# Klassista projektiivista geometriaa

Konsta Leppänen

Matematiikan pro gradu tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017

**Tiivistelmä:** Konsta Leppänen, *Klassista projektiivista geometriaa* (engl. *Classical projective geometry*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 41 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2017.

Tässä tutkielmassa käsitellään projektiivisen geometrian peruskäsitteitä, sekä todistetaan joitain klassisia tuloksia kuten Pappuksen ja Desarguesin lauseet. Tutkielmassa lähestytään projektiivista geometriaa klassisesta geometrisesta näkökulmasta, eikä niinkään algebrallisesta. Projektiivisessa geometriassa tutkitaan, mitä ominaisuuksia erilaiset kuviot, kuten pisteet, suorat ja kartioleikkaukset, säilyttävät kun niitä kuvataan projektiivisella muunnoksella. Näitä ominaisuuksia kutsutaan projektiivisiksi ominaisuuksiksi.

Projektiivisen avaruuden ero euklidiseen avaruuteen nähden tulee ilmi siinä, miten suorat leikkaavat toisiaan. Euklidisessa avaruudessa samansuuntaiset suorat eivät leikkaa, mutta projektiivisessa avaruudessa samansuuntaiset suorat leikkaavat äärettömän kaukana toisistaan niin sanotussa äärettömyyspisteessä.

Projektiivisen muunnoksen lisäksi perspektiivinen muunnos on yksi projektiivisen geometrian peruskäsitteistä. Sillä tarkoitetaan projektiivista muunnosta, jota edustavalla matriisilla on kaksiulotteisessa tapauksessa täsmälleen kaksi ominaisarvoa ja kolmiulotteisessa tapauksessa kolme ominaisvektoria. Perspektiivinen muunnos liittyy oleellisesti perspektiiviin ja kuvataiteeseen. Perspektiiviä hyödyntämällä maisemakuvista saadaan realistisia kuvaamalla kaukana olevat kohteet pienempinä kuin lähellä olevat. Kun maisemasta halutaan tuottaa kuvia useasta eri kulmasta, hyödynnetään perspektiivistä muunnosta.

Yksi projektiivisen geometrian fundamentaaleimpia tuloksia on Projektiivisen geometrian peruslause, jonka mukaan neljän pisteen kuvautuminen määrää täysin projektiivisen muunnoksen. Tämän tuloksen avulla voidaan helposti todistaa projektiivisen geometrian lauseita, kuten esimerkiksi Pappuksen ja Desarguesin lauseet.

Erityisesti kartioleikkauksia ja niitä koskevia lauseita tarkasteltaessa projektiivisesta geometriasta on huomattavaa hyötyä. Lauseiden todistukset onnistuvat kätevästi verrattuna euklidiseen geometriaan, sillä käytössä on projektiivisen geometrian peruslause, joka ei ole hyödynnettävissä, jos kartioleikkauksia tarkastellaan puhtaasti euklidisesta näkökulmasta. Kartioleikkausten lisäksi projektiivista geometriaa voi hyödyntää muuallakin euklidisessa geometriassa, sillä projektiivinen geometria on yleistys euklidisesta geometriasta. Tämä tarkoittaa, että projektiivisen geometrian tuloksia voi soveltaa euklidisessa geometriassa. Eräs mielenkiintoisimmista kartioleikkauksiin liittyvistä tuloksista on niiden konkurrenssi projektiivisessa avaruudessa. Tämä tarkoittaa, että kaikki ellipsit, paraabelit ja hyperbelit ovat projektiivisessa mielessä sama kuvio. Tätä tulosta hyödyntämällä voidaan todistaa muun muassa Pascalin lause puhtaasti projektiivista päättelyä hyödyntäen.

Duaalisuus on vahvasti läsnä projektiivisessa geometriassa. Sillä tarkoitetaan käsitteiden vaihdannaisuutta. Esimerkiksi pisteen ja suoran määritelmät ovat toistensa duaaleja. Tällöin projektiivisen geometrian duaalisuusperiaatteen mukaan on mahdollista muodostaa uusia lauseita vaihtamalla olemassa olevissa lauseissa pisteet suoriksi tai suorat pisteiksi. Kartioleikkauksen polaarit ja pisteet ovat myös toistensa duaaleja, joten vaihtamalla pisteet polaareiksi tai polaarit pisteiksi voidaan jälleen muodostaa uusia lauseita.

# Sisältö

LUKU 1

# Johdanto

## 1.1. Historiaa

Projektiivisen geometrian voidaan katsoa saaneen alkunsa kuvataiteesta ja taiteilijoiden pyrkimyksestä tuottaa realistisia kuvia ympäristöstä. Ennen kuin perspektiivin käyttäminen oli yleinen tekniikka, ongelmana oli kolmiulotteisen maiseman havainnollistaminen realistisesti kaksiulotteisella pinnalla. Muinaisissa ja keskiaikaisissa maalauksissa perspektiivin ongelmaa ei vielä ollut, sillä niiden tarkoitus ei ollut näyttää realistisilta vaan välittää tietoa tai jokin sanoma. Vasta 1200 - luvulla alettiin pyrkimään realistisiin kuvauksiin ympäristöstä.

Ensimmäisiä perspektiivin kehittäjiä kuvataiteen saralla olivat Duccio (1255 - 1318) ja Giotto (1266 - 1337), jotka kehittivät *vertikaalisen perspektiivin* ideaa. Siinä lähempänä olevat hahmot kuvattiin suurempien hahmojen alapuolelle. Tämä menetelmä ei luo täysin realistista kuvaa, sillä hahmot eivät loittone kaukaisuuteen odotetulla tavalla.

Modernin *perspektiivin* käsitteen kehittivät Brunelleschi (1377 - 1446), Alberti (1404 - 1472) ja da Vinci (1452 - 1519). Nämä taiteilijat ajattelivat, että maiseman näkeminen tarkoittaa valonsäteiden kulkeutumista silmään maiseman eri kohdista. Tällöin realistinen kuva tästä maisemasta saadaan kuvittelemalla lasilevy maiseman ja katsojan väliin, jolloin lasilevylle muodostuu kaksiulotteinen kuvaus maisemasta. Dürer (1471 - 1528) kehitti konkreetin laitteiston, jonka avulla hän toteutti tämän ajatuksen. Hän huomasi, että lasilevyä liikuttamalla kauemmas tai lähemmäs lasilevylle muodostuva kuva vastaavasti pieneni tai suureni. Lasilevyn kulmaa muutettaessa levylle muodostuva kuva sen sijaan vinoutui.

Matematiikan saralla ensimmäisen projektiiviseen geometriaan liittyvän lauseen esitti Pappus (290 - 350) jo 300 - luvulla. Hänen pääteoksensa on matemaattinen tutkielma Synagoge (n. 340), joka koostuu kahdeksasta kirjasta. Seitsemännessä näistä kirjoista hän esittelee ja todistaa kuuluisan Pappuksen lauseen, joka kuuluu seuraavasti: jos kuusikulmion kärjet sijaitsevat vuorotellen kahdella suoralla, niin vastakkaisten sivujen leikkauspisteet ovat kollineaarisia. Tuohon aikaan projektiivinen geometria oli vielä tuntematon käsite ja vasta 1800 - luvulla Poncelet (1788 - 1867) todisti Pappuksen lauseen puhtaalla projektiivisellä päättelyllä.

Ennen Ponceletia projektiivista geometriaa työstivät Kepler (1571 - 1630) ja Desargues (1591 - 1661), jotka toisistaan riippumatta kehittivät *äärettömyyspisteen* käsitteen. Kepler esitti, että paraabelilla, kuten ellipsillä ja hyperbelillä, on kaksi polttopistettä. Paraabelin tapauksessa toinen näistä polttopisteistä sijatsee äärettömyydessä.

Desargues taasen esitti, että kaksi samansuuntaista suoraa leikkaavat toisensa äärettömyydessä. Poncolet kehitti näitä ideoita eteenpäin ja esitteli *äärettömyyssuoran* käsitteen, jolla tarkoitetaan suoraa, joka koostuu äärettömyyspisteistä. Kuvataiteen mielessä äärettömyyspiste on piste horisontissa, johon maisema loittonee ja äärettömyyssuora on itse horisontti.

Vuonna 1827 Feuerbach (1800 - 1834) ja Möbius (1790 - 1868) kehittivät toisistaan riippumatta *homogeenisten koordinaattien* käsitteen. Klein (1849 - 1925) keksi tavan hyödyntää näitä koordinaatteja projektiivisessa geometriassa ja vuonna 1871 hän esitti algebrallisen perustan homogeenisten koordinaattien käytölle projektiivisessa geometriassa.

Projektiivisessa geometriassa kaksi suoraa leikkaavat aina jossain pisteessä ja kaksi pistettä sijaitsevat yksikäsitteisellä suoralla. Näiden lauseiden välillä on tietynlainen symmetria ja sanotaankin, että ne ovat toistensa *duaaleja*. Käy ilmi, että projektiivisessa geometriassa pisteitä ja suoria koskevat lauseet ovat edelleen totta, jos pisteet vaihtaa suoriksi ja suorat pisteiksi. Tämän projektiivisen geometrian *duaalisuusperiaatteen* toi esille Gergonne (1771 - 1859). Tässä mielessä projektiivinen geometria on symmetrisempää kuin tavallinen euklidinen geometria.

## 1.2. Tässä tutkielmassa

Toisessa luvussa esitellään projektiivinen avaruus ja määritellään, mitä tarkoitetaan pisteillä ja suorilla projektiivisessa avaruudessa. Koska projektiivinen avaruus eroaa huomattavasti euklidisesta avaruudesta, tavanomaista koordinaatistoa ei ole hyödyllistä käyttää pisteiden esittämiseen. Tästä syystä otetaan käyttöön homogeeniset koordinaatit, joiden avulla voidaan kuvata pisteen sijaintia projektiivisessa avaruudessa. Luvussa esitellään myös projektiivinen muunnos ja todistetaan, että se muodostaa ryhmän, kun laskutoimituksena on funktioiden yhdistäminen. Tämän avulla voidaan määritellä, mitä tarkoitetaan projektiivisella geometrialla. Projektiivisessa geometriassa tutkitaan, mitä ominaisuuksia projektiivinen kuvio säilyttää, kun sitä kuvataan projektiivisella muunnoksella. Näitä ominaisuuksia kutsutaan projektiivisiksi ominaisuuksiksi. Esimerkiksi kollineaarisuus (pisteiden säilyminen samalla suoralla) ja insidenssi (leikkauspisteen säilyminen) ovat tällaisia ominaisuuksia.

Pisteisiin liittyen käydään läpi Projektiivisen geometrian peruslause, jonka mukaan neljän pisteen kuvautuminen määrää yksikäsitteisesti projektiivisen muunnoksen. Ennen varsinaista lausetta ja sen todistusta käydään läpi johdattelevia esimerkkejä ja tutkitaan, miksi vähempi määrä pisteitä ei riitä määrittämään muunnosta. Edellä mainittua peruslausetta hyödynnetään laajalti tutkielman todistuksissa. Koska projektiivinen avaruus on euklidisen avaruuden yleistys, euklidisen geometrian ongelmia voidaan käsitellä kuten projektiivisen avaruuden ongelmia. Tämä tarkoittaa, että projektiivisen geometrian tuloksia voidaan hyödyntää todistettaessa euklidisen geometrian tuloksia.

Projektiivisen muunnoksen lisäksi toinen tärkeä kuvaus on perspektiivinen muunnos, joka on projektiivinen muunnos tietyillä rajoitteilla. Tämä kuvaus on erityisen tärkeä kuvataiteessa, kun maisemasta halutaan tuottaa kuvia useista kulmista. Tutkielmassa konstruoidaan perspektiiviselle muunnokselle sitä edustava matriisi ja huomataan, että se vastaa projektiivisen muunnoksen matriisia.

Luvun lopuksi tutkitaan pisteiden ja suorien duaalisuutta projektiivisessa avaruudessa. Duaalisuusperiaatteen mukaan vaihtamalla pisteet suoriksi tai suorat pisteiksi olemassa olevista lauseista voidaan konstruoida uusia lauseita.

Kolmannessa luvussa keskitytään kartioleikkauksiin projektiivisessa geometriassa. Luvun alussa annetaan määritelmä kartioleikkaukselle ja todistetaan lause, jonka mukaan viisi pistettä on pienin määrä pisteitä, joilla kartioleikkaus voidaan määritellä. Yksi luvun mielenkiintoisimmista lauseista koskee kartioleikkausten konkurrenssia projektiivisessa avaruudessa. Lauseen mukaan kahden mielivaltaisen kartioleikkauksen välillä on olemassa yksikäsitteinen projektiivinen kuvaus. Tämä tarkoittaa, että projektiivisessa mielessä ellipsien, paraabelien ja hyperbelien välillä ei ole eroa.

Luvussa todistetaan myös tutkielman päätulos Pacalin lause. Lause todistuu kätevästi projektiivisen geometrian avulla, joskin se vaatii kaksi aputulosta. Ensimmäinen näistä on Kolmen pisteen lause, jonka mukaan kuvattaessa kartioleikkausta toiseksi projektiivisella muunnoksella kolmen pisteen kuvautuminen voidaan määrätä. Toinen aputulos antaa kartioleikkaukselle kätevän parametrisaation, jonka avulla muuttujien määrä todistuksessa vähenee huomattavasti.

Luvun lopussa käydään taas läpi duaalisuutta, tällä kertaa kartioleikkausten näkökulmasta. Kartioleikkaukselle saadaan kaksi yhtäpitävää määritelmää dualisoimalla pisteet ja polaarit keskenään. Lisäksi kartioleikkauksia koskevat lauseet ovat dualisoitavissa korvaamalla pisteet polaareilla tai päinvastoin.

Tutkielman pääasiallisena lähteenä toimi teos [**1**]. Lineaarialgebran tulosten lähteenä toimi teos [**4**]. Historiaa käsittelevässä osuudessa on hyödynnetty teoksia [**1**], [**2**] ja [**3**]. Tutkielman todistukset on kirjoitettu lähteitä mukaillen. Perspektiivisten muunnosten geometristen konstruktioiden toiset suunnat on kirjoitettu itse, sillä niitä ei kirjallisuudesta löytynyt laisinkaan.

LUKU 2

# Projektiiviset suorat

## 2.1. Perusteet

Aloitetaan määrittelemällä projektiivisen geometrian peruskäsitteet eli projektiivinen avaruus, piste sekä suora. Määritellään lisäksi projektiivinen muunnos ja tutkitaan joitain sen ominaisuuksia.

MÄÄRITELMÄ 2.1. *Piste* (isolla P-kirjaimella) tai *projektiopiste* on suora avaruudessa $\mathbb{R}^3$, joka kulkee origon kautta. *Reaalinen projektioavaruus* $\mathbb{RP}^2$ on kaikkien tällaisten Pisteiden joukko.

Koska projektiivisen geometrian Pisteet ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ suoria, ei ole järkevää käyttää karteesista koordinaatistoa kuvaamaan Pisteiden sijaintia. Sen sijaan esitellään uusi koordinaatistojärjestelmä.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Merkinnällä $[a,\ b,\ c]$, jossa $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja vähintään yksi luvuista on nollasta poikkeava, tarkoitetaan Pistettä $P$ avaruudessa $\mathbb{RP}^2$. Tämä Piste on avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora, joka kulkee pisteiden $(0,\ 0,\ 0)$ ja $(a,\ b,\ c)$ kautta. Sanotaan, että nämä ovat Pisteen $P$ *homogeeniset koordinaatit*.

HUOMAUTUS 2.3. On huomattava, että Pisteen esitys homogeenisissä koordinaateissa ei ole yksikäsitteinen. Piste $[x, y, z]$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora, joka kulkee pisteiden $(x, y, z)$ ja $(0, 0, 0)$ kautta, mutta myös pisteiden $(-x, -y, -z)$ ja $(2x, 2y, 2z)$ kautta, jolloin se voidaan esittää myös muodossa $[-x, -y, -z]$ tai $[2x, 2y, 2z]$. Yleisemmin sanotaan

$$[x, y, z] = [\lambda x, \lambda y, \lambda z],$$

missä $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $[x, y, z]$ ei ole origo.

Määritellään seuraavaksi projektiivisen geometrian suorat.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Avaruuden $\mathbb{RP}^2$ *Suora* (isolla S-kirjaimella) tai *projektiosuora*, on avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, joka kulkee origon kautta. Tällöin sille voidaan kirjoittaa yhtälö

$$ax + by + cz = 0,$$

missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja vähintään yksi luvuista on nollasta poikkeava.

Kuten euklidisessa geometriassa, myös projektiivisessa geometriassa kaksi Pistettä sijaitsee yksikäsitteisellä Suoralla. Muistetaan, että Pisteellä tarkoitetaan origon kautta kulkevaa suoraa ja Suoralla origon kauttaa kulkevaa tasoa. Tällöin mainittu tulos on selvä.

LAUSE 2.5. *Kaksi eri Pistettä sijaitsevat yksikäsitteisellä Suoralla.*

Sen sijaan kahden Suoran leikkaaminen toimii eri tavoin. Euklidisessa geometriassa suorat eivät leikkaa, jos ne ovat samansuuntaiset. Projektiivisessa geometriassa tällaista tilannetta ei tule vastaan. Voidaan siis valita mitkä tahansa kaksi Suoraa (avaruuden $\mathbb{R}^3$ tasoa, jotka sisältävät origon) ja ne tulevat leikkaamaan yksikäsitteisessä Pisteessä (avaruuden $\mathbb{R}^3$ suorassa, joka kulkee origon kautta).

LAUSE 2.6. *Kaksi eri Suoraa leikkaavat yksikäsitteisessä Pisteessä.*

Pohditaan seuraavaksi, minkälainen funktio $t : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ tarvitaan kuvaamaan avaruuden $\mathbb{RP}^2$ Pisteet takaisin itselleen. Koska avaruuden $\mathbb{RP}^2$ Pisteet ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ suoria, jotka kulkevat origon kautta tarvitaan kuvausperhe, joka kuvaa origon kautta kulkevat suorat origon kautta kulkeviksi suoriksi. Tällaiseksi kuvausperheeksi sopii kääntyvät lineaarikuvaukset. Koska kääntyvän lineaarikuvauksen määrää kääntyvä matriisi, määritellään projektiivinen muunnos seuraavasti.

MÄÄRITELMÄ 2.7. Avaruuden $\mathbb{RP}^2$ *projektiivinen muunnos* on funktio

$$t : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2, t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}],$$

missä $\mathbf{A}$ on kääntyvä $3 \times 3$ - matriisi. Sanotaan, että matriisi $\mathbf{A}$ edustaa kuvausta $t$. Projektiivisten muunnosten joukon merkintä on $P(2)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että projektiiviset muunnokset muodostavat ryhmän.

LAUSE 2.8. *Pari $(P(2), \circ)$, missä $\circ$ on funktioiden yhdistäminen, muodostaa ryhmän.*

TODISTUS. Jotta pari $(P(2), \circ)$ on ryhmä, operaation $\circ$ on oltava suljettu joukossa $P(2)$, sen on oltava liitännäinen ja lisäksi neutraalialkion sekä käänteisalkion on oltava olemassa. Todistetaan nämä nämä neljä kohtaa.

**Sulkeuma.** Olkoon $s$ ja $t$ projektiivisia muunnoksia siten, että

$$s : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}] \quad \text{ja} \quad t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Bx}],$$

missä $A$ ja $B$ ovat kääntyviä $3 \times 3$ matriiseja. Nyt

$$\begin{aligned} s \circ t([\mathbf{x}]) &= s(t([\mathbf{x}])) \\ &= s([\mathbf{Bx}]) \\ &= [(\mathbf{AB})\mathbf{x}] \end{aligned}$$

Koska matriisit $A$ ja $B$ ovat kääntyviä niin myös matriisi $AB$ on kääntyvä, joten $s \circ t$ on projektiivinen muunnos.

**Liitännäisyys.** Olkoon $s$ ja $t$ kuten edellä ja olkoon lisäksi projektiivinen muunnos $u$ siten, että

$$u : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Cx}],$$

missä $C$ on kääntyvä $3 \times 3$ matriisi. Nyt

$$\begin{aligned} s \circ (t \circ u([\mathbf{x}])) &= s \circ (t(u([\mathbf{x}]))) \\ &= s \circ t([\mathbf{Cx}]) \\ &= s(t([\mathbf{Cx}])) \\ &= s([(\mathbf{BC})\mathbf{x}]) \\ &= [(\mathbf{AB})\mathbf{Cx}] \\ &= (s \circ t) \circ u([\mathbf{x}]), \end{aligned}$$

mikä todistaa liitännäisyyden.

**Neutraalialkio.** Olkoon $s$ kuten edellä ja olkoon lisäksi $i$ projektiivinen muunnos siten, että

$$i : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ix}],$$

missä $I$ on $3\times3$ identiteettimatriisi (jolloin $I$ on kääntyvä ja $i$ todella on projektiivinen muunnos). Nyt

$$t \circ i([\mathbf{x}]) = t(i([\mathbf{x}])) = [\mathbf{A(Ix)}] = [\mathbf{Ax}]$$

ja

$$i \circ t([\mathbf{x}]) = i(t([\mathbf{x}])) = [\mathbf{I(Ax)}] = [\mathbf{Ax}].$$

Tällöin $t \circ i = i \circ t = t$, jolloin $i$ on neutraalialkio.

**Käänteisalkio.** Olkoon $s$ kuten edellä ja olkoon lisäksi $\hat{s}$ projektiivinen muunnos siten, että

$$\hat{s} : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}].$$

Nyt

$$s \circ \hat{s}([\mathbf{x}]) = s([\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}]) = [\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})] = [\mathbf{x}]$$

ja

$$\hat{s} \circ s([\mathbf{x}]) = \hat{s}([\mathbf{Ax}]) = [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax})] = [\mathbf{x}].$$

Siispä $\hat{s}$ on muunnoksen $s$ käänteisalkio. □

Lauseissa 2.5 ja 2.6 tulee ilmi kaksi projektiivisen geometrian tärkeintä ominaisuutta. Lauseen 2.5 kuvaamaa ominaisuutta kutsutaan *kollineaarisuudeksi* ja lauseen 2.6 kuvaamaa ominaisuutta kutsutaan *insidenssiksi*. Todistetaan seuraavaksi, että projektiivinen muunnos säilyttää nämä ominaisuudet.

LAUSE 2.9. *Projektiivinen muunnos säilyttää kollineaarisuuden ja insidenssin.*

TODISTUS. Määritelmän 2.4 mukaan Suora voidaan ilmaista yhtälön

$$ax + by + cz = 0$$

avulla, missä korkeintaan kaksi reaaliluvuista $a, b$ ja $c$ ovat nollia. Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa $\mathbf{Lx} = 0$, missä $\mathbf{L} = (a \;\; b \;\; c)$ ja $\mathbf{x} = (x \;\; y \;\; z)^T$.

Olkoon $t$ projektiivinen muunnos $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}]$ ja olkoon $[\mathbf{x}]$ mielivaltainen Piste Suoralla $\mathbf{Lx} = 0$. Tällöin $t$ kuvaa Pisteen $[\mathbf{x}]$ Pisteeksi $[\mathbf{x}']$, jolle pätee $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$. Kun tästä ratkaistaan $\mathbf{x}$, saadaan $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}'$. Sijoitetaan tämä yhtälöön $\mathbf{Lx} = 0$ jolloin saadaan, että $\mathbf{x}'$ toteuttaa yhtälön $\mathbf{L}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}') = 0$ tai $(\mathbf{L}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{x}' = 0$. Kun unohdetaan pilkku, saadaan, että projektiivinen muunnos $t$ kuvaa Suoran $\mathbf{L}\mathbf{x} = 0$ Suoraksi $(\mathbf{L}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{x} = 0$. Huomataan, että Suora kuvautui Suoraksi, jolloin projektiivinen muunnos $t$ säilyttää kollineaarisuuden.

Todistetaan seuraavaksi insidenssin säilyminen. Tämä onnistuu pelkän päättelyn avulla, ilman algebraa. Olkoon kahden Suoran leikkauspiste $P$, jolloin se siis sijaitsee molemmilla Suorilla. Olkoon $t$ projektiivinen muunnos, jolloin edellisen kohdan perusteella kuvapiste $t(P)$ sijaitsee molemmilla kuvasuorilla. Tästä seuraa, että alkuperäisten Suorien leikkauspiste kuvautuu kuvasuorien leikkauspisteeksi eli insidenssi säilyy. $\square$

## 2.2. Projektiivisen geometrian peruslause

Edellisessä kappaleessa määriteltiin projektiivinen muunnos ja sen tärkeimpiä ominaisuuksia. Tässä kappaleessa keskitytään todistamaan Projektiivisen geometrian peruslause, joka kertoo kuinka monta Pistettä määrää yksikäsitteisesti projektiivisen muunnoksen. Määritellään kuitenkin ensin käsitteet yksikkökolmio ja yksikköpiste, joita tullaan jatkossa käyttämään.

MÄÄRITELMÄ 2.10. Pisteitä $[1, 0, 0], [0, 1, 0]$ ja $[0, 0, 1]$ sanotaan *yksikkökolmioksi* ja Pistettä $[1, 1, 1]$ *yksikköpisteeksi*.

Pohditaan nyt, kuinka monta Pistettä määrittää projektiivisen muunnoksen. Euklidisessa avaruudessa lineaarikuvauksen $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ määrää kolme pistettä. Koska projektiivinen avaruus on euklidisen avaruuden yleistys, voisi arvata, että projektiivisen muunnoksen määrittelyyn tarvitaan ainakin kolme Pistettä. Lähdetään kuitenkin liikkeelle kahdesta Pisteestä (yksi Piste ei selvästikään riitä). Olkoon $[1, 0, 0]$ ja $[0, 1, 0]$ kuvattavat Pisteet ja $t_1$ ja $t_2$ projektiivisia muunnoksia joihin liittyvät matriisit

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

vastaavasti. Koska matriisit eivät ole toistensa monikertoja, kuvaukset $t_1$ ja $t_2$ eivät ole sama kuvaus. Pisteiden $[1, 0, 0]$ ja $[0, 1, 0]$ kuvat muunnoksessa $t_1$ ovat

$$\left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \text{ja}$$
$$\left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

ja muunnoksessa $t_2$

$$\left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \text{ja}$$
$$\left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right].$$

Molemmat kuvaukset siis kuvasivat Pisteet $[1,0,0]$ ja $[0,1,0]$ Pisteiksi $[-1,2,3]$ ja $[1,1,-2]$, jolloin kahden Pisteen kuvautuminen ei määrää yksikäsitteistä projektiivista muunnosta.

Kokeillaan seuraavaksi kolmea Pistettä. Olkoon $t_1$ ja $t_2$ projektiivisia muunnoksia, joihin liittyvät matriisit

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Kuten yllä, nämäkään matriisit eivät ole toistensa monikertoja, jolloin $t_1 \neq t_2$. Tutkitaan, kuinka Pisteet $[1,-1,1]$, $[1,-2,2]$ ja $[-1,2,-1]$ käyttäytyvät näissä kuvauksissa. Kuvauksessa $t_1$ Pisteet kuvautuvat seuraavasti:

$$\left[ \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$
$$\left[ \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \text{ja}$$
$$\left[ \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Pisteiden kuvat kuvauksessa $t_2$ ovat seuraavat:

$$\left[ \begin{pmatrix} -8 & -6 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$
$$\left[ \begin{pmatrix} -8 & -6 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \text{ja}$$
$$\left[ \begin{pmatrix} -8 & -6 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Jälleen huomataan, että molemmissa kuvauksissa lähtöpisteet kuvautuvat samoiksi. Siis kolmekaan Pistettä ei riitä määräämään yksikäsitteistä projektiivista muunnosta. Pohditaan hieman tarkemmin, miksi kolme Pistettä ei riitä määräämään projektiivistä muunnosta, etsimällä kuvaus, joka kuvaa yksikkökolmion kolmeksi eri Pisteeksi, joista korkeintaan kaksi on samalla Suoralla.

Etsitään projektiivinen muunnos $t$, joka kuvaa Pisteet $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ ja $[0,0,1]$ Pisteiksi $[1,0,1]$, $[0,1,2]$ ja $[2,1,-3]$. Olkoon kuvaukseen $t$ liittyvä matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$\left[\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

jolloin matriisin $\mathbf{A}$ ensimmäiseksi sarakkeeksi voidaan valita $(1\ 0\ 1)^T$.

Toistetaan vastaava menettely Pisteille $[0,1,0]$ ja $[0,0,1]$, jolloin saadaan

$$\left[\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \text{ ja}$$
$$\left[\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right].$$

Etsitty kuvaus on siis $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}]$, missä

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Kuvaus $t$ todella on projektiivinen muunnos, sillä Pisteet $[1,0,1]$, $[0,1,2]$ ja $[2,1,-3]$ eivät kaikki ole samalla Suoralla, jolloin matriisin $\mathbf{A}$ sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia ja siten matriisi $\mathbf{A}$ on kääntyvä.

Huomataan, että yksikkökolmio voidaan kuvata miksi tahansa kolmeksi eri Pisteeksi, valitsemalla kuvaukseen $t$ liittyvän matriisin $\mathbf{A}$ sarakkeiksi Pisteiden homogeeniset koordinaatit. Tämä kuvaus ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen. Jos ylläoleva matriisi korvataan matriisilla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} l & 0 & 2n \\ 0 & m & n \\ l & 2m & -3n \end{pmatrix},$$

missä $l, m, n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, niin yksikkökolmio kuvautuu edelleen Pisteiksi $[1,0,1]$, $[0,1,2]$ ja $[2,1,-3]$, mutta muiden avaruuden $\mathbb{RP}^2$ Pisteiden kuvautuminen riippuu luvuista $l, m$ ja $n$.

Vaikuttaa siltä, että neljäs Piste voisi kiinnittää yllä olevat muuttujat $l, m$ ja $n$, jolloin muunnos olisi yksikäsitteinen. Seuraavassa esimerkissä tutkitaan, riittääkö neljä Pistettä määrittämään projektiivisen muunnoksen.

Esimerkki 2.11. Etsitään projektiivinen muunnos $t$, joka kuvaa Pisteet $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ ja $[1,1,1]$ Pisteiksi $[1,0,1]$, $[0,1,2]$ ja $[2,1,-3]$ ja $[1,1,2]$. Edellisen esimerkin perusteella tiedetään, että kuvaukseen $t$ liittyvän matriisin $\mathbf{A}$ sarakkeet ovat Pisteiden $[1,0,1]$, $[0,1,2]$ ja $[2,1,-3]$ monikertoja eli

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} l & 0 & 2n \\ 0 & m & n \\ l & 2m & -3n \end{pmatrix},$$

missä $l, m, n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Jotta $t$ kuvaa Pisteen $[1,1,1]$ Pisteeksi $[1,1,2]$, on $l, m$ ja $n$ valittava siten, että

$$\left[\begin{pmatrix} l & 0 & 2n \\ 0 & m & n \\ l & 2m & -3n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right].$$

Tuntemattomat $l, m$ ja $n$ saadaan selville ratkaisemalla yhtälökolmikko

$$\begin{aligned} l + 2n &= 1, \\ m + n &= 1, \\ l + 2m - 3n &= 2. \end{aligned}$$

Pienen laskutoimituksen jälkeen saadaan

$$l = \frac{5}{7}, \quad m = \frac{6}{7} \quad \text{ja} \quad n = \frac{1}{7}.$$

Haettu projektiivinen muunnos on siis $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}]$, missä

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & 1\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Huomataan, että matriisin $\mathbf{A}$ sarakkeet ovat edelleen lineaarisesti riippumattomia, sillä ne ovat lineaarisesti riippumattomien vektoreiden $(1,0,1)$, $(0,1,2)$ ja $(2,1,-3)$ monikertoja.

Neljäs Piste tuotti kuvauksen, joka on yksikäsitteinen. Yllä olevaa tekniikkaa noudattaen voidaan löytää kuvaus, joka kuvaa yksikkökolmion ja yksikköpisteen neljäksi muuksi Pisteeksi, kunhan korkeintaan kaksi Pisteistä on samalla Suoralla.

Ennen kuin käsitellään projektiivisen geometrian peruslause, käydään läpi johdatteleva esimerkki.

Esimerkki 2.12. Etsitään projektiivinen muunnos $t$, joka kuvaa Pisteet $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ ja $[1,1,1]$ Pisteiksi $[-1,0,0]$, $[-3,2,0]$, $[2,0,4]$ ja $[1,2,-5]$. Muodostetaan aluksi kuvaukseen $t$ liittyvä matriisi $\mathbf{A}$ kuten edellisessä esimerkissä eli

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -l & -3m & 2n \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 4n \end{pmatrix},$$

missä $l, m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Jotta $t$ kuvaa Pisteen $[1,1,1]$ Pisteeksi $[1,2,-5]$, on $l, m$ ja $n$ valittava siten, että

$$\left[\begin{pmatrix} -l & -3m & 2n \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 4n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right].$$

Ratkaistaan $l, m$ ja $n$ yhtälökolmikosta

$$\begin{aligned} -l - 3m + 2n &= 1, \\ 2m &= 2, \\ 4n &= -5. \end{aligned}$$

Arvoiksi saadaan

$$l = -6\frac{1}{2}, \quad m = 1 \quad \text{ja} \quad n = -1\frac{1}{4}.$$

Haettu projektiivinen muunnos on siis $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}]$, missä

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6\frac{1}{2} & -3 & -2\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Olkoon esimerkin 2.11 kuvaus $s$. Sen käänteiskuvaus $s^{-1}$ kuvaa Pisteet $[1, 0, 1]$, $[0, 1, 2]$ ja $[2, 1, -3]$ ja $[1, 1, 2]$ Pisteiksi $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ ja $[0, 0, 1]$ ja $[1, 1, 1]$. Tällöin yhdistetty kuvaus $t \circ s^{-1}$ kuvaa Pisteet $[1, 0, 1]$, $[0, 1, 2]$ ja $[2, 1, -3]$ ja $[1, 1, 2]$ Pisteiksi $[-1, 0, 0]$, $[-3, 2, 0]$, $[2, 0, 4]$ ja $[1, 2, -5]$.

Samaan tapaan voidaan löytää kuvaus, joka kuvaa mitkä tahansa neljä Pistettä miksi tahansa neljäksi Pisteeksi, kunhan kummassakin pistejoukossa korkeintaan kaksi Pistettä on samalla suoralla. Muotoillaan tämä lauseeksi.

Lause 2.13. *Olkoot* $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$ *ja* $[c_1, c_2, c_3]$ *ja* $[d_1, d_2, d_3]$ *Pisteitä, joista korkeintaan kaksi on samalla Suoralla ja luvut* $l, m$ *ja* $n$ *siten, että*

$$\begin{pmatrix} a_1 l & b_1 m & c_1 n \\ a_2 l & b_2 m & c_2 n \\ a_3 l & b_3 m & c_3 n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

*Tällöin on olemassa projektiivinen muunnos* $t : [\boldsymbol{x}] \mapsto [\boldsymbol{Ax}]$, *joka kuvaa yksikkökolmion ja yksikköpisteen edellämainituiksi Pisteiksi. Tässä* $\boldsymbol{A}$ *on matriisin*

$$\begin{pmatrix} a_1 l & b_1 m & c_1 n \\ a_2 l & b_2 m & c_2 n \\ a_3 l & b_3 m & c_3 n \end{pmatrix}$$

*monikerta.*

Todistus. Sivuutetaan, sillä se muistuttaa hyvin paljon esimerkkiä 2.12. □

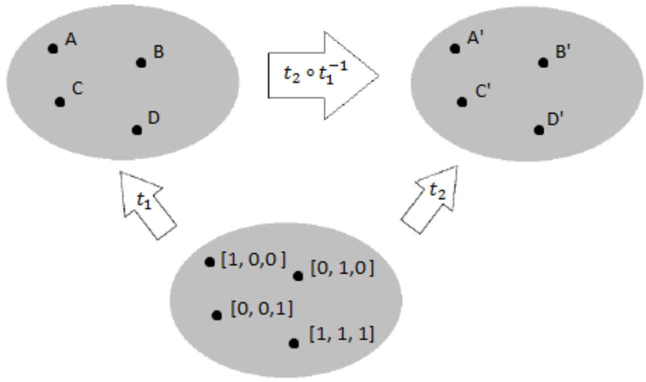
Nyt ollaan valmiita todistamaan Projektiivisen geometrian peruslause.

Lause 2.14 (Projektiivisen geometrian peruslause). *Olkoot* $A, B, C, D$ *ja* $A', B'$, $C', D'$ *kaksi pistejoukkoa siten, että pistejoukon sisällä korkeintaan kaksi Pisteistä on samalla Suoralla. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen projektiivinen muunnos* $t$*, joka kuvaa Pisteet* $A, B, C$ *ja* $D$ *Pisteiksi* $A', B', C'$ *ja* $D'$ *siten, että*

$$t(A) = A',\ t(B) = B',\ t(C) = C' \text{ ja } t(D) = D'.$$

Todistus. On osoitettava, että tällainen kuvaus on olemassa sekä kuvauksen yksikäsitteisyys. Lauseen 2.13 mukaan on olemassa projektiivinen muunnos $t_1$, joka kuvaa Pisteet $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ ja $[0, 0, 1]$ ja $[1, 1, 1]$ Pisteiksi $A, B, C$ ja $D$. Vastaavasti on olemassa kuvaus $t_2$, joka kuvaa Pisteet $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ ja $[0, 0, 1]$ ja $[1, 1, 1]$ Pisteiksi $A', B', C'$ ja $D'$. Näin ollen yhdistetty funktio $t = t_2 \circ t_1^{-1}$ on projektiivinen muunnos, joka kuvaa Pisteet $A, B, C$ ja $D$ Pisteiksi $A', B', C'$ ja $D'$.

Todistetaan seuraavaksi yksikäsitteisyys. Osoitetaan aluksi, että identiteettikuvaus on ainoa kuvaus, joka kuvaa Pisteet $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ ja $[0, 0, 1]$ ja $[1, 1, 1]$ takaisin




KUVA 1. Projektiivisen geometrian peruslause

itsekseen. Projektiiviseen muunnokseen, jolla on tämä ominaisuus, täytyy edellisten esimerkkien perusteella liittyä matriisi, joka on matriisin

$$\begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

monikerta. Tässä

$$\begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tällaisen matriisin on oltava identiteettimatriisi tai jokin sen monikerta, joten siihen liittyvä kuvaus on identiteettikuvaus.

Oletetaan seuraavaksi, että on olemassa kaksi kuvausta $t$ ja $t'$, jotka toteuttavat väitteen. Tällöin yhdistetyt kuvaukset $t_2^{-1} \circ t \circ t_1$ ja $t_2^{-1} \circ t' \circ t_1$ projektiivisia muunnoksia, jotka kuvaavat Pisteet $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ ja $[0, 0, 1]$ ja $[1, 1, 1]$ takaisin itsekseen. Tästä seuraa, että molemmat yhdistetyt kuvaukset ovat identiteettikuvauksia eli

$$t_2^{-1} \circ t \circ t_1 = t_2^{-1} \circ t' \circ t_1.$$

Kun ylläolevaa lauseketta operoidaan aluksi kuvauksella $t_1^{-1}$ oikealta puolelta ja kuvauksella $t_2$ vasemmalta puolelta, saadaan $t = t'$, mikä todistaa yksikäsitteisyyden. □

Tämä tulos yksinkertaistaa lauseiden todistuksia huomattavasti. Sen sijaan, että käsiteltäisiin mielivaltaisia Pisteitä, projektiivisen geometrian peruslauseen avulla neljä Pistettä voidaan aina valita yksikkökolmioksi ja yksikköpisteeksi. Tämä vähentää lauseissa esiintyvien muuttujien määrää ja yksinkertaistaa laskutoimituksia.

Peruslauseen avulla voidaan helposti todistaa Pappuksen lause ja Desarguesin lause. Molemmat näistä lauseista käsittelevät Pisteiden sijaitsemista samalla Suoralla, joten käytetään ensin hetki pohtien, kuinka tällainen ominaisuus voidaan todistaa.

Euklidisessa geometriassa pisteet sijaitsevat samalla suoralla, jos ja vain jos pisteistä muodostettu determinantti on nolla. Samanlainen tulos pätee projektiivisessa geometriassa. Muistetaan, että Pisteet ovat euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ suoria, jotka kulkevat origon kautta. Suoraa $[x, y, z]$ vastaa siis avaruuden $\mathbb{R}^3$ paikkavektori

$(x, y, z)$. Projektiivisen avaruuden Suorat taas ovat euklidisen avaruuden tasoja, jotka sisältävät origon. Siis Pisteiden sijaitseminen Suoralla tarkoittaa origon kautta kulkevien suorien sijaitsemista tasossa, joka sisältää origon. Kolme tai useampi suora taasen on samassa tasossa, jos ja vain jos ne ovat lineaarisesti riippuvia, eli jos ja vain jos niistä muodostettu determinantti on nolla. Tämä päättely voidaan kiteyttää lauseeksi.

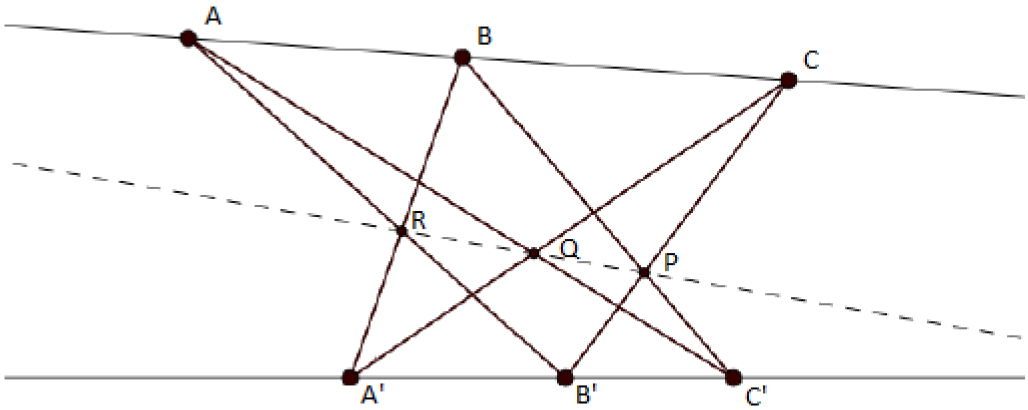
Lause 2.15 (Determinanttiehto). *Pisteet* $[x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2]$ *ja* $[x_3, y_3, z_3]$ *ovat samalla Suoralla, jos ja vain jos*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Huomautus 2.16. Jos Pisteiden homogeeniset koordinaatit ovat sopivat, voidaan niiden kollineaarisuus nähdä ilman determinanttia. Riittää vain löytää sen Suoran yhtälö, jolla Pisteet sijaitsevat. Esimerkiksi Pisteet $[2, 0, 1], [5, 0, 4]$ ja $[4, 0, 4]$ sijaitsevat kaikki Suoralla $y = 0$.

Nyt ollaan valmiita todistamaan Pappuksen ja Desarguesin lauseet.

Lause 2.17 (Pappuksen lause). *Olkoon* $A, B$ *ja* $C$ *kolme pistettä suoralla ja olkoon* $A', B'$ *ja* $C'$ *toiset kolme pistettä eri suoralla. Olkoon suorien* $BC'$ *ja* $B'C$ *leikkauspiste* $P$*, suorien* $CA'$ *ja* $C'A$ *leikkauspiste* $Q$ *ja suorien* $AB'$ *sekä* $A'B$ *leikkauspiste* $R$*. Tällöin* $P, Q$ *ja* $R$ *ovat samalla suoralla.*




Kuva 2. Pappuksen lause

Todistus. Lause on alunperin euklidisen geometrian ongelma, mutta sitä voidaan käsitellä kuten projektiivisen geometrian ongelmaa. Etsitään aluksi jokaiselle Pisteistä $P, Q$ ja $R$ esitys homogeenisissa koordinaateissa.

Projektiivisen geometrian peruslauseen nojalla neljä lauseen Pisteistä voidaan valita yksikkökolmioksi ja yksikköpisteeksi. Olkoon $C = [1, 0, 0], C' = [0, 1, 0], R = [0, 0, 1]$ ja $P = [1, 1, 1]$. Näillä valinnoilla riittää enää löytää Pisteen $Q$ homogeeniset koordinaatit.

Etsitään ensin homogeeniset koordinaatit Pisteelle $B$. Piste $B$ sijaitsee samalla Suoralla kuin Pisteet $C' = [0,1,0]$ ja $P = [1,1,1]$, jotka sijaisevat Suoralla $x = z$, jolloin $B = [a,b,a] = [1,r,1]$ missä $r = b/a$ ja $a,b \in \mathbb{R}$. Tässä $a \neq 0$ sillä, jos $a = 0$, niin $B = [0,b,0] = [0,1,0] = C'$, mikä on ristiriita.

Samanlainen päättely voidaan toistaa Pisteelle $B'$. Se sijaitsee samalla Suoralla kuin Pisteet $C = [1,0,0]$ ja $P = [1,1,1]$, jotka taasen sijaitsevat Suoralla $y = z$, jolloin $B' = [c,d,d] = [s,1,1]$ missä $s = c/d$, $c,d \in \mathbb{R}$ ja $d \neq 0$. Kuten edellä, jos $d = 0$, niin $B' = [c,0,0] = [1,0,0] = C$, mikä on ristiriita.

Etsitään seuraavaksi Pisteen $A$ homogeeniset koordinaatit. Piste $A$ sijaitsee samalla Suoralla kuin Pisteet $C = [1,0,0]$ ja $B = [1,r,1]$, jotka sijaitsevat Suoralla $y = rz$. Tällä tiedolla saadaan $A = [e,r,1]$, missä $e \in \mathbb{R}$. Nyt kuitenkin muuttujien määrä kasvaisi yhdellä, joka monimutkistaisi tulevia laskuja. Jotta näin ei kävisi, käytetään vielä lisäksi tietoa, että Piste $A$ sijaitsee Pisteiden $B' = [s,1,1]$ ja $R = [0,0,1]$ kanssa samalla Suoralla, jonka yhtälö on $x = sy$. Nyt koordinaateiksi saadaan $A = [rs,r,1]$.

Tässä vaiheessa on mahdollista kirjoittaa homogeeniset koordinaatit Pisteelle $Q$, mutta ongelmana on edelleen uusien muuttujien ilmestyminen laskuihin. Tästä syystä etsitään ensin homogeeniset koordinaatit Pisteelle $A'$, jotta muuttujien määrä ei kasva. Piste $A'$ sijaitsee Pisteiden $C' = [0,1,0]$ ja $B' = [s,1,1]$ kautta kulkevalla Suoralla, jonka yhtälö on $x = sz$, sekä Pisteiden $B = [1,r,1]$ ja $R = [0,0,1]$ kautta kulkevalla Suoralla, jonka yhtälö on $y = rx$. Tällöin sille voidaan kirjoittaa koordinaatit $A' = [s,rs,1]$.

Nyt voidaan kirjoittaa homogeeniset koordinaatit Pisteelle $Q$. Se sijaitsee Pisteiden $A = [rs,r,1]$ ja $C' = [0,1,0]$ kautta kulkevalla Suoralla, jonka yhtälö on $x = rsz$, sekä Pisteiden $A' = [s,rs,1]$ ja $C = [1,0,0]$ kautta kulkevalla Suoralla, jonka yhtälö on $y = rsz$. Pisteen $Q$ homogeeniset koordinaatit ovat siis $[rs,rs,1]$.

Huomataan, että Pisteiden $P = [1,1,1], Q = [rs,rs,1]$ ja $R = [0,0,1]$ homogeeniset koordinaatit toteuttavat Suoran $x = y$ yhtälön, jolloin ne siis sijaitsevat kyseisellä Suoralla ja väite on todistettu. □

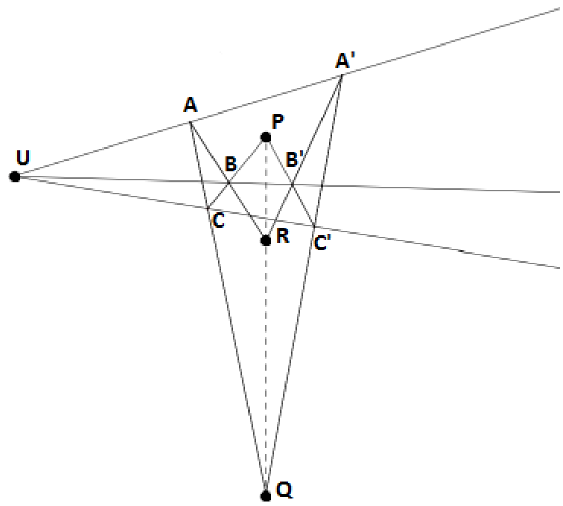
Lause 2.18 (Desarguesin lause). *Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kolmioita tasossa $\mathbb{R}^2$ siten, että suorat $AA'$, $BB'$ ja $CC'$ leikkaavat pisteessä $U$. Olkoot Suorien $BC$ ja $B'C'$ leikkauspiste $P$, $CA$ ja $C'A'$ leikkauspiste $Q$ sekä $AB$ ja $A'B'$ leikkauspiste $R$. Tällöin $P, Q$ ja $R$ ovat samalla suoralla.*

Todistus. Kuten edellä, tämäkin lause voidaan palauttaa projektiivisen geometrian ongelmaksi. Lisäksi lause koskee Pisteiden kollineaarisuutta, joten helpoin tapa lähestyä ongelmaa on käyttää determinanttiehtoa. Tätä varten etsitään Pisteille $P, Q$ ja $R$ esitykset homogeenisissä koordinaateissa.

Projektiivisen geometrian peruslauseen nojalla neljä Pisteistä voidaan valita yksikkökolmioksi ja yksikköpisteeksi. Olkoon siis $U = [1,1,1], A = [1,0,0], B = [0,1,0]$ ja $C = [0,0,1]$.

Etsitään aluksi Pisteen $A'$ homogeeniset koordinaatit. Se sijaitsee samalla Suoralla kuin Pisteet $U = [1,1,1]$ ja $A = [1,0,0]$, jotka taas sijaitsevat Suoralla $y = z$. Pisteen $A'$ homogeeniset koordinaatit ovat siis $[a,b,b] = [r,1,1]$, missä $r = a/b$ ja $a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Samalla tavoin saadaan Pisteiden $B'$ ja $C'$ koordinaatit. Piste $B'$ on Pisteiden $U = [1,1,1]$ ja $B = [0,1,0]$ kanssa samalla Suoralla, jonka yhtälö on $x = z$, jolloin $B' = [c,d,c] = [1,s,1]$, missä $s = d/c$ ja $d,c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tätä menetelmää käyttäen saadaan Pisteelle $C'$ koordinaatit $[1,1,t]$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.




KUVA 3. Desarguesin lause

Toisin kuin Pappuksen lauseessa, tämän lauseen todistuksessa ei voida selvittää Pisteitä yhdistävien Suorien yhtälöitä pelkästään homogeenisiä koordinaatteja tarkastelemalla vaan on käytettävä determinanttiehtoa. Olkoon $[x, y, z]$ sellaisen Pisteen koordinaatit, joka sijaitsee Pisteiden $B'$ ja $C'$ kautta kulkevalla Suoralla. Tällöin ne toteuttavat yhtälön

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = (st-1)x - (t-1)y + (1-s)z = 0,$$

joka on näin ollen Suoran $B'C'$ yhtälö.

Piste $P$ sijaitsee Suoran $B'C'$ lisäksi Pisteiden $B = [0, 1, 0]$ ja $C = [0, 0, 1]$ kautta kulkevalla Suoralla, jonka yhtälö on $x = 0$. Sijoitetaan tämä Suoran $B'C'$ yhtälöön, jolloin saadaan

$$(t-1)y = (1-s)z.$$

Pisteen $P$ homogeeniset koordinaatit ovat siis $[0, 1-s, t-1]$.

Samalla tavoin löydetään Pisteiden $Q$ ja $R$ homogeeniset koordinaatit, jotka ovat $[1-r, 0, t-1]$ ja $[1-r, s-1, 0]$.

Nyt determinanttiehtoa voidaan käyttää selvittämään Pisteiden $P, Q$ ja $R$ kollineaarisuus. Determinantiksi saadaan

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 0 & 1-s & t-1 \\ 1-r & 0 & t-1 \\ 1-r & s-1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(1-s)\begin{vmatrix} 1-r & t-1 \\ 1-r & 0 \end{vmatrix} + (t-1)\begin{vmatrix} 1-r & 0 \\ 1-r & s-1 \end{vmatrix} \\ &= -(1-s)(-(t-1)(1-r)) + (t-1)(1-r)(s-1) \\ &= -(s-1)(t-1)(1-r) + (t-1)(1-r)(s-1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pisteet $P, Q$ ja $R$ ovat siis samalla Suoralla, joten väite on todistettu. □

## 2.3. Perspektiivinen muunnos

Tässä kappaleessa esitellään perspektiivinen muunnos ja konstruoidaan sitä edustava matriisi. Kuten nimestä voi päätellä, perspektiivinen muunnos liittyy oleellisesti perspektiivin käsitteeseen. Kuvataiteessa perspektiiviä hyödynnetään, kun halutaan tuottaa realistinen maisemakuva. Sillä tarkoitetaan maiseman ja kohteiden loittonemista horisonttiin. Ennen kuin voidaan määritellä, mitä tarkoitetaan perspektiivisellä muunnoksella, on määriteltävä perspektiivi, perspektiviteetti ja ideaalipiste.

Geometrisesti perspektiivillä tarkoitetaan seuraavaa. Jos $\pi$ ja $\pi'$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ tasoja, jotka eivät kulje origon kautta ja $C$ on piste siten, että $C \notin \pi \cup \pi'$, niin pisteiden $P \in \pi$ ja $P' \in \pi'$ sanotaan olevan *perspektiivissä pisteen $C$ suhteen*, jos $C, P$ ja $P'$ ovat samalla suoralla.

Perspektiviteetti määritellään seuraavasti. Olkoot $\pi, \pi'$ ja $C$ kuten edellä. *Perspektiviteetti* $\sigma : \pi \to \pi'$ pisteen $C$ suhteen on funktio, joka kuvaa pisteen $P \in \pi$ pisteeksi $P' \in \pi'$, silloin kun $P$ ja $P'$ ovat perspektiivissä pisteen $C$ suhteen. Sanotaan, että $C$ on perspektiiviteetin *perspektiivipiste*.

Ideaalipiste taas tarkoittaa seuraavaa. Olkoon $\pi$ taso, joka ei kulje origon kautta. Tason $\pi$ *ideaalipisteet* ovat sellaisia Pisteitä, jotka ovat samansuuntaisia tason $\pi$ kanssa. Kaikki tason $\pi$ ideaalipisteet sijaitsevat tasolla, joka sisältää origon. Tätä tasoa sanotaan *ideaalitasoksi*.

Nyt ollaan valmiita määrittelemään perspektiivinen muunnos. Olkoon $\pi$ ja $\pi'$ tasoja avaruudessa $\mathbb{R}^3$, jotka eivät sisällä origoa $O$, ja olkoon $C \in \mathbb{R}^3$ piste siten, että $OC$ ei ole samansuuntainen tason $\pi$ tai $\pi'$ kanssa. Olkoon $\mathbf{c}$ pisteen $C$ paikkavektori. Olkoon lisäksi $\sigma$ perspektiviteetti tasolta $\pi$ tasolle $\pi'$ pisteen $C$ suhteen.

Nyt perspektiviteetti $\sigma$ kuvaa pisteen $P \in \pi$ (paikkavektori $\mathbf{p}$) pisteeksi $P' \in \pi'$ (paikkavektori $\mathbf{p}'$). Olkoon nyt perspektiviteettiin $\sigma$ liittyvä perspektiivinen muunnos kuvaus avaruudelta $\mathbb{R}^3$ itselleen siten, että se kuvaa suoran $[\mathbf{p} - \mathbf{c}]$ suoraksi $[\mathbf{p}' - \mathbf{c}]$. Koska $C, P$ ja $P'$ ovat kollineaarisia, niin vektorit $\mathbf{p} - \mathbf{c}$ ja $\mathbf{p}' - \mathbf{c}$ ovat samansuuntaisia. Tällöin on olemassa $t \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\mathbf{p}' - \mathbf{c} = t(\mathbf{p} - \mathbf{c}).$$

Tämä voidaan kirjoittaa muodossa

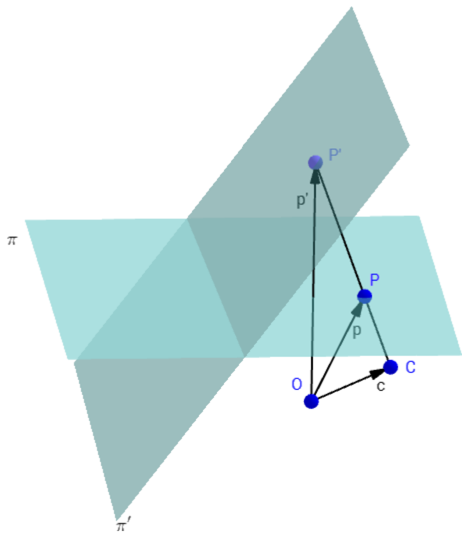
$$\mathbf{p}' = t\mathbf{p} + (1 - t)\mathbf{c},$$

jolloin saadaan, että kuvaus $\sigma$ kuvaa suoran $[\mathbf{p}]$ seuraavasti

$$[\mathbf{p}] \mapsto [t\mathbf{p} + (1 - t)\mathbf{c}].$$

Kuvauksessa on vielä joitain puutteita. Se ei ole määritelty suoralla $l$, jossa taso $\pi$ leikkaa tasoa, joka sisältää pisteen $C$ ja on samansuuntainen tason $\pi'$ kanssa. Lisäksi ei ole olemassa tason $\pi$ pisteitä, jotka kuvautuvat suoralle $l'$, jossa taso $\pi'$ leikkaa tasoa, joka sisältää pisteen $C$ ja on samansuuntainen tason $\pi$ kanssa. Käytetään näissä tapauksissa apuna tasojen $\pi$ ja $\pi'$ ideaalipisteitä (Kuva 5).

Olkoon piste $P \in l$ ja olkoon $\mathbf{p}$ sen paikkavektori. Tällöin pisteet $O, C$ ja $P$ eivät ole kollineaarisia, koska $OC$ ei ole samansuuntainen tason $\pi'$ kanssa. Olkoon $\pi''$ taso, jonka määräävät pisteet $O, C$ ja $P$. Olkoon $\mathbf{p}'$ paikkavektori, joka on tasojen $\pi'$ ja $\pi''$ leikkaussuoran suuntainen. Määritellään nyt, että perspektiviteetti $\sigma$ kuvaa suoran $[\mathbf{p}]$ suoraksi $[\mathbf{p}']$.

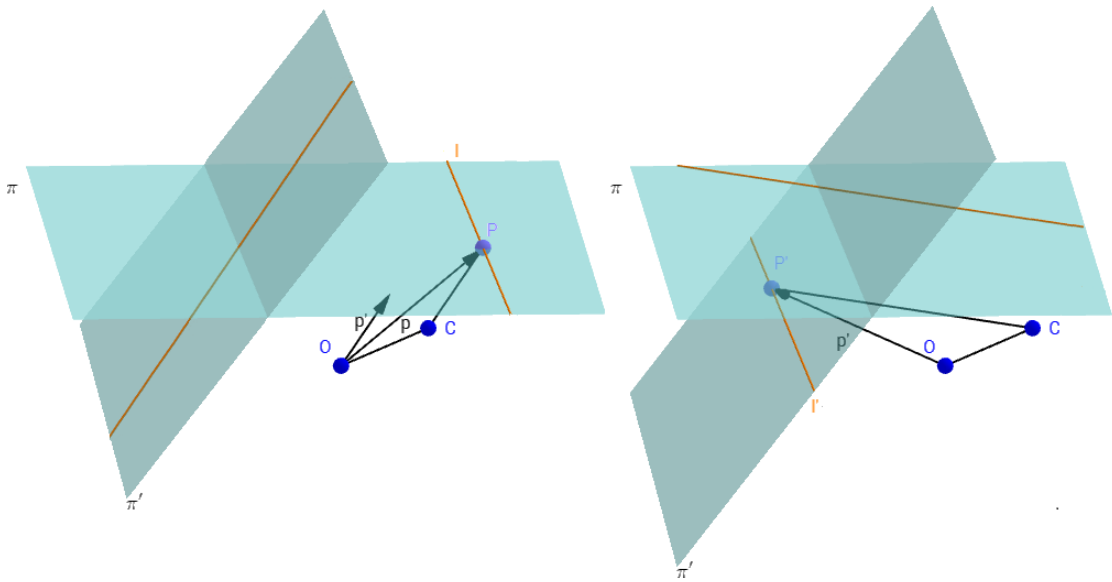



KUVA 4. Perspektiivimuunnos

Vastaavasti menetellään suoran $l'$ tapauksessa. Olkoon piste $P' \in l'$ ja olkoon $\mathbf{p}$' sen paikkavektori. Tällöin pisteet $O, C$ ja $P'$ eivät ole kollineaarisia, koska $OC$ ei ole samansuuntainen tason $\pi$ kanssa. Olkoon $\pi'''$ taso, jonka määräävät pisteet $O, C$ ja $P'$. Olkoon $\mathbf{p}$ paikkavektori, joka on tasojen $\pi$ ja $\pi'''$ leikkaussuoran suuntainen. Määritellään nyt, että perspektiviteetti $\sigma$ kuvaa suoran $[\mathbf{p}]$ suoraksi $[\mathbf{p}']$.

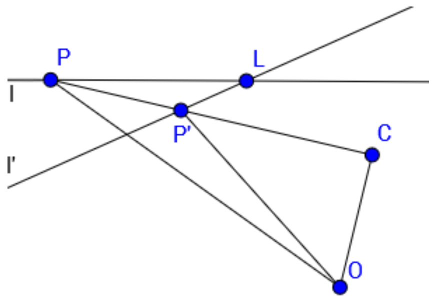
Määritellään lopuksi, että perspektiviteetti $\sigma$ kuvaa suoran, joka kulkee origon $O$ kautta ja on samansuuntainen tasojen $\pi$ ja $\pi'$ leikkaussuoran kanssa takaisin itselleen.

Näin perspektiviteetin $\sigma$ avulla konstruoitiin kuvaus tasolta $\pi$ ja sen ideaalipisteiltä tasolle $\pi'$ ja sen ideaalipisteille. Tätä kuvausta sanotaan *perspektiiviseksi muunnokseksi*.




KUVA 5. Suorat l ja l'

Osoitetaan nyt, miksi perspektiivinen muunnos voidaan samaistaa eräänlaiseksi projektiiviseksi muunnokseksi. Tarkastellaan tilannetta aluksi avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ja siihen liittyvässä projektiivisessa avaruudessa $\mathbb{RP}$ (projektiivinen avaruus $\mathbb{RP}$ koostuu avaruuden $\mathbb{R}^2$ suorista, jotka kulkevat origon kautta). Olkoon $\sigma : l \to l'$ perspektiviteetti tasossa $\mathbb{R}^2$, missä $l$ ja $l'$ ovat suoria, jotka eivät kulje origon $O$ kautta. Olkoon $C$ tämän perspektiviteetin perspektiivipiste siten, että $OC \nparallel l$ ja $OC \nparallel l'$ ja olkoon $L$ piste, missä suorat $l$ ja $l'$ leikkaavat (Kuva 6).

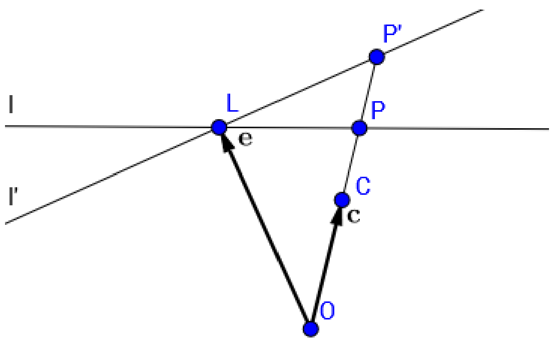



Kuva 6. Konstruktion alkutilanne

Halutaan muodostaa projektiivinen muunnos $\tau : \mathbb{RP} \to \mathbb{RP}$ perspektiviteetin $\sigma$ avulla. Olkoon $\sigma(P) = P'$. Määritellään tällöin kuvaukselle $\tau$, että $\tau(OP) = OP'$.

Seuraavaksi halutaan löytää kaksi suoraa, jotka kuvautuvat takaisin itselleen kuvauksessa $\tau$. Näiden suorien avulla voidaan määrittää avaruudelle $\mathbb{R}^2$ kantavektorit ja näiden kantavektoreiden avulla voidaan määritellä kuvaus $\tau$.

Ensimmäiseksi suoraksi voidaan valita $OL$, sillä $\tau(OL) = OL$, koska $\sigma(L) = L$. Toiseksi suoraksi valitaan $OC$. Tämä suora leikkaa suoraa $l$ pisteessä $P$ ja suoraa $l'$ pisteessä $P'(= \sigma(P))$, jolloin $O, C, P$ ja $P'$ ovat samalla suoralla. Tästä seuraa, että $\tau(OC) = OC$. Valitaan siis kantavektoreiksi paikkavektorit $\mathbf{e} = \overrightarrow{OL}$ ja $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ (Kuva 7).




Kuva 7. Kantavektorien $\mathbf{e}$ ja $\mathbf{c}$ valinta

Nyt voidaan selvittää, kuinka origon kautta kulkeva suora kuvautuu kuvauksessa $\tau$. Oletetaan, että suora $OC$ leikkaa suoraa $l$ pisteessä, jonka paikkavektori on $k\mathbf{c}$, ja suoraa $l'$ pisteessä, jonka paikkavektori on $k'\mathbf{c}$, missä $k, k' \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (kumpikaan luvuista ei selvästikään voi olla nolla, sillä muuten kyseessä on nollavektori, eikä myöskään yksi, sillä se tarkoittaisi, että $C \in l$ tai $C \in l'$, joka ei ole sallittua).

Tällöin suoran $l$ mielivaltaisella pisteellä $P$ on paikkavektori $t\mathbf{e}+(1-t)k\mathbf{c}$ ja suoran $l'$ mielivaltaisella pisteellä $P'$ on paikkavektori $s\mathbf{e}+(1-s)k'\mathbf{c}$, missä $t, s \in \mathbb{R}$.

Toisaalta suoralla $OP$ sijaitsevat pisteet voidaan ilmaista muodossa $u(\mathbf{e}+m\mathbf{c}) = u\mathbf{e}+mu\mathbf{c}$, missä $m, u \in \mathbb{R}$ ja $m$ on kiinnitetty. Nyt pisteellä $P$ on kaksi yhtäpitävää esitystä $t\mathbf{e}+(1-t)k\mathbf{c}$ ja $u\mathbf{e}+mu\mathbf{c}$. Tästä seuraa, että

$$\begin{cases} u = t \\ mu = (1-t)k = k - kt. \end{cases}$$

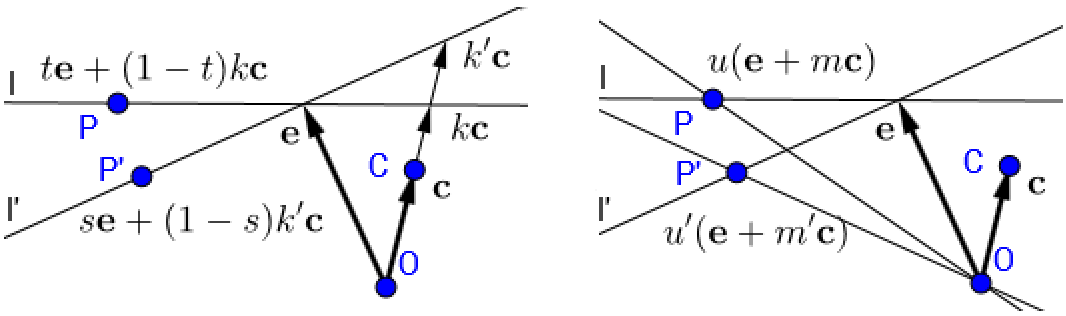
Tehdään sijoitus $u = t$ jälkimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$mt = k - kt.$$

Kun tästä ratkaistaa $t$ saadaan

$$t = \frac{k}{m+k}.$$

Selvästi $t \neq 0$ sillä $k \neq 0$.




Kuva 8. Mielivaltaisten pisteiden kaksi parametriesitystä

Vastaavasti suoralla $OP'$ sijaitsevat pisteet voidaan ilmaista muodossa $u'(\mathbf{e} + m'\mathbf{c}) = u'\mathbf{e}+m'u'\mathbf{c}$, missä $m', u' \in \mathbb{R}$ ja $m'$ on kiinnitetty, jolloin pisteellä $P'$ on kaksi yhtäpitävää esitystä $s\mathbf{e}+(1-s)k'\mathbf{c}$ ja $u'\mathbf{e}+m'u'\mathbf{c}$. Noudattaen samanlaista päättelyä kuin yllä, pisteelle $P'$ saadaan

$$s = \frac{k'}{m'+k'}.$$

Kuten edellä, myös $s \neq 0$ sillä $k' \neq 0$.

Nyt $\tau(OP) = OP'$, jos ja vain jos vektorit $\overrightarrow{CP}$ ja $\overrightarrow{CP'}$ ovat toistensa monikertoja eli, jos ja vain jos on olemassa $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ siten, että

$$r(t\mathbf{e}+(1-t)k\mathbf{c}-\mathbf{c}) = s\mathbf{e}+(1-s)k'\mathbf{c}-\mathbf{c}.$$

Ottamalla yhteisiä tekijöitä yhtälö saadaan muotoon

$$rt\mathbf{e}+r((1-t)k-1)\mathbf{c} = s\mathbf{e}+((1-s)k'-1)\mathbf{c}.$$

Tämä taas on totta, jos ja vain jos

$$\begin{cases} rt = s \\ r((1-t)k-1) = ((1-s)k'-1). \end{cases}$$

Jaetaan alarivi ylärivillä, jolloin saadaan

$$\frac{(1-t)k-1}{t}=\frac{(1-s)k'-1}{s}.$$

Muuttujat $t$ ja $s$ saadaan eliminoitua sijoituksilla $t=\frac{k}{m+k}$ ja $s=\frac{k'}{m'+k'}$, jolloin saadaan

$$\frac{(1-\dfrac{k}{m+k})k-1}{\dfrac{k}{m+k}}=\frac{(1-\dfrac{k'}{m'+k'})k'-1}{\dfrac{k'}{m'+k'}}.$$

Usean välivaiheen jälkeen yhtälö saadaan muotoon

$$m'=m\frac{(k-1)k'}{(k'-1)k}.$$

Tällöin kuvaus $\tau:\mathbb{RP}\to\mathbb{RP}$ kantavektoreiden $\mathbf{e}$ ja $\mathbf{c}$ muodostamassa kannassa on

$$\left[\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\right]\mapsto\left[\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}\right]$$

ja sitä edustaa matriisi

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{(k-1)k'}{(k'-1)k}\end{pmatrix}.$$

Kirjoitetaan tämä matriisi yksinkertaisemassa muodossa seuraavasti

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}=:\mathbf{A}.$$

Tässä $r$ on kiinnitetty luku, joka riippuu suorien $l$ ja $l'$ sekä pisteen $C$ valinnasta. Koska ylläoleva matriisi on kääntyvä, niin kyseessä on projektiivinen muunnos.

Huomataan, että ylläolevalla matriisilla on täsmälleen kaksi ominaisarvoa: 1 ja $r$. Tällöin perspektiivinen muunnos voidaan määritellä avaruudessa $\mathbb{R}^2$ seuraavasti.

Määritelmä 2.19. Funktio $\sigma:\mathbb{RP}\to\mathbb{RP}$ on perspektiivinen muunnos, jos se on projektiivinen muunnos, jota edustavalla matriisilla $\mathbf{A}$ on täsmälleen kaksi eri reaalista ominaisarvoa.

Seuraus 2.20. Perspektiivinen muunnos on lineaarikuvaus.

Edetään nyt ylläoleva konstruktio toiseen suuntaan. Olkoon matriisi $\mathbf{A}$ kuten yllä. Koska matriisilla $\mathbf{A}$ on kaksi eri ominaisarvoa $\lambda_1\in\mathbb{R}$ ja $\lambda_2\in\mathbb{R}$, sillä on myös kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$. Valitaan nämä vektorit avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantavektoreiksi. Tällöin matriisi $\mathbf{A}$ voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{A}=\mathbf{T}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\mathbf{T}^{-1},$$

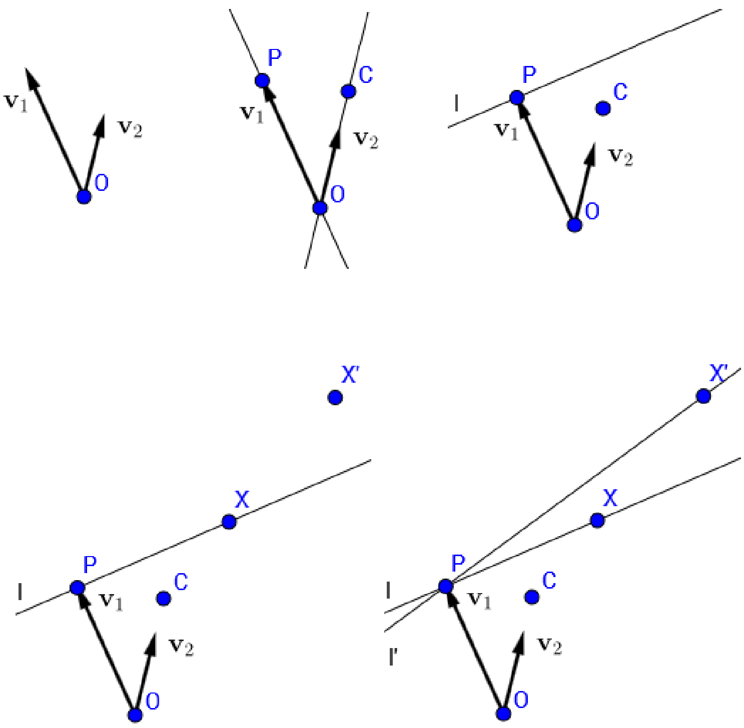
missä $\mathbf{T}=(\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2)$ on kannanvaihtomatriisi.

Valitaan nyt perspektiivipiste $C$ suoralta, jonka määrää vektori $\mathbf{v}_2$ ja valitaan toinen piste $P$ suoralta, jonka määrää vektori $\mathbf{v}_1$. Määritellään suora $l$ siten, että se kulkee pisteen $P$ kautta eikä ole vektorin $\mathbf{v}_2$ suuntainen.

Seuraavaksi halutaan määritellä suora $l'$, joka tulee olemaan suoran $l$ kuva perspektiivimuunnoksessa. Tämä ei onnistu pelkästään pisteiden $C$ ja $P$ avulla vaan tarvitaan vielä kolmas piste näiden lisäksi, joka ei ole origo. Olkoon $X \neq P$ jokin suoran $l$ piste. Kun tähän pisteeseen sovelletaan matriisia $\mathbf{A}$ saadaan piste $X' = \mathbf{A}X$. Tämä piste sijaitsee välttämättä perspektiivimuunnoksen kuvasuoralla, jota matriisi $\mathbf{A}$ edustaa. Määritellään suora $l'$ siten, että se kulkee pisteiden $X'$ ja $P$ kautta. Nyt voidaan määritellä perspektiviteetti $\sigma : l \to l'$, jonka perspektiivipiste on $C$, ja näin konstruktio on tehty molempiin suuntiin.

Aikaisemmin esitellyn Projektiivisen geometrian peruslauseen mukaan neljä pistettä määrää projektiivisen muunnoksen. Tässä konstruktiossa tarvittiin kuitenkin vain kolmea pistettä $C, P$ ja $X$. Tämä johtuu siitä, että konstruktio on tehty kaksiulotteisessa avaruudessa, kun taas peruslause koskee kolmiulotteista avaruutta. Konstruktio ei siis ole ristiriidassa peruslauseen kanssa.

Neljättä pistettä ei tässä konstruktiossa edes tarvita. Jos valitaan neljäs piste $Y$ suoralta $l$, niin sen kuvapiste $Y' = \mathbf{A}Y$ tulee olemaan samalla suoralla $l'$, jonka määräävät jo pisteet $P$ ja $X'$.

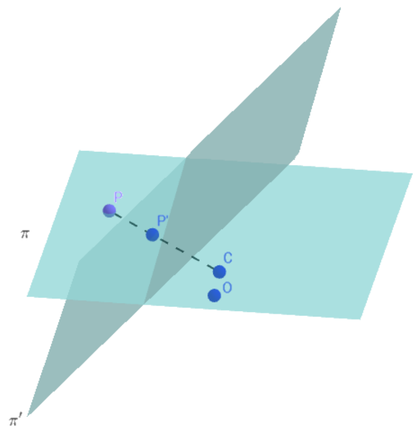



KUVA 9. Konstruktion toinen suunta

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja siihen liittyvässä projektiivisessa avaruudessa $\mathbb{RP}^2$. Olkoon $\sigma : \pi \to \pi'$ perspektiviteetti, missä $\pi$ ja $\pi'$ ovat tasoja, jotka eivät sisällä origoa $O$ ja olkoon $C \notin \pi \cup \pi'$ perspektiivin perspektiivipiste.

Jälleen halutaan muodostaa projektiivinen muunnos $\tau : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ perspektiviteetin $\sigma$ avulla. Olkoon $\sigma(P) = P'$. Määritellään tällöin $\tau(OP) = OP'$.

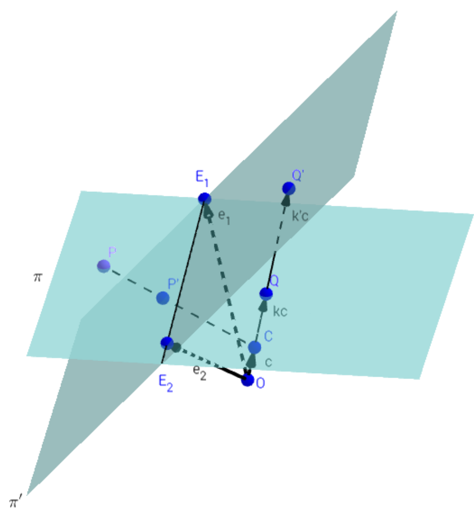
Kaksiuloitteisessa tapauksessa haluttiin löytää kaksi suoraa, jotka kuvautuvat takaisin itselleen kuvauksessa $\tau$. Kolmiuloitteisessa tapauksessa suoria tarvitaan kolme. Lisäksi suorista korkeintaan kaksi saa sijaita samassa tasossa.




KUVA 10. Konstruktion alkutilanne

Olkoon $E_1$ ja $E_2$ pisteitä tasojen $\pi$ ja $\pi'$ leikkaussuoralla $l$. Tällöin $\tau(OE_1) = OE_1$ ja $\tau(OE_2) = OE_2$, koska $\sigma(E_1) = E_1$ ja $\sigma(E_2) = E_2$. Valitaan siis kahdeksi ensimmäiseksi suoraksi suorat $OE_1$ ja $OE_2$. Suoralta $l$ olisi helppo valita myös kolmas piste $E_3$, jolloin $\tau(OE_3) = OE_3$, mutta tällöin kuvauksesta $\tau$ ei saataisi mitään uutta tietoa, sillä suorat ja niiden mukaiset vektorit sijaitsisivat samassa tasossa. Valitaan sen sijaan kolmanneksi suoraksi suora $OC$. Tämä suora leikkaa tasoa $\pi$ jossain pisteessä $Q$ ja tasoa $\pi'$ jossain pisteessä $Q'$, jolloin $O, C, Q$ ja $Q'$ ovat samalla suoralla. Tällöin siis $\tau(OC) = OC$.

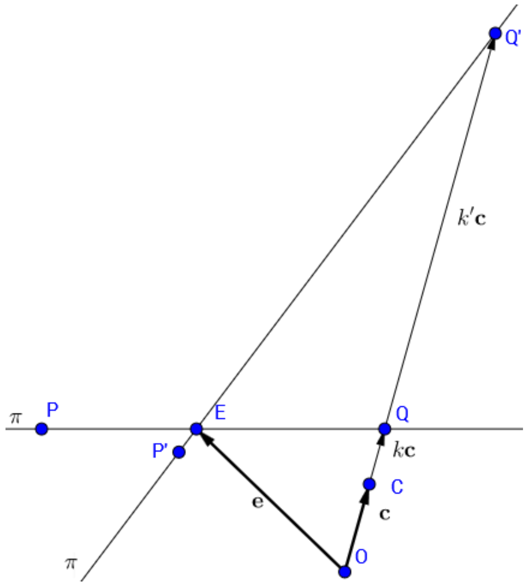
Avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantavektoreiksi voidaan nyt valita paikkavektorit $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ ja $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Näiden vektoreiden avulla voidaan ilmoittaa kuvauksen $\tau$ vaikutus origon kautta kulkevaan suoraan.




KUVA 11. Kantavektorit sekä pisteiden $Q$ ja $Q'$ paikkavektorit

Huomataan aluksi, että suorat $OC, OP$ ja $OP'$ sijaitsevat kaikki samassa tasossa, olkoon se $\pi''$, ja rajoitutaan hetkeksi tarkastelemaan kuvausta tässä tasossa. Olkoot lisäksi pisteillä $Q$ ja $Q'$ paikkavektorit $k\mathbf{c}$ ja $k'\mathbf{c}$, missä $k, k' \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (kuten kaksiuloitteisessa tapauksessa, luvut nolla ja yksi ovat poissuljettuja vaihtoehtoja).

Vektori $\mathbf{c}$ sijaitsee jo tasossa $\pi''$, mutta kumpikaan vektoreista $\mathbf{e}_1$ tai $\mathbf{e}_2$ ei sijaitse, joten tarvitaan uusi vektori avuksi kuvauksen määrittelemiseksi tässä tasossa. Olkoon $E$ tason $\pi''$ ja suoran $l$ leikkauspiste. Tällöin luonnollinen valinta uudeksi vektoriksi on $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$, sillä $\tau(OE) = OE$, koska $\sigma(E) = E$.




Kuva 12. Taso $\pi''$

Nyt voidaan menetellä kuten edellä ja antaa suorille $OP$ ja $OP'$ parametrisaatiot

$$OP = u(\mathbf{e} + m\mathbf{c}) = u\mathbf{e} + um\mathbf{c}$$

ja

$$OP' = u'(\mathbf{e} + m'\mathbf{c}) = u'\mathbf{e} + u'm'\mathbf{c},$$

missä $m, m', u, u' \in \mathbb{R}$ ja $m$ sekä $m'$ ovat kiinnitettyjä. Koska tarkastelu on nyt rajoitettu kaksiuloitteiseen tasoon, aikaisemman perusteella tiedetään, että $m' = rm$, missä $r$ riippuu tasojen $\pi, \pi'$ ja pisteen $C$ valinnasta. Sijoitetaan tämä suoran $OP'$ esitykseen, jolloin saadaan

$$OP' = u'\mathbf{e} + u'rm\mathbf{c}.$$

Koska vektori $\mathbf{e}$ voidaan ilmaista vektoreiden $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ avulla seuraavasti

$$\mathbf{e} = t\mathbf{e}_1 + (1-t)\mathbf{e}_2,$$

missä $t \in \mathbb{R}$, saadaan, että kuvaus $\tau$ kuvaa suoran

$$OP = u(t\mathbf{e}_1 + (1-t)\mathbf{e}_2 + m\mathbf{c}) = ut\mathbf{e}_1 + u(1-t)\mathbf{e}_2 + um\mathbf{c}$$

suoraksi

$$OP' = u'(t\mathbf{e}_1 + (1-t)\mathbf{e}_2 + rm\mathbf{c}) = u't\mathbf{e}_1 + u'(1-t)\mathbf{e}_2 + u'rm\mathbf{c}.$$

Kun toimitaan vastaavasti kuten kaksiuloitteisessa tapauksessa saadaan lopulta, että kantavektoreiden $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{c}$ mukainen kuvaus $\tau : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ on

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u' \end{pmatrix}\right]$$

ja sitä edustaa matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} =: \mathbf{A}.$$

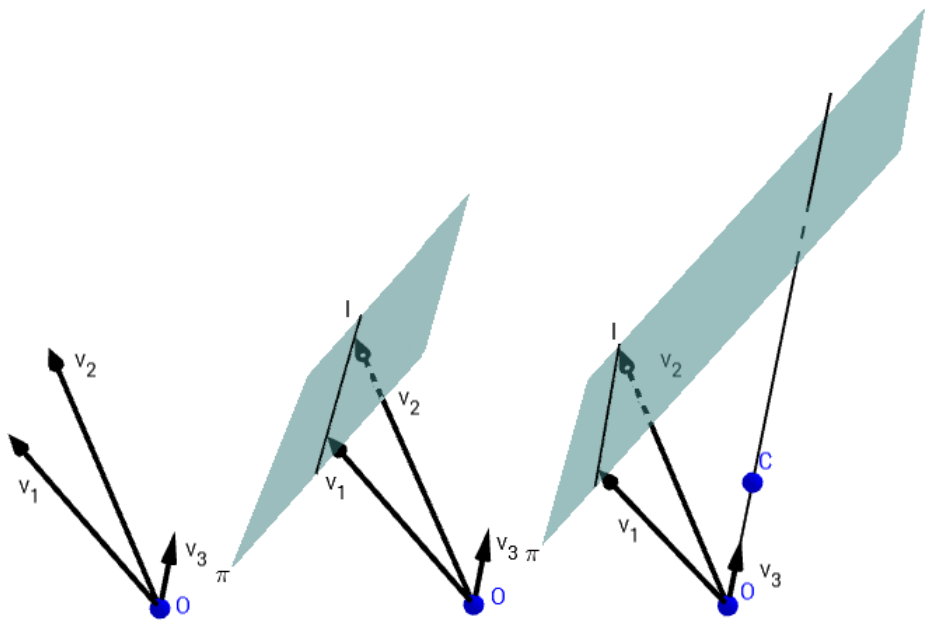
Tässä $r$ on kiinnitetty luku, joka riippuu tasojen $\pi$ ja $\pi'$ sekä pisteen $C$ valinnasta. Ylläoleva matriisi on kääntyvä, joten kyseessä on projektiivinen muunnos.

Toisin kuin kaksiulotteisessa tapuksessa, kolmessa ulottuvuudessa perspektiivistä muunnosta ei voida määritellä ominaisarvojen avulla, koska 1 on matriisissa $\mathbf{A}$ kaksinkertainen ominaisarvo. Matriisilla $\mathbf{A}$ on kuitenkin kolme lineaarisesti riippumatonta vektoria, joiden avulla määritelmä voidaan tehdä.

MÄÄRITELMÄ 2.21. Funktio $\sigma : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ on perspektiivinen muunnos, jos se on projektiivinen muunnos, jota edustavalla matriisilla $\mathbf{A}$ on kolme lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ja $\mathbf{v}_3$ ja

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1},$$

missä $\mathbf{T} = (\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3)$ ja $r \neq 1$.




KUVA 13. Konstruktion toinen suunta

Edetään tämäkin konstruktio toiseen suuntaan eli lähdetään liikkeelle matriisista $\mathbf{A}$, jolle pätee

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix},$$

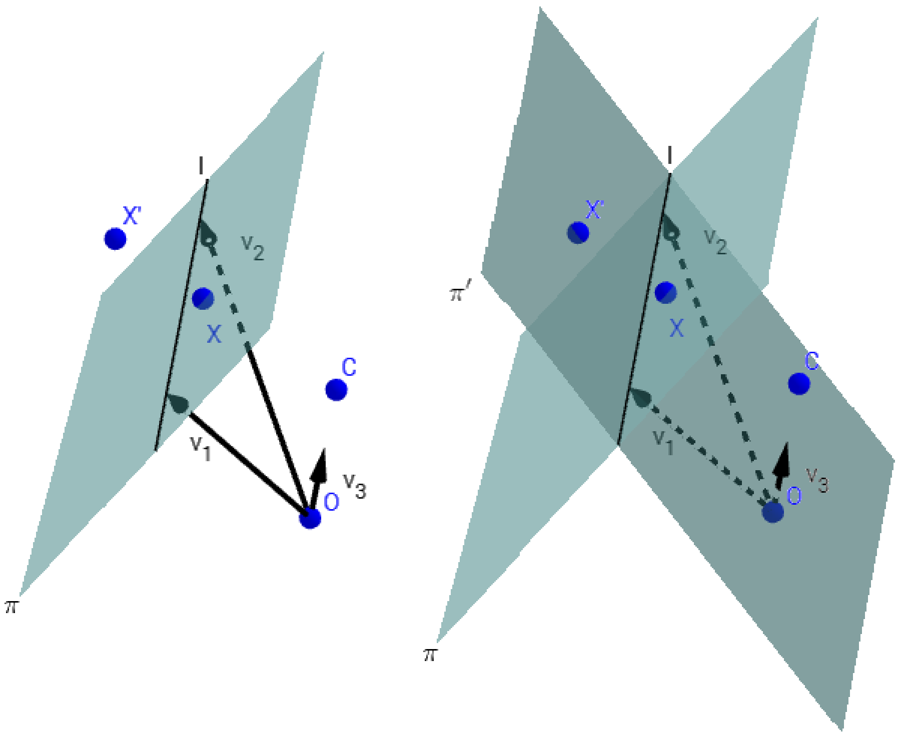
missä $r \in \mathbb{R}$. Tällä matriisilla on kolme ominaisarvoa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ (joista kaksi ovat samoja), joten sillä on myös kolme ominaisvektoria $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ja $\mathbf{v}_3$. Valitaan nämä vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantavektoreiksi. Tällöin

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\mathbf{T}^{-1},$$

missä $\mathbf{T} = (\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3)$.

Valitaan nyt suora $l$, joka kulkee vektoreiden $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ kautta ja valitaan taso $\pi$ siten, että se kulkee suoran $l$ kautta, ei ole vektorin $\mathbf{v}_3$ suuntainen eikä sisällä origoa. Lisäksi valitaan matriisiin $\mathbf{A}$ liittyvä perspektiivipiste $C$ suoralta, jonka määrää vektori $\mathbf{v}_3$ (Kuva 13).

Olkoon $X \in \pi \setminus l$, jolloin $\mathbf{A}X =: X'$ on suoralla $CX$. Määritellään pisteen $X' \notin l$ ja suoran $l$ avulla taso $\pi'$. Näiden tasojen ja suorien avulla voidaan määritellä perspektiviteetti. Olkoon $\sigma : \pi \to \pi'$ perspektiviteetti, jonka perspektiivipiste on $C$ ja jota edustaa matriisi $\mathbf{A}$.




Kuva 14. Konstruktion toinen suunta

## 2.4. Duaalisuus

Kaksi tärkeintä projektiivista ominaisuutta ovat kollineaarisuus ja insidenssi. Näiden ominaisuuksien välillä on tietty symmetria.

- **Kollineaarisuus**: Kaksi eri Pistettä määrää yksikäsitteisen Suoran.
- **Insidenssi**: Kaksi eri Suoraa leikkaa yksikäsitteisessä Pisteessä.

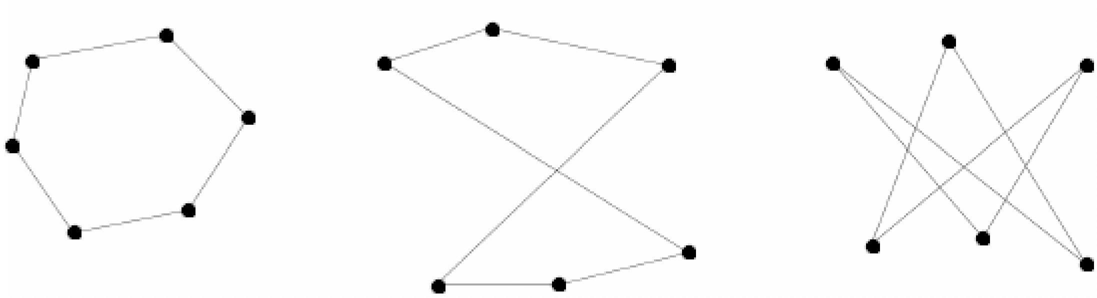
Vaihtamalla Suoran Pisteeksi ja Pisteen Suoraksi sekä muuttamalla lauserakenteen järkeväksi, voidaan toinen näistä ominaisuuksista muuttaa toiseksi. Näin muodostetut lauseet ovat toistensa *duaaleja*.

Esimerkki 2.22.

| Lause | Duaali |
|---|---|
| **Pisteet Suoralla**. | **Suorat Pisteen kautta**. |
| Kolme **Pistettä** ja niitä yhdistävät **Suorat**. | Kolme **Suoraa** ja niiden **leikkauspisteet**. |
| Kolme **Pistettä** $[a,b,c]$, $[d,e,f]$ ja $[g,h,i]$ **ovat samalla suoralla**, jos ja vain jos $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0.$ | Kolme **Suoraa** $ax+by+cz=0$, $dx+ey+fz=0$ ja $gx+hy+iz=0$ **leikkaavat**, jos ja vain jos $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0.$ |

Taulukon toinen lause ja sen duaali tarkoittavat molemmat kolmiota. Kolmion duaali on siis kolmio. Tällöin sanotaan, että kolmio on *itseduaali*.

Kuten nähdään, on mahdollista dualisoida lauseita ja näin muodostaa uusia lauseita. Dualisoidaan seuraavaksi Pappuksen lause. Muotoillaan kuitenkin lause ensin kuusikulmioiden avulla dualisoinnin helpottamiseksi. *Kuusikulmiolla* tarkoitetaan kuutta Pistettä, joista korkeintaan kaksi on samalla Suoralla ja Pisteitä yhdistäviä kuutta Suoraa.



Kuva 15. Mahdolliset kuusikulmiot

| Pappuksen lause | Duaali |
|---|---|
| Olkoon kuusikulmion **kulmapisteet** $A, B, C, A', B'$ ja $C'$ siten, että **Pisteet** $A, B$ ja $C$ ovat **Suoralla** $l$ ja **Pisteet** $A', B'$ ja $C'$ ovat eri **Suoralla** $m$. Tällöin **leikkauspisteet** Suorille $B'C$ ja $BC'$, $CA'$ ja $C'A$, $AB'$ ja $A'B$ **ovat samalla Suoralla**. | Olkoon kuusikulmion **sivut** $AB', B'C, CA', A'B, BC'$ ja $C'A$ siten, että **sivujen** $AB', A'C$ ja $BC'$ **leikkauspiste** on $P$ ja **sivujen** $B'C, AC'$ ja $A'B$ **leikkauspiste** on $Q$. Tällöin **Suorat** $AA', BB'$ ja $CC'$ **leikkaavat**. |

Lauseen duaali tunnetaan Brianchon lauseena. Tämänkin lauseparin tapauksessa duaalisuus on helposti nähtävissä. Pappuksen lauseen oletuksissa puhutaan Pisteistä kahdella Suoralla, kun taas Brianchon lauseen oletuksissa esiintyy Suoria, jotka leikkaavat kahdessa Pisteessä. Pappuksen lauseessa väitetään Pisteiden olevan samalla suoralla, kun taas Brianchon lauseessa väitetään Suorien leikkaavan samassa Pisteessä.

Muodostetaan vielä duaali Desarguesin lauseelle. Duaalin muodostamisen helpottamiseksi, muotoillaan lause hieman väljemmin.

Esimerkki 2.23.

| Desarguesin lause | Duaali |
|---|---|
| Olkoot kaksi **kolmiota** siten, että **Suorat vastinkärkien kautta leikkaavat**. | Olkoot kaksi **kolmiota** siten, että **sivujen jatkeiden leikkauspisteet ovat samalla suoralla**. |
| Tällöin **sivujen jatkeiden leikkauspisteet ovat samalla suoralla**. | Tällöin **vastinkärkien** kautta kulkevat **suorat leikkaavat**. |

Huomataan, että Desarguesin lauseen duaali on lause itse, mutta käänteiseen suuntaan. Alkuperäisessä lauseessa oletetuksena on Suorien leikkaaminen Pisteessä ja väitteenä Pisteiden sijainti samalla suoralla. Duaalissa taasen oletetaan Pisteiden olevan samalla Suoralla ja väitteenä on Suorien leikkaaminen.

LUKU 3

# Projektiiviset kartioleikkaukset

## 3.1. Perusteet

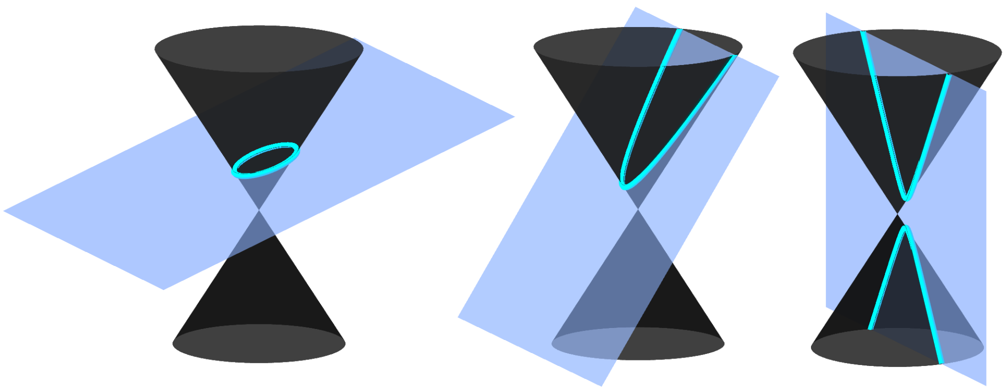
Edellinen luku käsitteli projektiivisen avaruuden Suoria ja Pisteitä sekä niiden ominaisuuksia. Tässä luvussa keskitytään kartioleikkauksiin ja todistetaan muun muassa kuuluisa Pascalin lause. Aloitetaan määrittelemällä, mitä tarkoitetaan projektiivisella kartioleikkauksella ja käydään läpi joitain niihin liittyviä perustuloksia.

Määritelmä 3.1. *Projektiivinen kartioleikkaus* avaruudessa $\mathbb{RP}^2$ on joukko Pisteitä, joiden homogeeniset koordinaatit toteuttavat toisen asteen yhtälön

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0,$$

missä $A, B, C, F, G, H, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 3.2. Projektiivinen kartioleikkaus $E$ on *aito*, jos standardin upotustason $z = 1$ ja projektiivisen kartioleikkauksen $E$ leikkauskäyrä on aito kartioleikkaus. Jos projektiivinen kartioleikkaus ei ole aito, se on *surkastunut*.



Kuva 1. Mahdolliset kartioleikkaukset

Surkastuneet projektiiviset kartioleikkaukset ovat Suorapari, Suora, Piste ja tyhjä joukko eli joukko, jossa ei ole Pisteitä.

Esimerkki 3.3. Projektiivinen kartioleikkaus $4x^2+xy-2y^2-8xz-2yz+4z^2 = 0$ on aito, sillä se voidaan esittää standardissa upotustasossa hyperbelin

$$\{(x, y, z) : 4x^2 + xy - 2y^2 - 8x - 2y + 4 = 0, z = 1\}$$

avulla.

Projektiivinen kartioleikkaus $3x^2-4xy+10xz-4y^2+4yz+3z^2 = 0$ on surkastunut, koska

$$3x^2 - 4xy + 10xz - 4y^2 + 4yz + 3z^2 = (x - 2y + 3z)(3x + 2y + z),$$

jolloin se voidaan esittää suoraparina

$$\begin{cases} \{(x,y,z) : x - 2y + 3 = 0, z = 1\} \\ \{(x,y,z) : 3x + 2y + 1 = 0, z = 1\} \end{cases}$$

standardissa upotustasossa.

Tutkitaan seuraavaksi, kuinka projektiivinen kartioleikkaus käyttäytyy projektiivisessa muunnoksessa. Tiedetään, että muunnos kuvaa Suorat Suoriksi ja Pisteet Pisteiksi, mutta ei ole laisinkaan selvää, että se kuvaa kartioleikkaukset kartioleikkaukseksi. Osoittautuu, että näin kuitenkin on.

LAUSE 3.4. *Olkoon $t$ projektiivinen muunnos ja olkoon $E$ aito projektiivinen kartioleikkaus. Tällöin $t(E)$ on aito projektiivinen kartioleikkaus.*

TODISTUS. Olkoon projektiivisen kartioleikkauksen $E$ yhtälö

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0.$$

Tällöin Piste, joka sijaistee leikkauksessa $E$, toteuttaa y.o. yhtälön. Olkoon $t([x,y,z]) = [x',y',z']$, jolloin käänteiskuvaukselle $t^{-1}$ pätee $[x,y,z] = t^{-1}([x',y',z'])$. Olkoon kuvaukseen $t^{-1}$ liittyvä matriisi

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix},$$

jolloin

$$x = ax' + by' + cz', \quad y = dx' + ey' + fz', \quad z = gx' + hy' + kz'.$$

Kun sijotetaan nämä leikkauksen $E$ yhtälöön, saadaan toisen asteen yhtälö, jossa muuttujina ovat $x', y'$ ja $z'$. Tällöin $t(E)$ on projektiivinen kartioleikkaus.

Todistetaan vielä, että saatu kartioleikkaus on aito. Koska projektiivinen muunnos $t^{-1}$ kuvaa Suorat Suoriksi ja Pisteet Pisteiksi, se kuvaa surkastuneen kartioleikkauksen surkastuneeksi kartioleikkaukseksi. Oletetaan $t(E)$ surkastuneeksi kartioleikkaukseksi. Tällöin $t^{-1}$ kuvaa sen surkastuneeksi kartioleikkaukseksi, mikä on ristiriita. Tästä seuraa, että $t(E)$ ei voi olla surkastunut, jolloin se on aito. □

Niin euklidisessa kuin projektiivisessa geometriassa kaksi Pistettä määrittää suoran, mutta kuinka monta Pistettä tarvitaan projektiivisen kartioleikkauksen määrittämiseksi. Vastaus tähän kysymykseen on viisi, kuten pian käy ilmi. Samalla todistetaan tulos, jossa neljä Pisteistä on kiinnitetty yksikkökolmioksi ja -pisteeksi, jolloin projektiiviselle kartioleikkaukselle löytyy yksinkertainen esitys viidennen Pisteen suhteen.

LAUSE 3.5 (Viiden Pisteen lause). *Olkoon $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in \mathbb{RP}^2$ Pisteitä, joista korkeintaan kaksi on samalla Suoralla. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen aito projektiivinen kartioleikkaus, johon nämä Pisteet kuuluvat. Erityisesti, jos nämä viisi Pistettä ovat $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1], [1,1,1]$ ja $[a,b,c]$, niin kartioleikkauksen yhtälö on*

$$c(a-b)xy + b(c-a)xz + a(b-c)yz = 0,$$

*missä $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Projektiivisen geometrian peruslauseen mukaan on olemassa kuvaus $t$, joka kuvaa Pisteet $P_1, P_2, P_3, P_4$ Pisteiksi $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ ja $[1,1,1]$. Olkoon $[a,b,c]$ Pisteen $P_5$ kuva. Lauseen 2.9 mukaan $t$ säilyttää kollineaarisuuden, jolloin mitkään kolme Pistettä Pisteistä $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$ ja $[a,b,c]$ eivät ole kollineaarisia. Tästä seuraa, että $a, b$ ja $c$ ovat eri lukuja ja nollasta poikkeavia.

Koska $t$ on injektio, joka säilyttää aidot kartioleikkaukset,väite pätee jos ja vain jos on olemassa yksikäsitteinen aito kartioleikkaus, joka sisältää Pisteet $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$ ja $[a,b,c]$. Riittää osoittaa, että on olemassa yksikäsitteinen kartioleikkaus näiden Pisteiden kautta, sillä ei ole olemassa surkastunutta kartioleikkausta, joka kulkisi näiden Pisteiden kautta.

Olkoon etsityn kartioleikkauksen yhtälö

$$Ax^2 + Bxy + C^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0.$$

Koska kartioleikkaus kulkee Pisteen $[1,0,0]$ kautta, on oltava $A = 0$. Vastaavasti, koska kartioleikkaus kulkee myös Pisteiden $[0,1,0]$ ja $[0,0,1]$ kautta, on oltava $C = 0$ ja $H = 0$. Tällöin ylläoleva yhtälö sievenee muotoon

$$Bxy + Fxz + Gyz = 0,$$

missä $B, F, G \in \mathbb{R}$.

Koska kartioleikkaus kulkee myös Pisteiden $[1,1,1]$ ja $[a,b,c]$ kautta, saadaan

$$B + F + G = 0$$

ja

$$Bab + Fac + Gbc = 0.$$

Muodostetaan tästä yhtälöpari ja ratkaistaan $F$ ja $G$:

$$\begin{cases} B + F + G = 0 \\ Bab + Fac + Gbc = 0. \end{cases}$$

Kun ylempi rivi vähennetään alemmasta $bc$ kertaa, saadaan

$$B(ab - bc) + F(ac - bc) = 0$$

ja lopulta

$$F = -B\frac{ab - bc}{ac - bc},$$

missä $ac - bc \neq 0$.

Ratkaistaan seuraavaksi $G$. Lähdetään liikkeelle samasta yhtälöparista kuin yllä eli

$$\begin{cases} B + F + G = 0 \\ Bab + Fac + Gbc = 0. \end{cases}$$

Vähennetään ylempi rivi alemmasta $ac$ kertaa, jolloin saadaan

$$B(ab - ac) + G(bc - ac) = 0$$

ja lopulta

$$G = -B\frac{ab - ac}{bc - ac},$$

missä $bc - ac \neq 0$.

Sijoitetaan $F$ ja $G$, jolloin saadaan

$$Bxy - B\frac{ab-bc}{ac-bc}xz - B\frac{ab-ac}{bc-ac}y = 0.$$

Usean välivaiheen jälkeen yhtälö saadaan muotoon

$$c(a-b)xy + b(c-a)xz + a(b-c)yz = 0.$$

Koska Piste $P_5$ määrää yksikäsitteisesti luvut $a, b$ ja $c$, ylläoleva yhtälö kuvaa yksikäsitteistä kartioleikkausta. □

## 3.2. Projektiivisten kartioleikkausten kongruenssi

Tässä kappaleessa todistetaan, että kaikki projektiiviset kartioleikkaukset ovat projektiokongruentteja. Tätä tulosta tullaan hyödyntämään laajalti tulevissa todistuksissa. Esimerkiksi Pascalin lause todistetaan helposti tämän avulla. Määritellään aluksi mitä projektiokongruenssilla tarkoitetaan.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Kaksi projektiivista kuviota $A$ ja $B$ ovat *projektiokongruentteja* keskenään, jos on olemassa projektiivinen kuvaus $f$, joka kuvaa kuvion $A$ kuvioksi $B$.

Lisäksi tullaan tarvitsemaan projektiivisen kartioleikkauksen matriisimuotoista esitystä. Se määritellään seuraavasti.

MÄÄRITELMÄ 3.7. Olkoon $E$ projektiivinen kartioleikkaus, joka toteuttaa yhtälön

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0.$$

Tällöin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}F \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}G \\ \frac{1}{2}F & \frac{1}{2}G & H \end{pmatrix}$$

on leikkauksen $E$ *määrittävä* matriisi.

Perustellaan lyhyesti, miten ylläolevaan matriisiin $\mathbf{A}$ on päädytty. Olkoon $\mathbf{x} = (x\ y\ z)^T$ ja $\mathbf{A}$ kuten edellä. Tällöin

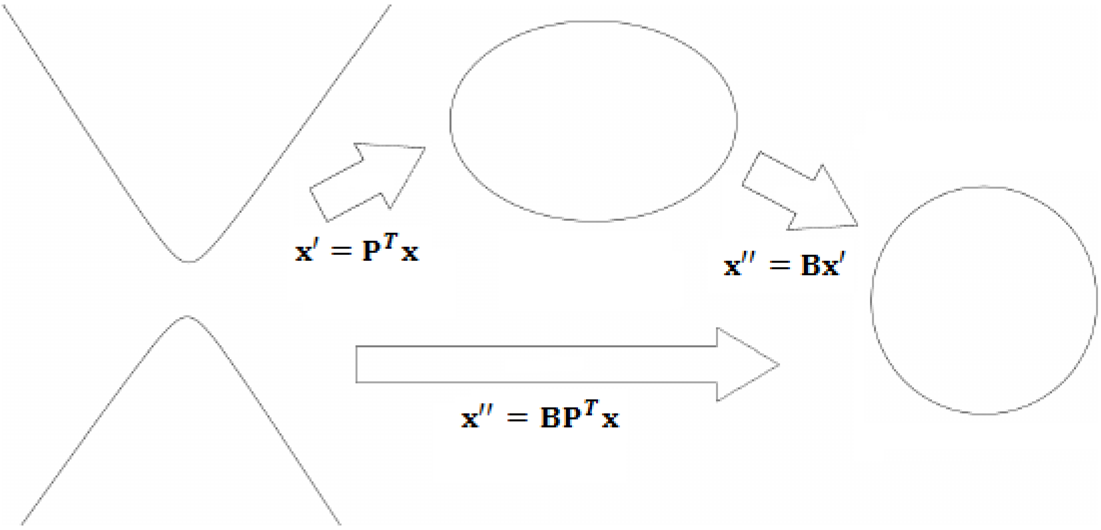
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} &= (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}F \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}G \\ \frac{1}{2}F & \frac{1}{2}G & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \left(Ax + \frac{1}{2}By + \frac{1}{2}Fz \quad \frac{1}{2}Bx + Cy\frac{1}{2}Gz \quad \frac{1}{2}Fx + \frac{1}{2}Gy + Hz\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2.
\end{aligned}$$

Matriisi $\mathbf{A}$ on siis järkevä matriisi kuvaamaan projektiivista kartioleikkausta. Huomataan lisäksi, että projektiivinen kartioleikkaus voidaan nyt kirjoittaa muodossa $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$. Muotoillaan tämä lauseeksi.

LAUSE 3.8. *Olkoon $E$ projektiivinen kartioleikkaus, jonka määrittää matriisi $\boldsymbol{A}$. Tällöin $E$ toteuttaa yhtälön $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$.*

Nyt ollaan valmiita todistamaan lause projektiivisten kartioleikkausten projektiokongruenssista.

LAUSE 3.9. *Kaikki aidot projektiiviset kartioleikkaukset ovat projektiokongruentteja.*




KUVA 2. Lauseen 3.9 todistuksen idea

TODISTUS. Riittää osoittaa, että kaikki aidot projektiiviset kartioleikkaukset ovat projektiokongruentteja projektiivisen kartioleikkausen $x^2 + y^2 = z^2$ kanssa.

Olkoon $E$ aito projektiivinen kartioleikkaus, jolle pätee $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$, missä $\mathbf{A}$ on leikkaukseen $E$ liittyvä matriisi. Määritelmän mukaan $\mathbf{A}$ on symmetrinen.

Tästä seuraa, että matriisilla $\mathbf{A}$ on kolme ortonormaalia ominaisvektoria $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ja $\mathbf{v}_3$, joilla on ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2$ ja $\lambda_3$. Jos $\mathbf{P}$ on matriisi, jonka sarakkeina ovat ominaisvektorien koordinaatit, niin olkoon

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Nyt $\mathbf{P}$ on siis ortogonaalinen matriisi ja $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Olkoon $t : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ projektiivinen muunnos siten, että $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}'$ eli $\mathbf{x}' = \mathbf{P}^T\mathbf{x}$. Tällöin $t$ muuntaa projektiivisen kartioleikkauksen $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ projektiiviseksi kartioleikkaukseksi $(\mathbf{P}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{x}') = 0$. Transpoosin laskusääntöjä noudattaen saadaan $(\mathbf{x}')^T(\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{x}' = 0$ tai $(\mathbf{x}')^T\mathbf{D}\mathbf{x}' = 0$ eli

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 = 0.$$

Koska $E$ on aito projektiivinen kartioleikkaus, kaikki ominaisarvot eivät voi olla positiivisia eivätkä negatiivisia, koska tällöin ylläoleva yhtälö kuvaa ainoastaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ origoa. Mikään ominaisarvoista ei myöskään voi olla nolla. Jos esimerkiksi $\lambda_3 = 0$, niin ominaisarvojen $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ on oltava eri merkkisiä, jolloin y.o. yhtälö voidaan kirjoittaa kahden Suoran yhtälönä:

$$\sqrt{|\lambda_1|}x' = \pm\sqrt{|\lambda_2|}y'.$$

Jäljelle jää siis vaihtoehto, jossa kaksi ominaisarvoista, esimerkiksi $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ ovat saman merkkisiä ja $\lambda_3$ on erimerkkinen. Tällöin yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$|\lambda_1|(x')^2 + |\lambda_2|(y')^2 = |\lambda_3|(z')^2.$$

Tämä on melkein tavoitellun kartioleikkauksen yhtälö. Tavoitteeseen päästään, kun yllä olevaan yhtälöön sovelletaan kuvausta $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x}'', \mathbf{x}'' = \mathbf{B}\mathbf{x}'$, missä

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda_1|} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_2|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_3|} \end{pmatrix},$$

jolloin siis saadaan $(x'')^2 + (y'')^2 = (z'')^2$. Kun unohdetaan pilkut, $E$ saatiin kuvattua projektiiviseksi kartioleikkaukseksi $x^2 + y^2 = z^2$ projektiivisella muunnoksella $s : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{B}\mathbf{P}^T\mathbf{x}]$. Löydettiin siis kuvaus, joka kuvaa mielivaltaisen projektiivisen kartioleikkauksen kartioleikkaukseksi $x^2 + y^2 = z^2$, jolloin todistus on valmis. □

## 3.3. Pascalin lause

Ennen Pascalin lauseen todistusta on todistettava joitain aputuloksia, joita tullaan hyödyntämään. Todistetaan ensimmäiseksi Kolmen Pisteen lause, jonka mukaan projektiivinen kartioleikkaus voidaan kuvata toiseksi projektiiviseksi kartioleikkaukseksi siten, että kolmen Pisteen kuvat voidaan määrätä.

Herää kysymys, miksi juuri kolme Pistettä, eikä esimerkiksi neljä. Lauseen 3.4 mukaan on olemassa kuvaus $t_1$, joka kuvaa projektiivisen kartioleikkauksen $E_1$ toiseksi projektiiviseksi kartioleikkaukseksi $E_2$ ja Projektiivisen geometrian peruslauseen mukaan on olemassa kuvaus $t_2$ siten, että se kuvaa neljä kartioleikkauksen $E_1$ Pistettä neljäksi kartioleikkauksen $E_2$ Pisteeksi. Ongelmana on, että kuvaukset $t_1$ ja $t_2$ eivät välttämättä ole sama kuvaus.

Havainnollistetaan asiaa esimerkin avulla. Olkoot Pisteet $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$ ja $[1, 1, 1]$ yhteisiä kahdelle projektiiviselle kartioleikkaukselle $E_1$ ja $E_2$, joista ensimmäinen toteuttaa yhtälön $3xy - 4xz + yz = 0$ ja toinen $xy - 4xz + 3yz = 0$. Koska leikkausten yhtälöt eivät ole toistensa monikertoja, kyseessä on kaksi eri kartioleikkausta. Projektiivisen geometrian peruslauseen mukaan ainoa kuvaus, joka kuvaa edellä mainitut Pisteet takaisin itselleen, on identtinen kuvaus, joka ei selvästi kuvaa leikkausta $E_1$ leikkaukseksi $E_2$.

Kolme Pistettä sen sijaan voidaan säilyttää kuvauksessa, kuten seuraavaksi osoitetaan.

LAUSE 3.10 (Kolmen Pisteen lause). *Olkoon $E_1$ ja $E_2$ aitoja projektiivisia kartioleikkauksia ja $P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2$ Pisteitä siten, että $P_1, Q_1, R_1 \in E_1$ ja $P_2, Q_2, R_2 \in E_2$. Tällöin on olemassa projektiivinen muunnos $t$, joka kuvaa leikkauksen $E_1$ leikkaukseksi $E_2$ siten, että*

$$t(P_1) = P_2, \quad t(Q_1) = Q_2, \quad t(R_1) = R_2.$$

TODISTUS. Olkoon $t'$ projektiivinen muunnos, joka kuvaa Pisteet $P_1, Q_1$ ja $R_1$ Pisteiksi $[1,0,0], [0,1,0]$ ja $[0,0,1]$. Tällöin $t'$ kuvaa aidon kartioleikkauksen $E_1$ aidoksi kartioleikkaukseksi $E'$, joka sisältää yksikkökolmion. Tiedetään, että kartioleikkaus $E'$ toteuttaa yhtälön

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0.$$

Koska Piste $[1,0,0]$ kuuluu leikkaukseen $E'$, on oltava $A = 0$. Vastaavasti, koska Pisteet $[0,1,0]$ ja $[0,0,1]$ kuuluvat leikkaukseen $E'$, on oltava $C = 0$ ja $H = 0$. Tällöin leikkauksen $E'$ yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$Bxy + Fxz + Gyz = 0,$$

missä $B, F, G \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Yhtälö voidaan vielä jakaa luvulla $BFG$, jolloin saadaan

$$\frac{xy}{GF} + \frac{xz}{GB} + \frac{yz}{FB} = 0.$$

Määritellään nyt muunnos $t''$ siten, että $t''([x,y,z]) = [x', y', z']$, missä

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 1/F & 0 \\ 0 & 0 & 1/B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Tällöin $t''$ kuvaa kartioleikkauksen $E'$ kartioleikkaukseksi, jolle pätee $x'y' + x'z' + y'z' = 0$. Merkintöjen selventämiseksi, jätetään yhtälöstä pilkut pois, jolloin saadaan $xy + xz + yz = 0$.

Koska $t''$ kuvaa yksikkökolmion itsekseen, yhdistetty funktio $t_1 = t'' \circ t'$ kuvaa kartioleikkauksen $E_1$ kartioleikkaukseksi, jolle pätee

$$xy + xz + yz = 0$$

siten, että $t_1(P_1) = [1,0,0], t_1(Q_1) = [0,1,0]$ ja $t_1(R_1) = [0,0,1]$.

Vastaavasti on olemassa projektiivinen muunnos $t_2$, joka kuvaa kartioleikkauksen $E_2$ kartioleikkaukseksi, jolle pätee

$$xy + xz + yz = 0$$

siten, että $t_2(P_2) = [1,0,0], t_2(Q_2) = [0,1,0]$ ja $t_2(R_2) = [0,0,1]$.

Nyt yhdistetty funktio $t = t_2^{-1} \circ t_1$ kuvaa kartioleikkauksen $E_1$ kartioleikkaukseksi $E_2$ siten, että $t(P_1) = P_2, t(Q_1) = Q_2$ ja $t(R_1) = R_2$. □

Määritellään seuraavaksi, mitä tarkoitetaan standardimuotoisella yhtälöllä projektiivisten kartioleikkausten tapauksessa.

MÄÄRITELMÄ 3.11. Projektiivisen kartioleikkauksen *standardimuotoinen* yhtälö on

$$xy + yz + zx = 0.$$

Tämä yhtälö määrää *standardin projektiivisen kartioleikkauksen.*

Huomataan, että standardimuotoinen projektiivinen kartioleikkaus sisältää yksikkökolmion $[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]$. Tätä tietoa käytetään usein hyödyksi, sillä se yksinkertaistaa projektiivisiin kartioleikkauksiin liittyviä laskuja. Kartioleikkauksen muut Pisteet, yksikkökolmion lisäksi, voidaan esittää tiiviisti yhden parametrin avulla.

Lause 3.12 (Parametrisointilause). *Olkoon $E$ projektiivinen kartioleikkaus, joka toteuttaa standardimuotoisen yhtälön*

$$xy + yz + zx = 0.$$

*Tällöin jokaisen leikkauksen $E$ Pisteen, poislukien $[1,0,0]$, homogeeniset kordinaatit ovat muotoa $[t^2+t, t+1, -t], t \in \mathbb{R}$. Lisäksi, jokainen tätä muotoa oleva Piste sijaitsee leikkauksessa $E$.*

Todistus. Olkoon $[x,y,z]$ mielivaltainen kartioleikkauksen $E$ Piste. Jos $x = 0$, niin on oltava $yz = 0$ eli joko $y = 0$ tai $z = 0$. Ensimmäisessä tapauksessa Pisteen homogeeniset koordinaatit ovat muotoa $[0,0,z] = [0,0,1]$ ja toisessa tapauksessa $[0,y,0] = [0,1,0]$. Vastaavasti voidaan päätellä koordinaateille $y$ ja $z$. Tästä seuraa, että ainoat Pisteet, joissa jokin homogeenisistä koordinaateista $x, y$ ja $z$ on nolla, ovat yksikkökolmion Pisteet $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ ja $[0,0,1]$.

Oletetaan seuraavaksi, että $[x,y,z]$ on kartioleikkauksen $E$ Piste siten, että $x, y, z \neq 0$ ja olkoon $t = x/y$. Tällöin $x = ty$ ja siten

$$(ty)y + yz + z(ty) = 0.$$

Ratkaistaan tästä $y$, jolloin saadaan

$$y = -(\frac{t+1}{t})z.$$

Sijoitetaan tämä standardimuotoiseen yhtälöön, jolloin saadaan $x = -(t+1)z$. Pisteellä $[x,y,z]$ on siis homogeeniset koordinaatit $\left[-(t+1)z, -(\frac{t+1}{t})z, z\right]$. Koska $z, t \neq 0$, niin koordinaatit voidaan kirjoittaa muodossa $[t(t+1), t+1, -t]$.

Huomataan, että valitsemalla $t = 0$ saadaan Piste $[0,1,0]$ ja valinnalla $t = -1$ saadaan Piste $[0,0,1]$. Siis jokainen kartioleikkauksen $E$ Piste, poislukien $[1,0,0]$, voidaan kirjoittaa muodossa $[t(t+1), t+1, -t]$, missä $t \in \mathbb{R}$.

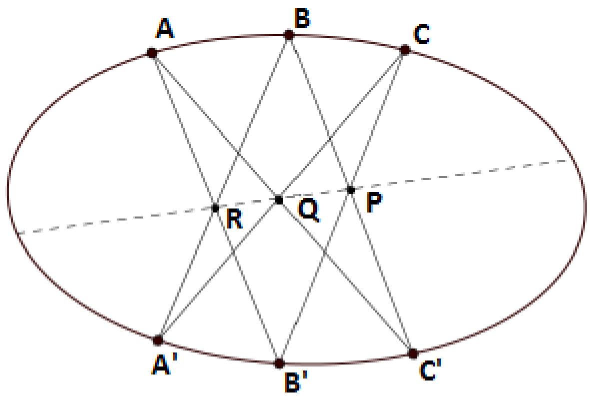
Myös käänteinen tulos pätee. Olkoon $[t^2+t, t+1, -t]$ Piste, missä $t \in \mathbb{R}$. Tällöin se kuuluu kartioleikkaukseen $E$, koska

$$(t^2+t)(t+1) + (t+1)(-t) + (-t)(t^2+t) = 0.$$

□

Lauseen 3.9 sekä näiden kahden tuloksen avulla projektiivisen geometrian ongelmat, joihin liittyy mielivaltainen kartioleikkaus, voidaan palauttaa ongelmiksi, joihin liittyy standardimuotoinen kartioleikkaus. Kolmen Pisteen lauseen mukaan kolme kartioleikkauksen Pistettä voidaan valita yksikkökolmioksi ja Parametrisointilauseen avulla loput Pisteet voidaan esittää muodossa $[t^2+t, t+1, -t]$, missä $t \in \mathbb{R}$. Näiden avulla voidaan todistaa Pascalin lause.

Lause 3.13 (Pascalin lause). *Olkoot $A, B, C, A', B'$ ja $C'$ kuusi erillistä aidon projektiivisen kartioleikkauksen Pistettä. Olkoot Suorien $BC'$ ja $B'C$ leikkauspiste $P$,* *Suorien $CA'$ ja $C'A$ leikkauspiste $Q$ ja Suorien $AB'$ ja $A'B$ leikkauspiste $R$. Tällöin $P, Q$ ja $R$ sijaitsevat samalla Suoralla.*




KUVA 3. Pascalin lause

TODISTUS. Kuten Pappuksen ja Desarguesin lauseissa, myös Pascalin lauseen väite koskee Pisteiden sijaitsemista Suoralla, jolloin helpoin tapa todistaa se on käyttää determinanttiehtoa. Etsitään siis Pisteille $P, Q$ ja $R$ parametrimuotoiset esitykset.

Kolmen Pisteen lauseen mukaan kartioleikkaus voidaan valita siten, että se toteuttaa standardimuotoisen yhtälön $xy + yz + zx = 0$, ja lisäksi voidaan valita $A = [1, 0, 0], B = [0, 1, 0]$ ja $C = [0, 0, 1]$. Parametrisointilauseen mukaan Pisteille $A', B'$ ja $C'$ löytyy parametriesitykset $A' = [a^2 + a, a + 1, -a], B' = [b^2 + b, b + 1, -b]$ ja $C' = [c^2 + c, c + 1, -c]$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Etsitään ensin parametrimuotoinen esitys Pisteelle P. Suora $BC'$ yhdistää Pisteet $[0, 1, 0]$ ja $[c^2 + c, c + 1, -c]$, jolloin se toteuttaa yhtälön $x = -(c + 1)z$. Suora $B'C$ taas yhdistää Pisteet $[b^2 + b, b + 1, -b]$ ja $[0, 0, 1]$, jolloin se toteuttaa yhtälön $x = by$.

Piste P sijaitsee molemmilla Suorilla $BC'$ ja $B'C$, joten sen homogeenisten koordinaattien $[x, y, z]$ on toteutettava yhtälöt $x = -(c + 1)z$ ja $x = by$. Sijoitetaan vielä näistä jälkimmäiseen $x$ ja ratkaistaan y, jolloin saadaan $y = -\big(\frac{c+1}{b}\big)z$. Homogeeniset koordinaatit siis ovat

$$\begin{aligned}[x, y, z] &= \Big[-(c + 1)z, -\big(\frac{c + 1}{b}\big)z, z\Big] \\ &= \Big[-(c + 1), -\big(\frac{c + 1}{b}\big), 1\Big] \\ &= [b(c + 1), c + 1, -b].\end{aligned}$$

Samanlainen päättely voidaan toistaa Suorien $CA'$ ja $C'A$ kohdalla, jolloin niille saadaan yhtälöt $x = ay$ ja $cy = -(c + 1)z$. Suorien leikkauspisteen $Q$ homogeeniset koordinaatit ovat siis muotoa $[a(c+1), c+1, -c]$. Lisäksi Suorien $AB'$ ja $A'B$ yhtälöt ovat $by = -(b + 1)z$ ja $x = -(a + 1)z$, joten niiden leikkauspisteen $R$ homogeeniset koordinaatit ovat muotoa $[b(a + 1), b + 1, -b]$.

Determinanttiehdon mukaan kolme Pistettä on samalla Suoralla, jos ja vain jos niiden determinantti on nolla. Koska jokaiselle Pisteellä $P, Q$ ja $R$ on nyt parametrimuotoinen esitys, voidaan niiden determinantti laskea. Determinantiksi saadaan

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} b(c+1) & c+1 & -b \\ a(c+1) & c+1 & -c \\ b(a+1) & b+1 & -b \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} bc+b & c+1 & -b \\ ac+a & c+1 & -c \\ ab+b & b+1 & -b \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} bc-ab & c-b & 0 \\ ac+a & c+1 & -c \\ ab+b & b+1 & -b \end{vmatrix} \text{(Vähennetty 1. rivistä 3. rivi.)} \\
&= b(c-a) \begin{vmatrix} c+1 & -c \\ b+1 & -b \end{vmatrix} - (c-b) \begin{vmatrix} ac+a & -c \\ ab+b & -b \end{vmatrix} \\
&= b(c-a)(bc+c-bc-b) - (c-b)(abc+bc-abc-ab) \\
&= (bc-ab)(c-b) - (c-b)(bc-ab) \\
&= bc^2 - b^2c - abc + ab^2 - (bc^2 - abc - b^2c + ab^2) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Pisteet $P, Q$ ja $R$ ovat siis samalla Suoralla. □

Parametrisoinnin ja Kolmen Pisteen lauseen avulla todistus siis muuttui yksinkertaiseksi determinantin laskemiseksi.

## 3.4. Duaalisuus kartioleikkauksissa

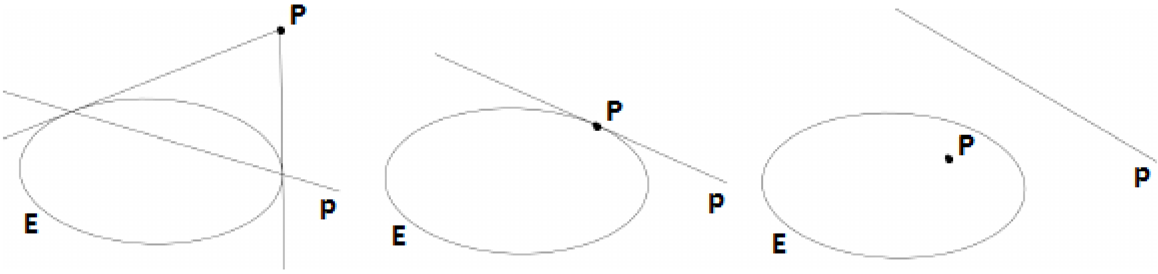
Kerrataan alkuun oleellisimmat projektiivisen geometrian ominaisuudet duaalisuuden kannalta.

- **Kollineaarisuus**: Pisteet sijaitsevat samalla Suoralla.
- **Konkurrenssi**: Kolme tai useampi Suora leikkaa samassa Pisteessä.
- **Insidenssi**: Kaksi eri Suoraa leikkaa yksikäsitteisessä Pisteessä.

Aikaisemmin huomattiin, että Pisteiden ja Suorien välillä vallitsee duaalisuus. Kun Pisteet vaihtaa Suoriksi ja Suorat Pisteiksi, kollineaarisuus vaihtuu insidenssiksi ja päinvastoin. Duaalisuus pätee myös kartioleikkauksia tarkasteltaessa, mutta ei Suorien ja Pisteiden välillä, vaan Pisteiden ja polaarien välillä. Avataan seuraavaksi hieman, mitä tarkoitetaan polaarilla.

Olkoon $P$ Piste ja $E$ aito kartioleikkaus avaruudessa $\mathbb{RP}^2$. Piste $P$ voi sijaita kartioleikkauksen $E$ ulkopuolella, kartioleikkauksella tai sen sisäpuolella. Jos Piste $P$ sijaitsee kartioleikkauksen $E$ ulkopuolella, niin polaarilla tarkoitetaan jännettä, joka leikkaa kartioleikkausta $E$ kahdessa Pisteessä, jotka ovat Pisteen $P$ tangenttiparin sivuamispisteet kartioleikkaukselle $E$. Jos $P$ sijaitsee kartioleikkauksessa $E$, niin polaarilla tarkoitetaan tangettia, joka kulkee Pisteen $P$ kautta. Jos $P$ sijaitsee kartioleikkauksen $E$ sisäpuolella, niin polaari on tietty Pistettä $P$ vastaava suora kartioleikkauksen ulkopuolella.

Kun Piste $P$ on kartioleikkauksen ulkopuolella tai kartioleikkauksessa, on selvää mitä polaarilla tarkoitetaan, mutta viimeinen tapaus, jossa piste sijaitsee kartioleikkauksen sisällä on epämääräinen. Seuraava lause selvittää, mikä polaari tarkemmin on.

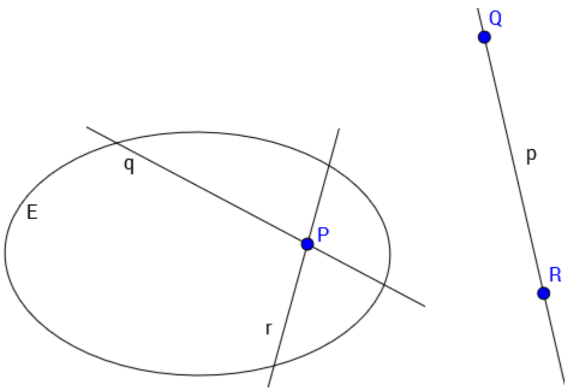



Kuva 4. Mahdolliset polaarit ellipsille

Lause 3.14 (La Hiren lause). *Olkoon $E$ aito kartioleikkaus ja olkoon $p$ Pisteen $P$ polaari. Tällöin jokaisella polaarin $p$ Pisteellä on polaari, joka kulkee Pisteen $P$ kautta.*

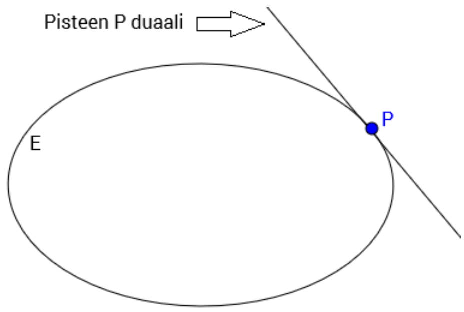
Tämä lause pätee olipa Piste $P$ missä tahansa.

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin kartioleikkausten duaalisuutta. Olkoon $E$ projektiivinen kartioleikkaus. Tällöin jokaiseen avaruuden $\mathbb{RP}^2$ Pisteeseen $P$ voidaan liittää Suora $p$, joka on Pisteen $P$ polaari kartioleikkaukselle $E$. La Hiren lauseen mukaan kahdella polaarin $p$ Pisteellä $Q$ ja $R$ on polaarit $q$ ja $r$, jotka leikkaavat Pisteessä $P$. Nyt siis Pisteiden vaihtaminen polaareiksi muuttaa kollineaarisuuden konkurrenssiksi, jolloin lause "Pisteet polaarilla"muuttuu lauseeksi "Polaarit Pisteen kautta".




Kuva 5. Duaalisuus Pisteiden ja polaarien välillä

Muodostetaan seuraavaksi duaali projektiiviselle kartioleikkaukselle $E$. Olkoon $P \in E$, jolloin sen polaari leikkaukselle $E$ on leikkauksen $E$ tangentti Pisteessä $P$. Käytetään nyt dualisointia eli korvataan jokainen kartioleikkauksen $E$ Piste sen polaarilla, tässä tapauksessa siis tangentilla. Tällöin saadaan joukko tangentteja, jotka sivuavat kartioleikkausta $E$.




KUVA 6. Piste ja sen duaali

Projektiivinen kartioleikkaus voidaan siis määritellä Pisteiden tai tangenttien avulla. Käytettiinpä kumpaa määritelmää tahansa, tuloksena on sama kartioleikkaus eli kartioleikkaus on itseduaali.

Kuten Suorien ja Pisteiden tapauksessa, myös kartioleikkauksia koskevista lauseista on mahdollista muodostaa duaaleja ja näin luoda uusia lauseita. Muodostetaan seuraavaksi duaalit Pascalin lauseelle ja Viiden Pisteen lauseelle. Jotta duaalit saadaan muodostettua helpommin, muutetaan alkuperäisten lauseiden muotoilua hieman.

| Pascalin lause | Duaali |
|---|---|
| Olkoot $A, B, C, A', B'$ ja $C'$ | Olkoot $a, b, c, a', b'$ ja $c'$ |
| kuusi eri projektiivisen | kuusi eri projektiivisen |
| kartioleikkauksen **Pistettä**. | kartioleikkauksen **tangenttia**. |
| Olkoot **Pisteiden** $B$ ja $C'$ | Olkoot **tangenttien** $b$ ja $c'$ |
| sekä **Pisteiden** $B'$ ja $C$ | sekä **tangenttien** $b'$ ja $c$ |
| kautta kulkevien **Suorien** | **leikkauspisteet** |
| **leikkauspiste** $P$, | **Suoralla** $p$, |
| **Pisteiden** $C$ ja $A'$ | **tangenttien** $c$ ja $a'$ |
| sekä **Pisteiden** $C'$ ja $A$ | sekä **tangenttien** $c'$ ja $a$ |
| kautta kulkevien **Suorien** | **leikkauspisteet** |
| **leikkauspiste** $Q$ ja | **Suoralla** $q$ ja |
| **Pisteiden** $A$ ja $B'$ | **tangenttien** $a$ ja $b'$ |
| sekä **Pisteiden** $A'$ ja $B$ | sekä **tangenttien** $a'$ ja $b$ |
| kautta kulkevien **Suorien** | **leikkauspisteet** |
| **leikkauspiste** $R$. | **Suoralla** $r$. |
| Tällöin $P, Q$ ja $R$ ovat **kollineaarisia** | Tällöin $p, q$ ja $r$ ovat **konkurrentteja**. |

Pascalin lauseen duaali tunnetaan myös Brianchon lauseena.

Muodostetaan seuraavaksi duaali Viiden Pisteen lauseelle.

| Viiden Pisteen lause | Duaali |
|---|---|
| Olkoot $P_1, P_2, P_3, P_4$ ja $P_5$ **Pisteitä** siten, että niistä korkeintaan kaksi on **kollineaarisia**. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen aito kartioleikkaus, joka **kulkee näiden** **Pisteiden** **kautta**. | Olkoot $p_1, p_2, p_3, p_4$ ja $p_5$ **Suoria** siten, että niistä korkeintaan kaksi on **konkurrentteja**. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen aito kartioleikkaus, joka **sivuaa näitä** **Suoria**. |

Lauseen duaali kertoo sen, mitä edellä jo mainittiin. Projektiivisen kartioleikkauksen voi määritellä joko Pisteiden tai tangenttien avulla.

# Kirjallisuutta


[1] David A. Brennan, Matthew F. Esplen, Jeremy J. Gray, *Geometry*, Cambridge University Press, second Edition, 2012.

[2] Harold S. M. Coxeter, *Projective geometry*, Springer - Verlag, second Edition, 1987.

[3] School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, *Pappus of Alexandria*, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pappus.html. 9.1.2017

[4] Department of Mathematics, Brown University, Sergei Treil, *Linear Algebra Done Wrong*, https://www.math.brown.edu/ treil/papers/LADW/book.pdf. 13.1.2017