Gödelin epätäydellisyyslauseet

Ossi Kosonen

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy/ 2016

Tiivistelmä: Ossi Kosonen, *Gödelin epätäydellisyyslauseet* (engl. *Gödel's incompleteness theorems*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 57 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2016.

Tämän tutkielman tarkoituksena on todistaa Gödelin kaksi epätäydellisyyslausetta RA-kielessä. Itävaltalais-amerikkalainen Kurt Gödel todisti nimeänsä kantavat lauseet artikkelissaan vuonna 1931. Gödel ei itse varsinaisesti käyttänyt RA-kieltä lauseiden alkuperäisissä todistuksissa, mutta tässä tutkielmassa RA-kieli on valittu formaaliksi kieleksi, koska se perustuu predikaattikielten pohjalle. RA-kielen tarkoitus on formalisoida mahdollisimman hyvin aritmetiikka, joka käytännössä onnistuu mallintamalla luonnollisten lukujen joukko sekä sen laskutoimitukset tälle kielelle.

Ensimmäinen epätäydellisyyslause sanoo, että RA-kielessä on olemassa validi kaava, joka ei ole teoreema. Toisen epätäydellisyyslauseen mukaan joukko $\mathbb{N}$ sekä sitä imitoiva RA-kieli on tarpeeksi kehittynyt matemaattinen järjestelmä, ettei sen ristiriidattomuutta pystytä todistamaan syntaktisesti. Tällaisen järjestelmän ristiriidattomuutta ei voida siis osoittaa päättelyjonoa konstruoimalla.

Tutkielman luvussa 1 esitellään ensin primitiivirekursion avulla primitiivirekursiiviset funktiot ja joukot. Yleisesti voidaan sanoa, että primitiivirekursiivisilla funktioilla ja joukoilla tarkoitetaan sellaisia matemaattisia objekteja, joiden laskettavuus pysyy äärellisillä toimenpiteillä hallussa. Käytännössä tämä näkyy esimerkiksi rajoitetun minimalisaation määritelmässä, jossa minimiä etsitään jostain äärellisestä joukosta. Tämän jälkeen kappaleessa 1.2 konstruoidaan RA-kielen syntaksi sekä semantiikka lähes vastaavalla tavalla kuin predikaattikielissä.

Luvussa 2 esitellään Gödelin töiden keskeisimmät saavutukset. Ensin esitetään alkulukuesityksen yksikäsitteisyyteen perustuva Gödel-numerointi, jolla jokainen RA-kielen kaava sekä kaavajono saadaan vastaamaan yksikäsitteistä luonnollista lukua. Tämän avulla osoitetaan suurpiirteisesti, kuinka päättelyn primitiivirekursiivisuus voidaan todistaa. Päättelyn primitiivirekursiivisuus on tärkein, mutta myös vaikein aputulos, jota tarvitaan epätäydellisyyslauseiden todistamisessa.

Luvun 2 lopuksi epätäydellisyyslauseiden todistukset pyritään esittämään mahdollisimman eksaktisti, kuitenkin samalla selittäen kansantajuisesti etenkin niiden merkityksestä, sekä mitä epätäydellisyyslauseet kertovat matemaattisista järjestelmistä. Viimeisessä luvussa 3 esitellään Gödelin tulosten seurauksia sekä piirretään mahdollisia uusia suuntaviivoja matemaattisen logiikan tutkimuksessa.

Sisältö

Johdanto 1

Luku 1. Primitiivirekursio ja RA-kieli 5
1.1. Primitiivirekursiiviset funktiot ja joukot 5
1.2. RA-kieli 11
1.2.1. RA-kielen syntaksi 11
1.2.2. RA-kielinen päättely 18
1.2.3. RA-kielen semantiikka 20

Luku 2. Gödelin tulokset 27
2.1. Gödel-numerointi 27
2.2. Päättelyn primitiivirekursiivisuus 30
2.3. Ensimmäinen epätäydellisyyslause 34
2.4. Toinen epätäydellisyyslause 44

Luku 3. Gödelin tulosten seurauksia sekä uusia suuntaviivoja 50
3.1. Aksioomajärjestelmän laajennus 50
3.2. Sumeaa moniarvologiikkaa 53

Kirjallisuutta 56

Johdanto

Totuus ja totuuden käsite on aina kiehtonut ihmismieltä ammoisista antiikin ajoista lähtien. Aristoteleen syllogismit olivat ensimmäisiä systemaattisia loogisia päättelymetodeja, joiden pohjalta pystyttiin tietyistä lähtökohdista päättelemään loogisesti päteviä johtopäätöksiä. Vastaavasti Eukleideen geometrian merkkiteos *Alkeet* oli ensimmäisiä järjestelmällisiä matematiikan esityksiä, jossa konstruoitiin geometrian väitteitä tietyistä alkuoletuksista, aksioomista lähtien [**10**]. Antiikin filosofeja vaivasivat myös erilaiset paradoksit. Yhden tunnetuimman niistä kerrotaan esittäneen ensimmäisenä antiikin Kreikan kreetalainen filosofi Epimenides sanoessaan: "Kaikki kreetalaiset ovat valehtelijoita" [**2**]. Jos Epimenides kreetalaisena itse puhui totta, väitti hän itseään valehtelijaksi, jolloin päädytään ristiriitaan. Jos puhuessaan epätotta, hän kertoi itsestään toden asian, jolloin jälleen saavutetaan ristiriitainen ajatteluketju.

Tässä tutkielmassa perehdytään samankaltaiseen paradoksinomaiseen tilanteeseen ja todistetaan itävaltalais-amerikkalaisen matemaatikko-loogikko-filosofi Kurt Gödelin (1906–1978) kuuluisat epätäydellisyyslauseet [**5**], [**8**]. Niistä ensimmäinen vastaa intuitiivisessa mielessä juuri edellä esitettyä valehtelijan paradoksia. Hieman matemaattisemmin ilmaistuna Gödelin ensimmäinen epätäydellisyyslause sanoo, että tarpeeksi kehittyneessä matemaattisessa järjestelmässä on olemassa tosi kaava, jota ei voida kuitenkaan todistaa. Ensimmäisestä epätäydellisyyslauseesta voidaan taas johtaa toinen Gödelin epätäydellisyyslause, joka kertoo, ettei riittävän ilmaisuvoimaisen matemaattisen järjestelmän ristiriidattomuutta pystytä todistamaan tämän järjestelmän sisällä syntaktisesti.

Mitä käsite syntaksi täsmälleen tarkoittaa? Loogisten kielien, kuten propositio- tai predikaattikielten, tarkastelu voidaan karkeasti jaotella syntaksin sekä semantiikan tutkimiseen. Loogisen kielen syntaksi edustaa kielen aakkosia, kielioppia ja päättelysäännöstöä. Esimerkiksi predikaattikielen syntaksia voi verrata suomen tai englannin kielen aakkostoon sekä sen sisältämien kielen aakkosista muodostuvien sanojen ja lauseiden oikeaoppiseen muodostamiseen. Toisinaan taas kielen semantiikasta voidaan puhua myös kielen merkitysoppina. Se antaa niin tavallisen kuin logiikankin

kielille merkityksen sekä tavan määritellä totuus kyseessä olevassa kielessä. Se jaottelee aksioomajärjestelmästä lähtien kielen rakenteesta ne loogisesti todet lauseet ja väitteet, jotka on saatu päättelysääntöjä käyttämällä. Tässä tutkielmassa syntaksin ja semantiikan eron merkitys on hyvin tärkeää, jotta ymmärtää, mitä Gödelin epätäydellisyyslauseet täsmälleen sanovat sekä *mitä ne eivät sano.* Gödelin merkittäviä tuloksia on tulkittu milloin mistäkin päämääristä ja tarkoitusperistä lähtien.

Syntaksin sekä semantiikan ero tulee esiin myös kielen täydellisyydessä. Kieltä sanotaan eheäksi, jos sen jokainen teoreema on validi. Toisin sanottuna jokaisen todistuvan lauseen on oltava tosi. Täydellisessä kielessä pätee myös käänteinen: jokainen tosi lause on todistuva, eli jokainen validi lause on teoreema. Syntaksin ja semantiikan käsitteiden avulla ilmaistuna kieli on täydellinen, jos pätee seuraava: lause on syntaktisesti tosi jos ja vain jos lause on semanttisesti tosi. Propositio- sekä predikaattikielet voidaan osoittaa täydelliseksi. Itse asiassa Gödelin merkittäviin ansioihin voidaan lukea myös predikaattikielen täydellisyyden todistaminen, jonka hän osoitti vuonna 1930 julkaistussa artikkelissaan [**7**].

Koska täydellisessä kielessä ristiriidattomista aksioomista lähtien voidaan päätellä kielen jokainen validi teoreema, aksioomajärjestelmän ei tarvitse olla yksikäsitteinen. Ekvivalentista aksioomajärjestelmästä saadaan pääteltyä samanlainen maailma, jossa pätevät täsmälleen samat lauseet, väitteet tai kaavat. Täydellinen kieli on ikään kuin suljettu struktuuri, jonka totuudet ja teoreemat ovat tarkalleen tiedossa. Vastakohtaisesti vertauskuvauksellisesti ilmaistuna, epätäydellisen kielen voi ajatella laajentuvan kuin avaruuden äärettömyyksiin, koska järjestelmässä voidaan aina löytää tosia lauseita, joita ei voida todistaa kielen sisällä.

Tässä tutkimuksessa tällaisena riittävän ilmaisuvoimaisena kielenä konstruoidaan RA-kieli (*recursive arithmetic*), jolla pyritään imitoimaan luonnollisten lukujen joukkoa sekä sen laskutoimituksia. Gödel ei itse varsinaisesti käyttänyt RA-kieltä vuonna 1931 julkaistussa alkuperäisessä artikkelissaan, jonka esitystapaa harva Gödelin aikalainen ymmärsi [**8**]. Gödelin epätäydellisyyslauseissa loogisen kielen valinnalla ei sinänsä ole kuitenkaan merkitystä – kunhan vain joukon $\mathbb{N}$ mallinnus onnistuu kyseisellä kielellä riittävän hyvin.

Kuinka Gödel päätyi matematiikkaa järisyttäneisiin tuloksiinsa? Perustukset Gödelin tuloksille valettiin jo antiikissa. Eukleideen *Alkeissa* esiintyneet viisi postulaattia kiehtoivat useita matemaatikoita 1800-luvulle tultaessa. Etenkin niin kutsutun paralleeliaksiooman uudet tulkinnat synnyttivät epäeuklidisena geometriana tunnetun matematiikan haaran [**6**]. Myös tavallinen geometria pysyi matemaatikkojen huulilla, ja siitä oli kiinnostunut eräs suuri matemaatikko nimeltä David Hilbert (1862–1943).

Vuonna 1899 Hilbert julkaisi teoksen *Grundlagen der Geometrie*, jossa hän aksiomatisoi täysin Eukleideen geometrian sekä osoitti sen ristiriidattomuuden vedoten reaalilukujen ristiriidattomuuteen [**18**, **§3.3**]. Tämän lisäksi vuonna 1900 Hilbert esitteli toisessa matemaatikkojen maailmankonferenssissa 23 matemaattista ongelmaa, jotka odottivat ratkaisuja tai lisäselvityksiä [**17**, **s. 18**]. Kolmas ongelma koski reaalilukujen ristiriidattomuustodistuksen esitystä. Vuosikymmenen vaihtuessa Bertrand Russel (1872–1970), joka tunnetaan Russelin paradoksistaan [**14**, **s. 21**], sekä Alfred North Whitehead (1861–1947) julkaisivat massiivisen kolmiosaisen teoksen *Principia Mathematican*, jossa he onnistuivat formalisoimaan logiikan kielelle aritmetiikan eli luonnollisten lukujen ominaisuudet ja laskutoimitukset [**17**, **s. 21**]. Tämä antoi uskoa Hilbertille, että matematiikan täydellisyys palautuisi luonnollisten lukujen ristiriidattomuuteen, joka voitaisiin todistaa Russelin ja Whiteheadin esittämän formalisaation perusteella [**22**, **s. 26**].

Hilbertin yksi oivalluksista oli myös niin kutsutun metamatematiikan tai todistusteorian käsitteen keksiminen [**17**, **s. 23**]. Metamatemaattinen väite sanoo jotain olennaista matematiikan luonteesta tai sen ominaisuuksista [**18**, **§4.2.1**]. Esimerkiksi lause "5+5=10" on puhdasta matematiikkaa, mutta lause "5+5=10 on totta" on metamatemaattinen väite. Todistaessaan predikaattilogiikan täydellisyyden Gödel valoi uskoa Hilbertin vaatimalle koko matematiikan täydellisyystodistuksen löytymiselle. Sama mies tuli kuitenkin murskaamaan Hilbertin haaveet lopullisesti. *Principia Mathematicassa* formalisoitu aritmetiikan kieli oli riittävän vahva imitoimaan Hilbertin esittämiä metamatemaattisia väitteitä, jotka kertoivat jotain matematiikan olemuksesta itsestään. Tällaisen väitteen Gödel onnistui lopulta konstruoimaan sekä osoittamaan aritmetiikan epätäydellisyyden [**18**, **§4.2.1**].

Tämä tutkielma rakentuu siten, että ensimmäisessä luvussa esitellään primitiivirekursiiviset funktiot ja joukot sekä RA-kieli. RA-kielen ohella primitiivirekursiiviset funktiot ovat erittäin olennaisessa roolissa epätäydellisyyslauseita todistaessa. Primitiivirekursio on eräänlainen mittari, jonka avulla esimerkiksi päättelyjonon pituus voidaan pitää tietyillä oletuksilla hallinnassa.

Toisessa luvussa esitellään Gödelin keskeiset tulokset: Gödel-numerointi, päättelyn primitiivirekursiivisuus sekä ensimmäinen ja toinen epätäydellisyyslause. Epätäydellisyyslauseiden todistukset on pyritty esittämään siten, että matemaattisten täsmällisten todistusten ympärille on punottu helpommin ymmärrettäviä selityksiä lauseiden merkityksestä esimerkkien ja intuition pohjalta.

Viimeisessä luvussa pohditaan Gödelin tulosten seurauksia ja mahdollisia korjausyrityksiä koko matematiikan täydellisyyden tavoittelussa. Tutkielman merkinnät

ovat pääosin Lassi Kuritun Jyväskylän yliopistossa kirjoittamasta luentomonisteesta sekä sen liitteestä, joista on luettavissa myös useiden lauseiden sekä määritelmien täsmälliset todistukset ja esitykset [**12**], [**15**]. Koska RA-kieli perustuu predikaattikielten pohjalle, tarvittavina esitietoina voidaan pitää erinomaista propositio- sekä predikaattikielten hallintaa.

Gödelin saavutuksia ei tule missään nimessä väheksyä. Usein niiden katsotaan olevan jopa Einstein suhteellisuusteoriaan verrattavissa olevia merkkipaaluja tieteenhistoriassa [**17**, **s. 33**]. Ja onpa Gödel valittu *Time*-lehden artikkelissa 1900-luvun sadan merkittävimmän henkilön joukkoon, merkittävimpänä matemaatikkona [**3**, **s. 7**].

LUKU 1

Primitiivirekursio ja RA-kieli

1.1. Primitiivirekursiiviset funktiot ja joukot

Tässä tutkielmassa sovitaan, että $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ eli myös luku nolla kuuluu luonnollisten lukujen joukkoon. Lisäksi, kun $k \geq 1$, määritellään $\mathbb{N}^k = \{(n_1, n_2, ..., n_k) \mid n_i \in \mathbb{N}$ kaikille $i = 1, 2, ..., k\}$ sekä merkitään $\mathbb{N}^k = \mathbb{N}^i \times \mathbb{N}^j$, kun $k = i + j$. Jos $k = 1$, niin $\mathbb{N}^k = \mathbb{N}^1 = \mathbb{N}$ sekä määritellään erityisesti $\mathbb{N}^k = \mathbb{N}^0 = \{0\}$, kun $k = 0$.

Lähdetään liikkeelle primitiivirekursion määrittelystä.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoon $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ ja olkoot kuvaukset $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sekä $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$. Olkoon vielä kuvaus $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$. Jos kuvaus f on saatu kuvauksista g ja h siten, että

(1) $f(x_1, x_2, ..., x_k, 0) = g(x_1, x_2, ..., x_k)$ kaikille $(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k$ ja
(2) $f(x_1, x_2, ..., x_k, y + 1) = h(x_1, x_2, ..., x_k, y, f(x_1, x_2, ..., x_k, y))$
kaikille $(x_1, x_2, ..., x_k, y) \in \mathbb{N}^{k+1}$,

sanotaan, että f on saatu primitiivirekursiolla kuvauksista g ja h sekä merkitään $f = \mathcal{R}(g, h)$.

Kun $k = 0$, $\mathbb{N}^k = \mathbb{N}^0 = \{0\}$, jolloin kuvaus $g : \{0\} \to \mathbb{N}$ on vakio, eli $g \equiv g(0) = c \in \mathbb{N}$. Tällöin, jos kuvaus $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on saatu vakiokuvauksesta $g(0) = c$ ja kuvauksesta $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ siten, että

(3) $f(0) = g(0) = c$ ja
(4) $f(y + 1) = h(y, f(y))$ kaikille $y \in \mathbb{N}$,

sanotaan, että f on saatu primitiivirekursiolla vakiosta c sekä kuvauksesta h.

Primitiivirekursiota muodostettaessa on heti tärkeää huomioida kuvauksien g, h ja f dimensiot. Muodostuva $(k+1)$-dimensioinen kuvaus f tarvitsee syntyäkseen välttämättä k-dimensioisen kuvauksen g sekä $(k + 2)$-dimensioisen kuvauksen h. Kuvaus f muodostuu siis ikään kuin kuvauksien g ja h dimensioiden väliin.

ESIMERKKI 1.2. Olkoon kuvaukset $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(x) = x$ sekä $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}, h(x, y, z) = z+1$. Tällöin luonnollisten lukujen yhteenlasku, eli kuvaus $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f(x, y) = x+y$,

on saatu primitiivirekursiolla kuvauksista g ja h, sillä

$$f(x,0) = x + 0 = x = g(x) \text{ kaikille } x \in \mathbb{N} \text{ ja}$$
$$f(x,y+1) = x + (y+1) = (x+y)+1 = h(x,y,x+y) = h(x,y,f(x,y)) \text{ kaikille } x,y \in \mathbb{N}^2.$$

Määritelmä 1.1 kertoo, millainen matemaattinen toiminto primitiivirekursio on. Se ei siis suoraan vastaa kysymykseen, millaiset funktiot ovat primitiivirekursiivisia. Määritellään seuraavassa neljä jatkon kannalta erittäin olennaisissa rooleissa olevaa funktiota. Nämä funktiot ovat myös primitiivirekursiivisten funktioiden ja sitä myöden primitiivirekursiivisten joukkojen pohjana.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Merkitään symbolilla z nollakuvausta $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, missä

(1) $z(x) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{N}$,

symbolilla s seuraajakuvausta $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, missä

(2) $s(x) = x + 1$ kaikille $x \in \mathbb{N}$,

sekä symbolilla π_i^k projektiokuvausta $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k$, missä

(3) $\pi_i^k(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_k) = x_i$ kaikille $(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_k) \in \mathbb{N}$.

Lisäksi, jos $k \geq 0, m \geq 1$ sekä on olemassa kuvaukset $h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ ja $g_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, i = 1, 2, ..., m$, merkitään symbolilla $c(h; g_1, g_2, ..., g_m)$ kuvausta $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, missä

(4) $c(h; g_1, g_2, ..., g_m)(x_1, x_2, ..., x_k) =$

$$h(g_1(x_1, x_2, ..., x_k), g_2(x_1, x_2, ..., x_k), ..., g_m(x_1, x_2, ..., x_k))$$

kaikille $(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k$.

Nollakuvauksen sekä seuraajakuvaksen avulla voidaan käydä läpi kaikki luonnolliset luvut: nollakuvaus kuvautuu aina nollaksi sekä seuraajakuvauksen arvo $s(x) \geq 1$ kaikille $x \in \mathbb{N}$. Projektiokuvauksella voidaan jokin lähtöjoukon piste $(x_1, ..., x_i, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k$ kuvata koordinaatiksi x_i. Kun $k = i = 1$, saadaan tavallinen identtinen kuvaus $\pi_1^1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, id := \pi_1^1(x) = x$.

Kuvauksella (4) merkitään yhdistettyä kuvausta. Myös tämän kuvauksen määrittelyssä kuvauksien dimensioiden täytyy sopia yhteen. Ensin muodostetaan kuvaukset $g_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ samalle k kaikille $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Koska kuvauksia g_i on m kappaletta sekä niiden maalijoukot ovat joukossa $\mathbb{N}$, väistämättä kuvauksella h tullaan kuvatuksi m-dimensioinen vektori, jonka maalijoukoksi asetetaan $\mathbb{N}$. Tavallinen yhdistetty kuvaus saadaan arvolla $m = 1$. Tällöin

$$c(h; g)(x_1, x_2, ..., x_k) = h \circ g(x_1, x_2, ..., x_k) = h(g(x_1, x_2, ..., x_k)) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}.$$

Nyt ollaan valmiita määrittelemään tarkasti, mitkä funktiot ovat primitiivirekursiivisia. Ne määritellään pienimpänä mahdollisena funktiojoukkona, jonka alkiot ovat määritelmien 1.1 sekä 1.3 muotoa olevia funktioita.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Merkitään $F = \{f \mid f \text{ on kuvaus } f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \text{ jollekin } k \in \mathbb{N}\}$. Määritellään $\mathcal{A}$ joukon F osajoukoista koostuvana joukkona siten, että

$$\mathcal{A} = \{W \subset F \mid W \text{ toteuttaa ehdot (i)-(v)}\}, \text{missä}$$

(i) $z \in W$,
(ii) $s \in W$,
(iii) $\pi_i^k \in W$ kaikille $1 \leq i \leq k \in \mathbb{N}$,
(iv) jos $g, h \in W$ siten, että $f = \mathcal{R}(g, h)$ voidaan muodostaa, niin $f = \mathcal{R}(g, h) \in W$ ja,
(v) jos $h, g_1, g_2, ..., g_m \in W$ siten, että $c(h; g_1, g_2, ..., g_m)$ voidaan muodostaa, niin $c(h; g_1, g_2, ..., g_m) \in W$.

Tällöin määritellään

$$\mathcal{R}_f = \bigcap_{W \in \mathcal{A}} W \subset F,$$

missä $\mathcal{R}_f$ on primitiivirekursiivisten funktioiden joukko, jonka alkioita ovat primitiivirekursiiviset funktiot.

HUOMAUTUS 1.5. Määritelmän 1.4 ehtojen (i)-(iii) nojalla funktiot z, s sekä π_i^k kaikille $1 \leq i \leq k \in \mathbb{N}$, ovat triviaalisti primitiivirekursiivisia. Edelleen ehdon (iv) nojalla määritelmän 1.1 avulla saadut funktiot $f = \mathcal{R}(g, h)$ ovat primitiivirekursiivisia. Myös ehdon (v) nojalla määritelmässä 1.3 esitetty yhdistetty kuvaus (4) on primitiivirekursiivinen. Näiden lisäksi vakiokuvaus $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, k \geq 1, f(x) \equiv c \in \mathbb{N}$, on primitiivirekursiivinen [**12**, **Lause 1.6**], [**15**, **s. 3**]. Myös tavanomaiset laskutoimitukset, yhteenlasku, $+$, sekä kertolasku, $\cdot$, ovat primitiivirekursiivisia [**12**, **Lause 1.7 ja Lause 1.10**], [**15**, **s. 3–5**].

HUOMAUTUS 1.6. Myös potenssiinkorotus, eli kuvaus $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f(x, y) = x^y$ kaikille $(x, y) \in \mathbb{N}$, on primitiivirekursiivinen [**12**, **Lause 1.11**], [**15**, **s. 5**]. Vähennyslaskun tapauksessa laskutoimitus täytyy määritellä siten, että tulos pysyy luonnollisten lukujen joukossa, jotta laskutoimitus saadaan primitiivirekursiiviseksi. Määritelläänkin laskutoimitus $\div$, jota kutsutaan rajoitetuksi vähennyslaskuksi siten, että

$$x \div y = \begin{cases} x - y, & \text{jos } x \geq y \\ 0 & \text{jos } x \leq y. \end{cases}$$

Tällöin kuvaus $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, h(x, y) = x \dot{-} y$ kaikille $(x, y) \in \mathbb{N}$, on primitiivirekursiivinen [**12**, **Lause 1.13**], [**15**, **s. 6–7**].

Huomautusten 1.5 sekä 1.6 nojalla kaikki määritelmän 1.1 avulla saadut funktiot ovat primitiivirekursiivisia. Edellä myös esiteltiin, että lähes kaikki tavalliset laskutoimitukset tuottavat primitiivirekursiivisia funktioita, jolloin myös kaikki näiden johdannaisfunktiot ovat primitiivirekursiivisia. Vaikka primitiivirekursiivisia funktioita on olemassa ääretön määrä, on joukko $\mathcal{R}_f$ kuitenkin vain numeroituva. Toisaalta määritelmän 1.4 kaikkien funktioiden joukko F voidaan osoittaa olevan ylinumeroituva, joten myös ei-primitiivirekursiivisia funktioita on oltava olemassa ylinumeroituvasti [**28**, **s. 31**].

Konkreettisia esimerkkejä tällaisista ei-primitiivirekursiivista funktioista on kuitenkin suhteellisen vaikea konstruoida. Yksi tällainen on niin kutsuttu Ackermannin funktio, jonka ei-primitiivirekursiivisuus johtuu viime kädessä siitä, että sen arvot kasvavat huomattavan paljon nopeammin kuin minkään primitiivirekursiivisen funktion [**4**, **s. 52**]. Ackermannin funktion kasvunopeudesta saa jonkinlaisen käsityksen vertaamalla sitä esimerkiksi eksponenttifunktioihin. Koska huomautuksen 1.6 nojalla kaikki luonnollisten lukujen eksponenttifunktiot ovat primitiivirekursiivisia, täytyy Ackermannin funktion ei-primitiivirekursiivisena kasvaa vielä tätäkin nopeammin. Ackermannin funktion ei-primitiivirekursiivisuuden todistus löytyy esimerkiksi alkuperäislähteestä [**1**, **s. 118–133**]. Kattava esitys funktion käyttäytymisestä löytyy myös Péterin artikkelista [**24**, **s. 42–60**].

Primitiivirekursiivisten sekä ei-primitiivirekursiivisten funktioiden suhdetta voidaan verrata esimerkiksi algebrallisten ja transkendenttisten lukujen suhteeseen. Algebrallisia lukuja on vain numeroituva määrä, kun taas transkendenttisia lukuja voidaan löytää ylinumeroituvasti [**20**, **s. 3–4**]. Kuitenkin konkreettisia transkendenttisia lukuja osataan esittää suhteellisen vähän [**20**, **s. 213, 238–239**].

Määritellään seuraavassa primitiivirekursiivinen joukko primitiivirekursiivisten funktioiden avulla.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon $A \subset \mathbb{N}^k, k \geq 1$. Tällöin joukko A on primitiivirekursiivinen, jos sen karakteristinen funktio $\chi_A : \mathbb{N}^k \to \{0, 1\}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{kun } x \notin A, \end{cases}$$

on primitiivirekursiivinen.

Esimerkiksi joukkojen $\emptyset \in \mathbb{N}^k$ sekä $\mathbb{N}^k$ karakteristiset funktiot ovat vakioita määrittelyjoukoissaan, joten huomautuksen 1.5 nojalla ne ovat primitiivirekursiivisia joukkoja. Myös tavalliset joukko-operaatiot tuottavat primitiivirekursiivisilla joukoilla primitiivirekursiivisia joukkoja [**12**, **Lause 1.15**], [**15**, **s. 7–8**].

Seuraavassa määritellään vielä yksi tärkeä primitiivirekursiivinen kuvaus. Sitä kutsutaan rajoitetuksi minimalisaatioksi μ_A joukosta A.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoon $A \subset \mathbb{N}^{k+1}, k \geq 1$ sekä $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k$ ja $y \in \mathbb{N}$. Määritellään kuvaus $\mu_A : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,

$$\mu_A(x_1, ..., x_k, y) = \begin{cases} \min\{z \mid (x_1, ..., x_k, z) \in A\}, & \text{jos on olemassa luku } z \in \mathbb{N} \text{ siten,} \\ & \text{että } z \leq y \text{ sekä } (x_1, ..., x_k, z) \in A, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin funktio μ_A on saatu rajoitetulla minimalisaatiolla joukosta A.

Kun $k = 0$, määritelmä tulee muotoon

$$\mu_A(y) = \begin{cases} \min\{z \mid z \in A\}, & \text{jos on olemassa luku } z \in \mathbb{N} \text{ siten,} \\ & \text{että } z \leq y \text{ sekä } z \in A, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritelmän 1.8 avulla konstruoidut kuvaukset todella ovat primitiivirekursiivisia. Sen kertoo seuraava huomautus.

HUOMAUTUS 1.9. Jos joukko $A \subset \mathbb{N}^{k+1}, k \geq 0$, on primitiivirekursiivinen, niin myös kuvaus μ_A on primitiivirekursiivinen [**12**, **Lause 1.25**].

Tutkitaan seuraavan esimerkin avulla, miten rajoitetun minimalisaation määritelmän 1.8 funktio μ_A käyttäytyy.

ESIMERKKI 1.10. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}$. Jos $x < y$, niin $(x, y) \in A$, joten on olemassa jokin luku $z \in \mathbb{N}$ siten, että $z \leq y$ ja $(x, z) \in A$ (ainakin luku $z = y$ toteuttaa tämän). Mikä on pienin tällainen luku $z \in \mathbb{N}$, jolle $(x, z) \in A$? Pienin luonnollinen luku z, joka toteuttaa joukon A määritelmän ehdon $x < z$ on tietysti luvun $x \in \mathbb{N}$ seuraaja eli luku $z = x + 1 \in \mathbb{N}$. Toisin sanottuna $\min\{z \mid (x, z) \in A\} = x + 1$. Tällöin siis $\mu_A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$\mu_A(x, y) = \begin{cases} x + 1, & \text{jos } x < y \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Esimerkissä 1.10 on olennaista joukon A määritelmän ehto $x < y$. Minimalisaation arvoa lähdetään etsimään joukosta A, joka on ylhäältä rajoitettu luvulla y. Määritelmän 1.8 minimalisaation avulla voidaan käydä kaikki luonnolliset luvut $z = 0, 1, 2, ..., y$ järjestyksessä läpi aina lukuun y saakka. Jos minimiä ei löydy tästä äärellisestä joukosta, toisin sanottuna joukko $B = \{z \leq y \mid (x, z) \in A\}$ sattuu olemaan tyhjä, asetetaan funktion μ_A arvoksi 0, kun kaikki luvut on käyty läpi. Olennaista on näiden tarkastelujen $z = 0, 1, 2, ..., y$ äärellinen määrä, mikä seuraa viimekädessä siitä, että joukolla A on olemassa jokin yläraja y. Maksimissaan näitä tarkasteluja tulee olemaan luku nolla mukaan lukien yhteensä $y + 1$ kappaletta. Tällainen tarkastelu on aina mahdollista suorittaa periaatteellisella tasolla (riippuen joukosta A ja rajan y suuruudesta) ainakin, jos käytössä on tehokkaita tietokoneita.

Tehokkaat tietokoneetkaan eivät osaisi välttämättä laskea joukon B minimiä, jos joukko A ei olisi ylhäältä rajoitettu. Ongelmalliseen tilanteeseen päädyttäisiin etenkin, jos joukko B sattuisi olemaan tyhjä. Tällöin luvun z tarkasteluita jäätäisiin tekemään ikuiseen silmukkaan, ja pyrittäisiin etsimään äärettömyyksiin saakka minimiä joukosta, jossa sitä ei itse asiassa olisi edes olemassa (tätä ei siis ennalta vielä tiedetä!). Toisaalta, vaikka ylhäältä rajoittamattomalla joukolla A sattuisi olemaan minimi, voitaisiin tämä saavuttaa vasta jollain mielivaltaisen suurella luvulla z, jonka suuruusluokasta ei alun perin olisi minkäänlaista käsitystä.

Olennaista on siis, että funktiolle μ_A saadaan laskettua arvo jollain äärellisellä toimenpiteellä. Kuten määritelmästä 1.8 nähdään, funktiolle μ_A näitä arvoja on aina täsmälleen kaksi. Funktion arvoksi saadaan 0 ainakin silloin, kun $y = 0$ tai jos minimiä ei löydetä joukosta $C = \{z \mid (x_1, ..., x_k, z) \in A\}$. Jos $y \geq 1$ ja minimi löydetään joukosta C, funktio μ_A ikään kuin hyppää tähän minimiin $z_{\min} = \min\{z \mid (x_1, ..., x_k, z) \in A\}$ jollain $z = 0, 1, 2, ..., y$, jonka jälkeen funktio pysyy vakiona.

Toki myös rajoittamaton minimalisaatio voidaan määritellä. Tällaisessa minimalisaatiossa ehtona on, että minimiä haetaan sellaisesta joukosta A, jolle varmasti tiedetään minimin löytyvän [**27**, **Määritelmä 3.14**]. Toisaalta rajoittamattoman minimalisaation avulla voidaan myös määritellä rekursiiviset funktiot ja huomata, että kaikki primitiivirekursiiviset funktiot ovat rekursiivisia [**28**, **s. 41–43**].

Edellä mainittu Ackermannin funktio voidaan osoittaa olevan rekursiivinen, mutta määritelmän 1.1 mukaista esitystä sille ei voida muodostaa [**4**, **s. 46–47, 194**]. Tämän nojalla rekursiivisten funktioiden joukko on laajempi kuin primitiivirekursiivisten funktioiden joukko. Primitiivirekursiivisten ja rekursiivisten funktioiden välistä eroa voidaan vielä teroittaa erittelemällä funktioiden arvojen laskemiseen kuluvaa aikaa. Koska rajoittamattoman minimalisaation minimin etsimiseen voi lukujen

$z = 0, 1, 2, ...$ äärettömän tarkastelujen määrän nojalla kulua ennalta määräämätön aika, myöskään rekursiivisten funktioiden, jotka eivät ole primitiivirekursiivisia, ratkaisuihin kuluvaa aikaa ei osata ennalta arvioida. Primitiivirekursiivisille funktioille tällainen arvio pystytään tekemään [**28**, **s. 43**].

Primitiivirekursiivisten joukkojen tilanne on samankaltainen kuin primitiivirekursiivisten funktioiden. Määritelmän 1.7 sekä primitiivirekursiivisten funktioiden joukon numeroituvuuden perusteella on selvää, että myös primitiivirekursiivisten joukkojen joukon on oltava vain numeroituva. Toisaalta Cantorin diagonaalin esityksen perusteella esimerkiksi numeroituvasti äärettömän joukon $\mathbb{N}$ potenssijoukko eli joukon $\mathbb{N}$ osajoukkojen joukko on ylinumeroituva, joten selvästi myös joukon $\mathbb{N}^k$ osajoukkojen joukko on ylinumeroituva [**9**, **s. 15–27**]. Tämän perusteella ei-primitiivirekursiivisia joukkoja on myös olemassa ylinumeroituvasti. Kuten ei-primitiivisten funktioiden tapauksessa, esimerkin antaminen tällaisesta joukosta on haastavaa mutta tutkielman luvussa 2 tullaan esittämään muutama tällainen joukko sivutuotteena Gödelin työn tuloksista.

1.2. RA-kieli

1.2.1. RA-kielen syntaksi. RA-kielen aakkosto perustuu predikaattikielen pohjalle sisältäen samat loogiset konnektiivit, sekä samankaltaisesti käyttäytyviä muuttuja- ja vakiosymboleita. Tässä kielessä tarvitaan lisäksi symboleita, jotka imitoivat edellä esitettyjä primitiivirekursiivisia funktioita sekä lukujen yhtäsuuruutta. Määritellään RA-kielen aakkosiksi seuraavat symbolit:

MÄÄRITELMÄ 1.11. RA-kielen aakkosia ovat symbolit

Z,	joka imitoi nollakuvausta $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, z(x) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{N}$,
S,	joka imitoi seuraajakuvausta $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, s(x) = x + 1$ kaikille $x \in \mathbb{N}$,
$\Pi_i^k, 1 \leq i \leq k$,	jotka imitoivat projektiokuvauksia $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,
	$\pi_i^k(x_1, ..., x_i, ...x_k) = x_i$ kaikille $(x_1, ..., x_i, ...x_k) \in \mathbb{N}$,
R,	joka imitoi primitiivirekursiota,
C,	joka imitoi kuvausten yhdistettä,
v_0,	joka imitoi vakiosymbolia eli lukua $0 \in \mathbb{N}$,
$x_n, n \in \mathbb{N}$,	jotka vastaavat muuttujasymboleita,
$\cong$,	joka imitoi luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ yhtäsuuruutta "$n = m$" sekä
$\to, f, \forall, [,], ($ ja $)$,	joiden merkitys on vastaava kuin predikaattikielissä.

Kuten predikaattikielissä, aakkosista muodostettuja äärellisiä jonoja kutsutaan sanoiksi. Predikaattikielissä kaavojen muodostaminen onnistuu suoraan aakkosten

ja sanojen määrittelyjen avulla, mutta RA-kielessä tilanne on hieman monimutkaisempi. RA-kielessä esiintyy useita sanoista muodostettuja erityyppisiä rakennejonoja, jotka kaikki määritellään hiukan toisistaan poikkeavalla tavalla. Nämä erotellaan funktiosymboli-, termi- sekä kaavarakennejonoiksi. Ennen kuin funktiosymbolirakennejonoja voidaan lähteä määrittelemään, täytyy ensin tietää, kuinka pelkät funktiosymbolit rakentuvat.

RA-kielessä funktiosymbolit määritellään tarkasti rekursion avulla, jolloin saadaan määrättyä yksikäsitteiset n-paikkaiset funktiosymbolit $F \in \mathcal{F}(m,n) \subset \{\text{RA-kielen sanat}\}$ [**12**, **Määritelmä 2.1 ja Lause 2.4**], [**15**, **s. 31–32**]. Joukko $\mathcal{F}(m,n)$ on kaikkien RA-kielisten sanojen osajoukko sekä $m \geq 1$ on rekursiossa tarvittava indeksiluku. Luku n ilmoittaa joukkoon $\mathcal{F}(m,n)$ kuuluvien funktiosymboleiden F paikkaluvun.

Funktiosymboleiden tarkan rekursiomääritelmän nojalla voidaan nähdä, että funktiosymboleita on viittä erilaista tyyppiä. Nämä vastaavat lähes määritelmässä 1.11 esiintyviä aakkosia. Esitetään nämä funktiosymbolityypit seuraavassa määritelmäksi tiivistetyssä muodossa.

MÄÄRITELMÄ 1.12. Jokainen n-paikkainen funktiosymboli F on yksikäsitteisesti joko tyyppiä

(1) $F = Z$, missä $n = 1$ tai
(2) $F = S$, missä $n = 1$ tai
(3) $F = \Pi_i^k, 1 \leq i \leq k$, missä $n = k$ tai
(4) $F = (RGH)$, missä G on $(n-1)$-paikkainen ja H $(n+1)$-paikkainen funktiosymboli tai
(5) $F = (CHG_1G_2...G_q)$, missä H on q-paikkainen sekä $G_1, G_2, ..., G_q$ n-paikkaisia funktiosymboleita.

Yksikäsitteisyys takaa sen, että F ei voi olla yhtä aikaa useampaa tyyppiä oleva symboli. Lisäksi, jos F on funktiosymboli, on sen oltava jotain muotoa (1)-(5) oleva symboli. Siis jokainen funktiosymboli F edustaa täsmälleen vain yhtä funktiosymbolityyppiä kerrallaan [**12**, **Huomautus 2.3 ja Lause 2.4**], [**15**, **s. 31–32**]. Nyt funktiosymbolirakennejono voidaan määritellä, kun tiedetään millaisia funktiosymboleita on olemassa.

MÄÄRITELMÄ 1.13. Olkoon F funktiosymboli. Määritellään funktiosymbolin F funktiosymbolirakennejonoksi äärellinen jono $F_1, F_2, ..., F_m$ funktiosymboleja siten, että $F_m = F$ ja kaikille $i \in \{1, 2, ..., m\}$ pätee joko

(1) $F_i = Z$ tai

(2) $F_i = S$ tai

(3) $F_i = \Pi^n_j, 1 \leq j \leq n$ tai

(4) on olemassa $j, k \in \{1, 2, ..., i-1\}$ ja $n \geq 1$ siten, että F_j on n-paikkainen ja F_k $(n+2)$-paikkainen sekä $F_i = (RF_jF_k)$ tai

(5) on olemassa $j, k_1, k_2, ..., k_l \in \{1, 2, ..., i-1\}$ ja $n \geq 1$ siten, että F_j on l-paikkainen ja funktiosymbolit F_{k_i} n-paikkaisia sekä $F_i = (CF_jF_{k_1}F_{k_2}...F_{k_l})$.

Esimerkki 1.14. Olkoon $F = (C(CS\Pi^2_1)(RZ\Pi^3_2)(CZ\Pi^3_3))$. Tällöin funktiosymbolille F voidaan muodostaa rakennejono:

$F_1 = S$	ehto (2) (1-paikkainen funktiosymboli)
$F_2 = \Pi^2_1$	ehto (3) (2-paikkainen)
$F_3 = Z$	ehto (1) (1-paikkainen)
$F_4 = \Pi^3_2$	ehto (3) (3-paikkainen)
$F_5 = \Pi^3_3$	ehto (3) (3-paikkainen)
$F_6 = (CS\Pi^2_1)$	$F_1 + F_2+$ ehto (5) (2-paikkainen)
$F_7 = (RZ\Pi^3_2)$	$F_3 + F_4+$ ehto (4) (2-paikkainen)
$F_8 = (CZ\Pi^3_3)$	$F_3 + F_5+$ ehto (4) (2-paikkainen)
$F_9 = F$	$F_6 + F_7 + F_8+$ ehto (5) (2-paikkainen).

Kuten esimerkistä 1.14 voi huomata, funktiosymbolien paikkalukujen täytyy sopia yhteen, kun määrätään rakennejonojen osia määritelmän 1.13 ehtojen (4) ja (5) avulla. Esimerkiksi kohdassa F_6 funktiosymbolin Z paikkaluvun ollessa 1, täytyy sitä seuraavan funktiosymbolin Π^3_2 paikkaluvun olla täsmälleen 3. Tällöin syntyvän rakennejonon osan F_6 paikkaluvuksi tulee automaattisesti 2. Samantyyppinen funktion väliin muodostuminen tapahtui määritelmässä 1.1 funktion f kohdalla. Funktiosymboli R imitoi juuri primitiivirekursiota, joten intuitiivisesti täytyykin tapahtua edellä mainitulla tavalla.

Vastaavasti yhdistettä imitoivan funktiosymbolin C tapauksessa funktiosymbolien paikkalukujen täytyy sopia yhteen, kuten määritelmän 1.3 kohdassa (4). Esimerkissä 1.14 tämä voidaan konkreettisesti havaita kohdissa F_6, F_8 ja F_9. Lisäksi esimerkin 1.14 nojalla voi uskoa, että mielivaltaisen funktiorakennejonon sanan F_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$ tulee myös itsessään olla aina funktiosymboli.

Jos funktiosymbolit F vastaavat intuitiivisella tasolla "tavallisia" funktioita f, voidaan termien t ajatella vastaavan näihin funktioihin asetettavia vakio- tai muuttujasymboleja tai näiden funktioiden f saamia arvoja. Termien t voi näin ollen ajatella edustavan esimerkiksi "tavallisia" muuttujia x, y tai z sekä "tavallisia" vakioita $0, 15$

tai a. Edelleen esimerkiksi termin $F(v_0)$ voidaan ajatella edustavan funktion f arvoa pisteessä 0 eli arvoa $f(0)$. Asetetaan seuraavassa termin t rakennejono tällaiseen intuitioon pohjautuen.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Olkoon t RA-kielinen sana. Sanan t termirakennejono on äärellinen jono $t_1, t_2, ..., t_m$ RA-kielen sanoja siten, että $t_m = t$ ja kaikille $i \in \{1, 2, ..., m\}$ pätee joko

(1) $t_i = v_0$ tai
(2) $t_i = x_n$ jollekin $n \in \mathbb{N}$ tai
(3) on olemassa $j_1, j_2, ..., j_n \in \{1, 2, ..., i-1\}$ ja n-paikkainen funktiosymboli F siten, että $t_i = F(t_{j_1} t_{j_2} ... t_{j_n})$.

Sanotaan, että t on termi, jos sille löytyy termirakennejono.

Kuten funktiosymbolien tapauksessa, myös jokaisen termin t on oltava yksikäsitteisesti jotain määritelmän 1.15 tyyppiä (1)-(3). Lisäksi on selvää, että jokaisen termirakennejonoon kuuluvan sanan t_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, täytyy olla termi.

ESIMERKKI 1.16. Olkoon $t = (CS\Pi_2^2)(S(v_0)\Pi_2^2(x_1x_2))$. Termille t voidaan muodostaa termirakennejono, missä

$t_1 = v_0$	ehto (1)
$t_2 = x_1$	ehto (2)
$t_3 = x_2$	ehto (2)
$t_4 = S(v_0)$	t_1+ ehto (3) (S on 1-paikkainen funktiosymboli)
$t_5 = \Pi_2^2(x_1x_2)$	$t_2 + t_3$+ ehto (3) (Π_2^2 on 2-paikkainen)
$t_6 = t$	$t_4 + t_5$+ ehto (3) ($(CS\Pi_2^2)$ on 2-paikkainen).

Edellä esitettyihin rakennejonomääritelmiin perustuen voidaan lopulta esittää RA-kielen kaavarakennejonon määritelmä, joka on lähes vastaava kuin predikaattikielissä. Olennainen ero tulee ainoastaan atomikaavan määrittelyssä ehdossa (1).

MÄÄRITELMÄ 1.17. Olkoon A RA-kielinen sana. Sanan A kaavarakennejono on äärellinen jono $A_1, A_2, ..., A_m$ RA-kielen sanoja siten, että $A_m = A$ ja kaikille $i \in \{1, 2, ..., m\}$ pätee joko

(1) $A_i = [t \cong s]$, missä t ja s ovat termejä tai
(2) $A_i = f$ tai
(3) on olemassa $j, k \in \{1, 2, ..., i-1\}$ siten, että $A_i = [A_j \to A_i]$ tai
(4) on olemassa $j \in \{1, 2, ..., i-1\}$ ja muuttujasymboli x siten, että $A_i = \forall x A_j$.

Sanotaan, että sana A on kaava, jos sille löytyy kaavarakennejono.

Lyhennysmerkinnät $\neg, \vee, \wedge, \leftrightarrow$ sekä $\exists$ määritellään RA-kielessä vastaavasti kuin predikaattikielissä [**13**, **s. 16–17, 57**]. RA-kielessä tarvitaan myös uutta merkintää $\not\cong$, joka intuitiivisesti vastaa luonnollisten lukujen erisuuruutta merkitsevää symbolia $n \neq m$. Määritellään tämä lyhennysmerkintä negaation avulla, ja asetetaan

$$[t \not\cong s] := \neg[t \neq s] = [[t \neq s] \to f],$$

missä t ja s ovat mielivaltaisia termejä.

Kuten määritelmästä 1.11 nähdään, RA-kielen aakkoset sisältävät vain yhden ainoan vakiosymbolin v_0. RA-kielessä käytetään kuitenkin myös symboleja v_n, missä $n \in \mathbb{N}$. Nämä määritellään rekursiivisesti lähtien lukua 0 imitoivasta symbolista v_0. Tämän jälkeen oletetaan rekursiivisesti, että symboli $v_{n-1}, n \geq 1$, on jo määritelty. Seuraavaksi voidaan asettaa symboli v_n siten, että

$$v_n := S(v_{n-1}) = \underbrace{S(S(...S}_{n \text{ kpl}}(v_0)...)).$$

Tällöin v_n on rekursioperiaatteen nojalla hyvin määritelty kaikille $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi induktiolla nähdään, että jokainen v_n on termi. Nyt jokaista luonnollista lukua $0, 1, 2, ...n$ kohden saadaan vastaamaan symboli $v_0, v_1, v_2, ..., v_n$, sillä S imitoi seuraajakuvausta $x \mapsto x + 1$. Tällöin nähdään, että

v_0	imitoi lukua $0 \in \mathbb{N}$,
$v_1 = S(v_0)$	imitoi lukua "$v_0 + 1$" eli lukua $0 + 1 = 1 \in \mathbb{N}$,
$v_2 = S(v_1)$	imitoi lukua "$v_1 + 1$" eli lukua $1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}$,
	$\vdots$
$v_n = S(v_{n-1})$	imitoi lukua $n \in \mathbb{N}$.

RA-kielen aakkoston projektiokuvauksen $\Pi_i^k, 1 \leq i \leq k$ sekä muuttujasymbolin x_n, $n \in \mathbb{N}$ määritelmien nojalla aakkostoon kuuluu ääretön määrä symboleja. Jatkossa tällainen määrittely tulisi tuottamaan hankaluuksia Gödel-lukujen määrittelyssä, joten muutetaan aakkostoa 1.11 lisäämällä siihen symboli $|$. Korvaamalla luvut $i, k, n \in \mathbb{N}$ vastaamaan symbolin $|$ lukumääriä saadaan aakkosien lukumäärä äärelliseksi. Tällöin saadaan symbolit

x_1 vastaamaan symbolia $(x|)$,
x_2 vastaamaan symbolia $(x||)$,
x_3 vastaamaan symbolia $(x||)$,
$\vdots$
x_n vastaamaan symbolia $(x\underbrace{||....||}_{n \text{ kpl}})$.

Lisäksi saadaan esimerkiksi

Π_1^1 vastaamaan symbolia $(|\Pi|)$,
Π_1^2 vastaamaan symbolia $(||\Pi|)$,
Π_2^2 vastaamaan symbolia $(||\Pi||)$,
$\vdots$
Π_i^k vastaamaan symbolia $(\underbrace{||....||}_{k \text{ kpl}}\Pi\underbrace{||....||}_{i \text{ kpl}})$.

Myös sulut,(ja), kuuluvat esimerkiksi symbolin $x_1 = (x|)$ uuteen määritelmään. Toisaalta tarpeettomina jatkossa sulut saatetaan jättää pois esimerkiksi rakennettaessa funktiosymbolia. Tällöin esimerkissä 1.14 esiintyvä funktiosymboli F voitaisiin myös kirjoittaa muotoon

$$F = (C(CS\Pi_1^2)(RZ\Pi_2^3)(CZ\Pi_3^3)) = CCS\Pi_1^2RZ\Pi_2^3CZ\Pi_3^3.$$

Tosin sulut yleensä auttavat selkiyttämään funktiosymbolin rakennetta varsinkin, jos funktiosymboli sisältää useita sisäkkäisiä funktiosymboleita. Pilkulla on myös tapana erotella termejä toisistaan termirakennejonon määritelmän 1.15 ehdossa (3). Tällainen merkintä on jo tuttua tavallisten funktioiden tapauksessa. Nyt esimerkki 1.16 voitaisiin myös kirjoittaa muodossa

$$t = (CS\Pi_2^2)(S(v_0)\Pi_2^2(x_1x_2)) = CS\Pi_2^2(S(v_0), \Pi_2^2(x_1, x_2)).$$

Termirakennejonoon liittyvät sulut kuuluvat kuitenkin yhä termin t esitykseen, eikä niitä ole syytä jättää pois. Lisäksi on hyvä painottaa, että pilkku ei sisälly RA-kielen aakkostoon. Se on mukana vain merkintöjä sekä lukumukavuutta selkiyttämässä. Predikaattikielen tapaan myös kaavoissa uloimmat hakasulkeet on tapana jättää pois esityksestä, toisin sanottuna on yhtäpitävää kirjoittaa $[A \to B] = A \to B$.

Kvantifikaation vaikutusalue rajataan RA-kielisessä kaavassa vastaavasti hakasulkeiden avulla, kuten predikaattikielissäkin [**13**, **s. 59**]. Myös vapaat ja sidotut muuttujat x määritellään RA-kielessä täsmälleen samalla tavalla kuin predikaattikielissä [**13**, **Määritelmä 3.2**].

Sijoitus määritellään RA-kielessä intuitiivisella tasolla samaan tapaan kuin predikaattikielissä, mutta muutamia perustavanlaatuisia eroja kuitenkin löytyy. Predikaattikielissä voidaan sijoituksen $S_a^x(A)$ avulla vaihtaa vain mielivaltaisen kaavan A vapaat muuttujat x joko vakio- tai muuttujasymboliin a [**13**, **s. 60–61**]. RA-kielessä sijoituksen avulla voidaan vaihtaa kaavan A vapaita muuttujia x, tai jopa kokonaisia termejä t, muuttujiksi y tai termeiksi s. Vakiosymboleista ei tarvitse tässä erikseen puhua, sillä vakiosymboli v_0 on myös määritelmän 1.15 mukaan aina termi. Tässä vaiheessa on myös hyvä huomata, että mielivaltaisessa termissä t ei koskaan esiinny sidottuja muuttujia, jonka voi helposti huomata määritelmää 1.15 katsomalla – termin rakennejonossa ei esiinny kvantifikaatioita lainkaan.

Koska RA-kielessä sijoitus on teknisesti huomattavasti laajempi ja vaativampi kuin predikaattikielissä, kannattaa sijoituksen tarkka määritelmä pilkkoa pienempiin osiin. Ensiksi voidaan puhua pelkkään mielivaltaiseen termiin t sijoittamisesta, jota merkitään symbolilla $S_s^x(t)$. Koska termissä t muuttuja x (joka on myös termi) ei voi esiintyä sidottuna, vaihtaa sijoitus $S_s^x(t)$ kaikki muuttujan x esiintymät termeiksi s termissä t. Termissä t voi esiintyä useampia aakkosia, joten sijoitus ei välttämättä vaihda pelkästään termiä t termiksi s. Toisin sanottuna ei välttämättä päde $S_s^x(t) = s$. Sijoitus voidaan määritellä tarkasti rekursioperiaatteen avulla sekä huomata tämän määritelmän avulla induktiolla, että myös jokainen $S_s^x(t)$ on termi mielivaltaiselle termille t [**12**, **Määritelmä 2.14**].

Lähes vastaavasti voidaan määritellä mielivaltaiseen kaavaan A sijoitus $S_s^x(A)$, missä muuttujan x vapaat esiintymät vaihdetaan termeiksi s. Tällä kertaa kvantifikaatioita voi esiintyä kaavassa A, joten kaikkia muuttujan x esiintymisiä ei välttämättä vaihdeta. On myös muistettava, että korvaus on suoritetaan järjestyksessä siten, ettei jo vaihdettuja muuttujan x esiintymiä lähdetä korvaamaan uudelleen termillä s, sillä termi s voi hyvin sisältää itsessään muuttujan x. Tällöin olisi mahdollista jumiutua toistamaan sijoitusta $S_s^x(A)$ loputtomiin. Vastaavanlainen äärettömiin jatkuva sijoittaminen voi tapahtua yhtä lailla termiin sijoittamisessa, ellei määritelmää aseteta huolellisesti rekursioperiaatteen avulla. Tämän määritelmän avulla nähdään myös helposti, että $S_s^x(A)$ pysyy edelleen kaavana mielivaltaiselle kaavalle A [**12**, **Määritelmä 2.16**].

Kuten edellä mainittiin, RA-kielessä korvattava symbolin ei tarvitse välttämättä olla muuttujasymboli x. RA-kielessä voidaan myös korvata termissä t tai kaavassa A mielivaltainen termi u termillä s. Tätä toimenpidettä merkitään termille t tai kaavalle A symbolilla $\tilde{S}_s^u(t)$ tai $\tilde{S}_s^u(A)$. Koska termi u voi sisältää muuttujia x ja toisaalta kaava A samoja muuttujia x, erityisesti myös sidottuina, voidaan tällä sijoituksella

korvata myös sidottuja muuttujia x [**12**, **Määritelmä 2.32**]. Tämä sijoitus poikkeaa siis huomattavasti esimerkiksi sijoituksen merkinnästä $S_s^x(A)$ puhumattakaan predikaattikielissä määritellystä sijoituksesta, jossa sidottujen muuttujien korvaaminen ei onnistu lainkaan.

On myös tärkeä huomata, että esimerkiksi kaavassa $B = \forall xC$ esiintyvä muuttuja x ei ole termi. Tämän näkee termin rakennejonon määritelmästä 1.15. Tällöin ei voi koskaan tuottaa millään edellä mainituilla sijoituksilla kaavaa $\tilde{S}_s^x(B) = \tilde{S}_s^x(\forall xC) = \forall u\tilde{S}_s^x(C)$. Toisin sanottu millään sijoituksen määritelmällä ei voida vaihtaa kvantifikaatiota seuraavaa muuttujaa x missään kaavassa A. Itse asiassa edellä saatu kaava $\forall u\tilde{S}_s^x(C)$ ei välttämättä edes ole kaava, jos termi u ei ole muuttuja. Tätä eroavuutta voidaan selventää puhumalla muuttujan x termiesiintymisistä, jos sekaantumisen vaaraa on. Esimerkiksi kaavassa B muuttujan x esiintymä ei ole termiesiintymä.

1.2.2. RA-kielinen päättely. Myös RA-kielessä tarvitaan päättelyn pohjaksi aksioomia. RA-kielessä niitä on runsaasti, yhteensä 17 kappaletta. Tämä johtuu pohjimmiltaan siitä, että luonnollisten lukujen ominaisuuksien imitoiminen on huomattavasti monimutkaisempaa kuin esimerkiksi predikaattikielisten maailman tilanteiden mallintaminen, jotka onnistuvat vain viidellä aksioomalla.

RA-kielen kolme ensimmäistä aksioomaa

(Ax1) $A \to [B \to A]$,
(Ax2) $[A \to [B \to C]] \to [[A \to B] \to [A \to C]]$ ja
(Ax3) $\neg\neg A \to A$

mielivaltaisille kaavoille A, B ja C, ovat tutut jo propositiologiikasta.

Seuraavat kaksi aksioomaa

(Ax4) $\forall xA \to S_t^x(A)$ mielivaltaiselle kaavalle A, missä sijoitus $S_t^x(A)$ ei sido, ja
(Ax5) $\forall x[A \to B] \to [A \to \forall xB]$, mielivaltaiselle kaavalle B sekä kaavalle A, missä muuttuja x ei esiinny vapaana,

ovat vastaavat kuin predikaattilogiikassa, sillä erotuksella, että aksioomassa **(Ax4)** esiintyy termi t muuttujan x sijaan.

Aksioomat

(Ax6) $x \cong x$,
(Ax7) $x \cong y \to y \cong x$ ja
(Ax8) $x \cong y \to [y \cong z \to x \cong z]$,

missä x, y ja z ovat mielivaltaisia muuttujia, pyrkivät imitoimaan sitä, että luonnollisten lukujen yhtäsuuruus on ekvivalenssirelaatio.

Lisäksi aksioomia ovat

(Ax9) $Z(x) \cong v_0$ mielivaltaiselle muuttujalle x,

joka intuitiivisesti sanoo nollakuvauksen saavan arvon 0 kaikilla $x \in \mathbb{N}$ sekä

(Ax10) $S(x) \ncong v_0$ mielivaltaiselle muuttujalle x,

joka taas intuitiivisesti kertoo sen, ettei seuraajakuvaus saa millään $x \in \mathbb{N}$ arvoa 0.

Aksiooma

(Ax11) $S(x) \cong S(y) \to x \cong y$, missä x ja y ovat mielivaltaisia muuttujia,

imitoi seuraajakuvauksen injektiivisyyttä sekä aksiooma

(Ax12) $\Pi_i^k(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_k) \cong x_i$, missä $1 \leq i \leq k$ ja symbolit x_i ovat mielivaltaisia muuttujia,

imitoi projektiokuvauksen käyttäytymistä.

Seuraavat aksioomat

(Ax13) $(RGH)(x_1, x_2, ..., x_k, v_0) \cong G(x_1, x_2, ..., x_k)$ ja

(Ax14) $(RGH)(x_1, x_2, ..., x_k, S(x)) \cong H(x_1, x_2, ..., x_k, x, (RGH)(x_1, x_2, ..., x_k), x)$, missä G on k-paikkainen sekä H $(k+2)$-paikkainen funktiosymboli ja muuttujasymbolit $x_1, x_2, ..., x_k$ sekä x mielivaltaisia,

vastaavat primitiivirekursion määritelmää 1.1.

Aksiooma

(Ax15) $(CGF_1...F_m)(x_1, x_2, ..., x_q) \cong G(F_1(x_1, x_2, ..., x_q)...F_m(x_1, x_2, ..., x_q))$, missä $m, q \geq 1$, G on m-paikkainen funktiosymboli, $F_1, ..., F_m$ q-paikkaisia funktiosymboleita sekä muuttujasymbolit $x_1, x_2, ..., x_q$ mielivaltaisia,

vastaa taas määritelmän 1.3 yhdistettyä kuvausta (4).

Toiseksi viimeisen aksiooman

(Ax16) $x_i \cong x \to F(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_k) \cong F(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}..., x_k)$, missä F on k-paikkainen funktiosymboli sekä x_i ja x mielivaltaisia muuttujasymboleja, kun $1 \leq i \leq k$,

voidaan ajatella imitoivan seuraavaa: Jos jonkin muuttujan y arvo on sama kuin muuttujan x, toisin sanottuna pätee $x = y$, niin tällöin pätee myös $f(y) = f(x)$. RA-kielellä ilmaistuna aksiooma **(Ax16)** siis kertoo, että termin imitoiman funktion arvo ei muutu, jos jokin muuttujasymboli x_i korvataan funktiossa samanarvoisella muuttujasymbolilla x.

Viimeisenä aksioomana on

(Ax17) $S_{v_0}^x(A) \to [\forall x[A \to S_{S(x)}^x(A)] \to \forall x A]$, missä A on mielivaltainen kaava ja x mikä tahansa muuttujasymboli,

joka imitoi induktioperiaatetta. Kaava $S^x_{v_0}(A)$ imitoi induktion alkuaskelta ja kaava $\forall x[A \to S^x_{S(x)}(A)]$ induktioaskelta.

HUOMAUTUS 1.18. RA-kielessä päättelyjonon käsite on täsmälleen vastaava kuin predikaattikielissä [**13**, **Määritelmä 3.4**]. Varsinaisia päättelysääntöjä ovat siten tässäkin kielessä modus ponens sekä kvantifiointi. Edelleen merkitään $\vdash A$, jos kaava A on teoreema. Myös oletuksista päättely voidaan määritellä RA-kielessä samoin kuin predikaattikielissä [**13**, **Määritelmä 3.5**]. Tällöin myös molemmat versiot päättelylauseista edelleen pätevät vastaavasti [**13**, **Lause 3.10 ja Lause 3.11**]. On myös muistettava, ettei kiellettyjä kvantifikaatioita saa tehdä tässäkään kielessä oletuksissa esiintyvien vapaiden muuttujien suhteen.

Seuraava huomautus on myös olennaisessa roolissa RA-kielessä, kuten myös luvun 2 Gödelin tuloksien todistuksissa.

HUOMAUTUS 1.19. Propositiokieliset teoreemat ovat RA-kielisiä teoreemoja [**12**, **Huomautus 2.20**].

1.2.3. RA-kielen semantiikka. RA-kielessä mallitettavia symboleita ovat sekä määritelmän 1.13 mukaiset funktiosymbolit F että määritelmässä 1.15 esiintyvät termit t. Kun predikaattikielissä mallittavan kuvauksen määritelmä on suhteellisen väljä, RA-kielessä mallittavat kuvaukset ovat yksikäsitteisen tarkasti määriteltyjä. Tämä yksikäsitteisyys johtuu käytännössä siitä, että RA-kielellä pyritään imitoimaan vain ja ainoastaan luonnollisten lukujen ominaisuuksia ja laskutoimituksia. Predikaattikielissä mallitettavana on hyvin laveasti ilmaistuja maailman tilanteita ja ilmiötä, joita voi nähdä esimerkiksi erilaisia esimerkkitehtäviä tutkailemalla [**13**, **s. 139–141**].

Intuitiivisella tasolla RA-kielen mallinnus tarkoittaa sitä, että n-paikkaiset funktiosymbolit F mallitetaan kuvauksella $m(F) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ yksikäsitteisiksi funktioksi f sekä muuttujattomat termit t mallitetaan kuvauksella a joksikin luonnolliseksi luvuksi $a(t)$. Toisin sanottuna mallinnus a antaa muuttujattomien termien $v_{k_n}, k, n \in \mathbb{N}$ arvot k_n, jolloin nämä arvot voidaan asettaa mallilla m funktiosymbolista F saatuun funktioon $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Tällöin funktion arvo voidaan laskea tavalliseen tapaan $f(k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{N}$.

Tarkastellaan seuraavassa määritelmässä suurpiirteisesti, miten funktiosymbolin mallinnus tapahtuu sekä millaisia funktioita tällä on mahdollisuus mallittaa. Tarkempi määritelmä vaatii rekursioperiaatteen käyttöä, jolloin yksikäsitteisyys tulee selkeämmin ja uskottavammin ilmi [**12**, **Määritelmä 2.40**].

MÄÄRITELMÄ 1.20. Olkoon F funktiosymboli, jolloin se on jotain määritelmän 1.12 mukaista tyyppiä.

(1) Jos $F = Z$, niin asetetaan $m(Z) = z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tai

(2) jos $F = S$, niin asetetaan $m(S) = s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tai

(3) jos $F = \Pi_i^k, 1 \leq i \leq k$, niin asetetaan $m(\Pi_i^k) = \pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, tai

(4) jos $F = (RGH)$, missä G on $(n-1)$- ja H $(n+1)$-paikkainen funktiosymboli, niin asetetaan $m(F) = \mathcal{R}(m(G), m(H))$, missä mallinnukset $m(G)$ ja $m(H)$ tunnetaan rekursion nojalla, tai

(5) jos $F = (CHG_1G_2...G_q)$, missä H on q-paikkainen ja funktiosymbolit $G_i, 1 \leq i \leq q$, n-paikkaisia, niin asetetaan $m(F) = c(m(H); m(G_1), m(G_2), ..., m(G_q))$, missä mallinnukset $m(H)$ ja $m(G_1), m(G_2), ..., m(G_q)$ tunnetaan rekursion nojalla.

Tällöin on saatu muodostettua mielivaltaiselle funktiosymbolille F yksikäsitteinen mallinnus $m(F) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ kaikille $k \in \mathbb{N}$.

Tutkitaan seuraavan esimerkin avulla, tuottaako mallinnuksen määritelmä 1.20 järkeviä tuloksia.

ESIMERKKI 1.21. Olkoon funktiosymboli $F = RZCR\Pi_1^1CS\Pi_3^3\Pi_1^3\Pi_3^3$. Määritelmän 1.20 ehdon (4) nojalla

$$m(F) = \mathcal{R}(m(Z), m(CR\Pi_1^1CS\Pi_3^3\Pi_1^3\Pi_3^3)), \tag{1}$$

jolloin yhtälöstä (1) saadaan määritelmän 1.20 ehdon (5) avulla

$$\mathcal{R}(m(Z), m(CR\Pi_1^1CS\Pi_3^3\Pi_1^3\Pi_3^3)) = \mathcal{R}(m(Z), c(m(R\Pi_1^1CS\Pi_3^3); m(\Pi_1^3), m(\Pi_3^3))), \tag{2}$$

edelleen yhtälöstä (2) määritelmän 1.20 ehdolla (4)

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}(m(Z), c(m(R\Pi_1^1CS\Pi_3^3);\ m(\Pi_1^3), m(\Pi_3^3))) = \\ &\qquad \mathcal{R}(m(Z), c(\mathcal{R}(m(\Pi_1^1), m(CS\Pi_3^3)); m(\Pi_1^3), m(\Pi_3^3))) \end{aligned} \tag{3}$$

ja yhtälöstä (3) määritelmän 1.20 ehdon (5) avulla

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}(m(Z), c(\mathcal{R}(m(\Pi_1^1),\ m(CS\Pi_3^3)); m(\Pi_1^3), m(\Pi_3^3))) = \\ &\qquad \mathcal{R}(m(Z), c(\mathcal{R}(m(\Pi_1^1), c(m(S); m(\Pi_3^3))); m(\Pi_1^3), m(\Pi_3^3))). \end{aligned} \tag{4}$$

Lopulta määritelmän 1.20 ehtojen (1), (2) ja (3) nojalla yhtälö (4) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{R}(m(Z), c(\mathcal{R}(m(\Pi_1^1), c(m(S); m(\Pi_3^3))); m(\Pi_1^3), m(\Pi_3^3))) = \mathcal{R}(z, c(\mathcal{R}(\pi_1^1, c(s; \pi_3^3)); \pi_1^3, \pi_3^3)). \tag{5}$$

Nyt mielivaltaisille termeille x ja y pätee yhtälön (5) perusteella

$$\mathcal{R}(z, c(\mathcal{R}(\pi_1^1, c(s; \pi_3^3)); \pi_1^3, \pi_3^3))(x, y) = f(x, y) \tag{6}$$

missä $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f(x, y) = xy$ [**15**, **s. 4–5**].

Esimerkissä 1.21 funktiosymboli F imitoi siis luonnollisten lukujen kertolaskua. Vastaavat tulokset voidaan esittää myös yhteenlaskulle sekä potenssiinkorotukselle [**25**, **s. 77, 196**]. RA-kieli pystyy tältä osin hyvin imitoimaan luonnollisten lukujen maailmaa.

Kuitenkaan kaikille funktioille ei löydy imitaattia RA-kielessä. Esimerkiksi kelpaa jälleen Ackermannin funktio. Tämän kertoo seuraava lause, jonka mukaan vain primitiivirekursiivisille funktioille löytyy RA-kielinen malli kuvauksella m.

LAUSE 1.22. *Kuvaus $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ on primitiivirekursiivinen jos ja vain jos on olemassa n-paikkainen funktiosymboli F siten, että $m(F) = f$.*

TODISTUS. [**12**, **Lause 2.41**], [**15**, **s. 54–55**]. □

Seuraavaksi määritellään muuttujattoman termin t arvo kuvauksen a avulla. Tarkastelussa rajoitutaan vain muuttujattomiin termeihin, koska muuttujille ei pystytä järkevästi asettamaan arvoa luonnollisten lukujen joukkoon. Esimerkiksi muuttujan x arvosta puhuminen olisi mieletöntä, saati yrittää asettaa arvoa esimerkiksi summakuvausta edustavalle funktiolle $f(x, y) = x + y$ luonnollisten lukujen joukossa. Toisaalta, jos vaihdetaan muuttujat x ja y edustamaan lukuja $x = 1$ ja $y = 2$, saadaan näille heti vastaavat RA-kieliset termit v_1 ja v_2. Tällöin myös funktion f arvolle $f(1, 2) = 1 + 2 = 3 \in \mathbb{N}$ voidaan asettaa järkevä mallinnus RA-kieleen. Esitetään seuraavassa tämän määritelmä yksityiskohtaisesti rekursion avulla, sillä se on olennaisessa osassa epätäydellisyyslauseita tarkastellessa.

MÄÄRITELMÄ 1.23. Olkoon t muuttujaton termi. Tällöin t on välttämättä määritelmän 1.15 (1) tai (3) muotoa oleva. Olkoon sitten m termin t rakennejonon minimaalinen pituus. Rekursion alkuaskeleessa $m = 1$, jolloin välttämättä $t = v_0$. Asetetaan tällöin

$$a(t) = a(v_0) = 0 \in \mathbb{N}.$$

Muita vaihtoehtoja ei ole, joten voidaan tehdä rekursio-oletus, $m \geq 2$, ja $a(s)$ on jo määritelty kaikille termeille s, joilla on korkeintaan $m-1$ pituinen rakennejono. Tällöin t on muotoa

$$t = F(t_1 t_2 ... t_n)$$

missä F on n-paikkainen funktiosymboli ja termit t_i, $1 \leq i \leq n$ valittu siten, että, niillä on lukua m lyhyempi rakennejono. Tällöin rekursio-oletuksen nojalla arvot $a(t_i) \in \mathbb{N}$ on jo määritelty kaikille $i = 1, 2, ..., n$. Nyt voidaan asettaa

$$a(t) = m(F)(a(t_1), a(t_2), ..., a(t_n)) \in \mathbb{N}.$$

Sanotaan lisäksi, että $a(t) \in \mathbb{N}$ on termin t arvo mallikuvauksella a.

Seuraava lemma on vähintään yhtä tärkeä Gödelin epätäydellisyyslauseiden todistuksissa kuin edellinen määritelmä. Sen avulla jokaiselle vakiosymbolille löydetään vastinkappale luonnollisten lukujen joukosta.

LEMMA 1.24. *Kaikille* $k \in \mathbb{N}$ $a(v_k) = k$.

TODISTUS. Tehdään induktio luvun n suhteen. Kun $n = 0$, niin $v_k = v_0$, jolloin saadaan suoraan määritelmästä 1.23 $a(v_0) = 0$ eli väite pätee.

Oletetaan sitten induktiivisesti, että väite pätee, kun $a(v_n) = n$. Riittää osoittaa, että pätee $a(v_{n+1}) = n + 1$. Tällöin saadaan

$$a(v_{n+1}) = a(S(v_n)) = m(S)(a(v_n)) = s(n) = n + 1,$$

jolloin väite on saatu todistettua. Tässä ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa merkinnän v_n määritelmästä, toinen määritelmästä 1.23, kolmas funktiosymbolin S mallikuvauksen määritelmästä sekä induktio-oletuksesta ja viimeinen saadaan seuraajakuvauksen määritelmästä. □

Kaavaa A sanotaan suljetuksi, jos siinä ei esiinny lainkaan vapaita muuttujia. Esitetään seuraavassa määritelmässä, kuinka suljetun kaavan totuusarvo voidaan määrittää.

MÄÄRITELMÄ 1.25. Olkoon kaava A suljettu. Olkoon lisäksi m siinä esiintyvien aakkosten $\rightarrow$ ja $\forall$ yhteenlaskettu lukumäärä. Kun $m = 0$, niin kaavassa A ei esiinny lainkaan aakkosia $\rightarrow$ ja $\forall$. Tällöin A on välttämättä määritelmän 1.17 muotoa

(1) $A = [t \cong s]$, missä t ja s termejä, joissa ei esiinny muuttujia, tai
(2) $A = f$.

Jos kaava A on muotoa (1), asetetaan

$$T(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a(t) = a(s), \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Jos kaava A on muotoa (2) asetetaan

$$T(A) = T(f) = 0.$$

Tehdään sitten rekursio-oletus, $m \geq 1$, ja $T(\hat{A})$ on jo määritelty kaikille suljetuille kaavoille $\hat{A}$, joissa esiintyy aakkosia $\rightarrow$ ja $\forall$ yhteensä korkeintaan $m-1$ kappaletta. Tällöin A on muotoa

(3) $A = B \rightarrow C$, missä B ja C ovat suljettuja kaavoja, joille $T(B)$ ja $T(C)$ on jo määritelty, tai

(4) $A = \forall x B$, missä x on muuttujasymboli ja B kaava siten, että $S^x_{v_n}(B)$ on suljettu kaava kaikille $n \in \mathbb{N}$, joille $T(S^x_{v_n}(B))$ on jo määritelty.

Jos kaava A on muotoa (3), asetetaan

$$T(A) = \begin{cases} 0, & \text{jos } T(B) = 1 \text{ ja } T(C) = 0, \\ 1 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Jos kaava A on muotoa (4), asetetaan

$$T(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } T(S^x_{v_n}(B)) = 1 \text{ kaikille } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Sanotaan myös, että kaava A on validi, jos pätee $T(A) = 1$.

Totuusarvon määrittelyssä 1.25 on tärkeää huomata, että kohdassa (1) termeissä t ja s ei saa esiintyä muuttujia. Tämä johtuu siitä, että termin rakennejonon määritelmässä 1.15 ei esiinny kvantifikaatioita, jolloin niitä ei myöskään esiinny kaavassa A. Jos muuttujia esiintyisi termeissä t tai s, ne olisivat tällöin välttämättä vapaita esiintymiä, jolloin kaava A ei olisi enää suljettu.

Jos suljettu kaava A on muotoa (3), nähdään induktiolla helposti, että kaavojen B ja C on välttämättä oltava myös suljettuja. On myös selvää, että kohdassa (4) oleva kaava $S^x_{v_n}(B)$ on suljettu, jos kaava A on suljettu [**13**, **Lemma 3.24**].

Intuitiivisella tasolla totuusarvon määritelmä on lähes vastaava kuin predikaattikielissä. Toki olennainen ero tulee atomikaavan totuusarvon määritelmässä kohdassa (1). Jos kaavassa olevien termien arvot ovat yhtäsuuret, on myös kaavan oltava tosi. Vastaavasti, jos arvot poikkeavat toisistaan, kaavan on oltava epätosi.

Implikaation totuusarvo (3) tulee suoraan jo propositiokielessä määritellystä implikaation totuustaulusta. Kun kaavan etujäsen on tosi ja takajäsen epätosi, on koko kaava tällöin epätosi, muuten se saa totuusarvokseen luvun 1. Kvantifioinnin totuusarvo (4) on tuttu jo predikaattikielistä. Kaava on tosi vain silloin, kun kaikilla mahdollisilla muuttujan x arvoilla kaava on tosi.

Myös RA-kielessä pätee eheyslause. Olisihan myös tässä järjestelmässä mieletöntä, jos pätevillä päättelyillä saadut kaavat eivät olisi tosia.

LAUSE 1.26 (**RA-kielen eheyslause**). *Jos kaava A on RA-kielinen teoreema, niin A on myös validi.*

TODISTUKSESTA. Myös RA-kielessä aksioomat ovat valideja kaavoja [**12**, **s. 73–80**], [**15**, **s. 59–71**]. Päinvastainen tulos olisi jo lähtökohtaisesti järjetön, jos päättelyjen pohjaksi oletettaisiin totuusarvoltaan 0 olevia kaavoja. Lisäksi päättelysäännöt tuottavat järkeviä kaavoja, toisin sanottuna modus ponensin ja kvantifioinnin avulla saadaan valideista kaavoista valideja kaavoja [**12**, **Lause 2.64 ja 2.65**], [**15**, **s. 71–73**]. Näiden tulosten avulla eheyslause saadaan helposti osoittamalla, että kaikille teoreemoille A pätee $T(A) = 1$ [**12**, **Lause 2.66**]. □

RA-kielessä kuten muissakin logiikan kielissä ristiriidattomuus määritellään siten, ettei kaavalle f löydy päättelyjonoa. Toisin sanottuna kieli on ristiriidaton, jos kaava f ei ole teoreema.

LAUSE 1.27. *RA-kieli on ristiriidaton*

TODISTUS. Väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että f ei ole teoreema RA-kielessä. Tehdään antiteesi: Kaava f on teoreema. Tällöin eheyslauseen 1.26 nojalla f on validi eli $T(f) = 1$. Tämä ei kuitenkaan totuusarvon määritelmän 1.25 nojalla pidä paikkaansa, sillä $T(f) = 0$. Saatiin ristiriita antiteesin kanssa, jolloin väite on todistettu. □

Vaatimus RA-kielen sekä muiden klassisen logiikan kielien ristiriidattomuudesta on ehdottoman tärkeä. Jos pätisi $\vdash f$, jokainen RA-kielen kaava olisi teoreema, kuten helposti nähdään [**13**, **Lause 2.10**]. Koska kaava f imitoi epätotta, eli totuusarvoltaan 0 olevaa kaavaa, ja toisaalta eheyslauseen nojalla teoreemoille A pätee $T(A) = 1$, ei olisi väliä minkälaisen semanttisen totuuden mielivaltainen kaava tässä järjestelmässä saisi. Jokainen kaava, maailman tilanne tai ilmiö olisi hyväksyttävästi pääteltävissä tällaisessa järjestelmässä. Kuitenkaan sen totuudesta ei voisi järkevästi sanoa juuri mitään, sillä tässä järjestelmässä totuuden käsitteelle ei olisi mielekästä tulkintaa.

Ristiriidattomuus voidaan esittää myös seuraavasti: millekään kaavalle A ei päde yhtä aikaa $\vdash A$ ja $\vdash \neg A$. Jos tällaista vaatimusta ei hyväksyttäisi, pätisi siis jollekin kaavalle A yhtä aikaa $\vdash A$ ja $\vdash \neg A$. Toisin sanottuna, jos jokin tietty kaava, lause tai maailman tilanne voitaisiin todistaa, voitaisiin päätellä myös sen vastakohta. Voitaisiin päätellä jonkin funktion jatkuvuus ja epäjatkuvuus yhtä aikaa tai ulos katselemalla nähdä auringon paistavan ja auringon olevan paistamatta samanaikaisesti. Selvästi totuuden käsite olisi erittäin häilyväinen tällaisessa järjestelmässä, jolloin mikä tahansa maailmanjärjestys olisi pääteltävissä.

Kuten johdannossa jo todettiin, propositio- ja predikaattikielien voidaan osoittaa olevan täydellisiä kieliä. Gödelin ensimmäinen epätäydellisyyslause tulee puolestaan osoittamaan seuraavassa luvussa 2, ettei RA-kieltä pystytä todistamaan täydelliseksi. Sen sijaan RA-kielessä pätee niin kutsuttu heikko täydellisyyslause. Lähes paradoksaalisesti tätä lausetta tullaan tarvitsemaan Gödelin toisen epätäydellisyyslauseen todistuksessa.

Lause 1.28 (**RA-kielen heikko täydellisyyslause**). *Jos RA-kielen muuttujaton kaava A on validi, niin A on myös teoreema.*

Todistuksesta. Tämän lauseen todistus on suhteellisen monimutkainen ja vaatii useita aputuloksia avuksi ennen varsinaisen väitteen todistamista. Tulos pohjautuu huomaavilta osin propositiokieleen, jossa ei muuttujia esiinny, sekä sen ja RA-kielen välille muodostettavaan bijektiiviseen kuvaukseen [**12**, **s. 82–90**], [**15**, **s. 73–84**]. □

LUKU 2

Gödelin tulokset

2.1. Gödel-numerointi

Gödel-numerointi lähtee ajatuksesta, että jokainen RA-kielinen aakkonen laitetaan vastaamaan yksikäsitteisesti jotain luonnollista lukua. Tämä numerointi voidaan tehdä esimerkiksi taulukon 2.1 mukaisesti.

TAULUKKO 2.1. Gödel-numerointi

a	$\hat{a}$	a	$\hat{a}$	a	$\hat{a}$	a	$\hat{a}$
Z	1	C	5	$\mid$	9	[	13
S	2	v_0	6	$\rightarrow$	10	]	14
Π	3	x	7	f	11	(	15
R	4	$\cong$	8	$\forall$	12	)	16

Taulukossa 2.1 jokaista aakkosta a vastaa yksikäsitteinen luonnollinen luku $\hat{a}$. Se, mitä lukua $\hat{a} \in \mathbb{N}$ täsmälleen tai missä järjestyksessä vastaa, ei ole oleellista. Ainoa vaatimus numeroinnille on, että $\hat{a} \neq 0$ kaikille a sekä pätee, jos $a \neq b$, niin $\hat{a} \neq \hat{b}$. Toisin sanottuna kuvauksen $a \mapsto \hat{a}$ on oltava injektio.

Määritellään seuraavassa taulukon 2.1 mukaisesti määräytyvä Gödel-luvun käsite.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon sana $A = a_1a_2...a_n$, missä $a_1, a_2, ..., a_n$ ovat aakkosia sekä $n \geq 1$. Määritellään luku

$$G(A) = \langle \hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\hat{a}_i},$$

missä luvut $\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n$ vastaavat taulukon 2.1 aakkosia $a_1, a_2..., a_n$ sekä luvut $p_1, p_2, ..., p_n$ ovat n ensimmäistä alkulukua. Sanotaan, että $G(A) \in \mathbb{N}$ on sanan A Gödel-luku.

HUOMAUTUS 2.2. Olkoon sanat $A = a_1a_2...a_n$ ja $B = b_1b_2...b_m$, missä $a_1, a_2, ..., a_n$ ja $b_1, b_2, ..., b_m$ ovat aakkosia sekä $n, m \geq 1$. Tällöin sanan $AB = a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m$ Gödel-luku on

$$G(AB) = \langle \hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n, \hat{b}_1, \hat{b}_2, ..., \hat{b}_m \rangle = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\hat{a}_i} \cdot \prod_{j=1}^{m} p_{n+j}^{\hat{b}_j}.$$

Tarkastellaan seuraavan esimerkin avulla, miten RA-kielisen sanan Gödel-luku konkreettisesti määräytyy.

Esimerkki 2.3. Olkoot kaavat $A = \forall x_2 = \forall(x||)$ ja $B = Z(x_2) = Z((x||))$
Tällöin

$$\begin{aligned} G(A) &= \langle \hat{\forall}, \hat{(}, \hat{x}, \hat{|}, \hat{|}, \hat{)} \rangle = \langle 12, 15, 7, 9, 9, 16 \rangle \\ &= \prod_{i=1}^{6} p_i^{\hat{a}_i} = 2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^9 \cdot 11^9 \cdot 13^{16} = ... \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned} G(B) &= \langle \hat{Z}, \hat{(}, \hat{(}, \hat{x}, \hat{|}, \hat{|}, \hat{)}, \hat{)} \rangle = \langle 1, 15, 15, 7, 9, 9, 16, 16 \rangle \\ &= \prod_{i=1}^{8} p_i^{\hat{a}_i} = 2^1 \cdot 3^{15} \cdot 5^{15} \cdot 7^7 \cdot 11^9 \cdot 13^9 \cdot 17^{16} \cdot 19^{16} = ... \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Lisäksi koska $AB = \forall(x||)Z((x||))$, saadaan

$$\begin{aligned} G(AB) &= \langle \underbrace{\hat{\forall}, \hat{(}, \hat{x}, \hat{|}, \hat{|}, \hat{)}}_{\text{kaava } A,\ n=6}, \underbrace{\hat{Z}, \hat{(}, \hat{(}, \hat{x}, \hat{|}, \hat{|}, \hat{)}, \hat{)}}_{\text{kaava } B,\ m=8} \rangle \\ &= \langle \underbrace{12, 15, 7, 9, 9, 16}_{\text{kaava } A,\ n=6}, \underbrace{1, 15, 15, 7, 9, 9, 16, 16}_{\text{kaava } B,\ m=8} \rangle \\ &= \prod_{i=1}^{6} p_i^{\hat{a}_i} \cdot \prod_{j=1}^{8} p_{6+j}^{\hat{b}_j} = G(A) \cdot 17^1 \cdot 19^{15} \cdot 23^{15} \cdot 29^7 \cdot 31^9 \cdot 37^9 \cdot 41^{16} \cdot 43^{16} = ... \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Esimerkissä 2.3 saadaan sanoille A, B sekä AB laskettua yksikäsitteiset luvut $G(A)$, $G(B)$, $G(AB) \in \mathbb{N}$, koska määritelmässä 2.1 esiintyvä tuloesitys antaa alkeislukuteorian perusteella yksikäsitteisen luvun $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$,

$$x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\hat{a}_i} = p_1^{\hat{a}_1} \cdot p_2^{\hat{a}_2} \cdot ... \cdot p_n^{\hat{a}_n}$$

kaikille $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ sekä $a_n \geq 1$ kaikille a_i, missä $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Tuloesitystä kutsutaan luvun x alkulukuesitykseksi.

Huomautuksessa 2.2 saadaan yhtä lailla yksikäsitteinen esitys

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} p_i^{\hat{a}_i} \cdot \prod_{j=1}^{m} p_{n+j}^{\hat{b}_j} &= p_1^{\hat{a}_1} \cdot p_2^{\hat{a}_2} \cdot ... \cdot p_n^{\hat{a}_n} \cdot p_{n+1}^{\hat{b}_1} \cdot p_{n+2}^{\hat{b}_2} \cdot ... \cdot p_{n+m}^{\hat{b}_m} \\ &= p_1^{\hat{a}_1} \cdot p_2^{\hat{a}_2} \cdot ... \cdot p_n^{\hat{a}_n} \cdot p_{n+1}^{\hat{a}_{n+1}} \cdot p_{n+2}^{\hat{a}_{n+2}} \cdot ... \cdot p_{n+m}^{\hat{a}_{n+m}} \\ &= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\hat{a}_i} = y \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

missä valitaan $\hat{b}_j = \hat{a}_{n+j}$ kaikille $j \in \{1, 2, ..., m\}$ sekä $k = n + m$ kaikille $n, m \in \mathbb{N}$ ja $a_k \geq 1$ kaikille $a_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, ..., n, n+1, ..., n+(m-1), n+m = k\}$.

Määritelmän 2.1 avulla voidaan siis jokaiselle RA-kielen sanalle laskea yksikäsitteinen luonnollinen luku, joka vastaa täsmälleen vain tätä yhtä RA-kielen sanaa. Toisin sanottuna, jos on olemassa Gödel-luvut $G(A)$ ja $G(B)$ siten, että $G(A) = G(B)$, on välttämättä oltava $A = B$. Taulukon 2.1 numeroinnin vaatimus $\hat{a} \neq 0$ kaikille a on myös ehdottoman tärkeä, sillä yksikäsitteisyys ei päde ilman tätä oletusta. Jos esimerkiksi aakkonen Z vastaisi lukua $\hat{a} = 0$, saataisiin esimerkiksi sanoille $A = CSZ$ ja $B = CS$ Gödel-luvut

$$G(A) = \langle \hat{C}, \hat{S}, \hat{Z} \rangle = \langle 5, 2, 0 \rangle = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 288$$

ja

$$G(B) = \langle \hat{C}, \hat{S} \rangle = \langle 5, 2 \rangle = 2^5 \cdot 3^2 = 288 = G(A).$$

Tällöin ei enää pystyisi täsmälleen päättelemään tietystä Gödel-luvusta, mitä sanaa se vastaa.

Sanajonoille voidaan yhtä lailla määritellä yksikäsitteinen Gödel-lukuesitys. Se määritellään seuraavasti.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon $A_1, A_2, ..., A_n$ jono sanoja. Määritellään luku

$$\Gamma(A_1, A_2, ..., A_n) = \langle G(A_1), G(A_2), ..., G(A_n) \rangle = \prod_{i=1}^{n} p_i^{G(A_i)}$$

sekä sanotaan, että $\Gamma(A_1, A_2, ..., A_n)$ sanajonon $A_1, A_2, ..., A_n$ Gödel-luku.

ESIMERKKI 2.5. Olkoot sanat A_1 ja A_2 vastaavat kuin esimerkissä 2.3, $A_1 = A = \forall x_2 = \forall(x||)$ ja $A_2 = B = Z(x_2) = Z((x||))$. Tällöin

$$\begin{aligned}\Gamma(A_1, A_2) &= \langle G(A_1), G(A_2) \rangle \\ &= \prod_{i=1}^{2} p_i^{G(A_i)} = 2^{2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^9 \cdot 11^9 \cdot 13^{16}} \cdot 3^{2^1 \cdot 3^{15} \cdot 5^{15} \cdot 7^7 \cdot 11^9 \cdot 13^9 \cdot 17^{16} \cdot 19^{16}} = ... \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Määritelmän 2.4 tuloesitys antaa edelleen yksikäsitteisen Gödel-luvun $x \in \mathbb{N}$, sillä kaikille sanoille A pätee aina $G(A) \geq 2$, erityisesti siis viimeiselle sanalle A_n pätee $G(A_n) \geq 1$. Pienin Gödel-luku saadaan sanalle $A = Z$, sillä

$$G(A) = \langle \hat{Z} \rangle = \langle 1 \rangle = 2^1 = 2.$$

HUOMAUTUS 2.6. Koska termi- ja kaavarakennejonot sekä päättelyjonot muodostuvat jonoista sanoja, määräytyvät myös näiden sanajonojen Gödel-luvut täsmälleen määritelmän 2.4 mukaisesti.

Määritelmän 2.4 sekä huomautuksen 2.6 nojalla myös mikä tahansa RA-kielinen päättelyjono voidaan koodata vastaamaan jotain yksikäsitteistä Gödel-lukua. Jos on siis annettu jokin luonnollinen luku, voidaan tämän luvun alkulukuesityksestä lukea tarkalleen mitä sanoja tai sanajonoja päättely sisältää. Käytännössä päättelyjonon etsiminen on erittäin vaivalloista, sillä tarkastelemalla esimerkkien 2.3 ja 2.5 Gödel-lukuja, voi niiden huomata paisuvan kohtuuttoman suuriksi jo lyhyilläkin sanoilla tai sanajonoilla. Kuitenkin esimerkiksi tehokkaiden tietokoneiden algoritmien avuilla voidaan pyrkiä ratkaisemaan, mitä päättelyitä tietyt Gödel-luvut vastaavat. Mielivaltainen luonnollinen luku ei kuitenkaan välttämättä vastaa mitään RA-kielistä sanaa.

Esimerkki 2.7. Luvun $x = 720$ alkulukuesitys on $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = \langle 4, 2, 1\rangle$, joten luku x vastaa taulukon 2.1 mukaista RA-kielistä sanaa $A = RSZ$.

Luvun $y = 2099520$ alkulukuesitys on $2099520 = 2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^1 = \langle 6, 8, 1\rangle$, joten luku y vastaa sanaa $B = v_0 \cong Z$.

Luvun $z = 189$ alkulukuesitys on $189 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = \langle 0, 3, 0, 1\rangle$. Luku z ei kuitenkaan vastaa mitään RA-kielistä sanaa, sillä taulukon 2.1 mukaisesti luku 0 ei vastaa mitään RA-kielistä aakkosta.

Alkulukuesityksessä voi lukujen potensseissa esiintyä nollia, joita ei taulukon 2.1 Gödel-numerointiin hyväksytty mukaan. Tällaiset esitykset eivät siis vastaa mitään RA-kielistä sanaa. Tällöin on helppo huomata, ettei Gödel-luvun määrääminen ole bijektiivinen kuvaus luonnollisten lukujen joukkoon. Injektiivisyys toki pätee, kuten edellä jo huomattiin (jos $G(A) = G(B)$, niin $A = B$), mutta surjektiivisuusehto kaatuu jo tiedosta $G(A) \geq 2$ kaikille sanoille A. Myöskään mikään alkuluku $p \geq 17$ tai esimerkin 2.7 kaltaisesti määräytyvät luvut $z = 189$ eivät voi olla minkään sanojen Gödel-lukuja. Gödel-luvut ovat siis selvästi luonnollisten lukujen aito osajoukko.

Huomautus 2.8. Jos RA-kielisen sanajonon pituus $n = 1$, määritelmän 2.4 nojalla sanajonon $A_n = A_1 = A$ Gödel-luku on $\Gamma(A) = \langle G(A)\rangle = 2^{G(A)}$. Toisaalta, jos tämä sanajono käsitetään vain yhtenä RA-kielisenä sanana, saadaan määritelmän 2.1 nojalla $G(A) \neq 2^{G(A)}$. Esimerkiksi jos $A = Z$, niin $G(A) = \langle \hat{Z}\rangle = 2^1 = 2 \neq 2^2 = 2^{G(A)} = \langle G(A)\rangle = \Gamma(A)$. Tämä voitaisiin esimerkiksi korjata vaatimalla sanajonojen pituuksien olevan $n \geq 2$.

2.2. Päättelyn primitiivirekursiivisuus

Jokaiselle päättelyjonolle voidaan siis laskea yksikäsitteinen Gödel-luku. Määritellään seuraavaksi joukko

(7) $\quad DSEQ = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ on päättelyjonon } A_1, ..., A_n \text{ Gödel-luku } \Gamma(A_1, ..., A_n)\}.$

Joukko $DSEQ$ (*deduction sequence*) edustaa kaikkien päättelyjonojen Gödel-lukuja $x \in \mathbb{N}$. Tämä joukko voidaan todistaa primitiivirekursiiviseksi erittäin vaivalloisesti [**12**, **Lause 3.65**]. Sen osoittamiseksi tarvitaan useita apulauseita ja -tuloksia, ja pitää ensin nähdä, että esimerkiksi aksioomista muodostuva joukko on primitiivirekursiivinen [**12**, **s. 118–126**], [**15**, **s. 171–215**], mielivaltaisten kaavojen A sekä niiden rakennejonojen muodostavat joukot ovat primitiivirekursiivisia [**12**, **Lause 3.24 ja Lause 3.29**], [**15**, **s. 131–144, 146–148**] sekä mielivaltaisten termien t että niiden rakennejonojen muodostamat joukot ovat primitiivirekursiivisia [**12**, **Lause 3.18 ja Lause 3.22**], [**15**, **s. 116–127, 129–131**]. Täytyy myös tietää, että sijoitus on primitiivirekursiivinen toimenpide [**12**, **Lause 3.46**] sekä mielivaltaiset muuttujat x, funktiosymbolit F sekä niiden rakennejonot ovat primitiivirekursiivisia joukkoja [**12**, **Lause 3.7, Lause 3.10 ja Lause 3.16**], [**15**, **s. 87–88, 90–109, 114–116**].

Määritellään seuraavaksi joukko

$$\begin{aligned}(8)\qquad DEDU = \{(y,a) \in \mathbb{N}^2 \mid\ & \text{on olemassa kaava } A \text{ sekä sen päättelyjono} \\ & A_1, A_2, ..., A_n \text{ siten, että } a \text{ on kaavan } A \\ & \text{Gödel-luku } G(A) \text{ sekä } y \text{ on} \\ & \text{päättelyjonon } A_1, ..., A_n \text{ Gödel-luku } \Gamma(A_1, ..., A_n)\}.\end{aligned}$$

Myös joukko $DEDU$ (*deduction*) voidaan todistaa primitiivirekursiiviseksi.

LAUSE 2.9. *Joukko DEDU on primitiivirekursiivinen.*

TODISTUS. Määritellään kuvaus $L(x)$ intuitiivisesti siten, että sen avulla saadaan laskettua luvun $x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_k^{a_k} \in \mathbb{N}$ alkulukuesityksessä tarvittavien alkulukujen määrä $k \in \mathbb{N}$ [**12**, **Määritelmä 1.32**]. Koska

$$(9)\qquad y = \Gamma(A_1, A_2, ..., A_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{G(A_i)},$$

on selvästi oltava $L(y) = n \in \mathbb{N}$.

Tämän lisäksi määritellään kuvaus $(x)_i$, joka kertoo karkeasti sanoen luvun x alkulukuesityksessä olevan alkuluvun p_i potenssin $a_i \in \mathbb{N}$ kaikille $i \in \{1, 2, ..., k\}$ [**12**, **Määritelmä 1.32**]. Tällöin pätee

$$(10)\qquad (y)_{L(y)} = (\Gamma(A_1, A_2, ..., A_n))_n = G(A_n),$$

koska järjestyksessä n olevalle alkuluvulle p_n pätee $p_n^{G(A_n)}$. Koska tämän lisäksi joukon $DEDU$ määritelmässä (8) kaavalle A on olemassa päättelyjono $A_1, A_2, ..., A_n$ siten,

että $G(A) = a$, saadaan yhtälö (10) muotoon

$$(y)_{L(y)} = G(A_n) = G(A). \tag{11}$$

Joukon $DSEQ$ määritelmän (7) sekä yhtälön (11) nojalla joukon $DEDU$ määritelmä (8) voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa

$$DEDU = \{(y, a) \in \mathbb{N}^2 \mid y \in DSEQ \text{ ja } (y)_{L(y)} = a\} \tag{12}$$

ja edelleen yhtäpitävästi

$$DEDU = \{(y, a) \in \mathbb{N}^2 \mid y \in DSEQ\} \cap \{(y, a) \in \mathbb{N}^2 \mid (y)_{L(y)} = a\}. \tag{13}$$

Koska joukko $DSEQ$ on primitiivirekursiivinen, kuvaukset $L(x)$ ja $(x)_i$ ovat primitiivirekursiivisia [**12**, **Lause 1.35 ja Lause 1.34**], [**15**, **s. 16–23**] sekä primitiivirekursiivisten joukkojen leikkaus on primitiivirekursiivinen [**12**, **Lause 1.15** b)], [**15**, **s. 8**], on myös joukko $DEDU$ primitiivirekursiivinen. □

Määritellään sitten joukko, joka koostuu kaikkien teoreemojen Gödel-luvuista:

$$THEO = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ on jonkin teoreeman } A \text{ Gödel-luku } G(A)\}. \tag{14}$$

Oletetaan aluksi, että joukko $THEO$ (*theorem*) olisi primitiivirekursiivinen. Tällöin sen karakteristinen funktio

$$\chi_{THEO}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in THEO, \\ 0, & \text{kun } x \notin THEO, \end{cases} \tag{15}$$

olisi myös primitiivirekursiivinen.

Yhtälön (15) nojalla olisi olemassa standardikeino, jolla voitaisiin mekaanisesti laskea, esimerkiksi tietokoneen avulla, vastaisiko jokin mielivaltaisesti valittu $x \in \mathbb{N}$ tiettyä teoreemaa A. Jos annetulle luvulle $x = G(A)$ saataisiin $\chi_{THEO}(G(A)) = 1$, pätisi $G(A) \in THEO$ eli kaava A olisi teoreema ja päinvastoin. Joukon primitiivirekursiivisuus takaisi sen, että äärellisenä laskutoimituksena tämä voitaisiin hoitaa järkevässä ajassa [**28**, **s. 43**]. Teoreettisesti olisi siis olemassa keino, jolla voitaisiin etsiä jokainen RA-kielinen teoreema. Käytännön tasolla Gödel-luvun $G(A)$ etsiminen ja yhtälöön (15) sijoittaminen voisi olla erittäin massiivinen ja hidas laskutoimitus, mutta periaatteellisella tasolla erittäin tehokkaat tietokoneet voitaisiin ohjelmoida selvittämään, onko jokin mielivaltaisesti valittu kaava A teoreema.

Joukko $THEO$ *ei ole* kuitenkaan primitiivirekursiivinen, joten edellä kuvailtua mekanismia ei voida hyödyntää kaavaa A tutkittaessa. Tämän kertoo niin kutsuttu Churchin lause. Tulos on monimutkainen todistaa, mutta esimerkiksi Robbinin sekä

Mendelsonin teoksista löytyy tiivistetyt esitykset lauseen todistukselle [**25**, **s. 126–127**], [**21**, **s. 170**]. Kattavampi katsaus Churchin lauseeseen on luettavissa Viitasalon pro gradu -tutkielmasta [**27**].

Pohjimmiltaan Churchin lauseen todistus perustuu siihen, ettei joukolle $THEO$ löydetä ylärajaa rajoitetun minimalisaation määritelmän 1.8 mielessä. Esimerkiksi funktiosymboleiden, termien ja kaavojen primitiivirekursiiviseksi todistamisessa onnistutaan tällainen Gödel-lukujen avulla ilmaistava yläraja löytämään niiden rakennejonoihin perustuen, jolloin rajoitettua minimalisaatiota voidaan hyödyntää [**12**, **Lemma 3.15, Lemma 3.21 ja Lemma 3.28**], [**15**, **s. 112–113, 128–129, 145–146**].

Tämä taas johtuu funktiosymboleiden, termien sekä kaavojen rakennejonojen määritelmistä sekä näille määritellyistä käsitteistä "funktiosymboli esiintyy funktiosymbolissa", "termi esiintyy termissä" sekä kaavoille määritellyistä alikaavoista [**12**, **s. 33–34, 96, 101–102**]. Niiden struktuuri ja pituus pysyy järkevästi hallinnassa. Lisäksi jokaisen funktiosymbolin, termin tai kaavan esityksestä voidaan päätellä suoraan niiden muodostamiseen tarvittavien rakennejonojen pituudet, jotka ovat äärellisiä.

Päättelyjonoille vastaavanlaisia rakenteita tai käsitteitä ei voida määritellä. Modus ponens voi lyhentää päättelyitä hyvinkin paljon ja epämääräisesti, jolloin päättelyjonoissa esiintyvät kaavat voivat olla paljon pitempiä kuin esitetty teoreema. Päättelyn pituutta ei voida arvioida annetusta teoreemasta, koska teoreemaan voidaan päätyä hyvinkin erilaisten päättelyjonojen kautta [**12**, **s. 136–137**].

Joukkojen $DEDU$ ja $THEO$ olennainen ero tulee ilmi juuri päättelyjonon kohdalla. Joukon $DEDU$ alkioille on valmiiksi annettu tieto siitä, mikä on kaavan A päättelyjono sekä sen Gödel-luku. Vastaavasti joukon $THEO$ alkioista tiedetään ainoastaan, minkä teoreeman A Gödel-lukuja ne vastaavat. Joukon $THEO$ alkiolle voitaisiin myös yrittää etsiä tällaista sopivaa päättelyn Gödel-lukua yksinkertaisesti lukuja $y \in \mathbb{N}$ järjestyksessä kokeilemalla. Tällaisiin tarkasteluihin voitaisiin jälleen jumiutua etenkin, jos kaava A ei ole teoreema. Tilanne on vastaavanlainen kuin luvun 1.1 lopussa esitetyssä rajoittamattoman joukon minimin etsimisessä tyhjälle minimijoukolle.

Esitetään vielä yksi mielenkiintoinen Gödel-lukujen avulla määritelty joukko. Olkoon joukko

$$VALI = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ on jonkin validin kaavan } A \text{ Gödel-luku } G(A)\}. \tag{16}$$

Jos joukko $VALI$ (*valid*) olisi primitiivirekursiivinen, Churchin lauseen nojalla teoreemoista koostuvien kaavojen A Gödel-lukujen $G(A)$ ei-primitiivirekursiivinen

joukko ei voisi vastata validien kaavojen B Gödel-luvuista $G(B)$ koostuvaa primitiivirekursiivista joukkoa, toisin sanottuna $VALI \neq THEO$. Tällöin epätäydellisyyslause saataisiin saman tien todistettua, sillä jollain $x \in \mathbb{N}$ pätisi $x = G(A) \in VALI$, joten A olisi validi kaava mutta $x = G(A) \notin THEO$, eli kaava A ei olisi teoreema. Tarskin lauseen nojalla $VALI$ ei ole kuitenkaan primitiivirekursiivinen [**28**, **s. 68**], [**25**, **s. 119–121**]. Joudutaan siis tukeutumaan Gödelin mestarillisiin tuloksiin.

2.3. Ensimmäinen epätäydellisyyslause

Ennen kuin hyökätään ensimmäisen epätäydellisyyslauseen kimppuun, esitetään vielä yksi tärkeä aputulos.

LEMMA 2.10. *Olkoon funktio* $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$,

$$h(\zeta, n, a) = \begin{cases} G(S^x_{v_n}(A)), & \textit{jos on olemassa kaava } A \textit{ ja muuttuja } x \\ & \textit{siten, että } G(A) = a \textit{ ja } G(x) = \zeta \\ a & \textit{muuten.} \end{cases}$$

Tällöin h *on primitiivirekursiivinen.*

TODISTUKSESTA. Lemman todistus pohjautuu pitkälti muuttujien x Gödel-lukujen $G(x)$ joukon sekä kaavojen A Gödel-lukujen $G(A)$ joukon primitiivirekursiivisuuteen. Lisäksi olennaisessa roolissa on sijoituksen primitiivirekursiivisuus [**12**, **Lemma 4.1**]. □

Intuitiivisesti funktio h sanoo, että jos mielivaltaisen kaavan A Gödel-luku $G(A) = a$ sekä mielivaltaisen muuttujan x Gödel-luku $G(x) = \zeta$, tehdään sijoitus $S^x_{v_n}(A)$ eli vaihdetaan kaavan A vapaat muuttujat x joksikin vakioksi v_n, $n \in \mathbb{N}$. Lopuksi lasketaan tämän sijoituksen tuottaman kaavan Gödel-luku $G(S^x_{v_n}(A))$. Jos tällaisia lukuja a tai ζ ei ole olemassa asetetaan suoraan funktion h arvoksi a. Näin konstruoitu funktio h on primitiivirekursiivinen.

Pureudutaan sitten Gödelin ensimmäiseen epätäydellisyyslauseeseen. Ensimmäinen epätäydellisyyslause sanoo karkeasti seuraavaa: RA-kielessä on olemassa validi kaava A, joka ei ole kuitenkaan teoreema. Koska RA-kieli pyrkii imitoimaan luonnollisten lukujen maailmaa sen laskutoimituksia ja lauseita, voidaan validiusvaatimuksen katsoa tarkoittavan luonnollisten lukujen joukossa tosina pidettyjä asioita. Intuitiivisesti tällaisia ovat esimerkiksi tässä joukossa esiintyvät lauseet, lemmat ja aksioomat. Koska teoreema on kaava, jolla on olemassa päättelyjono, tarkoittaa tämä intuitiivisesti, että aritmetiikassa on olemassa lauseita, jotka ovat todistuvia. Toisin sanottuna

lauseille voidaan esittää jokin loogisesti pätevä todistus jostain alkuoletuksista lähtien.

Luonnollisia lukuja pidetään pohjana kaikille matemaattisille järjestelmille. Niiden avulla voidaan konstruoida esimerkiksi kokonaisluvut, edelleen rationaaliluvut, ja lopulta irrationaalilukujen avulla koko reaaliakseli. Näiden pohjalta onnistuu Hilbertiä mukaillen esimerkiksi euklidisten avaruuksien konstruoiminen. Tämän nojalla Gödelin ensimmäisen epätäydellisyyslauseen voidaan intuitiivisesti ajatella sanovan: Matematiikassa on olemassa tosia lauseita, joita ei voida kuitenkaan ***järjestelmän sisällä*** todistaa tosiksi.

Palataan kuitenkin takaisin luonnollisiin lukuihin ja RA-kieleen. Todistetaan seuraavassa Gödelin ensimmäinen epätäydellisyyslause RA-kielessä.

LAUSE 2.11 (**Gödelin ensimmäinen epätäydellisyyslause**). *RA-kielessä on olemassa validi kaava A, joka ei ole teoreema.*

TODISTUS. Todistuksen tarkoituksena on konstruoida oikea RA-kielinen kaava A, joka on validi mutta ei teoreema. Toisin sanottuna täytyy löytää kaava, jolle pätee $T(A) = 1$, mutta $\nvdash A$ eli kaavalle ei ole olemassa päättelyjonoa $A_1, A_2, ..., A_l$.

Lähdetään tutkimaan asiaa joukon $DEDU$ määritelmän avulla. Olkoon ensin piste $(n, a) \in DEDU$ jollekin $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa kaava A ja jokin sen päättelyjono siten, että $G(A) = a$ sekä luku n on kaavan A jonkin päättelyjonon Gödel-luku. Tällöin A on teoreema. Edellä esitetty päättely voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$(n, a) \in DEDU \text{ jollekin } n \in \mathbb{N} \Rightarrow A \text{ on teoreema.} \tag{17}$$

Oletetaan seuraavaksi ensin, että A on teoreema eli kaavalle A löytyy jokin päättelyjono. Lisäksi jos $G(A) = a$, niin joukon $DEDU$ määritelmän nojalla $(n, a) \in DEDU$ jollekin $n \in \mathbb{N}$. Tämä päättely voidaan esittää tiivistetysti muodossa

$$A \text{ on teoreema } \Rightarrow (n, a) \in DEDU \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Yhdistämällä ehdot (17) ja (18) saadaan

$$A \text{ on teoreema } \Leftrightarrow (n, a) \in DEDU \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Olkoon sitten χ_{DEDU} joukon $DEDU$ karakteristinen funktio. Tällöin karakteristisen funktion määritelmän nojalla ehto (19) voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi muotoon

$$A \text{ on teoreema } \Leftrightarrow \chi_{DEDU}(n, a) = 1 \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Koska joukko $DEDU$ on primitiivirekursiivinen, myös funktio $\chi_{DEDU} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on primitiivirekursiivinen. Tällöin lauseen 1.22 nojalla on olemassa jokin kaksipaikkainen

funktiosymboli K, $m(K) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ siten, että

$$m(K) = \chi_{DEDU}. \tag{21}$$

Funktiosymboli K on siis primitiivirekursiivisen funktion χ_{DEDU} imitaatti RA-kielen syntaksissa, muuta vaatimusta tälle symbolille ei tarvita. Esimerkiksi ei vaadita tietoa siitä, mikä RA-kielinen funktiosymboli K täsmälleen ottaen on. Funktiosymbolin K valinnalle riittää, että tällainen kaksipaikkainen funktiosymboli ylipäätänsä on olemassa, minkä lause 1.22 täsmälleen sanoo.

Koska funktiosymboli K edustaa RA-kielistä mallia funktiolle, jolla voidaan tutkia mielivaltaisen kaavan sekä sen päättelyjonon kuulumista joukkoon $DEDU$, voidaan funktiosymbolin K ajatella olevan mielivaltaisen kaavan sekä sen päättelyjonon imitaatti RA-kielessä. Tällöin yhtälön (21) nojalla voidaan ehto (20) esittää muodossa

$$A \text{ on teoreema } \Leftrightarrow m(K)(n, a) = 1 \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Oletetaan seuraavaksi, että on olemassa jokin muuttujaton termi t siten, että $a(t) = a = G(A)$. Lisäksi lemman 1.23 nojalla pätee $a(v_n) = n$ sekä $a(v_1) = 1$. Näin myös luonnolliset luvut a, n ja 1 saadaan esitettyä RA-kielisessä maailmassa, jolloin (22) yhtälö voidaan esittää muodossa

$$A \text{ on teoreema } \Leftrightarrow m(K)(a(v_n), a(t)) = 1 \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

Nyt ehto (23) saadaan määritelmän 1.25 avulla lopulta muotoon

$$A \text{ on teoreema } \Leftrightarrow a(K(v_n, t)) = a(v_1) \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Koska termi t valittiin siten, että se on muuttujaton, on myös termit $K(v_n, t)$ sekä v_1 muuttujattomia. Tällöin suljetun kaavan totuusarvon määritelmän 1.25 nojalla ehdosta (24) saadaan ehto

$$A \text{ on teoreema } \Leftrightarrow T(K(v_n, t) \cong v_1) = 1 \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Valitsemalla mielivaltainen muuttujasymboli x voidaan ehto (25) esittää yhtäpitävästi symbolin $\exists$ avulla muodossa

$$A \text{ on teoreema } \Leftrightarrow T(\exists x[K(x, t) \cong v_1]) = 1. \tag{26}$$

Muistamalla, että funktiosymboli K on mielivaltaisen kaavan sekä sen päättelyjonon imitaatti, sekä joukon $DEDU$ määritelmän nojalla muuttujasymboli x mielivaltaisen kaavan päättelyjonon Gödel-luvun imitaatti jollain $n \in \mathbb{N}$ sekä termi t tämän

kaavan Gödel-luvun imitaatti a, voidaan kaavan $\exists x[K(x,t) \cong v_1]$ ajatella edustavan teesiä

(27) "On olemassa sellainen päättelyjono, jolla on Gödel-luku n,
joka todistaa kaavan, jolla on Gödel-luku a" [**18**, **§4.2.3**].

Toisaalta, ottamalla negaatio ehdon (26) oikeanpuolisesta totuusarvosta voidaan kirjoittaa ehto

(28) $$A \text{ on teoreema } \Leftrightarrow T(\neg\exists x[K(x,t) \cong v_1]) = 0.$$

Ehdon (28) kanssa on yhtäpitävä ehto

(29) $$A \text{ ei ole teoreema } \Leftrightarrow T(\neg\exists x[K(x,t) \cong v_1]) = 1.$$

Nyt vihdoin voidaan valita tarkasteltavaksi kaavaksi A juuri se kaava, jonka totuusarvoa edellä on tutkittu eli

(30) $$A = \neg\exists x[K(x,t) \cong v_1],$$

missä x on mielivaltainen muuttujasymboli, K kaksipaikkainen funktiosymboli sekä t muuttujaton termi, jolle pätee $a(t) = G(A)$.

Mukaillen teesiä (27) kaavan A voidaan ajatella imitoivan lausetta

(31) "Mikään päättelyjono, jolla on Gödel-luku n,
ei ole todistus kaavalle, jonka Gödel-luku on a."

Teesi (31) käytännössä siis kertoo, ettei kaavalle A voida löytää loogisesti pätevää todistusta RA-kielessä, toisin sanottuna se ei ole teoreema [**18**, **§4.2.3**]. Toisaalta kaava A voidaan osoittaa todeksi eli validiksi, joten kaava A on todellakin ensimmäisen epätäydellisyyslauseen etsitty kulmakivi. Lähdetäänkin seuraavaksi tarkastelemaan lähemmin, kuinka tämä todistus voidaan löytää eksaktisti RA-kielen maailmassa.

Seuraavaksi täytyy löytää termi t, jolle pätee ehto $a(t) = G(A)$. Ennen termin t valintaa, määritellään muutama apukuvaus, -kaava sekä -termi. Valitaan ensin kuvaus $\hat{h} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

(32) $$\hat{h}(j,k) = h(j,k,k) \text{ kaikille } (j,k) \in \mathbb{N}^2.$$

Lemman 2.10 nojalla funktio h on primitiivirekursiivinen, joten myös kuvaus $\hat{h}$ on primitiivirekursiivinen. Tällöin lauseen 1.22 nojalla on olemassa kaksipaikkainen funktiosymboli F, $m(F) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, siten, että

(33) $$m(F) = \hat{h}.$$

Kuten funktiosymbolin K tapauksessa, myös funktiosymbolin F valinta on mielivaltainen, ja riittää tieto siitä, että tällainen kaksipaikkainen funktiosymboli F on olemassa. Oletetaan seuraavaksi, että on olemassa kaava B, jolle pätee $G(B) = k$ sekä jokin toinen muuttujasymboli $y \neq x$ siten, että $G(y) = j$. Tällöin lemman 2.10 funktion h määritelmän sekä yhtälöiden (32) ja (33) nojalla pätee

$$m(F)(G(y), G(B)) = \hat{h}(G(y), G(B)) = h(G(y), G(B), G(B)) = G(S^y_{v_{G(B)}}(B)). \tag{34}$$

Intuitiivisesti mallin (34) voidaan ajatella imitoivan toimenpidettä, missä mielivaltaisen kaavan B vapaat muuttujat y vaihdetaan vakioiksi $v_{G(B)}$, jotka imitoivat taas kaavan B Gödel-lukua $G(B)$. Lopuksi lasketaan tämän sijoituksen synnyttämän kaavan $S^y_{G(B)}(B)$ Gödel-luku.

Vielä ennen termin t määräämistä, valitaan toinen termi $\hat{t}$ siten, että

$$\hat{t} = F(v_{G(y)}, y). \tag{35}$$

Funktiosymbolin F olemassaolon nojalla tällainen termi $\hat{t}$ varmasti löytyy, sekä pätee ainakin $\hat{t} \neq t$, sillä termissä $\hat{t}$ esiintyy muuttujasymboli y. Termi t oli valittu siten, ettei se sisällä muuttujia lainkaan.

On vielä määriteltävä kaava B. Asetetaan se siten, että

$$B = \neg\exists x[K(x, \hat{t}) \cong v_1]. \tag{36}$$

Kaavat A ja B eroavat termien t ja $\hat{t}$ osalta, jolloin varmasti pätee $A \neq B$.

Lopulta viimeinen rakennusosanen epätäydellisyyslauseen todistukseen voidaan esittää. Määritellään termi t nyt siten, että

$$t = F(v_{G(y)}, v_{G(B)}). \tag{37}$$

Termi t on muuttujaton, vaikka siinä esiintyy vakioiden alaindekseissä muuttuja y sekä kaava B, joka sisältää myös muuttujat x ja y. Nämä eivät kuitenkaan todella edusta RA-kielen syntaksissa muuttujia, sillä nämä symbolit on määritelty Gödel-luvuiksi. Gödel-luvun määritelmän 2.1 nojalla $G(y), G(B) \in \mathbb{N}$, joten symbolit $v_{G(y)}$ sekä $v_{G(B)}$ edustavat vakiotermejä, jotka imitoivat muuttujan y sekä kaavan B vastaavia Gödel-lukuja.

Osoitetaan nyt, että termille t pätee kaavan A valinnassa esitetty ehto $a(t) = G(A)$. Termin t määritelmän sekä määritelmän 1.23 nojalla saadaan

$$a(t) = a(F(v_{G(y)}, v_{G(B)})) = m(F)(a(v_{G(y)}), a(v_{G(B)})), \tag{38}$$

josta edelleen lemman 1.24 avulla

$$m(F)(a(v_{G(y)}), a(v_{G(B)})) = m(F)(G(y), G(B)). \tag{39}$$

Koska edelleen pätee yhtälö (34) eli

$$m(F)(G(y), G(B)) = G(S^y_{v_{G(B)}}(B)), \tag{40}$$

huomataan yhtälöiden (38) sekä (40) nojalla, että termin t arvo vastaa täsmälleen kaavasta B sijoituksella $S^y_{v_{G(B)}}(B)$ syntyvän kaavan Gödel-lukua.

Nyt kaavan B määritelmän avulla saadaan

$$G(S^y_{v_{G(B)}}(B)) = G(S^y_{v_{G(B)}}(\neg\exists x[K(x, \hat{t}) \cong v_1])), \tag{41}$$

ja termin $\hat{t}$ määritelmän nojalla

$$G(S^y_{v_{G(B)}}(\neg\exists x[K(x, \hat{t}) \cong v_1])) = G(S^y_{v_{G(B)}}(\neg\exists x[K(x, F(v_{G(y)}, y)) \cong v_1])), \tag{42}$$

jolloin oletuksen $x \neq y$ nojalla voidaan tehdä sijoitus

$$G(S^y_{v_{G(B)}}(\neg\exists x[K(x, F(v_{G(y)}, y)) \cong v_1])) = G(\neg\exists x[K(x, F(v_{G(y)}, v_{G(B)})) \cong v_1]). \tag{43}$$

Tällöin termin t ja kaavan A määritelmien avulla huomataan, että

$$G(\neg\exists x[K(x, F(v_{G(y)}, v_{G(B)})) \cong v_1]) = G(\neg\exists x[K(x, t) \cong v_1]) = G(A). \tag{44}$$

Näin on nähty, että kaavan A Gödel-luku todella on termin t arvo eli pätee

$$a(t) = G(A). \tag{45}$$

Oleellista edellä esitetyssä yhtälöketjussa oli kaavan B ja termin $\hat{t}$ valinta sekä lemman 2.10 funktion h määritelmä. Kaava B oli valittu ovelasti siten, että se eroaa kaavasta A ainoastaan termin $\hat{t}$ osalta, jossa esiintyy muuttuja y. Tämän muuttujan y avulla onnistuu funktion h määrittelemä sijoitus, jossa vakiotermi $v_{G(B)}$ vaihdetaan kaavaan B. Näin syntyy itse asiassa kaava A,

$$S^y_{v_{G(B)}}(B) = A. \tag{46}$$

On siis saatu konstruoitua järkevä RA-kielinen kaava A kaavan B sekä termien t ja $\hat{t}$ avulla. Todistetaan seuraavaksi, että näillä valinnoilla on määritelty kaava A, todella on validi mutta ei teoreema.

Osoitetaan ensin, että A ei ole teoreema. Tehdään tämä antiteesin avulla, jolloin väitetään, että A on teoreema eli

$$\vdash \neg\exists x[K(x, t) \cong v_1]. \tag{47}$$

Teoreema (47) voidaan esittää lyhennysmerkintä $\exists$ auki kirjoittaen muodossa

$$\vdash \neg\neg\forall x\neg[K(x, t) \cong v_1]. \tag{48}$$

Muodostetaan sitten seuraavanlainen teoreemapäättelyjono:

$$\begin{aligned}
&A_1 = \neg\neg\forall x\neg[K(x,t) \cong v_1] && \text{teoreema (48)}\\
&A_2 = A_1 \to \forall x\neg[K(x,t) \cong v_1] && \textbf{(Ax3)}\\
&A_3 = \forall x\neg[K(x,t) \cong v_1] && A_1 + A_2 + \text{modus ponens.}
\end{aligned}$$

Eheyslauseen 1.26 nojalla teoreema A_3 on validi, jolloin

$$T(A_3) = T(\forall x\neg[K(x,t) \cong v_1]) = 1. \tag{49}$$

Koska termi t on muuttujaton, niin kaava A_3 on suljettu, jolloin määritelmän 1.25 nojalla saadaan

$$T(S^x_{v_n}(\neg[K(x,t) \cong v_1]) = 1 \text{ kaikille } n \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

Edelleen sijoituksen jälkeen saadaan

$$T(\neg[K(v_n,t) \cong v_1]) = 1 \text{ kaikille } n \in \mathbb{N}, \tag{51}$$

josta negaation lyhennysmerkintä purkamalla

$$T([K(v_n,t) \cong v_1] \to f) = 1 \text{ kaikille } n \in \mathbb{N}. \tag{52}$$

Koska kaava $[K(v_n,t) \cong v_1] \to f$ on myös suljettu sekä kaavan f totuusarvo on aina $T(f) = 0$, täytyy ehdon (52) sekä määritelmän 1.25 implikaation totuusarvon nojalla päteä

$$T([K(v_n,t) \cong v_1]) = 0 \text{ kaikille } n \in \mathbb{N}. \tag{53}$$

Edelleen kaava $K(v_n,t) \cong v_1$ on suljettu, jolloin määritelmän 1.25 atomikaavan totuusarvon sekä ehdon (53) nojalla termien $K(v_n,t)$ ja v_1 arvot eivät voi olla samat. Toisin sanottuna pätee

$$a(K(v_n,t)) \neq a(v_1) \text{ kaikille } n \in \mathbb{N}. \tag{54}$$

Koska lemman 1.24 nojalla $a(v_1) = 1$, saadaan määritelmän 1.23 avulla yhtälö (54) muotoon

$$m(K)(a(v_n), a(t)) \neq 1 \text{ kaikille } n \in \mathbb{N}. \tag{55}$$

Edelleen lemman 1.24 nojalla pätee $a(v_n) = n$ sekä termille t pätee $a(t) = G(A)$, jolloin saadaan ehtojen (21) ja (55) avulla ehto

$$\chi_{DEDU}(n, G(A)) \neq 1 \text{ kaikille } n \in \mathbb{N}. \tag{56}$$

Karakteristisen funktion määritelmän sekä ehdon (56) nojalla $(n, G(A))$ ei voi kuulua joukkoon $DEDU$, sillä jos $(n, G(A))$ kuuluisi joukkoon $DEDU$, funktio χ_{DEDU}

saisi arvon 1 jollain $n \in \mathbb{N}$. Koska karakteristinen funktio voi saada vain arvot 0 tai 1, on oltava

$$\chi_{DEDU}(n, G(A)) = 0 \text{ kaikille } n \in \mathbb{N} \tag{57}$$

eli

$$(n, G(A)) \notin DEDU \text{ kaikille } n \in \mathbb{N}. \tag{58}$$

Kuitenkin antiteesin "A on teoreema" nojalla kaavalle A on olemassa jokin päättelyjono $\hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_l$, jolle on olemassa jokin Gödel-luku $z = \Gamma(\hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_l) \in \mathbb{N}$. Tällöin joukon $DEDU$ määritelmän nojalla saadaan

$$(z, G(A)) \in DEDU \text{ jollekin } z \in \mathbb{N}, \tag{59}$$

joka on ristiriidassa ehdon (58) kanssa. Antiteesi johtaa siis väärään päätelmään, jolloin alkuperäinen väite pätee eli kaava A ei ole teoreema.

On vielä osoitettava, että kaava A on validi eli

$$T(A) = 1. \tag{60}$$

Purkamalla negaation sekä symbolin $\exists$ lyhennysmerkinnät voidaan yhtälö (60) kirjoittaa muotoon

$$T(A) = T(\neg\neg\forall x \neg[K(x,t) \cong v_1]) = T([\forall x \neg[K(x,t) \cong v_1] \to f] \to f) = 1. \tag{61}$$

Koska $T(f) = 0$, riittää määritelmän 1.25 nojalla osoittaa, että

$$T(\forall x \neg[K(x,t) \cong v_1] \to f) = 0 \tag{62}$$

ja edelleen, että

$$T(\forall x \neg[K(x,t) \cong v_1]) = 1. \tag{63}$$

Väitteen (63) todistamiseksi tehdään jälleen antiteesi. Toisin sanottuna väitetään, että pätee

$$T(\forall x \neg[K(x,t) \cong v_1]) = 0. \tag{64}$$

Koska termi t ei edelleenkään sisällä muuttujia, on kaava $\forall x \neg[K(x,t) \cong v_1]$ yhä suljettu. Tällöin määritelmän 1.25 nojalla saadaan

$$T(S^x_{v_n}(\neg[K(x,t) \cong v_1])) = 0 \text{ jollekin } n \in \mathbb{N} \tag{65}$$

eli

$$T(\neg[K(v_n,t) \cong v_1]) = 0 \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{66}$$

Negaation lyhennysmerkintä purkamalla saadaan

$$T([K(v_n,t) \cong v_1] \to f) = 0 \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}, \tag{67}$$

jolloin totuusarvon määritelmän 1.25 nojalla voidaan kirjoittaa

$$T([K(v_n,t) \cong v_1]) = 1 \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{68}$$

Määritelmän 1.25 atomikaavan totuusarvon nojalla on oltava

$$a(K(v_n,t)) = a(v_1) \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}, \tag{69}$$

jolloin määritelmä 1.23 antaa

$$m(K)(a(v_n), a(t)) = a(v_1) \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{70}$$

Lemman 1.24 sekä ehtojen (21) ja (45) nojalla saadaan

$$\chi_{DEDU}(n, G(A)) = 1 \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{71}$$

Tällöin karakteristisen funktion määritelmän nojalla

$$(n, G(A)) \in DEDU \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}. \tag{72}$$

Tämä taas tarkoittaa joukon $DEDU$ määritelmän nojalla, että jollekin $n \in \mathbb{N}$ on olemassa päättelyjono $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_l = A$ siten, että $\Gamma(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_l) = n$. Tämä on suoraan teoreeman määritelmä, jolloin A on teoreema.

Kuitenkin edellä todistettiin, että A ei ole teoreema, joten antiteesi johtaa jälleen ristiriitaan. Tällöin alkuperäinen väite pätee eli A on validi kaava. Näin ollen koko Gödelin ensimmäinen epätäydellisyyslause on saatu todistettua. □

Gödelin epätäydellisyyslauseessa kaava A onnistuttiin valitsemaan juuri siten, että se edustaa ehdossa (29) eli

$$A \text{ ei ole teoreema } \Leftrightarrow T(\neg\exists x[K(x,t) \cong v_1]) = 1$$

esiintyvää oikeanpuoleista kaavaa, jonka totuusarvoa tutkitaan. Yhtäpitävästi tämä voidaan siis kirjoittaa kaavan A määritelmän nojalla muodossa

$$A \text{ ei ole teoreema } \Leftrightarrow T(A) = 1 \tag{73}$$

tai edelleen

$$A \text{ ei ole teoreema } \Leftrightarrow A \text{ on validi kaava.} \tag{74}$$

Vastaavasti tämä onnistuu myös muodossa

$$A \text{ on teoreema } \Leftrightarrow A \text{ on epävalidi kaava} \tag{75}$$

tai

(76) $$A \text{ on teoreema } \Leftrightarrow T(A) = 0.$$

Kaava A ei voi olla yhtä aikaa teoreema, eli syntaktisesti tosi, ja validi, eli semanttisesti tosi. Siis jos kaava A on syntaktisesti tosi, se ei voi olla semanttisesti tosi. Kääntäen, jos kaava A on semanttisesti tosi, se ei voi olla syntaktisesti tosi.

Voidaan siis ajatella, että kaava A pyrkii imitoimaan teesiä

(77) "Tämä kaava ei ole tosi"

tai yleisemmin

(78) "Tämä lause on epätosi".

Jos oletetaan, että väite (78) on tosi, on se ristiriidassa itsensä kanssa, sillä se sanoo, ettei se ole tosi. Toisaalta, jos oletetaan, että väite (78) on epätosi, kertoo lause tosi asian, vaikka olettiin päinvastaista. Molemmissa tilanteissa ajaudutaan ristiriitaan. Tällaiseen tilanteeseen joudutaan pääasiassa siksi, että lauseet (77) ja (78) onnistuvat puhumaan jotain omasta todellisuudestaan tai itsestään. Tätä kutsutaan itseviittaavuuden käsitteeksi [**18**, **§4.2.3**].

Väitteitä (77) ja (78) tarkastellessa joudutaan paradoksaalisiin tilanteisiin, joiden totuudesta on vaikea sanoa yhtään mitään. Kenties tutuin versio tällaisesta väitteestä on Epimenideetä mukaileva niin kutsuttu valehtelijan paradoksi,

(79) "Minä valehtelen nyt".

Gödelin ensimmäisen epätäydellisyyslauseen todistuksessa voi nähdä käytettävän samankaltaisia päättelymetodeja. Olennaisissa rooleissa ovat valitut kaavat A ja B, termit t ja $\hat{t}$ sekä lemman 2.10 funktion h määritelmä. Kaavat A ja B ovat tietyssä suhteissa toisiinsa, minkä voi nähdä yhtälöstä (46). Yhtälössä (46) vaihdetaan kaavassa B olevat vapaat muuttujat y intuitiivisesti kaavan B Gödel-luvuiksi $G(B)$. Tämän sijoituksen tuottamana saadaan täsmälleen kaava A, jolloin pätee myös $G(A) = G(S^y_{v_{G(B)}}(B))$. Kaava A ikään kuin onnistuu puhumaan jotain itsestään Gödel-lukujen kautta RA-kielen syntaksissa, ja onnistuu totena kaava todistamaan oman todistamattomuutensa [**18**, **§4.2.3**].

2.4. Toinen epätäydellisyyslause

Gödelin toinen epätäydellisyyslause sanoo karkeasti ilmaistuna, ettei ***luonnollisiin lukuihin*** perustuvan matemaattisen järjestelmän ristiriidattomuutta voida todistaa tämän ***järjestelmän sisällä***. Kuitenkin lauseessa 1.27 todistettiin, että RA-kieli on ristiriidaton. Ovatko nämä ristiriitaisuudesta puhuvat tulokset itse asiassa ristiriidassa toistensa kanssa? Lähdetään seuraavaksi tutkimaan, mitä eroja toisella epätäydellisyyslauseella sekä lauseella 1.27 tarkkaan ottaen on, sekä mitä ne täsmällisesti ilmaistuna sanovat.

Lähdetään jälleen liikkeelle ensimmäisen epätäydellisyyslauseen yhteydessä esitetystä ehdosta (29)

$$A \text{ ei ole teoreema } \Leftrightarrow T(\neg\exists x[K(x,t) \cong v_1]) = 1,$$

jossa kaavalle A pätee yhtälö

$$a(t) = a = G(A). \tag{80}$$

Lemman 1.24 nojalla yhtälö (80) pätee ainakin, jos valitaan termi t siten, että $t = v_a$. Tällöin saadaan yhtälö

$$a(v_a) = a = G(A). \tag{81}$$

Tällöin ehto (29) voidaan kirjoittaa muodossa

$$A \text{ ei ole teoreema } \Leftrightarrow T(\neg\exists x[K(x,v_a) \cong v_1]) = 1, \tag{82}$$

Valitaan nyt kaavaksi $A = f$, jolle pätee yhtälön (81) nojalla $G(f) = a(v_{G(f)})$. Ehto (82) saadaan nyt yhtäpitävään muotoon

$$f \text{ ei ole teoreema } \Leftrightarrow T(\neg\exists x[K(x,v_{G(f)}) \cong v_1]) = 1. \tag{83}$$

Koska RA-kieli on lauseen 1.27 nojalla ristiriidaton eli toisin sanottuna RA-kielessä kaava f ei ole teoreema, voidaan ehto (83) esittää myös muodossa

$$\text{RA-kieli on ristiriidaton} \Leftrightarrow T(\neg\exists x[K(x,v_{G(f)}) \cong v_1]) = 1. \tag{84}$$

Tällöin siis on kaavan

$$\neg\exists x[K(x,v_{G(f)}) \cong v_1] \tag{85}$$

oltava validi. Gödelin toinen epätäydellisyyslause perustuu pitkälti tähän esitykseen. Ennen tämän lauseen esittämistä esitetään vielä muutamia aputuloksia sekä merkintöjä.

Määritellään ensin kaavaan (85) pohjautuva yleinen merkintä.

MÄÄRITELMÄ 2.12. Olkoon olemassa mielivaltainen kaava A siten, että $G(A) = a$. Tällöin määritellään merkintä

$$\mathfrak{T}(A) = \exists x[K(x, v_a) \cong v_1]. \tag{86}$$

Merkintä (86) sanoo täsmälleen saman asian kuin Gödelin ensimmäisessä epätäydellisyyslauseessa esitetty teesi (27). Tämä voidaan vielä esittää kaavan A avulla täsmällisemmin, jolloin merkintä (86) imitoi teesiä:

(87) "Jollain $n \in \mathbb{N}$ on olemassa kaavan A päättelyjono $A_1, A_2, ...A_k$ siten,

että $G(A) = a(v_a) = a$ sekä $\Gamma(A_1, A_2, ..., A_k) = n$."

Vastaavasti merkinnän $\neg\mathfrak{T}(A)$ voidaan ajatella edustavan teesiä:

(88) "Millään $n \in \mathbb{N}$ ei ole olemassa kaavan A päättelyjonoa $A_1, A_2, ...A_k$ siten,

että $G(A) = a(v_a) = a$ sekä $\Gamma(A_1, A_2, ..., A_k) = n$."

Merkintää $\mathfrak{T}(A)$ pohjautuvat seuraavat kolme tulosta ovat myös erittäin olennaisia toisen epätäydellisyyslauseen todistuksessa.

LEMMA 2.13. *Olkoon A ja B mielivaltaisia kaavoja. Tällöin*

a) jos A on teoreema, niin $\mathfrak{T}(A)$ on teoreema,
b) kaava $\mathfrak{T}(A) \to \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A))$ on teoreema, sekä
c) kaava $\mathfrak{T}(A \to B) \to [\mathfrak{T}(A) \to \mathfrak{T}(B)]$ on teoreema.

TODISTUS. [**11**, **§5.2**], [**19**, **s. 115–118**], [**12**, **Lemma 5.2, Lemma 5.6 ja Lemma 5.7**]. □

Intuitiivisesti lemman 2.13 kohta a) pitää selvästi paikkaansa, sillä jos A on teoreema, tarkoittaa tämä, että kaavalle A on olemassa jokin päättelyjono. Tällöin on suhteellisen selvää intuitiivisessa mielessä, että tästä seuraa merkinnän $\mathfrak{T}(A)$ imitoima teesi (87). Tämä ei kuitenkaan suinkaan tarkoita, että kaava

$$A \to \mathfrak{T}(A) \tag{89}$$

olisi teoreema, sillä se ei ole teoreema [**12**, **s. 148–149**]. Kaavan (89) voidaan ajatella imitoivan mielivaltaiselle kaavalle A teesiä

"Jos A on kaava, niin pätee ehto (87)."

mikä ei selvästi välttämättä pidä paikkaansa.

Tiivistetään vielä merkinnän $\mathfrak{T}(A)$ imitoima teesi (87) muotoon

(90) "Kaavalle A on olemassa päättelyjono."

Tällöin intuitiivisessa mielessä lemman 2.13 kohdan b) kaava imitoi teesiä: "Jos kaavalle A on olemassa päättelyjono, niin myös kaavalle $\mathfrak{T}(A)$ on olemassa päättelyjono." Toisin sanottuna riittää siis osoittaa, että kaava $\mathfrak{T}(A)$ on teoreema. Tulkitsemalla merkintä $\mathfrak{T}(A)$ teesin (90) mukaan, riittää osoittaa, että teesi "Kaavalle A on olemassa päättelyjono" on teoreema. Tämä on taas totta oletuksen nojalla! Vastaavalla heuristisella tavalla voidaan intuitiivisesti vakuuttua, että lemman 2.13 kohta c) on teoreema.

Ennen kuin palataan tutkimaan Gödelin toista epätäydellisyyslausetta, esitetään vielä tutkielman viimeinen aputulos.

LEMMA 2.14. *Olkoon olemassa kaava A, termit t ja s sekä lisäksi muuttujasymboli x. Oletetaan, että termi s esiintyy kaavassa A, mutta termi s ei esiinny minkään sellaisen kvantifikaation $\forall x$ vaikutusalueella, missä muuttuja x esiintyy joko termissä t tai s. Tällöin*

$$\vdash t \cong s \to [A \leftrightarrow \tilde{S}_t^s(A)]. \tag{91}$$

TODISTUKSESTA. Todistus tehdään induktiolla kaavan A rakennejonon minimaalisen pituuden m suhteen [**12**, **Lause 2.36**]. □

Merkinnän (86) sekä kaavan f avulla saadaan esitys

$$\mathfrak{T}(f) = \exists x[K(x, v_{G(f)}) \cong v_1], \tag{92}$$

jolloin validi kaava (85) voidaan esittää muodossa

$$\neg\mathfrak{T}(f). \tag{93}$$

Esitetään vielä ehto (84) yhtälön (93) avulla, jolloin

$$\text{RA-kieli on ristiriidaton} \Leftrightarrow T(\neg\mathfrak{T}(f)) = 1. \tag{94}$$

Seuraavaksi herää kysymys, onko validi kaava (93) teoreema? Jos muistetaan merkinnän $\neg\mathfrak{T}(A)$ imitoima teesi (88), voidaan kaavan (93) ajatella sanovan tiivistetysti, ettei kaavalle f ole olemassa päättelyjonoa. Jos siis kaava (93) olisi teoreema, eli teesi "kaavalle f ei ole olemassa päättelyjonoa" onnistuttaisiin todistamaan, voitaisiin tämän ajatella tarkoittavan syntaktis-semanttisessa mielessä, että RA-kielen ristiriidattomuus pystyttäisiin todistamaan syntaktisesti.

Mutta onko kaava (93) teoreema vai ei? Tämän kertoo Gödelin toinen epätäydellisyyslause, joka sanoo täsmälleen, ettei kaava (93) ole teoreema.

LAUSE 2.15 (**Gödelin toinen epätäydellisyyslause**). *Kaava* $\neg\mathfrak{T}(f)$ *ei ole teoreema.*

TODISTUS. Todistetaan väite tekemällä antiteesi eli väitetään, että

$$\vdash \neg\mathfrak{T}(f). \tag{95}$$

Olkoon sitten kaava A ja termi t, kuten Gödelin ensimmäisessä epätäydellisyyslauseessa, eli

$$A = \neg\exists x[K(x,t) \cong v_1]$$

ja

$$t = F(v_{G(y)}, v_{G(B)}),$$

joille pätee $a(t) = a(v_a) = a = G(A)$. Olkoon lisäksi kaava B siten, että

$$B = \tilde{S}^t_{v_{G(A)}}(A) = \neg\exists x[K(x, v_{G(A)}) \cong v_1] = \neg\exists x[K(x, v_a) \cong v_1]. \tag{96}$$

Tällöin merkinnän (86) mukaan kaava B on itse asiassa

$$B = \tilde{S}^t_{v_a}(A) = \neg\exists x[K(x, v_a) \cong v_1] = \neg\mathfrak{T}(A). \tag{97}$$

Suljetun atomikaavan totuusarvon määritelmän 1.23 sekä ehdon $a(v_a) = a(t)$ nojalla saadaan

$$T(v_a \cong t) = 1. \tag{98}$$

Tällöin $v_a \cong t$ on muuttujattomana kaavana heikon täydellisyyslauseen 1.28 nojalla myös teoreema eli

$$\vdash v_a \cong t. \tag{99}$$

Tällöin lemman 2.14 nojalla pätee, että

$$\vdash v_a \cong t \to [A \leftrightarrow \tilde{S}^t_{v_a}(A)]. \tag{100}$$

Lemman 2.14 ehdot pätevät: termi t esiintyy kaavassa A mutta termissä t ei esiinny muuttujia, erityisesti ei muuttujaa x. Tällöin termin t tarkasteltava esiintymä ei esiinny kaavassa A minkään sellaisen kvantifikaation $\forall x$ vaikutusalueella, jossa muuttuja x esiintyy joko termissä v_a tai t.

Teoreeman (99) avulla saadaan teoreemasta (100) sekä kaavan B määritelmän nojalla (97) teoreema

$$\vdash A \leftrightarrow \neg\mathfrak{T}(A). \tag{101}$$

Myös propositiokieliset kaavat

$$\vdash [C \leftrightarrow D] \to [C \to D] \tag{102}$$

sekä

$$\vdash [C \leftrightarrow D] \to [D \to C] \tag{103}$$

voi todeta teoreemoiksi esimerkiksi totuustaulujen avulla, jolloin ne periytyvät myös RA-kielisiksi teoreemoiksi huomautuksen 1.19 nojalla.

Tällöin teoreemojen (101), (102) sekä (103) avulla saadaan teoreemat

$$\vdash A \to \neg\mathfrak{T}(A) \tag{104}$$

ja

$$\vdash \neg\mathfrak{T}(A) \to A. \tag{105}$$

Edelleen teoreeman (104) sekä lemman 2.13 kohdan a) nojalla saadaan teoreema

$$\vdash \mathfrak{T}(A \to \neg\mathfrak{T}(A)), \tag{106}$$

jolloin lemman 2.13 kohdan c) nojalla voidaan päätellä teoreema

$$\vdash \mathfrak{T}(A) \to \mathfrak{T}(\neg\mathfrak{T}(A)). \tag{107}$$

Propositiokielestä saadaan jälleen, esimerkiksi totuustaulun avulla, RA-kielinen teoreema

$$\vdash [C \to D] \to [[C \to E]] \to [C \to [D \wedge E]], \tag{108}$$

jolloin teoreemojen (107), (108) sekä lemman 2.13 kohdan b) avulla saadaan

$$\vdash \mathfrak{T}(A) \to [\mathfrak{T}(\neg\mathfrak{T}(A)) \wedge \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A))], \tag{109}$$

joka voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\vdash \mathfrak{T}(A) \to [\mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A) \to f) \wedge \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A))]. \tag{110}$$

Propositiokielestä saadaan taas teoreema

$$\vdash [C \to [D \to E]] \to [[C \wedge D] \to E], \tag{111}$$

jolloin lemman 2.13 kohdan c) avulla saadaan teoreema

$$\vdash [\mathfrak{T}(A \to B) \wedge \mathfrak{T}(A)] \to \mathfrak{T}(B). \tag{112}$$

Teoreeman (112) nojalla saadaan edelleen teoreema

$$\vdash [\mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A) \to f) \wedge \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A))] \to \mathfrak{T}(f). \tag{113}$$

Jos osataan päätellä

$$\mathfrak{T}(A) \vdash \mathfrak{T}(f), \tag{114}$$

saadaan päättelylauseen avulla teoreema

$$\vdash \mathfrak{T}(A) \to \mathfrak{T}(f). \tag{115}$$

Ehdon (114) nojalla voidaan muodostaa oletuspäättely, jossa ei esiinny kvantifikaatioita lainkaan:

$A_1 = \mathfrak{T}(A)$	oletus
$A_2 = \mathfrak{T}(A) \to [\mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A) \to f) \wedge \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A))]$	teoreema (110)
$A_3 = \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A) \to f) \wedge \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A))$	$A_1 + A_2 +$ modus ponens
$A_4 = [\mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A) \to f) \wedge \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(A))] \to \mathfrak{T}(f)$	teoreema (113)
$A_5 = \mathfrak{T}(f)$	$A_3 + A_4 +$ modus ponens.

Nyt propositiokielestä saadaan teoreema

$$\vdash [C \to D] \to [\neg D \to \neg C], \tag{116}$$

joten teoreeman (116) sekä (115) nojalla pätee

$$\vdash \neg\mathfrak{T}(f) \to \neg\mathfrak{T}(A). \tag{117}$$

Jälleen hyödyntäen propositiokielistä teoreemaa

$$\vdash [C \to D] \to [[D \to E] \to [C \to E]], \tag{118}$$

saadaan yhdistämällä teoreemat (118), (117) sekä (105) lopulta teoreema

$$\vdash \neg\mathfrak{T}(f) \to A. \tag{119}$$

Antiteesin (95) sekä teoreeman (119) nojalla nähdään, että kaava A on myös teoreema. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä Gödelin ensimmäisen epätäydellisyyslauseessa osoitettiin, että A ei ole teoreema. Näin ollen väite on saatu todistettua eli kaava $\neg\mathfrak{T}(f)$ ei ole teoreema. □

Gödelin toinen epätäydellisyyslause ei siis väitä, että RA-kieli olisi ristiriitainen tai ristiriidaton, eikä edes tarkalleen ottaen sitä, ettei RA-kielen ristiriidattomuutta voitaisi todistaa. Se kertoo, ettei RA-kielen ristiriidattomuutta pystytä ***syntaktisesti*** todistamaan. Ei ole mahdollista konstruoida RA-kielen kaavoista koostuvaa päättelyjonoa, joka osoittaisi tämän kielen ristiriidattomuuden. Sen sijaan semanttinen todistus tälle nähtiin jo lauseessa 1.27. Lauseen 1.27 todistuksessa ei konstruoida minkäänlaista päättelyjonoa, vaan todistus pohjautuu pelkästään eheyslauseeseen sekä RA-kielen semanttisen totuuden tulkitsemiseen kaavan f totuusarvon kautta. Semanttisesti on siis edelleen pätevää puhua, että RA-kieli on ristiriidaton, jossa totuuteen pohjautuvia ristiriitaisia tuloksia ei sallita.

LUKU 3

Gödelin tulosten seurauksia sekä uusia suuntaviivoja

3.1. Aksioomajärjestelmän laajennus

Gödelin tuloksia on tulkittu monella tapaa aina jumalan olemassaolon todistusten valossa fysiikan kvantti-ilmiöiden selityksiin, sekä yritetty etsiä aukkoja epätäydellisyyslauseiden todistuksista. Ensimmäisenä korjausehdotuksena nousee välittömästi esiin aksioomajärjestelmän muuttaminen. Koska aksioomat ovat tässäkin kielessä päättelyn pohjana, on syytä kysyä, voitaisiinko kielen täydellisyys saavuttaa parantamalla tai muuttamalla aksioomajärjestelmää. Kuten luvun 1.2.3 lopussa todettiin, hyväksymällä kaava f aksioomaksi, saataisiin kaikki kaavat teoreemoiksi, myös Gödelin epätäydellisyyslauseissa esiintyvä kaava A. Tämä ei kuitenkaan olisi hyvä järjestelmä, sillä nyt *kaikki* kaavat olisivat todistuvia. Lisäksi aksioomajärjestelmään kuuluisi kaava, joka ei olisi validi.

Entä jos Gödelin epätäydellisyyslauseiden kaava A otettaisiin aksioomaksi? Toisin sanottuna aksioomaksi valittaisiin kaava

(Ax18) $A = \neg\exists x[K(x,t) \cong v_1]$, missä A on validi kaava sekä symbolit x, K sekä t valittu kuten lauseessa 2.11.

Kuinka Gödelin epätäydellisyyslauseiden käy tässä aksioomajärjestelmässä? Koska kaava A on validi, voidaan osoittaa eheyslauseen 1.26 pätevän täsmälleen vastaavalla tavalla kuin aiemmin [**12**, **Lause 2.66**]. Toisaalta päättelysääntöjen mukaan aksioomat ovat aina suoraan teoreemoja, joten uudeksi aksioomaksi valittu kaava A on myös teoreema. Tällöin Gödelin epätäydellisyyslauseen todistus 2.11 ei enää päde, koska valittu kaava A on sekä validi että teoreema. Voitaisiinko tällaisella järjestelmällä osoittaa RA-kielen täydellisyys?

Jos katsotaan tarkemmin ensimmäisen epätäydellisyyslauseen 2.11 todistusta sekä siihen tarvittavia aputuloksia, voidaan ensin huomata, että lemma 2.10 pätee vastaavasti aksioomalla **(Ax18)** varustetussa järjestelmässä. Tämä johtuu siitä, ettei lemman 2.10 todistuksessa tarvita tietoa aksioomajoukon primitiivirekursiivisuudesta [**12**, **Lemma 4.1**].

Toisaalta joukon $DSEQ$ todistaminen primitiivirekursiiviseksi muuttuu, sillä sen osoittamiseksi tarvitaan tietoa aksioomajoukon primitiivirekursiivisuudesta. Voidaan

kuitenkin osoittaa, että tämä uusi aksioomajärjestelmä varustettuna aksioomalla **(Ax18)** pysyy yhä primitiivirekursiivisena [**12**, **s. 146**]. Tämä onnistuu samaan tapaan kuin aksioomien **(Ax1)**–**(Ax18)** osoittaminen primitiivirekursiiviseksi [**12**, **s. 118–126**], [**15**, **s. 171–215**]. Jos nimitämme tätä uutta kaavojen päättelyjonojen Gödel-luvuista koostuvaa joukkoa joukoksi $NDSEQ$ (*new deduction sequence*), voidaan tämän avulla osoittaa täsmälleen vastaavalla tavalla kuin lauseessa 2.9 uusi kaavojen sekä niiden päättelyjonoista koostuvien Gödel-lukujen joukko $NDEDU$ (*new deduction*) primitiivirekursiiviseksi.

Tällöin, kuten lauseessa 2.11, on lauseen 1.22 nojalla olemassa uusi kaksipaikkainen funktiosymboli $\hat{K} \neq K$ siten, että

$$m(\hat{K}) = \chi_{NDEDU}. \tag{120}$$

Tämän avulla voidaan määritellä uusi kaava $\hat{A} \neq A$ vastaavasti kuin lauseessa 2.11. Tästä eteenpäin ensimmäisen epätäydellisyyslauseen todistus etenee täsmälleen samalla tavalla kuin lauseessa 2.11.

Vaikka kaava A otettaisiin aksioomaksi, on siis edelleen saatu konstruoitua validi kaava $\hat{A}$, joka ei ole teoreema. Edellä esitetyn menetelmän avulla voidaan itse asiassa lisätä myös useampia valideja aksioomia aksioomajärjestelmään, jolloin edelleen saadaan konstruoitua validi kaava, joka ei ole teoreema. Toisin sanottuna, jos aksioomajärjestelmään lisätään yksi tai useampi validi kaava siten, että *aksioomajärjestelmä pysyy primitiivirekursiivisena*, Gödelin ensimmäinen epätäydellisyyslause pätee yhä.

Entä saavutettaisiinko RA-kielen täydellisyys muuttamalla päättelysääntöjä? Modus ponens ja kvantifiointi ovat intuitiivisessa mielessä olleet päteviä päättelysääntöjä ainakin Aristoteleen filosofiasta lähtien. Ne ovat syvällä "tavallisten" puhuttujen ja kirjoitettujen kielten rakenteissa sekä pohjana kaikelle ajattelulle. Tosin tämä ei kiellä, olisiko mahdollista rakentaa jokin aivan uudenlainen päättelyjärjestelmä, josta voitaisiin johtaa aivan uudenlaista matematiikkaa. Vastaavaa ihmetystä aluksi aiheuttivat myös esimerkiksi irrationaalilukujen sekä epäeuklidisten geometrioiden löytyminen.

Koska klassinen logiikka perustuu kuitenkin täysin modus ponensin sekä kvantifioinnin määritelmiin, tämän tutkielman kontekstissa niitä ei ole syytä jättää pois rakennettaessa päättelyjärjestelmää. Entä jos näiden rinnalle lisätään uusia päättelysääntöjä, toisin sanottuna laajennetaan päättelyjärjestelmää? Loogisen kielen ehdoksi tulee edelleen asettaa, että päättelysääntöjen avulla saadaan valideista kaavoista valideja kaavoja. Jos tällaisia päättelysääntöjä lisätään järjestelmään yksi tai useampi, voidaan helposti osoittaa, että eheyslause 1.26 pätee yhä. Tällöin on lähes yhtä

selvää, että Gödelin ensimmäisen epätäydellisyyslauseen täytyy päteä vastaavalla todistuksella kuin lauseessa 2.11.

Gödelin ensimmäinen epätäydellisyyslauseen voidaankin ajatella tarkoittavan seuraavaa: ***Jos primitiivirekursiivisen aritmeettisen järjestelmän aksioomat sekä päättelysäännöt on valittu siten, että kaikki todistuvat kaavat ovat tosia, järjestelmän sisällä on aina olemassa tosi kaava, joka ei ole todistuva*** [**12**, **s. 146**].

Kuinka toiselle Gödelin epätäydellisyyslauseelle kävisi, jos aksioomajärjestelmää laajennettaisiin esimerkiksi uuden aksiooman **(Ax18)** avulla? Koska lauseen 2.15 todistus perustuu lauseessa 2.11 konstruoituun kaavaan A, saadaan Gödelin toiselle epätäydellisyyslauseelle aksioomalla **(Ax18)** varustetussa järjestelmässä täysin vastaava todistus kuin lauseessa 2.15. Tällöin voidaan myös Gödelin toinen epätäydellisyyslause yleistää sanomalla: ***Jos primitiivirekursiivisen aritmeettisen järjestelmän aksioomat on valittu siten, etteivät ne ole ristiriidassa keskenään, järjestelmän ristiriidattomuutta ei voida todistaa aritmetiikassa itsessään.***

Johdannon historiakatselmuksessa pohdittiin Hilbertin vaatimusta saada koko matematiikka osoitettua täydelliseksi. Hilbert uskoi, että esimerkiksi Eukleideen geometrian ristiriidattomuus voitaisiin viime kädessä palauttaa luonnollisten lukujen ristiriidattomuuteen, jossa Russelin ja Whiteheadin formaalin kielen avulla onnistuttaisiin lopulta todistamaan luonnollisten lukujen ominaisuudet eli aritmetiikka täydelliseksi ja sitä myöden koko matematiikka täydelliseksi. Kuten jo moneen kertaan on todettu, Gödel romutti tämän aritmetiikkaan perustuvan ristiriidattomuustodistuksen. Gödelin tulos ei kuitenkaan kiellä, voitaisiinko tällainen ristiriidattomuustodistus löytää jollain täysin uudella tavalla. Nagel ja Newman kiteyttävätkin Gödelin tulokset seuraavasti:

> "The possibility of constructing a finitistic absolute proof of consistency for arithmetic is not excluded by Gödel's results. Gödel showed that no such proof is possible that can be represented within arithmetic. His argument does not eliminate the possibility of strictly finitistic proofs that cannot be represented within arithmetic. But no one today appears to have a clear idea of what a finitistic proof would be like that is *not* capable of formulation within arithmetic." [**22**, **s. 98**]

3.2. Sumeaa moniarvologiikkaa

Klassinen logiikka perustuu ajatukseen kolmannen poissuljetun laista, jonka mukaan kaava tai teesi voi olla vain tosi tai epätosi. Matemaattisemmin ilmaistuna siis kaava A on joko validi tai epävalidi, eli pätee joko $T(A) = 1$ tai $T(A) = 0$. Muita vaihtoehtoja ei ole olemassa. Yksi tapa lähteä laajentamaan semanttisen totuuden käsitettä on niin kutsuttu sumea logiikka. Yleisesti tällaisessa järjestelmässä voidaan sumeiden joukkojen avulla määritellä funktioita sekä totuusarvoja, jotka voivat saada mitä tahansa arvoja esimerkiksi väliltä $[0, 1]$ [**23**, **s. 4–17, 24–27**]. Tässä mielessä sumea logiikka on hyvin lähellä todennäköisyysteoriaa, ja sillä onkin paljon esimerkiksi tekniikkaan ja teknologiaan liittyviä sovelluksia.

Sen sijaan Gödelin epätäydellisyyslauseista tämänkaltainen totuusarvojakauma ei pysty järkevästi sanomaan mitään. Mielenkiintoisempi lähestymistapa on täsmällisemmät sumean logiikan totuusarvojen määrittelyt, kuten niin kutsuttu Belnapin neliarvologiikka. Tässä järjestelmässä kaavalle A voidaan määritellä neljä erilaista totuusarvoa. Klassisten totuusarvojen toden, $T(A) = 1$, ja epätoden, $T(A) = 0$, lisäksi määritellään totuusarvot, kun kaava A on tosi ja epätosi yhtä aikaa, $T(A) = BO$ (*both*), sekä kaava A ei ole tosi eikä epätosi, $T(A) = NO$ (*none*) [**26**, **s. 5**]. Mielenkiintoisen tästä järjestelmästä tekee, että se antaa mahdollisuuden käsitellä paradokseja totuusarvon BO määrittelyn takia. Periaatteessa voidaan siis määritellä jonkinlainen totuusarvo esimerkiksi Russelin tai valehtelijan paradoksille. Näin myös Gödelin epätäydellisyyslauseiden kaavoille voidaan antaa jonkinlainen uusi totuusarvo.

Belnapin neliarvologiikassa implikaatiolle voidaan määritellä totuusarvot niin kutsutun "loogisen hilan" (*logical lattice*) avulla [**26**, **s. 5–7**]. Tähän määrittelyyn perustuen taulukossa 3.1 on esitetty propositiokielen tapainen totuustaulu kaikille symbolin $\wedge$ mahdollisille totuusarvon 16 eri tapaukselle. Vastaavat totuustaulut voidaan myös johtaa esimerkiksi symbolille $\vee$ sekä negaatiolle $\neg$ [**26**, **s. 7**].

Mitä Belnapin logiikan avulla voitaisiin sitten sanoa Gödelin epätäydellisyyslauseista? Jos lauseen 2.11 kaavan A tulkitaan imitoivan teesiä (77), voidaan tämän ajatella tarkoittavan kaavan A olevan tosi jos ja vain jos A on epätosi. Onko kaava A siis tosi ja epätosi yhtä aikaa? Belnapin neliarvologiikan nojalla periaatteessa tällaiselle teesille voitaisiin antaa totuusarvo BO, ja tulkita Gödelin epätäydellisyyslauseen tarkoittavan totuusarvoltaan totta sekä epätotta tarkoittavaa lausetta. Sen sijaan RA-kielen täydellisyyttä tällaisella systeemillä ei saataisi pelastettua sen enempää kuin aksioomajärjestelmää laajentamalla kaavalla A.

TAULUKKO 3.1. Belnapin logiikan $\wedge$ symbolin totuustaulu

A	$\wedge$	B	A	$\wedge$	B
1	1	1	BO	BO	1
1	0	0	BO	0	0
1	BO	BO	BO	BO	BO
1	NO	NO	BO	0	NO
0	0	1	NO	NO	1
0	0	0	NO	0	0
0	0	BO	NO	0	BO
0	0	NO	NO	NO	NO

Esimerkiksi Gödelin epätäydellisyyslauseissa käytettäviltä antiteesi-todistuksilta putoaisi pohja, sillä Belnapin neliarvologiikassa tällaisiin ristiriitaisiin tilanteisiin ei voida totuusarvon määrittelyn nojalla päätyä. Semanttisesti olisi hyväksyttävää antaa oletukselle ja vastaoletukselle oma totuusarvonsa eikä ristiriidan sattuessa välttämättä voitaisi päätellä alkuperäisen oletuksen olevan tosi.

Tämänkaltaista niin kutsuttua matematiikan intuitionistista koulukuntaa edusti myös Gödelin aikalainen L. E. J Brouwer (1881–1966), joka perusti oman matemaattisen filosofiansa konstruktivismin pohjalle. Konstruktivismin lähtökohtana pidetään, että jokainen matemaattinen väite on pystyttävä todistamaan suoraan, toisin sanottuna väitteelle on aina konstruoitava todistus, joka ei vetoa minkään matemaattisen olion tai objektin oletettuun olemassaoloon. Esimerkiksi antiteesi-todistuksissa tehdään niin kutsuttu eksistenssitodistus, jossa vedotaan ettei oletuksen vastainen tilanne ole mahdollinen [**17**, **s. 17–18**]. Varsinaiselle väitteelle ei suoraan esitetä loogisesti pätevää ketjua, jonka lopputuloksena konkreettisesti väite saadaan.

Belnapin neliarvologiikka pelaa siis täysin erilaisessa maailmassa kuin RA-kieli ja sen semantiikka. Ei ole mielekästä soveltaa jälkeenpäin klassisen logiikan totuusarvon varaan rakennettuun järjestelmään täysin toisenlaista systeemiä. Toki tällaisella Belnapin kaltaisella niin kutsutun relevanssilogiikan lajilla voidaan varmasti rakentaa loogisesti päteviä järjestelmiä, mutta tässäkin järjestelmässä pitää lähteä liikkeelle perustuksista ja rakentaa oma semanttisesti ja syntaktisesti ehyt järjestelmä. Vasta tämän jälkeen voidaan tutkia tämän järjestelmän sisällä kielen eheyttä sekä täydellisyyttä, ja kenties löytää vastaavanlaisia tuloksia kuin Gödel löysi.

Myös klassiseen semanttisuuteen perustuvia loogisia kieliä voidaan tutkia uudenlaisesta totuuden viitekehyksestä. Esimerkiksi implikaation totuustaulun väitteen

"epätodesta seuraa epätotta" totuusarvo voidaan jossain määrin kyseenalaistaa [**16**, **s. 5**]. Voitaisiinko tämän totuusarvo asettamalla luvuksi 0 saada esimerkiksi Gödelin epätäydellisyyslauseiden tapauksissa erilaisia tuloksia? Tämänkin kysymyksen perustavanlaatuiseen analyysiin tarvittaisiin jo toisen tutkielman verran tekstiä.

Kirjallisuutta

[1] Ackermann, Wilhelm: *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.* Göttingen, 1927. Elektroninen dokumentti osoitteessa http://eretrandre.org/rb/files/Ackermann1928_126.pdf (luettu 12.10.2016).

[2] Beall, Jc & Glanzberg, Michael: *Liar Paradox.* Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2011. Elektroninen dokumentti osoitteesssa http://plato.stanford.edu/entries/liar-paradox/ (luettu 20.10.2016).

[3] Casti, John L. & DePauli, Werner: *Kurt Gödel. Elämä ja matematiikka.* Käännös: Vilkko, Risto. Gummerus Kirjapaino Oy, Jyväskylä 2001. Englanninkielinen alkuteos: *Kurt Gödel. A life of logic.* 2000.

[4] Cutland, Nigel: *Computability: An introduction to recursive function theory.* Cambridge University Press, 1980.

[5] Dawson, John W. Jr: *A Gödel chronology.* Toimittanut: Feferman, Solomon. Teoksesta: *Kurt Gödel – Collected works, Volume I, Publications 1929–1936*, s. 37–43. Oxford University Press, Inc., 1986.

[6] Greenberg, Marvin Jay: *Euclidean and Non-Euclidean Geometries – Development and History, Third Edition.* W. H. Freeman and Company, New York, 1993.

[7] Gödel, Kurt: *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls (The completeness of the calculus of logic).* 1930. Toimittanut: Feferman, Solomon. Teoksesta: *Kurt Gödel – Collected works, Volume I, Publications 1929–1936*, s. 102–123. Oxford University Press, Inc., 1986.

[8] Gödel, Kurt: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter System I (On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems I).* 1931. Toimittanut: Feferman, Solomon. Teoksesta: *Kurt Gödel – Collected works, Volume I, Publications 1929–1936*, s. 144–195. Oxford University Press, Inc., 1986.

[9] Hajnal, András & Hamburger, Peter: *Set Theory.* Käännös: Máté, Attila. Cambridge University Press, 1999. Unkarinkielinen alkuteos: *Halmazeimélet.* 1983.

[10] Heath, Sir Thomas L.: *The Thirteen Books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Second Edition, Revised with Additions. Volume I, Introduction and Books I, II.* Dover Publications, Inc., New York, 1956.

[11] Hilbert, D. & Bernays, P.: *Grundlagen der Mathematik II.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[12] Kurittu, Lassi: *Matemaattinen logiikka.* Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2010. Elektroninen dokumentti osoitteesssa http://users.jyu.fi/∼lkurittu/matlog.pdf (luettu 24.10.2016).

[13] Kurittu, Lassi: *Propositio- ja predikaattilogiikka.* Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2014. Elektroninen dokumentti osoitteessa http://users.jyu.fi/∼lkurittu/johdlogiikkaan.pdf (luettu 24.10.2016).

[14] Kurittu, Lassi: *Joukko-oppia.* Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto. Elektroninen dokumentti osoitteesssa http://users.jyu.fi/∼lkurittu/joukko-oppia.pdf (luettu 24.10.2016).

[15] Kurittu, Lassi: *Matemaattinen logiikka, lauseiden todistuksia.* Matemaattinen logiikka -luentomonisteen liite, Jyväskylän yliopisto. Elektroninen dokumentti osoitteessa http://users.jyu.fi/∼lkurittu/matlogtod.pdf (luettu 24.10.2016).

[16] Kurittu, Lassi: *Propositio- ja predikaattilogiikka, ylimääräisiä harjoitustehtäviä.* Tehtävämoniste, Jyväskylän yliopisto. Elektroninen dokumentti osoitteessa http://users.jyu.fi/∼lkurittu/logharj.pdf (luettu 20.10.2016).

[17] Käkelä, Kai: *Kurt Gödelin epätäydellisyyslauseiden vaikutuksista David Hilbertin ohjelmaan.* Filosofian pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, 2004.

[18] Lehrbäck, Juha: *Kurt Gödel (1906–1978) ja matematiikan hutera perusta.* Essee, Jyväskylän yliopisto, 2002. Elektroninen dokumentti osoitteessa http://users.jyu.fi/∼juhaleh/godel.html (luettu 25.10.2016).

[19] Löb, M. H.: *Solution of a Problem of Leon Henkin.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 20, No. 2, 1955. Elektroninen dokumentti osoitteessa http://www.math.umd.edu/∼laskow/Pubs/713/Lob.pdf (luettu 20.10.2016).

[20] Mahler, Kurt: *Lecture Notes in Mathematics: Lectures on Transcendental Numbers.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1976.

[21] Mendelson, Elliot: *Introduction to Mathematical Logic, Second Edition.* Litton Educational Publishing, Inc., 1969.

[22] Nagel, Ernest & Newman, James R.: *Gödel's proof.* Routledge, 1989.

[23] Niemi, Antti: *Johdatus sumeisiin joukkoihin ja sumeaan logiikkaan.* Jyväskylän teknillinen oppilaitos, Opetushallitus, Hakapaino Oy, Helsinki, 1996.

[24] Péter, Rózsa: *Konstruktion nichtrekursiver Funktionen.* Budapest, 1934. Elektroninen dokumentti osoitteessa http://xover.mud.at/∼marty/iug2/rozsa_peter_1935b.pdf (luettu 12.10.2016).

[25] Robbin, Joel W.: *Mathematical Logic: A First Course.* W.A. Benjamin, Inc., 1969.

[26] Rodrigues, Odinaldo & Russo, Alessandra: *A Translation Method for Belnap Logic.* Imperial College Research Report DoC 98/7, 1998. Elektroninen dokumentti osoitteessa http://pubs.doc.ic.ac.uk/translation-method-4-val-logic/translation-method-4-val-logic.pdf (luettu 20.10.2016).

[27] Viitasalo, Juho: *Churchin lause RA-kielelle.* Matematiikan pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, 2007. Elektroninen dokumentti osoitteessa https://jyx.jyu.fi/dspace/bitstream/handle/123456789/9820/URN_NBN_fi_jyu-2007585.pdf?sequence=1 (luettu 28.09.2016).

[28] Väänänen, Jouko: *Matemaattinen logiikka.* Oy Gaudeamus Ab, 1987.