

# Klassisia variaatio-ongelmia

Joni Kunelius

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Kevät 2017



**Tiivistelmä:** Joni Kunelius, *Klassisia variaatio-ongelmia* (engl. *Classical problems of calculus of variations*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 37 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2017.

Tämä tutkielma käsittelee variaatiolaskentaa. Variaatiolaskenta on saanut alkunsa matemaattisesta analyysistä 1700-luvun vaihteessa Johann Bernoullin esittämän Brachistochrone-ongelman vaikutuksesta. Tätä matematiikan alaa voidaan pitää yleistyksenä analyysin ongelmaan funktioiden ääriarvopisteiden löytämisestä. Reaaliarvoisten funktioiden sijaan variaatiolaskenta käsittelee funktionaaleja.

Funktionaalit ovat kuvauksia funktioavaruudesta reaaliluvuille. Funktionaaleilla mallinnetaan ongelmaa, johon variaatiolaskennalla etsitään ratkaisu. Variaatiolaskenta keskittyykin funktion, jolla funktionaali saa suurimman tai pienimmän arvonsa, etsimiseen. Yksinkertaisin esimerkki on kahden pisteen,  $P_1$  ja  $P_2$ , välisen lyhimmän etäisyyden ratkaiseminen. Tällöin käsiteltävä funktionaali on pisteitä yhdistävän jatkuvasti differentioituvan käyrän  $P : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  pituus  $\int_0^1 |P'(t)| dt$  ja funktionaalia minimoidaan reunaehdot  $P(0) = P_1$  ja  $P(1) = P_2$  toteuttavien käyrien luokassa. Minimointiongelmiin voidaan liittää myös muunkinlaisia reunaehtoja, esimerkiksi käyrän rajaamaa pinta-alaa voidaan minimoida annetun pituisten käyrien joukossa. Tällaisiin ongelmiin etsitään ratkaisu reunaehtojen toteutuessa käyttäen variaatiolaskennan työkaluja. Niistä yksi tärkeimmistä on Eulerin yhtälö, joka antaa analyysin derivaatan nollakohtaa vastaavan ehdon funktioille, joilla funktionaalien ääriarvo saavutetaan.

Nykyisin variaatiolaskentaa sovelletaan monien eri tieteenalojen, kuten kemian, tietotekniikan, biologian ja taloustieteiden ongelmiin. Sen sijaan alkuperäiset variaatiolaskennan kysymykset ovat yleensä peräisin fysiikasta tai geometrian ongelmista. Näistä esimerkiksi Brachistochrone-ongelmassa tutkitaan kappaleen liukumiseen kuluva aikaa ja pyritään löytämään sen minimi. Toinen esimerkki klassisista ongelmista on isoperimetrinen ongelma, jossa etsitään pinta-alan maksimia, kun alueen rajaavan käyrän pituus on kiinnitetty.

## Sisältö

|   |    |
|---|----|
| Luku 1. Johdanto                                      | 1  |
| Luku 2. Variaatiolaskennan historia                   | 3  |
| Luku 3. Variaatiolaskennan määritelmiä ja tuloksia    | 5  |
| Luku 4. Klassisia variaatio-ongelmia                  | 19 |
| 4.1. Lyhin aika (Brachistochrone)                     | 19 |
| 4.2. Isoperimetrinen ongelma                          | 24 |
| 4.3. Lyhin pisteiden välinen etäisyys pallon pinnalla | 28 |
| Lähteet   | 37 |



## LUKU 1

### Johdanto

Tämän tutkielman tavoitteena on toimia johdatuksena variaatiolaskentaan. Tutkielmassa perehdytään variaatiolaskennan historiaan ja kehitykseen sekä tärkeimpiin määritelmiin ja tuloksiin. Lisäksi esitellään muutamia klassisia variaatiolaskennan ongelmia, tutustutaan niiden taustoihin ja todistuksiin.

Toisessa luvussa tutustutaan variaatiolaskennan historiaan ja kehitykseen. Variaatiolaskennan voidaan sanoa syntyneen vuonna 1696 Johann Bernoullin esittämän Brachistochrone-ongelman seurauksena. Kyseiseen ongelmaan annetut ratkaisut johdivat Eulerin yhtälön syntyyn ja näin ollen loivat pohjan modernille variaatiolaskennalle. Vuosien saatossa monet tunnetut matemaatikot kuten Legendre, Jacobi, Weierstrass, Cauchy ja Lebesgue ovat antaneet osansa variaatiolaskennan kehitykselle. Tämän seurauksena variaatiolaskennasta on kehittynyt hyödyllinen työkalu, jota käytetään laajalti erilaisten ongelmien ratkaisuun esimerkiksi fysiikan, tietotekniikan ja taloustieteen aloilla.

Kolmannessa luvussa tutustutaan variaatiolaskennan keskeisiin määritelmiin ja tuloksiin. Variaatiolaskennassa käsitellään funktioiden sijaan funktionaaleja, jotka ovat kuvauksia funktioavaruudesta reaaliluvuille. Funktionaalien ääriarvot etsitään hyvin samankaltaisilla tavoilla kuin reaaliarvoisten funktioiden ääriarvot. Reaaliarvoisten funktioiden ääriarvokandidaatit löydetään pisteistä, joissa funktion derivaatta on nolla. Olettaen, että funktio on kahdesti derivoituva ja toinen derivaatta poikkeaa nolasta, voidaan selvittää onko kyseessä minimi vai maksimi. Funktionaaleilla ensimmäistä derivaattaa vastaa ensimmäinen variaatio. Etsimällä sen nollakohdat käyttäen Eulerin yhtälöä, voidaan löytää funktiot, jotka ovat ääriarvokandidaatteja tutkittavalle funktionaalille. Sen jälkeen tutkimalla funktionaalin toista variaatiota Eulerin yhtälöllä löydetyillä funktioilla, voidaan pyrkiä selvittämään ääriarvon tyyppi. Tämä tapahtuu esimerkiksi tutkimalla toteutuuko Legendren, Weierstrassin tai Jacobin ehto löydetyillä funktioilla.

Viimeisessä luvussa tutustutaan muutamaaan klassiseen esimerkkiin variaatiolaskennan ongelmista. Käsiteltävät ongelmat ovat Bernoullin esittämä Brachistochrone-ongelma, isoperimetrinen ongelma, joka tunnetaan myös kuningatar Didon ongelmana, ja lyhin etäisyys pallopinnalla. Näistä Brachistochrone-ongelma keskittyy liukuvan kappaleen liukumisajan minimoimiseen, kun taas isoperimetrisessä ongelmasa etsitään suurinta pinta-alaa, kun alueen rajaavan käyrän pituus on kiinnitetty. Käsiteltäviin ongelmiin esitetään ratkaisu käyttäen aikaisemmin osoitettuja variaatiolaskennan tuloksia. Tämän lisäksi kuhunkin ongelmaan esitetään vaihtoehtoinen, yksinkertaisempi ratkaisu hyödyntäen lähinnä analyysin työkaluja.



## LUKU 2

### Variaatiolaskennan historia

1600-luvun loppupuolta voidaan pitää yhtenä matematiikan historian käännekohdistista. Tuona aikana Newton (1642–1716) ja Leibniz (1646–1716) kehittivät differentiaali- ja integraalilaskennan, jota vielä silloin kutsuttiin infinitesimaalilaskennaksi. Heidän kehittämänsä matematiikan teorian avulla pystyttiin esimerkiksi laskemaan tasokuvioiden pinta-aloja, kappaleiden tilavuuksia ja liikeratoja.

Vaikka vasta Newton ja Leibniz loivat pohjan infinitesimaalilaskennalle, jo ennen heidän aikaansa oli esitetty kyseiselle matematiikan alalle tyypillisiä päättelyitä. Yksi ensimmäisistä oli Stevin (1548–1620), joka perusteli kolmion painopisteen sijaintia kolmion sisälle piirrettyjen pienten suunnikkaiden avulla. Myös Kepler (1571–1630) käytti menestyksekkäästi infinitesimaalisia pinta-alan- ja tilavuudenmäärittämis menetelmiä. Hän laski esimerkiksi ympyrän ja ellipsin alat täyttämällä ne pienillä kolmioilla, joiden kantojen pituus lähestyi nollaa. Tällä menetelmällä hän johti muun muassa kuuluisan tuloksensa planeettojen liikkeestä. Samalla tavalla Cavalieri (1598–1647) päätyi ajatukseen muodostaa vastaavuus kahden kuvion tai kappaleen infinitesimaalisten osien välillä. Tämä tulos tunnetaan Cavalierin periaatteena ja sitä käytetään usein kappaleiden tilavuuksien laskemiseen.

Pian infinitesimaalilaskennan synnyn jälkeen sai alkunsa uusi matematiikan haara. Se sai alkunsa Johann Bernoullin (1667–1748) vuonna 1696 esittämästä Brachistochrone-ongelmasta. Variaatiolaskennan perustajina voidaan pitää Johann ja Jacob Bernoullia (1654–1705) sekä Leonhard Euleria (1707–1783). Heistä Euler nimesi tämän matematiikan haaran variaatiolaskennaksi myöhemmin teoksessaan *Elementa Calculi Variationum*. Brachistochrone-ongelman ratkaiseminen johti Eulerin yhtälön syntyyn ja antoi näin alkusysäyksen variaatiolaskennan ongelmien ratkaisemiselle. Variaatiolaskennan teorian voidaan sanoa syntyneen vasta 1744, jolloin Euler julkaisi kuuluisan teoksensa *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*. Tämä teos sisälsi muun muassa Eulerin yhtälön, erilaisia lyhimmän etäisyyden ongelmia ja yleistettyjä versioita Brachistochrone-ongelmasta.

Monet matemaatikot ovat sittemmin jatkaneet Eulerin ja Bernoullien aloittamaa työtä. Heistä esimerkiksi Legendre (1752–1833) keksi keinon, jolla Eulerin yhtälön tuottamat ratkaisut pystyttiin erottamaan minimeiksi ja maksimeiksi. Aikalaiset Newton ja Leibniz antoivat osansa, mutta heidän suurin lahjansa variaatiolaskennalle olivat sen hyödyntämät analyysin työkalut. Seuraavan vuosisadan tärkein variaatiolaskennan edistäjä oli Weierstrass (1815–1897). Hänen suurin saavutuksensa oli variaatiolaskennan perustusten laskeminen tukevalle pohjalle. Tämän lisäksi Weierstrass



muun muassa osoitti välttämättömän ehdon ääriarvojen olemassaololle ja auttoi kehittämään ehdon, jolla pystytään löytämään halutun integraalin minimoiva käyrä. Myöhemmin esimerkiksi Hilbert, Lebesgue ja Clarke ovat jatkaneet Weierstrassin työtä.

Nykyisin variaatiolaskentaa hyödynnetään laajasti ja sillä on useita sovelluksia. Sitä pystytään käyttämään erilaisten ongelmien, jotka käsittelevät muun muassa virtausdynamiikkaa, erilaisten systeemien tasapainotiloja, minimipintoja, elektromagnetismia, ratkaisemiseen. Tästä syystä variaatiolaskennalla on nykyään tärkeä merkitys esimerkiksi fysiikan, tietotekniikan ja taloustieteen aloilla.

## LUKU 3

### Variaatiolaskennan määritelmiä ja tuloksia

**MÄÄRITELMÄ 3.1.** Funktio  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  on  $k$  kertaa jatkuvasti differentioituva eli  $f \in C^k$ , jos funktion kaikki osittaisderivaatat kertalukuun  $k$  saakka ovat jatkuvia.

**MÄÄRITELMÄ 3.2 (Funktionaali).** Olkoon  $y : [x_1, x_2] \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$   $C^1$ -funktio ja  $F : \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  luokan  $C^2$  funktio. Tällöin funktiota

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

sanotaan funktionaaliksi.

Variaatiolaskennan ongelmia mallinnetaan funktionaaleilla. Tutustutaan seuraavaksi muutamiiin esimerkkeihin variaatiolaskennan ongelmista ja niiden ratkaisutapoihin.

**ESIMERKKI 3.3 (Kahden pisteen välinen lyhin etäisyys).** Olkoon  $P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  ja  $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Mikä on pisteiden välinen lyhin etäisyys?

Ratkaisu löydetään minimoimalla funktionaali

$$I(y) = \int_0^1 |y'(t)| dt$$

luokassa  $y \in C^1$ ,

$$y(0) = (x_1, y_1) \text{ ja } y(1) = (x_2, y_2).$$

**ESIMERKKI 3.4 (Ketjukäyrä).** Olkoon  $P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  ja  $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Miten asettuu painovoiman vaikutuksesta päistään pisteistä  $P_1$  ja  $P_2$  kiinni oleva köysi, jonka pituus on  $L$ , missä

$$L \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} ?$$

Ratkaisu saadaan etsimällä funktiota  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , joka minimoi köyden potentiaalienergian

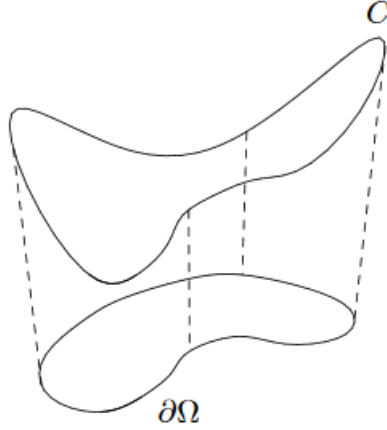
$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} y|y'(x)| dx.$$

Reunaehtoina

$$\int_{x_1}^{x_2} |y'(x)| dx = L, \quad y(x_1) = y_1 \text{ ja } y(x_2) = y_2.$$

ESIMERKKI 3.5 (Minimipinta). Tämä esimerkki mukaillee lähteessä [10] esitettyä. Olkoon  $C \subset \mathbb{R}^3$  itseään leikkaamaton käyrä. Millä pinnalla  $S$  on pienin pinta-ala niistä pinnoista, joiden reunakäyrä on  $C$ ?

Jos käyrä  $C$  on tasokuvion kuten esimerkiksi ympyrän reunakäyrä, niin ratkaisu on kyseinen tasokuvio. Yleisessä tilanteessa ratkaisu ei kuitenkaan ole näin yksinkertainen. Oletetaan, että käyrän  $C$  projektiio  $(x, y)$ -tasolle tuottaa itseään leikkaamatto-



KUVA 1. Suljettu käyrä  $C$  ja sen projektiio.

man suljetun käyrän  $\Gamma = \partial\Omega$ , joka rajaa avoimen joukon  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Nyt käyrä  $C$  voidaan esittää muodossa  $z = g(x, y)$ , missä  $(x, y) \in \Gamma = \partial\Omega$ . Oletetaan myös, että pinta  $S$  voidaan esittää funktion  $z = u(x, y) \in C^1$ , missä  $(x, y) \in \Omega$ , graafina. Tällöin pinnan pinta-ala saadaan funktionaalista

$$I(u) = \int \int_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Minimipinnan löytämiseksi etsitään funktiota  $z = u(x, y)$ , joka minimoi funktionaalinaalin  $I$ . Lisäksi funktion on toteutettava ehto  $u(x, y) = g(x, y)$  kaikille  $(x, y) \in \partial\Omega$ . Tällaisia pinta-alaan liittyviä ongelmia kutsutaan Plateaun ongelmiksi.

Variaatiolaskennan ongelmissa tutkittaville funktioille  $y$  asetetaan usein ehtoja, kuten esimerkiksi  $y(x_1) = y_1$  ja  $y(x_2) = y_2$ , missä  $y_1$  ja  $y_2$  ovat annettuja vakioita. Ongelmiin voidaan myös liittää muita ehtoja. Tästä toimii esimerkkinä seuraava. Etsi funktio  $y_0$ , joka minimoi funktionaalinaalin

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

ja toteuttaa reunaehdot

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad \text{ja} \quad J(y) = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') dx = k,$$

missä  $J(y)$  on toinen funktionaali ja  $k \in \mathbb{R}$  vakio. Tällaisia ongelmia, joissa esiintyy ehtoja toisten funktionaalien arvoille, kutsutaan isoperimetrisiksi. Esitetään seuraavaksi tulos näiden ongelmien käsittelemistä varten.

LAUSE 3.6. *Olkoon*

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') \, dx.$$

*Minimoidaan funktionaalia seuraavat ehdot toteuttavien käyrien luokassa*

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad \text{ja} \quad J(y) = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') \, dx = k,$$

*missä  $J(y)$  on toinen funktionaali ja  $k \in \mathbb{R}$  vakio. Oletetaan lisäksi, että funktio  $y_0$  minimoi funktionaalin  $I$ . Jos tällöin funktio  $y_0$  ei minimoi funktionaalia  $J$ , niin on olemassa vakio  $\lambda \in \mathbb{R}$  siten, että funktio  $y_0$  minimoi funktionaalin*

$$\int_{x_1}^{x_2} (F + \lambda G) \, dx.$$

TODISTUS. Lausetta ei todisteta. Todistukseen voi tutustua lähteen [4] sivuilla 43-46.  $\square$

Analyysissä reaaliarvoisten funktioiden ääriarvot löydetään derivaatan avulla. Ääriarvokandidaatit saadaan etsimällä pisteet, joissa funktion gradientti  $\nabla f$  on nolla. Olettaen, että funktio on kahdesti derivoituva, nämä ääriarvokandidaatit voidaan yrittää luokitella minimeiksi, maksimeiksi tai satulapisteiksi hyödyntäen funktion toisen kertaluvun osittaisderivaattoja. Joissain tapauksissa luokitteluun tarvitaan myös korkeamman kertaluvun derivaattoja. Funktionaalin ääriarvojen löytämiseksi on hyödyllistä kehittää vastineet näille ehdoille.

Tarkastellaan seuraavaksi yleistä funktionaalia  $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') \, dx$  reunaehdoilla  $y(x_1) = y_1$  ja  $y(x_2) = y_2$ . Pyritään kehittämään sille reaaliarvoisen funktion gradientin vastine. Olkoon funktio  $v : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $v \in C^2$ ,  $v(x_1) = 0$  ja  $v(x_2) = 0$ . Tällöin  $y(x_1) + \lambda v(x_1) = y_1$  ja  $y(x_2) + \lambda v(x_2) = y_2$ , missä  $\lambda \geq 0$ . Käytetään hyväksi funktionaalin  $I(y + \lambda v)$  suuntaisderivaattoja funktionaalin  $I(y)$  gradientin määrittämisessä seuraavasti

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} I(y + \lambda v) &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v') \, dx \right] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\lambda} F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v') \, dx. \end{aligned}$$

Koska  $F \in C^2$ , niin edellä tehty integroinnin ja derivoinnin järjestyksen vaihto on Leibnizin integraalisäännön perusteella sallittua. Nyt voidaan käyttää ketjusääntöä ja sijoittaa  $\lambda = 0$ , jolloin

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} I(y + \lambda v)|_{\lambda=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ v \frac{\partial F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + v' \frac{\partial F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')}{\partial y'} \right] \Big|_{\lambda=0} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ v \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, y') + v' \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') \right] dx. \end{aligned}$$

Integroidaan  $v'$ -termi osittain

$$\int_{x_1}^{x_2} v' \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} v \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') - \int_{x_1}^{x_2} v \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') \right) dx}_{=0}.$$

Tällöin saadaan

$$\frac{d}{d\lambda} I(y) = \int_{x_1}^{x_2} v \left[ \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, y') - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') \right) \right] dx.$$

Koska funktio  $v$  on mielivaltainen, niin yhtäsuuruuden on pädeävä kaikille  $v$ . Siten

$$I'(y) = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, y') - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') \right).$$

Kutsutaan tätä funktionaalin ensimmäiseksi variaatioksi.

**MÄÄRITELMÄ 3.7** (Ensimmäinen variaatio). Olkoon  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  luokan  $C^2$  funktio, joka toteuttaa ehdot  $y(x_1) = y_1 \in \mathbb{R}^n$  ja  $y(x_2) = y_2 \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin funktionaalin  $I(y)$  ensimmäinen variaatio on

$$I'(y) = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, y') - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') \right),$$

missä  $F(x, y, y') \in C^2$ .

Näin määriteltynä ensimmäinen variaatio vastaa reaaliarvoisten funktioiden gradienttia. Osoitetaan seuraavaksi lemma, jota tarvitaan tuloksen funktionaalin ääriarvojen löytämiseksi.

**LEMMA 3.8.** Olkoon funktio  $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva. Jos

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)h(x) dx = 0$$

kaikille jatkuville funktioille  $h : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , joille  $h(x_1) = h(x_2) = 0$ , niin  $f$  on identtisesti nolla välillä  $[x_1, x_2]$ .

**TODISTUS.** Oletetaan, että funktio  $f$  ei ole identtisesti nolla. Tällöin on piste  $x_0 \in [x_1, x_2]$  siten, että  $f(x_0) \neq 0$ . Oletetaan lisäksi, että  $f(x_0) > 0$ . Koska funktio  $f$  on jatkuva, niin on olemassa pisteen  $x_0$  ympäristö  $[a, b] \subset [x_1, x_2]$  siten, että  $f(x) > c > 0$  kaikilla  $x \in [a, b]$ . Olkoon funktio  $h : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(x) = \begin{cases} -(x-a)(x-b), & \text{jos } x \in [a, b] \\ 0, & \text{jos } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Funktio  $h$  on jatkuva ja aidosti positiivinen välillä  $]a, b[$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x)h(x) dx &= \int_{x_1}^a f(x)h(x) dx + \int_a^b f(x)h(x) dx + \int_b^{x_2} f(x)h(x) dx \\ &> c \int_a^b h(x) dx \\ &> 0, \end{aligned}$$

mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Ei siis voi olla pistettä  $x_0 \in [x_1, x_2]$  siten, että  $f(x_0) > 0$ . Tapaus  $f(x_0) < 0$  osoitetaan vastaavasti. Siten funktio  $f$  on identtisesti nolla välillä  $[x_1, x_2]$ .  $\square$

Osoitetaan seuraavaksi tulos, jonka mukaan funktionaalien ääriarvokandidaatit löydetään funktionaalien gradientin nollakohdista.

LAUSE 3.9 (Eulerin yhtälö). *Olkkoon funktio  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y \in C^2$ ,  $y(x_1) = y_1$  ja  $y(x_2) = y_2$ . Jos funktionaali*

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

*saa suurimman tai pienimmän arvonsa funktiolla  $y$ , niin funktio  $y$  toteuttaa ehdon*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

*kaikilla  $x_1 \leq x \leq x_2$ .*

TODISTUS. Oletetaan, että funktio  $y$  on kahdesti differentioituva välillä  $[x_1, x_2]$ , toteuttaa ehdot  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y_2$  ja minimoi funktionaalien  $I$ . Määritellään funktiolle  $y$  joukko vertailufunktioita  $Y(x)$  välillä  $[x_1, x_2]$  seuraavasti

$$Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x),$$

missä funktio  $\eta \in C^1$ ,  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  ja  $\epsilon \geq 0$ . Tällöin funktio  $y(x)$  kuuluu joukkoon  $\{Y(x)\}$  mielivaltaiselle  $\eta(x)$ , kun  $\epsilon = 0$ . Korvaamalla funktionaalissa  $I$  esiintyvät  $y$  ja  $y'$  vastaavilla  $Y$  ja  $Y'$ , saadaan

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y') dx.$$

Näillä valinnoilla  $\epsilon$  ja  $\lambda$  sekä  $\eta$  ja  $v$  vastaavat toisiaan, jolloin ensimmäisen variaation johtamisen perusteella päästään tulokseen

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx.$$

Koska funktio  $y$  minimoi funktionaalien  $I$  ja  $I(y) = I(\epsilon)$ , kun  $\epsilon = 0$ , niin  $I'(0) = 0$ . Tämä tarkoittaa, että

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0.$$

kaikilla funktioilla  $\eta$ , jotka toteuttavat reunaehdot  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Tällöin Lemman 3.8 nojalla integroitava on nolla eli

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

$\square$

Todistetaan seuraavaksi vaihtoehtoinen muotoilu Eulerin yhtälöstä. Tätä tullaan hyödyntämään myöhemmin kappaleessa 4.1 Brachistochrone-ongelman yhteydessä.

LEMMA 3.10 (Eulerin yhtälö - vaihtoehtoinen muoto). Olkoon funktio  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y \in C^2$ ,  $y(x_1) = y_1$  ja  $y(x_2) = y_2$ . Jos integraali

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') \, dx$$

saa suurimman tai pienimmän arvonsa funktiolla  $y$ , niin funktio  $y(x)$  toteuttaa ehdon

$$\frac{d}{dx} \left[ F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

kaikilla  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

TODISTUS. Derivoidaan yhdistettyä funktiota  $F(x, y, y')$  muuttujan  $x$  suhteen

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'}. \end{aligned} \quad (1)$$

Derivoidaan  $y' \frac{\partial F}{\partial y'}$  muuttujan  $x$  suhteen

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{\partial F}{\partial y'} y''. \quad (2)$$

Vähentämällä yhtälö (2) yhtälöstä (1) saadaan

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right).$$

Tämä voidaan sieventää muotoon

$$\frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = y' \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right].$$

Eulerin yhtälön toteutuessa yhtälön oikea puoli on nolla. Täten Eulerin yhtälölle saadaan vaihtoehtoinen muoto

$$\frac{d}{dx} \left[ F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

□

Kuten gradientin nollakohta, ei Eulerin yhtälön toteutuminenkaan välttämättä takaa ääriarvoa tai sen olemassaoloa. Tämä huomataan seuraavasta esimerkistä.

ESIMERKKI 3.11. Tämä esimerkki mukailee lähteessä [7] esitettyä. Olkoon funktionaali

$$I(y) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} y^2 - (y')^2 \, dx.$$

Vaaditaan, että funktio  $y$  toteuttaa ehdot  $y(0) = 0$  ja  $y(\frac{3\pi}{2}) = -1$ . Etsitään nyt funktionaalin  $I$  ääriarvot luokassa  $C^2$ . Eulerin yhtälöksi saadaan

$$y'' + y = 0,$$

joka on lineaarinen toisen kertaluvun vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö. Tämä yhtälö voidaan ratkaista sen karakterisesta yhtälöstä  $r^2 + 1 = 0$ . Karakterisen yhtälön

juuret ovat imaginaarisia,  $r_1 = i, r_2 = -i$ . Juurten ollessa imaginaarisia yleinen ratkaisu tähän differentiaaliyhtälöön on

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

missä  $r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\beta$ . Nyt  $\alpha = 0, \beta = 1$  ja siten yhtälön yleinen ratkaisu on muotoa

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Funktiolle  $y$  asetettujen ehtojen perusteella ratkaisuksi saadaan  $y(x) = \sin x$ . Selvitetään seuraavaksi, onko kyseessä minimi, maksimi vai satulapiste. Tämä tehdään tarkastelemalla mitä tapahtuu funktion  $y$  ympäristössä.

Olkoon  $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti derivoituva funktio, jolle  $z(0) = 0$  ja  $z(\frac{3\pi}{2}) = -1$ . Tällöin funktio  $h(x) = z(x) - \sin x$  on jatkuvasti derivoituva,  $h(0) = 0$  ja  $h(\frac{3\pi}{2}) = 0$ . Siten jokainen funktio  $z$  voidaan esittää muodossa  $\sin x + h(x)$  jollakin funktiolla  $h$ . Tarkastellaan seuraavaksi funktionaalia  $I(z) = I(\sin x + h(x))$ ,

$$\begin{aligned} I(\sin x + h(x)) &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} [\sin x + h(x)]^2 - [\cos x + h'(x)]^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x - \cos^2 x dx + 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} h(x) \sin x - h'(x) \cos x dx \\ &\quad + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} h(x)^2 - [h'(x)]^2 dx \\ &= I(\sin x) + 2 \underbrace{\int_0^{\frac{3\pi}{2}} -h(x) \cos x}_{=0} + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} h(x)^2 - [h'(x)]^2 dx \\ &= \underbrace{I(\sin x)}_{=0} + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} h(x)^2 - [h'(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Nähdään, että tulos riippuu termin  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} h(x)^2 - [h'(x)]^2 dx$  merkistä. Tarkastellaan tätä termiä funktioilla  $h_1(x) = \sin 2x$  ja  $h_2(x) = x(\frac{3\pi}{2} - x)$ , joille  $h_1(0) = h_2(0) = h_1(\frac{3\pi}{2}) = h_2(\frac{3\pi}{2}) = 0$ . Nyt

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} h_1(x)^2 - [h_1'(x)]^2 dx &= -\frac{9\pi}{4} < 0, \\ \int_0^{\frac{3\pi}{2}} h_2(x)^2 - [h_2'(x)]^2 dx &= \frac{9}{320} \pi^3 (9\pi^2 - 40) \approx 42,58 > 0. \end{aligned}$$

Olkoon  $\epsilon > 0$ . Tällöin

$$\begin{aligned} I(\sin x + \epsilon h_1) &= I(\sin x) + \epsilon^2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} h_1(x)^2 - [h_1'(x)]^2 dx < I(\sin x), \\ I(\sin x + \epsilon h_2) &= I(\sin x) + \epsilon^2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} h_2(x)^2 - [h_2'(x)]^2 dx > I(\sin x) \end{aligned}$$

kaikilla  $\epsilon > 0$ . Siten funktio  $y = \sin x$  ei ole minimi tai maksimi.



Kuten esimerkistä 3.11 huomattiin, Eulerin yhtälö yksinään ei takaa ääriarvojen olemassaoloa. Osoitetaan funktionaaleille seuraavaksi ehtoja, jotka takaavat toteutessaan Eulerin yhtälön tuottaman ääriarvokandidaatin olevan etsitty ääriarvo.

Tarkastellaan seuraavaksi yleistä funktionaalia  $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$  reunaehdoilla  $y(x_1) = y_1$  ja  $y(x_2) = y_2$ . Pyritään seuraavaksi kehittämään sille reaaliarvoisen funktion toisen derivaatan vastine. Olkoon funktio  $v : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $v \in C^2$ ,  $v(x_1) = 0$  ja  $v(x_2) = 0$ . Funktionaalin  $I(y)$  toinen derivaatta saadaan sen ensimmäisestä derivaatasta seuraavasti

$$Q(y, v) = \frac{d^2}{d\lambda^2} I(y + \lambda v)|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} I'(y + \lambda v)|_{\lambda=0},$$

missä  $\lambda \geq 0$ . Koska

$$\frac{d}{d\lambda} I(y + \lambda v) = \int_{x_2}^{x_1} \left[ v \frac{\partial [F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')]}{\partial y} + v' \frac{\partial [F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')]}{\partial y'} \right] dx,$$

niin

$$Q(y, v) = \int_{x_2}^{x_1} \frac{d}{d\lambda} \left[ v \frac{\partial [F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')]}{\partial y} + v' \frac{\partial [F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')]}{\partial y'} \right] \Big|_{\lambda=0} dx.$$

Koska  $F \in C^2$ , niin edellä tehdyt integroinnin ja derivoinnin järjestyksen vaihdot ovat Leibnizin integraalisäännön perusteella mahdollisia. Käytetään nyt ketjusääntöä kumpaankin termiin

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left( v \frac{\partial [F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')]}{\partial y} \right) &= \\ v^2 \frac{\partial^2 [F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')]}{\partial y^2} + v v' \frac{\partial^2 [F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')]}{\partial y \partial y'}, \\ \frac{d}{d\lambda} \left( v' \frac{\partial [F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')]}{\partial y'} \right) &= \\ v v' \frac{\partial^2 [F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')]}{\partial y \partial y'} + v'^2 \frac{\partial^2 [F(x, y + \lambda v, y' + \lambda v')]}{\partial y'^2}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla  $\lambda = 0$  ja edellä lasketut derivaatat takaisin  $Q(y, v)$  yhtälöön, saadaan

$$Q(y, v) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, y') + 2v v' \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} F(x, y, y') + v'^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} F(x, y, y') \right] dx.$$

Kutsutaan tätä funktionaalin toiseksi variaatioksi.

**MÄÄRITELMÄ 3.12** (Toinen variaatio). Olkoon  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  luokan  $C^2$  funktio, joka toteuttaa ehdot  $y(x_1) = y_1$  ja  $y(x_2) = y_2$  ja  $F(x, y, y') \in C^2$ . Olkoon  $v \in C^2$ , jolle  $v(x_1) = 0$  ja  $v(x_2) = 0$ . Tällöin funktionaalin  $I$  toinen variaatio  $Q(y, v)$  suuntaan  $v$  on

$$Q(y, v) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, y') + 2v v' \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} F(x, y, y') + v'^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} F(x, y, y') \right] dx.$$

Toinen variaatio on reaaliarvoisten funktioiden toisen kertaluvun derivaatan vastine funktionaaleille. Sen avulla ensimmäistä variaatiota tutkimalla löydettyt ääriarvokandidaatit voidaan tietyissä tapauksissa luokitella minimeiksi, maksimeiksi tai satulapisteiksi.

LAUSE 3.13. *Olkoon  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  luokan  $C^2$  funktio, joka toteuttaa ehdot  $y(x_1) = y_1$  ja  $y(x_2) = y_2$  ja  $F(x, y, y') \in C^2$ . Olkoon funktio  $v : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n, v \in C^2, v(x_1) = 0$  ja  $v(x_2) = 0$ . Oletetaan lisäksi, että funktio  $y$  toteuttaa Eulerin ehdon. Tällöin funktio  $y$  on funktionaalin  $I(y)$  lokaali minimi, jos*

$$v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, y') + 2vv' \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} F(x, y, y') + v'^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} F(x, y, y') > 0$$

kaikille nollasta poikkeaville funktioille  $v$ .

TODISTUS. Funktio  $y$  on funktionaalin  $I(y)$  lokaali minimi, jos  $Q(y, v) > 0$  kaikille nollasta poikkeaville funktioille  $v$ . Määritelmän 3.12 mukaan

$$Q(y, v) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, y') + 2vv' \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} F(x, y, y') + v'^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} F(x, y, y') \right] dx.$$

Nyt jos

$$v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, y') + 2vv' \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} F(x, y, y') + v'^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} F(x, y, y') > 0,$$

niin myös  $Q(y, v) > 0$ . Koska  $v$  oli mielivaltainen, vaaditaan, että ehto pätee kaikille nollasta poikkeaville funktioille  $v$ .  $\square$

Toisen variaation lauseketta on suhteellisen hankala käsitellä. Tästä syystä ilmaistaan lauseke toisin

$$\begin{aligned} Q(y, v) &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, y') + 2vv' \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} F(x, y, y') + v'^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} F(x, y, y') \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, y') + v'^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} F(x, y, y') \right] dx + \\ &\quad \int_{x_1}^{x_2} v^2 \frac{\partial^2}{\partial y y'} F(x, y, y') - \int_{x_1}^{x_2} v^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2}{\partial y y'} F(x, y, y') \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ v'^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} F(x, y, y') + v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, y') - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2}{\partial y y'} F(x, y, y') \right) \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Kiinnitetään funktio  $y$  ja valitaan funktioiksi  $R = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} F(x, y, y')$  ja  $S = \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, y') - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2}{\partial y y'} F(x, y, y') \right)$ . Näillä valinnoilla toinen variaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$J(v) = \int_{x_1}^{x_2} (Rv'^2 + Sv^2) dx.$$

Nyt ehdon  $Q(y, v) > 0$  sijaan voidaan tutkia, millä ehdoilla  $J(v) > 0$ .

LEMMA 3.14. Olkoot  $R$  ja  $S$  jatkuvia funktioita ja oletetaan, että

$$J(v) = \int_{x_1}^{x_2} (Rv'^2 + Sv^2) dx \geq 0$$

kaikilla  $C^1$ -funktioilla  $v$ , joille  $v(x_1) = v(x_2) = 0$ . Tällöin  $R(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$ .

TODISTUS. Riittää näyttää, että jos  $R(x_0) < 0$  jollekin  $x_0 \in [x_1, x_2]$ , niin  $J(v) \leq 0$ . Olkoon väli  $[a, b] \subset [x_1, x_2]$  siten, että  $x_0 \in [a, b]$  ja  $R(x) \leq -\delta < 0$  kaikilla  $x \in [a, b]$ . Valitaan funktioksi  $v$

$$v(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi(x-a)}{b-a} & \text{kaikilla } x \in [a, b] \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Nyt

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (Rv'^2 + Sv^2) dx &= \int_a^b R \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \sin^2 \frac{2\pi(x-a)}{b-a} dx \\ &\quad + \int_a^b S \sin^4 \frac{\pi(x-a)}{b-a} dx \\ &< -\frac{\delta\pi^2}{2(b-a)} + M(b-a), \end{aligned}$$

missä  $M = \max_{x_1 \leq x \leq x_2} |S(x)|$ . Riittävän pienelle  $(b-a)$  epäyhtälön oikea puoli on negatiivinen ja siten myös  $J(v) < 0$ , mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Siten  $R(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$ .  $\square$

Esitellään seuraavaksi välttämätön ehto, jonka funktionaalin minimoivan funktion  $y$  tulee toteuttaa. Kuten Eulerin yhtälö ei tämäkään ehto itsessään ole riittävä osoittamaan, että sen toteuttava funktio on etsitty minimi. Ehdon avulla voidaan kuitenkin rajata Eulerin yhtälöllä löydettyjä funktoita tarkastelun ulkopuolelle.

LAUSE 3.15 (Legendren ehto). *Olkoon  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  luokan  $C^2$  funktio, jolle  $y(x_1) = y_1$  ja  $y(x_2) = y_2$ , ja  $F(x, y, y') \in C^2$ . Jos funktio  $y$  on funktionaalin  $I(y)$  lokaali minimi, niin*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$$

kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$ .

TODISTUS. Ollakseen minimi funktion  $y$  on toteutettava ehto  $Q(y, v) \geq 0$  kaikille nollasta poikkeaville funktioille  $v$ . Kiinnitetylle funktiolle  $y$  toinen variaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$J(v) = \int_{x_1}^{x_2} (Rv'^2 + Sv^2) dx,$$

missä  $R = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} F(x, y, y')$  ja  $S = \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, y') - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2}{\partial y y'} F(x, y, y') \right)$ . Jos  $Q(y, v) \geq 0$ , niin  $J(v) \geq 0$  ja Lemmasta 3.14 seuraa, että

$$R = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$$

kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$ . Siten epäyhtälö pätee aina, kun funktio  $y$  on funktionaalien  $I(y)$  minimoija.  $\square$

Pyritään seuraavaksi määrittämään lisää ehtoja, joiden toteutuessa  $Q(y, v) > 0$ . Aikaisemman perusteella toinen variaatio  $Q(y, v)$  pystytään kirjoittamaan kiinnitetulle funktiolle  $y$  muodossa

$$Q(y, v) = J(v) = \int_{x_1}^{x_2} (Rv'^2 + Sv^2) dx.$$

Lemman 3.14 mukaan ehto  $R(x) \geq 0$  on välttämätön, jotta  $J(v) \geq 0$ . Oletetaan nyt, että  $R(x) > 0$  kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$  ja määritellään ehdot, joiden toteutuessa  $J(v) > 0$  kaikille  $v \neq 0$ . Aloitetaan kirjoittamalla funktionaalille  $J(v)$  Eulerin yhtälö

$$Sv - \frac{d}{dx}(Rv') = 0.$$

Tämä on toisen asteen differentiaaliyhtälö, johon reunaehdoilla  $v(x_1) = v(x_2) = 0$  on ratkaisu  $v \equiv 0$ . Yhtälöllä voi myös olla muita ratkaisuja ja niiden tutkimista varten otetaan käyttöön seuraava määritelmä.

**MÄÄRITELMÄ 3.16 (Konjugaatti).** Olkoon  $v : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  luokan  $C^1$  funktio, jolle  $v(x_1) = v(x_2) = 0, v \neq 0$  ja olkoot  $R$  ja  $S$  jatkuvia funktioita. Olkoon  $J(v)$  muotoa

$$J(v) = \int_{x_1}^{x_2} (Rv'^2 + Sv^2) dx.$$

Oletetaan lisäksi, että funktio  $v$  toteuttaa Eulerin yhtälön. Tällöin yhtälöä

$$Sv - \frac{d}{dx}(Rv') = 0. \quad (3)$$

sanotaan Jacobin yhtälöksi. Pistettä  $x_0 \neq x_1$  sanotaan pisteen  $x_1$  konjugaatiksi, jos yhtälöllä (3) on olemassa epätriviaali ratkaisu  $\bar{v} \neq 0$ , siten, että  $\bar{v}(x_0) = \bar{v}(x_1)$ .

**LAUSE 3.17.** *Olkoon  $v : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  luokan  $C^1$  funktio siten, että  $v(x_1) = v(x_2) = 0, v \neq 0$ , ja olkoot  $R$  ja  $S$  jatkuvia funktioita. Kun  $R(x) > 0$  kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$  ja ei ole olemassa pisteen  $x_1$  konjugaattia  $x_0 \in ]x_1, x_2[$ , niin*

$$J(v) = \int_{x_1}^{x_2} (Rv'^2 + Sv^2) dx > 0.$$

**TODISTUS.** Lauseen todistamiseksi riittää osoittaa, että funktionaali voidaan kirjoittaa muodossa, jossa integroitava ei ole identtisesti nolla kuin tilanteessa  $v \equiv 0$ . Aloitetaan lisäämällä integraalin sisälle  $\frac{d}{dx}(wv^2)$ , missä  $w(x) \in C^1$ . Tästä funktionaalien arvo ei muutu, sillä koska  $v(x_1) = v(x_2) = 0$ , niin

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}(wv^2) dx = 0.$$

Valitaan seuraavaksi funktio  $w$  siten, että  $w^2 = R(S + w')$  kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$ . Nyt funktion  $w$  valinnan perusteella integroitava voidaan täydentää neliöksi

$$\begin{aligned} Rv'^2 + Sv^2 + \frac{d}{dx}(wv^2) &= Rv'^2 + 2wvv' + (S + w')v^2 \\ &= Rv'^2 + 2wvv' + \frac{w^2v^2}{R} \\ &= R\left(v'^2 + \frac{2wvv'}{R} + \frac{w^2v^2}{R^2}\right) \\ &= R\left(v' + \frac{wv}{R}\right)^2. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että integraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$J(v) = \int_{x_1}^{x_2} (Rv'^2 + Sv^2) dx = \int_{x_1}^{x_2} R\left(v' + \frac{wv}{R}\right)^2 dx.$$

Koska  $R > 0$  ja  $(v' + \frac{wv}{R})^2 > 0$ , kun  $v \not\equiv 0$  ja funktio  $w$  on olemassa, niin  $J(v) > 0$ .

Osoitetaan seuraavaksi, että välillä  $]x_1, x_2[$  ei ole pisteen  $x_1$  konjugaattia. Korvaamalla  $w = -\frac{Rh'}{h}$  uudelle funktiolle  $h \in C^1$  saadaan

$$\begin{aligned} w^2 &= R(S + w') \\ \frac{R^2h'^2}{h^2} &= R\left(S - \frac{(Rh'' + \frac{d}{dx}(R)h')h - Rh'^2}{h^2}\right) \\ 0 &= Sh - \left(Rh'' + \frac{d}{dx}(R)h'\right) \\ 0 &= Sh - \frac{d}{dx}(Rh'). \end{aligned}$$

Tämä on Jacobin yhtälö funktionaalille  $J(v)$ . Funktio  $w$  on olemassa kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$  vain, jos on olemassa nollasta poikkeava funktio  $h$ . Nyt halutaan, että funktio  $h$  on epätriviaali ratkaisu Jacobin yhtälöön ja pisteelle  $x_1$  ei ole konjugaattipistettä välillä  $]x_1, x_2[$ . Tällöin  $J(v) > 0$  aina, kun  $R > 0$  ja pisteellä  $x_1$  ei ole konjugaattia  $x_0 \in ]x_1, x_2[$ .  $\square$

**LAUSE 3.18.** *Olkoon  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  luokan  $C^2$  funktio, joka toteuttaa ehdot  $y(x_1) = y_1$  ja  $y(x_2) = y_2$  ja  $F(x, y, y') \in C^2$ . Olkoon  $v \in C^2$  ja oletetaan, että funktio  $y$  toteuttaa Eulerin yhtälön. Funktio  $y$  on funktionaalin  $I(y)$  lokaali minimi, jos*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$$

*kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$  ja Jacobin yhtälöön,*

$$\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \right] v - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} v' \right) = 0,$$

*on vain trivიაali ratkaisu,  $v \equiv 0$ , kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$ .*

TODISTUS. Ollakseen minimi funktion  $y$  on toteutettava ehto  $Q(y, v) > 0$  kaikille nollasta poikkeaville funktioille  $v$ . Koska  $y$  on kiinnitetty, niin toinen variaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$Q(y, v) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ v'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + v^2 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \right) \right] dx.$$

Lauseesta 3.17 seuraa, että  $Q(y, v) > 0$ , jos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$$

kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$  ja ei ole olemassa pisteen  $x_1$  konjugaattia  $x_0 \in ]x_1, x_2[$ . Jacobin yhtälöön

$$\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \right] v - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} v' \right) = 0$$

on reunaehdoilla  $v(x_1) = v(x_2) = 0$  vain triviaali ratkaisu  $v \equiv 0$ . Siten funktio  $y$  minimoi funktionaalin  $I(y)$ , jos  $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$  kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$  ja Jacobin yhtälöön on vain triviaali ratkaisu kaikilla  $x \in [x_1, x_2]$ .  $\square$

Jacobin yhtälö on hyödyllinen työkalu funktionaalien ääriarvoja etsittäessä. Se on kuitenkin usein hyvin hankala ratkaista. Esitellään seuraavaksi yhtälön käsittelyä helpottava tulos.

LEMMA 3.19. Olkoot  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  luokan  $C^2$  kahdesta parametrissa,  $\alpha$  ja  $\beta$ , riippuva funktio, funktio  $v \in C^2$  ja  $R$  ja  $S$  jatkuvia funktioita. Tällöin Jacobin yhtälöön

$$Sv - \frac{d}{dx}(Rv') = 0$$

on olemassa epätriviaali ratkaisu pisteelle  $x \in [x_1, x_2]$  aina, kun determinantti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} y_0 & \frac{\partial}{\partial \beta} y_0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} y_1 & \frac{\partial}{\partial \beta} y_1 \end{vmatrix},$$

missä  $y_1 = y(x_1)$  ja  $y_0 = y(x_0)$  kaikilla  $x_0 \in ]x_1, x_2]$ , on nolla. Tällaiset pisteet  $x_0$  ovat pisteen  $x_1$  konjugaatteja.

Lemmaa 3.19 ei todisteta. Tuloksesta voi lukea lisää lähteestä [1] sivuilta 82-84.



## LUKU 4

### Klassisia variaatio-ongelmia

#### 4.1. Lyhin aika (Brachistochrone)

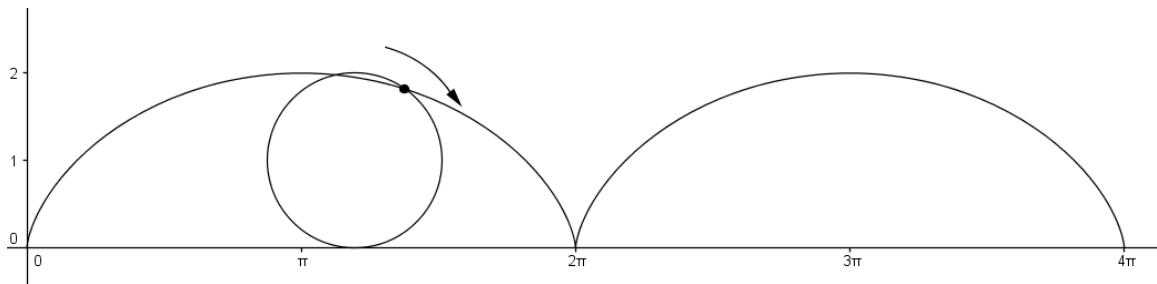
Vuonna 1696 Johann Bernoulli esitteli Brachistochrone-ongelman julkaisussaan *Acta Eruditorum*. Itse ratkaistavan ongelman hän muotoili seuraavasti:

Olkoon pisteet  $A$  ja  $B$ . Millainen on käyrä, jota pitkin painovoiman vaikutuksesta liikkuva kappale liikkuu nopeimmin pisteestä  $A$  pisteeseen  $B$ ?

Bernoulli ei kuitenkaan ollut ensimmäinen, joka tutki kyseistä ongelmaa. Vuonna 1638 Galileo käsitteli vastaavaa ongelmaa teoksessaan *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze*. Galileo osoitti, että verrattuna pisteitä yhdistävään janaan kappale liikkuu pisteestä  $A$  pisteeseen  $B$  nopeammin janoja  $AC$  ja  $CB$  pitkin, jos piste  $C$  on ympyrän kaarella. Tämän huomion seurauksena hän väitti, että nopein reitti pisteiden  $A$  ja  $B$  välillä olisi ympyrän kaari. Hänen väitteensä oli kuitenkin virheellinen.

Oikean ratkaisun Johann Bernoullin esittämään ongelmaan löysivät hänen veljensä, Jacob Bernoulli, Newton, Leibniz ja l'Hopital. Vaikka kukin heistä esitti ongelmaan erilaisen ratkaisun, lopputulos oli kuitenkin sama. Ratkaisu Brachistochrone-ongelmaan ei ollut Galileon väittämä ympyrän kaari vaan toinen ympyrään läheisesti liittyvä käyrä, sykloidi. Sykloidi on käyrä, joka muodostuu ympyrän kehällä olevan pisteen piirtämänä, kun ympyrä vierii pitkin suoraa.

Osoitetaan seuraavaksi, että ratkaisu Bernoullin esittämään ongelmaan on sykloidi.



KUVA 2. Vierivän ympyrän muodostama sykloidi.



TODISTUS. Oletetaan  $y$ -akselin positiivisen suunnan olevan alaspäin. Olkoon  $A = (x_1, y_1)$  ja  $B = (x_2, y_2)$ . Oletetaan, että  $x_1 < x_2$  ja valitaan piste  $A$  origoksi, jolloin  $x_1 = 0$  ja  $y_1 = 0$ . Olkoon  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y(0) = 0$  ja  $y(x_2) = y_2$ . Tällöin funktio  $y$  kuvaa kappaleen etäisyyttä  $y$ -akselista. Koska kappale liukuu käyrää pitkin kitkatta, kappaleen potentiaalienergia muuttuu suoraan liike-energiaksi. Kun oletetaan, että kappale lähtee liikkeelle levosta, niin kappaleen nopeus  $v$  missä tahansa käyrän pisteessä saadaan yhtälöstä

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

missä  $m$  on kappaleen massa ja  $g$  putoamiskihtiävyys. Siten nopeudeksi  $v$  saadaan

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Nopeus voidaan esittää muodossa

$$v = \frac{ds}{dt},$$

missä  $s$  on kappaleen kulkema matka ja  $t$  siihen kulunut aika. Integroimalla tätä saadaan kappaleelta liukumiseen kuluva aika

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Ajan minimoivan käyrän on toteutettava Eulerin yhtälö. Käytetään siitä vaihtoehtoista muotoa, Lemmaa 3.10, jolloin

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0.$$

Integroimalla tämä ehdoksi saadaan

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+y'^2} - y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = k_1.$$

Tämä voidaan vielä sieventää muotoon

$$y(1+y'^2) = k_2,$$

missä  $k_1 \in \mathbb{R}$  on vakio ja  $k_2 = \left(\frac{1}{k_1}\right)^2$ . Kyseinen differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$y'^2 = \frac{k_2 - y}{y}.$$

Yhtälö on separoituva ja se voidaan ratkaista käyttäen sijoitusta  $y = \frac{k_2}{2}(1 - \cos \theta)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k_2 - y}{y}} \\ \int \sqrt{\frac{y}{k_2 - y}} dy &= \int dx \\ \int \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \frac{k_2}{2} \sin \theta d\theta &= x + k_3 \\ \int \frac{k_2}{2} (1 - \cos \theta) d\theta &= x + k_3 \\ \frac{k_2}{2} (\theta - \sin \theta) - k_3 &= x, \end{aligned}$$

missä  $k_3 \in \mathbb{R}$  on integroimisvakio. Koska piste  $A$  valittiin origoksi, niin  $k_3 = 0$ . Edellisen perusteella funktio  $y$  voidaan esittää parametrimuodossa

$$\begin{aligned} x &= \frac{k_2}{2} (\theta - \sin \theta), \\ y &= \frac{k_2}{2} (1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Tämä parametrimuoto kuvaa sykloideja, joissa vierivän ympyrän säde on  $\frac{k_2}{2}$  ja keskuskulmaa  $\theta$  vastaavan kaaren pituus on ympyrän vierimä matka. Koska alkuehdon mukaan sykloidin on kuljettava pisteen  $B$  kautta, voidaan tämän perusteella määrittää vakio  $k_2$ .

Osoitetaan lopuksi, että tämä ratkaisu on ehdokas etsityksi minimiksi. Minimoitava funktionaali oli muotoa

$$\int_0^{x_2} F dx = \int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Tällöin

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{y'}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{y}(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Selvästi nähdään, että  $(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} > 0$  ja  $y = \frac{k_2}{2}(1 - \cos \phi) \geq 0$  kaikilla  $\phi$ . Siten  $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$  kaikilla  $x$ . Sykloidi siis toteuttaa Lauseen 3.15 ehdon ja on ehdokas etsityksi minimiksi.  $\square$

Edellinen todistus osoittaa, että sykloidi täyttää minimille välttämättömät ehdot. Se ei kuitenkaan riitä osoittamaan, että kaikista käyristä juuri sykloidi minimoi kappaleen liukumisajan. Täydennetään tältä osin edellistä todistusta osoittamalla, että sykloidi tosiaan on etsitty minimi. Seuraava todistus mukailee lähdettä [3].

**TODISTUS.** Oletetaan  $y$ -akselin positiivisen suunnan olevan alaspäin. Sykloidin parametrimuoto on

$$x = R(\theta - \sin \theta), \quad y = R(1 - \cos \theta),$$

missä  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ja  $R$  on sykloidin määrävän ympyrän säde. Sykloidia pitkin liukuvan kappaleen sijainti on ajan  $t$  funktio välillä  $[0, T]$  siten, että alkupiste

$A = (0, 0) = (x(0), y(0))$  ja loppupiste  $B = (x(T), y(T))$ . Tässä  $T$  on kappaleelta liukumiseen kuluva aika, joka pyritään minimoimaan. Oletetaan lisäksi, että sykloidin pisteille pätee  $x \geq 0$  ja  $y \geq 0$ . Koska kappaleen oletetaan lähtevän liikkeelle levosta ja liukuvan kitkatta, niin

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy.$$

Tämän yhtälön nojalla kappaleen nopeudelle missä tahansa sykloidin pisteessä pätee

$$v^2 = 2gy.$$

Otetaan nyt käyttöön uudet koordinaatit  $\rho$  ja  $\tau$ , joilla

$$x = \rho\tau - \rho^2 \sin \frac{\tau}{\rho} \quad \text{ja} \quad y = \rho^2 \left(1 - \cos \frac{\tau}{\rho}\right),$$

missä  $0 < \rho$  ja  $0 \leq \tau \leq 2\pi\rho$ . Tämä vastaa sykloidin parametrimuotoa, jossa  $R = \rho^2$  ja  $\theta = \frac{\tau}{\rho}$ . Käyttämällä ketjusääntöä  $x'$  ja  $y'$  voidaan ilmaista termien  $\tau'$  ja  $\rho'$  avulla

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial x}{\partial \tau} \tau' + \frac{\partial x}{\partial \rho} \rho' = \left(\rho - \rho \cos \frac{\tau}{\rho}\right) \tau' + \left(\tau + \tau \cos \frac{\tau}{\rho} - 2\rho \sin \frac{\tau}{\rho}\right) \rho', \\ y' &= \frac{\partial y}{\partial \tau} \tau' + \frac{\partial y}{\partial \rho} \rho' = \left(\rho \sin \frac{\tau}{\rho} \tau'\right) + \left(2\rho - 2\rho \cos \frac{\tau}{\rho} - \tau \sin \frac{\tau}{\rho}\right) \rho'. \end{aligned}$$

Hyödyntäen edellistä kappaleen nopeus voidaan ilmaista termien  $\tau'$  ja  $\rho'$  avulla

$$\begin{aligned} 2gy &= v^2 = x'^2 + y'^2 \\ &= 2\rho^2 \left(1 - \cos \frac{\tau}{\rho}\right) \tau'^2 + 2 \left(4\rho^2 \left(1 - \cos \frac{\tau}{\rho}\right) - 4\rho\tau \sin \frac{\tau}{\rho} + \tau^2 \left(1 + \cos \frac{\tau}{\rho}\right)\right) \rho'^2 \\ &= 2y\tau'^2 + 4 \left(2\rho \sin \frac{\tau}{2\rho} - \tau \cos \frac{\tau}{2\rho}\right)^2 \rho'^2. \end{aligned}$$

Tätä yhtälöä käyttämällä Brachistochrone-ongelma on helppo ratkaista. Termi  $\rho'^2$  on ei-negatiivinen, joten  $2y\tau'^2 \leq 2gy$ . Koska  $y > 0$  paitsi pisteessä  $A$  ja mahdollisesti pisteessä  $B$ , niin  $\tau' \leq \sqrt{g}$  paitsi ehkä ajanhetkillä  $t = 0$  ja  $t = T$ . Integroimalla tätä epäyhtälöä välillä  $[0, T]$  saadaan

$$\tau(T) = \int_0^T \tau' dt \leq \int_0^T \sqrt{g} dt = \sqrt{g}T.$$

Siten aika, joka kappaleelta kuluu pisteiden  $A$  ja  $B$  välisen matkan liukumiseen, on alhaalta rajoitettu. Liukumisajan minimi saadaan valitsemalla  $\tau' = \sqrt{g}$  ja  $\rho' = 0$ . Tällöin  $\rho$  on vakio ja kappaleen kulkema polku on sykloidin kaari.  $\square$

Edellinen todistus yhdessä aikaisemman kanssa osoittaa, että juuri sykloidi minimoi kappaleen liukumisajan. Siten sykloidi on Brachistochrone-ongelmaan etsitty ratkaisu. Tarkastellaan seuraavaksi, miten kahden annetun pisteen kautta kulkevan sykloidin yhtälö saadaan.

**ESIMERKKI 4.1** (Brachistochrone annetuilla pisteillä). Oletetaan  $y$ -akselin positiivisen suunnan olevan alaspäin. Olkoot piste  $A = (0, 0)$  ja piste  $B = (1, 1)$ . Ratkaistaan Brachistochrone-ongelma näille pisteille eli etsitään pisteiden välille käyrä, jota pitkin

kitkaton kappale liukuu nopeiten pisteestä  $A$  pisteeseen  $B$ . Brachistochrone-ongelman todistuksen perusteella tiedetään, että tällaisen käyrän parametrimuoto on

$$x = \frac{k}{2}(\theta - \sin \theta), \quad y = \frac{k}{2}(1 - \cos \theta).$$

Huomataan seuraavaksi, että pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta kulkevan suoran kulmakerroin

$$\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = \frac{\frac{k}{2}(1 - \cos \theta)}{\frac{k}{2}(\theta - \sin \theta)} = \frac{(1 - \cos \theta)}{(\theta - \sin \theta)}$$

on riippumaton vakiosta  $k$ . Nyt parametrin  $\theta$  arvo pisteessä  $B$  voidaan ratkaista edellisestä yhtälöstä, jolloin

$$\theta \approx 2,412.$$

Vakion  $k$  arvo pisteessä  $B$  voidaan ratkaista sijoittamalla yhtälöihin aikaisemmin ratkaistu parametrin  $\theta$  arvo, jolloin saadaan

$$k \approx 1,146.$$

Tällä vakion  $k$  arvolla käyrä kulkee pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta.

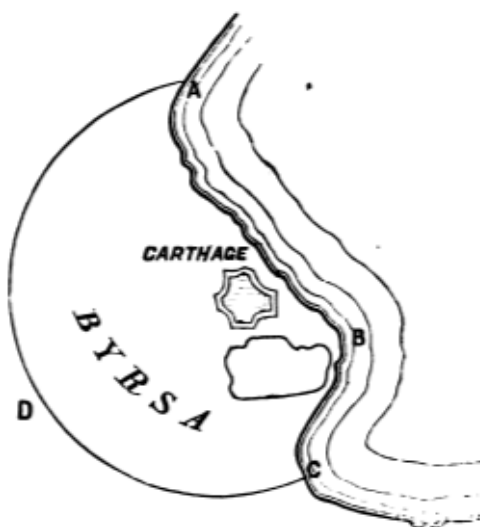
## 4.2. Isoperimetrinen ongelma

Isoperimetrinen ongelma on todennäköisesti vanhin tunnettu variaatiolaskennan ongelma. Ongelma juontaa juurensa antiikin aikaan, jolloin se tunnettiin kuningatar Didon ongelmana. Tarinan mukaan Tyroksen kuninkaan Pygmalionin sisko Dido pakeni veljeään Pohjois-Afrikkaan nykyisen Libyan alueelle. Pakomatkinsa päätteeksi Dido osti paikalliselta kuninkaalta maata, jolle myöhemmin perustettaisiin Karthagon kaupunki. Sopimuksen mukaan hän sai niin suuren maa-alueen kuin härän taljalla pystyi peittämään. Hän leikkasi kyseisen taljan ohuiksi suikaleiksi ja satoi ne yhteen naruksi. Sitten hän asetteli narun maahan niin, että se rajasi suurimman mahdollisen alueen. Näin tehdessään Dido joutui ratkaisemaan seuraavan ongelman:

Mikä kaikista suljetuista käyristä rajaa suurimman alueen, kun käyrän pituus on kiinnitetty?

Tarinan mukaan hän asetteli narun puoliympyrän muotoon käyttäen rantaviivaa reunana. Täten voidaankin olettaa, että Dido löysi ongelmaansa oikean ratkaisun, sillä ympyrä, jonka piirin pituus on kyseisen narun pituus, rajaa suurimman alueen.

Osoitetaan seuraavaksi, että suljetuista käyristä ympyrä rajaa suurimman alueen, kun käyrän pituus on kiinnitetty.



KUVA 3. Kuningatar Didon ratkaisu. [13]

**TODISTUS.** Olkoon  $C$  suljettu itseään leikkaamaton käyrä, jonka pituus on  $L > 0$ . Olkoon käyrän  $C$  parametriesitys

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (x(t), y(t)).$$

Oletetaan lisäksi, että parametriesitys  $f$  on paloittain  $C^\infty$ . Tällöin Greenin teoreema antaa käyrän  $C$  rajaaman alueen pinta-alan

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 (xy' - x'y) dt.$$

Koska käyrä  $C$  on suljettu, niin  $x(0) = x(1)$  ja  $y(0) = y(1)$ . Käyrän  $C$  pituus saadaan integraalista

$$J = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Nyt Lauseen 3.6 mukaan minimoitava funktionaali on

$$H = \int_0^1 \frac{1}{2}(xy' - x'y) + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Funktionaalin minimoivan funktion on toteutettava Eulerin yhtälöt

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial x'} \right) &= 0 \quad \text{ja} \\ \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial y'} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Derivoidaan  $H$  muuttujien  $x, x', y$  ja  $y'$  suhteen ja sijoitetaan nämä Eulerin yhtälöihin

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y' - \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2}y + \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) &= 0 \quad \text{ja} \\ -\frac{1}{2}x' - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Integroimalla nämä muuttujan  $t$  suhteen saadaan

$$\begin{aligned} y - \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} &= c_1 \quad \text{ja} \\ x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} &= c_2, \end{aligned}$$

missä  $c_1$  ja  $c_2$  ovat vakioita. Korotetaan  $(y - c_1)$  ja  $(x - c_2)$  toiseen ja lasketaan yhteen, jolloin

$$\begin{aligned} (x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 &= \left( \frac{-\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)^2 + \left( \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)^2 \\ &= \lambda^2 \frac{(x'^2 + y'^2)}{(x'^2 + y'^2)} = \lambda^2. \end{aligned}$$

Saatu yhtälö  $(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2$  vastaa ympyrän, jonka säde on  $\lambda = \frac{L}{2\pi}$  ja keskipiste  $(c_2, c_1)$ , yhtälöä.

Hyvin usein isoperimetristä ongelmaa lähestytään todistamalla isoperimetrinen epäyhtälö

$$4\pi A \leq L^2.$$

Epäyhtälö antaa suhteen suljetun käyrän pituuden ja sen rajaaman pinta-alan välille. Epäyhtälöstä huomataan, että yhtäsuuruus on voimassa ympyrän tapauksessa eli kun  $A = \pi r^2$  ja  $L = 2\pi r$ . Täten voidaan päätellä, että ympyrä tuottaa etsityn maksimin.  $\square$

Isoperimetriseen epäyhtälöön ja sen todistuksiin voi tutustua tarkemmin lähteen [2] sivuilla 550-564.

Edellinen todistus perustuu variaatiolaskentaan ja käyttää hyväkseen sen työkaluja ongelman esittämisessä ja ratkaisemisessa. Kyseistä ongelmaa on myös mahdollista lähestyä eri tavoin. Esimerkiksi vuonna 1841 Steiner julkaisi viisi erilaista todistusta isoperimetriseen ongelmaan. Nämä todistukset olivat luonteeltaan puhtaasti geometrisia. Esitetään näistä yksi. Todistusta varten osoitetaan ensin lemma kolmioiden alalle.

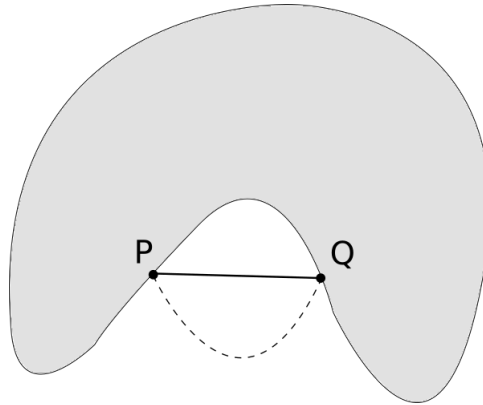
LEMMA 4.2. Olkoon  $\triangle BCD$  kolmio. Olkoon sivun  $BC$  pituus  $b$  ja sivun  $CD$  pituus  $c$ . Tällöin kolmion  $\triangle BCD$  ala on suurin, kun kulma  $\angle BCD$  on suora.

TODISTUS. Kolmion  $\triangle BCD$  pinta-ala voidaan laskea kaavalla

$$A = \frac{1}{2}bc \sin(\angle BCD).$$

Koska  $0 \leq \sin(\angle BCD) \leq 1$ , niin  $A \leq \frac{1}{2}bc$ . Tällöin kolmion  $\triangle BCD$  ala on suurin, kun  $\sin(\angle BCD) = 1$  eli kulma  $\angle BCD$  on suora.  $\square$

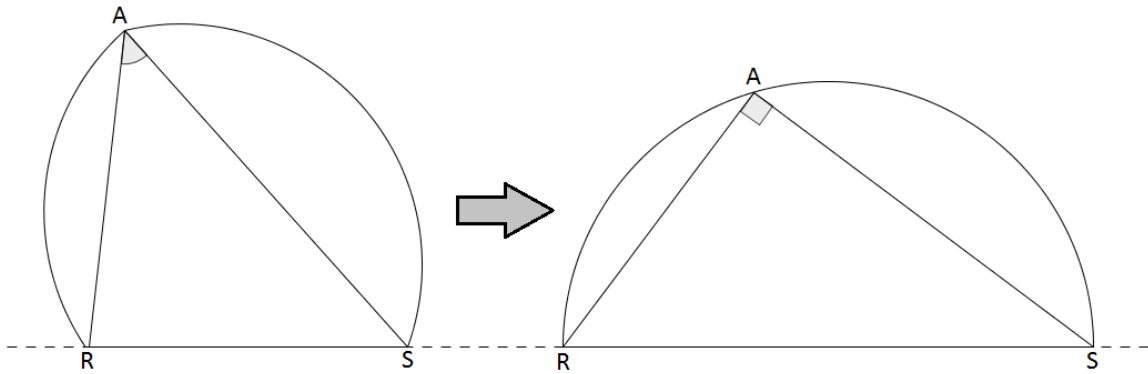
STEINERIN ”SARANATODISTUS”. Olkoon  $C$  suljettu, itseään leikkaamaton käyrä annetulla pituudella. Osoitetaan ensin, että käyrän  $C$  rajaama alue on konvekksi, jos käyrä  $C$  on pinta-alan maksimoiva käyrä. Oletetaan, että käyrän  $C$  rajaama alue ei ole konvekksi. Tällöin on pisteet  $P, Q \in C$  siten, että vähintään yksi piste janalta  $PQ$  ei ole käyrän  $C$  rajaaman alueen sisällä. Nyt voidaan määritellä uusi käyrä  $C^*$  peilaamalla pisteiden  $P$  ja  $Q$  välinen käyrän osa janan  $PQ$  suhteen. Näin saatu käyrä  $C^*$  on yhtä pitkä tai lyhyempi kuin käyrä  $C$  ja rajaa suuremman alueen. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa. Siten pinta-alan maksimoivan käyrän rajaama alue on konvekksi.



KUVA 4. Peilaamalla  $P$  ja  $Q$  välinen käyrän osa janan  $PQ$  suhteen saadaan pinta-alaltaan suurempi käyrä  $C^*$ .

Osoitetaan seuraavaksi, että käyrä  $C$  on ympyrä. Olkoot pisteet  $R$  ja  $S$  käyrältä  $C$  siten, että ne jakavat käyrän  $C$  kahteen yhtä pitkään osaan  $C'$  ja  $C''$ . Tällöin jana  $RS$  jakaa käyrän  $C$  rajaaman alueen kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen alueeseen. Jos näin ei olisi, voitaisiin suurempi alue peilata janan  $RS$  suhteen, jolloin saataisiin uusi, yhtä pitkä käyrä, joka rajaa suuremman alueen.

Edellisen perusteella riittää osoittaa, että  $C'$  tai  $C''$  on puoliympyrä. Valitaan  $C'$ . Oletetaan, että  $C'$  ei ole puoliympyrä. Tällöin on piste  $A$  käyrältä  $C'$  siten, että kulma  $\angle RAS$  ei ole suora. Pisteitä  $R$  ja  $S$  voidaan liikuttaa pitkin niiden määräämää suoraa siten, että janojen  $RA$  ja  $AS$  pituudet eivät muutu kulman  $\angle RAS$  toimiesä saranana. Näin tekemällä saadaan suorakulmainen kolmio  $\triangle RAS$ , jossa kulma  $\angle RAS$  on suora. Lemman 4.2 mukaan suorakulmainen kolmio on alaltaan suurempi kuin aikaisempi. Toistamalla tätä prosessia kaikille pisteille  $A$ , joille kulma  $\angle RAS$  ei ole suora saadaan koko ajan suuremman pinta-alan rajaava käyrä. Prosessia jatkamalla käyrä  $C'$  suppenee kohti puoliympyrää. Täten suurimman pinta-alan rajaava käyrä on ympyrä.  $\square$



KUVA 5. Liikuttamalla pisteitä  $R$  ja  $S$  niiden määräämää suoraa pitkin voidaan kasvattaa käyrään  $C'$  rajaamaa pinta-alaa.

Steinerin todistuksessa käytetyt konstruktiot osoittavat, että jos käyrä  $C$  ei ole ympyrä, niin tietyillä prosesseilla löydetään aina toinen yhtä pitkä käyrä, joka rajaa suuremman alueen. Lisäksi päädytään tulokseen, että ympyrä rajaa suuremman alueen kuin mikään näistä käyristä. Lopputuloksesta huolimatta todistus jää hieman puutteelliseksi. Todistuksessa nimittäin oletetaan, että esitettyä prosessia toistamalla käyrä  $C$  suppenee kohti ympyrää eli toisin sanoen suurimman alueen rajaavan käyrä on olemassa. Tältä osin Steinerin todistuksen ovat täydentäneet esimerkiksi Edler ja Carathéodory. Heidän todistuksiinsa voi tutustua lähteen [2] sivuilla 544-548.



### 4.3. Lyhin pisteiden välinen etäisyys pallon pinnalla

Tavallisessa euklidisessa tasossa kahden pisteen välinen lyhin polku löytyy suoralta viivalta, joka kulkee kummankin pisteen kautta. Kaarevilla pinnoilla sama ei välttämättä pidä paikkaansa, sillä niillä ei yleensä ole suoraa viivoja. Siten esimerkiksi pallon pinnalla ei ole itsestään selvää mikä on lyhin polku pisteestä toiseen. Avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  lyhin polku voidaan kuitenkin selvittää variaatiolaskennan avulla minimoimalla valittujen pisteiden välisen käyrän pituus

Tietoa lyhimmästä polusta voidaan hyödyntää käytännön sovelluksiin monilla eri tavoilla. Näitä ovat muun muassa erilaisten rakenteiden suunnittelu, teollisuusrobottien liikeratojen suunnittelu ja kaksiulotteisten kuvien projisointi kolmiulotteiselle objektille. Koska maapallo on kutakuinkin pallon muotoinen voidaan lyhintä polkua käyttää lisäksi etäisyyksien mittaamiseen, lento- ja laivareittien suunnitteluun.

Ennen kuin lyhin polku ratkaistaan, tutustutaan määritelmiin, jotka helpottavat pallopinnan pisteiden käsittelemistä.

MÄÄRITELMÄ 4.3. Olkoon  $\text{atan2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [-\pi, \pi]$  funktio

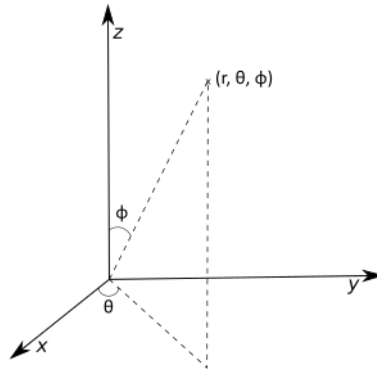
$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{jos } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{jos } x < 0 \text{ ja } y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{jos } x < 0 \text{ ja } y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{jos } x = 0 \text{ ja } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{jos } x = 0 \text{ ja } y < 0. \end{cases}$$

MÄÄRITELMÄ 4.4 (Pallokoordinaatit). Olkoon piste  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Lukukolmikkoo  $(r, \theta, \phi)$ , missä

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & r &\geq 0, \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{r}\right), & 0 &\leq \theta < 2\pi, r \neq 0 \\ \phi &= \text{atan2}(y, x), & 0 &\leq \phi \leq \pi, \end{aligned}$$

sanotaan pisteen  $P$  pallokoordinaateiksi.

Koordinaateista  $r$  ilmaisee pisteen  $P$  etäisyyden origosta, kulma  $\theta$   $x$ -akselin positiivisen suunnan, origon ja pisteen  $P$   $xy$ -tason projektion välisen kulman ja kulma  $\phi$   $z$ -akselin, origon ja pisteen  $P$  välisen kulman.



KUVA 6. Piste esitys pallokoordinaatistossa.

Osoitetaan seuraavaksi, että pallopinnalla pisteiden välisen lyhimmän etäisyyden määrää isoympyrä.

TODISTUS. Oletetaan pallon keskipiste origoksi ja säteeksi  $r = R$ ,  $R > 0$ . Olkoot piste  $P_1 = (R, \theta_1, \phi_1)$  ja  $P_2 = (R, \theta_2, \phi_2)$ . Jotta etäisyyden minimoiva käyrä löydetään, on tutkittava pallopinnan kaaria ja niiden pituuksia. Pallopinnalla olevan kaaren pituudelle  $s$  pätee

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\phi)^2 + (r \sin \phi d\theta)^2.$$

Koska pallon säde  $r$  on vakio, niin  $dr = 0$  ja

$$ds = R\sqrt{(d\phi)^2 + \sin^2 \phi (d\theta)^2}.$$

Siten koko käyrän pituus  $s$  saadaan integraalista

$$s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} R\sqrt{1 + \sin^2 \phi \left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2} d\phi.$$

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi merkitään jatkossa  $\frac{d\theta}{d\phi} = \theta'$  ja  $F = R\sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2 \phi}$ . Koska  $F$  on riippumaton muuttujasta  $\theta$ , niin  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$ . Tällöin pisteiden  $P_1$  ja  $P_2$  välisen etäisyyden minimoivan käyrän on toteutettava Eulerin yhtälö

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta'} \right) = 0.$$

Täten  $\frac{\partial F}{\partial \theta'} = k$  jollekin vakiolla  $k \in \mathbb{R}$ . Edellisestä yhtälöstä saadaan, että

$$k = \frac{R\theta' \sin^2 \phi}{\sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2 \phi}}.$$

Hyödynnetään tätä  $\theta$  ratkaisemiseksi. Korotetaan yhtälö puolittain toiseen

$$k^2 = \frac{R^2 \theta'^2 \sin^4 \phi}{1 + \theta'^2 \sin^2 \phi}$$

ja ratkaistaan  $\theta'$  suhteen

$$\theta' = \frac{k}{\sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - k^2}} = \frac{k \operatorname{cosec}^2 \phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{cosec}^2 \phi}},$$

missä  $\operatorname{cosec} \phi = \frac{1}{\sin \phi}$  on trigonometrinen funktio kosekantti. Integroidaan tämä käyttämällä hyväksi muutoskaavaa  $\operatorname{cosec}^2 \phi = 1 + \cot^2 \phi$  ja sijoittamalla  $q = A \cot \phi$ , missä  $A = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ , jolloin saadaan

$$\theta(\phi) = A \int \frac{dq}{1-q^2} = A \sin^{-1} q + \alpha,$$

missä  $\alpha \in \mathbb{R}$  on integroimisvakio. Nyt nähdään, että  $\theta$  ja  $\phi$  välillä on yhteys

$$\sin(\theta - \alpha) = q = A \cot \phi.$$

Jotta tämän yhteyden merkitys minimoitavan etäisyyden osalta selkiytyy, kerrotaan yhtälö puolittain termillä  $R \cos \phi$  ja käytetään muutoskaavaa  $\sin(\theta - \alpha) = \sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha$ , jolloin saadaan

$$(\cos \alpha)y - (\sin \alpha)x = Az,$$

missä  $x = R \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = R \sin \phi \sin \theta$  ja  $z = R \cos \phi$ . Tämä on origon, pisteen  $P_1$  ja  $P_2$  kautta kulkevan tason yhtälö. Tällaisen tason ja pallopinnan leikkausjoukkoa sanotaan isoympyräksi. Siten isoympyrä määrää kahden pallopinnan pisteen välisen lyhimmän etäisyyden.

Osoitetaan lopuksi, että isoympyrän lyhyempi kaari  $u$  on etsitty minimi. Valitaan todistuksen yksinkertaistamiseksi piste  $P_1 = (R, \theta_1, 0)$  pallon pohjoisnavaksi ja  $P_2 = (R, \theta_2, \phi_2)$ . Pisteiden valinnan perusteella niiden kautta kulkeva isoympyrä voidaan parametrisoida seuraavasti

$$u(x, y, z) = R(\cos \theta_1 \sin(t), \sin \theta_1 \sin(t), \cos(t)), \quad t \in [0, \pi].$$

Lauseen 3.18 perusteella riittää näyttää, että  $\frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} > 0$  ja Jacobin yhtälöllä

$$\left[ \frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \right] v - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial \theta'^2} v' \right) = 0$$

on vain triviaali ratkaisu,  $v \equiv 0$ , kaikilla  $\phi \in [0, \pi]$ . Selvästi  $\frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} > 0$ , sillä pisteen  $P_1$  valinnasta seuraa, että  $\phi' > 0$  ja

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta'} \left( R \sqrt{\phi'^2 + \theta'^2 \sin^2 \phi} \right) = \frac{R \theta' \sin^2 \phi}{\sqrt{\phi'^2 + \theta'^2 \sin^2 \phi}} > 0.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että Jacobin yhtälöön on vain triviaali ratkaisu,  $v \equiv 0$ . Tätä varten hyödynnetään tietoa, että isoympyrän pisteet ovat samassa tasossa. Siten voidaan valita, että käyrä  $u$  on  $xy$ -tasossa, jolloin se voidaan kirjoittaa muodossa  $x^2 + y^2 = R^2$ . Koska  $x = R \cos \theta_1 \sin \phi$ , niin käyrä  $u$  voidaan ilmaista kulman  $\phi$  funktiona seuraavasti

$$y = R \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi},$$

missä  $\phi \in [0, \pi]$ . Nyt voidaan hyödyntää Lemmaa 3.19 konjugaattipisteiden löytämiseen tutkimalla yhtälöä

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} y_0 & \frac{\partial}{\partial R} y_0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} y_1 & \frac{\partial}{\partial R} y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

missä  $y_1 = y(\phi_1)$  ja  $y_0 = y(\phi_0)$  jollekin  $\phi_0 \in ]0, \pi]$ . Sijoittamalla

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{R \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial R} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi}$$

yhtälöön saadaan

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{R \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin^2 \phi_0}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi_0}} & \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi_0} \\ \frac{R \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin^2 \phi_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi_1}} & \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi_1} \end{array} \right|$$

$$= \frac{R \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin^2 \phi_0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi_1}}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi_0}} - \frac{R \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin^2 \phi_1 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi_0}}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \phi_1}}$$

Huomataan, että determinantti on nolla, kun  $\sin^2 \phi_0 = \sin^2 \phi_1$ . Tällöin  $\phi_0$  on ratkaisu, kun  $\phi_0 = \phi_1 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Näistä ainoa ratkaisu, joka osuu välille  $]0, \pi]$  on  $\phi_0 = \pi$ . Siten käyrällä  $u$  on konjugaattipiste vain silloin, kun pisteet  $(R, \theta_1, \phi_1)$  ja  $(R, \theta_2, \phi_2)$  ovat vastakkaisilla puolilla ympyrää. Tällaisessa tilanteessa kaikkien näiden pisteiden välisten isoympyröiden kaarien pituudet ovat yhtä suuria ja siksi yksikäsitteistä etäisyyden minimoivaa käyrää ei ole. Siten todistuksen perusteella isoympyrän kaari määrää kahden pallopinnan pisteen välisen lyhimmän etäisyyden.  $\square$

Edellinen todistus hyödyntää variaatiolaskentaa kahden pallopinnan pisteen välisen lyhimmän etäisyyden määrittämiseen. Kyseinen ongelma voidaan esittää myös yksinkertaisemmin analyysin avulla. Tällöin todistus on suoraviivaisempi eikä variaatiolaskennan tuloksia, kuten Eulerin yhtälöä, tarvitse käyttää. Esitetään seuraavaksi analyttinen todistus pallopinnan pisteiden väliselle etäisyydelle.

**TODISTUS.** Tarkastellaan ensin pisteiden välistä etäisyyttä avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ . Olkoot pisteet  $P_0 = (0, \dots, 0)$  ja  $P_1 \in \mathbb{R}^n$ . Olkoon  $P$  jatkuva käyrä, joka kulkee pisteiden  $P_0$  ja  $P_1$  kautta siten, että käyrän  $P$  parametriesitykselle pätee  $P(0) = P_0$  ja  $P(1) = P_1$ . Pisteiden välinen lyhin etäisyys löydetään minimoimalla

$$\int_0^1 |P'(t)| dt.$$

Tällöin pätee epäyhtälö

$$\int_0^1 |P'(t)| dt \geq \left| \int_0^1 P'(t) dt \right| = |P_1|,$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, kun  $|P'(t)| = |P_1|$ . Siten jana  $P(t) = P_1 t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , määrää lyhimmän etäisyyden pisteiden  $P_0$  ja  $P_1$  välillä.

Vastaavaa lähestymistapaa voidaan käyttää määrittäessä kahden pisteen,  $P_0$  ja  $P_1$ , välistä lyhintä etäisyyttä  $a$ -säteisen pallon pinnalla. Valitaan piste  $P_0$  pohjoisnavaksi eli  $P_0 = (a, \theta_0, 0)$  ja olkoon piste  $P_1 = (a, \theta_1, \phi_1)$ . Koska piste  $P_0$  valittiin pohjoisnavaksi, niin pisteiden välinen käyrä voidaan ilmaista kulman  $\phi$  funktiona  $\theta(\phi)$ , missä

$0 < \phi \leq \phi_1 \leq \pi$ ,  $\theta(0) = 0$  ja  $\theta(\phi_1) = \theta_1$ . Käyrän pituus voidaan laskea pallopinnan pituuselementin

$$ds = a\sqrt{(d\phi)^2 + \sin^2 \phi (d\theta)^2}$$

avulla. Siten käyrän pituudeksi saadaan

$$L(\theta) = a \int_0^{\phi_1} \sqrt{1 + \sin^2 \phi (d\theta)^2} d\phi.$$

Yhtälöstä nähdään, että käyrän pituudelle pätee

$$L(\theta) \geq a \int_0^{\phi_1} d\phi.$$

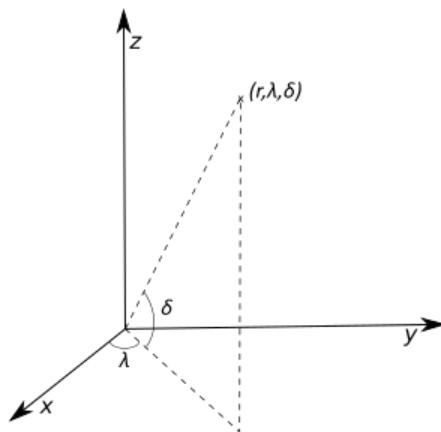
Yhtälössä yhtäsuuruus on voimassa vain jos  $d(\theta(\phi)) = 0$  eli  $\theta(\phi) = \text{vakio}$ . Tällöin etäisyyden minimoiva kaari vastaa pisteen  $P_1$  kautta kulkevaa pituuspiirin lyhyempää kaarta. Koska pituuspiirit ovat myös isoympyröitä, niin isoympyrän lyhyempi kaari määrää lyhimmän etäisyyden kahden pallopinnan pisteen välillä.  $\square$

Jotta aikaisempaa tulosta voidaan hyödyntää käytäntöön, määritellään uusi koordinaatisto, joka vastaa maapallon pinnalla käytettyä koordinaattijärjestelmää.

**MÄÄRITELMÄ 4.5** (Maantieteelliset koordinaatit). Olkoon piste  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Lukukolmikko  $(r, \lambda, \delta)$ , missä

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & r &\geq 0, \\ \lambda &= \text{atan2}(y, x), & -\pi &\leq \lambda \leq \pi, \\ \delta &= \arcsin\left(\frac{z}{r}\right), & -\frac{\pi}{2} &\leq \delta \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

vastaa pisteen  $P$  maantieteellisiä koordinaatteja.



KUVA 7. Piste esitys maantieteellisessä koordinaatistossa.

Tämä pallokoordinaatisto poikkeaa Määritelmän 4.4 mukaisesta esimerkiksi kulman  $\delta$  määritelmän ja koordinaattien rajoitteiden osalta. Tässä kulma  $\delta$  vastaa Määritelmän 4.4 mukaisessa koordinaatistossa kulmaa  $\pi - \phi$ . Määritelmän 4.5 mukainen

koordinaatisto kuitenkin soveltuu paremmin käytäntöön, sillä kulma  $\lambda$  vastaa maantieteellistä leveysastetta ja  $\delta$  kulma pituusastetta.

Todistuksien perusteella tiedetään, että pallopinnalla isoympyrä määrää kahden pisteen välisen lyhimmän etäisyyden. Todistukset eivät kuitenkaan anna tietoa siitä, kuinka suuri annettujen pisteiden välinen etäisyys on. Määritellään siis seuraavaksi kahden annetun pisteen välinen etäisyys pallopinnalla.

LAUSE 4.6 (Pisteiden välinen etäisyys pallopinnalla). *Olkoot  $A = (R, \lambda_1, \delta_1)$ ,  $B = (R, \lambda_2, \delta_2)$ . Pisteiden  $A$  ja  $B$  välinen etäisyys saadaan funktiosta*

$$d_S : S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_S(A, B) = R\psi,$$

missä  $R$  on pallopinnan säde,  $S^2 = \{(r, \lambda, \phi) : r = R, -\pi \leq \lambda \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$   $R$ -säteinen pallopinta ja  $\psi = \arccos(\sin \lambda_1 \cdot \sin \lambda_2 + \cos \lambda_1 \cdot \cos \lambda_2 \cdot \cos(\delta_1 - \delta_2))$  on pisteiden  $A$  ja  $B$  määräämä keskuskulma.

Pisteiden välisen etäisyyden lisäksi on hyödyllistä tuntea niitä yhdistävä isoympyrän kaari. Määritetään seuraavaksi isoympyrän kaari kahden mielivaltaisen pisteen välille.

ESIMERKKI 4.7 (Isoympyrän kaari kahden pallopinnan pisteen välille). Olkoot pisteet  $A = (r, \lambda_A, \delta_A)$  ja  $B = (r, \lambda_B, \delta_B)$ . Koska säde  $r$  ei vaikuta kaaren määräytymiseen voidaan olettaa, että  $r = 1$  ja tarkastella vain kulmia  $\lambda$  ja  $\delta$ . Muunnetaan pisteet  $A$  ja  $B$  karteesiseen koordinaatistoon, jolloin

$$\begin{aligned} x &= \cos \lambda \cos \delta \\ y &= \sin \lambda \cos \delta \\ z &= \sin \delta. \end{aligned}$$

Olkoon kulma  $\psi$  pisteiden  $A$  ja  $B$  välinen keskuskulma. Tällöin pisteiden  $A$  ja  $B$  välinen isoympyrän kaari voidaan esittää kulman  $\alpha$  funktiona

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_A \sin(\psi - \alpha) + x_B \sin \alpha}{\sin \psi} \\ y &= \frac{y_A \sin(\psi - \alpha) + y_B \sin \alpha}{\sin \psi} \\ z &= \frac{z_A \sin(\psi - \alpha) + z_B \sin \alpha}{\sin \psi}. \end{aligned}$$

Nämä karteesiset koordinaatit voidaan muuttaa takaisin pallokoordinaateiksi seuraavasti

$$\begin{aligned} \lambda &= \operatorname{atan2}(y, x) \\ \delta &= \arcsin z. \end{aligned}$$

Näin saatu funktio  $f : [0, \psi] \rightarrow [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f(\alpha) = (\text{atan2}(y, x), \arcsin z)$ , missä

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos \lambda_A \cos \delta_A \sin(\psi - \alpha) + \cos \lambda_B \cos \delta_B \sin \alpha}{\sin \psi} \\ y &= \frac{\sin \lambda_A \cos \delta_A \sin(\psi - \alpha) + \sin \lambda_B \cos \delta_B \sin \alpha}{\sin \psi} \\ z &= \frac{\sin \delta_A \sin(\psi - \alpha) + \sin \delta_B \sin \alpha}{\sin \psi}, \end{aligned}$$

antaa isoympyrän kaaren pisteiden  $A$  ja  $B$  välille.

ESIMERKKI 4.8. Oletetaan maapallon vastaavan pallopintaa säteellä  $r = 6378$  km. Määritetään lyhin reitti Suomen ja Yhdysvaltojen pääkaupunkien, Helsingin ja Washingtonin, välille. Kaupunkien koordinaatit ovat  $60^\circ 10' 15''\text{N}$   $24^\circ 56' 15''\text{E}$  ja  $38^\circ 53' 42''\text{N}$   $77^\circ 02' 12''\text{W}$ . Nämä koordinaatit vastaavat pallokoordinaatiston pisteitä

$$\begin{aligned} H &= (r, \lambda_H, \delta_H) \approx (6378; 0,435; 1,050) \quad \text{ja} \\ W &= (r, \lambda_W, \delta_W) \approx (6378; -1,345; 0,679). \end{aligned}$$

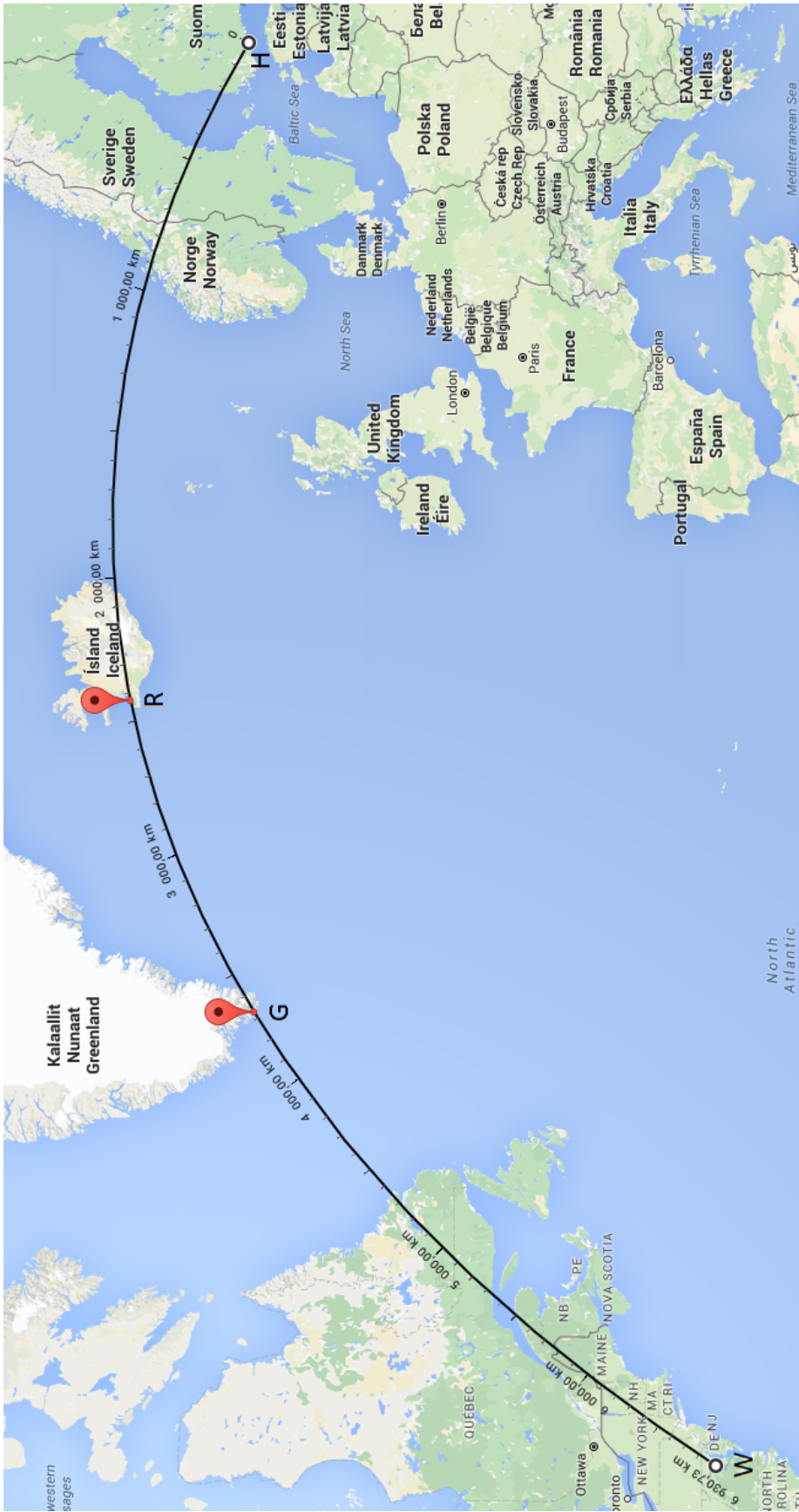
Lauseen 4.6 mukaan pisteiden väliseksi etäisyydeksi saadaan

$$\begin{aligned} d_S(H, W) &= r\psi \\ &= 6378 \text{ km} \cdot \arccos(\sin \lambda_H \cdot \sin \lambda_W + \cos \lambda_H \cdot \cos \lambda_W \cdot \cos(\delta_H - \delta_W)) \\ &\approx 6938 \text{ km} \end{aligned}$$

Esimerkin 4.7 perusteella saadaan lyhin reitti pisteiden  $H$  ja  $W$  välille. Reitti kulkee esimerkiksi pisteiden

$$\begin{aligned} R &= f\left(\frac{7}{20}\psi\right) \approx (-0,386; 1,119) \quad \text{ja} \\ G &= f\left(\frac{53}{100}\psi\right) \approx (-0,777; 1,047) \end{aligned}$$

kautta. Piste  $R$  vastaa kartalla koordinaatteja  $64^\circ 8' 0''\text{N}$   $22^\circ 8' 21''\text{W}$  ja sijaitsee merellä noin 15 kilometriä länteen Islannin pääkaupungista Reykjavíkista. Piste  $G$  taas vastaa kartalla koordinaatteja  $59^\circ 58' 23''\text{N}$   $44^\circ 32' 27''\text{W}$  ja sijaitsee Grönlannin eteläkärjessä noin seitsemän kilometriä kaakkoon Narsarmijitistä.



KUVA 8. Lyhin reitti Helsingistä Washingtoniin.





## Lähteet

- [1] Bendersky. *The calculus of variations*, Hunter College, 2008.  
<http://math.hunter.cuny.edu/~benders/cofv.pdf>. 12.3.2017
- [2] Blåsjö. *The Isoperimetric Problem*, The American Mathematical Monthly, vol. 112(6). Mathematical Association of America, 2005.
- [3] Brookfield. *Yet Another Elementary Solution of the Brachistochrone Problem*, Mathematics Magazine, vol. 83(1). Mathematical Association of America, 2010.
- [4] Gelfand, Fomin, Silverman. *Calculus of Variations*, Dover Publications, 2000.
- [5] Goldestine. *A history of the calculus of variations from the 17th through 19th century*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [6] Hildebrandt, Tromba. *The parsimonious universe: shape and form in the natural world*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [7] Horton. *Calculus of Variations and Other Various Things ;)*, HoustonACT.  
<https://online.math.uh.edu/HoustonACT/Pete/presentation.pdf>. 16.12.2016.
- [8] Hrusa, Troutman. *Elementary Characterization of Classical Minima*, The American Mathematical Monthly, vol. 88(5). Mathematical Association of America, 1981.
- [9] Lehtinen. *Matematiikan historia*, Matematiikkalehti Solmu.  
<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/index.html>. 2.8.2016.
- [10] Olver. *Introduction to the Calculus of Variations*, University of Minnesota, 2016.  
[http://www.math.umn.edu/~olver/ln\\_/cv.pdf](http://www.math.umn.edu/~olver/ln_/cv.pdf)
- [11] Ramana. *Calculus of Variations*, Indian Institute of Space Science and Technology, 2006.  
[https://www.iist.ac.in/sites/default/files/people/Calculus\\_of\\_Variations.pdf](https://www.iist.ac.in/sites/default/files/people/Calculus_of_Variations.pdf)
- [12] Strous. *Great Circles*, Astronomy Answers.  
<http://aa.quae.nl/en/reken/grootcirkel.html>. 6.5.2016
- [13] Thompson. *Isoperimetrical problems*, Nature series: Popular lectures and addresses, Volume II, MacMillan and Company, New York, 1894.
- [14] Wan. *Introduction to the calculus of variations and its applications*, Chapman & Hall, 1995.