s_\alpha \otimes \Pi | \psi \rangle + \langle \psi | \Gamma_3 c_\alpha \otimes \Gamma_1 s_\beta | \psi \rangle + \\
&+ \langle \psi | \Gamma_3 c_\alpha \otimes \Gamma_3 c_\beta | \psi \rangle + \langle \psi | \Gamma_3 c_\alpha \otimes \Pi | \psi \rangle + \\
&+ \langle \psi | \Pi \otimes \Gamma_1 s_\beta | \psi \rangle + \langle \psi | \Pi \otimes \Gamma_3 c_\beta | \psi \rangle + \langle \psi | \Pi \otimes \Pi | \psi \rangle.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Ensimmäiselle termille  $\langle \psi | \Gamma_1 s_\alpha \otimes \Gamma_1 s_\beta | \psi \rangle$  saadaan yhtälön (3.48) ja kantatilojen ortonormaaliuden avulla lauseke

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \Gamma_1 s_\alpha \otimes \Gamma_1 s_\beta | \psi \rangle &= s_\alpha s_\beta \sum_{i,j=1}^d o_i o_j \langle i_A | \Gamma_1 | j_A \rangle \langle i_B | \Gamma_1 | j_B \rangle \\
&= 2s_\alpha s_\beta \sum_{\substack{i=1 \\ i \in 2\mathbb{Z}+1 \\ j=i+1 \forall i}}^d o_i o_j \\
&= 2s_\alpha s_\beta (o_1 o_2 + o_3 o_4 + \dots + o_{d-1} o_d),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

sillä odotusarvot  $\langle i_A | \Gamma_1 | j_A \rangle$  eroavat nolasta vain perättäisillä indekseillä  $i_A$  ja  $j_A$ ; vastaavasti odotusarvoille  $\langle i_B | \Gamma_1 | j_B \rangle$ . Termit  $\langle \psi | \Gamma_1 s_\alpha \otimes \Gamma_3 c_\beta | \psi \rangle$  ja  $\langle \psi | \Gamma_3 c_\alpha \otimes \Gamma_1 s_\beta | \psi \rangle$  ovat nollia yhtälöiden (3.48) ja (3.49) nojalla, sillä ehdot  $i_A = \pm j_A$  ja  $i_A = j_A \pm 1$  eivät toteudu samanaikaisesti. Matriisin  $\Pi$  määritelmän perusteella nollia ovat myös termit  $\langle \psi | \Gamma_1 s_\alpha \otimes \Pi | \psi \rangle$ ,  $\langle \psi | \Gamma_3 c_\alpha \otimes \Pi | \psi \rangle$ ,  $\langle \psi | \Pi \otimes \Gamma_1 s_\beta | \psi \rangle$  ja  $\langle \psi | \Pi \otimes \Gamma_3 c_\beta | \psi \rangle$ . Termille  $\langle \psi | \Pi \otimes \Pi | \psi \rangle$  saadaan

$$\langle \psi | \Pi \otimes \Pi | \psi \rangle = \begin{cases} o_d^2, & d \text{ pariton,} \\ 0, & d \text{ parillinen.} \end{cases} \tag{3.52}$$

Jos  $d$  on parillinen, termille  $\langle \psi | \Gamma_3 c_\alpha \otimes \Gamma_3 c_\beta | \psi \rangle$  saadaan yhtälön (3.49) ja Schmidtin kertoimien  $o_i$  summan  $\sum_{i=1}^d |o_i|^2 = 1$  avulla

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \Gamma_3 c_\alpha \otimes \Gamma_3 c_\beta | \psi \rangle &= c_\alpha c_\beta \sum_{i,j=1}^d o_i o_j \langle i_A | \Gamma_3 | j_A \rangle \langle i_B | \Gamma_3 | j_B \rangle \\
&\stackrel{(*)}{=} c_\alpha c_\beta \sum_{i=1}^d o_i^2 \langle i_A | \Gamma_3 | i_A \rangle \langle i_B | \Gamma_3 | i_B \rangle \\
&= c_\alpha c_\beta \sum_{i=1}^d o_i^2 \\
&= c_\alpha c_\beta.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Kohdassa (\*) käytettiin yhtälöä (3.49). Mikäli  $d$  on pariton, jää  $o_d$  pois summasta ja tulokseksi saadaan  $(1 - o_d^2)c_\alpha c_\beta$ .

Kokoamalla edelliset tulokset yhteen kirjoitetaan odotusarvo  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = (1 - \gamma) \cos \alpha \cos \beta + \kappa \sin \alpha \sin \beta + \gamma. \tag{3.54}$$

Kertoimelle  $\gamma \in \mathbb{R}$  pätee

$$\begin{cases} \gamma = o_d^2, & d \text{ pariton,} \\ \gamma = 0, & d \text{ parillinen.} \end{cases} \quad (3.55)$$

ja kerroin  $\kappa$  on

$$\kappa = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \in 2\mathbb{Z}+1 \\ j=i+1 \forall i}}^d o_i o_j = 2(o_1 o_2 + o_3 o_4 + \dots + o_{d-1} o_d). \quad (3.56)$$

Kerroin  $\kappa > 0$  lomittuneelle tilalle  $|\psi\rangle$ .

### 3.6.3 Ristiriita CHSH-epäyhtälön kanssa

Valitsemalla mittauskulmiksi  $\alpha = 0$ ,  $\alpha' = \pi/2$  saadaan yhtälöä (3.53) käyttäen yhtälölle (3.43) muoto

$$|(1 - \gamma) \cos \beta - \kappa \sin \beta| + (1 - \gamma) \cos \beta' + \kappa \sin \beta' + 2\gamma. \quad (3.57)$$

Sopiva trigonometrinen apukolmio antaa relaatiot

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (3.58)$$

ja valitsemalla  $-\beta = \beta' = \arctan(\kappa/1-\gamma)$  tulee lauseke (3.57) muotoon

$$\begin{aligned} (3.57) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{1-\gamma}\right)^2}} \left[ \left| (1-\gamma) + \frac{\kappa^2}{1-\gamma} \right| + (1-\gamma) + \frac{\kappa^2}{1-\gamma} \right] + 2\gamma \\ &= \frac{2}{\sqrt{(1-\gamma)^2 + \kappa^2}} \left[ (1-\gamma)^2 + \kappa^2 \right] + 2\gamma \\ &= 2\sqrt{(1-\gamma)^2 + \kappa^2} + 2\gamma. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Itseisarvot voidaan poistaa, sillä  $1 - \gamma > 0$  ja  $\kappa^2/1-\gamma > 0$  lomittuneelle tilalle  $|\psi\rangle$ . Ristiriita yhtälön (3.43) saadaan osoittamalla, että  $2\sqrt{(1-\gamma)^2 + \kappa^2} + 2\gamma > 2$ :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(1-\gamma)^2 + \kappa^2} + 2\gamma &> 2 \\ 2\sqrt{(1-\gamma)^2 + \kappa^2} &> 2(1-\gamma) \\ 4[(1-\gamma)^2 + \kappa^2] &> 4(1-\gamma)^2, \end{aligned} \quad (3.60)$$

joka selvästi pitää paikkansa. Q.E.D.

Teoreeman seurauksena havaitaan maksimaalinen lomittuminen kahden spin-S-hiukkasen singlet-tilalle [186], kun  $d$  on parillinen ja S on mielivaltaisen suuri. Tilojen lukumäärä on tällöin täsmälleen  $2S + 1$ . Maksimaalista lomittumista ei saavuteta, kun  $d$  on pariton [206].



Unitaaristen unimodulaaristen matriisien ominaisuuksista johtuen Schmidtin hajotelma (luku 2.5.7) ei suoraviivaisesti yleisty useampaan dimensioon [200], vaan pätee ainoastaan joissakin erikoistapauksissa [153, s. 95,127]. Luvussa 3.4 havaittiin, että on olemassa yleistettyjä GHZ-tiloja, jotka toteuttavat kaikki korrelaatioita sisältävät Bell-tyypin epäyhtälöt eli Gisinin teoreemaa ei voi yleistää useammalle hiukkaselle ja mittausorientaatiolle tätä kautta. Aiheeseen palataan luvussa 4.3.



## Luku 4

### Epälokaalisuus ilman epäyhtälöitä

Bellin teoreema toimi yhtenä lähtölaukauksena tutkimuksille, joissa ristiriita kvanttiteorian ja LHVT:n välillä pyritään osoittamaan. Tässä luvussa tarkastellaan tuloksia, joissa kvanttiteorian ja LHVT:n ristiriita nähdään ilman epäyhtälöä, jota kvanttiteoria ei noudata (*nonlocality without inequalities*, NLWI). Nimi on harhaanjohtava, sillä esimerkiksi Hardy-tyypin epälokaalisuusehdoista (luku 4.2) muotoillaan tässä tutkielmassa tarpeellinen epäyhtälörelaatio ja Hardy-tyypin epäyhtälö perusmuodossaan on erikoistapaus CH-epäyhtälöstä (luku 3.3.3) [113].

Ensimmäinen NLWI-argumentti oli Heywoodin ja Redheadin todistus [50, 140]. He osoittivat Kochen-Specker-tyylisen [230] ristiriidan LHVT:n ja kvanttimekaniikan välillä [136, s. 1665]. Suoraviivaisemman esityksen tekivät Greenberger, Horne ja Zeilinger eli GHZ<sup>1</sup> [130, 131]. He osoittivat ristiriidan EPR:n oletusten ( $\beta$ ), ( $\delta$ ) ja ( $\gamma$ ) kanssa loogisesti yhtäpitävissä oletuksissa ja ristiriita nähdään yhdessä mitausajossa statististen ennusteiden sijaan [188, s. 1838]. GHZ-artikkelia käsitellään luvussa 4.1.

GHZ:n työtä jatkoi Hardy [135, 136]. Hän osoitti ristiriidan lokaalin realismin ja kvanttimekaniikan välillä kahden kubitin puhtaille lomittuneille tiloille lukuun ottamatta maksimaalisesti lomittuneita tiloja. Tulosta pidetään epälokaalisuustestinä melkein kaikille puhtaille kubitteille [242] ja tärkeänä askeleena tutkimuksessa, kosa tulos muokkasi GHZ-teoreeman sopivaksi ei-maksimaalisesti lomittuneille kubiteille [148, s. 879]. Hardyn teoreemaa ja sen yleistyksiä käsitellään luvussa 4.2.

Hardyn ja Merminin [190] työhön pohjautuen Cereceda [61] muotoili Hardyn epäyhtälön  $n$ :lle kubitille ja osoitti, että yleistetty GHZ-tila (2.95) rikkoo epäyhtälöä. Työn päätuloksena käydään päättely tarkasti läpi luvussa 4.3. Teoreema on myöhemmin yleistetty äärelliselle määrälle kuditteja mielivaltaisessa puhtaassa lomittuneessa tilassa [255, 256].

---

1. GHZ:sta käytetään myös nimitystä GHSZ Abner Shimonyn nimikirjaimien S mukaan. GHZ ja KS redusoituvat molemmat algebralliseen ristiriitaan, joka on muotoa  $-1 = +1$  [24, s. 654–656].

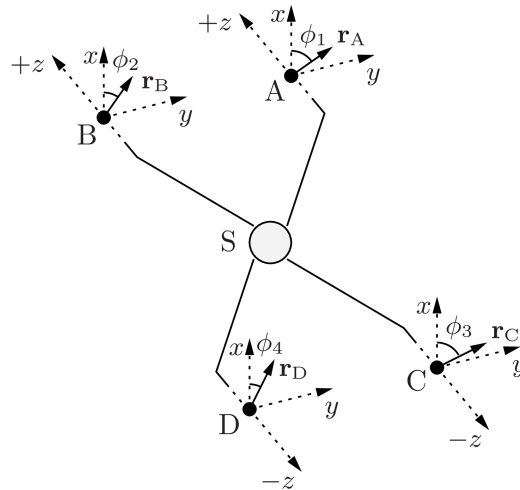
## 4.1 GHZ-argumentti

GHZ-teoreemaa on sanottu EPR:n uudeksi versioksi, joka esittelee kvanttimekaniikan luonnetta jopa ”dramaattisemmin” kuin Bellin teoreema [189, s. 731]. GHZ osoitti, että deterministinen LHVT ennustaa aina tietyn mittaustuloksen, kun samalla kvanttimekaniikka ennustaa, että tulosta ei koskaan saavuteta [148, s. 879]. Seuraavassa esitetään artikkelin [131] todistus, joka huomioi hiukkasten välisen täydellisen korrelaation. Malli perustuu luvussa 3.1.3 esitettyyn EPRB-argumenttiin ja käyttää neljää spin- $1/2$ -hiukkasta. GHZ:n työ toimi lähtökohtana useille muille tutkimuksille, joissa esiteltiin kvanttimekaniikan epälokaalisuutta ilman epäyhtälöitä.

### 4.1.1 Neljän kubitin malli

Tarkastellaan neljän spin- $1/2$ -hiukkasen järjestelmää (kuva 4.1). Paikallaan oleva spin-1-hiukkanen hajoaa ensin kahdeksi spin-1-hiukkaseksi A' ja B', jotka etenevät  $z$ - ja  $-z$ -suuntiin. Nämä hajoavat kumpikin edelleen kahdeksi spin- $1/2$ -hiukkaseksi  $A' \rightarrow A, B$  ja  $B' \rightarrow C, D$ . Hiukkaset saapuvat erillisiin mittauspisteisiin, jotka sijaitsevat kaukana toisistaan ja niissä suoritetaan spinien mittaukset yksikkövektoreiden  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$  ja  $\mathbf{r}_D$  suuntiin. Koko prosessin ajan järjestelmän kokonaisspin  $S = 1$  ja  $z$ -komponentti  $M = 0$ . Tilannetta vastaava kvanttimekaaninen tila  $|\psi\rangle$  on [131, s. 1140]

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0011\rangle - |1100\rangle). \quad (4.1)$$



**Kuva 4.1:** Neljän spin- $1/2$ -hiukkasen ajatuskoe [131, s. 1134]. Kaksi spin 1 -hiukkasta etenevät lähtöpaikasta S, hajoten edelleen kahdeksi spin- $1/2$ -hiukkaseksi. Sternin-Gerlachin magneetit A, B, C ja D ovat kaukana toisistaan. Mittaukset tehdään  $xy$ -tasossa, vastaavat mittaasuuntaukset ovat  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$  ja  $\mathbf{r}_D$ . Ne muodostavat kulmat  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  ja  $\phi_4$  valitun koordinaatiston  $x$ -akselin kanssa.

Odotusarvolle  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D)$  on

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D) \\
&= \langle \psi | (\vec{\sigma}_A \cdot \mathbf{r}_A) (\vec{\sigma}_B \cdot \mathbf{r}_B) (\vec{\sigma}_C \cdot \mathbf{r}_C) (\vec{\sigma}_D \cdot \mathbf{r}_D) | \psi \rangle \\
&= 1/2 \{ \langle 0011 | (\vec{\sigma}_A \cdot \mathbf{r}_A) (\vec{\sigma}_B \cdot \mathbf{r}_B) (\vec{\sigma}_C \cdot \mathbf{r}_C) (\vec{\sigma}_D \cdot \mathbf{r}_D) | 0011 \rangle + \\
&+ \langle 1100 | (\vec{\sigma}_A \cdot \mathbf{r}_A) (\vec{\sigma}_B \cdot \mathbf{r}_B) (\vec{\sigma}_C \cdot \mathbf{r}_C) (\vec{\sigma}_D \cdot \mathbf{r}_D) | 1100 \rangle - \\
&- \langle 0011 | (\vec{\sigma}_A \cdot \mathbf{r}_A) (\vec{\sigma}_B \cdot \mathbf{r}_B) (\vec{\sigma}_C \cdot \mathbf{r}_C) (\vec{\sigma}_D \cdot \mathbf{r}_D) | 1100 \rangle - \\
&- \langle 1100 | (\vec{\sigma}_A \cdot \mathbf{r}_A) (\vec{\sigma}_B \cdot \mathbf{r}_B) (\vec{\sigma}_C \cdot \mathbf{r}_C) (\vec{\sigma}_D \cdot \mathbf{r}_D) | 0011 \rangle \}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Laskemalla muutamia aputuloksia ja käyttäen yhtälöä (2.68) yksikkövektorin  $\mathbf{r}$  spin-projektiolle havaitaan

$$\langle 0 | (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}) | 0 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta e^{-i\phi} \\ s_\theta e^{i\phi} & -c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_\theta \tag{4.3a}$$

$$\langle 1 | (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}) | 1 \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta e^{-i\phi} \\ s_\theta e^{i\phi} & -c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -c_\theta \tag{4.3b}$$

$$\langle 0 | (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}) | 1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta e^{-i\phi} \\ s_\theta e^{i\phi} & -c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s_\theta e^{-i\phi} \tag{4.3c}$$

$$\langle 1 | (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}) | 0 \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta e^{-i\phi} \\ s_\theta e^{i\phi} & -c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = s_\theta e^{i\phi}. \tag{4.3d}$$

Yhtälön (4.2) oikealla puolella kaksi ensimmäistä termiä ovat tuloja termeistä kuten yhtälöissä (4.3a) ja (4.3b). Näin ollen

$$\langle 0011 | (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}) | 0011 \rangle + \langle 1100 | (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}) | 1100 \rangle = 2c_{\theta_1} c_{\theta_2} c_{\theta_3} c_{\theta_4}. \tag{4.4}$$

Kolmannelle ja neljännelle termille yhtälön (4.2) oikealla puolella saadaan

$$\langle 0011 | (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}) | 1100 \rangle = s_{\theta_1} s_{\theta_2} s_{\theta_3} s_{\theta_4} e^{-i(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4)} \tag{4.5a}$$

$$\langle 1100 | (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{r}) | 0011 \rangle = s_{\theta_1} s_{\theta_2} s_{\theta_3} s_{\theta_4} e^{i(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4)}. \tag{4.5b}$$

Yhdistämällä yhtälöt (4.4), (4.5a) ja (4.5b) saadaan kvanttimekaaniseksi odotusarvoksi

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D) &= c_{\theta_1} c_{\theta_2} c_{\theta_3} c_{\theta_4} - s_{\theta_1} s_{\theta_2} s_{\theta_3} s_{\theta_4} c_{\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4} \\
&= -\cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

kun tarkastellaan tilannetta  $xy$ -tasolla eli  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \pi/2$ .

#### 4.1.2 Ristiriitainen oletusten joukko

Seuraavat täydellisen korrelaation tilanteet ovat kiinnostavia:

- (i) Jos  $\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0$ , niin  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D) = -\cos(0) = -1$ .
- (ii) Jos  $\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi$ , niin  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D) = -\cos(\pi) = 1$ .

EPR:n oletukset lokaalisuudesta ( $\delta$ ), täydellisyydestä ( $\beta$ ) ja sekä realismista ( $\gamma$ ) voidaan ottaa sellaisinaan lähtökohdiksi. Kun mittauksille ovat voimassa ehdot (i) ja (ii), tieto minkä tahansa kolmen hiukkasen mittauksen tuloksista ennustaa täydellä varmuudella neljännen hiukkasen mittauksen tuloksen. Bellin teoreeman tapaan (luku 3.2.3) oletetaan dikotomisten (arvot  $+1$  ja  $-1$ ) funktioiden  $A(\phi_1, \lambda)$ ,  $B(\phi_2, \lambda)$ ,  $C(\phi_3, \lambda)$  ja  $D(\phi_4, \lambda)$  olemassaolo. Funktiot kuvaavat spinmittauksen tuloksia vastaavien yksikkövektoreiden suuntiin järjestelmän täydelliselle tilalle  $\lambda$ . Osoitetaan, että edelliset oletukset johtavat sopivilla kulmavalinnoilla ristiriitaan ilman mittauksen statistiikkaan liittyvää epäyhtälörelaatiota. Merkittään  $A(\phi_1, \lambda) \equiv A(\phi_1)$ , vastaavasti B, C ja D. Kun ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa, saadaan

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0 \Rightarrow A(\phi_1) B(\phi_2) C(\phi_3) D(\phi_4) = -1. \quad (4.7a)$$

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi \Rightarrow A(\phi_1) B(\phi_2) C(\phi_3) D(\phi_4) = 1. \quad (4.7b)$$

Käyttämällä ehtoa (i) voidaan kirjoittaa

$$A(0) B(0) C(0) D(0) = -1 \quad (4.8a)$$

$$A(\phi) B(0) C(\phi) D(0) = -1 \quad (4.8b)$$

$$A(\phi) B(0) C(0) D(\phi) = -1 \quad (4.8c)$$

$$A(2\phi) B(0) C(\phi) D(\phi) = -1. \quad (4.8d)$$

Yhtälöistä (4.8a) ja (4.8b) havaitaan

$$A(\phi) C(\phi) = A(0) C(0). \quad (4.9)$$

Yhtälöiden (4.8a) ja (4.8c) perusteella on myös

$$A(\phi) D(\phi) = A(0) D(0). \quad (4.10)$$

Jakamalla yhtälöt (4.9) ja (4.10) keskenään ja järjestämällä termejä saadaan

$$C(\phi)/D(\phi) = C(0)/D(0) \Rightarrow C(\phi) D(\phi) = C(0) D(0), \quad (4.11)$$

sillä  $D(\phi) = \pm 1$  ja on näin ollen oma käänteisfunktionsa, vastaavasti  $D(0)$ . Sijoittamalla yhtälö (4.11) yhtälöön (4.8d) havaitaan

$$A(2\phi) B(0) C(0) D(0) = -1, \quad (4.12)$$

joka yhdessä yhtälön (4.8a) kanssa antaa

$$A(2\phi) = A(0) = \text{vakio kaikilla } \phi. \quad (4.13)$$

Käyttämällä yhtälöä (4.7b) saadaan relaatio

$$A(\theta + \pi) B(0) C(\theta) D(0) = 1, \quad (4.14)$$

joka yhdessä yhtälön (4.8b) kanssa antaa vastaavalla päättelyllä kuin edellä

$$A(\theta + \pi) = -A(\theta). \quad (4.15)$$

Kulmavalinnoilla  $\theta = 0, \phi = \pi/2$  yhtälö (4.15) on ristiriidassa yhtälön (4.13) kanssa:

$$\mathbf{A}(\pi) = -\mathbf{A}(0) \quad \text{ja} \quad \mathbf{A}(\pi) = \mathbf{A}(0). \quad (4.16)$$

Funktion  $\mathbf{B}(\phi_2, \lambda)$  argumentti oli edellä kiinnitetty, joten päättely menee läpi myös kolmen spin-1/2-hiukkasen tapauksessa. Vastaavan koejärjestelyn ovat muotoilleet [131] kolmen hiukkasen interferometriaa [181] käyttäen. Tässä tutkielmassa ei käsitellä GHZ:n kokeellista tutkimusta. Johdettu tulos osoittaa, että EPR-argumentti ei toimi edes täydellisten korrelaatioiden tapauksessa silloin, kun hiukkasia on kolme tai enemmän. Tämä on hieman ironista [131, s. 1135].

GHZ:n tulos pätee vain todistuksen alussa määritellylle tilalle  $|\psi\rangle$  [254]. GHZ-teoreemaa ei voida suoraan yleistää kahden hiukkasen tapaukseen, paitsi riittävän korkean dimension kuditeille [57, 58, 64]. GHZ-teoreeman yleistyksiä on esitelty artikkelissa [148, s. 879].

## 4.2 Hardyn teoreema

NLWI-todistukset kuten Heywood ja Redhead [50, 140] sekä GHZ [130, 131] vaativat vähintään kuusi ulottuvuutta Hilbertin avaruudessa. Hardy [135, 136] osoitti vuonna 1992, että ristiriita lokaalin realismin ja kvanttiteorian välillä ilmenee kahden kubitin ei-maksimaalisesti lomittuneille tiloille. Seuraavassa esitetään artikkelin [136] todistus. Tässä tutkielmassa ei käsitellä Hardyn argumenttia sekoittuneille lomittuneille tiloille.

### 4.2.1 Hardyn teoreeman todistus

Osoitetaan Bell-tyypin epälokaalisuus kahdelle hiukkaselle ilman epäyhtälöitä kaikille paitsi maksimaalisesti lomittuneille tiloille ja tulotiloille. Olkoon avaruuden  $\mathbb{C}_i^2$  ortonormaali kanta  $\{|\pm_i\rangle\}$ ,  $i = 1, 2$ . Aiemmista luvuista poiketen ja merkintöjen selkeyden vuoksi merkitään järjestelmiä indekseillä 1 ja 2 kirjaimien A ja B sijaan. Kirjoitetaan kahden kubitin tila Schmidtin hajotelman (2.101) avulla muodossa

$$|\psi\rangle = \alpha|+_1\rangle|+_2\rangle - \beta|-_1\rangle|-_2\rangle, \quad (4.17)$$

jossa rajoitutaan alueeseen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  ja miinusmerkki on valittu kertoimen  $\beta$  eteen. Määritellään toinen kanta  $\{|u_i\rangle, |v_i\rangle\}$ ,  $i = 1, 2$ , johon vaihtaminen kannasta  $\{|\pm_i\rangle\}$  vastaa säteenjakajan (*beam splitter*) toimintaa *Mach-Zehnder-interferometrissa* [153, s. 23]:

$$|+_i\rangle = b|u_i\rangle + ia^*|v_i\rangle \quad (4.18a)$$

$$|-_i\rangle = ia|u_i\rangle + b^*|v_i\rangle. \quad (4.18b)$$

Suoralla laskulla nähdään, että kertoimille  $a, b \in \mathbb{C}$  pätee  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  ja vektorit  $|u_i\rangle, |v_i\rangle$  ovat ortonormaaleja,  $|u_i\rangle \perp |v_i\rangle$ . Kertomalla yhtälö (4.18a)  $b^*$ :llä,

yhtälö (4.18b)  $-ia^*$ :lla ja summaamalla nämä yhtälöt saadaan käänteisrelaatio kantavektorille  $|u_i\rangle$ , vastaavasti vektorille  $|v_i\rangle$ :

$$|u_i\rangle = b^*|+_i\rangle - ia^*|-_i\rangle \quad (4.19a)$$

$$|v_i\rangle = -ia|+_i\rangle + b|-_i\rangle. \quad (4.19b)$$

Sijoittamalla kantavektorit  $|u_i\rangle, |v_i\rangle$  yhtälöön (4.17) esitetään  $|\psi\rangle$  muodossa

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha|+_i\rangle|+_i\rangle - \beta|-_i\rangle|-_i\rangle \\ &= \alpha(b|u_1\rangle + ia^*|v_1\rangle) \otimes (b|u_2\rangle + ia^*|v_2\rangle) - \\ &\quad - \beta(ia|u_1\rangle + b^*|v_1\rangle) \otimes (ia|u_2\rangle + b^*|v_2\rangle) \\ &= (\alpha b^2 + \beta a^2)|u_1\rangle|u_2\rangle + i(\alpha a^*b - \beta ab^*)|u_1\rangle|v_2\rangle + \\ &\quad + i(\alpha a^*b - \beta ab^*)|v_1\rangle|u_2\rangle - [\alpha(a^*)^2 + \beta(b^*)^2]|v_1\rangle|v_2\rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Valitaan yhtälön (4.20) viimeisellä rivillä ensimmäisen termin kerroin nolaksi eli  $\alpha b^2 + \beta a^2 = 0$ . Valinta toimii sopivalla koelaitteistolla, esimerkiksi kahdella Mach-Zehnder-interferometrillä, jolloin mittauksen edetessä tapahtuu elektronin ja positronin annihilaatio [135, s. 2981]. Koska  $\alpha \neq 0 \neq \beta$ , kirjoitetaan

$$\frac{a^2}{\alpha} = -\frac{b^2}{\beta} = \kappa^2 \quad \Rightarrow \quad a = \kappa\sqrt{\alpha}, \quad b = i\kappa\sqrt{\beta}. \quad (4.21)$$

Yhtälössä (4.21) valittiin positiivinen juuri ratkaisuna. Negatiivinen ratkaisu saadaan vaihtamalla  $\sqrt{\beta} \rightarrow -\sqrt{\beta}$ . Vakio  $\kappa$  voidaan määrätä reaaliarvoiseksi valitsemalla kertoimiin  $a$  ja  $b$  sekä niiden kompleksikonjugaatteihin liittyvät globaalit vaihtekijät (luku 2.1.5) sopivasti; oletetaan, että näin on tehty. Yhtälön (4.21) ja relaation  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  kautta saadaan esitys kertoimelle  $\kappa$ :

$$|a|^2 + |b|^2 = \kappa^2|\alpha| + \kappa^2|\beta| = 1 \Rightarrow \kappa^2 = \frac{1}{|\alpha| + |\beta|}. \quad (4.22)$$

Sijoitetaan yhtälön (4.21) kertoimet  $a, b$  ja yhtälö (4.22) yhtälöön (4.20) sekä käytetään ehtoa  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , jolloin tilalle  $|\psi\rangle$  on

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= i(\alpha a^*b - \beta ab^*)|u_1\rangle|v_2\rangle + i(\alpha a^*b - \beta ab^*)|v_1\rangle|u_2\rangle - \\ &\quad - [\alpha(a^*)^2 + \beta(b^*)^2]|v_1\rangle|v_2\rangle \\ &= i[\alpha\kappa\sqrt{\alpha^*}i\kappa\sqrt{\beta} - \beta\kappa\sqrt{\alpha}(-i\kappa\sqrt{\beta^*})]|u_1\rangle|v_2\rangle + \\ &\quad + i[\alpha\kappa\sqrt{\alpha^*}i\kappa\sqrt{\beta} - \beta\kappa\sqrt{\alpha}(-i\kappa\sqrt{\beta^*})]|v_1\rangle|u_2\rangle - \\ &\quad - (\kappa^2\alpha^2 - \kappa^2\beta^2)|v_1\rangle|v_2\rangle \\ &\stackrel{(4.24)}{=} -\sqrt{\alpha\beta}|u_1\rangle|v_2\rangle - \sqrt{\alpha\beta}|v_1\rangle|u_2\rangle - \frac{(|\alpha| + |\beta|)(|\alpha| - |\beta|)}{|\alpha| + |\beta|}|v_1\rangle|v_2\rangle \\ &= -[\sqrt{\alpha\beta}(|u_1\rangle|v_2\rangle + |v_1\rangle|u_2\rangle) + (|\alpha| - |\beta|)|v_1\rangle|v_2\rangle]. \end{aligned} \quad (4.23)$$



Yhtälössä (4.23) esimerkiksi ensimmäiselle termille on (muut vastaavasti)

$$\begin{aligned}
& i[\alpha\kappa\sqrt{\alpha^*}i\kappa\sqrt{\beta} - \beta\kappa\sqrt{\alpha}(-i\kappa\sqrt{\beta^*})] \\
&= -\kappa^2\sqrt{\alpha\beta} \underbrace{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha^*}}_{=|\sqrt{\alpha}|^2=|\alpha|} - \kappa^2\sqrt{\alpha\beta} \underbrace{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta^*}}_{=|\sqrt{\beta}|^2=|\beta|} \\
&= -\sqrt{\alpha\beta} \frac{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha| + |\beta|} \\
&= -\sqrt{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Yhtälö (4.23) voidaan kirjoittaa lähes tulomuodossa (jätetään tekijä  $-1$  pois edestä):

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= -[\sqrt{\alpha\beta}(|u_1\rangle|v_2\rangle + |v_1\rangle|u_2\rangle) + (|\alpha| - |\beta|)|v_1\rangle|v_2\rangle] \\
&= \left( \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{|\alpha| - |\beta|}}|u_1\rangle + \sqrt{|\alpha| - |\beta|}|v_1\rangle \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left( \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{|\alpha| - |\beta|}}|u_2\rangle - \sqrt{|\alpha| - |\beta|}|v_2\rangle \right) - \\
&\quad - \frac{\alpha\beta}{|\alpha| - |\beta|}|u_1\rangle|u_2\rangle.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Määritellään kolmas kanta, joka liittyy kannan  $\{|u_i\rangle, |v_i\rangle\}$  vektoreihin seuraavasti:

$$|c_i\rangle = A|u_i\rangle + B|v_i\rangle, \tag{4.26a}$$

$$|d_i\rangle = -B^*|u_i\rangle + A^*|v_i\rangle, \tag{4.26b}$$

jossa

$$A = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{1 - |\alpha\beta|}}, \quad B = \frac{|\alpha| - |\beta|}{\sqrt{1 - |\alpha\beta|}} \tag{4.27}$$

ja suoralla laskulla käyttäen ehtoa  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  on voimassa  $|A|^2 + |B|^2 = 1$ . Kerromalla yhtälö (4.26a)  $A^*$ :lla, yhtälö (4.26b)  $B$ :llä ja vähentämällä ensimmäisestä jälkimmäinen saadaan käänteisrelaatio vektorille  $|u_i\rangle$ , vastaavasti  $|v_i\rangle$ :

$$|u_i\rangle = A^*|c_i\rangle - B|d_i\rangle \tag{4.28a}$$

$$|v_i\rangle = B^*|c_i\rangle + A|d_i\rangle. \tag{4.28b}$$

Muunnetaan yhtälö (4.25) yksinkertaisemmaksi yhtälöiden (4.26a), (4.26b) ja (4.27) avulla:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{\sqrt{1-|\alpha\beta|}}{\sqrt{|\alpha|-|\beta|}} \left( \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{1-|\alpha\beta|}}|u_1\rangle + \frac{|\alpha|-|\beta|}{\sqrt{1-|\alpha\beta|}}|v_1\rangle \right) \cdot \\
&\cdot \frac{\sqrt{1-|\alpha\beta|}}{\sqrt{|\alpha|-|\beta|}} \left( \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{1-|\alpha\beta|}}|u_2\rangle + \frac{|\alpha|-|\beta|}{\sqrt{1-|\alpha\beta|}}|v_2\rangle \right) - \\
&- \frac{\alpha\beta}{|\alpha|-|\beta|}|u_1\rangle|u_2\rangle \\
&= \frac{1-|\alpha\beta|}{|\alpha|-|\beta|}|c_1\rangle|c_2\rangle - \frac{\alpha\beta}{|\alpha|-|\beta|}|u_1\rangle|u_2\rangle \\
&= \underbrace{\frac{1-|\alpha\beta|}{|\alpha|-|\beta|}}_{\equiv N} \left( |c_1\rangle|c_2\rangle - \underbrace{\frac{\alpha\beta}{1-|\alpha\beta|}}_{=A^2} |u_1\rangle|u_2\rangle \right) \\
&= N \left( |c_1\rangle|c_2\rangle - A^2|u_1\rangle|u_2\rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Yhtälöitä (4.26a) ja (4.28a) käyttäen kirjoitetaan tilan  $|\psi\rangle$  yhtälön (4.29) alarivin muoto neljällä yhtäpitävällä tavalla. Sijoittamalla vektoreiden  $|c_1\rangle$  ja  $|c_2\rangle$  muodot yhtälöön (4.29) saadaan yhtälö (4.30a), vastaavasti yhtälöt (4.30b)–(4.30d) pareille  $|c_2\rangle; |u_1\rangle$ ,  $|c_1\rangle; |u_2\rangle$  ja  $|u_1\rangle; |u_2\rangle$ :

$$|\psi\rangle = N \left[ AB(|u_1\rangle|v_2\rangle + |v_1\rangle|u_2\rangle) + B^2|v_1\rangle|v_2\rangle \right], \tag{4.30a}$$

$$|\psi\rangle = N \left[ |c_1\rangle(A|u_2\rangle + B|v_2\rangle) - A^2(A^*|c_1\rangle - B|d_1\rangle)|u_2\rangle \right], \tag{4.30b}$$

$$|\psi\rangle = N \left[ (A|u_1\rangle + B|v_1\rangle)|c_2\rangle - A^2|u_1\rangle(A^*|c_2\rangle - B|d_2\rangle) \right], \tag{4.30c}$$

$$|\psi\rangle = N \left[ |c_1\rangle|c_2\rangle - A^2(A^*|c_1\rangle - B|d_1\rangle)(A^*|c_2\rangle - B|d_2\rangle) \right]. \tag{4.30d}$$

Määritellään dikotomiset observaabelit  $U_i$  ja  $D_i$  sekä niitä vastaavat operaattorit

$$\hat{U}_i = |u_i\rangle\langle u_i|, \quad \hat{D}_i = |d_i\rangle\langle d_i|, \quad [\hat{U}_i, \hat{D}_i] \neq 0. \tag{4.31}$$

Huomaa, että tässä yhteydessä  $\hat{U}_i$  ei välttämättä ole unitaarinen, vrt. merkinnät luvussa 2. Tarkastellaan hiukkasten 1 ja 2 yhteismittauksen tilanteita. Operaattorit  $\hat{U}_i$  ja  $\hat{D}_i$  eivät kommutoi. Oletetaan EPR:n reaalisuuden  $\gamma$  heikko muoto eli mittausasetelma ei ole kiinnitetty (sivu 42 alaviite 5) ja muotoillaan *Hardyn epälokaalisuusehdot kahdelle kubitille*:

- (i) Observaabeleille  $U_i$  ja  $U_2$  nähdään yhtälöstä (4.30a)  $U_1 U_2 = 0$ , sillä tila  $|\psi\rangle$  ei sisällä termiä  $|u_1\rangle|u_2\rangle$ .
- (ii) Observaabeleille  $D_1$  ja  $U_2$  nähdään yhtälöstä (4.30b), että jos  $D_1 = 1 \Rightarrow U_2 = 1$ , sillä vain termi  $|d_1\rangle|u_2\rangle$  sisältää vektorin  $|d_1\rangle$ .
- (iii) Vastaavasti yhtälöstä (4.30c) nähdään observaabeleille  $U_1$  ja  $D_2$ , että  $D_2 = 1 \Rightarrow U_1 = 1$ .

- (iv) Yhtälön (4.30c) nojalla tapahtuman  $D_1 = 1 = D_2$  todennäköisyys olisi  $|NA^2B^2|^2 \equiv \gamma > 0$ .

Ehtojen (i)-(iv) avulla osoitetaan ristiriita kvanttiteorian ja deterministisen LHVT:n<sup>2</sup> välillä. Käytetään lokaalisuuden ( $\delta$ ), realismin ( $\gamma$ ) ja täydellisen teorian ( $\beta$ ) oletuksia kuten EPR:n tapauksessa luvussa 3.1. Oletetaan piilomuuttuja tai -muuttujat  $\lambda$ , jotka määräävät täydellisesti jokaisen yksittäisen hiukkasparin tilan. Mittaukset hiukkasille 1 ja 2 tehdään kaukana toisistaan.

Tarkastellaan kokeiden sarjaa, joissa mitataan observaabelit  $D_1, D_2$  hiukkasille 1,2 ja saadaan  $D_1 = 1 = D_2$ . Ehdon (iv) nojalla näin tapahtuu joskus, vastaava todennäköisyys on  $\gamma > 0$ . Koska  $D_1 = 1$ , seuraa kohdasta (ii) että  $U_2 = 1$ , mikäli  $U_2$  olisi mitattu hiukkaselle 2; realismin nojalla observaabelia  $U_2$  vastaava todellisuuden elementti on olemassa ja piilomuuttujilla täydennetystä teoriasta löytyy sille vastine. Lokaalisuuden perusteella valitulle  $\lambda$  on voimassa tulos  $U_2 = 1$  myös silloin, kun  $U_1$  olisi mitattu hiukkaselle 1 observaabelin  $D_1$  sijaan. Toisin sanoen tälle nimenomaiselle kokeelle piilomuuttuja(t)  $\lambda$  määrittävät  $U_2(\lambda) = 1$ . Samantapaisella argumentilla voidaan tuloksesta  $D_2 = 1$  sekä ehdosta (iii) päätellä  $U_1(\lambda) = 1$ , jolloin kyseiselle kokeelle on  $U_1(\lambda) U_2(\lambda) = 1$ . Eli: mikäli olisi mitattu  $U_1$  ja  $U_2$  suureiden  $D_1$  ja  $D_2$  sijaan, seuraa oletusten perusteella  $U_1 U_2 = 1$ , joka on ristiriidassa ehdon (i) kanssa.

#### 4.2.2 Todennäköisyyden maksimiarvo

Katsotaan kahta erikoistapausta. Mittauksen  $D_1 = 1 = D_2$  todennäköisyys  $\gamma$  kirjoitetaan yhtälöiden (4.27) ja (4.29) nojalla muodossa

$$\begin{aligned} \gamma &= \left| \frac{1 - |\alpha\beta|}{|\alpha| - |\beta|} \cdot \left( \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{1 - |\alpha\beta|}} \right)^2 \cdot \left( \frac{|\alpha| - |\beta|}{\sqrt{1 - |\alpha\beta|}} \right)^2 \right|^2 \\ &= \left( \frac{|\alpha - \beta||\alpha\beta|}{1 - |\alpha\beta|} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Todennäköisyyden maksimiarvo  $\gamma_{\max}$  saadaan ratkaisemalla epälineaarinen optimointiongelma

$$\mathbf{max} f(x, y) = \left( \frac{x^2y - y^2x}{1 - xy} \right)^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad (4.33)$$

jossa  $x \equiv |\alpha|$  ja  $y \equiv |\beta|$ . Ongelma ratkeaa esimerkiksi Lagrangen kertoimia [11, s. 848] käyttäen ja maksimiarvo on

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2}(5\sqrt{5} - 11) \approx 9\%. \quad (4.34)$$

2. Valinta käyttää reaalisuuden heikkoa muotoa edellä johtaa kontrafaktuaaliseen päättelyketjuun, joka puolestaan vaatii LHVT:lta determinismin [228, s. 39,41-43] eikä Hardyn teoreema yleisty stokastisille piilomuuttujamalleille. Kun tarkasteltava piilomuuttujamalli on deterministinen, on Hardy-tyyppin epälokaalisuusehtojen ja Bell-tyyppin epäyhtälöiden välillä selvä yhteys. Suoraviivaisella joukko-oppin soveltamisella havaitaan [113], että Hardyn epälokaalisuusehdoista voidaan muotoilla CH-epäyhtälön (luku 3.3.3) eräs esiintymä.

Maksimi  $\gamma_{\max}$  on voimassa myös kahdelle kuditille [207]. Mikäli  $\alpha = 0$  tai  $\beta = 0$ , on tila  $|\psi\rangle$  tulotila ja  $\gamma = 0$ . Vastaavasti maksimilomittumisen tapauksessa  $|\alpha| = |\beta|$  saadaan  $\gamma = 0$  eli todistus ei mene läpi.

### 4.2.3 Huomioita Hardyn teoreemasta

Vaihtoehtoisen todistuksen teoreemalle esitti [127], jossa yksi observaabeleista on lähes mielivaltaisesti valittavissa [254, s. 129]. Jordan [160] toi esiin erilaiset mittaensorientaatiot eri hiukkasille, joiden avulla  $\gamma$  kirjoitetaan observaabelien kulmavalintojen  $\theta_D$  ja  $\theta_E$  sekä tilan  $|\psi\rangle$  kulman  $\beta$  avulla (yhtälö 27 artikkelissa [160]) seuraavasti:

$$\gamma = \left[ \cos \beta \cos \frac{\theta_D}{2} \cos \frac{\theta_E}{2} - \sin \beta \sin \frac{\theta_D}{2} \sin \frac{\theta_E}{2} \right]^2. \quad (4.35)$$

Maksimi  $\gamma_{\max}$  saavuttaa saman arvon, kuin yhtälössä (4.32). Kun käsitellään puhtaita tiloja, on Hardyn tulos yleistetty kahdelle kuditille [78, 171], kolmelle kubitille [69, 117, 253, 254],  $n$ :lle kubitille yleistetyssä GHZ-tilassa ([61], luku 4.3) sekä mielivaltaiselle  $n$ :n kuditin tilalle [255, 256]. Teoreeman yleistyksiä on artikkelissa [207].

Hardyn teoreeman toinen suunta pätee myös eli mielivaltaisille mittausasetelmille (kaksi mittaensorientaatiota per havaitsija) on olemassa puhdas lomittunut tila, joka näyttää Hardy-tyyppisen ristiriidan LHVT:n kanssa [160, 190]. Tulos yleistyy tilanteeseen, jossa kubitteja on  $n \geq 3$  kappaletta [164, 165]. Toisin kuin CHSH-epäyhtälölle, kiinnitetyille observaabeleille Hardyn epälokaalisuuden näyttävä tila  $|\psi\rangle$  on yksikäsitteinen kahdelle kubitille [116, 165], mutta kubitien määrän kasvaessa tai kudittien tapauksessa sopivia tiloja on äärettömän paljon [116, 163].

Hardyn argumentti sijoittuu GHZ:n (luku 4.1) ja Bellin (luku 3.3.1) tulosten välimaastoon: käsitellään yksittäisiä kubitteja, joille ristiriita kvanttiteorian ja lokaalin realismin välillä ilmenee tilastollisesti [160, s. 62], parhaimmillaan todennäköisyydellä noin 9 % yhtälön (4.34) nojalla. GHZ voidaan ajatella ”kaikki tai ei mitään” -tilanteena, jota vastaavassa kokeessa yksittäisten mittaustapahtumien tulokset rikkovat LHVT:n ennusteita [2, s. 2]. Bellin teoreemassa ristiriita nähdään tilastollisesti.

## 4.3 Gisinin teoreema yleistetyille GHZ-tilalle

Gisinin teoreema yleisessä muodossaan tarkoittaa lyhyesti seuraavaa: jos tarkasteltava puhdas  $n$ :n kuditin tila on lomittunut, on olemassa Bell-tyyppinen epäyhtälö, joka menee rikki. Näille tiloille Bell-tyypin epälokaalisuus ja kvanttimekaaninen lomittumisilmiö ovat ekvivalentteja. Luvussa 3.6 osoitettiin Gisinin teoreema kahdelle hiukkaselle, mutta muotoilu  $n$ :n kuditin tapaukseen ei onnistu suoraviivaisesti, koska Schmidtin hajotelma ei yleisty useammalle kuin kahdelle hiukkaselle. Luvussa 3.4.1 huomattiin myös, että on olemassa puhtaita yleistettyjä GHZ-tiloja, jotka eivät riko mitään korrelaatiopohjaista Bell-tyypin epäyhtälöä parittomalle  $n$  [152].

Choudhary et al. [69] osoittivat, että jokainen puhdas kolmen kubitin lomittunut tila (riippumatta siitä, onko kyseessä kahden vai kolmen hiukkasen välinen lomittuminen) rikkoo Hardy-tyyppin epäyhtälöä. He käyttivät todistuksessaan kolmen kubitin kanonisia esityksiä [4, 5]. Tulos pätee myös toiseen suuntaan [68] eli mille tahansa artikkelissa [69] esitetyllä tavalla valittaville ei-kommutoiville observaabeleille voidaan aina löytää kvantttila, joka on ristiriidassa lokaalin realismin kanssa.

Permutaatioasymmetrisille  $n$ :n kubitin tiloille Gisinin teoreema osoitettiin vuonna 2012 [242]. Äärelliselle määrälle kuditteja julkaistiin todistusyritys vuonna 2010 [178], mutta todistuksessa käytettyjä observaabeleita ei ole mahdollista kirjoittaa yksittäisten hiukkasten observaabelien tensorituloina [70]. Todistus yleiselle tapaukselle esitettiin vuonna 2012 [255, 256] ja todistuksessa hyödynnettiin Hardyn epäyhtälöä sopivassa muodossa äärelliselle määrälle kuditteja [61, 190]. Artikkelissa [2] esitettiin todistus lyhdeteoreettista lähestymistapaa käyttäen [1].

Sopivalla Hardy-tyyppin [135, 136] argumentilla osoitetaan Gisinin teoreema yleisessä muodossaan. Keskitytään seuraavassa yksinkertaisempaan tilanteeseen ja osoitetaan teoreema yleistetyille GHZ-tilalle [61]:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{GHZ}} &= \alpha|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \dots \otimes |v_n\rangle + \beta|w_1\rangle \otimes |w_2\rangle \otimes \dots \otimes |w_n\rangle \\ &= \alpha|v_1 \dots v_n\rangle + \beta|w_1 \dots w_n\rangle, \end{aligned} \quad (4.36)$$

jossa  $\{|v_k\rangle, |w_k\rangle\}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) on ortonormaali kanta hiukkasen  $k$  tila-avaruudessa ja kertoimille  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  pätee  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Tila  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$  on lomittunut, kun  $\alpha \neq 0 \neq \beta$ . Kun  $n \geq 3$ , Hardyn argumentti pätee mille tahansa lomittuneelle GHZ-tilalle, myös maksimaalisesti lomittuneelle tilalle toisin kuin tapauksessa  $n = 2$ .

### 4.3.1 Hardyn epäyhtälö, $n$ kubittia

Mermin [190] muotoili Hardyn todistuksen [136] pohjalta Hardyn epäyhtälön kahdelle kubitille, joka on ekvivalentti CHSH-epäyhtälön kanssa [255, s. 2] ja tässä mielessä ”luonnollinen” tapa käsitellä Bell-tyyppin epälokaalisuutta uudesta suunnasta. Johdetaan Hardyn epäyhtälö, kun kubitteja on  $n$  kappaletta tilassa  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$ . Rajoitutaan tarkastelemaan avaruuden osaa  $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Jokaiselle mittauspaikalle  $k$  määritellään binääriarvoiset observaabelit  $U_k$  ja  $D_k$ , joita vastaavat projektio-operaattorit

$$\hat{D}_k = |d_k^+\rangle\langle d_k^+| - |d_k^-\rangle\langle d_k^-| \quad \text{ja} \quad \hat{U}_k = |u_k^+\rangle\langle u_k^+| - |u_k^-\rangle\langle u_k^-|. \quad (4.37)$$

Nämä liittyvät alkuperäisiin kantavektoreihin  $\{|v_k\rangle, |w_k\rangle\}$  kiertokulmien  $\alpha_k, \beta_k$  sekä vaihekulmien  $\delta_k, \gamma_k$  kautta:

$$|u_k^+\rangle = \cos \alpha_k |v_k\rangle + e^{i\delta_k} \sin \alpha_k |w_k\rangle = c_{\alpha_k} |v_k\rangle + e^{i\delta_k} s_{\alpha_k} |w_k\rangle \quad (4.38a)$$

$$|u_k^-\rangle = -e^{-i\delta_k} s_{\alpha_k} |v_k\rangle + c_{\alpha_k} |w_k\rangle \quad (4.38b)$$

$$|w_k^+\rangle = c_{\beta_k} |v_k\rangle + e^{i\gamma_k} s_{\beta_k} |w_k\rangle \quad (4.38c)$$

$$|w_k^-\rangle = -e^{-i\gamma_k} s_{\beta_k} |v_k\rangle + c_{\beta_k} |w_k\rangle. \quad (4.38d)$$

Operaattoreille on voimassa  $[\hat{D}_k, \hat{U}_k] \neq 0$  jokaiselle  $k$ . Kvanttimekaaninen todennäköisyys saada mittaustulokset  $D_1 = 1$  ja  $U_k = 1$  kaikille  $k = 2, 3, \dots, n$  on

$$P(D_1 U_2 U_3 \cdots U_n | + \cdots +) = |\langle \psi | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle|^2. \quad (4.39)$$

Päätelyketju (i)-(iv) sivulla 86 yleistyy  $n$ :lle hiukkaselle [61, 164, 254]. Seuraavasta yhtälöiden ja epäyhtälön ryhmästä käytetään nimitystä *Hardyn epälokaalisuusehdot*:

$$P(D_1 U_2 U_3 \cdots U_n | + \cdots +) = 0 \quad (4.40a)$$

$$P(U_1 D_2 U_3 \cdots U_n | + \cdots +) = 0 \quad (4.40b)$$

$$P(U_1 U_2 D_3 \cdots U_n | + \cdots +) = 0 \quad (4.40c)$$

$\vdots$

$$P(U_1 U_2 U_3 \cdots D_n | + \cdots +) = 0 \quad (4.40d)$$

$$P(D_1 D_2 \cdots D_n | - \cdots -) = 0 \quad (4.40e)$$

$$P(U_1 U_2 \cdots U_n | + \cdots +) > 0. \quad (4.40f)$$

Yhtälöitä (4.40a)-(4.40f) on  $n + 2$  kappaletta. Seuraavan kontrafaktuaalisen päätelyn kautta niiden havaitaan olevan ristiriidassa lokaalin realismin kanssa:

- (i) Jos mitataan  $D_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ , tulee olla  $D_1 = -1$  silloin, kun  $U_2 = 1 = U_3 = \dots = U_n$ .
- (ii) Jos mitataan  $D_2, U_1, U_3, U_4, \dots, U_n$ , tulee olla  $D_2 = -1$  silloin, kun  $U_1 = 1 = U_3 = \dots = U_n$ .
- (iii) Vastaavasti muut tapaukset yhtälöissä (4.40c)-(4.40d).
- (iv) Yhtälön (4.40f) nojalla on nolasta eroava todennäköisyys sille, että  $U_k = 1$  ( $k = 1, \dots, n$ ) ja myös  $D_k = -1$ . Täten havaitaan ristiriita: yhtälö (4.40e) ei ole voimassa, sillä todennäköisyyden  $P(D_1 D_2 \cdots D_n | - \cdots -)$  tulisi erota nolasta.

Yhtälöistä (4.40a)-(4.40f) saadaan  $n$ :n kubitin *Hardyn epäyhtälö* [61, s. 434]:

$$\begin{aligned} P(U_1 U_2 \cdots U_n | + \cdots +) &\leq P(D_1 D_2 \cdots D_n | - \cdots -) + \\ &\quad + P(D_1 U_2 U_3 \cdots U_n | + \cdots +) + \\ &\quad + P(U_1 D_2 U_3 \cdots U_n | + \cdots +) + \\ &\quad + \cdots + P(U_1 U_2 U_3 \cdots D_n | + \cdots +). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Hardyn epäyhtälö (4.41) kuuluu yleisten Bell-tyypin epäyhtälöiden (luku 3.4) luokkaan  $(n, 2, 2)$ . Seuraava Gisinin teoreeman todistus yleistetyille GHZ-tilalle perustuu mittauskulmina olevien vapaasti valittavien parametrien riittävän määrän olemassaoloon (luku 4.3.3).

### 4.3.2 Todennäköisyyksien laskeminen

Määritetään Hardyn epälokaalisuusehtojen (4.40a)–(4.40f) täyttymisen asettamat rajoitteet kvanttimekaanisille todennäköisyyksille. Kirjoittamalla todennäköisyys (4.39) auki tilalle (4.36) saadaan

$$\begin{aligned}
|\langle \psi | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle|^2 &= |(\alpha \langle v_1 \cdots v_n | + \beta \langle w_1 \cdots w_n |) d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle|^2 \\
&= \left[ (\alpha \langle v_1 \cdots v_n | + \beta \langle w_1 \cdots w_n |) d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[ d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ (\alpha |v_1 \cdots v_n\rangle + \beta |w_1 \cdots w_n\rangle) \right] \\
&= \alpha^2 |\langle v_1 \cdots v_n | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle|^2 + \\
&\quad + \beta^2 |\langle w_1 \cdots w_n | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle|^2 + \\
&\quad + \alpha \beta \langle v_1 \cdots v_n | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle \langle d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ | w_1 \cdots w_n \rangle + \\
&\quad + \alpha \beta \langle w_1 \cdots w_n | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle \langle d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ | v_1 \cdots v_n \rangle.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Käyttämällä yhtälöitä (4.38a)–(4.38d) jokaiselle termille yhtälön (4.42) oikealla puolella havaitaan ensimmäiselle termille

$$\begin{aligned}
\langle v_1 \cdots v_n | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle &= \langle v_1 \cdots v_n | [c_{\beta_1} |v_1\rangle + \mathcal{O}(w_1)] [c_{\alpha_2} |v_2\rangle + \\
&\quad + \mathcal{O}(w_2)] \cdots [c_{\alpha_n} |v_n\rangle + \mathcal{O}(w_n)] \rangle \\
&= c_{\beta_1} \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k} \\
&= \langle d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ | v_1 \cdots v_n \rangle,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

jossa merkittiin symbolilla  $\mathcal{O}(*)$  ortonormaaliuden perusteella nollassi menevät termit. Toiselle termille yhtälössä (4.42) on

$$\begin{aligned}
\langle w_1 \cdots w_n | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle &= \langle w_1 \cdots w_n | [\mathcal{O}(v_1) + e^{i\gamma_1} s_{\beta_1} |w_1\rangle] \cdot \\
&\quad \cdot [\mathcal{O}(v_2) + e^{i\delta_2} s_{\alpha_2} |w_2\rangle] \cdot \cdots \\
&\quad \cdot \cdots \cdot [\mathcal{O}(v_n) + e^{i\delta_n} s_{\alpha_n} |w_n\rangle] \rangle \\
&= e^{i(\gamma_1 + \sum_{k=2}^n \delta_k)} s_{\beta_1} \prod_{k=2}^n s_{\alpha_k} \\
&= \langle d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ | w_1 \cdots w_n \rangle^*.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Kolmas ja neljäs termi lasketaan edellisistä suoraan. Yhtälön (4.42) oikea puoli on<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 |\langle v_1 \cdots v_n | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle|^2 + \beta^2 |\langle w_1 \cdots w_n | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle|^2 + \\
& + \alpha\beta \langle v_1 \cdots v_n | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle \langle d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ | w_1 \cdots w_n \rangle + \\
& + \alpha\beta \langle w_1 \cdots w_n | d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle \langle d_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ | v_1 \cdots v_n \rangle \\
& = \alpha^2 c_{\beta_1}^2 \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k}^2 + \beta^2 s_{\beta_1}^2 \prod_{k=2}^n s_{\alpha_k}^2 + \\
& + \alpha\beta c_{\beta_1} e^{-i(\gamma_1 + \sum_{k=2}^n \delta_k)} \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k} s_{\beta_1} \prod_{k=2}^n s_{\alpha_k} + \\
& + \alpha\beta c_{\beta_1} e^{i(\gamma_1 + \sum_{k=2}^n \delta_k)} \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k} s_{\beta_1} \prod_{k=2}^n s_{\alpha_k} \\
& = \alpha^2 c_{\beta_1}^2 \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k}^2 + \beta^2 s_{\beta_1}^2 \prod_{k=2}^n s_{\alpha_k}^2 + \\
& + \alpha\beta s_{\beta_1} c_{\beta_1} \left[ e^{-i(\gamma_1 + \sum_{k=2}^n \delta_k)} + e^{i(\gamma_1 + \sum_{k=2}^n \delta_k)} \right] \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k} s_{\alpha_k} \\
& = \alpha^2 c_{\beta_1}^2 \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k}^2 + \beta^2 s_{\beta_1}^2 \prod_{k=2}^n s_{\alpha_k}^2 + \\
& + 2\alpha\beta s_{\beta_1} c_{\beta_1} \cos \left( \gamma_1 + \sum_{k=2}^n \delta_k \right) \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k} s_{\alpha_k}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Vastaavasti lasketaan todennäköisyydet (4.40b)-(4.40d). Yhtälöstä (4.40e) saadaan vastaavalla laskulla kuin edellä

$$\begin{aligned}
P(D_1 D_2 \cdots D_n | - \cdots -) & = |\langle \psi | d_1^- d_2^- \cdots d_n^- \rangle|^2 \\
& = \alpha^2 \prod_{k=1}^n s_{\beta_k}^2 + \beta^2 \prod_{k=1}^n c_{\beta_k}^2 + \\
& + (-1)^n 2\alpha\beta \cos \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k \right) \prod_{k=1}^n s_{\beta_k} c_{\beta_k}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Yhtälöstä (4.40f) vastaavasti

$$\begin{aligned}
P(U_1 U_2 \cdots U_n | + \cdots +) & = |\langle \psi | u_1^+ u_2^+ \cdots u_n^+ \rangle|^2 \\
& = \alpha^2 \prod_{k=1}^n c_{\alpha_k}^2 + \beta^2 \prod_{k=1}^n s_{\alpha_k}^2 + \\
& + 2\alpha\beta \cos \left( \sum_{k=1}^n \delta_k \right) \prod_{k=1}^n c_{\alpha_k} s_{\alpha_k}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Todennäköisyys (4.47) ei muutu, jos kaksi muuttujaa  $\alpha_i$  ja  $\alpha_j$  vaihdetaan pareittain. Täten todennäköisyyden ääriarvolle on voimassa

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n \equiv \alpha_0. \tag{4.48}$$

3. Huomaa, että summausindeksinä käytetään samaa kirjainta  $k$ , vaikka summat ovat toisistaan riippumattomia. Eri indeksien käyttäminen ei vaikuta lopputulokseen.



### 4.3.3 Vaihetekijöiden valinta

Yhtälön (4.45) oikealla puolella termien  $\alpha^2$  ja  $\beta^2$  kertoimet ovat tarkasteltavassa alueessa  $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Lauseke saa arvon 0 sopivalla mittauskulmien  $\alpha_k, \beta_k$  valinnalla vain jos vaihetekijöille pätee  $\gamma_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = m_1\pi$ , missä  $m_1$  on jokin kokonaisluku. Tällöin  $\cos(\gamma_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n) = (-1)^{m_1}$  ja todennäköisyys (4.39) on

$$\begin{aligned} P(D_1 U_2 U_3 \dots U_n | ++ \dots +) &= \alpha^2 c_{\beta_1}^2 \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k}^2 + \beta^2 s_{\beta_1}^2 \prod_{k=2}^n s_{\alpha_k}^2 + \\ &+ (-1)^{m_1} 2\alpha\beta s_{\beta_1} c_{\beta_1} \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k} s_{\alpha_k}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Vastaavalla päättelyllä yhtälöistä (4.40b)-(4.40d) havaitaan, että vaihetekijöille  $\delta_k, \gamma_k$  tarpeelliset yhtälöt ( $n$  kappaletta) ovat muotoa

$$\gamma_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \dots + \delta_n = m_1\pi \quad (4.50a)$$

$$\delta_1 + \gamma_2 + \delta_3 + \delta_4 + \dots + \delta_n = m_2\pi \quad (4.50b)$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \gamma_3 + \delta_4 + \dots + \delta_n = m_3\pi \quad (4.50c)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \dots + \delta_{n-1} + \gamma_n = m_n\pi. \quad (4.50d)$$

joillekin kokonaisluvuille  $m_i = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots, i = 1, \dots, n$ . Laskemalla kaikki  $n$  yhtälöä (4.50a)–(4.50d) yhteen ja siirtämällä termit  $\delta_i$  yhtäsuuruusmerkin oikealle puolelle saadaan

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k = \pi \sum_{k=1}^n m_k - (n-1) \sum_{k=1}^n \delta_k. \quad (4.51)$$

Jotta yhtälö (4.46) voi olla 0, vaaditaan  $\sum_{k=1}^n \gamma_k = m'\pi$ ,  $m' \in \mathbb{Z}$ . Yhtälön (4.51) mielessä tämä toteutuu valinnalla

$$\sum_{k=1}^n \delta_k = \frac{m_{n+1}}{n-1}\pi, \quad (4.52)$$

jossa  $m_{n+1} \in \mathbb{Z}$ . Näin ollen yhtälö (4.51) saa muodon

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k = \left( \sum_{k=1}^n m_k - m_{n+1} \right) \pi. \quad (4.53)$$

Yhdistämällä yhtälöt (4.40a) ja (4.49) sekä käyttämällä hyödyksi valintaa (4.50b)

saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 c_{\beta_1}^2 \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k}^2 + \beta^2 s_{\beta_1}^2 \prod_{k=2}^n s_{\alpha_k}^2 + (-1)^{m_1} \cdot 2\alpha\beta s_{\beta_1} c_{\beta_1} \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k} s_{\alpha_k} = 0 \\
& \Leftrightarrow \left[ \alpha c_{\beta_1} \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k} + (-1)^{m_1} \beta s_{\beta_1} \prod_{k=2}^n s_{\alpha_k} \right]^2 = 0 \\
& \stackrel{(\dagger)}{\Leftrightarrow} \alpha + (-1)^{m_1} \beta t_{\beta_1} \prod_{k=2}^n t_{\alpha_k} = 0 \\
& \Leftrightarrow t_{\beta_1} \prod_{k=2}^n t_{\alpha_k} = (-1)^{m_1+1} \frac{\alpha}{\beta}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Kohdassa  $(\dagger)$  oletettiin  $c_{\beta_1} \prod_{k=2}^n c_{\alpha_k} \neq 0$ , jaettiin yhtälö puolittain tällä termillä ja käytettiin lyhennysmerkintää  $t_{\alpha_k} \equiv \tan \alpha_k$ , vastaavasti kulmalle  $\beta_1$ . Samalla periaatteella yhdistetään yhtälöt (4.40b)–(4.40d) ja (4.50b)–(4.50d). Tällöin saadaan  $n$  kappaletta yhtälöitä, jotka ovat ekvivalentteja yhtälöissä (4.40a)–(4.40d) esiintyvien todennäköisyyksien nolautumisen kanssa:

$$t_{\beta_1} \prod_{k=2}^n t_{\alpha_k} = (-1)^{m_1+1} \frac{\alpha}{\beta} \tag{4.55a}$$

$$t_{\beta_2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n t_{\alpha_k} = (-1)^{m_2+1} \frac{\alpha}{\beta} \tag{4.55b}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$t_{\beta_n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^n t_{\alpha_k} = (-1)^{m_n+1} \frac{\alpha}{\beta}. \tag{4.55c}$$

Yhtälöistä (4.46) ja (4.53) havaitaan samantapaisella laskulla kuin edellä yhtälölle (4.40e) muoto

$$\prod_{k=1}^n t_{\beta_k} = (-1)^{\sum_{j=1}^n m_j - m_{n+1} + n + 1}. \tag{4.56}$$

Kertomalla kaikki  $n$  yhtälöä (4.55a)–(4.55c) keskenään saadaan

$$\left( \prod_{k=1}^n t_{\beta_k} \right) \left( \prod_{k=1}^n t_{\alpha_k} \right)^{n-1} = (-1)^{\sum_{i=1}^n m_i + n} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^n. \tag{4.57}$$

Käyttämällä yhtälöä (4.56) yhtälössä (4.57) havaitaan

$$\left( \prod_{k=1}^n t_{\alpha_k} \right)^{n-1} = (-1)^{m_{n+1}-1} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{n+1}. \tag{4.58}$$

Rajoitutaan alueeseen  $0 \leq \alpha_k \leq \pi/2$  jokaisella  $k$ , jolloin  $t_{\alpha_k} \geq 0$ . Luvun  $m_{n+1}$  on oltava pariton, sillä  $\alpha, \beta \geq 0$  yhtälössä (4.58) vasen puoli on ei-negatiivinen.

Valitaan  $m_{n+1} = 1$  jokaiselle  $n \geq 2$ . Valinta antaa myös maksimin todennäköisyydelle (4.47), kun  $\alpha_k$ :t ovat annettuja. Lausekkeesta (4.47) nähdään, että alueessa  $0 \leq \alpha_k \leq \pi/2$  funktio  $\cos(\frac{\pi m_{n+1}}{n-1})$  saavuttaa maksiminsa, kun  $m_{n+1}/n-1$  on mahdollisimman lähellä nollaa eli  $m_{n+1} = 1$ . Näin ollen on voimassa

$$\sum_{k=1}^n \delta_k = \frac{\pi}{n-1} \quad (4.59)$$

ja ehdolle (4.58) on

$$\prod_{k=1}^n t_{\alpha_k} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}. \quad (4.60)$$

Koska kulmamuuttujia  $\alpha_k, \beta_k$  on yhteensä  $2n$  kappaletta, on olemassa kulmavalinnat, joilla  $n+1$  yhtälöä (4.40a)–(4.40e) voidaan toteuttaa edellisillä vaihetekijöiden valinnoilla. Nyt riittää osoittaa, että todennäköisyys  $P(U_1 U_2 \cdots U_n | ++ \cdots +) > 0$  valitussa alueessa.

#### 4.3.4 Todennäköisyyden $P(U_1 U_2 \cdots U_n | ++ \cdots +)$ lauseke

Merkitään jatkossa  $P(U_1 U_2 \cdots U_n | ++ \cdots +) \equiv P_n$ . Yhtälöstä (4.48) saadaan ääriarvopisteen  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n \equiv \alpha_0$  tapauksessa ehto

$$t_{\alpha_0} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{n+1}{n(n-1)}}. \quad (4.61)$$

Todennäköisyys  $P_n$  kirjoitetaan yhtälöiden (4.48) ja (4.59) avulla ääriarvopisteessä muodossa

$$P_n = \alpha^2 c_{\alpha_0}^{2n} + \beta^2 s_{\alpha_0}^{2n} + 2\alpha\beta \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right) c_{\alpha_0}^n s_{\alpha_0}^n. \quad (4.62)$$

Muokataan yhtälön (4.62) termejä käyttämällä trigonometrista apukolmiota, yhtälö (3.58). Yhtälöstä (4.61) saadaan

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \arctan \left[ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{n+1}{n(n-1)}} \right] &\Rightarrow c_{\alpha_0}^{2n} = c^{2n} \left\{ \arctan \left[ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{n+1}{n(n-1)}} \right] \right\} \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}}} \right]^{2n} \\ &= \frac{\beta^{\frac{2(n+1)}{n-1}}}{\left[ \beta^{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} + \alpha^{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} \right]^n} \\ &= \frac{\beta^{2q}}{[\alpha^p + \beta^p]^n}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

kun  $p = \frac{2(n+1)}{n(n-1)}$  ja  $q = \frac{n+1}{n-1}$ . Vastaavasti lasketaan sinitermille  $s_{\alpha_0}^{2n}$  lauseke

$$\begin{aligned}
\alpha_0 = \arctan \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{n+1}{n(n-1)}} \right] &\Rightarrow s_{\alpha_0}^{2n} = s^{2n} \left\{ \arctan \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{n+1}{n(n-1)}} \right] \right\} \\
&= \left[ \frac{\left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{n+1}{n(n-1)}}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}}} \right]^{2n} \\
&= \frac{\left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{2(n+1)}{n-1}} \cdot \beta^{\frac{n(n-1)}{2n(n+1)}}}{\left[ \beta^{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} + \alpha^{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} \right]^n} \\
&= \frac{\alpha^{2q}}{[\alpha^p + \beta^p]^n}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Käyttämällä relaatiota  $np/2 = q$  yhdistelmätermille  $c_{\alpha_0}^n s_{\alpha_0}^n$  saadaan puolestaan

$$\begin{aligned}
c_{\alpha_0}^n s_{\alpha_0}^n &= c^n \left\{ \arctan \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{n+1}{n(n-1)}} \right] \right\} s^n \left\{ \arctan \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{n+1}{n(n-1)}} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} \right]^{n/2}} \cdot \frac{\left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{n(n+1)}{n(n-1)}}}{\left[ 1 + \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} \right]^{n/2}} \\
&= \frac{\beta^q}{(\alpha^p + \beta^p)^{n/2}} \cdot \frac{\beta^q \frac{\alpha^q}{\beta^q}}{(\alpha^p + \beta^p)^{n/2}} \\
&= \frac{\alpha^q \beta^q}{(\alpha^p + \beta^p)^n}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Yhdistämällä yhtälöt (4.63), (4.64) ja (4.65) saadaan todennäköisyydelle  $P_n$  muoto

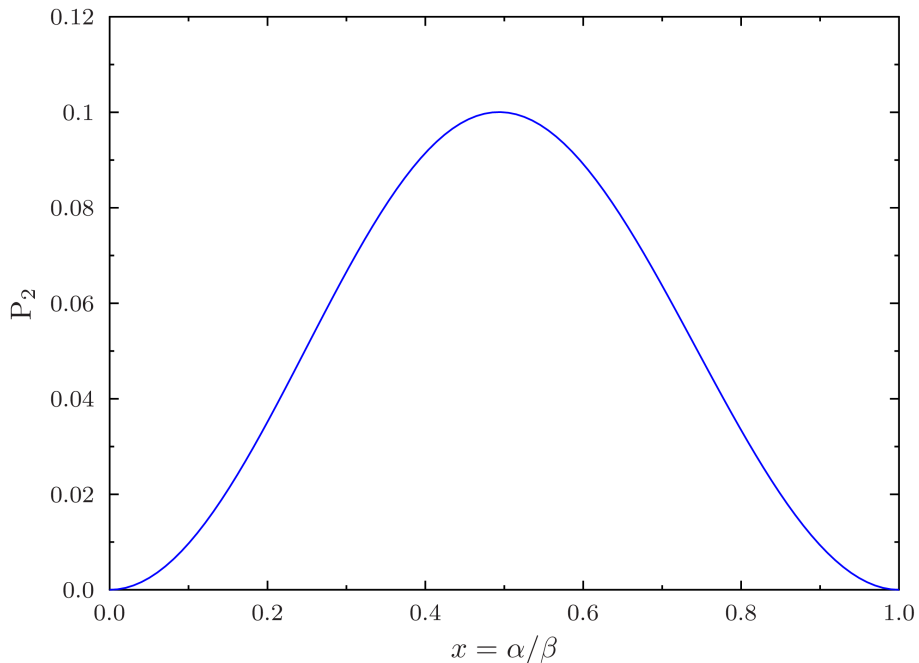
$$P_n = \frac{\alpha^2 \beta^{2q} + \beta^2 \alpha^{2q} + 2\alpha^{q+1} \beta^{q+1} \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right)}{[\alpha^p + \beta^p]^n}. \tag{4.66}$$

Toisaalta  $P_n$  voidaan ilmaista muuttujan  $x = \alpha/\beta$  avulla. Oletetaan  $\alpha \leq \beta$ . Vakioiden  $p$  ja  $q$  relaatioista saadaan  $p = 2q/n$ ,  $q = np/2$  ja  $q + 1 = 2n/(n-1)$ .

Jaetaan yhtälön (4.66) ylä- ja alakerta luvulla  $\beta^{2(q+1)} = \beta^{np+2}$ , jolloin

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{\alpha^2 \beta^{2q} + \beta^2 \alpha^{2q} + 2\alpha^{q+1} \beta^{q+1} \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right)}{[\alpha^p + \beta^p]^n} \\
&= \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2q} + 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{q+1} \left(\frac{\beta}{\beta}\right)^{q+1} \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right)}{\frac{(\alpha^p + \beta^p)^n}{\beta^{np+2}}} \\
&= \frac{x^2 + x^{2q} + 2x^{q+1} \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right)}{\frac{1}{\beta^2} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^p + \left(\frac{\beta}{\beta}\right)^p\right]^n} \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{x^2 + x^{2q} + 2x^{q+1} \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right)}{\left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^p\right]^n} \\
&= \frac{x^2 + x^{2q} + 2x^{2q+1} \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right)}{(1+x^2)(1+x^p)^n}.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

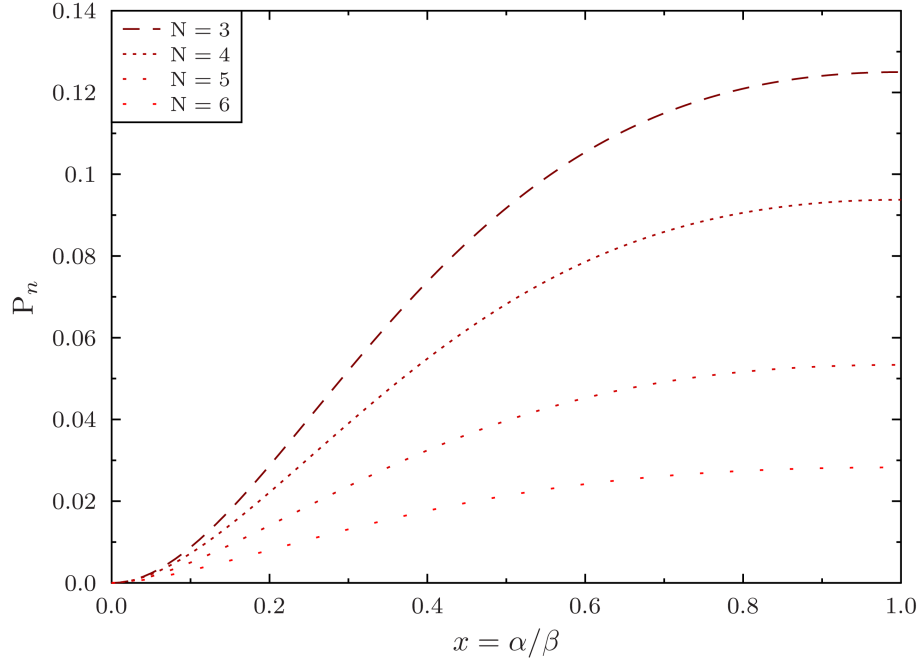
Kohdassa (\*) käytettiin lausekkeen nimittäjässä ehtoa  $1 = \alpha^2 + \beta^2$ . Funktion  $P_n(x)$  kuvaajat tapauksessa  $n = 2$  ja  $n = 3, 4, 5, 6$  ovat kuvissa 4.2 ja 4.3.



**Kuva 4.2:** Todennäköisyys  $P_n(x)$ ,  $n = 2$  [61, s. 436]. Maksimiarvo havaitaan, kun  $x = 0,464$  ja se on noin  $P_2^{\max} \approx 0,09$  [136, s. 1667].

#### 4.3.5 Todennäköisyyden $P(U_1 U_2 \cdots U_n | ++\cdots+)$ maksimi

Tarkastellaan funktion  $P_n$  maksimiarvoa maksimaalisesti lomittuneelle tilalle, kun  $n \geq 3$ . Maksimi saavutetaan, kun  $x = 1$ . Tämä voidaan osoittaa esimerkiksi siten,



**Kuva 4.3:** Todennäköisyys  $P_n(x)$ ,  $n = 3, 4, 5, 6$  [61, s. 436]. Funktio  $P_n(x)$  on aidosti kasvava määrittelyvälillä, kun  $n \geq 3$ .

että annetulle  $n$  funktio  $P_n$  on aidosti kasvava välillä  $(0, 1)$  eli

$$\frac{d}{dx} P_n(x) > 0, \quad \text{kun } x \in (0, 1), \quad (4.68a)$$

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = 0, \quad \text{kun } x = 0 \text{ tai } x = 1. \quad (4.68b)$$

Derivoidaan yhtälön (4.66) viimeisellä rivillä oleva lauseke:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} P_n(x) = & \left\{ \left[ 2x + 2qx^{2q-1} + 2(q+1)x^q \cos(\pi/n-1) \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left[ (1+x^2)(1+x^p)^n \right] - \\ & - \left[ x^2 + x^{2q} + 2x^{q+1} \cos(\pi/n-1) \right] \cdot \\ & \cdot \left[ 2x(1+x^p)^n + (1+x^2) \cdot n(1+x^p)^{n-1} \cdot px^{p-1} \right] \left. \right\} \cdot \\ & \cdot \left[ (1+x^2)(1+x^p)^n \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Yhtälössä (4.69) nimittäjä  $(1+x^2)(1+x^p)^n > 0$  eli riittää tarkastella osoittajaa. Jokaisessa termissä on  $(1+x^p)^{n-1} > 0$ , jätetään tämä positiivinen kerroin pois tarkastelusta ja käytetään relaatiota  $np = 2q$ . Merkitään jäljelle jäävää lauseketta  $\Omega_n(x)$ . Yhtälöiden (4.68a) ja (4.68b) perusteella riittää osoittaa, että  $\Omega_n(x) > 0$

kun  $x \in (0, 1)$  ja että  $\Omega_n(0) = 0 = \Omega_n(1)$  kaikille  $n \geq 3$ . Lauseke  $\Omega_n(x)$  on

$$\begin{aligned} \Omega_n(x) = & \left[ 2x + 2qx^{2q-1} + 2(q+1)x^q \cos(\pi/n-1) \right] \cdot \\ & \cdot \left[ (1+x^2)(1+x^p) \right] - \\ & - \left[ x^2 + x^{2q} + 2x^{q+1} \cos(\pi/n-1) \right] \cdot \\ & \cdot \left[ 2x(1+x^p) + 2qx^{p-1}(1+x^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Kirjoittamalla termien tulot auki havaitaan, että noin puolet termeistä supistuu pois:

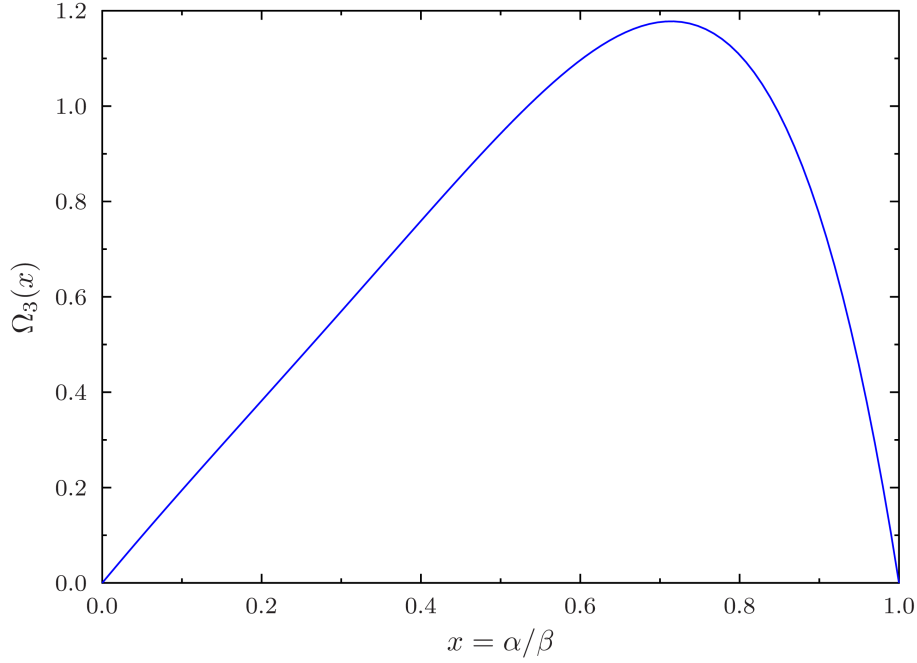
$$\begin{aligned} \Omega_n(x) = & 2[x + x^{p+1} - x^{2q+1} - x^{2q+p+1} + \\ & + q(x^{2q-1} + x^{2q+1} - x^{p+1} - x^{p+3}) + \\ & + \cos[\pi/n-1](x^q + x^{q+p} - x^{q+2} - x^{q+p+2}) + \\ & + q \cos[\pi/n-1](x^q + x^{q+2} - x^{q+p} - x^{q+p+2})]. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Jokaisessa lausekkeen (4.71) termissä on muuttuja  $x$  ja plusmerkillä ja miinusmerkillä varustettuja termejä on yhtä paljon. Täten  $\Omega_n(0) = 0 = \Omega_n(1)$  kaikille  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Riittää osoittaa, että  $\Omega_n(x) > 0$ , kun  $x \in (0, 1)$ .

Katsotaan esimerkkinä tapausta  $n = 3$  (kuva 4.4). Yhtälön (4.71) kaksi alinta riviä nollaantuvat kosinitermin myötä,  $q = 2$  ja  $p = 4/3$  ja koska  $x \in (0, 1)$ , funktioksi  $\Omega_3(x)$  saadaan

$$\begin{aligned} \Omega_3(x) = & 2(x + x^{7/3} - x^5 - x^{19/3}) + 4(x^3 + x^5 - x^{7/3} - x^{13/3}) \\ = & 2(x - x^{7/3}) + 4(x^3 - x^{13/3}) + 2(x^5 - x^{19/3}) \\ > & 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Järjestelemällä funktion  $\Omega_n(x)$  termejä sopivasti saadaan tulos osoitettua myös yleiselle tapaukselle. Kirjoitetaan taulukkoon I yhtälössä (4.71) esiintyvien  $p$ :n ja  $q$ :n yhdistelmien lausekkeitä muuttujan  $n$  suhteen. Ryhmitellään yhtälön (4.71) termit uudelleen ja jätetään kerroin 2 pois lausekkeesta. Epäyhtälöryhmän (4.73a)-(4.73h) vasemmalla puolella ovat positiiviset termit ja oikealla puolella negatiiviset termit. Tapauksessa  $x \in (0, 1)$  pätee  $x^r > x^s$  jos ja vain jos  $r < s$ , missä  $r$  ja  $s$  ovat rationaalilukuja joille  $r, s > 1$ . Jokainen lausekkeessa (4.71) esiintyvä eksponentti



**Kuva 4.4:** Funktion  $\Omega_3(x)$  kuvaaja. Funktio on määrittelyvälillä  $x \in (0, 1)$  positiivinen ja nolla määrittelyvälin päätepisteissä, joten funktio  $P_3(x)$  on aidosti kasvava ja sen maksimiarvo havaitaan, kun  $x = 1$ . Maksimiarvo on 12,5%, yhtälö (4.77).

on suurempi kuin 1.

$$x > x^{\frac{3n+1}{n-1}} \quad (4.73a)$$

$$x^{\frac{n^2+2n+1}{n(n-1)}} > x^{\frac{3n^2+3n+2}{n(n-1)}} \quad (4.73b)$$

$$\frac{n+1}{n-1} x^{\frac{n+3}{n-1}} < \frac{n+1}{n-1} x^{\frac{n^2+2n+1}{n(n-1)}} \quad (4.73c)$$

$$\frac{n+1}{n-1} x^{\frac{3n+1}{n-1}} < \frac{n+1}{n-1} x^{\frac{3n^2-n+2}{n(n-1)}} \quad (4.73d)$$

$$\cos(\pi/n-1) x^{\frac{n+1}{n-1}} > \cos(\pi/n-1) x^{\frac{3n-1}{n-1}} \quad (4.73e)$$

$$\cos(\pi/n-1) x^{\frac{n^2+3n+2}{n(n-1)}} > \cos(\pi/n-1) x^{\frac{3n^2+n+2}{n(n-1)}} \quad (4.73f)$$

$$\frac{n+1}{n-1} \cos(\pi/n-1) x^{\frac{n+1}{n-1}} > \frac{n+1}{n-1} \cos(\pi/n-1) x^{\frac{n^2+3n+2}{n-1}} \quad (4.73g)$$

$$\frac{n+1}{n-1} \cos(\pi/n-1) x^{\frac{3n-1}{n-1}} > \frac{n+1}{n-1} \cos(\pi/n-1) x^{\frac{3n^2+n+2}{n-1}}. \quad (4.73h)$$

Epäyhtälöt (4.73c) ja (4.73d) ovat väärinpäin, muuten väite olisi todistettu. Tarkastellaan epäyhtälöiden (4.73a)-(4.73d) joukkoa. Riittää osoittaa, että yhtälön (4.71) ensimmäisellä rivillä yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella olevien termien summa on nollaa suurempi. Merkitään rivillä olevaa lauseketta  $\chi_n(x)$  ja kirjoitetaan rivi



**Taulukko I:** Termien  $p$  ja  $q$  lausekkeiden arvoja.

Lauseke	Muuttujan $n$ avulla
$p$	$\frac{2(n+1)}{n(n-1)}$
$q$	$\frac{n+1}{n-1}$
$p+1$	$\frac{n^2+n+2}{n(n-1)}$
$p+3$	$\frac{3n^2-n+2}{n(n-1)}$
$q+2$	$\frac{3n-1}{n-1}$
$q+p$	$\frac{n^2+3n+2}{n(n-1)}$
$q+p+2$	$\left(\frac{3n^2+n+2}{n(n-1)}\right)$
$2q-1$	$\frac{n+3}{n-1}$
$2q+1$	$\frac{3n+1}{n-1}$
$2q+p+1$	$\frac{3n^2+3n+2}{n(n-1)}$

muodossa

$$\begin{aligned} \chi_n(x) = & \frac{n-1}{n-1} \left[ x^{\frac{n^2-n}{n(n-1)}} + x^{\frac{n^2+2n+1}{n(n-1)}} - x^{\frac{3n^2+n}{n(n-1)}} - x^{\frac{3n^2+3n+2}{n(n-1)}} \right] + \\ & + \frac{n+1}{n-1} \left[ x^{\frac{n^2+3n}{n(n-1)}} + x^{\frac{3n^2+n}{n(n-1)}} - x^{\frac{n^2+2n+1}{n(n-1)}} - x^{\frac{3n^2-n+2}{n(n-1)}} \right]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Lauseke  $\chi_n(x)$  yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{aligned} \chi_n(x) = & \frac{n}{n-1} \left[ x^{\frac{n^2-n}{n(n-1)}} + x^{\frac{n^2+3n}{n(n-1)}} - x^{\frac{3n^2+3n+2}{n(n-1)}} - x^{\frac{3n^2-n+2}{n(n-1)}} \right] + \\ & + \frac{1}{n-1} \left[ 2x^{\frac{3n^2+n}{n(n-1)}} + x^{\frac{3n^2+3n+2}{n(n-1)}} + x^{\frac{n^2+3n}{n(n-1)}} - 2x^{\frac{n^2+2n+1}{n(n-1)}} - \right. \\ & \left. - x^{\frac{n^2-n}{n(n-1)}} - x^{\frac{3n^2-n+2}{n(n-1)}} \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Nimittäjät  $n-1$  ovat positiivisia ja voidaan jättää tarkastelun ulkopuolelle. Ryhmittelemällä jäljelle jäävät  $2n+4$  termiä allekkain havaitaan, että termien summa on aidosti nolaa suurempi, alla yhtälöt (4.76a)-(4.76h). Yhtälöiden vasemmassa laidassa hakasulkujen sisällä on rivinumero. Vasemmalla puolella yhtäsuuruus- tai epäyhtälömerkkiä ovat lausekkeen (4.75) positiiviset termit ja oikealla puolella negatiiviset.

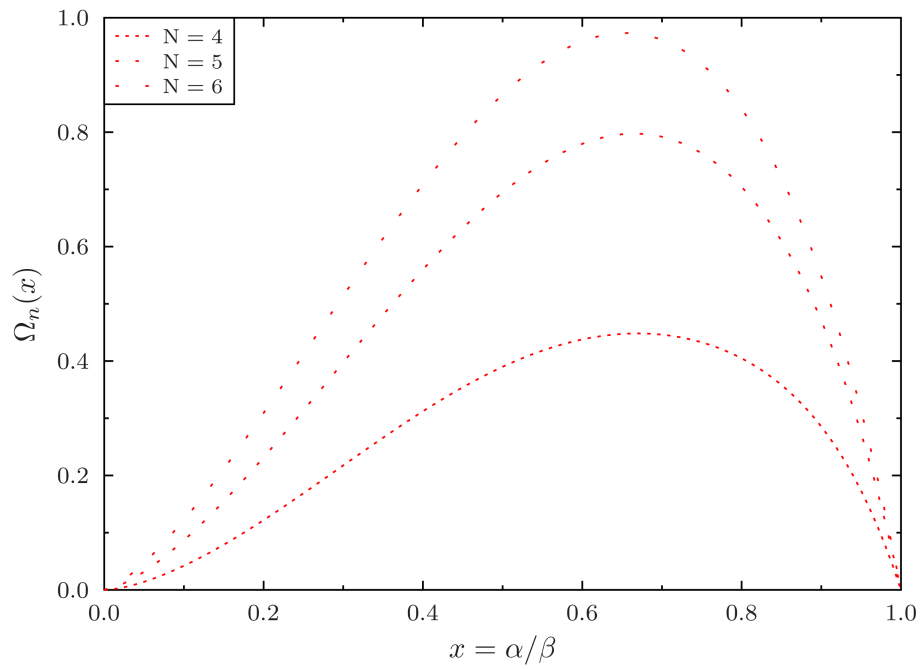
$$\begin{aligned}
[1] \quad & x^{n^2-n} > x^{n^2+2n+1} & (4.76a) \\
[2] \quad & x^{n^2-n} > x^{n^2+2n+1} & (4.76b) \\
[3] \quad & x^{n^2-n} = x^{n^2-n} & (4.76c) \\
[4-n] \quad & (n-3)x^{n^2-n} > (n-3)x^{3n^2+3n+2} & (4.76d) \\
[n+1] \quad & x^{3n^2+3n+2} = x^{3n^2+3n+2} & (4.76e) \\
[n+2] \quad & x^{3n^2+n} > x^{3n^2+3n+2} & (4.76f) \\
[n+3] \quad & x^{3n^2+n} > x^{3n^2+3n+2} & (4.76g) \\
[(n+4)-(2n+4)] \quad & (n+1)x^{n^2+3n} > (n+1)x^{3n^2-n+2}. & (4.76h)
\end{aligned}$$

Täten funktiolle  $\chi_n(x)$  on  $\chi_n(x) > 0$  ja näin ollen myös  $\Omega_n(x) > 0$  kaikille  $x \in (0, 1)$ . Aiemmin osoitettiin, että  $\Omega_n(0) = 0 = \Omega_n(1)$  joten funktio  $P_n(x)$  on aidosti kasvava välillä  $x \in (0, 1)$  ja saavuttaa maksiminsa pisteessä  $x = 1$ . Koska  $P_n(0) = 0$  ja funktio on aidosti kasvava määrittelyvälillä, on  $P_n(x)$  positiivinen kaikille  $n \geq 3$  ja näin ollen yleistetty GHZ-tila (2.95) rikkoo Hardyn epäyhtälöä (4.41). Q. E. D.

Tapauksissa  $n = 4, 5, 6$  on funktio  $\Omega_n(x)$  esitettyinä kuvassa 4.5. Todennäköisyyden maksimiarvon lauseke  $P_n^{\max}(x) = P_n(1)$  on ( $n \geq 3$ )

$$\begin{aligned}
P_n(1) &= \frac{1^2 + 1 + 2 \cdot 1 \cdot \cos(\pi/n-1)}{(1+1) \cdot (1+1)^n} \\
&= \left(\frac{1}{2^n}\right) [1 + \cos(\pi/n-1)].
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Maksimi laskee eksponentiaalisesti hiukkasten lukumäärän  $n$  suhteen. Maksimi saavutetaan, kun  $n = 3$  jolloin  $P_3(1) = 0,125 = 12,5\%$  eli hieman suurempi arvo kuin Hardyn teoreemalle saatu  $\approx 9\%$  (luku 4.2.2).



**Kuva 4.5:** Funktion  $\Omega_n(x)$  kuvaaja, kun  $n = 4, 5, 6$ . Funktio on määrittelyvälillä  $x \in (0, 1)$  positiivinen jokaisella  $n \geq 3$  ja nolla määrittelyvälin päätepisteissä, joten funktion  $P_n(x)$  maksimiarvo havaitaan, kun  $x = 1$ .



## Luku 5

### Johtopäätökset

Tutkielmassa käsiteltiin puhtaiden lomittuneiden kubittien Bell-tyypin epälokaalisuutta yleisellä tasolla. Lisäksi osoitettiin Gisinin teoreema kahdelle kuditille ja  $n$ :lle kubitille yleistetyssä GHZ-tilassa [61].

Bellin teoreema todisti teoreettisesti, ettei luontoa pystytä kvanttitasolla kuvaamaan lokaalirealistisella mallilla. Voidaan sanoa, että realismi ”sisältää” epälokaalisuuden [140, s. 481]. Lokaalin realismin ja kvanttilomittumisen lähtökohdat ovat hyvin erilaiset. Lomittuminen viittaa usean hiukkasen järjestelmään, olivat hiukkaset sitten kaukana toisistaan tai eivät. Lomittuneet tilat rikkovat Bell-tyypin epäyhtälöitä, ja tämä on kvanttilomittumisen mielenkiintoinen, mutta epäsuora seuraus [67, s. 034306-2]. Separoituvuuteen liittyvät epäyhtälöt ovat vahvempia kuin vastaavat lokaalirealistiset epäyhtälöt useamman kuin kahden kubitin tapauksessa [213]. Voimakkaat korrelaatiot eivät kuitenkaan mahdollista signaalien välitystä valoa nopeammin, sillä paikalliset mittaukset toisistaan kaukana oleville järjestelmille eivät voi toimia viestinviejinä.

Yleinen Gisinin teoreema [255, 256] ratkaisee muodossa  $(n, m, d)$  esiintyvien puhtaiden kudittien lomittumisen karakterisoinnin ongelman. Relaatio Bell-tyypin epälokaalisuuden ja lomittumisen välillä on näin täsmällisesti määritelty. Puhtaille tiloille ekvivalenttia Bell-tyypin epälokaalisuuden ja lomittumisen kanssa on myös *Steering*-ilmiö, jossa osajärjestelmän mittaus voi aiheuttaa erilaisen kvanttitalan määräytymisen toisessa osajärjestelmässä [81]. Gisinin teoreemaa ei voida osoittaa kokeellisesti, sillä mittauksia ei pystytä tekemään kaikille mahdollisille tiloille. Teoreeman rooli on enemmänkin se, että mittaaaja voi halutessaan valita minkä tahansa lomittuneen tilan. Lomittumisen voimakkuus riippuu tilan valinnasta, mutta jo pelkästään lomittuminen aiheuttaa sen, että sopivasti muotoiltu Bell-tyypin epäyhtälö ei noudata lokaalin realismin asettamia rajoja.

Gisinin teoreemaa voidaan ajatella sovellettavan preparoidun tilan lomittumisen tarkastamiseen. Teoreemaan pohjautuvaa kokeellista epäyhtälöä voidaan käyttää annetun puhtaan kvanttitalan lomittumisen havaitsemisessa (kyllä/ei), kun kokeellisen tutkimuksen aiheuttamat epätäsmällisyydet huomioidaan. Artikkelissa [135] esitetty koejärjestelyä kahdesta Mach-Zehnder-interferometristä olisi yksi mahdollinen suunnittelun lähtökohta. Toisaalta tehtävään soveltuvat paremmin

lomittumisen kvantitatiiviset mittarit tai sopivasti muotoiltu lomittumisindikaattori. Gisinin teoreeman pohjalta ei onnistu yhden yleisen lomittumisindikaattorin konstruointi, sillä Hardy-tyypin NLWI-argumentit ovat tilan muodosta riippuvia.

Työlle luonteva jatkotutkimuksen aihe olisi Hardyn epäyhtälön (4.41) asettaman ylärajan maksimaalisen ylittymisen määrittäminen annetulle lomittuneelle kvanttitilalle [255, s. 120402-4]. Esimerkiksi Bell-Mermin-operaattorille ja yleistetyille GHZ-tilalle ylärajan ylittymisen määrä on eksponentiaalisesti verrannollinen hiukasten lukumäärään.

## Kirjallisuutta

- [1] Samson Abramsky ja Adam Brandenburger. The Sheaf-Theoretic Structure of Non-Locality and Contextuality. *New Journal of Physics*, 13(11):113036, 2011.
- [2] Samson Abramsky, C. M. Constantin, ja S. Ying. Hardy is (almost) everywhere: nonlocality without inequalities for almost all entangled multipartite states. *eprint arXiv:quant-ph/1506.01365*, 2015.
- [3] Samson Abramsky ja Lucien Hardy. Logical Bell Inequalities. *Physical Review A*, 85(6):062114, 2012.
- [4] Antonio Acín, A. Andrianov, L. Costa, E. Jané, J. I. Latorre, ja R. Tarrach. Generalized Schmidt Decomposition and Classification of Three-Quantum-Bit States. *Physical Review Letters*, 85(7):1560–1563, 2000.
- [5] Antonio Acín, A. Andrianov, E. Jané, ja R. Tarrach. Three-qubit pure-state canonical forms. *Journal of Physics A (Mathematical and General)*, 34(35):6725, 2001.
- [6] Dorit Aharonov. *Noisy Quantum Computation*. Väitöskirja, Hebrew University, 1999.
- [7] Z. W. Albert ja Lev Vaidman. On a Theory of the Collapse of the Wave Function. Ks. Kafatos [161], ss. 1–6.
- [8] James Albertson. Von Neumann’s Hidden-Parameter Proof. *American Journal of Physics*, 29(8):478–484, 1961.
- [9] Markus Ansmann, H. Wang, Radoslaw C. Bialczak, Max Hofheinz, Erik Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, D. Sank, M. Weides, J. Wenner, A. N. Cleland, ja John M. Martinis. Violation of bell’s inequality in Josephson phase qubits. *Nature*, 461(7263):504–506, 2009.
- [10] Mohammad Ardehali. Bell inequalities with a magnitude of violation that grows exponentially with the number of particles. *Physical Review A*, 46(9):5375–5378, 1992.
- [11] George B. Arfken ja Hans-Jurgen Weber. *Essential Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 6. laitos, 2004.
- [12] Alain Aspect. Bell’s inequality test: more ideal than ever. *Nature*, 398(6724):189–190, 1999.
- [13] Alain Aspect, Jean Dalibard, ja Gérard Roger. Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers. *Physical Review Letters*, 49(25):1804–1807, 1982.

- [14] Alain Aspect ja Philippe Grangier. *Experiments on Einstein-Podolsky-Rosen-type correlations with pairs of visible photons*, ss. 1–16. Claredon Press, 1986.
- [15] Alain Aspect, Philippe Grangier, ja Gérard Roger. Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell’s Theorem. *Physical Review Letters*, 47(7):460–463, 1981.
- [16] Alain Aspect, Philippe Grangier, ja Gérard Roger. Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A New Violation of Bell’s Inequalities. *Physical Review Letters*, 49(2):91–94, 1982.
- [17] Gennaro Auletta, Mauro Fortunato, ja Giorgio Parisi. *Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, ensimmäinen laitos, 2009.
- [18] Belal E. Baaquie. *The Theoretical Foundations of Quantum Mechanics*. Springer, ensimmäinen laitos, 2013.
- [19] J. Baggott. *The Meaning of Quantum Theory: a Guide for Students of Chemistry and Physics*. Oxford University Press, 1993. Reprinted edition with corrections.
- [20] L. E. Ballentine. The statistical interpretation of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 42(4):358–381, 1970.
- [21] L. E. Ballentine ja Jon P. Jarrett. Bells theorem: Does quantum mechanics contradict relativity? *American Journal of Physics*, 55(8):696–701, 1987.
- [22] J. Batle ja M. Casas. Nonlocality and entanglement in qubit systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(44):445304, 2011.
- [23] F. J. Belinfante. *A Survey of Hidden-Variable Theories: International Series of Monographs in Natural Philosophy*. Pergamon Press, ensimmäinen laitos, 1973. Reprint (ebook) 2014.
- [24] A. V. Belinskii ja D. N. Klyshko. Interference of light and Bell’s theorem. *Physics-Uspekhi*, 36(8):653–657, 1993.
- [25] John Stewart Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1(3):195–200, 1964.
- [26] John Stewart Bell. On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 38(3):447–452, 1966.
- [27] John Stewart Bell. Introduction to the hidden variable question. Kirjassa D. d’Espagnat, toim., *John S. Bell on the Foundations of Quantum Mechanics*. New York Academic Publishing, 2001. Arkistoitu PDF-versio.
- [28] Bell, John Stewart. Bertlmann’s socks and the nature of reality. *Journal de Physique Colloques*, 42(C2):C2–41–C2–62, 1981.
- [29] Mara Beller ja Arthur Fine. Bohr’s Response to EPR. Kirjassa Jan Faye ja Henry J. Folse, toim., *Niels Bohr and contemporary philosophy*, ss. 3–31. Kluwer, 1994.
- [30] Charles H. Bennett ja Gilles Brassard. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. Kirjassa Steering Committee (I. G. Sarma et al.), toim., *Theoretical Computer Science – TCS*, osa 1, ss. 175–179. IEEE, 1984.
- [31] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Sandu Popescu, Benjamin Schumacher, John A. Smolin, ja William K. Wootters. Purification of noisy entanglement



- and faithful teleportation via noisy channels. *Physical Review Letters*, 76(5):722–725, 1996.
- [32] Charles H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, ja W. K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A*, 54(5):3824–3851, 1996.
- [33] Charles H. Bennett ja Stephen J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Physical Review Letters*, 69(20):2881–2884, 1992.
- [34] Bennett, Charles H. and Brassard, Gilles and Crépeau, Claude and Jozsa, Richard and Peres, Asher and Wootters, William K. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, 70(13):1895–1899, 1993.
- [35] Guy Blaylock. The EPR paradox, Bell's inequality, and the question of locality. *American Journal of Physics*, 78(1):111–120, 2010.
- [36] D. Bohm ja Jeffrey Bub. A Proposed Solution of the Measurement Problem in Quantum Mechanics by a Hidden Variable Theory. *Reviews of Modern Physics*, 38(3):453–469, 1966.
- [37] David Bohm. *Quantum Theory*. Dover, ensimmäinen laitos, 1951. Toinen painos, 1989.
- [38] David Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I. *Physical Review*, 85(2):166–179, 1952.
- [39] David Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II. *Physical Review*, 85(2):180–193, 1952.
- [40] David Bohm ja Yakir Aharonov. Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Physical Review*, 108(4):1070–1076, 1957.
- [41] Niels Bohr. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? *Physical Review*, 48(8):696–702, 1935.
- [42] Niels Bohr. Quantum Mechanics and Physical Reality. *Nature*, 136(65), 1935.
- [43] Max Born. Quantenmechanik der Stossvorgänge. *Zeitschrift für Physik*, 38(11-12):803–827, 1926.
- [44] Max Born. The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. *Nobel Lectures*, 3(1):256–267, 1954.
- [45] Max Born. *The Born-Einstein letters*. Walker, 1971.
- [46] B. H. Bransden ja C. J. Joachain. *Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, toinen laitos, 2000.
- [47] Samuel L. Braunstein ja C. M. Caves. Wringing Out Better Bell Inequalities. *Annals of Physics*, 202(1):22–56, 1990.
- [48] Samuel L. Braunstein ja Carlton M. Caves. Information-Theoretic Bell Inequalities. *Physical Review Letters*, 61(6):662–665, 1988.
- [49] Samuel L. Braunstein, A. Mann, ja M. Revzen. Maximal violation of Bell inequalities for mixed states. *Physical Review Letters*, 68(22):3259–3261, 1992.

- [50] H.R. Brown ja G. Svetlichny. Nonlocality and Gleason’s lemma. Part I. Deterministic theories. *Foundations of Physics*, 20(11):1379–1387, 1990.
- [51] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, ja Stephanie Wehner. Bell nonlocality. *Reviews of Modern Physics*, 86(2):419–478, 2014.
- [52] Nicolas Brunner, Nicolas Gisin, Valerio Scarani, ja Christoph Simon. Detection Loophole in Asymmetric Bell Experiments. *Physical Review Letters*, 98(22):220403, 2007.
- [53] Dagmar Bruß. Entanglement Purification and Distillation. Kirjassa Daniel Greenberger, Klaus Hentschel, ja Friedel Weinert, toim., *Compendium of Quantum Physics*, ss. 202–205. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [54] Jeffrey Bub. Quantum Entanglement and Information. Kirjassa Edward N. Zalta, toim., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2010. Arkistoitu PDF-versio.
- [55] Jeffrey Bub. Von Neumanns No Hidden Variables Proof: A Re-Appraisal. *Foundations of Physics*, 40(9–10):1333–1340, 2010.
- [56] David C. Burnham ja Donald L. Weinberg. Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs. *Physical Review Letters*, 25(2):84–87, 1970.
- [57] Adán Cabello. “All versus Nothing” Inseparability for Two Observers. *Physical Review Letters*, 87:010403, 2001.
- [58] Adán Cabello. Bell’s Theorem without Inequalities and without Probabilities for Two Observers. *Physical Review Letters*, 86(10):1911–1914, 2001.
- [59] V. Capasso, D. Fortunato, ja F. Selleri. Sensitive Observables of Quantum Mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, 7(5):319–326, 1973.
- [60] Daniel Cavalcanti, Mafalda L. Almeida, Valerio Scarani, ja Antonio Acín. Quantum networks reveal quantum nonlocality. *Nature Communications*, 2:184–190, 2011.
- [61] José L. Cereceda. Hardy’s nonlocality for generalized n-particle GHZ states. *Physics Letters A*, 327(5–6):433–437, 2004.
- [62] Jing-Ling Chen, Dong-Ling Deng, ja Ming-Guang Hu. Gisin’s theorem for two  $d$ -dimensional systems based on the Collins-Gisin-Linden-Masser-Popescu inequality. *Physical Review A*, 77(6):060306, 2008.
- [63] Jing-Ling Chen, Chunfeng Wu, L. C. Kwek, ja C. H. Oh. Gisin’s Theorem for Three Qubits. *Physical Review Letters*, 93(14):140407, 2004.
- [64] Zeqian Chen. Greenberger-Horne-Zeilinger theorem cannot be extended to a Bell state. *Physical Review A*, 68(5):052106, 2003.
- [65] Zeqian Chen. Maximal violation of Ardehali’s inequality of n qubits. *eprint arXiv:quant-ph/0407110*, 2004.
- [66] Zeqian Chen. Maximal violation of Mermin’s inequalities. *eprint arXiv:quant-ph/0407029*, 2004.
- [67] Zeqian Chen ja Q. Xu. Characterization of multiqubit pure-state entanglement. *Physical Review A*, 73(3):034306, 2006.
- [68] Sujit K. Choudhary, Sibasish Ghosh, Guruprasad Kar, Samir Kunkri, Ramij

- Rahaman, ja Anirban Roy. Hardy's non-locality and generalized non-local theory. *Quantum Information and Computation*, 10(9):859–871, 2010.
- [69] Sujit K. Choudhary, Sibasish Ghosh, Guruprasad Kar, ja Ramij Rahaman. Analytical proof of Gisin's theorem for three qubits. *Physical Review A*, 81(4):042107, 2010.
- [70] Sujit K. Choudhary, Sibasish Ghosh, Guruprasad Kar, ja Ramij Rahaman. Comment on "Gisin's Theorem for Arbitrary Dimensional Multipartite States". *Physical Review Letters*, 105(21):218901, 2010.
- [71] B. S. Cirel'son. Quantum generalizations of Bell's inequality. *Letters in Mathematical Physics*, 4(2):93–100, 1980.
- [72] John F. Clauser. Experimental distinction between the quantum and classical field-theoretic predictions for the photoelectric effect. *Physical Review D*, 9(4):853–860, 1974.
- [73] John F. Clauser. Experimental Investigation of a Polarization Correlation Anomaly. *Physical Review Letters*, 36(21):1223–1226, 1976.
- [74] John F. Clauser. Early History of Bell's Theorem. Kirjassa Reinhold A. Bertlmann ja Anton Zeilinger, toim., *Quantum (Un)speakables: From Bell to Quantum Information*, chapter 2, s. 62. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [75] John F. Clauser ja Michael A. Horne. Experimental consequences of objective local theories. *Physical Review D*, 10(2):526–535, 1974.
- [76] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, ja Richard A. Holt. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. *Physical Review Letters*, 23(15):880–884, 1969.
- [77] John F. Clauser ja Abner Shimony. Bell's theorem. Experimental tests and implications. *Reports on Progress in Physics*, 41(12):1881–1927, 1978.
- [78] Robert Clifton ja Peter Niemann. Locality, Lorentz invariance, and linear algebra: Hardy's theorem for two entangled spin-s particles. *Physics Letters A*, 166(3–4):177–184, 1992.
- [79] Daniel Collins, Nicolas Gisin, Noah Linden, Serge Massar, ja Sandu Popescu. Bell Inequalities for Arbitrarily High-Dimensional Systems. *Physical Review Letters*, 88(4):040404, 2002.
- [80] Stephen Cook. The P versus NP problem. The Clay Mathematics Institute. <http://www.claymath.org/sites/default/files/pvsnp.pdf>. Sivua luettu 13.11.2017.
- [81] Frederick Denis Vas. Quantum steering, entanglement and Bell nonlocality. Pro gradu, Imperial College London, 2014.
- [82] Bernard d'Espagnat. The Quantum Theory and Reality. *Scientific American*, 241(5):158–181, 1979.
- [83] Bernard d'Espagnat. Nonseparability and the tentative descriptions of reality. *Physics Reports*, 110(4):201–264, 1984.
- [84] David Deutsch, Artur Ekert, Richard Jozsa, Chiara Macchiavello, Sandu Popescu, ja Anna Sanpera. Quantum Privacy Amplification and the Security of Quantum Cryptography over Noisy Channels. *Physical Review Letters*, 77(13):2818–2821, 1996.

- [85] Michael Dickson. Bohr on Bell: A Proposed Reading of Bohr and Its Implications for Bells Theorem1. Kirjassa T. Placek ja J. Butterfield, toim., *Non-locality and Modality*. Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.
- [86] Dennis Dieks. Communication by EPR devices. *Physics Letters A*, 92(6):271–272, 1982.
- [87] Paul A. M. Dirac. The quantum theory of the electron. I. *Proceedings of the Royal Society A*, 117(778):610–624, 1928.
- [88] Paul A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics (International Series of Monographs on Physics)*. Oxford University Press, USA, neljäs laitos, 1930.
- [89] David P. DiVincenzo ja Asher Peres. Quantum code words contradict local realism. *Physical Review A*, 55(6):4089–4092, 1997.
- [90] W. Dür. Multipartite Bound Entangled States that Violate Bell’s Inequality. *Physical Review Letters*, 87(23):230402, 2001.
- [91] Philippe H. Eberhard. Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment. *Physical Review A*, 47(2):R747–R750, 1993.
- [92] Albert Einstein. Quanten-Mechanik und Wirklichkeit. *Dialectica*, 2:320–324, 1948.
- [93] Albert Einstein, Boris Podolsky, ja Nathan Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 47(10):777–780, 1935.
- [94] Einstein, Albert. Physics and reality. *Journal of the Franklin Institute*, 221(3):349–382, 1936.
- [95] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell’s theorem. *Physical Review Letters*, 67(6):661–663, 1991.
- [96] Artur K. Ekert ja Peter L. Knight. Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition. *American Journal of Physics*, 63(5):415–423, 1995.
- [97] Michael Epping. *Bell inequalities and large-scale quantum networks*. Väitöskirja, Heinrich Heine University Düsseldorf, Düsseldorf, Germany, 2016.
- [98] Paul S. Epstein. The Reality Problem in Quantum Mechanics. *American Journal of Physics*, 13(3):127–136, 1945.
- [99] Jan Faye. Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics. Kirjassa Edward N. Zalta, toim., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2008. Arkistoitu PDF-versio.
- [100] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, ja Matthew Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 3: Quantum mechanics*. Addison-Wesley Publishing, 1965.
- [101] Arthur Fine. Hidden Variables, Joint Probability, and the Bell Inequalities. *Physical Review Letters*, 48(5):291–295, 1982.
- [102] Arthur Fine. *The Shaky Game. Einstein realism and the quantum theory*. The University of Chicago Press, Chicago, 1986.
- [103] Arthur Fine. The Einstein-Podolsky-Rosen Argument in Quantum Theory. Kirjassa Edward N. Zalta, toim., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2011. Arkistoitu PDF-versio.

- [104] Stuart J. Freedman ja John F. Clauser. Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. *Physical Review Letters*, 28(14):938–941, 1972.
- [105] Friedman, Avner. *Foundations of Modern Analysis*. Dover, 2. laitos, 1982.
- [106] Marcel Froissart. Constructive generalization of Bell’s inequalities. *Il Nuovo Cimento B (1971–1996)*, 64(2):241–251, 1981.
- [107] Edward S. Fry ja Randall C. Thompson. Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. *Physical Review Letters*, 37(8):465–468, 1976.
- [108] W. H. Furry. Note on the Quantum-Mechanical Theory of Measurement. *Physical Review*, 49(5):393–399, 1936.
- [109] Augusto Garuccio, G. Scalera, ja F. Selleri. On local causality and the quantum-mechanical state vector. *Lettere al Nuovo Cimento (1971–1985)*, 18(1):26–28, 1977.
- [110] Augusto Garuccio ja F. Selleri. Systematic derivation of all the inequalities of Einstein locality. *Foundations of Physics*, 10(3):209–216, 1980.
- [111] Augusto Garuccio ja P. Selleri. On the equivalence of deterministic and probabilistic local theories. *Lettere al Nuovo Cimento (1971–1985)*, 23(15):555–558, 1978.
- [112] Walther Gerlach ja Otto Stern. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld. *Zeitschrift für Physik*, 9(1):349–352, 1922.
- [113] GianCarlo Ghirardi ja Luca Marinatto. Proofs of nonlocality without inequalities revisited. *Physics Letters A*, 372(12):1982–1985, 2008.
- [114] Giancarlo C. Ghirardi, A. Rimini, ja T. Weber. A general argument against superluminal transmission through the quantum mechanical measurement process. *Lettere al Nuovo Cimento (1971–1985)*, 27(10):293–298, 1980.
- [115] R. Ghosh ja L. Mandel. Observation of nonclassical effects in the interference of two photons. *Physical Review Letters*, 59(17):1903–1905, 1987.
- [116] Sibasish Ghosh ja G. Kar. Hardy’s nonlocality for two spin- $s$  particles. *Physics Letters A*, 240(4–5):191–195, 1998.
- [117] Sibasish Ghosh, G. Kar, ja Debasis Sarkar. Hardy’s nonlocality for entangled states of three spin- $1/2$  particles. *Physics Letters A*, 243(5–6):249–255, 1998.
- [118] Nicholas Gisin. Bell’s inequality holds for all non-product states. *Physics Letters A*, 154(5–6):201–202, 1991.
- [119] Nicholas Gisin. Hidden quantum nonlocality revealed by local filters. *Physics Letters A*, 210(3):151–156, 1996.
- [120] Nicholas Gisin ja Asher Peres. Maximal violation of Bell inequality for arbitrarily large spin. *Physics Letters A*, 162(1):15–17, 1992.
- [121] Nicolas Gisin. Bell Inequalities: Many Questions, a Few Answers. Kirjassa Wayne C. Myrvold ja Joy Christian, toim., *Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle*, sarjan *The Western Ontario Series in Philosophy of Science* osa 73, ss. 125–138. Springer Netherlands, 2009.
- [122] Gisin, Nicholas and Bechmann-Pasquinucci, H. Bell inequality, Bell states and maximally entangled states for  $n$  qubits. *Physics Letters A*, 246(1–2):1–6, 1998.

- [123] Marissa Giustina, Alexandra Mech, Sven Ramelow, Bernhard Wittmann, Johannes Kofler, Jorn Beyer, Adriana Lita, Brice Calkins, Thomas Gerrits, Sae Woo Nam, Rupert Ursin, ja Anton Zeilinger. Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption. *Nature*, 497(7448):227–230, 2013.
- [124] Marissa Giustina, Marijn A. M. Versteegh, Sören Wengerowsky, Johannes Handsteiner, Armin Hochrainer, Kevin Phelan, Fabian Steinlechner, Johannes Kofler, Jan-Åke Larsson, Carlos Abellán, Waldimar Amaya, Valerio Pruneri, Morgan W. Mitchell, Jörn Beyer, Thomas Gerrits, Adriana E. Lita, Lynden K. Shalm, Sae Woo Nam, Thomas Scheidl, Rupert Ursin, Bernhard Wittmann, ja Anton Zeilinger. Significant-Loophole-Free Test of Bell’s Theorem with Entangled Photons. *Physical Review Letters*, 115(25):250401, 2015. Luentovideo aiheesta: <https://www.youtube.com/watch?v=tgoWM4Jcl-s>.
- [125] Andrew M. Gleason. Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 6(6):885–893, 1957.
- [126] Apollo Go. Observation of Bell Inequality violation in B mesons. *eprint arXiv/quant-ph/0310192*, 2003.
- [127] Sheldon Goldstein. Nonlocality without Inequalities for Almost All Entangled States for Two Particles. *Physical Review Letters*, 72(13):1951–1951, 1994.
- [128] Eugene I. Gordon. A Review of Acoustooptical Deflection and Modulation Devices. *Applied Optics*, 5(10):1629–1639, 1966.
- [129] Daniel Gottesman. *Stabilizer Codes and Quantum Error Correction*. Väitöskirja, California institute of technology, 1997.
- [130] Daniel Greenberger, Michael A. Horne, ja Anton Zeilinger. Going beyond Bell’s Theorem. Ks. Kafatos [161], ss. 69–72.
- [131] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, Abner Shimony, ja Anton Zeilinger. Bell’s theorem without inequalities. *American Journal of Physics*, 58(12):1131–1143, 1990.
- [132] Robert B. Griffiths. EPR, Bell, and Quantum Locality. *American Journal of Physics*, 79(9):954–965, 2011.
- [133] Lov K. Grover. A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search. Kirjassa Gary L. Miller, toim., *Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ss. 212–219. ACM, 1996.
- [134] Hans Halvorson ja Rob Clifton. Reconsidering Bohr’s Reply to EPR. Kirjassa Jeremy Butterfield ja Tomasz Placek, toim., *Non-Locality and Modality*, ss. 3–18. Kluwer, 2002.
- [135] Lucien Hardy. Quantum Mechanics, Local Realistic Theories, and Lorentz-Invariant Realistic Theories. *Physical Review Letters*, 68(20):2981–2984, 1992.
- [136] Lucien Hardy. Nonlocality for Two Particles without Inequalities for Almost All Entangled States. *Physical Review Letters*, 71(11):1665–1668, 1993.
- [137] Carsten Held. The Kochen-Specker Theorem. Kirjassa Edward N. Zalta, toim., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2014. Arkistoituu PDF-versio.
- [138] B. Hensen, H. Bernien, A. E. Dreau, A. Reiserer, N. Kalb, M. S. Blok,

- J. Ruitenbergh, R. F. L. Vermeulen, R. N. Schouten, C. Abellan, W. Amaya, V. Pruneri, M. W. Mitchell, M. Markham, D. J. Twitchen, D. Elkouss, S. Wehner, T. H. Taminiiau, ja R. Hanson. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, 526(7575):682–686, 2015.
- [139] Grete Hermann. Die Naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik. *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, N.F. 6(2):75–152, 1935.
- [140] Peter Heywood ja Michael L. G. Redhead. Nonlocality and the Kochen-Specker Paradox. *Foundations of Physics*, 13(5):481–499, 1983.
- [141] Hirvensalo, Mika. EPR Paradox and Bell Inequalities. *Bulletin of the EATCS*, 92:115–139, 2007.
- [142] Richard A. Holt ja F. M. Pipkin. Precision measurement of the lifetime of the  $7^3S_1$  state of atomic mercury. *Physical Review A*, 9(2):581–584, 1974.
- [143] Michael A. Horne, Abner Shimony, ja Anton Zeilinger. Two-Particle Interferometry. *Physical Review Letters*, 62(19):2209–2212, 1989.
- [144] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, ja Ryszard Horodecki. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223(1-2):1–8, 1996.
- [145] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, ja Ryszard Horodecki. Inseparable Two Spin- $\frac{1}{2}$  Density Matrices Can Be Distilled to a Singlet Form. *Physical Review Letters*, 78(4):574–577, 1997.
- [146] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, ja Ryszard Horodecki. Mixed-State Entanglement and Distillation: Is there a “Bound” Entanglement in Nature? *Physical Review Letters*, 80(24):5239–5242, 1998.
- [147] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, ja Michał Horodecki. Violating Bell Inequality By Mixed Spin-1/2 States – Necessary And Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 200(5):340–344, 1995.
- [148] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, ja Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):865–942, 2009.
- [149] Horodecki, Paweł. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Physics Letters A*, 232(5):333–339, 1997.
- [150] Philipp Hyllus, Otfried Gühne, Dagmar Bruß, ja Maciej Lewenstein. Relations between entanglement witnesses and Bell inequalities. *Physical Review A*, 72(1):012321, 2005.
- [151] Marek Żukowski ja Časlav Brukner. Bell's Theorem for General  $N$ -Qubit States. *Physical Review Letters*, 88(21):210401, 2002.
- [152] Marek Żukowski, Časlav Brukner, Wiesław Laskowski, ja Marcin Wieśniak. Do All Pure Entangled States Violate Bell's Inequalities for Correlation Functions? *Physical Review Letters*, 88(21):210402, 2002.
- [153] Gregg Jaeger. *Quantum Information*. Springer, 2007.
- [154] Gregg Jaeger. *Entanglement, Information, and the Interpretation of Quantum Mechanics*. Springer, 2009.
- [155] Gregg Jaeger. *Quantum Objects*. Springer, 2014.
- [156] A. Jamiołkowski. Linear transformations which preserve trace and positive

- semidefiniteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):275–278, 1972.
- [157] Max Jammer. *The Philosophy of Quantum Mechanics*. New York, Wiley, 1974.
- [158] Jon P. Jarrett. On the Physical Significance of the Locality Conditions in the Bell Arguments. *Noûs*, 18(4):569–589, 1984. Special Issue on the Foundations of Quantum Mechanics.
- [159] J M Jauch ja Constantin Piron. Can hidden variables be excluded in quantum mechanics? *Helvetica Physica Acta*, 36(CERN-TH-324):827–837, 1963.
- [160] Thomas F. Jordan. Testing Einstein-Podolsky-Rosen assumptions without inequalities with two photons or particles with spin 1/2. *Physical Review A*, 50(1):62–66, 1994.
- [161] Menas Kafatos, toim. *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, sarjan *Fundamental Theories of Physics* osa 37. Springer, 1989.
- [162] Lauri Kahanpää. Suoraviivaista ajattelua: II osa, funktionaalianalyysi, 2006.
- [163] G. Kar. Hardy's nonlocality for mixed states. *Physics Letters A*, 228(3):119–120, 1997.
- [164] G. Kar. Testing Hardy's nonlocality with  $n$  spin-1/2 particles. *Physical Review A*, 56(1):1023–1024, 1997.
- [165] G. Kar. Uniqueness of Hardy's state for fixed choice of observables. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(8):L217, 1997.
- [166] D. N. Klyshko. The Bell and GHZ theorems: a possible three-photon interference experiment and the question of nonlocality. *Physics Letters A*, 172(6):399–403, 1993.
- [167] D. N. Klyshko, A. N. Penin, ja B. F. Polkovnikov. Parametric Luminescence and Light Scattering by Polaritons. *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, 11(1), 1970.
- [168] Carl A. Kocher ja Eugene D. Commins. Polarization Correlation of Photons Emitted in an Atomic Cascade. *Physical Review Letters*, 18(15):575–577, 1967.
- [169] Pieter Kok. Advanced Quantum Mechanics (PHY472). <http://www.pieterkok.staff.shef.ac.uk/docs/PHY472.pdf>. Sivua luettu 9.6.2016.
- [170] Henry Krips. Measurement in Quantum Theory. Kirjassa Edward N. Zalta, toim., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2008. Arkistoitu PDF-versio.
- [171] Samir Kunkri ja Sujit K. Choudhary. Nonlocality without inequality for spin- $s$  systems. *Physical Review A*, 72(2):022348, 2005.
- [172] Paul G. Kwiat. *Nonclassical Effects from Spontaneous Parametric Down-Conversion: Adventures in Quantum Wonderland*. Väitöskirja, University of California at Berkeley, 1993.
- [173] Paul G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum, ja Philippe H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Physical Review A*, 60:R773–R776, 1999.
- [174] Lawrence J. Landau. Experimental Tests of General Quantum Theories. *Letters in Mathematical Physics*, 14(1):33–40, 1987.



- [175] Lawrence J. Landau. On the violation of Bell's inequality in quantum theory. *Physics Letters A*, 120(2):54–56, 1987.
- [176] Wiesław Laskowski, Tomasz Paterek, Marek Żukowski, ja Časlav Brukner. Tight Multipartite Bell's Inequalities Involving Many Measurement Settings. *Physical Review Letters*, 93(20):200401, 2004.
- [177] M. Lewenstein, B. Kraus, J. I. Cirac, ja P. Horodecki. Optimization of entanglement witnesses. *Physical Review A*, 62(5):052310, 2000.
- [178] Ming Li ja Shao-Ming Fei. Gisin's Theorem for Arbitrary Dimensional Multipartite States. *Physical Review Letters*, 104(24):240502, 2010.
- [179] Elena R. Loubenets. Multipartite bell-type inequalities for arbitrary numbers of settings and outcomes per site. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(44):445304, 2008.
- [180] Elena R. Loubenets. On the probabilistic description of a multipartite correlation scenario with arbitrary numbers of settings and outcomes per site. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(44):445303, 2008.
- [181] A. Zeilinger M. A. Horne. A Bell-Type EPR Experiment Using Linear Momenta. Kirjassa P. Lahti ja P. Mittelstaedt, toim., *Symposium on the Foundations of Modern Physics*, ss. 435–439. 1985.
- [182] Lorenzo Maccone. A simple proof of Bell's inequality. *American Journal of Physics*, 81(11):854–859, 2013.
- [183] Marco Genovese. Research on hidden variable theories: A review of recent progresses. *Physics Reports*, 413(6):319–396, 2005.
- [184] Henry Margenau. Quantum-mechanical description. *Physical Review*, 49(3):240–242, 1936.
- [185] L. Masanes. Tight Bell inequality for d-outcome measurements correlations. *eprint arXiv:quant-ph/0210073*, 2002.
- [186] N. David Mermin. Quantum mechanics vs local realism near the classical limit: A Bell inequality for spin  $s$ . *Physical Review D*, 22(2):356–361, 1980.
- [187] N. David Mermin. Bringing home the atomic world: Quantum mysteries for anybody. *American Journal of Physics*, 49(10):940–943, 1981.
- [188] N. David Mermin. Extreme Quantum Entanglement in a Superposition of Macroscopically Distinct States. *Physical Review Letters*, 65(15):1838–1840, 1990.
- [189] N. David Mermin. Quantum mysteries revisited. *American Journal of Physics*, 58(8):731–734, 1990.
- [190] N. David Mermin. Quantum mysteries refined. *American Journal of Physics*, 62(10):880–887, 1994.
- [191] F. Mintert, C. Viviescas, ja A. Buchleitner. Basic Concepts of Entangled States. Kirjassa A. Buchleitner, C. Viviescas, ja M. Tiersch, toim., *Entanglement and Decoherence. Foundations and Modern Trends*, ss. 61–86. Springer Heidelberg, 2009.
- [192] Michael A. Nielsen ja Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, viides laitos, 2010.

- [193] Jian-Wei Pan, Dik Bouwmeester, Matthew Daniell, Harald Weinfurter, ja Anton Zeilinger. Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement. *Nature*, 403(6769), 2000.
- [194] Tomasz Paterek, Wieslaw Laskowski, ja Marek Żukowski. On Series of Multiqubit Bell's Inequalities. *Modern Physics Letters A*, 21(02):111–126, 2006.
- [195] Wolfgang Pauli. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 43(9):601–623, 1927.
- [196] Philip M. Pearle. Hidden-Variable Example Based upon Data Rejection. *Physical Review D*, 2(8):1418–1425, 1970.
- [197] Ian C. Percival. Quantum transfer functions, weak nonlocality and relativity. *Physics Letters A*, 244(6):495–501, 1998.
- [198] Asher Peres. Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 24(4):L175, 1991.
- [199] Asher Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Kluwer Academic Publishers, 1st laitos, 1993.
- [200] Asher Peres. Higher order Schmidt decompositions. *Physics Letters A*, 202(1):16–17, 1995.
- [201] Asher Peres. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 77(8):1413–1415, 1996.
- [202] Asher Peres. All the Bell Inequalities. *eprint arXiv:quant-ph/9807017*, 1999.
- [203] T. E. Phipps ja J. B. Taylor. The Magnetic Moment of the Hydrogen Atom. *Physical Review*, 29(2):309–320, 1927.
- [204] Itamar Pitowsky. Correlation polytopes: Their geometry and complexity. *Mathematical Programming*, 50:395–414, 1991.
- [205] Sandu Popescu. Bell's Inequalities and Density Matrices: Revealing “Hidden” Nonlocality. *Physical Review Letters*, 74(14):2619–2622, 1995.
- [206] Sandu Popescu ja Daniel Rohrlich. Which states violate Bell's inequality maximally? *Physics Letters A*, 169(6):411–414, 1992.
- [207] Rafael Rabelo, Law Yun Zhi, ja Valerio Scarani. Device-Independent Bounds for Hardy's Experiment. *Physical Review Letters*, 109(18):180401, 2012.
- [208] J. G. Rarity ja P. R. Tapster. Experimental Violation of Bell's Inequality Based on Phase and Momentum. *Physical Review Letters*, 64(21):2495–2498, 1990.
- [209] Michael H. A. Reck. *Quantum Interferometry with Multiports: Entangled Photons in Optical Fibers*. Väitöskirja, Leopold-Franzens Universität Innsbruck, 1996.
- [210] M. D. Reid, P. D. Drummond, W. P. Bowen, E. G. Cavalcanti, P. K. Lam, H. A. Bachor, U. L. Andersen, ja G. Leuchs. *Colloquium* : The Einstein-Podolsky-Rosen paradox: From concepts to applications. *Reviews of Modern Physics*, 81(4):1727–1751, 2009.
- [211] Wenjamin Rosenfeld, Daniel Burchardt, Robert Garthoff, Kai Redeker, Norbert Ortengel, Markus Rau, ja Harald Weinfurter. Event-Ready Bell Test Using Entangled Atoms Simultaneously Closing Detection and Locality Loopholes. *Physical Review Letters*, 119(1):010402, 2017.

- [212] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, ja D. J. Wineland. Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection. *Nature*, 409(6822):791–794, 2001.
- [213] S. M. Roy. Multipartite Separability Inequalities Exponentially Stronger than Local Reality Inequalities. *Physical Review Letters*, 94(1):010402, 2005.
- [214] C. Sabín ja G. García-Alcaine. A classification of entanglement in three-qubit systems. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 48(3):435–442, 2008.
- [215] Jun J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. Addison Wesley, ensimmäinen laitos, 1993.
- [216] Valerio Scarani ja Nicolas Gisin. Quantum Communication between  $N$  Partners and Bell's Inequalities. *Physical Review Letters*, 87(11):117901, 2001.
- [217] Valerio Scarani ja Nicolas Gisin. Spectral decomposition of Bell's operators for qubits. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(30):6043, 2001.
- [218] Thomas Scheidl, Rupert Ursin, Johannes Kofler, Sven Ramelow, Xiao-Song Ma, Thomas Herbst, Lothar Ratschbacher, Alessandro Fedrizzi, Nathan K. Langford, Thomas Jennewein, ja Anton Zeilinger. Violation of local realism with freedom of choice. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(46):19708–19713, 2010.
- [219] Erwin Schrödinger. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23(49):807–812,823–828,844–849, 1935.
- [220] Erwin Schrödinger. Discussion of Probability Relations Between Separated Systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31:555–563, 1935.
- [221] Erwin Schrödinger. Probability Relations Between Separated Systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32:446–452, 1936.
- [222] Benjamin Schumacher. Quantum coding. *Physical Review A*, 51(4):2738–2747, 1995.
- [223] Benjamin W. Schumacher. Information and quantum nonseparability. *Physical Review A*, 44(11):7047–7052, 1991.
- [224] Lynden K. Shalm, Evan Meyer-Scott, Bradley G. Christensen, Peter Bierhorst, Michael A. Wayne, Martin J. Stevens, Thomas Gerrits, Scott Glancy, Deny R. Hamel, Michael S. Allman, Kevin J. Coakley, Shellee D. Dyer, Carson Hodge, Adriana E. Lita, Varun B. Verma, Camilla LAMBROCCO, Edward Tortorici, Alan L. Migdall, Yanbao Zhang, Daniel R. Kumor, William H. Farr, Francesco Marsili, Matthew D. Shaw, Jeffrey A. Stern, Carlos Abellán, Waldimar Amaya, Valerio Pruneri, Thomas Jennewein, Morgan W. Mitchell, Paul G. Kwiat, Joshua C. Bienfang, Richard P. Mirin, Emanuel Knill, ja Sae Woo Nam. Strong Loophole-Free Test of Local Realism. *Physical Review Letters*, 115(25):250402, 2015.
- [225] Y. H. Shih ja C. O. Alley. New Type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm

- Experiment Using Pairs of Light Quanta Produced by Optical Parametric Down Conversion. *Physical Review Letters*, 61(26):2921–2924, 1988.
- [226] Abner Shimony. Degree of Entanglement. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 755(1):675–679, 1995.
- [227] Abner Shimony. The logic of EPR. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 26(erikoisnumero):399–410, 2001.
- [228] Abner Shimony. Bell’s Theorem. Kirjassa Edward N. Zalta, toim., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2012. Arkistoitu PDF-versio.
- [229] Peter W. Shor. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. Kirjassa Allan Borodin, toim., *SFCS ’94 Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, ss. 124–134, Washington, DC, USA, 1994. IEEE Computer Society.
- [230] Ernst Specker Simon Kochen. The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. *Indiana University Mathematics Journal*, 17(1):59–87, 1968.
- [231] M. Socolovsky. On Bell’s theorem. *Revista Mexicana de Física*, 48(4):384–390, 2002.
- [232] Henry P. Stapp. Bell’s theorem and world process. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 29(2):270–276, 1975.
- [233] Norbert Straumann. A simple proof of the Kochen-Specker theorem on the problem of hidden variables. *Annalen der Physik*, 19(1-2):121–127, 2010.
- [234] Paul Teller. The Projection Postulate and Bohr’s Interpretation of Quantum Mechanics. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 1980(2):201–223, 1980.
- [235] Barbara M. Terhal. Bell inequalities and the separability criterion. *Physics Letters A*, 271(5–6):319–326, 2000.
- [236] Barbara M. Terhal. Detecting quantum entanglement. *Theoretical Computer Science*, 287(1):313–335, 2002.
- [237] W. Tittel ja G. Weihs. Photonic Entanglement for Fundamental Tests and Quantum Communication. *eprint arXiv:quant-ph/0107156*, 2001.
- [238] Wolfgang Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, ja Nicholas Gisin. Violation of Bell Inequalities by Photons More Than 10 km Apart. *Physical Review Letters*, 81(17):3563–3566, 1998.
- [239] Vlatko Vedral. *Modern Foundations of Quantum Optics*. LCP Publishing, ensimmäinen laitos, 2005.
- [240] Thomas Vidick. Tsirelson’s bound. <https://mycqstate.wordpress.com/2012/10/10/tsirelsons-bound/>. Sivua luettu 13.2.2018.
- [241] John Von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, ensimmäinen laitos, 1955. Englanninkielinen käännös, kääntäjä Robert T. Beyer.
- [242] Zizhu Wang ja Damian Markham. Nonlocality of Symmetric States. *Physical Review Letters*, 108(21):210407, 2012.
- [243] Wang, Z. W. and Guo, G. C. and Huang, Y. F. and Ren, X. F. and Zhang, Y. S. and Zhou, X. F. Experimental demonstration of entanglement distillation under LOCC operations. *eprint arXiv:quant-ph/0511116v1*, 2005.

- [244] Gregor Weihs, Thomas Jennewein, Christoph Simon, Harald Weinfurter, ja Anton Zeilinger. Violation of Bell's Inequality under Strict Einstein Locality Conditions. *Physical Review Letters*, 81(23):5039–5043, 1998.
- [245] Reinhard F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A*, 40(8):4277–4281, 1989.
- [246] Reinhard F. Werner ja Michael M. Wolf. All-multipartite Bell-correlation inequalities for two dichotomic observables per site. *Physical Review A*, 64(3):032112, 2001.
- [247] John A. Wheeler ja W. H. Zurek, toim. *Quantum Theory and Measurement*. Princeton University Press, 1983.
- [248] Michael Whitaker. The EPR Paper and Bohr's Response: A Re-Assessment. *Foundations of Physics*, 34(9):1305–1340, 2004.
- [249] Eugene P. Wigner. The Problem of Measurement. *American Journal of Physics*, 31:6–15, 1963.
- [250] William K. Wootters ja W. H. Zurek. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299(5886):802–803, 1982.
- [251] Written by Einstein, A. *Albert Einstein, Philosopher Scientist*. Harper & Row, New York, ensimmäinen laitos, 1949.
- [252] C. S. Wu ja I. Shakhov. The Angular Correlation of Scattered Annihilation Radiation. *Physical Review*, 77(1):136–136, 1950.
- [253] Xiao-Hua Wu, Hong-Shi Zong, ja Hou-Rong Pang. Hardy's theorem for Greenberger-Horne-Zeilinger states. *Physics Letters A*, 276(56):221–224, 2000.
- [254] Wu, Xiao-hua and Xie, Rui-hua. Hardy's nonlocality theorem for three spin-half particles. *Physics Letters A*, 211(3):129–133, 1996.
- [255] Sixia Yu, Qing Chen, Chengjie Zhang, C. H. Lai, ja C. H. Oh. All Entangled Pure States Violate a Single Bell's Inequality. *Physical Review Letters*, 109(12):120402, 2012.
- [256] Sixia Yu, Qing Chen, Chengjie Zhang, C. H. Lai, ja C. H. Oh. Gisin's theorem via Hardy's inequality. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 8:63–84, 2014. Erikoisnumero: The 6th Asia-Pacific Conference and Workshop in Quantum Information Science 2012 (APCWQIS2012).