

**This is an electronic reprint of the original article.  
This reprint *may differ* from the original in pagination and typographic detail.**

**Author(s):** Banichuk, Nikolay; Barsuk, A. A.; Ivanova, S. Ū.; Makeev, E. V.; Neittaanmäki, Pekka;  
Tuovinen, Tero

**Title:** Анализ и оптимизация устойчивости балок на сплошном упругом основании часть I (балки конечной длины) [Analysis and optimization of a beam on elastic foundation. Part I (Limited beams)]

**Year:** 2017

**Version:**

**Please cite the original version:**

Banichuk, N., Barsuk, A.A., Ivanova, S. Ū., Makeev, E. V., Neittaanmäki, P., & Tuovinen, T. (2017). Анализ и оптимизация устойчивости балок на сплошном упругом основании часть I (балки конечной длины) [Analysis and optimization of a beam on elastic foundation. Part I (Limited beams)]. Institut problem mehaniki RAN. Institut problem mehaniki, Preprint, 1144.

All material supplied via JYX is protected by copyright and other intellectual property rights, and duplication or sale of all or part of any of the repository collections is not permitted, except that material may be duplicated by you for your research use or educational purposes in electronic or print form. You must obtain permission for any other use. Electronic or print copies may not be offered, whether for sale or otherwise to anyone who is not an authorised user.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю. ИШЛИНСКОГО  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Н.В. Баничук, А.А.Барсук, С.Ю. Иванова, Е.В. Макеев,  
П. Нейтгаанмяки, Т. Туовинен

**АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ БАЛОК  
НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ  
ЧАСТЬ I (БАЛКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ)**

Препринт № 1144

**Москва 2017**

## Аннотация.

Исследуются задачи определения оптимальных по критерию устойчивости распределений площадей поперечных сечений балок, расположенных на упругом основании. Анализируются задачи устойчивости ограниченных балок с шарнирным опиранием концов и бесконечных балок. Для обоих типов балок проводится анализ устойчивости как для балок с постоянными, так и для балок с переменными жесткостными характеристиками. Приводится определение критической длины балки и вариационная формулировка задач устойчивости для этого типа балок.

Для случая линейной зависимости изгибной жесткости от площади поперечного сечения балки приводится точное решение задачи оптимизации. Для случаев квадратичной и кубической зависимостей излагаются процедуры численного решения задачи оптимизации, а результаты расчетов представляются в графической форме

## Summary

Problems of defining the optimal (against buckling) cross section area distribution for beams interacting with elastic foundation are considered. The stability of limited pinned beams and infinite continuous beams is analyzed. For all beams under consideration, the stability analysis is performed as for constant as for variable distributions of strength beam characteristics. The critical length is determined and the variational statement of beam stability problems is presented for this beam type.

The exact solution of optimal problem is presented in the case of linear dependence of limited beam bending hardness on beam cross section area. For the case of squared and cubic dependences, the numerical solutions are presented and discussed.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-00775а)*

ISBN 978-5-91741-196-5

055(02)2 © Институт проблем механики РАН 2017

## Введение

Изучение модели балки на упругом основании очень важно как с теоретической, так и с практической точки зрения. Данная модель является простейшей для описания взаимодействия упругих деформируемых сред с внешней средой и позволяет получать аналитические решения для многих интересных случаев. Базовые знания по поведению балок и пластин, лежащих на винклеровском упругом основании можно получить из классических книг [1,2].

Модель балки, взаимодействующей с упругим основанием, часто используется для изучения задач колебаний и устойчивости. Исследованию данных задач посвящено большое число публикаций. Из них отметим следующие. Так статические формы потери устойчивости Эйлеровой балки в упругой среде (Задача устойчивости для балки впервые решена Эйлером [3] для простой балки), подробно изучается в [4] на основе анализа дифференциальных уравнений, описывающих изгиб упругой балки (колонны) для общего случая упругих граничных условий. В качестве особого случая выделим изучение задач потери устойчивости и колебаний для бесконечных балок и периодических структур. Подробный анализ колебаний бесконечной балки на упругом основании приведен в работе [5]. Методология статического анализа бесконечных периодических структур изложена в [6]. Устойчивость балки с периодической системой опор исследованы в [7].

Деформированное состояние балки на упругом основании или на периодической системе упругих опор при потере ею устойчивости обладает рядом характерных особенностей, среди которых укажем на наиболее яркие из них – многоволновый характер форм потери

устойчивости для балок на упругом сплошном основании, и на впервые указанный И.Г. Бубновым [8] эффект не проседания опор – для балок, опертых на периодическую систему упругих опор. Несмотря на имеющиеся многочисленные решения этого класса задач для балок конечной длины, оставаясь в рамках построений решений задач устойчивости для конечных балок на упругом основании остается затруднительным дать ясное объяснение указанным особенностям деформирования.

Анализ приводимых в справочной и научной литературе расчетов по устойчивости неразрезной балки, опирающейся на систему равноотстоящих как абсолютно жестких, так и упругих опор показывает, что распределение критических сил для балок, опирающихся всего лишь на несколько равноотстоящих опор выходит на асимптотическое распределение, мало изменяющееся с увеличением числа опор. Это обстоятельство естественным образом приводит к формулировке, построению и анализу решений задачи об устойчивости бесконечной неразрезной балки, опирающейся на периодическую систему опор.

В свою очередь математическая модель этой задачи представляет собой периодическую спектральную задачу, решения которой обладают рядом фундаментальных свойств, присущих решениям всех периодических спектральных задач. Необходимо при этом подчеркнуть, что фактическое построение решений для бесконечной балки ввиду отсутствия параметра длины балки приводит к заметным упрощениям по сравнению с процессом построения решений для балок конечной длины и, что особенно важно, в решениях для бесконечной балки в явном виде выделена периодическая структура решения.

Аналогичным образом можно установить тесную связь между решениями задачи устойчивости конечных балок на упругом основании и бесконечных балок. Анализ решения задачи устойчивости бесконечной балки показывает, что деформированное состояние балки представляет собой периодическую структуру, при этом величина периода этой структуры находится в процессе решения задачи устойчивости.

Ниже подробно излагаются процедуры формирования спектра критических сил и решения задачи оптимизации как для балок конечной и равной полупериоду формообразования длины и называемой далее критической, так и для бесконечных балок. Важнейшей особенностью формулировки задачи устойчивости для балок критической длины является формирование граничных условий, генерируемых свойством периодичности спектральной задачи устойчивости, и которые в рассматриваемой задаче устойчивости представляют собой условия шарнирного опирания концов балки. В результате естественным образом приходим к исследованию задачи устойчивости и задачи оптимизации устойчивости шарнирно закрепленного стержня конечной и равной полупериоду волнообразования длины (критической длины)

Приведем далее краткую аннотацию содержания и мотивацию обсуждаемых ниже тем.

Часть I препринта (Балки конечной длины).

В п.1. "Анализ вариационных задач, зависящих от параметра" в общей форме выводится правило дифференцирования функционалов по параметру, которое эффективно используется при анализе устойчивости балок на упругом основании. Особенно удобным применение этого правила оказалось при определении периода оптимального распределения

толщин совпадающего с критической длиной балки с шарнирным опиранием концов.

П.2. “Устойчивость ограниченных балок с постоянными жесткостными характеристиками” посвящен анализу устойчивости балок с шарнирным опиранием концов и с постоянными жесткостными характеристиками. Здесь приводится точное решение задачи устойчивости, ее вариационная формулировка, вводится понятие критической длины и приводятся точные выражения для этой длины. Обсуждаемые здесь вопросы имеют самое непосредственное отношение к решению задачи устойчивости бесконечной балки на упругом основании, поскольку решение этой задачи сводится к решению задачи устойчивости балки критической длины с шарнирным опиранием концов (см. п.4). Анализу устойчивости и оптимизации ограниченных балок с переменными жесткостными характеристиками и шарнирным опиранием концов посвящен п.3. “Анализ и оптимизация устойчивости ограниченных балок с переменными жесткостными характеристиками”. В этом пункте, так же как и в п.2 рассматриваются балки критической длины, для которых строятся оптимальные решения, как в аналитической форме, так и в численной. Приводимые здесь решения задач оптимизации одновременно служат решениями и для задачи оптимизации бесконечной балки.

Часть II препринта (Бесконечные балки).

В наиболее объемном п.4. “Устойчивость бесконечной балки на сплошном упругом основании” подробно обсуждаются многочисленные вопросы, связанные с построением решений задачи устойчивости бесконечной балки, как с постоянными, так и с переменными и в особенности периодическими распределениями ее жесткостных характеристик. Следует отметить приводимое здесь точное решение задачи устойчивости балки на

упругом основании и опертой на периодическую систему жестких опор. Наличие такого решения позволяет исчерпывающим образом проанализировать формирование спектра критических сил для периодической спектральной задачи устойчивости.

## 1. Анализ вариационных задач, зависящих от параметра

Математические формулировки многочисленных задач механики и физики, в том числе и подробно обсуждаемые далее задачи об устойчивости балок на сплошном упругом основании, могут быть представлены в форме вариационных задач вида

$$h(\gamma) = \min_w J(w; \gamma), \quad (1.1)$$

где  $J(w; \gamma)$  – определяемый конкретной задачей функционал,  $w$  – функция, описывающая состояние исследуемой системы и  $\gamma$  – скалярный вещественный параметр. Предполагается, что в каждом конкретном случае функция состояния системы  $w$  удовлетворяет всем требуемым условиям – дифференцируемости необходимое число раз, граничным условием и т.п.

С целью исключения в последующем изложении постоянных оговорок о законности тех или иных операций над функцией  $w$ , принимается, что все выполняемые операции – допустимы.

Приступим теперь к анализу поведения зависимости  $h(\gamma)$  и, прежде всего, получим выражение для первой производной  $h'(\gamma)$ . С этой целью будем исходить из определения производной

$$h'(\gamma) = \lim_{\Delta\gamma \rightarrow 0} \frac{h(\gamma + \Delta\gamma) - h(\gamma)}{\Delta\gamma}. \text{ Пусть } w(\gamma) \text{ и } w(\gamma + \Delta\gamma) \text{ – решения}$$

вариационной задачи (1.1), отвечающие значениям параметра  $\gamma$  и  $\gamma + \Delta\gamma$  соответственно и, таким образом, для этих решений имеем



$$\delta_w J(w(\gamma); \gamma) = 0, \quad \delta_w J(w(\gamma + \Delta\gamma); \gamma + \Delta\gamma) = 0 \text{ и}$$

$$h(\gamma) = J(w; \gamma), \quad h(\gamma + \Delta\gamma) = J(w(\gamma + \Delta\gamma); \gamma + \Delta\gamma). \quad \text{С учетом}$$

приведенных соотношений выражение для производной преобразуется к виду

$$\begin{aligned} h'(\gamma) &= \lim_{\Delta\gamma \rightarrow 0} \frac{h(\gamma + \Delta\gamma) - h(\gamma)}{\Delta\gamma} = \\ &= \lim_{\Delta\gamma \rightarrow 0} \frac{J(w(\gamma + \Delta\gamma); \gamma + \Delta\gamma) - J(w(\gamma); \gamma)}{\Delta\gamma} = \\ &= \lim_{\Delta\gamma \rightarrow 0} \frac{J(w(\gamma) + \Delta w(\gamma); \gamma + \Delta\gamma) - J(w(\gamma); \gamma)}{\Delta\gamma} = \\ &= \lim_{\Delta\gamma \rightarrow 0} \frac{\delta_w J(w(\gamma)) + \frac{\partial J}{\partial \gamma} \Delta\gamma}{\Delta\gamma} = \frac{\partial J}{\partial \gamma} \end{aligned}$$

Таким образом, приходим в результате к представлению для  $h'(\gamma)$

$$h'(\gamma) = \frac{\partial J(w; \gamma)}{\partial \gamma} \quad (1.2)$$

Подчеркнем, что по предположению функция  $w$  в (1.2) удовлетворяет необходимому условию экстремума  $\delta_w J(w; \gamma) = 0$ .

В случае если в интервале  $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ ,  $h'(\gamma) \neq 0$ , то зависимость  $h(\gamma)$  в этом интервале – монотонна и в силу этого достигает своих экстремальных значений на концах интервала  $\gamma = \gamma_1$  и  $\gamma = \gamma_2$ .

Пусть теперь  $\gamma = \gamma_*$  – значение параметра, при котором производная  $h'(\gamma)$  обращается в ноль. В соответствии с (1.2) условием для определения значений  $\gamma_*$  служит уравнение

$$\frac{\partial J(w; \gamma)}{\partial \gamma} = 0. \quad (1.3)$$

Относительно параметра  $\gamma$  (1.3) представляет собой нелинейное уравнение, а его решения можно рассматривать как некоторые функционалы, определенные на решениях  $w$ .

Обозначим решение уравнения (1.3) (одно из решений в случае существования нескольких решений) через  $\gamma_* = \gamma(w)$ , а отвечающее значению параметра  $\gamma = \gamma_*$  значение зависимости  $h(\gamma)$  – через  $h_* = h(\gamma_*)$ .

Покажем, что для  $h_*$  справедливо вариационное представление

$$h_* = \min_w J(w; \gamma(w)) = \min_w \Phi(w), \quad \Phi(w) \equiv J(w; \gamma(w)) \quad (1.4)$$

Действительно, с учетом значений  $\delta_w J(w; \gamma) = 0$  и  $\partial J / \partial \gamma = 0$

имеем  $\delta \Phi(w) = \delta_w J(w; \gamma(w)) + \frac{\partial J}{\partial \gamma} \delta \gamma(w) = 0$  и, таким образом, для

значений  $\gamma = \gamma_*$  первая вариация функционала  $\Phi(w)$  обращается в ноль.

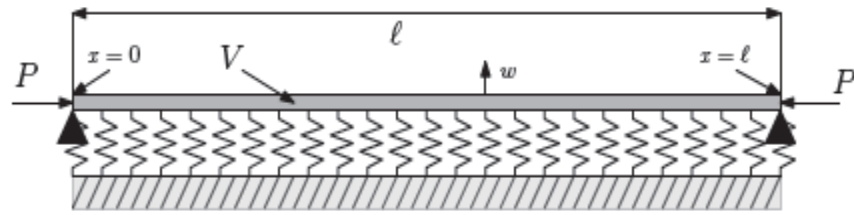
Вариационная формулировка (1.4) в дальнейшем будет существенно использоваться при анализе обсуждаемых далее задач. Удобство вариационного представления (1.4) для экстремальных значений зависимости  $h(\gamma)$  по сравнению с представлением (1.1) состоит в исключении параметра  $\gamma$  из вариационного представления обсуждаемой зависимости. Наряду с этим можно также отметить, что представление (1.4) может служить основой для получения вариационных оценок для экстремальных значений  $h_*$ .

## **2. Устойчивость ограниченных балок с постоянными жесткостными характеристиками**

### **2.1. Формулировка задачи устойчивости, построение и анализ решений**

Рассматривается задача об устойчивости сжимаемой балки, лежащей на сплошном упругом основании, характеризуемом коэффициентом жесткости  $c$ . Балка имеет длину  $l$ , постоянную вдоль длины балки

изгибную жесткость  $EJ$  и подвержена сжатию осевой силой  $P$ . Концы балки находятся в условиях шарнирного опирания. (Фиг 1.1)



Фиг.1.1

С целью математической формулировки задачи устойчивости введем направленную вдоль оси недеформированной балки горизонтальную ось  $ox$ , так что концы балки имеют координаты  $x = 0$  и  $x = l$ . Поперечные прогибы балки  $w(x)$  при потере устойчивости удовлетворяют дифференциальному уравнению и условиям шарнирного опирания

$$EJw_{xxxx} + Pw_{xx} + cw = 0,$$

$$w(0) = EJw_{xx}(0) = w(l) = EJw_{xx}(l) = 0 \quad (2.1.1)$$

Для возможности проведения в последующем изложении сравнительного анализа решений спектральной задачи (2.1.1) для постоянных распределений изгибных жесткостей  $EJ$  и аналогичной задачи для переменных жесткостей  $EJ(x)$  введем в рассмотрение изгибные жесткости вида  $EJ = A_j S^j$ , где  $j = 0, 1, 2, 3$ ,  $S$  – площадь поперечного сечения балки, а коэффициенты  $A_1, A_2, A_3$  характеризуют тип сечения балки. При этом значению  $j = 0$  соответствует значение изгибной жесткости  $EJ = A_0$  не связанное с характеристиками поперечного сечения и, таким образом, все получаемые в дальнейшем соотношения при  $j = 0$  отвечают общепринятым соотношениям для балок с постоянной изгибной жесткостью.

Введем далее безразмерную независимую переменную  $\tilde{x}$ , нормированное на единичный объем поперечное сечение балки  $\tilde{S}$ , параметры  $\lambda$  и  $\tilde{c}$  (с последующим опусканием тильд)

$$x = l\tilde{x}, \quad S = V\tilde{S} / l, \quad P = A_j V^j \lambda, \quad c = AV^j \tilde{c}, \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (2.1.2)$$

и перепишем спектральную краевую задачу (2.1.1) в виде

$$\begin{aligned} w_{xxxx} + \lambda l^{j+2} w_{xx} + cl^{j+4} w &= 0, \\ w(0) = w_{xx}(0) = w(l) = w_{xx}(l) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

(для сокращения последующей записи указанные в (2.1.2) значения показателя степени  $j$  далее не приводятся).

Решения краевой задачи (2.1.3) с учетом граничных условий будем искать

в форме ряда Фурье,  $w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x$  с использованием которого

дифференциальное уравнение в (2.1.3) преобразуется в уравнение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( (n\pi)^4 - (n\pi)^2 \lambda l^{j+2} + cl^{j+4} \right) \sin n\pi x = 0. \quad (2.1.4)$$

В силу полноты и ортогональности системы функций  $\sin n\pi x$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) условием выполнения уравнения (2.1.4) является обращение в ноль всех множителей, стоящих перед  $\sin n\pi x$ , т.е.

$$c_n \left( (n\pi)^4 - (n\pi)^2 \lambda l^{j+2} + cl^{j+4} \right) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.5)$$

Обращение в ноль коэффициента  $c_n$  в (2.1.5) означает, что Фурье-компонента  $\sin n\pi x$  не входит в представление для прогиба, в то время как при обращении в ноль выражения в скобках приходим к уравнению, связывающему значения параметров  $\lambda$ ,  $c$  и  $l$

$(n\pi)^4 - (n\pi)^2 \lambda l^{j+2} + cl^{j+4} = 0$  или в разрешенной относительно параметра  $\lambda$  форме – зависимости от параметра  $l$

$$\lambda_n(l) = \frac{n^2 \pi^2}{l^{j+2}} + c \frac{l^2}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.6)$$

Критическим силам потери устойчивости отвечают наименьшие значения зависимости  $\lambda_n(l)$ . При фиксированных значениях длины балки и жесткости основания наименьшие значения  $\lambda_n(l)$  определяются выбором соответствующих значения  $n$ . При фиксированном значении  $n$ , т.е. при анализе потери устойчивости с образованием  $n$  полуволн зависимость  $\lambda_n(l)$  принимает наименьшее значение при значениях  $l = l_n^*$ , называемых далее критическими, удовлетворяющих условиям  $\lambda'_n(l) = 0$ .

С использованием этого условия приходим к выражениям для критических длин  $l_n^*$  и отвечающим им значениям критических сил  $\lambda_n^* = \lambda_n(l_n^*)$

$$l_n^* = \left( \frac{j+2}{2c} \right)^{\frac{1}{j+4}} (n\pi)^{\frac{4}{j+4}}, \quad \lambda_n^* = \frac{j+4}{2} \left( \frac{2c}{j+2} \right)^{\frac{j+2}{j+4}} (n\pi)^{-\frac{2j}{j+4}},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.7)$$

В частности, при  $j = 0$  выражения (2.1.7) принимают вид

$$l_n^* = \frac{n\pi}{\sqrt[4]{c}}, \quad \lambda_n^* = 2\sqrt{c}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.8)$$

и, таким образом, с уменьшением жесткости основания критическая длина балки увеличивается, а отвечающая этим длинам критическая сила  $\lambda_n^*$  не зависит от количества полуволн, по которым происходит потеря устойчивости.

## 2.2. Вариационная формулировка задачи устойчивости для балок критической длины

Стандартными вычислениями можно убедиться, что соотношения спектральной краевой задачи (2.1.1.) представляют собой необходимые условия экстремума для функционала

$$P = \min_w \frac{\int_0^l EJw_{xx}^2 dx + c \int_0^l w^2 dx}{\int_0^l w_x^2 dx},$$

$$w(0) = EJw''(0) = w(l) = EJw''(l) = 0 \quad (2.2.1)$$

В обозначениях (2.1.2) вариационная формулировка задачи устойчивости (2.2.1) принимает вид

$$\lambda(l) = \min_w \left( \frac{1}{l^{j+2}} \frac{J_1(w)}{J_3(w)} + cl^2 \frac{J_2(w)}{J_3(w)} \right), \quad (2.2.2)$$

$$w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0$$

где для сокращения записи введены обозначения для фигурирующих в (2.2.2) функционалов

$$J_1(w) = \int_0^1 w_{xx}^2 dx, \quad J_2(w) = \int_0^1 w^2 dx, \quad J_3(w) = \int_0^1 w_x^2 dx \quad (2.2.3)$$

Отметим, что для точных решений вариационной задачи (2.2.2) (или спектральной задачи (2.1.3))  $w_n(x) = C_n \sin n\pi x$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  ( $C_n$  – произвольные постоянные) функционалы в (2.2.3) принимают значения

$$J_1(w_n) = \frac{n^4 \pi^4}{2} C_n^2, \quad J_2(w_n) = \frac{1}{2} C_n^2, \quad J_3(w_n) = \frac{n^2 \pi^2}{2} C_n^2 \quad (2.2.4)$$

подстановка, которых в (2.2.2) приводит к выражению (2.1.6) для  $\lambda_n(l)$

Преобразуем далее вариационное представление (2.2.2) для критических сил, справедливое для балок произвольной длины, для случая балок критической длины, т.е., определяемых условием  $\lambda'(l) = 0$ .

С использованием общего правила дифференцирования функционалов по параметру (см. (1.2)) приходим к представлениям для критических длин балки и отвечающих им значений критических сжимающих сил, а с

использованием (1.4) – и к вариационному представлению для этих критических сил

$$l^* = \left( \frac{k+2}{2c} \right)^{\frac{1}{k+4}} \left( \frac{J_1(w)}{J_2(w)} \right)^{\frac{1}{k+4}}, \quad \lambda^* = \frac{k+4}{2} \left( \frac{2c}{k+2} \right)^{\frac{k+2}{k+4}} \min_w \Phi_k(w),$$

$$\Phi_k(w) = \frac{1}{J_3(w)} \left( J_1^2(w) J_2^{k+2} \right)^{\frac{1}{k+4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (2.2.6)$$

где функции прогиба подчиняются граничным условиям в (2.2.2). Необходимое условие экстремума функционала  $\Phi(w)$   $\delta\Phi(w) = 0$  приводит к уравнению Эйлера относительно прогибов

$$w_{xxxx} + a(w)w_{xx} + b(w)w = 0,$$

$$w(0) = w_{xx}(0) = w(1) = w_{xx}(1) = 0 \quad (2.2.7)$$

в котором функционалы  $a(w)$ ,  $b(w)$  определяются выражениями

$$a(w) = \frac{j+4}{2} \frac{J_1(w)}{J_3(w)}, \quad b(w) = \frac{j+2}{2} \frac{J_1(w)}{J_2(w)} \quad (2.2.8)$$

С учетом граничных условий для прогиба будем искать решение спектральной задачи (2.2.7) в форме ряда Фурье  $w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x$  и соответственно этому представим дифференциальное уравнение в (2.2.7) в уравнение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( (n\pi)^4 - a(w)(n\pi)^2 + b(w) \right) \sin n\pi x = 0 \quad (2.2.9)$$

В силу полноты и ортогональности системы функций  $\sin n\pi x$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) для класса функций с нулевыми значениями на концах интервала  $[0, 1]$  условием выполнения уравнения (2.2.7) является обращение в ноль всех множителей, стоящих перед  $\sin n\pi x$ , т.е.

$$c_n \left( (n\pi)^4 - a(w)(n\pi)^2 + b(w) \right) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.10)$$

Обращение в ноль коэффициента  $c_n$  в (2.2.10) означает, что Фурье-компонента  $\sin n\pi x$  не входит в представление для прогиба, в то время как при обращении в ноль выражения в скобках приходим к уравнению, связывающему значения функционалов  $a(w)$  и  $b(w)$

$$(n\pi)^4 - a(w)(n\pi)^2 + b(w) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.11)$$

при этом соответствующие значения коэффициентов  $c_n \neq 0$ . Подчеркнем, что в определениях функционалов  $a(w)$  и  $b(w)$  (2.2.8) входит полное выражение для прогиба и, таким образом, в общем случае бесконечная система уравнений (2.2.11) представляет собой связанную систему уравнений при этом входящие в определение  $a(w)$  и  $b(w)$  функционалы имеют представления

$$\begin{aligned} J_1(w) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^4 c_n^2, & J_2(w) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \\ J_3(w) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 c_n^2 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

В частности, если функции прогиба представляются только одной компонентой, т.е.  $w_n(x) = c_n \sin n\pi x$ , то функционалы  $J_1(w_n)$ ,  $J_2(w_n)$ ,  $J_3(w_n)$  принимают указанные в (2.2.4) значения, а отвечающие им значения функционалов  $a(w)$  и  $b(w)$  с учетом их определений (2.2.8) представляются в виде

$$a(w_n) = \frac{j+4}{2} n^2 \pi^2, \quad b(w_n) = \frac{j+2}{2} n^4 \pi^4, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.13)$$

Для значений (2.2.13) функционалов  $a(w)$  и  $b(w)$  уравнения (2.2.11) выполняются для всех значений  $n = 1, 2, 3, \dots$  и, таким образом, функции  $w_n(x) = c_n \sin n\pi x$  являются решениями спектральной краевой задачи (2.2.7).



Приведем также отвечающие указанным точным решениям  $w_n(x)$  значения фигурирующих в (2.2.6) функционалов  $\Phi_\alpha(w)$ , критических длин и критических сил. Имеем для  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$j = 0: l_n^* = \frac{n\pi}{\sqrt[4]{c}}, \quad \Phi_0(w_n) = 1, \quad \lambda_n^* = 2\sqrt{c}, \quad (2.2.14)$$

$$j = 1: l_n^* = \sqrt[5]{\frac{3}{2c}} \sqrt[5]{n^4 \pi^4}, \quad \Phi_1(w_n) = \frac{1}{\sqrt[5]{n^2 \pi^2}}, \quad \lambda_n^* = \frac{5}{2} \sqrt[5]{\frac{8c^3}{27}} \frac{1}{\sqrt[5]{n^2 \pi^2}}$$

$$j = 2: l_n^* = \sqrt[6]{\frac{2}{c}} \sqrt[3]{n^2 \pi^2}, \quad \Phi_2(w_n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 \pi^2}}, \quad \lambda_n^* = 3 \sqrt[3]{\frac{c^2}{4}} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 \pi^2}}$$

$$j = 3: l_n^* = \sqrt[7]{\frac{5}{2c}} \sqrt[7]{n^4 \pi^4}, \quad \Phi_3(w_n) = \frac{\sqrt[7]{n\pi}}{n\pi}, \quad \lambda_n^* = \frac{7}{2} \sqrt[7]{\left(\frac{2c}{5}\right)^5} \frac{\sqrt[7]{n\pi}}{n\pi}$$

В иллюстративных целях приведем значения функционалов  $\Phi_j(w)$

( $j = 0, 1, 2, 3$ ) для функции  $\tilde{w}(x) = x(1-x)(1+x(1-x))$ ,

аппроксимирующей прогиб при потере устойчивости по форме без узлов и удовлетворяющей условиям шарнирного опирания. Указанная форма соответствует точному решению  $w_1(x) = c_1 \sin \pi x$ . Непосредственные вычисления приводят к значениям функционалов (в скобках приводятся значения этих же функционалов, отвечающих точному решению)

$$w_1(x) = \sin(\pi x)$$

$$\Phi_0(\tilde{w}) = 1.00058 (1.); \quad \Phi_1(\tilde{w}) = 0.63289 (0.63262);$$

$$\Phi_2(\tilde{w}) = 0.466352 (0.46619);$$

$$\Phi_3(\tilde{w}) = 0.374963 (0.374862).$$

Из приведенных результатов видно, что значения функционалов  $\Phi_j(w)$

( $j = 0, 1, 2, 3$ ) для пробной функции прогиба выше соответствующих значений для точных решений, что находится в полном соответствии с

вариационной формулировкой задачи устойчивости (2.2.6) для балок критической длины. Отметим при этом, что приведенные значения  $\Phi_j(\tilde{w})$  получены с использованием точных значений входящих в определение  $\Phi_j(\tilde{w})$  интегралов

### 3. Анализ и оптимизация устойчивости ограниченных балок с переменными жесткостными характеристиками

#### 3.1. Вариационная формулировка задачи устойчивости балок критической длины

С сохранением обозначений п.2.1 спектральная краевая задача, отвечающая устойчивости лежащей на сплошном упругом основании сжимаемой балки переменной жесткости и шарнирным закреплением концов описывается соотношениями

$$(EJ(x)w_{xx})_{xx} + Pw_{xx} + cw = 0, \\ w(0) = EJ(0)w_{xx}(0) = w(l) = EJ(l)w_{xx}(l) = 0 \quad (3.1.1)$$

Далее рассматриваются изгибные жесткости вида  $EJ(x) = A_j S^j(x)$ , где  $j = 1, 2, 3$ ,  $S(x)$  – распределение площадей переменных поперечных сечений балки, а коэффициенты  $A_1, A_2, A_3$  характеризуют тип сечения балки.

Соотношения (3.1.1) представляют собой необходимые условия для вариационной задачи

$$P = \min_w \frac{\int_0^l EJ(x)w_{xx}^2 dx + c \int_0^l w^2 dx}{\int_0^l w_x^2 dx} \\ w(0) = EJ(0)w_{xx}(0) = w(l) = EJ(l)w_{xx}(l) = 0 \quad (3.1.2)$$

или в переменных (2.1.2)

$$\lambda(S, l) = \min_w \left( \frac{1}{l^{j+2}} \frac{J_1(w)}{J_3(w)} + cl^2 \frac{J_2(w)}{J_3(w)} \right),$$

$$w(0) = m(0) = w(1) = m(1) = 0 \quad (3.1.3)$$

где для сокращения записи введены обозначения для изгибающего момента  $m(x)$  и фигурирующих в (3.1.3) функционалов

$$m(x) = S^j(x) w_{xx}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.1.4)$$

$$J_1(w) = \int_0^1 S^j(x) w_{xx}^2 dx, \quad J_2(w) = \int_0^1 w^2 dx, \quad J_3(w) = \int_0^1 w_x^2 dx$$

Преобразуем далее общее вариационное представление (3.1.3) для критических сил в представление для критических сил, отвечающих критическим длинам балки. С учетом условия  $\lambda'(l) = 0$  для определения критических длин или в более подробной записи – уравнения

$$-\frac{j+2}{l^{j+3}} \frac{J_1}{J_3} + 2cl \frac{J_2}{J_3} = 0$$

приходим к представлениям для критических

длин балки и отвечающих им значений критических сжимающих сил, а с использованием (1.4) – и к вариационному представлению для этих критических сил (см. также (2.2.6))

$$l^* = \left( \frac{j+2}{2c} \right)^{\frac{1}{j+4}} \left( \frac{J_1(w)}{J_2(w)} \right)^{\frac{1}{j+4}}, \quad \lambda^* = \frac{j+4}{2} \left( \frac{2c}{j+2} \right)^{\frac{j+2}{j+4}} \min_w \Phi_j(w),$$

$$\Phi_j(w) = \frac{1}{J_3(w)} \left( J_1^2(w) J_2^{j+2} \right)^{\frac{1}{j+4}}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (3.1.5)$$

где функции прогиба подчиняются граничным условиям в (3.1.3).

Необходимое условие экстремума функционала  $\Phi(w)$  – обращение его первой вариации в ноль  $\delta\Phi(w) = 0$  приводит к уравнению Эйлера относительно прогибов

$$(S^j w_{xx})_{xx} + a(w)w_{xx} + b(w)w = 0,$$

$$w(0) = S^j(0)w_{xx}(0) = w(1) = S^j(1)w_{xx}(1) = 0 \quad (3.1.6)$$

или с использованием обозначения для изгибающего момента – к уравнению

$$m_{xx} + a(w)w_{xx} + b(w)w = 0,$$

$$w(0) = m(0) = w(1) = m(1) = 0 \quad (3.1.7)$$

в которых функционалы  $a(w)$ ,  $b(w)$  определяются выражениями

$$a(w) = \frac{j+4}{2} \frac{J_1(w)}{J_3(w)}, \quad b(w) = \frac{j+2}{2} \frac{J_1(w)}{J_2(w)} \quad (3.1.8)$$

## 3.2. Построение оптимальных решений в задаче об устойчивости балки с критическим значением длины балки

### 3.2.1. Формулировка задачи оптимизации и необходимых условий оптимальности

Рассмотрим задачу определения распределения поперечных сечений балки фиксированного объема, для которых величина сжимающего усилия, при котором происходит потеря устойчивости лежащей на упругом основании балки – максимальна. В математической записи сформулированная задача записывается в виде

$$S^*(x) : \lambda_*(l) = \max_{S(x)} \lambda(S, l), \quad \int_0^1 S(x) dx = 1, \quad (3.2.1.1)$$

где функционал  $\lambda(S, l)$  определяется соотношениями (3.1.3), (3.1.4).

Требование обращения в ноль первой вариации оптимизируемого функционала  $\delta\lambda(S, l) = 0$  в результате стандартных вычислений приводит к необходимому условию оптимальности в виде уравнения

$$m^2(x) = S^{j+1}(x), \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.2.1.2)$$

справедливого для произвольных значений длин балки, в том числе и для балок с критическим значением длины  $l = l^*$ .

Для критических значений длин балки функционал  $\lambda^*(S) = \lambda(S, l^*)$  определяется соотношениями вариационной задачи (3.1.5) уравнениями Эйлера для которой служат сформулированные относительно прогибов спектральные краевые задачи (3.1.6), (3.1.8) или (3.1.7), (3.1.8) – включающими в формулировку спектральной задачи наряду с прогибами и изгибающий момент.

Необходимое условие оптимальности (3.2.1.2) совместно с соотношениями (3.1.6), (3.1.8) ((3.1.7), (3.1.8)) образуют полную систему соотношений для определения искомого оптимального распределения площадей поперечных сечений балки.

### **3.2.2. Асимптотический анализ оптимальных распределений поперечных сечений**

В соответствии с уравнением (3.2.1.2) и в силу граничных условий  $m(0) = m(1) = 0$  (см. (3.1.7)) оптимальное сечение балки на ее концах обращается в ноль, что приводит к обращению в ноль коэффициентов при старшей производной в дифференциальном уравнении (3.1.6) при  $x = 0$  и  $x = 1$ . В связи с этим спектральная задача (3.1.6) с оптимальным решением  $S^*(x)$  принадлежит к классу сингулярно возмущенных спектральных задач, решение которых как в аналитической форме, так и их численное решение требует особенно тщательного анализа.

С целью построения эффективных вычислительных процедур решения задачи оптимизации исследуем асимптотическое поведение оптимальных решений в малых окрестностях концов балки.

В дальнейшем изложении ограничимся детальным анализом асимптотического поведения оптимального сечения и отвечающих ему прогибов в малой окрестности левого конца балки  $x = 0$  ( $x \ll 1$ ). В окрестности конца  $x = 1$  ( $1 - x \ll 1$ ) асимптотическое поведение указанных зависимостей остается таким же

При получении асимптотических оценок будем исходить из уравнения Эйлера в форме (3.1.7) и необходимого условия оптимальности (3.2.1.2). Двукратное интегрирование дифференциального уравнения в (3.1.7) с учетом граничных условий шарнирного опирания приводит к интегральному уравнению вида

$$m + aw + b \int_0^x (x - s)w(s)ds = Cx, \quad C = b \int_0^1 (1 - s)w(s)ds \quad (3.2.2.1)$$

Асимптотическое поведение функции прогибов и изгибающего момента при  $x \ll 1$  с учетом граничных значений  $w(0) = 0$  и  $m(0) = 0$  будем искать в виде

$$m(x) \approx c_1 x^\beta, \quad w(x) \approx c_2 x^\gamma, \quad \beta, \gamma > 0, \quad x \ll 1 \quad (3.2.2.2)$$

К асимптотическому поведению оптимального распределения толщин приходим с использованием необходимых условий оптимальности (3.2.1.2) и соотношений (3.2.2.2)

$$S(x) = m \frac{2}{j+1} \approx c_1 \frac{2}{j+1} x^{\frac{2\beta}{j+1}}, \quad x \ll 1 \quad (3.2.2.3)$$

а с учетом определения изгибающего момента – к асимптотическому представлению для  $w_{xx}(x)$  и после последовательных интегрирований

этого представления – к асимптотическим выражениям для  $w_x(x)$  и  $w(x)$  имеем

$$w_{xx}(x) = \frac{m(x)}{S^j(x)} \approx c_1^{-\frac{j-1}{j+1}} x^{-\frac{j-1}{j+1}\beta},$$

$$w_x(x) \approx \frac{j+1}{j+1-(j-1)\beta} c_1^{-\frac{j-1}{j+1}} x^{\frac{j+1-(j-1)\beta}{j+1}} + c_3, \quad (3.2.2.4)$$

$$w(x) \approx c_3 x + c_4 x^{\frac{2(j+1)-(j-1)\beta}{j+1}} + c_5,$$

$$c_4 = \frac{(j+1)^2}{(j+1-(j-1)\beta)(2(j+1)-(j-1)\beta)} c_1^{-\frac{j-1}{j+1}},$$

$$x \ll 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Отметим, что в силу граничного условия  $w(0) = 0$  постоянная  $c_5$  в асимптотическом представлении для  $w(x)$  может быть опущена, а показатель степени во втором слагаемом этого представления должен быть положительным, т.е.  $2(j+1) - (j-1)\beta > 0$ , откуда приходим к допустимому интервалу значений показателя  $\beta : 0 < \beta < 2(j+1) / (j-1)$ .

Обратимся теперь к асимптотическому анализу уравнения (3.2.2.1) и прежде всего оценим асимптотическое поведение интегрального слагаемого в этом уравнении. С использованием асимптотического представления для  $w(x)$  в (3.2.2.2) имеем

$$\int_0^x (x-s)w(s)ds = x^2 \int_0^1 (1-\tau)w(x\tau)d\tau \approx C_0 x^{2+\gamma} \text{ и в результате в}$$

области значений  $x \ll 1$  уравнение (3.2.2.1) представляется в виде

$$m + aw + bC_0 x^{2+\gamma} \approx Cx, \quad x \ll 1 \quad (3.2.2.5)$$

Поскольку  $\gamma > 0$ , то третье слагаемое в левой части уравнения имеет больший порядок малости по сравнению с  $w(x) \approx c_2 x^\gamma$ , вследствие чего

это слагаемое может быть опущено и в итоге с принятой степенью точности приходим к асимптотическому равенству, представленному в разрешенной относительно изгибающего момента форме

$$m(x) \approx -c_2 x^\gamma + Cx, \quad w(x) \approx c_2 x^\gamma \quad (3.2.2.6)$$

С использованием (3.2.2.6) определим значения показателей степени  $\beta > 0$  и  $\gamma > 0$ , фигурирующих в асимптотических представлениях (3.2.2.2). С этой целью проанализируем отдельно случаи  $\gamma < 1$ ,  $\gamma = 1$  и  $\gamma > 1$  исчерпав все возможные значения показателя  $\gamma$ .

При  $\gamma < 1$  имеем  $x \ll x^\gamma$  при  $x \ll 1$ , откуда получаем  $m(x) \approx -c_2 x^\gamma$  и, таким образом, приходим к соотношению  $\beta = \gamma < 1$ . Обращаясь к асимптотическому представлению для прогиба в (3.2.2.4) с учетом значения  $\gamma < 1$  и асимптотического представления  $w(x) \approx c_2 x^\gamma$  для прогиба в (3.2.2.2) имеем  $x \ll x^\gamma$  и

$$w(x) \approx c_3 x + c_4 x^{\frac{2(j+1)-(j-1)\beta}{j+1}} \approx c_4 x^{\frac{2(j+1)-(j-1)\gamma}{j+1}} \approx c_2 x^\gamma. \quad \text{Для}$$

справедливости полученных асимптотических соотношений необходимо

выполнение условия  $\frac{2(j+1)-(j-1)\gamma}{j+1} = \gamma$ , которое удовлетворяется при

$$\gamma = \frac{j+1}{j} > 1, \text{ что находится в противоречии с принятым условием } \gamma < 1. \text{ В}$$

результате приходим к заключению, что анализируемый случай значений  $\gamma < 1$  не реализуется.

При  $\gamma = 1$  из представления (3.2.2.6) приходим к асимптотическим представлениям

$$m(x) \approx (C - c_2)x, \quad w(x) \approx c_2 x \quad (3.2.2.7)$$

При  $\gamma > 1$  из (3.2.2.6) следует, что  $m(x) \approx Cx$  и, следовательно, получаем  $\beta = 1$  и отвечающее этому значению асимптотическое



представление  $w(x) \approx c_3x + c_4x^{\frac{2(j+1)-(j-1)\beta}{j+1}} = c_3x + c_4x^{\frac{j+3}{j+1}} \approx c_3x$ .

Полученное выражение отвечает значению  $\gamma = 1$ , что противоречит принятому условию  $\gamma > 1$ .

Таким образом, в результате выполненного анализа приходим к значениям показателей в (3.2.2.2)  $\beta = \gamma = 1$  и отвечающим им асимптотическим выражениям для изгибающего момента  $m(x)$ , оптимального распределения толщин  $S(x)$ , прогибов  $w(x)$  и производных  $w_x(x)$  и  $w_{xx}(x)$

$$m(x) \approx c_1x, \quad S(x) = m^{\frac{2}{j+1}} \approx c_1^{\frac{2}{j+1}}x^{\frac{2}{j+1}},$$

$$w_{xx}(x) = \frac{m(x)}{S^j(x)} \approx c_1^{-\frac{j-1}{j+1}}x^{-\frac{j-1}{j+1}},$$

$$w_x(x) \approx \frac{j+1}{2}c_1^{-\frac{j-1}{j+1}}x^{\frac{2}{j+1}} + c_2, \quad (3.2.2.8)$$

$$w(x) \approx c_2x + c_4x^{\frac{j+3}{j+1}}, \quad c_4 = \frac{(j+1)^2}{2(j+3)}c_1^{-\frac{j-1}{j+1}}, \quad x \ll 1, \quad j = 1, 2, 3$$

### 3.2.3. Точное решение задачи оптимизации для случая $j = 1$

( $EJ(x) = A_1S(x)$ )

Для изгибных жесткостей, линейно зависящих от площадей поперечных сечений, решение задачи оптимизации удастся получить в замкнутой аналитической форме, что является удобным при выполнении различного рода операций с оптимальными решениями.

Решение задачи оптимизации для случая  $j = 1$  начнем с анализа необходимого условия оптимальности (3.2.1.2), которое с учетом определения для изгибающего момента принимает вид

$$m^2(x) = S^2(x)w_{xx}^2(x) = S^2(x) \quad (3.2.3.1)$$

откуда приходим к нелинейному дифференциальному уравнению  $w_{xx}^2(x) = 1$  или  $w_{xx}(x) = \pm 1$ . Выбирая в последнем равенстве знак минус с учетом нулевых граничных условий для прогибов приходим к краевой задаче относительно прогибов  $w_{xx}(x) = -1$ ,  $w(0) = w(1) = 0$ , ее решению

$$w(x) = \frac{1}{2}x(1-x) \quad (3.2.3.2)$$

и представлению для изгибающего момента

$$m(x) = S(x)w_{xx}(x) = -S(x).$$

Уравнение Эйлера (3.1.7) для рассматриваемого случая с использованием полученных выражений для изгибающего момента и прогиба преобразуется в дифференциальное уравнение относительно искомой функции  $S(x)$

$$-S_{xx} - a + \frac{1}{2}bx(1-x) = 0, \quad S(0) = S(1) = 0 \quad (3.2.3.3)$$

где фигурирующие в уравнении функционалы  $a, b$  при  $j = 1$

определяются выражениями  $a = \frac{5}{2} \frac{J_1(w)}{J_3(w)}$ ,  $b = \frac{3}{2} \frac{J_1(w)}{J_2(w)}$  (см. (3.1.8)).

Для определяемых выражением (3.2.3.2) прогибов с учетом определений функционалов  $J_1, J_2, J_3$  (см. (3.1.4)) имеем  $J_1(w) = 1$ ,  $J_2(w) = \frac{1}{120}$ ,

$J_3(w) = \frac{1}{12}$  и таким образом получаем значения функционалов

$a = 30$ ,  $b = 180$  и отвечающее этим значениям решение краевой задачи (3.2.3.3) и тем самым и нормированное на единичный объем решение задачи оптимизации

$$S(x) = \frac{15}{2} x(1-x)(1-x(1-x)). \quad (3.2.3.4)$$

Полученное оптимальное распределение площадей поперечных сечений представляет собой симметричную относительно середины интервала  $[0,1]$  функцию, достигающую в середине интервала наибольшего своего значения  $S(0.5) = 45 / 32$ . Следует особо отметить, что оптимальное решение (3.2.3.4) не зависит от жесткости основания.

Оптимальному распределению поперечных сечений  $S(x)$  отвечают значения критической длины балки и критической силы, вычисляемых в соответствии с выражениями (3.1.5)

$$l^* = \sqrt[5]{\frac{3}{2c}} \sqrt[5]{\frac{J_1}{J_2}} = \sqrt[5]{\frac{3}{2c}} \sqrt[5]{120} = \sqrt[5]{\frac{3}{2c}} \times 2.60517,$$

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \frac{5}{2} \sqrt[5]{\left(\frac{2c}{3}\right)^3} \frac{\sqrt[5]{J_1^2 J_2^3}}{J_3} = \\ &= \frac{5}{2} \sqrt[5]{\left(\frac{2c}{3}\right)^3} \frac{12}{\sqrt[5]{120^3}} = \frac{5}{2} \sqrt[5]{\left(\frac{2c}{3}\right)^3} \times 0.678692. \end{aligned}$$

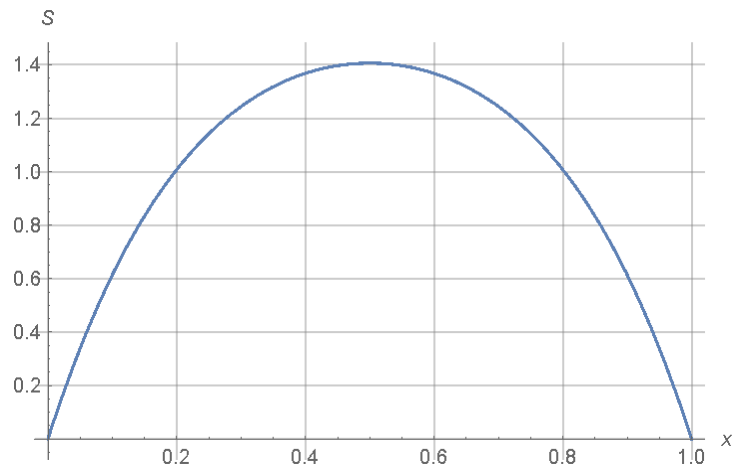
Для сравнения приведем значения  $l^*$ ,  $\lambda^*$  также и для балки постоянного сечения  $S(x) \equiv 1$  с использованием выражений (2.1.7) при  $j = 1$ .  $n = 1$ .

Имеем

$$l^* = \sqrt[5]{\frac{3}{2c}} \sqrt[5]{\pi^4} = \sqrt[5]{\frac{3}{2c}} \times 2.49873,$$

$$\lambda^* = \frac{5}{2} \sqrt[5]{\left(\frac{2c}{3}\right)^3} \frac{1}{\sqrt[5]{\pi^2}} = \frac{5}{2} \sqrt[5]{\left(\frac{2c}{3}\right)^3} \times 0.63262$$

График оптимального решения  $S(x)$  представлен на Фиг.3.1



Фиг.3.1. Оптимальное распределение площадей поперечных сечений

$$S(x)$$

$$(j = 1)$$

### 3.2.4. Численное решение задачи оптимизации для случаев $j = 2, 3$

Для класса изгибных жесткостей, характеризуемых значениями  $j = 2, 3$ , в отличие от проанализированного в предыдущем пункте случая  $j = 1$  построить решение задачи в аналитической форме не удастся. В связи с этим в настоящем пункте подробно обсуждаются процедуры численного решения задачи оптимизации, непосредственно использованные при ее численном решении.

#### 3.2.4.1. Итерационный алгоритм решения задачи оптимизации

Исходным пунктом при построении алгоритма численного решения задачи оптимизации служит вариационная формулировка задачи устойчивости балки критической длины и с переменными поперечными сечениями (см. (3.1.5))

$$\lambda^* = \frac{j+4}{2} \left( \frac{2c}{j+2} \right)^{\frac{j+2}{j+4}} \min_w \Phi_j(w),$$

$$\Phi_j(w) = \frac{1}{J_3(w)} \left( J_1^2(w) J_2^{j+2} \right)^{\frac{1}{j+4}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.2.4.1)$$

где функционалы  $J_1, J_2, J_3$  определяются соотношениями (см. (3.1.4))

$$J_1(w) = \int_0^1 S^j(x) w_{xx}^2 dx, \quad J_2(w) = \int_0^1 w^2 dx, \quad J_3(w) = \int_0^1 w_x^2 dx \quad (3.2.4.2)$$

Задача определения оптимальных распределений поперечных сечений формулируется в виде

$$S^*(x): \quad \lambda^*(l) = \max_{S(x)} \lambda(S, l), \quad \int_0^1 S(x) dx = 1, \quad (3.2.4.3)$$

где функционал  $\lambda(S, l)$  определяется соотношениями (3.2.4.1), а оптимальные поперечные сечения удовлетворяют необходимому условию оптимальности (см. (3.2.1.2))

$$m^2(x) = S^{j+1}(x), \quad m(x) = S^j(x) w_{xx}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.2.4.4)$$

Приведем также уравнение Эйлера, отвечающее вариационной задаче  $\Phi_j(w) \rightarrow \min_w$  (см. (3.1.6)),

$$(S^j w_{xx})_{xx} + a(w) w_{xx} + b(w) w = 0,$$

$$w(0) = S^j(0) w_{xx}(0) = w(1) = S^j(1) w_{xx}(1) = 0 \quad (3.2.4.5)$$

или с использованием обозначения для изгибающего момента –

$$m_{xx} + a(w) w_{xx} + b(w) w = 0,$$

$$w(0) = m(0) = w(1) = m(1) = 0, \quad (3.2.4.6)$$

где функционалы  $a(w), b(w)$  определяются выражениями

$$a(w) = \frac{j+4}{2} \frac{J_1(w)}{J_3(w)}, \quad b(w) = \frac{j+2}{2} \frac{J_1(w)}{J_2(w)} \quad (3.2.4.7)$$

После двукратного интегрирования и учета граничных условий соотношения (3.2.4.6) представляются в эквивалентном виде

$$m(x) = -aw(x) + b \left( x \int_0^1 (1-\tau)w(\tau)d\tau - \int_0^x (x-\tau)w(\tau)d\tau \right), (3.2.4.8)$$

а последовательное интегрирование уравнения, соответствующего определению изгибающего момента в (3.2.4.4), приводит к удовлетворяющему нулевым граничным условиям выражению для прогибов

$$w(x) = \int_0^x \frac{(x-\tau)m(\tau)}{S^j(\tau)} d\tau - x \int_0^1 \frac{(1-\tau)m(\tau)}{S^j(\tau)} d\tau \quad (3.2.4.9)$$

и для первой производной

$$w_x(x) = \int_0^x \frac{m(\tau)}{S^j(\tau)} d\tau - \int_0^1 \frac{(1-\tau)m(\tau)}{S^j(\tau)} d\tau \quad (3.2.4.10)$$

Опишем один шаг итерационной процедуры, использованной в процессе непосредственных вычислений при численном решении обсуждаемой задачи оптимизации.

Пусть  $S_k(x)$  – текущее распределение поперечных сечений, а  $m_{k-1}(x)$  – распределение изгибающих моментов, полученное на предыдущем шаге итерационной процедуры. Для указанных функций  $S_k(x)$  и  $m_{k-1}(x)$  строится выражение  $w_k''(x) = m_{k-1}(x) / S_k^j(x)$  и далее в соответствии с (3.2.4.9), (3.2.4.10) – выражения для  $w_k(x)$  и  $w_k'(x)$ . В процессе расчетов на каждом шаге выражение для прогибов подчиняется условию

нормировки  $\int_0^1 w_k^2(x) dx = 1$  с учетом которого строятся и выражения для

$w_k'(x)$  и  $w_k''(x)$ . Для полученных выражений  $w_k(x)$ ,  $w_k'(x)$ ,  $w_k''(x)$  в соответствии с определениями (3.2.4.2) вычисляются значения функционалов  $J_1(w_k)$ ,  $J_2(w_k)$ ,  $J_3(w_k)$ , а в соответствии с (3.2.4.7) –

функционалов  $a(w_k)$  и  $b(w_k)$ . Наконец, с использованием (3.4.2.8) вычислялось выражение для  $m_k(x)$

$$m_k(x) = -a(w_k)w_k(x) + b(w_k) \left( x \int_0^1 (1-\tau)w_k(\tau)d\tau - \int_0^x (x-\tau)w_k(\tau)d\tau \right)$$

и следующее приближение для распределения площадей поперечных сечений  $S_{k+1}(x)$

$$S_{k+1}(x) = \gamma_k m_k^{\frac{2}{j+1}}(x), \quad (3.2.4.11)$$

где  $\gamma_k$  – постоянная, определяемая условием  $\int_0^1 S_{k+1}(x)dx = 1$ .

Во всех расчетах в качестве  $m_0(x)$ , выбиралось выражение  $m_0(x) = -\sqrt{2}\pi^2 \sin \pi x$ , отвечающее точному решению задачи устойчивости для балки постоянного сечения  $S_0(x) \equiv 1$ , а в качестве

$$S_1(x) \text{ – выражение } S_1(x) = \gamma_1 \sin^{\frac{2}{j+1}}(\pi x).$$

Простыми вычислениями можно убедиться, что для случая  $j = 1$  описанная процедура уже на первой итерации приводит к полученному в предыдущем пункте точному решению задачи оптимизации.

### 3.2.4.2. Описание вычислительных процедур и представление результатов расчетов

Реализация описанного итерационного алгоритма численного решения задачи оптимизации осуществлялась в среде пакета МАТНЕМАТИСА. При дискретизации всех функционалов использовалась квадратурная формула прямоугольников с центральным узлом, при этом в расчетах принималось равномерное разбиение интервала  $[0,1]$  на  $N=100$  частей.

Для всех значений  $j = 1, 2, 3$  метод итераций оказался чрезвычайно эффективным и для решения задачи оптимизации было достаточно всего 4-х итераций, при этом на последней итерации в численном представлении для распределения толщин для каждого из значений аргумента устанавливались четыре значащие цифры.

Полученные в результате расчетов оптимальные сечения представлены на Фиг.3.2 для  $j = 2$ .

Приведем также значения критических длин и сил, отвечающих оптимальному решению для  $j = 2$  (см.(2.2.6))

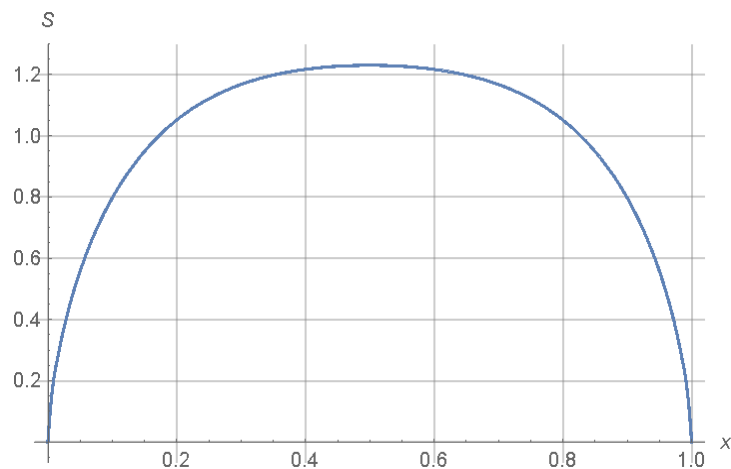
$$l^* = \left(\frac{2}{c}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{J_1}{J_2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{2}{c}\right)^{\frac{1}{6}} \times 2.25724,$$

$$\lambda^* = 3 \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{J_1 J_2^2}}{J_3} = 3 \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \times 0.504384$$

и для сравнения также и для постоянного сечения (см.(2.2.14))

$$j = 2: l_1^* = \sqrt[6]{\frac{2}{c} \sqrt[3]{\pi^2}} = \sqrt[6]{\frac{2}{c}} \times 2.14503,$$

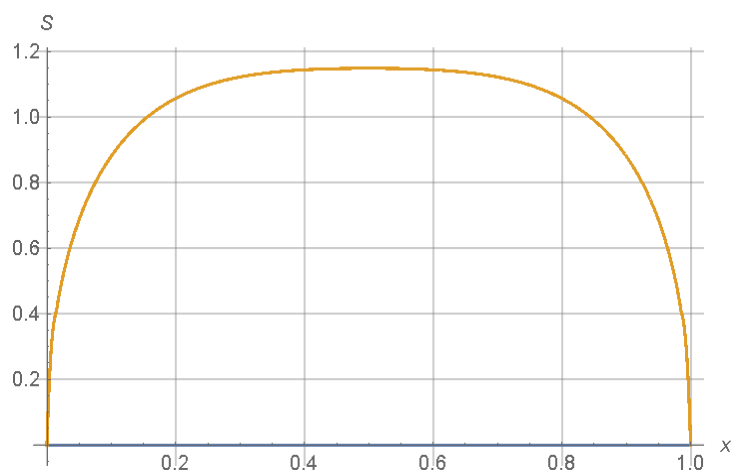
$$\lambda_n^* = 3 \times \sqrt[3]{\frac{c^2}{4}} \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^2}} = 3 \times \sqrt[3]{\frac{c^2}{4}} \times 0.466194$$



Фиг.3,2. Оптимальное распределение толщин  $S(x)$  для  $j = 2$



и на Фиг.3.3 соответственно для  $j = 3$ ,



Фиг.3.3. Оптимальное распределение толщин  $S(x)$  для  $j = 3$

Указанному на Фиг. 3.3 оптимальному распределению толщин соответствуют значения критических длин и сил для  $j = 3$  (см.(2.2.6))

$$l^* = \left(\frac{5}{2c}\right)^{\frac{1}{7}} \left(\frac{J_1}{J_2}\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{5}{2c}\right)^{\frac{1}{7}} \times 2.02365,$$

$$\lambda^* = \frac{7}{2} \left(\frac{2c}{5}\right)^{\frac{5}{7}} \frac{\sqrt[7]{J_1^2 J_2^5}}{J_3} = \frac{7}{2} \left(\frac{2c}{5}\right)^{\frac{5}{7}} \times 0.40363,$$

и для постоянного сечения (см.(2.2.14))

$$j = 3: l_1^* = \sqrt[7]{\frac{5}{2c}} \sqrt[7]{\pi^4} = \sqrt[7]{\frac{5}{2c}} \times 1.92347,$$

$$\lambda_1^* = \frac{7}{2} \sqrt[7]{\left(\frac{2c}{5}\right)^5} \frac{\sqrt[7]{\pi}}{\pi} = \frac{7}{2} \sqrt[7]{\left(\frac{2c}{5}\right)^5} \times 0.374862$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Timoshenko S. P. , Gere J. M. Theory of Elastic Stability. New York , Tokyo: McGraw-Hill, , 1961, second edition, 541 p.
2. Timoshenko, S. P. & Woinowsky-Krieger, S. Theory of plates and shells. 2-nd edition. New York , Tokyo: McGraw-Hill, 1959, 595 p.
3. Euler, L. De motu vibratorio tympanorum // Novi Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, 1766, 10, p. 243–260.
4. Yayli, M. O. Buckling analysis of Euler columns embedded in an elastic medium with general elastic boundary conditions.// Mechanics Based Design of Structures and Machines, (1917, just-accepted)
5. Banichuk N., Barsuk A., Ivanova S., Jeronen J., Makeev E., Tuovinen T. Vibrations of a continuous web on elastic supports // Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2016 , (just-accepted).
6. Moses E., Ryvkin M., Fuchs M. A fe methodology for the static analysis of infinite periodic structures under general loading // Computational mechanics, 2001, 27(5), 369–377.
7. Avetisyan A., Belubekyan M., Ghazaryan K. Stability of a beam with periodic supports // Mechanics Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 2015, 68(3), p. 16–21.
8. Бубнов И.Г. Строительная механика корабля, в 2 частях. — Санкт-Петербург: 1912, 1914.
9. Kármán v. T. , Biot, M. A.. Mathematical Methods in Engineering. An Introduction to the Mathematical Treatment of Engineering Problems. New York: McGraw Hill, 1940, 517 p.
10. Floquet G. Sur les equations differentielles lineares a coefficients periodiquis // Annales scientifiques de l'E.N.S. 2-serie, 1883, tome 12, pp 47-48.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	3
1. Анализ вариационных задач, зависящих от параметра. . . . .	7
2. Устойчивость ограниченных балок с постоянными жесткостными характеристиками . . . . .	9
2.1. Формулировка задачи устойчивости, построение и анализ решений	9
2.2. Вариационная формулировка задачи устойчивости для балок критической длины. . . . .	12
3. Анализ и оптимизация устойчивости ограниченных балок с переменными жесткостными характеристиками. . . . .	17
3.1. Вариационная формулировка задачи устойчивости балок критической длины. . . . .	17
3.2. Построение оптимальных решений в задаче об устойчивости балки с критическим значением длины балки. . . . .	19
3.2.1. Формулировка задачи оптимизации и необходимых условий оптимальности. . . . .	19
3.2.2. Асимптотический анализ оптимальных распределений поперечных сечений. . . . .	20
3.2.3. Точное решение задачи оптимизации для случая $j = 1$ ( $EJ(x) = A_1 S(x)$ ). . . . .	24
3.2.4. Численное решение задачи оптимизации для случаев $j = 2, 3$ ( $EJ(x) = A_j S^j(x)$ ). . . . .	27
3.2.4.1. Итерационный алгоритм решения задачи оптимизации . . . . .	27
3.2.4.2. Описание вычислительных процедур и представление результатов расчетов. . . . .	30
Литература . . . . .	33

Баничук Николай Владимирович

Барсук Александр Арсеньевич

Иванова Светлана Юрьевна

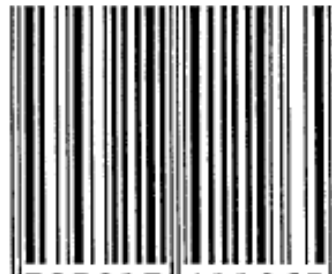
Макеев Евгений Валентинович

Нейттаанмяки Пекка

Туовинен Торо

**АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ БАЛОК  
НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ  
ЧАСТЬ I (БАЛКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ)**

ISBN 978-5-91741-196-5



9 785917 411965

Подписано к печати 10.04.2017. Заказ № 6 – 2017. Тираж 30 экз.

---

Отпечатано на ризографе Института проблем механики РАН

119526, Москва, пр-т Вернадского, 101-1