Äärellisten Borel-mittojen Fourier-muunnoksista euklidisissa avaruuksissa

Joonas Niinikoski

Matematiikan Pro Gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2016

Tiivistelmä: Joonas Niinikoski, *Äärellisten Borel-mittojen Fourier-muunnoksista euklidisissa avaruuksissa* (engl. *On The Fourier Transforms of Finite Borel Measures in Euclidean Spaces*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 101 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2016.

Tutkielmassa esitellään euklidisen avaruuden äärellisille Borel-mitoille Fourier-muunnokset kompleksiarvoisina kuvauksina ja tutkitaan niiden vähenemistä mentäessä äärettömän kauas origosta. Keskeisenä kysymyksenä on, millä reunaehdoilla annetun kompkatikantajaisen ja äärellisen Borel-mitan Fourier muunnos vähenee polynomiaalisesti (eli sitä voidaan dominoida jollain euklidisen normin negatiivisella potenssilla) kaikkialla riittävän kaukana tai ainakin "keskimääräisesti". Mikäli tällainen Borel-mitta on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen kompaktikantajaisella ja sileällä tiheysfunktiolla, niin sen Fourier-muunnos vähenee aina polynomiaalisesti kaikkialla.

Ongelmaa tarkastellaan keskeisesti potentiaaliteorian avulla. Jokaiselle äärelliselle ja kompaktikantajaiselle Borel-mitalle asetetaan Rieszin energia. Tällöin Rieszin energian äärellisyys implikoi mitan Fourier-muunnoksen polynomiaalisen vähenemisen keskimäärin. Rieszin energian avulla määritellään myös ns. kapasitiivinen dimensio jokaiselle euklidisen avaruuden Borel-joukolle. Työssä käydään läpi myös klassinen Frostmanin lemma euklidisen avaruuden $\mathcal{F}_\sigma$-joukoille, jonka perusteella tällaisten joukkojen kapasitiiviset dimensiot yhtyvät niiden Hausdorff-dimensioihin.

Toinen näkökulma ongelmaan otetaan tarkastelemalla yksikkövälin irrationaalilukujen Gaussin kuvauksen dynaamista systeemiä ja siinä olevia Gibbsin mittoja. Sopivalla reunaehdolla tällaiset mitat vähenevät aina polynomiaalisesti. Tarkastelu edellyttää kuitenkin symbolista dynamiikkaa, joka on myös työssä yksi käsitelty aihe.

Avainsanat: äärellinen Borel-mitta, Fourier-muunnos, Rajchman-mitta, polynomiaalinen väheneminen, Rieszin energia, kapasitiivinen dimensio, Frostmanin lemma, symbolinen dynamiikka, termodynaaminen formalismi, Gaussin kuvaus, vasen siirto, Gibbsin mitta, Ruellen siirto-operaattori.

Sisältö

1 Johdanto

Funktioille tutut Fourier-integraalimuunnokset voidaan yleistää esimerkiksi euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mitoille. Mikäli μ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mitta, niin sillä on pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ Fourier-muunnos kompleksisena integraalina

$$\hat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} \mathrm{d}\mu(x),$$

mikäli kyseinen integraali on määritelty. Mikäli se on kaikissa pisteissä $x \in \mathbb{R}^n$ määritelty, niin sanotaan, että kuvaus $x \mapsto \hat{\mu}(x)$ on mitan μ Fourier-muunnos $\hat{\mu}$. Tässä työssä tarkastellaan pääasiassa äärellisten Borel-mittojen Fourier-muunnoksia, jotka ovat aina määritelty. Näillä on monia samankaltaisia ominaisuuksia funktioiden Fourier-integraalimuunnosten kanssa. Riittävän siistin funktion Fourier-muunnos antaa paljon informaatiota alkuperäisestä funktiosta, joten yksi Borel-mittojen Fourier-muunnosten tarkastelun motivaatio on, että ne antavat mahdollisesti jotain informaatiota alkuperäisestä mitasta.

Tutkielman keskeisenä tarkastelun kohteena ovat nyt äärelliset Borel-mitat $\hat{\mu}$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$, joiden Fourier-muunnokset $\hat{\mu}$ vähenevät äärettömyydessä, ts. $\hat{\mu}(x) \to 0$, kun muuttujan x euklidinen normi $\|x\|$ kasvaa rajatta. Näitä kutsutaan ns. Rajchman-mitoiksi. Yhtenä tunnettuna perustuloksena työssä todetaan, että kaikki $\mathbb{R}^n$:n Lebesguen mitan suhteen absoluuttisesti jatkuvat äärelliset Borel-mitat ovat Rajchman-mittoja. Erityisen mielenkiinnon kohteena ovat kompaktikantajaiset Rajchman-mitat $\hat{\mu}$, joiden muunnos $\hat{\mu}$ vähenee polynomiaalisesti, ts. löytyy $C, s \in \mathbb{R}_+$ siten, että tarpeeksi isoilla $\|x\|$

$$|\hat{\mu}(x)| \leq C\|x\|^{-s}.$$

Keskeisenä teemana työssä on tutkia, milloin Fourier-muunnokset kompaktikantajaisille ja äärellisille Borel-mitoille vähenevät polynomiaalisesti. Tätä voidaan lähestyä potentiaaliteorian näkökulmasta. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ sigma-äärelliselle Borel-mitalle μ ja luvulle $s \in \mathbb{R}_+$ voidaan asettaa energiaintegraali

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x-y\|^{-s} \mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x),$$

jota kutsutaan Rieszin s-energiaksi. Yksi työn päätavoitteista on johtaa ns. energiakaava Borel-mitoille. Tämän nojalla jokaiselle kompaktikantajaiselle ja äärelliselle Borel-mitalle μ sekä luvulle $0 < s < n$ voidaan energia $I_s(\mu)$ kirjoittaa integraalina Lebesguen mitan suhteen

$$I_s(\mu) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} c(n,s)\mathrm{k}_{n-s}(x)|\hat{\mu}(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

missä $c(n, s)$ on luvusta s ja dimensiosta n riippuva vakio. Tällöin voidaan osoittaa, että mitan μ Rieszin s-energian äärellisyys takaa, että sen Fourier-muunnokselle $|\hat{\mu}(x)| \leq \|c\|^{-\frac{s}{2}}$ ”keskimääräisesti”. Rieszin energian äärellisyys kertoo toisaalta jotain mitan käytöksestä. Työssä tarkastellaan kompkatikantajaisen ja äärellisen Borel-mitan μ Rieszin s-energian äärellisyyden yhteyttä suljettujen pallojen μ-mitan kontrolloituvuuteen säteen potenssilla $s \in \mathbb{R}_+$. Tämä tarkoittaa siis sitä, että löytyy $C \in \mathbb{R}_+$ siten, että kaikille $\overline{B}(x, r)$

$$\mu(\overline{B}(x,r)) \leq Cr^s. \tag{$\star$}$$

Jokaiselle Borel-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ voidaan nyt määritellä kapasitiivinen dimensio $\dim_c(A)$. Mikäli tämä on positiivinen, niin jokaiselle $0 < s < \dim_c(A)$ löytyy joukon A kantama äärellinen ja kompktikantajainen mitta μ, jolle ehto ($\star$) on voimassa. Klassinen Frostmanin lemma sanoo käytännössä, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}_\sigma$-joukkojen (eli joukot, jotka voidaan esittää suljettujen joukkojen numeroituvana yhdisteenä) kapasitiivinen dimensio yhtenee Hausdorff-dimensioon.

Rieszin energian äärellisyys takaa, että kompaktikantajaisen ja äärellisen Borel-mitan Fourier-muunnos vähenee keskimääräisesti. Kuitenkaan tällaisen mitan ei tarvitse olla edes olisi Rajchman-mitta. Työn eräänä tavoitteena onkin tarkastella ongelmaa erilaisesta näkökulmasta ja huomattavasti rajatummasta asetelmasta läpikäymällä Jordanin ja Sahlstenin artikkeli [10], jossa on esitetty riittävä ehto sille, milloin Gaussin kuvauksen dynamiikassa Gibbsin mitat ovat Rajchman-mittoja. Gaussin kuvaus välin $[0, 1]$ irrationaaliluvuille asetetaan kuvauksena

$$x \mapsto \frac{1}{x} \mod 1.$$

Gaussin kuvaus muodostaa välin $[0,1]$ irrationaalilukujen joukkoon X dynaamisen systeemin, johon voidaan määritellä Gibbsin mitat välin $[0,1]$ kantamina Borel-mittoina. Joukko X luonnollisella metriikalla varustetun reaalilukujoukon metrisenä aliavaruutena on homeomorfinen luonnollisista luvuista koostuvien jonojen $(a_1, a_2, \dots)$ jonoavaruudessa $\mathbb{N}^\infty$ ketjumurtolukukehitelmän

$$(a_1, a_2, \dots) \mapsto \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

kautta. Edelleen Gaussin kuvauksen dynaaminen systeemi on jonoavaruuden $\mathbb{N}^\infty$ vasemman siirron

$$(a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots)$$

konjugaattisysteemi irrationaalilukujen ketjumurtolukukehitelmän kautta, jolloin tarkastelut pohjautuvat nyt paitsi irrationaalilukujen ketjumurtolukuesityksiin, niin myös jonoavaruuden symboliseen dynamiikkaan. Gibbsin mitta μ vasemman siirron systeemissä on sen suhteen invariantti Borel-todennäköisyysmitta, joka toteuttaa tiettyjä säännöllisyysominaisuuksia sopivan potentiaalikuvauksen $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$ suhteen. Gibbsin mitat Gaussin kuvauksen dynamiikassa asetetaan vastaavasti Gaussin kuvauksen suhteen. Tavoitteena on käydä jonoavaruuden symbolista dynamiikkaa artikkelin [10] vaatimustason verran. Ideana on, että tämän työn tarkastelun jälkeen aiheeseen perehtymätön lukija ymmärtäisi hieman perusteellisemmin artikkelin [10] hyödyntämää symbolista dynamiikkaa.

Käydään johdannon lopuksi työn struktuuri läpi. Työ on jaoteltu lukuihin, luvut kappaleisiin ja tarvittaessa kappaleet pykäliin. Toisessa luvussa käydään työn vaatimat esitiedot melko kattavasti läpi lähtien liikkeelle perustason määritelmistä. Kolmannessa luvussa käsitellään perusteoriaa konvoluutioille ja Lebesguen mitan suhteen integroituvien kuvausten Fourier-muunnoksille. Lisäksi esitellään ja käsitellään Fourier-muunnoksia äärellisille Borel-mitoille. Neljännessä luvussa käsitellään läpi aiemmin mainitut Rieszin energia, Frostmanin lemma ja energiakaava. Nämä ovat pitkälti Mattilan [17] esityksien tarkempaa (ja ehkä paikkailevaa) läpikäyntiä. Viidennessä luvussa esitellään melko yksityiskohtaisesti artikkelin [10] tarvitsema symbolinen dynamiikka läpi. Tämä luku on koottu pitkälle lähteiden [20] ja [25] esitysten pohjalta. Itse artikkelia käsitellään viimeisessä luvussa. Annettavat epätriviaalit todistukset pohjautuvat pääsääntöisesti vastaaviin viitattuihin todistuksiin lähdeteoksissa, tosin usein sovellettuina. Varsinainen poikkeus on lemman 4.15 todistus, joka on omaa kontribuutiota, ts. sitä ei ole katsottu mistään lähteestä.

2 Esitietoja

Tässä luvussa on esitelty melkein kaikki työssä tarvittavat aputulokset ja konseptit. Esitietoina työhön riittää tiedot joukko-opista, alkeisanalyysistä reaali- ja kompleksiluvuille ja perusanalyysistä euklidissa avaruuksissa sekä topologian perusteiden hallinta, erityisesti metristen avaruuksien osalta. Mittateorian perusteet on luonnollisesti myös hyvä osata ja funktionaalianalyysistä tarvitaan myös joitain tuloksia, mutta esitiedoissa on pyritty mahdollisimman kattavaan ja kertaavaan esitykseen. Kaikki tosin tehdään melko ylimalkaisesti ja juuri mitään ei todisteta, joten lukijan tehtäväksi jää (jos tarvitsee) paikkailla aukot vaikka esitellyn viitekirjallisuuden avulla.

Aluksi esitellään joitain käytettäviä merkintöjä. Seuraavaksi käydään kertaavasti peruskonseptit ja mittateoriasta sekä esitellään erinnäisiä tuloksia. Metrisistä avaruuksista käydään myös joitain huomoita läpi ja erityisesti mittojen heikko konvergenssi metrisissä avaruuksissa. Lopuksi tarkastellaan euklidisia avaruuksia ja Lebesguen mittaa.

2.1 Merkintöjä

Pääosin tutkielmassa käytetään standardimerkintöjä, mutta käydään läpi joitain notaatioita ja huomioita. Joukko-opin suhteen käytetään tavanomaisia merkintöjä, mutta symboli $\subset$ tarkoittaa nyt kaikkia inkluusioita eikä aitoa inkluusiota: muita inkluusiosymboleja ei käytetä. Lisäksi mikäli joukot A_i epätyhjällä indeksijoukolla I ovat pareittain pistevieraat, niin niiden yhdistettä merkitään $A = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ ja sanotaan, että ne muodostavat A:n (erään) *osituksen*.

Luonnollisten lukujen joukkoa merkitään $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Huomaa, että nolla ei ole tässä konventiossa luonnollinen luku. Tavanomaisesti merkitään edelleen kokonaislukujen joukkoa $\mathbb{Z}$, rationaalilukujen joukkoa $\mathbb{Q}$ ja reaalilukuja tai reaaliakselia $\mathbb{R}$. Reaaliluvuille $a < b$ merkitään tavanomaiseen tapaan avointa väliä $]a, b[$, suljettua väliä $[a, b]$, puoliavoimia välejä $]a, b]$ ja $[a, b[$, sekä rajoittamattomia välejä $]-\infty, a]$, $]-\infty, a]$, $]a, \infty[$ ja $[a, \infty[$. Erityisesti positiivisia reaalilukuja merkitään $\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$. Kompleksilukuja tai kompleksitasoa merkitään symbolilla $\mathbb{C}$. Reaaliakseli ja kompleksitaso ovat nyt varustettu luonnollisilla topologioillaan. Tavanomaiseen tapaan kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ reaaliosaa merkitään $\mathrm{Re} z$, imaginääriosaa $\mathrm{Im} z$ ja kompleksikonjugaattia $\overline{z}$. Jatkossa käytetään myös *laajennettua reaaliakselia* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Joukossa $\overline{\mathbb{R}}$ muuten sama järjestysrelaatio kuten reaaliluvuilla, mutta lisäksi jokaiselle $a \in \mathbb{R}$ pätee $-\infty < a < \infty$. Lukujonojen $\overline{\mathbb{R}}$ suppeneminen määritellään laajennetulla reaaliakselilla kuten reaaliakselilla. Huomaa, että nyt jokaisella monotonisella lukujonolla on raja-arvo joukossa $\overline{\mathbb{R}}$, kuten myös sen jokaisella epätyhjällä osajoukolla siellä hyvin määritelty supremum ja infimum. Lisäksi nyt $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ voidaan määritellä suljettu väli $[a, b]$ joukossa $\overline{\mathbb{R}}$, erityisesti nyt $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Jos $\overline{\mathbb{R}}$ ei ole tuttu, niin katso vaikka [13, s.3-4].

Epätyhjän joukon A jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on periaatteessa kuvaus $\mathbb{N} \to A$, mutta toisinaan käytetään hieman epämääräistä merkintää $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$, kun halutaan korostaa alkioiden kuuluvuutta joukkoon A. Reaaliakselin tai laajennetun reaaliakselin jonoille $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ määritellään tavanomaiseen tapaan arvot $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{i \geq n} a_i$ ja $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{i \geq n} a_i$. Näiden ominaisuudet oletetaan tunnetuiksi. Mikäli $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on jono ei-negatiivisia lukuja ja kuvaus $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$, niin merkintä $a_n = \mathcal{O}(f(n))$ tarkoittaa, että löytyy $n_0 \in \mathbb{N}$ ja $C \in [0, \infty[$ siten, että $a_n \leq Cf(n)$ kaikilla $n \geq n_0$. Epätyhjille joukoille A ja B vakiofunktiota $A \to B$, $x \mapsto b \in B$, merkitään usein lyhyesti b tai b_A. Mikäli A on epätyhjä joukko ja f, g ovat funktioita joukolta A joko reaaliakselille tai laajennetulle reaaliakselille, niin merkintä $f \geq g$ tarkoittaa, että $f(x) \geq g(x)$ kaikilla $x \in A$. Vastaavasti merkitään $f > g$ tarkoittaa, että $f(x) > g(x)$ kaikilla $x \in A$. Edelleen jonolle $\mathbb{R}$ tai $\overline{\mathbb{R}}$-arvoisia kuvauksia $(f_n)_{n=1}$ joukolta A määritellään pisteittäin kuvaukset

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),$$
$$\limsup_{n\to\infty} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{ja} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x).$$

Vastaavasti määritellään pisteittäinen raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n$ mikäli se on olemassa. Tämä määritellään vastaavasti kompleksisessa tapauksessa, jos se on olemassa.

Mikäli V on reaali- tai kompleksikertoiminen vektoriavaruus, niin jokaiselle $x \in V$, epätyhjille $A, B \subset V$ ja kerroinkunnan luvulle t asetetaan tavanomaiseen tapaan $x + A = \{x + y : y \in A\}$, $tA = \{ty : y \in A\}$ ja $A + B = \{y + z : y \in A, z \in B\}$.

Topologian osalta työssä käytetään seuraava konventiota: kaikki topologiset kannat sisältävät tyhjän joukon.

2.2 Mitta- ja integroimisteoriaa

2.2.1 Mitta-avaruus ja mitta

Epätyhjälle joukolle X sen potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ osakokoelma tai osajoukko $\mathcal{A}$ on *sigma-algebra*, mikäli seuraavat ominaisuudet ovat voimassa.

(i) Aina $X \in \mathcal{A}$.

(ii) Jos $A \in \mathcal{A}$, niin $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Jos $A_i \in \mathcal{A}$ numeroituvalla indeksijoukolla I, niin $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Ehdoista (i) ja (ii) seuraa, että aina $\emptyset \in \mathcal{A}$. Ehdoista (ii) ja (iii) seuraa joukko-opin peruslaskusäännöillä, että mikäli $A_i \in \mathcal{A}$ numeroituvalla indeksijoukolla I, niin $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$. Paria $(X, \mathcal{A})$ kutsutaan yleensä *mitta-avaruudeksi.* Kokoelman $\mathcal{A}$ joukkoja kutsutaan $\mathcal{A}$*-mitallisiksi* tai kontekstin ollessa selvillä vain *mitallisiksi* joukoiksi. Mikäli (X, τ) on topologinen avaruus, niin joukon X *Borel-sigma-algebra* $\mathcal{B}(X)$ on topologian τ *generoima*, eli pienin sigma-algebra, joka sisältää kaikki topologian τ (avoimet) joukot. Kokoelman $\mathcal{B}(X)$ joukkoja kustutaan *Borel-joukoiksi.* Tässä tutkielmassa tutkittavat sigma-algebrat ovat käytännössä aina Borel-sigma-algebroja.

Mitta-avaruuteen tai oikeammin sen sigma-algebraan voidaan määritellä *mitta* sopivana joukkokuvauksena.

Määritelmä 2.1 (Mitta).
Olkoon X epätyhjä joukko ja $\mathcal{A}$ sen sigma-algebra. Joukkokuvaus $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ on mitta, mikäli

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ ja

(ii) joukot $A_i \in \mathcal{A}$ ovat pareittain pistevieraat ja niiden indeksijoukko I on numeroituva, niin tällöin $\mu\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$.

Ominaisuutta (i) kutsutaan usein *numeroituvaksi additiivisuudeksi* tai vain *additiivisuudeksi.* Intuition mukaan sigma-algebran mitta määrittelee jokaiselle sigma-algebran jäsenelle koon. Triviaalein mitta sigma-algebrassa on *nollamitta*, joka antaa jokaisen sigma-algebran alkion kooksi nollan. Tapauksessa $\mu(X) = 1$ sanotaan, että μ on *todennäköisyysmitta* ja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *todennäköisyysavaruus.* Mikäli $\mu(X) < \infty$, niin sanotaan, että μ on *äärellinen*, ja mikäli löytyy joukot $A_i \in \mathcal{A}$ numeroituvalla indeksijoukolla I, $\mu(A_i) < \infty$ jokaisella $i \in I$ ja $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, niin sanotaan, että μ on *sigma-äärellinen.*

Mitan μ suhteen joukko $A \in \mathcal{A}$ on *nollanmittainen*, jos $\mu(A) = 0$. Edelleen sanotaan, että jokin ominaisuus on voimassa mitan μ mielessä melkein kaikkialla tai μ-melkein kaikkialla tai μ-melkein kaikilla pisteillä joukossa $B \in \mathcal{A}$, mikäli löytyy μ:n suhteen nollanmittainen joukko A siten, että ominaisuus on voimassa joukossa $B \setminus A$. Sovitaan, että tyhjässä joukossa kaikki on voimassa, joten sanonta pätee aina nollanmittaiselle joukolle. Mikäli jokaisen μ-nollanmittaisen joukon osajoukko kuuluu sigma-algebraan $\mathcal{A}$, niin sanotaan, että μ on *täydellinen.* Mikäli μ ja ν ovat mitta-avaruuden $(X, \mathcal{A})$ mittoja, niin mikäli jokainen μ-nollanmittainen joukko on myös ν-nollanmittainen, niin sanotaan, että ν on *absoluuttisesti jatkuva* mitan μ suhteen.

Topologisen avaruuden (X, τ) mittoja Borel-sigma-algebralla $\mathcal{B}(X)$ kutsutaan *Borel-mitoiksi.* Merkitään näiden mittojen kokoelmaa symbolilla $\mathcal{B}_X$ (älä sekoita Borel-sigma-algebraan). Edelleen merkitään *Borel-todennäköisyysmittojen* osakokoelmaa symbolilla $\mathcal{M}_X$. Mitan $\mu \in \mathcal{B}_X$ *kantaja* asetetaan joukkona

$$\operatorname{spt} \mu = X \setminus \left(\bigcup_{A \in \tau : \mu(A) = 0} A \right).$$

Kantaja on siis aina suljettu joukko, jonka ulkopuolella ei siten tapahdu mitan μ suhteen mitään mielenkiintoista. Triviaalille nollamitalle kantaja on aina tyhjä joukko. Sanotaan, että joukko *kantaa mitan*, mikäli se sisältää mitan kantajan. Se on helppo nähdä pienimmäksi suljetuksi joukoksi C, jolle $\mu(X \setminus C) = 0$. Mikäli spt μ on kompakti puhutaan *kompaktikantajaisesta* mitasta.

Mitta-avaruuden $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seuraavat perusominaisuudet voidaan todentaa mitalle μ, katso todistusta varten [2, Propositio 3.5 s.14-15].

(i) Monotonisuus: mikäli $A, B \in \mathcal{A}$ ja $A \subset B$, niin $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) Numeroituva subadditiivisuus: mikäli $A_i \in \mathcal{A}$ numeroituvalla indeksijoukolla I, niin tällöin $\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i)$.

(iii) Jatkuvuusominaisuudet: mikäli on numeroituvan monta joukkoa $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ siten, että

   a) $A_i \subset A_{i+1}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$.

   b) $A_{i+1} \subset A_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $\mu(A_1) < \infty$, niin $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$.

Numeroituvaa subadditiivisuutta kutsutaan jatkossa pelkäksi subadditiiviisuudeksi. Näitä perusominaisuuksia käytetään jatkossa ahkerasti ilman isompaa mainintaa. Joukkokuvausta $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, joka toteuttaa monotonisuuden ja subadditiivisuuden, sekä $\mu^*(\emptyset) = 0$, kutsutaan *ulkomitaksi.* Toisinaan ulkomitta on kätevämpi työkalu, sillä sen avulla voidaan mitata kaikkien osajoukkojen kokoa.

Sopivissa topologisissa avaruuksissa äärellisiä Borel-mittoja voidaan approksimoida avoimilla ja suljetuilla joukoilla.

Lemma 2.2.
Olkoon (X, τ) topologinen avaruus siten, että jokaiselle suljetulle joukolle $C \subset X$ löytyy avoimet joukot $U_1, U_2, \ldots \in \tau$, joille $U_{n+1} \subset U_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Toisin sanoen jokainen suljettu joukko on G_δ-joukko. Tällöin mikäli $\mu \in \mathcal{B}_X$ on äärellinen, niin jokaiselle Borel-joukolle A pätee

$$\mu(A) = \inf \{\mu(U) : U \in \tau, A \subset U\} = \sup \{\mu(C) : C \text{ on suljettu}, C \subset A\}.$$

Huomaa, että lemma 2.2 on voimassa erityisesti metristen avaruuksien äärellisille Borel-mitoille. Katso todistusta varten [25, Lause 6.1 s.147]. Todistus on esitetty vain metrisen avaruuden Borel-todennäköisyysmitoille mutta se yleistyy sellaisenaan lemman 2.2 laajuuteen. Lemman ominaisuutta kutsutaan toisinaan *Borel-mitan säännöllisyydeksi.*

Pykälän loppuun käydään läpi muutama tavallisin tapa konstruoida uusia mittoja. Näistä ehkä yksinkertaisin esimerkki on *summamitat*: mikäli μ_k ovat mitta-avaruuden $(X, \mathcal{A})$ mittoja numeroituvalla indeksijoukolla I, niin kuvaus $\sum_{k \in I} C_k \mu_k : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, missä $C_k \in [0, \infty[$ jokaisella $k \in I$ ja jokaiselle $A \in \mathcal{A}$ asetetaan

$$\left(\sum_{k \in I} C_k \mu_k\right)(A) = \sum_{k \in I} C_k \mu_k(A),$$

on helppo todeta mitaksi.

Toinen esimerkki on ns. *rajoittumamitat*: mikäli μ on mitta ja $B \in \mathcal{A}$, niin kuvaus $\mu \llcorner B : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, missä jokaiselle $A \in \mathcal{A}$ asetetaan

$$\mu \llcorner B(A) = \mu(B \cap A),$$

on myös helppo todeta mitan μ suhteen absoluuttiseksi jatkuvaksi mitaksi.

Ulkomittojen avulla voidaan myös indusoida mittoja. Mikäli X on epätyhjä joukko ja μ^* on sen ulkomitta, niin sanotaan, että joukko $A \in \mathcal{P}(X)$ on μ^**-mitallinen*, mikäli jokaiselle $E \in P(X)$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Merkitään μ^*-mitallisten osajoukkojen kokoelmaa symbolilla $\mathcal{M}_{\mu^*}$. Nyt ns. *Caratheodoryn lause*, katso vaikka [2, Lause 4.6 s.22-24], sanoo, että $\mathcal{M}_{\mu^*}$ on sigma-algebra ja ulkomitan μ^* rajoittuma tähän sigma-algebraan on täydellinen mitta. Syntynyttä mittaa kutsutaan usein *sisämitaksi.* Monessa tapauksessa rajoitutaan kuitenkin $\mathcal{M}_{\mu^*}$:n kantamiin pienempiin sigma-algebroihin, jolloin puhutaan *μ^*:n indusoimasta mitasta.*

2.2.2 Mitalliset kuvaukset

Tarkastellaan seuraavaksi tavanomaisia *mitallisia kuvauksia* mitta-avaruudelta laajennetulle reaaliakselille $\overline{\mathbb{R}}$ ja kompleksitasolle $\mathbb{C}$ Muodollinen määritelmä asetetaan tällöin seuraavasti

Määritelmä 2.3 (Mitallinen kuvaus laajennetulle reaaliakselille $\overline{\mathbb{R}}$ ja kompleksitasolle $\mathbb{C}$). *Olkoon $(X, \mathcal{A})$ mitta-avaruus ja kuvaus $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Tällöin f on mitallinen mitta-avaruuden suhteen, mikäli jokaiselle $a \in \mathbb{R}$ joukko $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$. Sovitaan, että kuvaus kompleksitasolle $g : X \to \mathbb{C}$ on mitallinen mitta-avaruuden suhteen täsmälleen silloin, kun sen reaali- ja imaginääriosat ovat mitallisia.*

Jokainen reaaliarvoinen kuvaus voidaan mieltää aina laajennetuksi reaaliarvoiseksi kuvaukseksi, joten mitallisuuden määritelmä menee näille määritelmän 2.3 mukaisesti. Kuvausten mitallisuus ei siis riipu suoraan mitasta vaan mitta-avaruudesta. Määritelmän 2.3 perusteella on helppo nähdä, että kaikki vakiokuvaukset ja sigma-algebran joukkojen $A \in \mathcal{A}$ karaksteristiset funktiot χ_A ovat aina mitallisia. Mikäli X on topologinen avaruus ja $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, niin mitallisia kuvauksia kutsutaan *Borel-kuvauksiksi.* Tällöin erityisesti kaikki jatkuvat kuvaukset ovat määritelmänsä perusteella Borel-kuvauksia.

Mitallisuus säilyy myös erilaisissa pisteittäisissä rajaprosesseissa jonoille: mikäli $(X, \mathcal{A})$ on mitta-avaruus ja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jono mitallisia kuvauksia $X \to \overline{\mathbb{R}}$, niin

(i) supremum $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ja infimum $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ovat aina mitallisia,

(ii) $\limsup_{n\to\infty} f_n$ ja $\liminf_{n\to\infty} f_n$ ovat aina mitallisia ja

(iii) mikäli jonon pisteittäinen raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n$ on määritelty, niin se on mitallinen.

Katso todistusta varten [14, Propositio 1.8 s.9-10]. Lukijan on tosin helppo huomata, että kohta (iii) seuraa suoraan kohdasta (ii). Seuraavat tavanomaiset pisteittäiset operaatiot kahden mitallisen kuvauksen välillä säilyttävät mitallisuuden, katso [14, Propositio 1.9 s.10-11]. Olkoon mitta-avaruus $(X, \mathcal{A})$ ja $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallisia kuvauksia. Tällöin

(iv) tulo fg on aina mitallinen (erityisesti mitallisten funktioiden reaalikerrat),

(v) maksimimi ja minimi $\max\{f, g\}$ ja $\min\{f, g\}$ ovat aina mitallisia ja

(vi) summa $f + g$ on mitallinen, mikäli se on määritelty.

Kuvauksen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *positiiviosa* f^+ ja *negatiiviosa* f^- asetetaan kuvauksina $f^+ = \max\{f, 0\}$ ja $f^- = \max\{-f, 0\}$. Tällöin $f = f^+ - f^-$ ja edellisten ominaisuuksien perusteella funktio on mitallinen täsmälleen silloin, kun positiivi- ja negatiiviosat ovat sitä. Huomaa, että nyt funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ itseisarvo voidaan kirjoittaa $|f| = f^+ + f^-$, jolloin mitallisen funktion $X \to \overline{\mathbb{R}}$ itseiarvo on aina mitallinen. Mitallisen funktion $f : X \to \mathbb{C}$ itseisarvo on muotoa $\sqrt{(\mathrm{Re} f)^2 + (\mathrm{Im} f)^2}$, jonka mitallisuus seuraa nyt aiemman nojalla havainnosta: mikäli $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen ja ei-negatiivinen, niin $\sqrt{g}$ on myös mitallinen. Tämä on lukijan helppo verifioida suoraan määritelmän 2.3 avulla.

Mitta-avaruudessa $(X, \mathcal{A})$ yksinkertaiset funktiot ovat muotoa

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \chi_{A_k},$$

missä $n \in \mathbb{N}$, $A_k \in \mathcal{A}$ ja $C_k \in \mathbb{R}$ jokaisella $k = 1, \dots, n$. Mikäli esityksessä olevat joukot muodostavat X:n osituksen, niin kyseessä on *normaaliesitys.* Jokaisella yksinkertaisella funktiolla on normaaliesitys, mutta se ei ole välttämättä yksikäsitteinen. Merkitään mitta-avaruuden $(X, \mathcal{A})$ yksinkertaisten funktioiden kokoelmaa $\mathcal{Y}(X, \mathcal{A})$ ja niiden ei-negatiivisten funktioiden osakokoelmaa symbolilla $\mathcal{Y}^+(X, \mathcal{A})$. Jokaiselle ei-negatiiviselle mitalliselle kuvaukselle $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ löytyy nouseva jono kuvauksia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Y}^+(X, \mathcal{A})$, siten että $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, katso konstruktiota varten [13, Lause 4.9 s.30].

2.2.3 Mittaintegraaleista

Tässä pykälässä esitellään kertauksenomaisesti mitta-integraalien keskeiset perusominaisuudet ja konvergenssilauseet. Pykälä pohjautuu pääosin Kilpeläisen luentomoniseeseen [13, Luvut 5, 6 ja 14 s.32-43 ja s.90-95] katso myös [14, Luvut 3 ja 4 s.35-60]. Huomaa, että Kilpeläinen on käsittelyissä käyttänyt erityistä mitta-avaruutta ja mittaa[1], mutta todistukset toimivat lähes sellaisenaan yleisessä mitta-avaruudessa Mitta-avaruuden $(X, \mathcal{A})$ ei-negatiivisille ja mitallisille kuvauksille $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ määritellään integraalit avaruuden X yli mitan μ suhteen luokan $\mathcal{Y}^+(X, \mathcal{A})$ kuvausten alkeisintegraalien (mitan μ suhteen) avulla. Tällöin kyseistä integraalia merkitään tavanomaisesti $\int_X f \; \mathrm{d}\mu$. Erityisesti jokaiselle $A \in \mathcal{A}$ voidaan kirjoittaa

$$\mu(A) = \int_X \chi_A \; \mathrm{d}\mu.$$

Lebesguen monotonisen konvergenssin lause sallii sopivat rajankäynnit ei-negatiivisiten funktiojonojen integraaleille.

Lause 2.4 (**Lebesguen monotonisen konvergenssin lause**).
Olkoon mitta-avaruus $(X, \mathcal{A})$, sen mitta μ, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ nouseva jono ei-negatiivisia mitallisia funktiota $X \to \overline{\mathbb{R}}$ ja $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; \mathrm{d}\mu = \int_X f \; \mathrm{d}\mu.$$

Lausetta käytetään jatkossa ahkerasti ilman eri viittausta puhuen vain monotonisen konvergenssin lauseesta. Seuraavaksi laajennetaan integraalin määritelmää. Mikäli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen, niin sen integraali mitan μ suhteen on olemassa, mikäli $\int_X f^+ \mathrm{d}\mu < \infty$ tai $\int_X f^- \mathrm{d}\mu < \infty$ ja tällöin asetetaan

$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \; \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \; \mathrm{d}\mu.$$

Edelleen mitalliselle $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on määritelty integraali yli epätyhjän joukon A mikäli kuvaukselle $\chi_A f$ on integraali olemassa ja tällöin taas

$$\int_A f \; \mathrm{d}\mu = \int_X \chi_A f \; \mathrm{d}\mu.$$

Toisinaan integroinnissa halutaan korostaa muuttujaa $x \in A$, jolloin merkitään

$$\int_A f(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

Integraali μ-nollanmittaisen joukon yli on aina määritelty mielivaltaiselle mitalliselle $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ja tällöin se on nolla. Mitallisten kuvausten $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mahdollisesti määritellyille integraaleille ovat seuraavat perusominaisuudet voimassa.

(i) Monotonisuus: mikäli $\int_A f \; \mathrm{d}\mu$ ja $\int_A g \; \mathrm{d}\mu$ ovat määritelty jollekin $A \in \mathcal{A}$ ja $f \geq g$ joukossa A, niin $\int_A f \; \mathrm{d}\mu \geq \int_A g \; \mathrm{d}\mu$.

(ii) Positiivisuus: mikäli $f > 0$ joukossa $A \in \mathcal{A}$, jolle $\mu(A) > 0$, niin $\int_A f \; \mathrm{d}\mu > 0$.

(iii) Lineaarisuus: mikäli summa $\alpha f + \beta g$ on määritelty joukossa $A \in \mathcal{A}$, integraalit $\int_A f \; \mathrm{d}\mu$ ja $\int_A g \; \mathrm{d}\mu$ ovat määritelty ja luku $\alpha \int_A f \; \mathrm{d}\mu + \beta \int_A g \; \mathrm{d}\mu$ on määritelty laajennetulla reaaliakselilla joillekin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, niin

$$\int_A \alpha f + \beta g \; \mathrm{d}\mu = \alpha \int_A f \; \mathrm{d}\mu + \beta \int_A g \; \mathrm{d}\mu.$$

(iv) Additiivisuus: mikäli $A_k \in \mathcal{A}$ numeroituvalla indeksijoukolla I ja integraali $\int_{\bigsqcup_{k\in I} A_k} f \; \mathrm{d}\mu$ on määritelty, niin tällöin $\int_{A_k} f \; \mathrm{d}\mu$ on määritelty jokaisella $k \in I$ ja

$$\int_{\bigsqcup_{k\in I} A_k} f \; \mathrm{d}\mu = \sum_{k\in I} \int_{A_k} f \; \mathrm{d}\mu.$$

[1] Euklidinen avaruus, Lebesguen mitta ja mitalliset joukot

Additiivisuuden seurauksena saadaan, että mikäli mitalliset f ja g ovat samat melkein kaikkialla joukossa $A \in \mathcal{A}$ ja niiden integraalit ovat määritelty joukon yli, niin kyseiset integraalit ovat samat. Mikäli ei-negatiivisen ja mitallisen funktion integraali yli mitallisen joukon yli on nolla, niin kyseinen funktio melkein kaikkialla joukossa nolla vastaavan mitan suhteen.

Jokaisen mitallisen funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ itseisarvon integraali joukon $A \in \mathcal{A}$ yli on nyt

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_A f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_A f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

Sanotaan, että mitallinen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on *integroituva* mikäli $\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu, \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Huomaa, että tämä on yhtäpitävää ehdon $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ kanssa. Erityisesti mikäli f ja g ovat μ-integroituvia, niin $\max\{f, g\}$ ja $\alpha f + \beta g$ ovat μ-integroituva kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tärkeä arviointiväline on *integraalin kolmioepäyhtälö*: mikäli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen ja $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ on määritelty jollekin $A \in \mathcal{A}$, niin tavallisen kolmioepyhtälön suorana seurauksena

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right| = \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Monotonisen konvergenssin lause muotoiltiin vain ei-negatiivisille funktioille. Esitellään seuraavaksi toinen klassinen konvergenssilause, joka toimii laajemmassa funktiojoukossa.

Lause 2.5 (**Lebesguen dominoidun konvergenssin lause**).
Olkoon mitta-avaruus $(X, \mathcal{A})$, sen mitta μ ja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jono μ-integroituvia funktioita. Mikäli jono konvergoi pisteittäin rajafunktioon f ja löytyy μ-integroituva g siten, että $|g| \geq |f_n|$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin f on μ-integroituva ja

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Lausetta 2.5 hyödynnetään myös ahkerasti jatkossa ilman eri viittausta puhumalla vain dominoidun konvergenssin lauseesta. Monotonisen ja dominoidun konvergenssin lauseet yleistyvät tapauksiin, joissa jonot konvergoivat mitan mielessä melkein kaikkialla mitalliseen rajafunktioon.

Jokaiselle ei-negtiiviselle ja mitalliselle $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ja mitalle μ kuvaus $\mu_f : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, missä jokaiselle $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu_f(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu, \tag{2.1}$$

on mitan μ suhteen absoluuttisesti jatkuva mitta. Sopivissa tilanteissa *Radon–Nikodymin lause* takaa myös käänteisen päättelyn.

Lause 2.6 (**Radon–Nikodym**).
Olkoon $(X, \mathcal{A})$ mitta-avaruus μ sigma-äärellinen mitta $\mathcal{A}$:ssa. Mikäli ν on $\mathcal{A}$:ssa äärellinen mitta, joka on absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen, niin löytyy mitta-avaruuden suhteen mitallinen ja ei-negatiivinen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ siten, että f on μ-integroituva ja $\nu = \mu_f$, missä μ_f asetetaan yhtälön 2.1 mukaisesti. Lisäksi f on mitan μ suhteen melkein kaikkialla yksikäsitteinen.

Lauseen 2.6 muotoilu pohjautuu nyt Bassin esitykseen, katso [2, Lause 13.4 s.101-103]. Huomaa, että Bass käsittelee kuvauksia vain reaaliakselille ei laajennetulle, mutta tällä ei ole väliä.

Mitalliselle funktiolle kompleksitasolle integraali yleistetään melko intuitiivisesti. Mitallinen $f : X \to \mathbb{C}$ on μ-integroituva täsmälleen silloin, kun sen reaali- ja imaginääriosat ovat sitä. Tällöin asetetaan

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X \mathrm{Re} f \, \mathrm{d}\mu + i \int_X \mathrm{Im} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Integraali yli mitallisen joukon määritellään kuten aiemmin. Erityisesti integraalin lineaarisuus ja additiivisuus on helppo yleistää kompleksisten funktioiden integraaleille. Integraalin kolmioepäyhtälön yleistäminen vaatii sen sijaan hieman mielikuvitusta, katso malliksi vaikka [2, Propositio 6.4 s.49]. Nyt monotonisuuden nojalla

$$\int_X |\mathrm{Re} f| + |\mathrm{Im} f| \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X \sqrt{(\mathrm{Re} f)^2 + (\mathrm{Im} f)^2} \, \mathrm{d}\mu \geq \max\left\{ \int_X |\mathrm{Re} f| \, \mathrm{d}\mu, \int_X |\mathrm{Im} f| \, \mathrm{d}\mu \right\},$$

joten mitallisen $f : X \to \mathbb{C}$ μ-integroituvuus on yhtäpitävää ehdon $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ kanssa (kuten reaalisessa tapauksessa). Myös dominoidun konvergenssin lause yleistyy sellaisenaan kompleksiseen tapaukseen.

Mitta-avaruuden $(X, \mathcal{A})$ suhteen mitalliselle kuvaukselle f asetetaan jokaisen mitta-avaruuden mitan μ suhteen $\mathcal{L}^p_\mu$*-seminormi* integraalina

$$\|f\|_{p,\mu} = \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.2}$$

missä $p \in [1, \infty[$. Edelleen asetetaan $\mathcal{L}^\infty_\mu$*-seminormi*

$$\|f\|_{\infty,\mu} = \sup\{t \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq t\}) > 0\}. \tag{2.3}$$

Nyt funktiota f, jolle $\|f\|_{p,\mu} < \infty$ jollain $p \in [1, \infty]$, kutsutaan $\mathcal{L}^p_\mu$*-funktioksi.* Tällöin $\mathcal{L}^1_\mu$-funktio on yhtäpitävä μ-integroituvan funktion kanssa.

Ongelmaksi mitta-avaruudelle $(X, \mathcal{A})$ ja sen mitalle μ muodostuvat tapaukset, joissa mitallisten kuvausten f ja g summa $\alpha f(x) + \beta g(x)$ on määritelty joillain $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mitan μ mielessä melkein kaikilla $x \in X$, mutta ei välttämättä kaikilla $x \in X$. Nyt kuitenkin löytyy mitallinen kuvaus h, jolle $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ μ-melkein kaikilla $x \in X$ ja ongelman kiertämiseksi sovitaankin, että kuvaus $\alpha f + \beta g$ mitan μ suhteen tarkoittaa tällaista mitallista kuvausta. Määritelmä on μ-nollanmittaista joukkoa lukuunottamatta yksikäsitteinen. Mikäli f ja g ovat μ-integroituvia, niin integraalin additiivisuuden nojalla näin asetettu $\alpha f + \beta g$ on määritelty integroituvana ja

$$\int_A \alpha f + \beta g \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \beta \int_A g \, \mathrm{d}\mu.$$

jokaisella $A \in \mathcal{A}$. Mikäli μ-nollanmittaisessa joukossa toisistaan poikkeavat mitalliset funktiot samaistetaan ekvivalenssiluokiksi, niin jokaiselle $p \in [1, \infty]$ $\overline{\mathbb{R}}$- tai $\mathbb{C}$-arvoisten $\mathcal{L}^p_\mu$-funktioiden joukosta saadaan reaalikertoiminen L^p_μ*-avaruus*, $\mathcal{L}^p_\mu$-seminormista tulee kyseisessä avaruudessa L^p_μ*-normi* ja tämä on normiavaruutena Banach-avaruus, katso vaikka [13, s.67-73] (käsitelty Lebeguen mitalle, mutta tarkastelut yleistyvät lähes sellaisenaan) tai [9, s.50-51].

Aiemmin esitetyissä konvergenssilauseissa lähdetään liikkelle pisteittäisestä konvergenssista rajafunktioon. Hieman päinvastaisen tyyppinen päättely on myös voimassa.

Lemma 2.7.
Olkoon $(X, \mathcal{A})$ mitta-avaruus, μ mitta $\mathcal{A}$:ssa, $(f_n)_{n=1}^\infty$ jono mitallisia ja μ-integroituvia kuvauksia $X \to \overline{\mathbb{R}}$ ja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen ja μ-integroituva. Mikäli

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

niin jonolla on osajono, joka suppenee μ-melkein kaikkialla pisteittäin kuvaukseen f.

Lemma pohjautuu nyt Kilpeläisen monisteen esitykseen, katso [13, s.72-73] ja erityisesti sieltä lause 10.8. Tarkastelut on taas tehty vain Lebesguen mitalle, mutta ne yleistyvät lähes sellaisenaan yleiseen tapaukseen.

2.2.4 Muuttujanvaihto integroinnissa

Edellisessä pykälässä määriteltiin mitalliset kuvaukset mitta-avaruudelta laajennetulle reaaliakselille. Palataan taaksepäin tarkastelemaan kuvauksia mitta-avaruudelta $(X, \mathcal{A})$ annetulle epätyhjälle joukolle Y. Olkoon kuvaus $F : X \to Y$. Aluksi on helppo todeta, että kokoelma

$$\mathcal{A}_F = \left\{ A \in \mathcal{P}(Y) : F^{-1}(A) \in \mathcal{A} \right\}$$

on sigma-algebra, jolloin kuvaus F indusoi uuden mitta-avaruuden $(Y, \mathcal{A}_F)$. Tällöin kuvausta F voi pitää luonnollisena mitta-avaruuksien $(X, \mathcal{A})$ ja $(Y, \mathcal{A}_F)$ välillä. Tämä antaa aiheen seuraaviin määritelmiin.

Määritelmä 2.8 (**Mitallisuus ja mitallisuuden säilyttäminen**).
Olkoon $(X, \mathcal{A})$ *ja* $(Y, \mathcal{B})$ *mitta-avaruuksia, sekä kuvaus* $F : X \to Y$*. Sanotaan, että kuvaus* F *on mitallinen mitta-avaruuksien* $(X, \mathcal{A})$ *ja* $(Y, \mathcal{B})$ *välillä, mikäli jokaiselle* $B \in \mathcal{B}$ *alkukuva* $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$*. Mikäli taas* $F(A) \in \mathcal{B}$ *kaikilla* $A \in \mathcal{A}$*, niin sanotaan, että* F *säilyttää mitallisuuden em. mitta-avaruuksien välillä.*

Mikäli $(X, \mathcal{A})$ on mitta-avaruus ja $F : X \to X$ on mitallinen mitta-avaruudelta itselleen, niin sanotaan, että F on $\mathcal{A}$-*mitallinen*. Mitallisuuden määritelmää 2.8 voi pitää nyt määritelmän 2.3 yleistyksenä. Sillä nyt mitalliset kuvaukset mitta-avaruudelta $(X, \mathcal{A})$ laajennetulle reaaliakselille ovat määritelmän 2.8 nojalla mitallisia kuvauksia mitta-avaruudelta $(X, \mathcal{A})$ mitta-avaruudelle $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}))$, missä $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}})$ on suppein sigma-algebra joukossa $\overline{\mathbb{R}}$, joka sisältää joukot $]a, \infty]$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$. Tällöin $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}})$ on helppo nähdä leikkaukseksi kaikista niistä sigma-algebroista, jotka sisältävät joukot $]a, \infty]$.

Määritelmän 2.8 konsepteja käytetään usein tuottamaan uusia mittoja. Seuraava havainto on lähes triviaali todistaa.

Lemma 2.9.
Olkoon $(X, \mathcal{A})$ *ja* $(Y, \mathcal{B})$ *mitta-avaruuksia,* μ $\mathcal{A}$*:n mitta ja* ν $\mathcal{B}$*:n mitta, sekä kuvaus* $F : X \to Y$*. Mikäli*

(i) F *on mitallinen, niin joukkokuvaus* $\mu \circ F^{-1} : \mathcal{B} \to [0, \infty]$*, missä jokaiselle* $B \in \mathcal{B}$ *asetetaan* $(\mu \circ F^{-1})(B) = \mu(F^{-1}(B))$*, on mitta.*

(ii) F *on mitallisuuden säilyttävä ja injektiivinen, niin joukkokuvaus* $\nu \circ F : \mathcal{A} \to [0, \infty]$*, missä jokaiselle* $A \in \mathcal{A}$ *asetetaan* $(\nu \circ F)(A) = \nu(F(A))$*, on mitta.*

Tapauksessa (i) syntynyttä mittaa kutsutaan *eteen työnnetyksi mitaksi* kuvauksen F suhteen ja tapauksessa (ii) syntynyttä mittaa *kuvamitaksi*. Seuraavaksi esiteltävä klassinen *muuttujanvaihtolause* mahdollistaa integroinnin vaihdon mitta-avaruudesta toiseen.

Lause 2.10 (**Muuttujanvaihtolause**).
Olkoon $(X, \mathcal{A})$ *ja* $(Y, \mathcal{B})$ *mitta-avaruuksia,* μ *mitta* $\mathcal{A}$*:ssa,* $g : Y \to \mathbb{K}$*, missä* $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ *tai* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, mitallinen mitta-avaruuden* $(Y, \mathcal{B})$ *suhteen ja* $F : X \to Y$ *mitallinen kuvaus em. mitta-avaruuksien välillä. Nyt integraali* $\int_Y g \; \mathrm{d}(\mu \circ F^{-1})$ *on määritelty täsmälleen silloin, kun integraali* $\int_X g \circ F \; \mathrm{d}\mu$ *on määritelty. Tällöin*

$$\int_Y g \; \mathrm{d}(\mu \circ F^{-1}) = \int_X g \circ F \; \mathrm{d}\mu.$$

Erityisesti nyt g *on* $\mu \circ F^{-1}$*-integroituva täsmälleen silloin, kun* $g \circ F$ *on* μ*-integroituva.*

Todistus.
Voidaan olettaa, että kyseessä on kuvaus laajennetulle reaaliakselille. Edelleen integraalin lineaarisuuden nojalla on riittävää on osoittaa, että g:n ollessa ei-negatiivinen yhtälö

$$\int_Y g \; \mathrm{d}(\mu \circ F^{-1}) = \int_X g \circ F \; \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

on voimassa. Huomaa, että nyt $g \circ F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen mitta-avaruuden $(X, \mathcal{A})$ suhteen ja lemman 2.9 nojalla $\mu \circ F^{-1}$ on mitta sigma-algebrassa $\mathcal{B}$. Mikäli g on joukon $B \in \mathcal{B}$ karakteristinen funktio, niin $g \circ F$ on joukon $F^{-1}(B)$ karakteristinen funktio ja oletuksen perusteella $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Tällöin

$$\int_Y g \; \mathrm{d}(\mu \circ F^{-1}) = \int_Y \chi_B \; \mathrm{d}(\mu \circ F^{-1}) = (\mu \circ F^{-1})(B) = \mu(F^{-1}(B)) = \int_X \chi_{F^{-1}(B)} \; \mathrm{d}\mu = \int_X g \circ F \; \mathrm{d}\mu.$$

Tästä edelleen lineaarisuuden nojalla on helppo päätellä, että yhtälö (1) on voimassa kaikille yksinkertaisille $g \in \mathcal{Y}^+(Y, \mathcal{B})$. Mikäli g on ei-negatiivinen ja mitallinen, niin edellisen pykälän perusteella löytyy nouseva jono yksinkertaisia funktioita $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{Y}^+(Y, \mathcal{B})$, siten että $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Tällöin funktiojono $(g_n \circ F)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{Y}^+(X, \mathcal{A})$ on nouseva ja $\lim_{n\to\infty} g_n \circ F = g \circ F$. Siten soveltamalla tätä tietoa, yhtälön (1) voimassaoloa luokan $\mathcal{Y}^+(Y, \mathcal{B})$ kuvauksille ja monotonisen konvergenssin lausetta nähdään, että yhtälö (1) on voimassa kuvaukselle g. $\square$

Muuttujanvaihtolauseesta on nyt helppo keksiä erilaisia variantteja. Erityisesti mikäli $F : X \to Y$ on bijektio, F ja käänteiskuvaus F^{-1} ovat mitallisia mitta-avaruuksien $(X, \mathcal{A})$ ja $(Y, \mathcal{B})$ välillä, ν on $\mathcal{B}$:n mitta ja $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen $(Y, \mathcal{B})$:n suhteen, niin lauseen 2.10 nojalla integraali $\int_Y g \, \mathrm{d}\nu = \int_Y g \, \mathrm{d}(\nu \circ F \circ F^{-1})$ on määritelty täsmälleen silloin, kun integraali $\int_X g \circ F \, \mathrm{d}(\nu \circ F)$ on määritelty. Lisäksi tällöin

$$\int_Y g \, \mathrm{d}\nu = \int_X g \circ F \, \mathrm{d}(\nu \circ F).$$

2.3 Metrisistä avaruuksista

2.3.1 Merkinnöistä ja jatkuvista kuvauksista

Metriset avaruudet oletetaan tunnetuiksi, joten käsitellään ja kerrataan tässä pykälässä lähinnä käytettäviä merkintöjä ja muutama aputulos. Metristä avaruutta merkitään muodollisesti (X, d), missä X tarkoittaa epätyhjää perusjoukkoa ja d siinä olevaa metriikkaa. Yleensä kuitenkin puhutaan vain metrisestä avaruudesta X. Metriseen avaruuteen (X, d) määritellään jokaiselle $x \in X$ ja $r \in \mathbb{R}_+$ tavanomaiseen tapaan avoin pallo $B(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$ ja suljettu pallo $\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(y, x) \leq \varepsilon\}$. Avoimet pallot täydennettynä tyhjällä joukolla muodostavat kannan metriikan indusoimaan topologiaan ja avointa palloa vastaava suljettu pallo on suljettu kyseisessä topologiassa (mutta ei välttämättä ole vastaavan avoimen pallon sulkeuma). Mikäli topologiseen avaruuteen (X, τ) saadaan metriikka, joka indusoi topologian τ, puhutaan *metristyvästä* avaruudesta. Usein ei kuitenkaan tarvita mitään erityisen metriikan ominaisuuksia, jolloin on mielekästä puhua vain metristyvästä avaruudesta. Työssä käsitellään lähinnä *separoituvia* metrisiä avaruuksia, eli metrisiä avaruuksia, joilla on numeroituva tiheä osa. Tällaiset avaruudet ovat topologisina avaruuksina tunnetusti aina N_2-avaruuksia. Separoituville metrisille avaruuksille on helpohko todeta seuraava havainto.

Lemma 2.11.
Separoituvan metrisen avaruuden jokainen epätyhjä osa separoituu.

Mikäli (X, d) on metrinen avaruus, niin epätyhjälle osajoukolle $A \subset X$ määritellään *halkaisija*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Tyhjälle joukolle asetetaan $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$. Edelleen kahden epätyhjän osajoukon A ja B välinen *etäisyys* asetetaan

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y).$$

Tästä erikoistapauksena saadaan pisteen etäisyys joukosta vastaavan yksiön etäisyytenä joukosta. Tyhjän joukon etäisyys mielivaltaisesta joukosta asetetaan muodollisesti nollaksi.

Tarkastellaan seuraavaksi reaaliarvoisia kuvauksia metristyviltä avaruuksilta. Olkoon X metrinen tai metristyvä avaruus ja kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$. Kuvauksen *kantaja* tai *supportti* asetetaan tavanomaisesti topologisena sulkeumana $\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. Mikäli $\operatorname{spt} f$ on kompkti, niin sanotaan, että f on *kompaktikantajainen.* Pääasiallinen mielenkiinto keskittyy nyt jatkuviin kuvauksiin. Merkitään jatkuvien kuvausten $X \to \mathbb{R}$ luokkaa symbolilla $C(X; \mathbb{R})$. Edelleen $C_B(X; \mathbb{R})$ tarkoittaa rajoitettujen ja jatkuvien kuvausten osakokoelmaa ja $C_0(X; \mathbb{R})$ kompaktikantajaisten ja jatkuvien kuvausten osakokoelmaa. Huomaa inkluusioketju $C_0(X; \mathbb{R}) \subset C_B(X; \mathbb{R}) \subset C(X; \mathbb{R})$. Mikäli metristyvä avaruus X on kompakti, niin tällöin $C(X; \mathbb{R}) = C_B(X; \mathbb{R}) = C_0(X; \mathbb{R})$. Jokainen näistä kokoelmista voidaan varustaa reaalikertoimiseksi vektoriavaruudeksi. Kompleksiarvoisille kuvauksille määritellään vastaavasti kokoelmat $C(X; \mathbb{C})$, $C_B(X; \mathbb{C})$ ja $C_0(X; \mathbb{C})$ kuin reaalisessa tapauksessa. Nämä palautuvat nyt vain vastaavien reaali ja -imaginääriosien tutkimiseen.

Pykälän lopussa esitellään muutama aputulos, jota tarvitaan jatkossa. Tasaisesti jatkuvat kuvaukset tiheissä joukoissa voidaan laajentaa yksikäsitteisesti metrisissä avaruuksissa.

Lemma 2.12.
Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $\Gamma \subset X$ sen tiheä osa ja $f^* : \Gamma \to \mathbb{R}$ tasaisesti jatkuva metriikan d suhteen. Tällöin löytyy yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$ siten, että $f|_\Gamma = f^*$. Lisäksi tällöin f on tasaisesti jatkuva.

Todistus.
Kiinnitetään aluksi $x \in X$. Tällöin löytyy jono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma$ siten, että $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$ ja siten $\sup_{k,l\geq N} d(x_k, x_l) \to 0$, kun $N \to \infty$. Silloin f^*:n tasaisen jatkuvuuden nojalla $(f^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, joka suppenee reaaliakselin täydellisyyden nojalla. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Tällöin tasaisen jatkuvuuden nojalla löytyy $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ siten, että jokaiselle $u, v \in \Gamma$ ehdosta $d(u, v) < \delta_\varepsilon$ seuraa

$$|f^*(u) - f^*(v)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Valitaan nyt $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $x_{n_\varepsilon} \in B(x, \frac{\delta_\varepsilon}{2})$ ja a) $|f^*(x_{n_\varepsilon}) - \lim_{n\to\infty} f^*(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin kaikilla $z \in B(x, \frac{\delta_\varepsilon}{2})$ pätee kolmioepäyhtälön nojalla, että $d(z, x_{n_\varepsilon}) < \delta_\varepsilon$. Siten

$$\left|f^*(z) - \lim_{n\to\infty} f^*(x_n)\right| \leq |f^*(z) - f^*(x_{n_\varepsilon})| + \left|f^*(x_{n_\varepsilon}) - \lim_{n\to\infty} f^*(x_n)\right| \overset{(1)+a)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tämä implikoi, että $f^*(z) \to \lim_{n\to\infty} f^*(x_n)$, kun $z \to x$ joukossa Γ metriikan d suhteen, eli raja-arvo on jonosta $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ riippumaton. Tällöin kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$, missä jokaiselle $x \in X$

$$f(x) = \lim_{\substack{z\to x\\ z\in\Gamma}} f^*(z),$$

on hyvin määritelty. Selvästi myös $f|_\Gamma = f^*$. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu ja δ_ε kuten aiemmin f^*:n tasaiseen jatkuvuuten liittyen. Olkoon sitten $x, y \in X$ siten, että $d(x, y) < \frac{\delta_\varepsilon}{2}$. Nyt funktion f määritelmän nojalla löytyy $x_\varepsilon \in B(x, \frac{\delta_\varepsilon}{4}) \cap \Gamma$ ja $y_\varepsilon \in B(y, \frac{\delta_\varepsilon}{4}) \cap \Gamma$ siten, että b) $|f^*(x_\varepsilon) - f(x)|, |f^*(y_\varepsilon) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Kolmio-epäyhtälön nojalla $d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < \delta_\varepsilon$ ja siten

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f^*(x_\varepsilon)| + |f^*(x)_\varepsilon - f^*(y_\varepsilon)| + |f^*(y_\varepsilon) - f(y)| \overset{(1)+b)}{<} \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Tämä implikoi kuvauksen f tasaisen jatkuvuuden. Yksikäsitteisyys on edelleen helppo päätellä. □

Palautetaan mieleen, että metrisen avaruuden jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden perhe $\{g_k\}_{k\in I}$ on *yhtäjatkuva*, jos jokaiselle $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta_{x,\varepsilon} \in \mathbb{R}_+$ siten, että $g_k(B(x, \delta_{x,\varepsilon})) \subset]g_k(x) - \varepsilon, g_k(x) + \varepsilon[$ jokaiselle $k \in I$. Mikäli ne ovat tasaisesti jatkuvia, niin puhutaan *tasaisesti yhtäjatkuvasta* perheestä. Perhe on rajoitettu, mikäli $\sup_{x\in X\ k\in I} |g_k(x)| < \infty$. Seuraava *Arzelà–Ascoli*-tyyppinen tulos on voimassa separoituvissa metrisissä avaruuksissa.

Lemma 2.13.
Olkoon (X, d) separoituva metrinen avaruus ja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ rajoitettu jono tasaisesti yhtäjatkuvia reaaliarvoisia kuvauksia. Tällöin löytyy tasaisesti jatkuva $f : X \to \mathbb{R}$ ja osajono $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ siten, että $f_{n_k} \to f$ pisteittäin, kun $k \to \infty$.

Todistus.
Annetaan vain todistuksen pääidea ja yksityiskohdat jätetään lukijalle. Aluksi rajoitteuneisuutta ja diagonaaliargumenttia hyödyntäen löytyy osajono $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ joka suppenee pisteittäin avaruuden X jossain numeroituvassa ja tiheässä osassa johonkin kuvaukseen $f^* : \Gamma \to \mathbb{R}$. Tämä on helppo nähdä nyt tasaisesti yhtäjatkuvaksi kuvausten $f_{n_k}|_\Gamma$ kanssa. Lemman 2.12 nojalla tämä voidaan laajentaa yksikäsitteisesti tasaiseksi jatkuvaksi kuvaukseksi $f : X \to \mathbb{R}$. Viimeinen vaihe on päätellä, että $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ suppenee pisteittäin kuvaukseen f kaikkialla. □

Huomaa, että lemmassa esiintyvä kuvaus ei ole välttämättä yksikäsitteinen. Tarkastele esimerkiksi jonoa $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, jossa $f_{2k}(x) = 0$ ja $f_{2k+1}(x) = 1$ kaikilla $x \in X$ ja $k \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Funktioavaruus $C_B(X; \mathbb{R})$

Käsitellään tässä joitain funktionaalianalyysin perusfaktoja metristyvien avaruuksien X reaaliarvoisten, jatkuvien ja rajoitettujen funktioiden funktioavaruuksista $C_B(X; \mathbb{R})$. Tässä pykälässä X on metristyvä avaruus. Jokaiselle $f \in C_B(X; \mathbb{R})$ määritellään *tasaisen suppenemisen normi* tai *sup-normi* asettamalla

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Tällöin tunnetusti $\|\cdot\|_\infty$ on normi vektoriavaruudessa $C_B(X;\mathbb{R})$ ja normiavaruus. Jatkossa puhutaan usein vain normiavaruudesta $C_B(X;\mathbb{R})$, jolloin tarkoitetaan normiavaruutta $(C_B(X;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Mikäli $(f_n)_{n=1}^\infty$ on Cauchy-jono normiavaruudessa $C_B(X;\mathbb{R})$, on helppoa nähdä, että jono suppenee normin $\|\cdot\|_\infty$ mielessä johonkin kuvaukseen $f \in C_B(X;\mathbb{R})$. Siispä normiavaruus $C_B(X;\mathbb{R})$ on *Banach-avaruus*, mutta $C_0(X;\mathbb{R})$ ei ole välttämättä enää sen suljettu normialiavaruus.

Mikäli $L : C_B(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on lineaarikuvaus, niin funktionaalianalyysistä muistetaan, että L on normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen jatkuva täsmälleen silloin, kun sen *operaattorinormi*, joka asetetaan

$$\|L\|_{op} = \sup\{|L(f)| : \|f\|_\infty \leq 1\},$$

on äärellinen, eli L on *rajoitettu funktionaali.* Normiavaruuden $C_B(X;\mathbb{R})$ *normiduaali* asetetaan nyt kokoelmana

$$C_B(X;\mathbb{R})^* = \{L : C_B(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \text{ on lineaarinen} : \|L\|_{op} < \infty\}.$$

Tämä on reaalikertoiminen vektoriavaruus ja varustettuna operaattorinormilla se on tunnetusti Banach-avaruus. Normiavaruudessa $C_B(X;\mathbb{R})$ jatkuvan lineaarikuvauksen $W : C_B(X;\mathbb{R}) \to (X;\mathbb{R})$ *duaalikuvaus* $W^* : C_B(X;\mathbb{R})^* \to C_B(X;\mathbb{R})^*$ asetetaan jokaiselle $T \in C_B(X;\mathbb{R})^*$

$$W^*(T) = T \circ W.$$

Selvästi duaalikuvaus on tällöin hyvin määritelty lineaarikuvaus ja jatkuva operaattorinormin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen. Mikäli funktiojono $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C_B(X;\mathbb{R})$ suppenee normin $\|\cdot\|_\infty$ mielessä funktioon $f \in C_B(X;\mathbb{R})$, niin tällöin $\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f)$ jokaisella $L \in C_B(X;\mathbb{R})^*$, koska nämä ovat jatkuvia em. normin suhteen. Kääntäen sanotaan, että rajoitettujen funktionaalien jono $(L_n)_{n=1}^\infty \subset C_B(X;\mathbb{R})^*$ suppenee *heikosti* rajoitettuun funktionaaliin $L \in C_B(X;\mathbb{R})^*$, mikäli jokaisella $f \in C_B(X;\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = L(f).$$

Mikäli jokaiselle $f \in C_B(X;\mathbb{R})$ asetetaan kuvaus $H_f : C_B(X;\mathbb{R})^* \to \mathbb{R}$, missä jokaiselle $L \in C_B(X;\mathbb{R})^*$ asetetaan

$$H_f(L) = L(f), \tag{2.4}$$

niin on helppo nähdä, että kuvaus H_f on jatkuva lineaarikuvaus operaattorinormin $\|\cdot\|_{op}$ suhteen. Tällöin jono $(L_n)_{n=1}^\infty \subset C_B(X;\mathbb{R})^*$ suppenee heikosti rajoitettuun funktionaaliin $L \in C_B(X;\mathbb{R})^*$ täsmälleen silloin, kun $\lim_{n\to\infty} H_f(L) = H_f(L)$ jokaisella $f \in C_B(X;\mathbb{R})$. Tästä päästään ns. *heikko*-topologian* määritelmään.

Määritelmä 2.14.
Olkoon X metristyvä avaruus. Tällöin heikko-topologia normiduaalissa $C_B(X;\mathbb{R})^*$ on suppein topologia siten, että yhtälön 2.4 mukainen kuvaus $H_f : C_B(X;\mathbb{R})^* \to \mathbb{R}$ on jatkuva jokaisella $f \in C_B(X;\mathbb{R})$.*

Suppein topologia on hyvin määritelty tässä tapauksessa, katso konstruktiota varten [21, s.16-19]. Seuraavat faktat voidaan nyt verifioida heikko*-topologiaan liittyen.

(i) $C_B(X;\mathbb{R})^*$ varustettuna heikko*-topologialla on Hausdorff-avaruus.

(ii) Joukot

$$\{T \in C_B(X;\mathbb{R})^* : |H_f(T) - H_f(W)| < \varepsilon\},$$

missä $W \in C_B(X;\mathbb{R})^*$ ja $\varepsilon > 0$, muodostavat normiduaalin $C_B(X;\mathbb{R})^*$ heikko*-topologian *alikannan*, eli kanta saadaan kaikista näiden joukkojen keskinäisistä äärellisistä leikkauksista.

(iii) $C_B(X;\mathbb{R})^*$ varustettuna heikko*-topologialla on *lokaalisti konveksi*, eli jokaiselle $T \in C_B(X;\mathbb{R})^*$ ja joukolle U, joka on avoin heikko*-topologiassa ja $T \in U$, löytyy konveksi ja heikko*-topologiassa avoin V, jolle $T \in V \subset U$.

(iv) $C_B(X;\mathbb{R})^*$ varustettuna heikko*-topologialla on *topologinen vektoriavaruus*, eli vektoriavaruuden laskutoimitukset summaus $+$ ja skaalarilla kertominen $\cdot$

$$\begin{cases} + & : C_B(X;\mathbb{R})^* \times C_B(X;\mathbb{R})^* \to C_B(X;\mathbb{R})^* \\ \cdot & : \mathbb{R} \times C_B(X;\mathbb{R})^* \to C_B(X;\mathbb{R})^* \end{cases}$$

ovat jatkuvia vastaavien tuloavaruustopologioiden suhteen.

(v) Lineaarikuvaus $H : C_B(X;\mathbb{R})^* \to \mathbb{R}$ on jatkuva heikko*-topologian suhteen täsmälleen silloin, kun $H = H_f$ jollain $f \in C_B(X;\mathbb{R})$.

(vi) Kuvaus $F : Y \to C_B(X;\mathbb{R})^*$, missä Y on epätyhjä topologinen avaruus ja $C_B(X;\mathbb{R})^*$ on varustettu heikko*-topologialla, on jatkuva täsmälleen silloin, mikäli yhdiste $H_f \circ F : Y \to \mathbb{R}$ on jatkuva jokaisella $f \in C_B(X;\mathbb{R})$.

Faktat pohjautuvat nyt Nagyn monisteen kappaleen 4 esitykseen, katso erityisesti [21, s.79-82]. Jonon $(L_n)_{n=1}^{\infty} \subset C_B(X;\mathbb{R})^*$ suppeneminen heikossa topologiassa on nyt helppo nähdä aiemmin määritellyksi heikoksi suppenemiseksi kohdan (ii) perusteella. Sanotaan edelleen, että rajoitettujen funktionaalien joukko $A \subset C_B(X;\mathbb{R})^*$ on *heikosti kompakti*, mikäli se on kompakti heikko*-topologiassa. Edelleen sanotaan, että A on *heikosti jonokompakti*, mikäli se on sitä heikko*-topologiassa sitä, ts. jokaisella A:n jonolla on osajono, joka suppenee johonkin sen pisteseen heikko*-topologiassa eli heikosti.

Lineaarikuvauksen jatkuminen operaattorinormin mielessä takaa myös sen duaalikuvauksen jatkuvuuden operaattorinormin suhteen. Näin käy myös heikko*-topologiassa.

Lemma 2.15.
Olkoon $W : C_B(X;\mathbb{R}) \to C_B(X;\mathbb{R})$ lineaarinen ja jatkuva normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen. Tällöin sen duaalikuvaus $W^* : C_B(X;\mathbb{R})^* \to C_B(X;\mathbb{R})^*$ on jatkuva heikko-topologiassa.*

Todistus.
Koskapa nyt jokaisella $f \in C_B(X;\mathbb{R})$ yhdiste $H_f \circ W^* = H_{W(f)}$ on määritelmän nojalla jatkuva heikko*-topologiassa, niin väite seuraa edellä todetusta ominaisuudesta (vi) heikko*-topologialle. □

Päättely toiseen suuntaan on luonnollisesti myös voimassa, sillä heikko*-topologia sisältyy operaattorinormin indusoimaan topologiaan. Topologisiin vektoriavaruuksiin liittyen työssä tarvitaan myös erittäin epätriviaalia *Schauder–Tihonovin kiintopistelausetta*, katso [6, Lause 2.1.1 s.36].

Lause 2.16 (Schauder–Tihonov).
Olkoon X topologinen vektoriavaruus, joka on lokaalisti konveksi ja Hausdorff-avaruus. Mikäli $V \subset X$ on epätyhjä, kompakti ja konveksi, sekä $F : V \to V$ on jatkuva, niin kuvauksella F on kiintopiste joukossa V, eli löytyy $z \in V$ siten, että $F(z) = z$.

Huomaa, että lausetta 2.16 voidaan nyt soveltaa nyt normiaduaalissa $C_B(X;\mathbb{R})^*$, joka on varustettu heikko*-topologialla.

2.3.3 Mittojen heikko kovergenssi ja jonokompaktius

Tarkastellaan edelleen metristyvän avaruuden X funktioavaruutta $C_B(X;\mathbb{R})$, joka on siis varustettu sup-normilla $\|\cdot\|_\infty$. Nyt jokaiselle äärelliselle $\mu \in \mathcal{B}_X$ *integraalioperaattori* $T_\mu : C_B(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, missä jokaiselle $f \in C_B(X;\mathbb{R})$

$$T_\mu(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \tag{2.5}$$

on lineaarinen. Nyt integraalin monotonisuuden ja kolmioepäyhtälön nojalla on helppo todeta, että T_μ:n operaattorinormi $\|T_\mu\|_{op} = \int_X 1 \,\mathrm{d}\mu = \mu(X) < \infty$, jolloin $T_\mu \in C_B(X;\mathbb{R})^*$. Integraalin monotonisuudesta johtuen kyseinen funktionaali on *positiivinen*, eli $T_\mu(f) \geq 0$, kun $f \geq 0$. Koska X on metristyvä, niin äärellisten Borel-mittojen säännöllisyyttä hyödyntäen (lemma 2.2) voidaan osoittaa, että mikäli äärellisille $\mu, \nu \in \mathcal{B}_X$ pätee $T_\mu = T_\nu$, niin $\mu = \nu$. Katso todistusta varten [25, Lause 6.2 s.147-148] (todistus on annettu Borel-todennäköisyysmitoille, mutta yleistyy sellaisenaan). Tällöin jokainen mitta $\mu \in \mathcal{B}_X$ voidaan samaistaa vastaavaan integraalioperaattoriin T_μ.

Kompaktissa metristyvässä avaruudessa K tunnettu *Rieszin esityslause* takaa myös päinvastaisen päättelyn. Huomaa, että tällöin $C_B(K;\mathbb{R}) = C(K;\mathbb{R})$.

Lause 2.17 (Rieszin esityslause).
Olkoon K kompakti metristyvä avaruus ja $T : C(K;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineaarinen ja positiivinen. Tällöin löytyy yksikäsitteinen $\mu \in \mathcal{B}_K$ siten, että jokaiselle $f \in C(K;\mathbb{R})$

$$T(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu.$$

Todistusta varten katso esimerkiksi [2, Lause 17.3 s.159-162]. Huomaa, että kuvaukselta T ei vaadita itse asiassa a priori jatkuvuutta normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen.

Palataan takaisiin yleiseen metristyvään avaruuteen X. Analogisesti sanotaan, että äärellisten Borel-mittojen jono $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}_X$ konvergoi heikosti äärelliseen Borel-mittaan $\mu \in \mathcal{B}_X$, mikäli vastaava integraalioperaattorijono $(T_{\mu_n})_{n=1}^\infty$ suppenee heikosti integraalioperaattoriin T_μ. Tällöin seuraava arvio on voimassa, vertaa [17, Lause 1.24 s.19].

Lemma 2.18.
Olkoon X metristyvä avaruus ja $(\mu_k)_{k=1}^\infty$ jono sen äärellisiä Borel-mittoja, jotka konvergoivat heikosti avaruuden X äärelliseen Borel-mittaan μ. Tällöin jokaisella avoimella $U \subset X$

$$\mu(U) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(U).$$

Todistus.
Oletetaan, että avaruudessa X on nyt joku topologian kanssa yhteensopiva metriikka d. Määritellään metriikan d avulla jokaiselle $j \in \mathbb{N}$ kuvaus $f_j : X \to \mathbb{R}$, missä jokaiselle $x \in \mathbb{N}$

$$f_j(x) = \min\left\{1, \frac{\mathrm{dist}(x, X\setminus U)}{j^{-1}}\right\}.$$

Jokainen f_j on selvästi jatkuva kuvaus, a) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq \chi_U$ ja $\lim_{j\to\infty} f_j = \chi_U$. Tällöin soveltamalla b) monotonisen konvergenssin lausetta saadaan

$$\begin{aligned}\mu(U) &= \int_X \chi_U \,\mathrm{d}\mu \overset{b)}{=} \lim_{j\to\infty}\int_X f_j \,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_X f_j \,\mathrm{d}\mu_k \\ &= \limsup_{j\to\infty}\liminf_{k\to\infty}\int_X f_j \,\mathrm{d}\mu_k \overset{a)}{\leq} \limsup_{j\to\infty}\liminf_{k\to\infty}\int_X \chi_U \,\mathrm{d}\mu_k \\ &= \liminf_{k\to\infty}\int_X \chi_U \,\mathrm{d}\mu_k = \liminf_{k\to\infty}\mu_k(U).\end{aligned}$$

□

Metristyvän avaruuden äärellisten Borel-mittojen mielivaltaista joukkoa sanotaan edelleen heikosti kompaktiksi, mikäli vastaavien integraalioperaattorien kokoelma on sitä heikko*-topologiassa. Vastaavasti sanotaan, että äärellisten Borel-mittojen mielivaltainen joukko on *heikosti jonokompakti*, mikäli vastaavien integraalioperaattorien kokoelma on sitä heikko*-topologiassa. Tällöin joukon jokainen jono sisältää osajonon, joka suppenee heikosti johonkin joukon mittaan. Voidaan osoittaa, että kompaktin metristyvän avaruuden todennäköisyysmittoja vastaavien integraalioperaattorien joukko on aina kompakti ja metristyvä heikko*-topologiassa. Katso tarkasteluja varten [25, s.148-150].

Lause 2.19.
Olkoon K kompakti metristyvä avaruus. Tällöin $\{T_\mu : \mu \in \mathcal{M}_K\} \subset C(K;\mathbb{R})^*$ on metristyvä heikko-topologiassa. Edelleen se on kompakti heikko*-topologiassa. Metristyvyyden nojalla kompaktius on nyt ekvivalenttia jonokompaktiuden kanssa.*

Sanotaan, että metristyvän avaruuden Borel-mittojen mielivaltainen osakokoelma $E \subset \mathcal{B}_X$ on *tiivis*, mikäli jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy kompakti joukko $K_\varepsilon \subset X$ siten, että

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$$

jokaiselle $\mu \in E$. *Prokhorovin lause* toteaa, että tiiviys metristyvän avaruuden Borel-todennäköisyysmittojen jonolle implikoi osajonon heikkoa konvergenssia johonkin todennäköisyysmittaan.

Lause 2.20 (**Prokhorov**).
Olkoon X metristyvä. Mikäli Borel-todennäköisyysmittojen jono $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_X$ on tiivis, niin sillä on osajono, joka suppenee heikosti johonkin mittaan $\mu \in \mathcal{M}_X$.

Katso todistusta varten esimerkiksi [3, Lause 30.4 s.239-240]. Prokhorovin lausetta voi siten pitää lauseen 2.19 yleistyksenä separoituvissa avaruuksissa.

2.4 Euklidisista avaruuksista

2.4.1 Merkintöjä ja mittateoreettisia tuloksia

Symbolilla $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, merkitään tavanomaista n-ulotteista reaalista euklidista sisätuloavaruutta, jonka algebralliset ja topologiset struktuurit oletetaan tunnetuiksi. Käydään muodollisesti läpi muutama perusnotaatio ja -tulos. Merkinnällä e_i, missä $i = 1, \dots, n$, tarkoittaa i. standardikantavektoria. Jokaiselle pisteelle $x \in \mathbb{R}^n$ on yksikäsitteinen esitys $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ standardikannassa, missä $x_i \in \mathbb{R}$ on i. koordinaatti tai karteesinen komponentti. Tavanomaisempi merkintä on tällöin $x = (x_1, \dots, x_n)$. Tavanomainen euklidinen sisätulo $\langle \cdot | \cdot \rangle$ määritellään pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ välille standardikannassa asettamalla $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Tämä indusoi euklidisen normin $\| \cdot \|$, joka asetetaan jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$. Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on on siis varustettu euklidisella sisätulolla ja normilla. Tällöin se on normiavaruutena tunnetusti täydellinen, jolloin se on normiavaruuten Banach-avaruus ja sisätuloavaruutena Hilbert-avaruus. Euklidisen normin indusoimassa euklidisessa metriikassa avoimia ja suljettuja palloja merkitään kuten yleisissä metrisissä avaruuksissa. Sisätulolle on voimassa klassinen *CBS*[2]*-epäyhtälö*, joka sanoo, että jokaiselle $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. (Tätä käytetään yleensä hyödyksi, kun halutaan osoittaa, että euklidinen normi on todellakin normi.)

Kuten ei-negatiivisille jonoille funktoille $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ merkintä $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ tarkoittaa, että löytyy $C, R \in [0, \infty[$ siten, että $f(x) \leq C g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$. Funktoiden jatkuvuus euklidisessa avaruudessa tarkoittaa jatkossa luonnollisesti jatkuvuutta euklidisen normin suhteen. Käytetään tässä yhteydessä yksinkertaistetumpia merkintöjä jatkuvien ja jatkuvien kompaktikantajaisten funktioiden luokista $C(\mathbb{R}^n) := C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ ja $C_0(\mathbb{R}^n) := C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Jatkossa tarvitaan *alhaalta puolijatkuvia* funktioita. Alhaalta puolijatkuvuus ei-negatiivisille funktioille voidaan avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritellä seuraavalla tavalla.

Määritelmä 2.21 (**Ei-negatiivisen funktion alhaalta puolijatkuvuus**).
Ei-negatiivinen kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ on puolijatkuva, mikäli löytyy nouseva jono ei-negatiivisia ja kompaktikantajaisia kuvauksia $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, siten, että f on näiden pisteittäinen raja-arvo $f = \lim_{i \to \infty} f_i$.

Differentiaalilaskenta euklidisissa avaruuksissa oletetaan myös tunnetuksi, joten esitellään lähinnä muutama notaatio ja määritelmä. Kuvauksella $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ osittaisderivaatta i. karteesisen komponentin suhteen, mikäli raja-arvo

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

on olemassa. Mikäli tämä on olemassa jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$, niin kuvaukselle f on määritelty i. osittaisderivaatta kuvauksena $\partial_i f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, missä jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ $\partial_i f(x) = \lim_{t \to 0} t^{-1}[f(x + te_i) - f(x)]$. Näiden avulla määritellään rekursiivisesti k. kertaluvun osittaisderivaatat tavanomaiseen tapaan. Erikoistapauksena merkintä $\partial_i^k f(x)$ tarkoittaa k. kertaista peräkkäistä osittaiderivaattaa pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ i. karteesisen komponentin suhteen, mikäli se on olemassa. Vastaavaa osittaisderivaattaa (jos se on olemassa) merkitään $\partial_i^k f$. Merkitään symbolilla $C^k(\mathbb{R}^n)$ niiden kuvausten $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ luokkaa, joille kaikki k. kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvana olemassa, ja symbolilla $C_0^k(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ kompaktikantajaisten kuvausten osakokoelmaa. Luokan $C^k(\mathbb{R}^n)$ kuvaukset ovat luonnollisesti jatkuvia ja luokan $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ kuvaukset rajoitettuja. Huomaa, että $C^k(\mathbb{R}^n) \subset C^l(\mathbb{R}^n)$, mikäli $k \geq l$. Sileiden funktoiden luokka asetetaan

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\mathbb{R}^n),$$

eli sileillä funktioilla on kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat jatkuvina olemassa. Näiden kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat ovat edelleen sileitä. Erityisen mielenkiinnon kohteena on kompaktikantajaisten funktioiden osakokoelma $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, jota kutsutaan ns. *testifunktioiden luokaksi.*

Jatkossa mittateoreettiset tarkastelut euklidisessa avaruudessa pysyvät euklidisen normin indusoiman topologian Borel-sigma-algebrassa $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, eli melkein kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukot, joita tarkastellaan, ovat Borel-joukkoja. Euklidisen avaruuden yhteydessä Borel-mitoilla tarkoitetaan kokoelman $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ mittoja. Lähes kaikki jatkossa esiintyvät funktiot $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$ ovat Borel-funktioita. Huomaa, että määritelmän

[2] Cauchy–Schwartz–Bunjakowski

2.21 perusteella kaikki ei-negatiiviset ja alhaalta puolijatkuvat funktiot ovat Borel-funktioita.

Mikäli μ on avaruuden $\mathbb{R}^n$, niin sanotaan, että $\overline{\mathbb{R}}$- tai $\mathbb{C}$-arvoinen Borel-kuvaus f on *lokaalisti integroituva* μ:n suhteen, mikäli $\chi_A f$ on μ-integroituva jokaisella rajoitetulla Borel-joukolla $A \subset \mathbb{R}^n$. Edelleen sanotaan, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mitta on *lokaalisti äärellinen*, mikäli jokaiselle pisteelle $x \in \mathbb{R}^n$ löytyy $r > 0$ siten, että $\mu(B(x,r)) < \infty$. Tämä on nyt yhtäpitävää avaruudessa $\mathbb{R}^n$ sen kanssa, että $\mu(K) < \infty$ jokaisella kompaktilla $K \subset \mathbb{R}^n$. Ominaisuus implikoi sigma-äärellisyyden. Lokaalisti äärellisten Borel-mittojen suhteen integroituvia Borel-kuvauksia voidaan approksimoida integraalin mielessä luokan $C_0(\mathbb{R}^n)$ kuvauksilla.

Lause 2.22.
Olkoon μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ lokaalisti äärellinen Borel-mitta ja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-funktio ja μ-integroituva. Tällöin jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy $f_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^n)$ siten, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon - f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Todistusideaa varten katso esimerkiksi [2, Lause 8.4 s.65-66]. Tämä tarkastelu on nyt tehty vain Lebesguen mitalle reaaliakselilla, mutta todistus yleistyy lauseen 2.22 tapaukseen. Kaikki palautuu siihen, että mikäli $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu Borel-joukko, niin sen karakteristista funktiota voidaan approksimoida lauseen mukaisella tavalla. Tätä varten hyödynnetään Borel-mittojen säännöllisyysominaisuutta. Ts. jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy suljettu C_ε ja avoin U_ε siten, että $C_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon$ ja $\mu(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$. Mikäli μ on äärellinen tämä on suora seuraus lemmasta 2.2. Mikäli μ on lokaalisti äärellinen, niin ominaisuus saadaan pääteltyä rajoittumalla avoimeen palloon $B(0,R)$ siten, että $A \subset B(0,R)$, ja käyttämällä rajoittumamittaa $\mu \llcorner B(0,R)$ (lokaalista äärellisyydestä seuraa rajoittumamitan äärellisyys).

Klassisista peitelauseista jatkossa tarvitaan *Vitalin peitelauseen* seuraavanlaista versiota.

Lause 2.23 (Vitalin peitelause).
Olkoon μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ lokaalisti äärellinen Borel-mitta, Borel-joukko A ja suljettujen pallojen kokoelma $\mathcal{S}$ siten, että jokaiselle pisteelle $x \in A$ pätee $\inf\{r : \overline{B}(x,r) \in \mathcal{S}\} = 0$. Tällöin löytyy pisteet $x_i \in A$ ja pallot $\overline{B}(x_i, r_i) \in \mathcal{S}$ numeroituvalla indeksijoukolla I siten, että pallot $\overline{B}(x_i, r_i)$ ovat keskenään pareittain pistevieraat ja

$$\mu\left(A \setminus \bigsqcup_{i \in I} \overline{B}(x_i, r_i)\right) = 0.$$

Todistusta varten katso [17, Lause 2.8 s.34-35]. Muotoilu ja todistus on nyt tehty Radon-ulkomitoille, mutta lauseen 2.23 tapaus menee oleellisesti samaan tapaan.

Fubinin lause tarvitaan tässä työssä vain euklidisissa avaruuksissa, mutta Fubinin toimii yleisissä mitta-avaruuksissa sigma-äärellisille mitoille. Lause pohjautuu *tulosigma-algebroihin* ja *tulomittoihin*. Luodaan aluksi näihin pikainen katsaus. Yleisesti mikäli $(X, \mathcal{A})$ ja $(Y, \mathcal{B})$ ovat mitta-avaruuksia, niin niiden tulosigma-algebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tulojoukolla $X \times Y$ on kokoelman $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ generoima sigma-algebra, eli suppein sigma-algebra, joka sisältää kyseiset joukot. Mikäli μ on $\mathcal{A}$:n sigma-äärellinen mitta ja ν on $\mathcal{A}$:n sigma-äärellinen mitta, niin niiden tulomitta $\mu \times \nu$ tulosigma-algebraan $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ määritellään asettamalla jokaiselle E

$$(\mu \times \nu)(A) = \int_X \nu(\{y \in Y : (x,y) \in E\} \mathrm{d}\mu(x).$$

Kyseessä on todella mitta sigma-algebrassa $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, katso yksityiskohtaisia tarkasteluja varten [8, s.379-384] ja erityisesti lause 21.10. Huomaa, että intuitiivisesti jokaiselle $A \in \mathcal{A}$ ja $B \in \mathcal{B}$

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Palataan takaisin euklidisiin avaruuksiin. Nyt voidaan osoittaa, että jokaiselle $m, n \in \mathbb{N}$ pätee $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, katso [9, Propositio 5.3 s.56]. Näiden pohjalta voidaan esitellä Fubinin lause tai sen eräs versio euklidisissa avaruuksissa.

Lause 2.24 (Fubinin lause).
Olkoon $m, n \in \mathbb{N}$, μ sigma-äärellinen Borel-mitta avaruudessa $\mathbb{R}^m$, ν sigma-äärellinen Borel-mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{K}$, missä $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, Borel-kuvaus. Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa.

(i) Kuvaukset $\mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}},\ x \mapsto |f(x,y)|$ *jokaiselle* $y \in \mathbb{R}^n$ *ja* $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}},\ y \mapsto |f(x,y)|$ *jokaiselle* $x \in \mathbb{R}^m$ *ovat Borel-kuvauksia.*

(ii) Kuvaukset $\mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}},\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y)$ *ja* $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}},\ y \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\mathrm{d}\mu(x)$ *ovat Borel-kuvauksia.*

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} |f(x,y)|\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x).$$

(iv) Mikäli joku kohdan (ii) integraaleista on äärellinen, niin f *on* $\mu\times\nu$*-integroituva ja*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x).$$

Lisäksi tällöin löytyvät Borel-kuvaukset $f_m : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *ja* $f_n : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *siten, että* μ*-melkein kaikilla* $x \in \mathbb{R}^n$ *ja* ν*-melkein kaikilla* $y \in \mathbb{R}^m$

$$f_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\mathrm{d}\nu(y), \quad f_n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}\mu(x).$$

Lause 2.24 seuraa nyt melko helposti tuloksesta [8, Lause 21.12 s.384-386] ja tulo-ominaisuudesta $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Lauseeseen 2.24 viitataan jatkossa puhumalla lyhyesti Fubinin lauseesta.

2.4.2 Lebesguen mitasta

Käydään seuraavaksi joitain merkintöjä ja perusfaktoja liittyen klassiseen *n-ulotteiseen Lebesguen mittaan* m_n avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Ellei muuta mainita, niin kaikki pohjautuu Hunterin ja Kilpeläisen monisteisiin, katso [9, s.10-31 ja s.55-62] ja [13, s.6-20]. Lebesguen mitta m_n saadaan *Lebesguen ulkomitan* m_n^* kautta rajoittumalla Carathéodoryn kriteerion mukaisesti m_n^*-mitallisten joukkojen sigma-algebraan. Tässä sigma-algebrassa Lebesguen mitta m_n on täydellinen, kuten kaikki muutkin ulkomittakonstruktioista saatavat mitat. Edelleen kaikki Borel-joukot kuuluvat tähän sigma-algebraan. Tässä tutkielmassa Lebesguen mitta m_n on rajoitettu aina Borel-joukkojen sigma-algebraan $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, jolloin täydellisyys menetetään. Moni ominaisuus, joka esitellään seuraavaksi, toimii ulkomitalle m_n tai m_n^*-mitallisten joukkojen sigma-algebrassa ja periytyy siten Borel-joukkojen sigma-algebraan. Lebesguen mitta vastaa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ nyt intuitiota geometrisesta tilavuudesta, erityisesti *n-välille* $I = I_1\times\cdots\times I_n \subset \mathbb{R}^n$, missä jokainen $I_i \subset \mathbb{R}$ on avoin, puoliavoin tai suljettu väli, saadaan Lebesguen mitaksi $m_n(I) = \prod_{i=1}^n \mathrm{diam}(I_i)$. Seuraavat perusominaisuudet ovat nyt voimassa Lebesguen mitoille rajoitettuina Borel-sigma-algebroihin.

(i) Lebesguen mitta m_n on avaruudessa $\mathbb{R}^n$ lokaalisti äärellinen.

(ii) *Siirto-invarianttius*: jokaiselle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ja $x \in \mathbb{R}^n$ pätee $m_n(A+x) = m_n(A)$.

(iii) Käyttäytyminen skaalauksissa: jokaiselle $t \in \mathbb{R}_+$ ja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pätee $m_n(tA) = t^n m_n(A)$.

(iv) Lebesguen mitta on tulomitta: $m_{k+l} = m_k \times m_l$ jokaiselle $k,l \in \mathbb{N}$.

Kolme ensimmäistä ominaisuutta seuraavat vastaavien Lebesguen ulkomittojen ominaisuuksista. Viimeinen ominaisuus ei ole voimassa Lebesguen mitalle ulkomitan suhteen mitallisten joukkojen sigma-algebrassa.

Jatkossa $\overline{\mathbb{R}}$- tai $\mathbb{C}$-arvoisen Borel-funktion f integraalia Lebesguen mitan m_n suhteen merkitään

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x,$$

mikäli kyseinen integraali on määritelty. Yksiulotteisessa tapauksessa käytetään merkintää

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

missä $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ja $a < b$, tarkoittaa yli välin $]a, b[$, mikäli se on määritelty. Koska yksittäiset pisteet ovat aina Lebesguen mitan suhteen, niin merkinnällä voidaan tarkoittaa myös integraalia yli välien $[a, b]$ (mikäli $a, b \in \mathbb{R}$), $[a, b[$ (mikäli $a \in \mathbb{R}$) tai $]a, b]$ (mikäli $b \in \mathbb{R}$). Jatkuvien funktioiden integraalit yli kompaktien välien mitan m_1 suhteen yhtyvät niiden *Riemann-integraaleihin*. Tällöin Riemann-integraaleista tuttu *osittaisintegrointi* on voimassa. Mikäli f ja g ovat suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuvia ja reaali- tai kompleksiarvoisia funktioita ja avoimella välillä $]a, b[$ jatkuvasti derivoituvia, niin

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Käyttämällä konvergenssilasueita saadaan seuraava käyttökelpoinen versio: mikäli f ja g ovat reaaliakselilla $\mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituvia reaali- tai kompleksiarvoisia funktioita, $f'g$ ja fg' integroituvia mitan m_1 suhteen ja $\lim_{|x|\to\infty} f(x)g(x) = 0$, niin

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Koska nyt avaruuden $\mathbb{R}^n$ skaalaukset ja siirrot ovat homeomorfismeja ja siten mitallisia kuvauksia mitta-avaruudelta $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ itselleen, niin soveltamalla muuttujanvaihtolausetta 2.10 ja Lebesguen mitan ominaisuuksia siirroille ja skaalauksille saadaan jokaiselle $z \in \mathbb{R}^n$ ja $t \in \mathbb{R}_+$ sijoituksilla $x = y + z$ ja $x = ty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(y+z)\mathrm{d}y \quad \text{ja} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \mathrm{d}x = t^n \int_{\mathbb{R}^n} f(ty)\mathrm{d}y,$$

kun $\overline{\mathbb{R}}$- tai $\mathbb{C}$-arvoisen Borel-funktion f integraali Lebesguen mitan suhteen on määritelty. Nämä ovat tavanomaisimmat muuttujanvaihdot, mitä tarvitaan jatkossa integroitaessa Lebesguen mitan suhteen. Yksiulotteisessa tapauksessa tarvitaan välillä hienostuneempaa versiota muuttujanvaihdossa. Mikäli $I \subset \mathbb{R}$ on avoin mahdollisesti rajoittamaton väli, $\varphi : I \to I$ jatkuvasti derivoituva bijektio, jonka käänteiskuvaus on myös jatkuvasti derivoituva ja f on $\overline{\mathbb{R}}$- tai $\overline{\mathbb{C}}$-arvoinen Borel-kuvaus, jolle $\int_I f(x)\mathrm{d}x$ on määritelty, niin

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_I f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\mathrm{d}x.$$

Tämä on erikoistapaus huomattavasti yleisemmästä tuloksesta, katso [15, Lause 6.2.2 s.251].

Koska Lebesguen mitta on nyt tulomitta Borel-joukkojen sigma-algebrassa, niin Fubinin lausetta voidaan soveltaa sen yhteydessä. Fubinin lauseen yksi hyödyllinen lause seuraus on *Cavalierin periaate*, joka palauttaa ei-neagtiivisen Borel-funktion integraalin sigma-äärellisen mitan suhteen yksiulotteiseksi integraaliksi Lebesguen mitan suhteen.

Lause 2.25 (**Cavalierin periaate**).
Olkoon μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ sigma-äärellinen Borel-mitta ja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ei-negatiivinen Borel-funktio. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_0^\infty \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}\right)\mathrm{d}t.$$

Todistusideaa varten katso vaikka [17, Lause 1.15 s.15]. Ideana on nyt todeta avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ joukko $A = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > 0,\ f(x) \geq t\right\}$ Borel-joukoksi ja soveltaa Fubinin lausetta sen karakteristiseen funktioon χ_A.

2.4.3 Hausdorff-mitoista ja -dimensioista

Tarkastellaan kappaleen lopuksi nopeasti tavanomaisia Hausdorff-mittoja avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Pykälä on sovellettu nyt Mattilan esityksen pohjalta, katso [17, s.54-59]. Niin sanotulla *Carathéodoryn konstruktiolla* saadaan nyt määriteltyä avaruuteen $\mathbb{R}^n$ Hausdorff-mitat.

Määritelmä 2.26 (**Hausdorffin s-mitta**).
Olkoon $s \in [0,\infty[$. Määritellään jokaiselle $\delta \in]0,\infty]$ kuvaus $\mathcal{H}^s_\delta : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty[$ asettamalla jokaiselle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ \mathrm{diam}(E_i) \le \delta \text{ ja } E_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Tässä joukoille E_i käytetään tulkintaa tulkinnalla $\mathrm{diam}(E_i)^0 = 1$, kun $E_i \neq \emptyset$ ja $\mathrm{diam}(\emptyset)^0 = 0$. Tästä saadaan s-ulotteinen Hausdorff-mitta tai Hausdorffin s-mitta $\mathcal{H}^s$ asettamalla jokaiselle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$.

Määritelmän mitta on todella Borel-mitta. Tämä voidaan todeta ulkomittakonstruktion kautta. Kuvausta $\mathcal{H}^s_\infty$ kutsutaan *s-ulotteiseksi Hausdorff-sisällöksi.* Nyt on helppo nähdä, että jokaisella $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pätee $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \le \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$ aina, kun $0 < \delta_2 \le \delta_1 \le \infty$. Tällöin nähdään, että jokaisella $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\delta\to\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A) = H^s(A).$$

Mitä Hausdorff-mitat eri dimensioilla intuitiivisesti tarkoittavat? Esimerkiksi $\mathcal{H}^0$ on lukumäärämitta (huomaa määritelmän tulkinta halkaisijoiden nollapotensseille), $\mathcal{H}^1$ on yleistetty pituusmitta ja avaruudessa $\mathbb{R}^n$ mitta $\mathcal{H}^n$ on Lebesguen mitan m_n skaalaus.

Käydään seuraavaksi läpi joitain Hausdorff-mittojen perusominaisuuksia. Jokaiselle $s \in [0,\infty[$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}_+$ ja $x \in A$ pätee $\mathcal{H}^s(tA) = t^s\mathcal{H}^s(A)$ ja $\mathcal{H}^s(A + x) = \mathcal{H}^s(A)$. Hausdorffin mitat ovat siis siirtoinvariantteja ja skaalaus on kontrolloitua kuten Lebesguen mitalla. Lisäksi $H^s(A) = 0$ täsmälleen silloin, kun $H^s_\delta(A) = 0$, missä $\delta \in]0,\infty]$. Mikäli on luvut $0 \le s < t < \infty$ ja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, niin ehdosta $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ seuraa, että $\mathcal{H}^t(A) = 0$ ja ehdosta $\mathcal{H}^t(A) > 0$ seuraa, että $\mathcal{H}^s(A) = \infty$. Tästä päästään syvälliseen konseptiin – *Hausdorff-dimensioon.*

Määritelmä 2.27 (**Hausdorff-dimensio**).
Joukon $A \in \mathbb{R}^n$ Hausdorff-dimensio asetetaan $\dim_H(A) = \sup\{s > 0 : \mathcal{H}^s(A) > 0\}$ *tulkinnalla* $\sup\emptyset = 0$.

Koska nyt $\mathcal{H}^n$ on Lebesguen mitan skaalaus, on se lokaalisti äärellinen ja siten $\mathcal{H}^n(K) < \infty$ kaikilla kompakteilla $K \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin $\mathcal{H}^s(K) = 0$ kaikilla $s > n$, joten on helppo nähdä, että $\mathcal{H}^s$ on siinä tapauksessa on triviaali nollamitta. Tästä seuraa, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ minkään Borel-joukon Hausdorff-dimensio ei voi ylittää avaruuden dimensiota n. Huomaa, että mikäli Borel-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $m_n(A) > 0$, niin myös $\mathcal{H}^n(A) > 0$ ja siten $\dim_H(A) = n$. Nyt aina, kun $\dim_H(A) < t < \infty$, niin $\mathcal{H}^s(A) = 0$ jokaiselle Borel-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$. Edelleen mikäli $\dim_H(A) > 0$, niin aiemman perusteella $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ kaikilla $0 \le s < \dim_H(A)$. Sen sijaan luvun $\mathcal{H}^{\dim_H(A)}(A)$ suuruutta ei osata yleisesti päätellä.

3 Harmonista analyysia

Tässä luvussa käsitellään kertauksenomaisesti joitain peruskonsepteja ja perustuloksia harmonisesta analyysistä euklidisessa avaruudessa – lähinnä integroituvien Borel-funktioden ja äärellisten Borel-mittojen Fourier-muunnoksista. Luku toimii pohjana seuraavaan lukuun ja myös motivaattorina tutkielmaan.

Merkinnällä tarkoitetaan $\|\cdot\|_p$ yhtälön (2.2) tai (2.3) mukaista $\mathcal{L}^p_{m_n}$-seminormia mitan m_n suhteen, missä $p \in [1,\infty]$. Edelleen merkinnällä $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ tarkoitetaan Borel-kuvausten $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ joukkoa, joille $\|f\|_p < \infty$. Pääasiassa tarkastellaan integroituvien funktioiden joukkoa $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Ensimmäisessä kappaleessa esitellään *konvoluutiot* funktioiden välille sekä funktioiden ja mittojen välille avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Lisäksi tarkastellaan funktion approksimintia konvoluutioilla ja *approksimaatioperheitä*. Toisessa kappaleessa esitellään klassiset Fourier-muunnokset luokan $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ kuvauksille sekä muunnosten perusominaisuuksia ja -tuloksia. Erityisesti esitellään *Riemann-Lebesgue-lemma*, joka takaa kaikkien luokan $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ muunnosten häviävän äärettömyydessä, *käänteiskaava* integroituville Fourier-muunnoksille ja *Parsevalin kaava*. Lisäksi määritellään *yleistetyt Fourier-muunnokset*. Viimeisessä kappaleessa esitellään avaruuden $\mathbb{R}^n$ äärellisten Borel-mittojen Fourier-muunnokset ja näille joitain perustuloksia. Lopuksi esitellään *Rajchman-mitat*, joiden Fourier-muunnokset häviävät äärettömyydessä. Näitä mittoja käsitellään myöhemmin lisää tutkielmassa.

Luku pohjautuu pääsasiassa Bassin teokseen [2], katso kappale 16 s.147-156, ja Mattilan teokseen [17], katso s.19-21 ja s.159-161. Myös muita referenssejä löytyy. Huomaa, että Mattila puhuu Radon-(ulko)mitoista. Tällä ei ole kuitenkaan mitään merkitystä.

3.1 Konvoluutiot ja approksimaatioperheet

Aloitetaan kappale määrittelemällä tavanomainen Borel-funktioiden välinen konvoluutio Lebesguen-mitan suhteen.

Määritelmä 3.1 (**Konvoluutio).**
Olkoon kuvaukset $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-funktioita. Mikäli integraali

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

on määritelty m_n-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, niin sanotaan, että kuvaus

$$f * g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, \quad (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \ \text{melkein kaikilla } x \in \mathbb{R}^n$$

on funktioiden f ja g konvoluutio.

Huomaa, että arvoiksi hyväksytään myös äärettömyyspisteet $\pm\infty$. Konvoluutio on aina yksikäsitteinen nollanmittaista joukkoa lukuunottamatta. Kuvaus $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ on Borel-kuvaus. Tällöin hajottamalla se positiivi- ja negatiiviosiin sekä käyttämällä Fubinin lausetta (2.24 (i)) ja konvoluution määritelmää voidaan osoittaa, että konvoluutio voidaan aina valita Borel-kuvaukseksi. Yksityiskohdat jätetään lukijalle. *Jatkossa oletetaankin konvoluution aina olevan Borel-kuvaus, kun se on määritelty.* Käsitellään seuraavaksi muutama perustulos konvoluutioille. Ensiksi yksinkertaisella muuttujanvaihdolla on helppo nähdä symmetria.

Lemma 3.2.
Jos Borel-funktioiden f ja g välinen konvoluutio $f * g$ on määritelty, niin myös konvoluutio $g * f$ on määritelty ja

$$(f*g)(x) = (g*f)(x) \ \text{ melkein kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Konvoluutio on aina määritelty luokan $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ funktioiden välille luokan $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ funktiona, vertaa [2, Propositio 15.7 s.137].

Lemma 3.3.
Olkoon $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Tällöin $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ja $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. Mikäli f ja g ovat m_n-melkein kaikkialla ei-negatiivisia, niin yhtäsuuruus on voimassa.

Todistus.
Soveltaen Fubinin lausetta ja muuttujanvaihtoa $u = x - y$ saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y)g(y)| \mathrm{d}(y,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)||g(y)| \mathrm{d}u\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\mathrm{d}y\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|\mathrm{d}u\right) \\
&= \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Tällöin kuvaus $y \mapsto f(x-y)g(y)$ on integroituva melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, joten konvoluutio $f * g$ on määritelty. Edelleen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \overset{(1)}{\leq} \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty,$$

joten väitteen arvio on totta ja siis $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Lisäksi yhtäsuuruus arvioissa olettaen, että f ja g ovat m_n-melkein kaikkialla ei-negatiivisia, on helppo nähdä. □

Lemma 3.3 on erikoistapaus *Youngin epäyhtälöstä konvoluutioille* [7, Lause 4.1.1 s.142], joka sanoo, että mikäli on luvut $r, p, q \in [1, \infty]$ siten, että $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, niin tällöin kaikille $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ja $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ saadaan

$$f * g \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n) \text{ ja } \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Integroituvaa Borel-funktiota voidaan approksimoida $\mathcal{L}^1$-seminormin suhteen sen konvoluutioilla sopivan kuvausperheen kanssa, vertaa [2, Propositio 16.6 s.151-153].

Lemma 3.4.
Olkoon perhe ei-negatiivisia funktioita $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ seuraavilla ominaisuuksilla

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\mathrm{d}x = 1$ *kaikilla* $k \in \mathbb{N}$ *ja*

(ii) jokaiselle $\varepsilon > 0$ ja $R \in \mathbb{R}_+$ löytyy $k(\varepsilon, R) \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille luonnollisille $k \geq k(\varepsilon, R)$ saadaan arvio

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} h_k(x)\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Tällöin jokaiselle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pätee $\lim_{k \to \infty} \|f - f * h_k\|_1 = 0$.

Todistus.
Aluksi mielivaltaisille $k \in \mathbb{N}$ ja $R \in \mathbb{R}_+$ saadaan seuraava arvio

$$\begin{aligned}
\|f - f * h_k\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h_k(y)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\
&\overset{(i)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-y))h_k(y)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \, h_k(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\overset{a)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{B(0,R)} h_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} h_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leq \int_{B(0,R)} h_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} h_k(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&\overset{b)}{=} \int_{B(0,R)} h_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} 2h_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{B(0,R)} h_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} h_k(y)\mathrm{d}y. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Kohdassa a) on käytetty Fubinin lausetta ja kohdassa b) on tehty muuttujanvaihto $x \mapsto x+y$. Kiinnitetään seuraavaksi $\varepsilon > 0$. Lauseen 2.22 nojalla löytyy $f_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Tällöin sisäintegraalille saadaan arvio

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| \,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \left| f_\varepsilon(x-y) - f_(x-y) \right| \mathrm{d}x \\
&\overset{c)}{=} 2\|f - f_\varepsilon\|_1 + \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| \,\mathrm{d}x. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Kohdassa c) on tehty taas muuttujanvaihto $x \mapsto x + y$. Yhdistämällä arviot (1) ja (2), sekä käyttämällä oletusta (i) saadaan

$$
\begin{aligned}
\|f - f * h_k\|_1 &\leq 2\|f - f_\varepsilon\|_1 + \int_{B(0,R)} h_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&+ 2\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} h_k(y)\mathrm{d}y \\
&\leq 2\varepsilon + \int_{B(0,R)} h_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&+ 2\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} h_k(y)\mathrm{d}y. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Tällöin d) mikäli $y \in B(0,R)$, niin $f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y) = 0$ silloin, kun $x \notin \mathrm{spt} f_\varepsilon + B(0,R)$. Siten olettamalla $R < 1$ saadaan arvio

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(0,R)} h_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\overset{d)}{=} \int_{B(0,R)} h_k(y) \int_{\mathrm{spt} f_\varepsilon + B(0,R)} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{B(0,R)} h(y) m_n \left(\mathrm{spt} f_\varepsilon + B(0,R) \right) \sup_{\substack{x \in \mathrm{spt} g_\varepsilon \\ y B(0,R) \\ \|x-y\| < R}} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| \,\mathrm{d}y \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} h(y) m_n \left(\mathrm{spt} f_\varepsilon + B(0,R) \right) \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ \|x-y\| < R}} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| \,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= m_n \left(\mathrm{spt} f_\varepsilon + B(0,R)\right) \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ \|x-y\|<R}} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| \\
&\le m_n \left(\mathrm{spt} f_\varepsilon + B(0,1)\right) \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ \|x-y\|<R}} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| \,. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Koska f_ε on tasaisesti jatkuva, niin löytyy $R_\varepsilon < 1$ siten, että

$$
\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ \|x-y\|<R_\varepsilon}} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x-y)| < \frac{\varepsilon}{m_n\left(\mathrm{spt} f_\varepsilon + B(0,1)\right) + 1}. \qquad (5)
$$

Merkitään $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\|f\|_1+1}$. Oletuksen (ii) nojalla löytyy $k(\tilde{\varepsilon}, R_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille luonnollisille $k \ge k(\tilde{\varepsilon}, R_\varepsilon)$

$$
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_\varepsilon)} h_k(y)\mathrm{d}y < \tilde{\varepsilon}. \qquad (6)
$$

Yhdistämällä arviot (3), (4), (5) ja (6) saadaan kaikille indekseille $k \ge k(\tilde{\varepsilon}, R_\varepsilon)$

$$
\|f - f * h_k\|_1 < 5\varepsilon.
$$

Tämä implikoi väitteen. □

Konvoluutioita käytetään jatkossa paljon siistien funktioiden yhteydessä, joten on syytä tutkia, mitä siisteysominaisuuksia konvoluutio perii, vertaa [17, Lause 1.26 s.20-21].

Lemma 3.5.
Olkoon $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuvia kuvauksia ja $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Tällöin:

(i) Konvoluutio $f * g$ on jatkuva kuvaus ja $f * g = g * f$. Mikäli f on tasaisesti jatkuva on myös $f * g$ on tasaisesti jatkuva.

(ii) Mikäli myös $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, niin $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Mikäli f tai g on C^k-kuvaus, missä $k \in \overline{\mathbb{N}}$, niin myös $f * g$ on C^k-kuvaus.

Todistus.
Kuvaus $y \mapsto f(x-y)g(y)$ on nyt kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ kompaktikantajainen ja siten integroituva. Tällöin $f * g$ on yksikäsitteisenä määritelty jokaiselle x integraalina (3.1). Symmetria seuraa tällöin muuttujanvaihdolla. Todetaan seuraavaksi jatkuvuus. Olkoon sitä varten annettu $x \in \mathbb{R}^n$ ja $0 < \delta < 1$. Jos nyt $w \in B(x,\delta)$ ja $y \in \mathrm{spt}\ g$, niin $w - y \in B(x,\delta) - \mathrm{spt}\ g \subset K_x$ jollain kompaktilla joukolla K_x. Olkoon nyt $z \in B(x,\delta)$, jolloin

$$
\begin{aligned}
|(f*g)(z) - (f*g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(z-y))g(y)\mathrm{d}y \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(z-y)||g(y)|\mathrm{d}y \\
&\le \sup_{\substack{u,v\in K_x \\ \|u-v\|<\delta}} |f(u) - f(v)| \int_{\mathrm{spt}\ g} |g(y)|\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Koska f on joukossa K_x tasaisesti jatkuva, niin arviosta seuraa konvoluution jatkuvuus. Mikäli f on tasaisesti jatkuva saadaan arvio

$$
|(f*g)(z) - (f*g)(x)| \le \sup_{\substack{u,v \\ \|u-v\|<\delta}} |f(u) - f(v)| \int_{\mathrm{spt}\ g} |g(y)|\mathrm{d}y,
$$

josta tasainen jatkuvuus seuraa olettaen, että δ on riittävän pieni. Kohta (i) on siten selvä.

Oletuksen perusteella löytyy $R \in \mathbb{R}_+$, jolle spt $f \cup$ spt $g \subset B(0,R)$. Jos nyt $x \notin B(0,2R)$ ja $x-y \in$ spt f, niin välttämättä $\|y\| > R$ ja tällöin $g(y) = 0$. Siispä spt $f * g \subset B(0,2R)$, eli $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ja kohta (ii) on selvä.

Kohdan (i) symmetrian vuoksi tapaukset molemmat tapaukset ova samansuuntaisia todistaa. Oletetaan siis, että f on C^k kuvaus. Tässäkin riittää todeta tapaus $k = 1$, loput seuraavat induktiolla. Kohdan (i) perusteella jokainen konvoluutio $\partial f_j * g$, $j = 1,\dots,n$, on jatkuva. Intuitiivisesti on selvää, että juurikin $\partial_j(f * g) = \partial f_j * g$ kaikilla j. Todetaan, että näin käy pisteittäin. Määritellään ensin jokaiselle $j = 1,\dots,n$ ja $w \in \mathbb{R}^n$ kuvaus

$$f_{w,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{w,j}(t) = f(w + te_j).$$

Kuvaus $f_{w,j}$ derivoituu ja $\partial_i f(w + te_j) = f'_{x,j}(t)$. Olkoon $h \in [-1,1] \setminus \{0\}$. Nyt Lagrangen väliarvolauseen nojalla löytyy $h_w \in]\min\{0,h\}, \max\{0,h\}[$, jolle

$$\frac{f(w+he_j) - f(x)}{h} = \frac{f_{w,j}(h) - f_{w,j}(0)}{h} = f'_{w,j}(h_w) = \partial_i f(w + h_w e_j). \tag{1}$$

Olkoon sitten $x \in \mathbb{R}^n$ annettu. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(f*g)(x+he_j) - (f*g)(x)}{h} - (\partial f_j * g)(x) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x-y+he_j) - f(x-y)}{h} - \partial_j f(x-y) \right| |g(y)| \mathrm{d}y \\
&\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_j f(x-y+h_{x-y}e_j) - \partial_j f(x-y)||g(y)| \mathrm{d}y \\
&= \int_{\text{spt } g} |\partial_j f(x-y+h_{x-y}e_j) - \partial_j f(x-y)||g(y)| \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Nyt $x-y+he_j \in B(x-y,1)$. Siten osittaisderivaatta $\partial_j f$ voidaan ilmeisesti rajoittaa kompaktiin joukkoon $K_x := \{w \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(w, x - \text{spt } g) \leq 1\}$. Nyt voidaan arvioida

$$\begin{aligned}
&\int_{\text{spt } g} |\partial_j f(x-y+h_{x-y}e_j) - \partial_j f(x-y)||g(y)| \mathrm{d}y \\
&\leq \sup_{\substack{u,v \in K_x \\ \|u-v\| < h}} |\partial_j f(u) - \partial_j f(v)| \int_{\text{spt } g} |g(y)| \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Nyt $\partial_j f$ on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa K_x, jolloin saatu yläraja menee nollaan, kun $h \to 0$. Tällöin konvoluutiolla $f * g$ on jokaisella j osittaisderivaatta pisteessä x ja $\partial_j(f*g)(x) = (\partial f_j * g)(x)$. Kohta (iii) on siten myös todettu. □

Lukijan on helppo keksiä ja todistaa edellisestä lemmasta erilaisia variaatioita, erityisesti jatkuvuusoletuksista voidaan osittain luopua. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mitan ja Borel-funktion välinen konvoluutio määritellään analogisesti määritelmän 3.1 kanssa.

Määritelmä 3.6 (Borel-mitan konvoluutio).
Olkoon μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mitta ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-funktio. Mikäli integraali

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \mathrm{d}\mu(y)$$

on määritelty mitan μ mielessä melkein kaikilla x, niin sanotaan, että kuvaus

$$f * \mu : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, \quad (f*\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \mathrm{d}\mu(y) \quad \mu\text{-melkein kaikilla } x \in \mathbb{R}^n$$

on funktioiden f ja mitan μ konvoluutio.

Mitan μ mielessä nollanmittaista joukkoa lukuunottamatta konvoluutio on taas yksikäsitteinen. Mikäli μ on siirtoinvariantti ja f μ-integroituva, niin konvoluutio on vakiokuvaus. Youngin epäyhtälön tyyppinen arvio on voimassa sopivissa tilanteissa myös funktion ja äärellisen Borel-mitan väliselle konvoluutiolle.

Lemma 3.7.
Olkoon μ äärellinen Borel-mitta ja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-funktio siten, että $f * \mu$ on määritelty. Mikäli $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ m_n-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, niin

$$(f * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathrm{d}\mu(y) \quad ja$$

$$\|f * \mu\|_1 \leq \|f\|_1 \mu(\mathbb{R}^n).$$

Mikäli f on μ-melkein kaikkialla ei-negatiivinen, niin yhtäsuuruus on voimassa epäyhtälössä.

Todistus.
Oletuksen perusteella integraali $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathrm{d}\mu(y)$ on määritelty μ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Tarkastellaan seuraavaksi Borel-kuvausta $(x, y) \mapsto f(x-y)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}x &\overset{a)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(y) \\ &\overset{b)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(w)|\,\mathrm{d}w\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \|f\|_1\mu(\mathbb{R}^n) < \infty. \qquad (1)\end{aligned}$$

Tässä kohta a) seuraa Fubinin lauseesta ja kohdassa b) on tehty muuttujanvaihto $w = x - y$. Tällöin edelleen kuvaus $y \mapsto f(x-y)$ on μ-integroituva Lebesguen mitan mielessä melkein kaikialla. Siten Lebesguen mitan mielessä melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$

$$(f * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathrm{d}\mu(y).$$

Edelleen Fubinin lauseen nojalla konvoluutio $f * \mu$ on Borel-kuvaus. Arvion (1) perusteella helppo nähdä väitteen arvio ja yhtäsuuruus, kun f on μ-melkein kaikkialla ei-negatiivinen. □

Lemman 3.5 tavoin voidaan todeta, että myös funktion ja Borel-mitan välinen konvoluutio perii siisteysominaisuuksia.

Lemma 3.8.
Olkoon μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mitta ja $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Jos

(i) $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ tai

(ii) f on C^k-kuvaus ja spt μ on kompakti,

niin konvoluutio $f * \mu$ on C^k-kuvaus. Jos molemmat ehdot pätevät, niin $f * \mu \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$.

Tarkastellaan sitten seuraavanlaisia funktioperheitä luokassa $C_0(\mathbb{R}^n)$, jotka toteuttavat lemman 3.4 vaatimukset.

Määritelmä 3.9 (Approksimaatioperhe).
Kuvausperhettä $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \subset C_0(\mathbb{R})$ sanotaan approksimaatioperheeksi, jos jokaisella $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kuvaus ψ_ε on ei negatiivien, spt *$\psi_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$ ja*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Jos kuvaus $\psi \in C_0(\mathbb{R})$ toteuttaa määritelmän ehdon arvolla $\varepsilon = 1$, niin asettamalla kaikille $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R}^n$$

saadaan *generoitu* approksimaatioperhe ja kuvausta ψ kutsutaan sen *generaattoriksi.* Mikäli approksimaatioperheen kaikki funktiot ovat C^∞-kuvauksia, niitä kutsutaan *siloittajaytimiksi.* Tällainen (generoitu) perhe saadaan esimerkiksi asettamalla generoivaksi funktioksi

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_o e^{-1/[1-\|x\|^2]} & \|x\| < 1, \\ 0 & \|x\| \geq 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

missä

$$c_o = \left[\int_{B(0,1)} e^{-1/[1-\|x\|^2]} \mathrm{d}x \right]^{-1}$$

on integroimisvakio, katso [17, s.20]. Jatkossa tullaan hyödyntämään kyseiseistä esimerkkiä. Huomaa, että tämä perhe koostuu radiaalisista funktioista. Approksimaatioperheen avulla voidaan muodostaa uusi approksimaatioperhe.

Lemma 3.10.
Olkoon $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ approksimaatioperhe. Asetetaan jokaiselle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kuvaus $\psi_\varepsilon = \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} * \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Tällöin

(i) $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ on approksimaatioperhe,

(ii) mikäli $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \subset C_0^k(\mathbb{R}^n)$ jollain $k \in \overline{\mathbb{N}}$, niin myös $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \subset C_0^k(\mathbb{R}^n)$,

(iii) mikäli $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ on generoitu perhe, niin myös $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ on generoitu perhe.

Todistus.
Kohdat (i) ja (ii) pohjautuvat lemmoihin 3.3 ja 3.5. Erityisesti spt $\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset B(0, \frac{\varepsilon}{2})$, joten lemman 3.5 todistuksen perusteella spt $\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} * \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset B(0, \varepsilon)$. Viimeinen kohta on seuraa osoittamalla, että kaikille $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ja $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} * \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})(x) = \varepsilon^{-n} (\varphi_{\frac{1}{2}} * \varphi_{\frac{1}{2}}) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right),$$

kun $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ on generoitu perhe. Tämä on suoraviivainen lasku. $\square$

Approksimaatioperheen $\{\psi\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ idea on nimensä mukaisesti approksimoida tutkittavaa kuvausta f konvoluutioiden $f * \psi_\varepsilon$ kautta. Lemman 3.4 todistusta tutkimalla nähdään suoraan, että jokaiselle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ saadaan $\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f * \psi_\varepsilon\|_1 = 0$. Jatkuvien kuvausten kanssa approksimaatio aina konvergoi pisteittäin.

Lemma 3.11.
Olkoon $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ approksimaatioperhe ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin $f * \psi_\varepsilon \to f$ pisteittäin, kun $\varepsilon \to 0$. Mikäli f on tasaisesti jatkuva, niin konvergenssi on myös tasaista.

Todistus.
Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nyt

$$\begin{aligned} |(f * \psi_\varepsilon)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\psi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\psi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\psi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y \\ &\leq \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x)|\psi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y \\ &\leq \int_{B(0,\varepsilon)} \sup_{z \in B(0,\varepsilon)} |f(x-z) - f(x)|\psi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y \\ &= \sup_{z \in B(0,\varepsilon)} |f(x-z) - f(x)|. \end{aligned} \tag{1}$$

Erotus menee nyt nollaan, kun $\varepsilon \to 0$. Lisäksi, jos f on tasaisesti jatkuva, niin tasainen konvergenssi nähdään suoraan arviosta (1). $\square$

Seurauksena saadaan seuraava tunnettu approksimointitulos.

Lause 3.12.
Jokaista luokan $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ kuvausta voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ funktioilla $\mathcal{L}^1$-seminormin mielessä.

Todistus.
Lauseen 2.22 nojalla jokaista kuvausta luokassa $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti luokan $C_0(\mathbb{R}^n)$ kuvauksilla $\mathcal{L}^1$-seminormin mielessä. Olkoon $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Tällöin jokaisella $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ konvoluutio $f * \varphi_\varepsilon$, missä φ_ε on yhtälön (3.2) mukaisen funktion generoima siloittajaydin, on lemman 3.5 nojalla luokassa $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Lisäksi on helppo todeta, että löytyy komapkti $K \subset \mathbb{R}^n$ siten, että jokaisella $0 < \varepsilon < 1$ pätee spt $f * \varphi_\varepsilon \subset K$. Edelleen lemman 3.11 nojalla $f * \varphi_\varepsilon \to f$ tasaisesti, kun $\varepsilon \to 0$. Näistä on nyt helppo päätellä, että $f * \varphi_\varepsilon \to f$ $\mathcal{L}^1$-seminormin mielessä, kun $\varepsilon \to 0$. □

Sivuhuomiona tämä tarkoittaa, että testifunktioiden ekvivalenssiluokka on tiheä $L^1_{m_n}$-avaruudessa. Kappaleen lopuksi todetaan tekninen aputulos puolijatkuville ja ei-negatiivisille funktioille, jota tarvitaan jatkossa, katso [18, Lemma 1.27 s.21].

Lemma 3.13.
Olkoon $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ approksimaatioperhe, μ äärellinen Borel-mitta ja ei-negatiivinen ja alhaalta puolijatkuva funktio $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g * \mu)(x)\ \mathrm{d}\mu(x) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} ((g * \psi_\varepsilon) * \mu)(x)\ \mathrm{d}\mu(x). \tag{1}$$

Todistus.
Määritelmän 2.21 nojalla löytyy nouseva jono ei-negatiivisia funktioita $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\varphi_i \to g$ pisteittäin. Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla väitteen epäyhtälössä olevat konvoluutiot ovat määritelmän 3.1 mielessä olemassa. Edelleen lemman 3.11 nojalla $\varphi_i * \psi_\varepsilon \to \varphi_i$ tasaisesti, kun $\varepsilon \to 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i * \psi_\varepsilon)(x - y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i(x - y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \right| \\
=&\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i * \psi_\varepsilon)(x - y) - \varphi_i(x - y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_i * \psi_\varepsilon)(x - y) - \varphi_i(x - y)| \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |(\varphi_i * \psi_\varepsilon)(z) - \varphi_i(z)| \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \mu(\mathbb{R}^n)^2 \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |(\varphi_i * \psi_\varepsilon)(z) - \varphi_i(z)| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.
\end{aligned}$$

Siispä kaikille $i, k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i(x - y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i * \psi_\varepsilon)(x - y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x). \tag{1}$$

Käyttämällä kaksi kertaa monotonisen konvergenssin lausetta saadaan

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{i \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i(x - y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(y). \tag{2}$$

Edelleen, koska kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ja $x \in \mathbb{R}^n$

$$(\varphi_i * \psi_\varepsilon)(x) \leq (g * \psi_\varepsilon)(x), \tag{3}$$

niin

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) &\overset{(2)}{\leq} \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(y) \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{i\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i * \psi_\varepsilon)(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \lim_{i\to\infty}\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i * \psi_\varepsilon)(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{(3)}{\leq} \lim_{i\to\infty}\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (g * \psi_\varepsilon)(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (g * \psi_\varepsilon)(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

Väite on siten selvä. □

3.2 Fourier-muunnoksista funktioille

Seuraavaksi luodaan suppea katsaus Fourier-integraalimuunnoksiin ja tarkastellaan joitain perusominaisuuksia ja tuloksia, joita tarvitaan jatkossa. Annetaan tavanomainen määritelmä Lebesgue-integroituvien Borel-funktioden $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Fourier-muunnoksille.

Määritelmä 3.14 (**Fourier-muunnos $\mathcal{L}^1$-funktiolle**).
Olkoon $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Tällöin sen Fourier-muunnos määritellään kuvauksena $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, missä kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ asetetaan

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \cos\langle x|y\rangle f(y)\mathrm{d}y - i\int_{\mathbb{R}^n} \sin\langle x|y\rangle f(y)\mathrm{d}y.$$

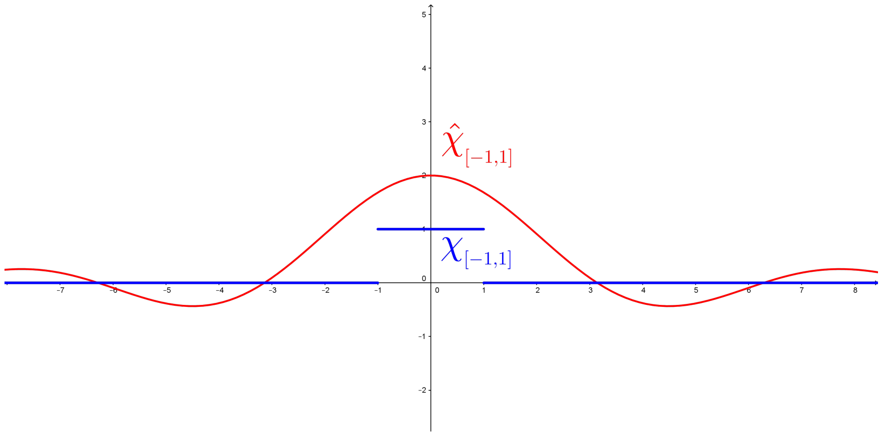
Määritelmä on hyvin asetettu, sillä aina $|\cos\langle x|y\rangle f(y)| \leq |f(y)|$ ja $|\sin\langle x|y\rangle f(y)| \leq |f(y)|$, jolloin dominoidun konvergenssin lauseen nojalla määritelmän kumpikin integraali suppenee. Mikäli kuvaukselle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n$ on pisteittäin äärellinen, eli $|f| < \infty$, niin klassisen *Eulerin kaavan* nojalla voidaan kirjoittaa jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle v|y\rangle} f(y)\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

Tämä on käyttökelpoinen esitysmuoto, mutta ongelmaksi tulevat joukon $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$-kuvaukset, jotka saavat joissain pisteissä arvoja $\pm\infty$, koska tuloa $z \cdot (\pm\infty)$ ei-reaalisille arvoille z ei ole määritelty tässä tutkielmassa. Ongelma on kuitenkin kosmeettinen, sillä jokaiselle funktiolle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ löytyy $f^* \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, jolle $|f^*| < \infty$ ja $f = f^*$ m_n-melkein kaikkialla ja tällöin määritelmän nojalla $\hat{f} = \hat{f}^*$. Nyt jatkossa ilman eri mainintaa kaikissa tarkasteluissa oletetaan tarvittaessa, että käytettävät joukon $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ kuvaukset ovat pisteittäin äärellisiä, jolloin esitystä (3.3) voidaan hyödyntää. Lukijan on lähes triviaali todeta, että mikäli kaikki jatkossa esiteltävät tulokset pätevät pisteittäin äärellisille kuvauksille joukossa $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, niin ne pätevät kaikille joukon $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ kuvauksille. Konventiosta riippuen esityksessä (3.3) voi olla esimerkiksi 2π-kerroin sisätulon edessä, tällä ei kuitenkaan ole merkitystä jatkon kannalta, koska muuttujanvaihdon nojalla variaatiot, joissa kertoimet poikkeavat sisätulon edessä, poikkeavat toisistaan vakiokertoimella.

Käytännön esimerkkinä yksinkertaisen funktion $\chi_{[-1,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fourier-muunnokseksi pisteessä $x \in \mathbb{R}$ saadaan laskettua

$$\hat{\chi}_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ \frac{2\sin x}{x}, & x \neq 0. \end{cases} \tag{3.4}$$



Karakteristinen funktio $\chi_{[-1,1]}$ ja sen Fourier-integraalimuunnos.

Esimerkin karakteristisen funktion voi tulkita esimerkiksi signaaliksi ajan funktiona, jolloin sen Fourier-muunnos on signaalin esitys taajuuden funktiona. Esimerkin Fourier-muunnos on tasaisesti jatkuva, vaikka alkuperäinen kuvaus ei ole jatkuva. Lisäksi muunnos on täysin reaalinen alkuperäisen funktion olessa parillinen. Havainnot pätevät yleisemmin.

Lemma 3.15.

(i) Jokaiselle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ Fourier-muunnos on tasaisesti jatkuva ja $\sup|\hat{f}| \leq \|f\|_1$,

(ii) jokaiselle $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pätee $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha\hat{f} + \beta\hat{g}$ ja

(iii) mikäli $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ on melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ parillinen/pariton, niin $\hat{f}$ on puhtaasti reaalinen/imaginäärinen.

Todistus.
Todetaan vain (i), sillä muut kohdat ovat lähes ilmeisiä. Ensinnäkin esityksestä (3.3) on integraalin kolmioepäyhtälön avulla selvää, että kuvauksen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ muunnokselle pätee $\sup|\hat{f}| \leq \|f\|_1$. Jatkuvuutta varten kiinnitetään mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Integroituvuudesta seuraa, että löytyy $R_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ siten, että

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_\varepsilon)} |f(y)| \mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1}$$

Kuvauksen $t \mapsto e^{-it}$ jatkuvuuden nojalla löytyy $\delta_\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla arvoilla $t \in]-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon[$.

$$\left|e^{-it} - 1\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|_1)} \tag{2}$$

Nyt jokaiselle $u \in \mathbb{R}^n$ valitsemalla $v \in B(u, \frac{\delta_\varepsilon}{R_\varepsilon})$ saadaan jokaiselle $y \in B(0, R_\varepsilon)$ arvio $|\langle v - u|y\rangle| \leq \|v - u\|\|y\| < \delta_\varepsilon$ ja siten arvion (2) nojalla edelleen

$$\left|e^{-i\langle v-u|y\rangle} - 1\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|_1)}. \tag{3}$$

Mutta tällöin

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(v) - \hat{f}(u)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-i\langle v|y\rangle} - e^{-i\langle u|y\rangle}\right| |f(y)| \mathrm{d}y \\
&= \int_{B(0,R_\varepsilon)} \left|e^{-i\langle v-u|y\rangle} - 1\right| |f(y)| \mathrm{d}y + 2\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_\varepsilon)} |f(y)| \mathrm{d}y \\
&\overset{(1)+(3)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

mikä implikoi tasaisen jatkuvuuden. $\square$

Erityisesti radiaalisten luokan $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ funktioiden muunnokset ovat reaalisia. Seuraavaksi todetaan Fourier-muunnoksille erinäisiä perusominaisuuksia. Fourier-muunnos konvoluutioiden yli palauttaa sen funktioiden konvoluutioiden tuloksi, vertaa [2, Propositio 16.4 s.150].

Lemma 3.16 (Konvoluutiokaava I).
Jos $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, niin kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{(f * g)}(x) = \hat{f}(x)\hat{g}(x).$$

Todistus.
Huomaa, että lemman 3.3 nojalla $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ja siten $\widehat{f * g}$ on määritelty. Itse todistus on suora lasku:

$$\begin{aligned}
\widehat{(f * g)}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}(f * g)(y)\mathrm{d}y \\
&\overset{a)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y-z)g(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\overset{b)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y-z)g(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&\overset{c)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|u+z\rangle} f(u)g(z)\mathrm{d}u\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} g(z) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|u\rangle} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}z \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|u\rangle} f(u)\mathrm{d}u\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} g(z)\mathrm{d}z\right) \\
&= \hat{f}(x)\hat{g}(x).
\end{aligned}$$

Yhtäsuuruus a) seuraa konvoluution määritelmästä, b) seuraa Fubinin lauseesta ja c) muuttujanvaihdosta $u = y - z$. □

Approksimaatioperheille Fourier-muunnokset konvergoivat kohti vakiofunktiota 1.

Lemma 3.17.
Olkoon $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ approksimaatioperhe. Tällöin $\hat{\psi}_\varepsilon \to 1$ pisteittäin, kun $\varepsilon \to 0$. Rajoitetuissa joukoissa suppeneminen on tasaista.

Todistus.
Olkoon A rajoitettu joukko ja $x \in A$.

$$\begin{aligned}
|\hat{\psi}_\varepsilon(x) - 1| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle} - 1|\psi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y \\
&\leq \sup_{y \in B(0,\varepsilon)} |e^{-i\langle x|y\rangle} - 1| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y \\
&= \sup_{y \in B(0,\varepsilon)} |e^{-i\langle x|y\rangle} - 1|. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Nyt $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\|y\| = \|y\| \sup_{x \in A}\|x\| \to 0$, kun $\|y\| \to 0$. Siis $\langle x|y\rangle$ menee tasaisesti nollaan joukossa A, kun $\varepsilon \to 0$ ja kompleksisen eksponentin jatkuvuuden nojalla yläraja (1) menee tasaisesti nollaan A:ssa, kun $\varepsilon \to 0$. □

Seuraavaksi todetaan *Riemann-Lebesguen lemma*, joka sanoo, että integroituvan Borel-funktion Fourier-muunnos vähenee äärettömyydessä nollaan. Annettava todistustapa on pääpiirteittäin samankaltainen seuraavan päättelyn kanssa, katso [24, s.31 ja s.106-107]. Todetaan ensin, että testifunktioluokan $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ Fourier-muunnokset puolestaan vähenevät hyvin nopeasti.

Lemma 3.18.
Olkoon $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tällöin $|\hat{\varphi}(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^{-s})$ kaikilla $s \in \mathbb{N}$.

Todistus.
Annetulle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat kuuluvat edelleen luokkaan $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Kiinnitetään seuraavaksi $s \in \mathbb{N}$ ja merkitään

$$M = \max_{k=1,\dots,n} \|\partial_k^s \varphi\|_1, \tag{1}$$

jolloin $M < \infty$. Kiinnitetään seuraavaksi $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Tällöin löytyy $m = 1, \dots, m$, jota vastaavalle koordinaatille saadaan arvio

$$|x_m|\sqrt{n} \geq \|x\|. \tag{2}$$

Mikäli $n \geq 2$, niin saadaan

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}\varphi(y)\mathrm{d}y \\
&\overset{a)}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle x|y\rangle}\varphi(y)\mathrm{d}y_m\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{i}{x_m}\right)^s \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (-ix_m)^s e^{-i\langle x|y\rangle}\varphi(y)\mathrm{d}y_m\mathrm{d}z \\
&\overset{b)}{=} \left(-\frac{i}{x_m}\right)^s \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle x|y\rangle}\partial_m^s\varphi(y)\mathrm{d}y_m\mathrm{d}z \\
&\overset{c)}{=} \left(-\frac{i}{x_m}\right)^s \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}\partial_m^s\varphi(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{3}$$

Kohdassa a) on muuttuja y hajoitettu karteesisiin komponentteihin y_m ja z, missä z sisältää loput koordinaatit, ja käytetty Fubinin lausetta. Kohdassa b) on osittaisintegroitu muuttujan y_m suhteen s kertaa ja kohdassa c) on käytetty taas Fubinin lausetta. Tapauksessa $n = 1$ kohta (3) on välitön seuraus peräkkäisestä osittaisintegroinnista. Lopulta

$$\begin{aligned}
|\hat{\varphi}(x)| &\overset{(3)}{=} \left|\left(-\frac{i}{x_m}\right)^s \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}\partial_m^s\varphi(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\leq |x_m|^{-s}\|\partial_m^s\varphi\|_1 \\
&\overset{(1)+(2)}{\leq} n^{\frac{s}{2}} M\|x\|^{-s}.
\end{aligned}$$

□

Luokka $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ kuuluu, niin sanottuun *Schwartzin avaruuteen* [24, s.29], joka käsittää kaikki C^∞ -funktiot, joiden kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat vähenevät nopeasti. Sanotaan, että kuvaus $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *vähenee nopeasti*, jos $x^k g(x) \to 0$, kun $\|x\| \to \infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Nyt lemma 3.18 yleistyy samantyylisellä todistuksella koko Schwartzin avaruuteen. Toisaalta lemman 3.18 ja lauseen 3.12 nojalla saadaan nyt aiemmin mainittu Riemann–Lebesguen lemma.

Lause 3.19 (**Riemann–Lebesguen lemma**).
Kuvaukselle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *pätee*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geq R} |\hat{f}(x)| = 0.$$

Todistus.
Tavoitteena on osoittaa, että annetulle $\varepsilon > 0$ löytyy $R_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ siten, että kaikille $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, R_\varepsilon)$ pätee $|\hat{f}(x)| < \varepsilon$. Lauseen 3.12 nojalla löytyy $g_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\|f - g_\varepsilon\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ ja lemman 3.18 nojalla löytyy $R_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ siten, että kaikille $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, R_\varepsilon)$ saadaan $|\hat{g}_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin käyttämällä a) lemman 3.15 kohtaa (ii) ja kolmioepäyhtälöä ja b) lemman 3.15 kohtaa (i) saadaan kaikille $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, R_\varepsilon)$

$$|\hat{f}(x)| = |\hat{f}(x) - \hat{g}_\varepsilon(x) + \hat{g}_\varepsilon(x)| \overset{a)}{\leq} |\widehat{f - g_\varepsilon}(x)| + |\hat{g}_\varepsilon(x)| \overset{b)}{\leq} \|f - g_\varepsilon\|_1 + |\hat{g}_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

□

Lemman 3.18 seurauksena luokan $C_0^\infty(\mathbb{R})$ Fourier-muunnokset ovat aina integroituvia. Yleisemmin integroituville funktioille ei näin ole, katso esimerkiksi yhtälön (3.4) muunnos. Mikäli Fourier-muunnos integroituu, se voidaan *käänteismuuntaa* Lebesguen mitan mielessä melkein kaikkialla alkuperäiseksi funktioksi.

Lause 3.20 (Käänteismuunnos).
Olkoon $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Mikäli $\hat{f}$ on Lebesgue-integroituva, niin m_n-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle} \hat{f}(y) \mathrm{d}y.$$

Lauseen 3.20 seurauksena nähdään, että integroituva funktio on rajoitettu ja jatkuva melkein kaikkialla, jos sen Fourier-muunnos integroituu. Todistetaan tämä seuraavaksi noudatellen lähteen [2] lukua 16.2. Lähdetään rakentamaan todistusta seuraavalla havainnolla: gaussisen funktion Fourier-muunnos on edelleen gaussinen funktio.

Lemma 3.21.
Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-a\|x\|^2}$, missä $a \in \mathbb{R}_+$, Fourier-muunnos on

$$\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \quad \hat{f}(x) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4a}}.$$

Todistus on samankaltainen kuin tarkastelu [24, s.38-41].

Todistus.
Koska f on $\mathcal{L}^1$-kuvaus, niin sen sen Fourier-muunnos on hyvin määritelty. Lähtökohdaksi otetaan tunnettu *gaussinen integraali*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{1}$$

Lähteestä [5] voi mielenkiinnon vuoksi lukea useita eri tapoja laskea tällainen integraali tapauksessa $a = 1$, muut tapaukset seuraavat tästä muuttujanvaihdolla. Seuraavaksi lasketaan määritelmästä lähtien

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} e^{-a\|y\|^2} \mathrm{d}y \\ &\overset{a)}{=} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(y_j^2 + \frac{ix_j}{a} y_j\right)} \mathrm{d}y_j \\ &= \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{x_j^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(y_j + \frac{ix_j}{2a}\right)^2} \mathrm{d}y_j. \end{aligned} \tag{2}$$

Kohdassa a) esitys on hajoitettu karteesisiin koordinaatteihin ja käytetty Fubinin lausetta. Nyt riittää todeta enää, että kaikilla $b \in \mathbb{R}$

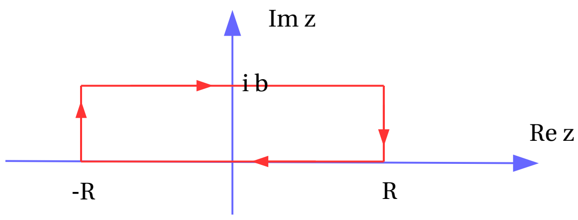
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a(t+ib)^2} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} \mathrm{d}t, \tag{3}$$

jolloin väite seuraa yhtälöistä (1) ja (2). Tämä voidaan todeta vaikkapa kompleksianalyysin keinoin tulkitsemalla ensin yhtälön (3) vasemmanpuoleinen integraali epäoleelliseksi Riemann-integraaliksi

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-a(t+ib)^2} \mathrm{d}t. \tag{4}$$

Integraali $\int_{-R}^{R} e^{-a(t+ib)^2} dt$ on nyt analyyttisen kuvauksen $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F(z) = e^{-az^2}$ polkuintegraali reaaliakselin suuntaisen janan $[-R+ib, R+ib]$ yli. Soveltamalla *Cauchy–Goursatin lausetta* [1, Lause 15.2 s.97] kuvan 1 mukaiseen suorakaiteen muotoiseen integroimisreittiin saadaan

$$\int_{[-R+ib,R+ib]} F(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[R+ib,R]} F(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[R,-R]} F(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[-R,-R+ib]} F(z)\ \mathrm{d}z = 0. \tag{5}$$



Kuva 1: Integroimisreitti.

Nyt on helppoa arvioida, että

$$\int_{[R+ib,R]} F(z)\mathrm{d}z, \int_{[-R,-R+ib]} F(z)\mathrm{d}z \to 0, \text{ kun } R \to \infty. \tag{6}$$

Siten

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-a(t+ib)^2}\mathrm{d}t &\overset{(4)}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-a(t+ib)^2}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{[-R+ib,R+ib]} F(z)\mathrm{d}z \\
&\overset{(5)+(6)}{=} \lim_{R\to\infty} -\int_{[R,-R]} F(z)\mathrm{d}z \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-at^2}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

Määritellään seuraavaksi jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ kuvaus $H_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ asettamalla jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$

$$H_k(x) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-k\|x\|^2}. \tag{3.5}$$

Ideana on hyödyntää nyt ei-negatiivista kuvausperhettä $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, sillä lemman 3.21 nojalla niiden Fourier-muunnokset osataan laskea ja perhe toteuttaa lemman 3.4 vaatimukset.

Lemma 3.22.
Olkoon yhtälön (3.5) mukaiset kuvaukset $H_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} H_k(x)\mathrm{d}x = 1$ kaikille $k \in \mathbb{N}$ ja

(ii) jokaiselle $\varepsilon > 0$ ja $R \in \mathbb{R}_+$ löytyy $k(\varepsilon, R) \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille luonnollisille $k \geq k(\varepsilon, R)$ saadaan arvio

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)} H_k(x)\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Todistus.
Kohta (i) on helpohko. Kohtaa (ii) varten kiinnitetään $R \in \mathbb{R}_+$. Tällöin löytyy $k_R \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla luonnollisilla $k \geq k_R$ saadaan arvio

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-R^2} < 1. \tag{1}$$

Tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$ ja luonnollisilla $k \geq k_R$

$$\frac{H_{k+1}(x)}{H_k(x)} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\|x\|^2} \leq \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-R^2} \overset{(1)}{<} 1.$$

Tämä tarkoittaa, että jono

$$\left(H_k \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)}\right)_{k=k_R}^{\infty}$$

on laskeva. Lisäksi on helppo nähdä, että kyseinen jono konvergoi pisteittäin nollafunktioon. Tällöin monotonisen konvergenssin lause implikoi jokaiselle $\varepsilon > 0$ väitteen indeksin $k(\varepsilon, R)$ olemassaolon. Viimeistä kohtaa varten kiinnitetään $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Teknisten tarkastelujen jälkeen voidaan vihdoin todistaa lause 3.20.

Lauseen 3.20 todistus.
Olkoon $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, jolle $\hat{f}$ integroituu. Lemmojen 3.4 ja 3.22 nojalla $\|f - f * H_k\|_1 \to 0$, kun $k \to \infty$. Tällöin lemman 2.7 nojalla löytyy osajono $(H_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ siten, että m_n-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{j \to \infty} (f * H_{k_j})(x) = f(x). \tag{1}$$

Toisaalta jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}^n$ saadaan laskettua

$$\begin{aligned}
(f * H_k)(x) &\overset{a)}{=} \overline{\overline{(f * H_k)(x)}} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) H_k(y) \mathrm{d}y} \\
&= \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-k\|y\|^2} \mathrm{d}y} \\
&= \overline{\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \left(\frac{\pi}{(4k)^{-1}}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4(4k)^{-1}}} \mathrm{d}y} \\
&\overset{b)}{=} \overline{\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y|z\rangle} e^{-\frac{\|z\|^2}{4k}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y} \\
&\overset{c)}{=} \overline{\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|z\|^2}{4k}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z|y\rangle} f(x-y) \mathrm{d}y\mathrm{d}z} \\
&\overset{d)}{=} \overline{\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|z\|^2}{4k}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z|x-w\rangle} f(w) \mathrm{d}w\mathrm{d}z} \\
&= \overline{\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|z\|^2}{4k}} e^{-i\langle x|z\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle z|w\rangle} f(w) \mathrm{d}w\mathrm{d}z} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|z\|^2}{4k}} e^{i\langle x|z\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z|w\rangle} f(w) \mathrm{d}w\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|z\|^2}{4k}} e^{i\langle x|z\rangle} \hat{f}(z) \mathrm{d}z.
\end{aligned} \tag{2}$$

Kohta a) seuraa konvoluution $f * H_k$ reaalisuudesta, kohdassa b) on käytetty lemmaa 3.21, kohdassa c) Fubinin lausetta ja kohdassa d) on tehty muuttujanvaihto $w = x - y$. Yhtälön (2) oikealla puolella oleva intergaali suppenee dominoidun konvergenssin lauseen nojalla integraaliin $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|z\rangle} \hat{f}(z)\mathrm{d}z$, kun k kasvaa rajatta. Siten yhdistämällä tämä havainto kohtiin (1) ja (2) saadaan, että m_n-melkein kaikille $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \lim_{j \to \infty} (f * H_{k_j})(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|z\|^2}{4k_j}} e^{i\langle x|z\rangle} \hat{f}(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|z\rangle} \hat{f}(z)\mathrm{d}z,$$

ja todistus on selvä. $\square$

Käänteiskaavan helppona seurauksena saadaan *Parsevalin kaava* tai sen eräs versio, vertaa [17, Kaava 12.3 s.159].

Lause 3.23 (**Parsevalin kaava Fourier-muunnoksille**).
Olkoon $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\hat{g}$ integroituu. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)\mathrm{d}x.$$

Tapauksessa $f = g$ saadaan, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Tämä tunnetaan *Plancherelin kaavan* eräänä versiona, vertaa [17, Kaava 12.4 s.159]. Erityisesti Parsevalin kaava on voimassa jokaiselle funktiolle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, kun siinä esiintyvä toinen tulotettava funktio g on luokassa $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tästä motivoituneena voidaan antaa vaihtoehtoinen määritelmä Fourier-muunnokselle laajemmassa funktiojoukossa.

Määritelmä 3.24 (**Yleistetty Fourier-muunnos**).
Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ lokaalisti Lebesgue-integroituva Borel-funktio. Jos on olemassa lokaalisti Lebesgue-integroituva Borel-kuvaus kuvaus $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ siten, että kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{\varphi}}(x)\mathrm{d}x,$$

niin sanotaan, että $\hat{f}$ on kuvauksen f yleistetty Fourier-muunnos.

Koska jokaiselle kuvaukselle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ muunnos $\hat{f}$ on rajoitettuna ja jatkuvana lokaalisti Lebesgue-integroituva, niin yleistetyn Fourier-muunnoksen määritelmä yhtenee määritelmän 3.14 kanssa.

3.3 Äärellisten Borel-mittojen Fourier-muunnoksista

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ äärelliselle Borel-mitalle voidaan määritellä Fourier-muunnos samaan tapaan kuin Fourier-muunnokset luokan $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ funktioille.

Määritelmä 3.25 (**Borel-mitan Fourier-muunnos**).
Avaruuden $\mathbb{R}^n$ äärellisen Borel-mitan μ Fourier-muunnos asetetaan kuvauksena $\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\hat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \cos\langle x|y\rangle \mathrm{d}\mu(y) - i \int_{\mathbb{R}^n} \sin\langle x|y\rangle \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} \mathrm{d}\mu(y).$$

Määritelmä voitaisiin antaa laajempaan mittajoukkoon, mutta keskitytään nyt vain äärellisten Borel-mittojen tapaukseen. Huomaa, että nyt Eulerin kaavaa voidaan käyttää suoraan. Borel-mittojen Fourier-muunnokset jakavat samansuuntaisia ominaisuuksia integroituvien funktoiden Fourier-muunnosten kanssa. Samaan tapaan kuin luokan $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ kuvausten Fourier-muunoksille, äärellisten Borel-mittojen muunnoksille voidaan osoittaa rajottuneisuus ja tasainen jatkuvuus.

Lemma 3.26.
Jokaiselle avaruuden $\mathbb{R}^n$ äärelliselle Borel-mitalle μ sen Fourier-muunnos $\hat{\mu}$ on tasaisesti jatkuva ja rajoitettu vakiolla $\mu(\mathbb{R}^n)$.

Lisäksi on helppo todeta, että kompaktikantajaisten ja äärellisten Borel-mittojen tapauksessa muunnos on C^∞-kuvaus. Lemman 3.16 tyylinen konvoluutiokaava toimii myös sopivan Borel-mitan ja funktion välisen konvoluution suhteen.

Lemma 3.27 (**Konvoluutiokaava II**).
Olkoon μ äärellinen Borel-mitta ja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-funktio siten, että $f * \mu$ on määritelty. Mikäli $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, niin kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{(f * \mu)}(x) = \hat{f}(x)\hat{\mu}(x).$$

Todistus.
Lemman 3.7 nojalla $f * \mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ja Lebesguen mitan mielessä melkein kaikille $y \in \mathbb{R}^n$

$$(f * \mu)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y - z)\mathrm{d}\mu(z)dy.$$

Nyt käyttämällä a) Fubinin lausetta ja b) muuttujanvaihtoa $w = y - z$ jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ saadaan

$$\begin{aligned}
\widehat{(f * \mu)}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}(f * \mu)(y)\mathrm{d}y \\
&\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\mathrm{d}\mu(z)dy \\
&\overset{(a)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y-z)dy\mathrm{d}\mu(z) \\
&\overset{(b)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z+w\rangle} f(w)dw\mathrm{d}\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|w\rangle} f(w)dw \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle}\mathrm{d}\mu(z) = \hat{f}(x)\hat{\mu}(x).
\end{aligned}$$

□

Riemann-Lebesgue-lemma takaa jokaisen kuvauksen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ Fourier-muunnoksen häviävän äärettömyydessä argumentin normin kasvaessa. Näin ei päde välttämättä äärellisten Borel-mittojen muunnoksille. Esimerkkinä mielivaltaisen pisteen $z \in \mathbb{R}^n$ Diracin mitta δ_z, jolle $\hat{\delta}_z(x) = e^{-i\langle x|z\rangle}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja siten $|\hat{\delta}_z| = 1$. Tästä motivoituneena voidaan kysyä, milloin äärellisen Borel-mitan Fourier-muunnos häviää äärettömyydessä, kuten luokan $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ muunnokset. Näin päästään *Rajchman-mittojen* määritelmään.

Määritelmä 3.28 (**Rajchman-mitta**).
Avaruuden $\mathbb{R}^n$ äärellinen Borel-mitta μ on Rajchman-mitta, mikäli $\hat{\mu}(x) \to 0$, kun $\|x\| \to \infty$, eli

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geq R} |\hat{\mu}(x)| = 0.$$

Millaiset mitat sitten ovat Rajchman-mittoja? Radon–Nikodymin lauseen 2.6 ja Riemann–Lebesguen lemman 3.19 perusteella saadaan suoraan seuraava tulos.

Lause 3.29.
Mikäli avaruuden $\mathbb{R}^n$ äärellinen Borel-mitta on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan m_n suhteen, niin se on Rajchman-mitta.

Tämän huomion ulkopuolelle jäävät kuitenkin kaikki äärelliset Borel-mitat, joilla on Lebesguen mitan suhteen singulaarinen osa. Kuitenkin myös tällainen voi olla Rajchman-mitta. Esimerkkinä tästä toimii avaruuden $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ yksikköpallon kuoren S^{n-1} pintamitta

$$\sigma = \alpha(n)\ \mathcal{H}^{n-1} \llcorner S^{n-1},$$

missä $\mathcal{H}^{n-1}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ $n-1$-ulotteinen Hausdorff-mitta ja $\alpha(n)$ on dimensiosta n riippuva normitusvakio. Tämän Fourier-muunnokselle voidaan esittää arvio kaikille $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\hat{\sigma}(x)| \leq C\|x\|^{-\frac{n-1}{2}},$$

missä $C \in \mathbb{R}_+$ on sopiva vakio, katso tarkemmin [18, s.18]. Kuitenkaan yleispätevää metodia etsiä Rajchman-mittoja tästä joukosta ei ole.

Edellisen esimerkin mitta toteuttaa Rajchman-mittaa vahvemman vaatimuksen: Fourier-muunnoksen *polynomiaalisen vähenemisen*. Sanotaan, että Rajchman-mitan μ Fourier-muunnos on polynomiaalisesti vähenevä, mikäli $|\hat{\mu}(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^{-\eta})$, missä luonnollisesti $\eta \in \mathbb{R}_+$. Seuraavaksi voidaan kysyä, milloin $\hat{\mu}$ vähenee polynomiaalisesti. Helppona esimerkkinä: mikäli äärellinen Borel-mitta μ on absoluuttisesti jatkuva ja sitä vastaava tiheysfunktio on luokassa $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, niin lemman 3.18 ja lauseen 3.29 perusteella $|\hat{\mu}(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Myöhemmin palataan tutkimaan polynomiaalista vähenemistä.

4 Rieszin energia

Tässä luvussa tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mittoja potentiaaliateorian kannalta esittelemällä *Rieszin energia*, joka voidaan liittää jokaiseen Borel-mittaan sopivana parmetrista $s \in \mathbb{R}_+$ riippuvana integraalina $I_s(\mu)$. Rieszin energian äärellisyys antaa jotain informaatiota sopivissa tilanteissa Borel-mittojen käytöksestä ja Borel-joukkojen käytöksestä. Pääasiallisen mielenkiinnon kohteena ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompaktikantajaiset ja äärelliset Borel-mitat, joiden kokoelmaa merkitään $\mathcal{K}_n$.

Ensimmäisessä kappaleessa esitellään *Rieszin ydin*, Rieszin energia ja tutkitaan, miten Rieszin-energian äärellisyys liittyy sopivan Borel-mitan μ polynomiaaliseen kontrolloituvuuteen r-säteisten pallojen mitan suhteen. Ts. voidaan kysyä, mikä yhteys seuraavien ehtojen välillä on a) $I_s(\mu) < \infty$ ja b) löytyy $C \in \mathbb{R}_+$, siten että kaikilla avoimilla palloilla $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(B(x, r)) \leq Cr^s.$$

Lisäksi määritellään Borel-joukoille *kapasitiivinen dimensio*, joka liittää aiemman mitan ominaisuuden mitan kantavan Borel-joukon ominaisuudeksi. Toisessa kappaleessa esitellään ja todistetaan klassinen *Frostmanin lemma*, joka sanoo, että kapasitiivinen dimensio yhtenee $\mathcal{F}_\sigma$-joukon Hausdorff-dimension kanssa. Näin saadaan yhteys Rieszin energian ja Hausdorff-dimension välille. Kolmannessa kappaleessa esitellään ja todistetaan *energiakaava*, joka antaa sopivassa tilanteessa yhteyden luokan $\mathcal{K}_n$ mitan Rieszin energian ja Fourier-muunnoksen välille. Viimeisessä kappaleessa tarkastellaan muutama energiakaavan seuraus. Erityisen mielenkiinnon kohteena on, mitä Rieszin-energian äärellisyys kertoo luokan $\mathcal{K}_n$ mitan polynomiaalisesta vähenemisestä.

Luku pohjautuu valtaosin Mattilan teokseen [17], katso s.109-114, s.159-163 ja s.168-169. Huomaa, että Mattila taas puhuu taaskin Radon-(ulko)mitoista. Myös viitauksia muihin lähteisiin löytyy. Ideana on käydä läpi tarkastelut lähteitä yksityiskohtaisemmin läpi ja paikkailla vailinnaisia kohtia. Ainoa oma varsinainen kontribuutio on lemma 4.21, joka on hieman paranneltu versio Mattilan sivuhuomiosta (katso [16, s.40]) itsekeksityllä todistuksella.

4.1 Kapasitiivinen dimensio ja Rieszin energia

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitalle m_n pätee tunnetusti joukkojen skaalausominaisuus, erityisesti jokaiselle avoimelle pallolle $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$

$$m_n(B(x, r)) = m_n(B(0, 1))r^n.$$

Ominaisuus on monissa arvioinneissa sangen kätevä, sillä pallojen kokoa Lebesguen mitan mielessä voidaan kontrolloida nyt säteen r avulla. Yleiselle avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mitalle μ voidaan kysyä, missä tapauksessa löytyy vakiot $C, s \in \mathbb{R}_+$ siten, että

$$\mu(B(x, r)) \leq Cr^s \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}^n \text{ ja } r > 0. \tag{4.1}$$

Huomaa, että ominaisuus implikoi suoraan mitan μ lokaalin äärellisyyden ja σ-äärellisyyden. Lisäksi kaikki kompaktit joukot ovat äärellismittaisia. Ongelmaa voidaan tarkastella Rieszin energian avulla. Määritellään tätä varten Rieszin ydin.

Määritelmä 4.1 (**Rieszin ydin**).
Kuvausta $\mathrm{k}_s : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, missä $s \in \mathbb{R}_+$ ja kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ asetetaan $\mathrm{k}_s(x) = \|x\|^{-s}$ sanotaan Rieszin ytimeksi.

Määritelmästä nähdään, että Rieszin ydin on ei-negatiivinen alhaalta puolijatkuva funktio. Lisäksi se on C^∞-kuvaus joukossa $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Kuitenkaan k_s ei ole Lebesguen mitan suhteen millään $s \in \mathbb{R}_+$ joskin tapauksessa $0 < s < n$ nähdään se Cavalierin periaatteella 2.25 lokaalisti integroituvaksi. Rieszin ytimen avulla jokaiseen sigma-äärelliseen Borel-mittaan voidaan liittää energiaintegraali – Rieszin energia.

Määritelmä 4.2 (**Rieszin energia**).
Olkoon μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ sigma-äärellinen Borel-mitta ja $s \in \mathbb{R}_+$. Mitan μ Rieszin s-energia asetetaan

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{k}_s(x - y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x). \tag{4.2}$$

Jatkossa puhutaan lyhyemmin vain energiasta. Motivaatio tälle konseptille on se, että Rieszin energian antaa seuraavan lemman muodossa jotain informaatiota sigma-äärellisen mitan käyttäytymisestä käytöksestä, sillä energian äärellisyys liittyy oleellisesti edellä esitettyyn epäyhtälöön (4.1). Todistus menee kuten [18, s.109-110].

Lemma 4.3.
Olkoon μ avaruuden $\mathbb{R}^n$ sigma-äärellinen Borel-mitta.

(i) Mikäli μ on äärellinen, ja löytyy positiiviset vakiot C ja t siten, että $\mu(B(x,r)) \leq Cr^t$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r \in \mathbb{R}_+$, niin $I_s(\mu) < \infty$, kun $s < t$.

(ii) Jos taas oletetaan, että $0 < \mu(\mathbb{R}^n)$ ja $I_s(\mu) < \infty$, jollekin $s > 0$, niin löytyy Borel-joukko A ja joku vakio $C \in \mathbb{R}_+$ siten, että $\mu(A) > 0$ ja $\nu(B(x,r)) \leq Cr^s$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$, missä $\nu = \mu \llcorner A$.

Kohdassa (ii) oletus $0 < \mu(\mathbb{R}^n)$ takaa sen, ettei tarkastella triviaalia nollamittaa. Ehto $\mu(A) > 0$ takaa sen, että A on epätyhjä ja rajoittumamitta ei ole myöskään nollamitta. Sigma-äärellisyys sallii Fubinin lauseen käytön.

Todistus.

(i)
Nyt käyttämällä a) Cavalierin periaatetta 2.25 saadaan

$$
\begin{aligned}
I_s(\mu) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \|x-y\|^{-s} \mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{a)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \mu(\{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\|^{-s} \geq w\})\mathrm{d}w\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \mu(\overline{B}(x, w^{-\frac{1}{s}}))\mathrm{d}w\mathrm{d}\mu(x). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Tekemällä sisempään integraaliin muuttujanvaihto $w = r^{-s}$ saadaan edelleen

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \mu(\overline{B}(x, w^{-\frac{1}{s}}))\mathrm{d}w\mathrm{d}\mu(x) = s\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \mu(\overline{B}(x,r))r^{-s-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mu(x). \qquad (2)
$$

Kaikilla $u > r$ pätee nyt $\mu(\overline{B}(x,r)) \leq \mu(B(x,u)) \leq Cu^t$, joten potenssin jatkuvuuden nojalla

$$
\mu(\overline{B}(x,r)) \leq \inf_{u>r} Cu^t = Cr^t. \qquad (3)
$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
I_s(\mu) &\overset{(1)+(2)}{=} s\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^1 \mu(\overline{B}(x,r))r^{-s-1}\mathrm{d}r + \int_1^\infty \mu(\overline{B}(x,r))r^{-s-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{(3)}{\leq} s\int_{\mathbb{R}^n}\left(C\int_0^1 r^{t-s-1}\mathrm{d}r + \mu(\mathbb{R}^n)\int_1^\infty r^{-s-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\mu(x) \\
&= s\ \mu(\mathbb{R}^n)\left(\frac{C}{t-s} + \frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{s}\right) < \infty.
\end{aligned}
$$

(ii)
Fubinin lauseen nojalla ei-negatiivinen kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, missä jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ asetetaan

$$
f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \|x-y\|^{-s}\mathrm{d}\mu(y),
$$

on Borel-kuvaus ja koska $I_s(\mu) < \infty$, niin se on μ-integroituva. Tällöin $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\}) = 0$ ja siten

$$
\lim_{k\to\infty} \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq k\}\right) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \infty\}) = \mu(\mathbb{R}^n) > 0.
$$

Siispä löytyy $k \in \mathbb{N}$ siten, että Borel-joukolle $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq k\}$ pätee $\mu(A) > 0$. Asetetaan seuraavaksi rajoittumamitta $\nu = \mu \llcorner A$ ja $x \in A$, tällöin kaikille $r > 0$ saadaan arvio

$$\begin{aligned} \nu(B(x,r)) &= r^s \int_{B(x,r)} r^{-s} \mathrm{d}\nu(y) = r^s \int_{B(x,r)\cap A} r^{-s} \mathrm{d}\mu(y) \\ &\leq r^s \int_{B(x,r)\cap A} \|x-y\|^{-s} \mathrm{d}\mu(y) \\ &\leq r^s \int_{\mathbb{R}^n} \|x-y\|^{-s} \mathrm{d}\mu(y) \overset{b)}{\leq} kr^s. \end{aligned} \tag{4}$$

Kohta b) seuraa tässä A:n määritelmästä ja siitä, että $x \in A$. Olkoon sitten $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Jos $B(x,r) \cap A = \emptyset$, niin $\tilde{\nu}(B(x,r)) = 0$. Voidaan siis olettaa, että löytyy $z \in B(x,r) \cap A$. Tällöin $B(x,r) \subset B(z,2r)$ ja arviota (4) hyödyntämällä saadaan

$$\nu(B(x,r)) \leq \nu(B(z,2r)) \leq k(2r)^s = 2^s kr^s.$$

Väite seuraa nyt tästä arviosta. □

Lukijan on helppo todeta, että lemman 4.3 kohdassa (ii) esiintyvä joukko A voidaan valita kompaktiksi. Tarkastellaan seuraavaksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-joukon A kantamia kompaktikantajaisia, äärellisiä ja epätriviaaleja Borel-mittoja. Merkitään

$$\mathcal{K}_A = \{\mu \text{ on avaruuden } \mathbb{R}^n \text{ Borel-mitta} : \operatorname{spt} \mu \subset A \text{ ja } 0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty\}. \tag{4.3}$$

Nyt voidaan kysyä, missä tapauksessa epäyhtälö (4.1) pätee joillekin $s \in \mathbb{R}_+$ ja $\mu \in \mathcal{K}_A$ ja mikä on pienin yläraja tällaisille luvuille s. Tämä antaa antaa aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 4.4 (Kapasitiivinen dimensio).
Borel-joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ kapasitiivinen dimensio asetetaan

$$\dim_c(A) = \sup\{s \in \mathbb{R}_+ : \textit{ löytyy } \mu \in \mathcal{K}_A \textit{ s.e. } \mu(B(x,r)) \leq r^s \textit{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n \textit{ ja } r > 0\},$$

missä kokoelma $\mathcal{K}_A$ on yhtälön (4.3) mukainen. Tässä tyhjälle joukolle käytetään tulkintaa $\sup \emptyset = 0$.

Mikäli Borel-joukolle A pätee $\dim_c(A) = 0$, niin A ei kanna yhtään epätriviaalia ja äärellistä Borel-mittaa, jolle arvio (4.1) on voimassa. Lemma 4.3 paljastaa nyt energian ilmeisen yhteyden joukon kapasitiiviseen dimensioon.

Lemma 4.5.
Kaikille Borel-joukoille $A \subset \mathbb{R}^n$ $\dim_c(A) = \sup\{s > 0 : \textit{löytyy } \mu \in \mathcal{K}_A \textit{ s.e. } I_s(\mu) < \infty\}$, *tässä tyhjälle joukolle käytetään taas tulkintaa* $\sup \emptyset = 0$.

Todistus.
Oletetaan aluksi, että Borel-joukolle A pätee $\dim_c(A) > 0$. Tällöin jokaiselle $0 < \varepsilon < \dim_c(A)$ löytyy kapasitiivisen dimension määritelmän ja lemman 4.3 (i) nojalla mitta $\mu_\varepsilon \in \mathcal{K}_A$ siten, että $I_s(\mu_\varepsilon) < \infty$ kaikilla $0 < s < \dim_c(A) - \varepsilon$. Tästä seuraa, että

$$\sup\{s > 0 : \text{löytyy } \mu \in \mathcal{K}_A \text{ s.e. } I_s(\mu) < \infty\} \geq \dim_c(A). \tag{1}$$

Tapauksessa $\dim_c(A) = 0$ epäyhtälö (1) on triviaali. Toisaalta mikäli joukko A kantaa Borel-mitan $\mu \in \mathcal{K}_A$, jolle $I_s(\mu) < \infty$, jollain $s \in \mathbb{R}_+$, niin lemman 4.3 (ii) nojalla löytyy mitan μ epätriviaali rajoittumamitta ν ja vakio $C \in \mathbb{R}_+$ siten, että $\nu(B(x,r)) \leq Cr^s$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin tarkastemalla mittaa $C^{-1}\nu \in \mathcal{K}_A$ nähdään, että $s \leq \dim_c(A)$. Siispä

$$\sup\{s > 0 : \text{löytyy } \mu \in \mathcal{K}_A \text{ s.e. } I_s(\mu) < \infty\} \leq \dim_c(A). \tag{2}$$

Tapauksessa $\sup\{s > 0 : \text{löytyy } \mu \in \mathcal{K}_A \text{ s.e. } I_s(\mu) < \infty\} = 0$ epäyhtälö (2) on taas triviaali. Väite seuraa siten arvioista (1) ja (2). □

Kapasitiivisen dimensiossa on tavallaan muunnettu yhtälön (4.1) ominaisuus mitalle Borel-joukon ominaisuudeksi. Kapasitiivisen dimension tekee mielenkiintoiseksi se, että se voidaan osoittaa yhtenevän joukon Hausdorff-dimension kanssa $\mathcal{F}_\sigma$-joukkojen tapauksessa.

4.2 Frostmanin lemma

Borel-joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Hausdorff-dimensio asetettiin määritelmän 2.26 nojalla

$$\dim_H(A) = \sup\{s \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{H}^s(A) > 0\},$$

missä $\mathcal{H}^s$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ s-ulotteinen Hausdorff-mitta. Muista, että aina $\dim_H(A) \leq n$. Frostmanin lemma liittää nyt edellisen kappaleen tarkastelut Hausdorff-dimensioon. Esitellään se avaruuden $\mathbb{R}^n$ yleisille $\mathcal{F}_\sigma$ -joukoille, eli joukoille, jotka muodostuivat suljettujen joukkojen numeroituvista yhdisteistä.

Lause 4.6 (**Frostmanin lemma $\mathcal{F}_\sigma$ -joukoille**).
Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}_\sigma$ -joukko ja $s \in \mathbb{R}_+$. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:

(i) $\mathcal{H}^s(A) > 0$.

(ii) Löytyy $\mu \in \mathcal{K}_A$ siten, että $\mu(B(x,r)) \leq r^s$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$.

Välittömänä seurauksena saadaan jo aiemmin mainittu tulos.

Lause 4.7.
Jokaiselle $\mathcal{F}_\sigma$ -joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $\dim_H(A) = \dim_c(A)$.

Siten Frostmanin lemma liittää kaksi näennäisesti erilaista F_σ-joukon ominaisuutta yhteen. Frostmanin lemma yleistyy mielivaltaisille Borel-joukoille, jolloin myös seuraus 4.7 yleistyy näihin joukkoihin. Todistus on kuitenkin vaikeahko, katso Carlesonin tarkastelu [4, s.6-11]. Tyydytään siten osoittamaan Frostmanin lemma lauseen 4.6 laajuudessa. Kuitenkin esimerkiksi on helppo todeta, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikki avoimet joukot ovat $\mathcal{F}_\sigma$-joukkoja.

Seuraavaksi annetaan lauseen 4.6 todistus, joka muodostaa tämän luvun rungon. Lauseen ehdossa (ii) oleva mitta on nyt määritelmän perusteella äärellinen. Se, että ehdosta (ii) seuraa ehto (i), on helppo todistaa ja pätee vieläpä mielivaltaisille Borel-joukoille, katso [18, Lause 8.7 s.111-112].

Lemma 4.8.
Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel-joukko ja $\mu \in \mathcal{K}_A$ siten, että $\mu(B(x,r)) \leq r^s$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Tällöin $\mathcal{H}^s(A) > 0$.

Todistus.
Koska μ on epätriviaali, niin $\mu(A) = \mu(\text{spt } \mu) \in \mathbb{R}_+$. Olkoon sitten $\delta > 0$. Tällöin löytyy peitekokoelma Borel-joukkoja $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ siten, että

$$\text{spt } \mu \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \text{ , diam}(E_i) \leq \delta \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N} \text{ ja } \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(E_i)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(\text{spt } \mu) + \frac{\mu(A)}{2}.$$

Lisäksi voidaan olettaa, että spt $\mu \cap E_i \neq \emptyset$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Valitaan jokaisesta leikkauksesta spt $\mu \cap E_i$ piste x_i. Tällöin spt $\mu \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, \text{diam}(E_i))$ ja

$$\begin{aligned}
\mu(A) = \mu(\text{spt } \mu) &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B(x_i, d(E_i))) \\
&\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(E_i)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(\text{spt } \mu) + \frac{\mu(A)}{2} \\
&\leq \mathcal{H}^s(\text{spt } \mu) + \frac{\mu(A)}{2} \leq \mathcal{H}^s(A) + \frac{\mu(A)}{2}.
\end{aligned}$$

Väite seuraa suoraan tästä. □

Lemman 4.8 seurauksena saadaan, että jokaiselle Borel-joukolle $A \in \mathbb{R}^n$ pätee $\dim_c(A) \leq \dim_H(A)$. Siten kapasitiivinen dimensio $\dim_c(A)$ ei voi koskaan ylittää euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensiota n.

Todistus ehdosta (i) ehtoon (ii) on luonteeltaan konstruktiivinen ja noudattaa Mattilan tarkastelua, katso [18, Lause 8.8 s.112-114]. Esitellään aluksi konstruktiossa tarvittavat *dyadisen kuutiot*.

Määritelmä 4.9 (**Dyadinen kuutio**).
Olkoon $p \in \mathbb{Z}$ ja $x \in 2^p\mathbb{Z}^n$, missä

$$2^p\mathbb{Z}^n = \{(2^pk_1, \ldots, 2^pk_n) \in \mathbb{R}^n : k_i \in \mathbb{Z},\ \textit{kaikilla}\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Tällöin joukkoa $Q = x + [0, 2^p[^n \subset \mathbb{R}^n$ kutsutaan dyadiseksi kuutioksi. Asetetaan edelleen kokoelma

$$\mathcal{D}_p = \{x + [0, 2^p[^n : x \in 2^p\mathbb{Z}^n\},$$

joka käsittää kaikki $\mathbb{R}^n$:n dyadiset kuutiot, joiden sivun pituus on 2^p.

Dyadinen kuutio $Q \in \mathcal{D}_p$ on n-särmiönä Borel-joukko, jonka halkaisija on avaruuslävistäjän pituus, eli $\operatorname{diam}(Q) = 2^p\sqrt{n}$. Kaikille $p \in \mathbb{Z}$ kokoelma $\mathcal{D}_p$ koostuu pistevieraista kuutioista ja se muodostaa avaruuden pistevieraan osituksen, ts.

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{Q \in \mathcal{D}_p} Q.$$

Edelleen jokainen kuutio Q kokoelmasta $\mathcal{D}_p$ muodostuu 2^n kappaleesta kokoelman $\mathcal{D}_{p-1}$ kuutioita. Jos kaksi dyadista kuutiota leikkaa keskenään, niin kyseessä on aina samat kuutiot tai toisen aito inkluusio toiseen. Mielivaltainen pallo voidaan aina peittää kiinteällä määrällä samankokoisia dyadisia kuutioita siten, että kuutioiden sivun pituus on suhteessa pallon säteeseen on tasaisesti rajoitettu.

Lemma 4.10.
Olkoon $r \in \mathbb{R}_+$. Tällöin valitsemalla $p \in \mathbb{Z}$ siten, että $2^{p-1} < 2r \leq 2^p$, jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ löytyy erilliset kuutiot $Q_1, \ldots, Q_{2^n} \in \mathcal{D}_p$ siten, että

$$B(x, r) \subset \bigsqcup_{i=1}^{2^n} Q_i \quad \textit{ja} \quad \operatorname{diam}\left(\bigsqcup_{i=1}^{2^n} Q_i\right) = 2^{p+1}\sqrt{n}.$$

Todistus.
Huomaa, että p on yksikäsitteinen. Avoin pallo $B(x, r)$ sisältyy avoimeen kuutioon $Q(x, r) = x +]-r, r[^n$. Väite on todistettu, jos osoitetaan, että $Q(x, r)$ voidaan peittää halutulla määrällä sopivan kokoisia dyadisia kuutioita. Kirjoitetaan keskipiste karteesisesti $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Tällöin jokaiselle $i = 1, \ldots, n$ löytyy jakoyhtälön mukaisesti $k_i \in \mathbb{Z}$ siten, että $x_i = 2^pk_i + w_i$, missä $|w_i| \leq 2^{p-1}$. Tällöin pätee inkluusio $]x_i - r, x_i + r[\subset [2^pk_i - 2^p, 2^pk_i + 2^p[$ ja siten esittämällä $Q(x, r)$ karteesisena tulona saadaan

$$Q(x, r) = \prod_{i=1}^{n}]x_i - r, x_i + r[\subset \prod_{i=1}^{n} [2^pk_i - 2^p, 2^pk_i + 2^p[.$$

Nyt tulojoukko $T(x, r, p) = \prod_{i=1}^n [2^pk_i - 2^p, 2^pk_i + 2^p[$ koostuu täsmälleen 2^n kappaleesta kokoelman $\mathcal{D}_p$ erillisiä kuutioita. Lisäksi $T(x, r, p)$ on nyt itsekin kuutio sivunpituudella 2^{p+1} ja siten $\operatorname{diam}(T(x, r, p)) = 2^{p+1}\sqrt{n}$. □

Merkitään jatkossa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ *dyadista yksikkökuutiota* $Q_{n,0} = [0, 1[^n$. Tarkoituksena on seuraavaksi todeta, että lauseessa 4.6 implikaatio ehdosta (i) ehtoon (ii) on voimassa kompakteille ja epätyhjille joukoille, jotka sisältyvät dyadiseen yksikkökuutioon $Q_{n,0}$. Aloitetaan tarkastelu seuraavalla havainnolla.

Lemma 4.11.
Olkoon $s \in \mathbb{R}_+$ ja $K \subset Q_{n,0}$ kompakti ja epätyhjä. Tällöin jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ löytyy äärellinen Borel-mitta ν_k siten, että

(i) mikäli $Q \cap K = \emptyset$ kuutiolle $Q \in \bigcup_{j=-k}^{\infty} \mathcal{D}_j$, niin $\nu_k(Q) = 0$,

(ii) $\nu_k(Q) \leq \operatorname{diam}(Q)^s$ jokaiselle $Q \in \bigcup_{j=-k}^{\infty} \mathcal{D}_j$ ja

(iii) $n^{-\frac{s}{2}}\mathcal{H}^s_\infty(K) \leq \nu_k(\mathbb{R}^n) \leq 1$.

Todistus.
Tarkasteellaan seuraava rekursiivista konstruktiota. Asetetaan aluksi

$$\nu_k^0 = \sum_{Q \in \mathcal{D}_{-k}} 2^{-ks} \alpha(Q)(m_n \llcorner Q), \quad \alpha(Q) = \begin{cases} 1, & Q \cap K \neq \emptyset \\ 0, & Q \cap K = \emptyset. \end{cases} \tag{1}$$

Nyt luvulle $j = 1, \dots, k$, kun ν_k^{j-1} on määritelty, asetetaan rekursiivisesti

$$\nu_k^j = \sum_{Q \in \mathcal{D}_{-k+j}} \lambda_j(Q)(\nu_k^{j-1} \llcorner Q), \quad \lambda_j(Q) = \begin{cases} 1, & \nu_m^{j-1}(Q) \leq 2^{-(k-j)s} \\ 2^{-(k-j)s} \left(\nu_m^{j-1}(Q)\right)^{-1}, & \mu_m^{j-1}(Q) > 2^{-(k-j)s}. \end{cases} \tag{2}$$

Puretaan hieman annettua määritelmää lähtien liikkeelle yhtälön (1) mukaisesta mitasta ν_k^0. Koska $K \subset Q_{n,0}$, niin $Q \cap K$ on epätyhjä korkeintaan kaikilla kuutioilla $Q \in \mathcal{D}_{-k}$, jotka sisältyvät kuutioon $Q_{n,0}$. Koska tällaisia $Q \in \mathcal{D}_{-k}$ äärellinen määrä (2^{nk} kappaletta), niin kyseessä on käytännöllisesti katsoen äärellisen monen Lebesguen mitan rajoittuman positiivinen summa. Jokainen rajoittuma $m_n \llcorner Q$ on äärellinen Borel-mitta, joten ν_k^0 on myös sitä. Lisäksi sen määritelmän perusteella $\nu_k^0(Q) \leq 2^{-ks}$ jokaisella $Q \in \mathcal{D}_{-k}$. Mikäli $Q \cap K = \emptyset$ kuutiolle $Q \in \bigcup_{j=-k}^{\infty} \mathcal{D}_j$, niin se voidaan esittää äärellisenä ja yksikäsitteisenä yhdisteenä joitakin kokoelman $\mathcal{D}_{-k}$ kuutioita, jotka eivät tällöin voi leikata joukkoa K ja ovat siten ν_k^0-nollanmittaisia, joten additiivisuuden nojalla välttämättä $\nu(Q) = 0$.

Edelleen on helppo nähdä, että rekursioyhtälö (2) tuottaa jokaiselle $j = 1, \dots, k$ äärellisen Borel-mitan ν_k^j siten, että $\nu_k^j(Q) \leq 2^{-(k-j)s}$ jokaisella $Q \in \mathcal{D}_{-k+j}$ ja $\nu_k^j(A) \leq \nu_k^i(A)$ jokaisella $i = 0, \dots, j$ ja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin jokaisella $i = 0, \dots j$ ja $Q \in \mathcal{D}_{-k+i}$ saadaan, että

$$\nu_k^j(Q) \leq \mu_k^i(Q) \leq 2^{-(k-i)s} = n^{-\frac{s}{2}} \left(n^{\frac{1}{2}} 2^{-(k-i)}\right)^s = n^{-\frac{s}{2}} \operatorname{diam}(Q)^s \leq \operatorname{diam}(Q)^s. \tag{3}$$

Todetaan nyt, että valitsemalla $\nu_k = \nu_k^k$ saadaan väitteen mitta. Koska nyt kohta (i) on voimassa mitalle ν_k^0 ja $\nu_k(A) = \nu_k^k(A) \leq \nu_k^0(A)$ jokaisella $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, niin kohta (i) on voimassa mitalle ν_k. Tällöin

$$\nu_k(\mathbb{R}^n) = \nu_k(Q_{n,0}) \leq 1. \tag{4}$$

Nyt mikäli $Q \in \mathcal{D}_i$ jollain $i \in \mathbb{N}$, niin $\nu_k(Q) = \nu_k^k(Q) = \nu_k^k(Q_{n,0}) \leq 1 \leq \operatorname{diam}(Q)^s$. Toisaalta mikäli $Q \in \mathcal{D}_{-i}$ jollain $i = 0, \dots, k$, niin arvion (3) nojalla $\nu_k(Q) = \nu_k^k(Q) \leq \operatorname{diam}(Q)^s$. Siispä kohta (ii) on myös voimassa mitalle ν_k.

Kohtaa (iii) varten löytyy äärellinen kokoelma pareittain pistevieraita dyadisia kuutioita $\mathcal{V}$, siten että

a) mikäli $Q \in \mathcal{V}$, niin $Q \subset Q_{n,0}$, $Q \in \mathcal{D}_{-j}$ ja $\nu_k(Q) = 2^{-js}$ jollain $j \in \{0, \dots, k\}$, ja

b) $K \subset \bigsqcup_{Q \in \mathcal{V}} Q$.

Tällainen kokoelma on todellakin olemassa. Oletetaan, että $Q \cap K \neq \emptyset$ kuutiolle $Q \in \mathcal{D}_{-k}$. Koska $K \neq \emptyset$, niin ainakin yksi tällainen kuutio on olemassa. Mitan ν_k konstruktion perusteella löytyy pienin $j = 0, \dots, k$ ja yksikäsitteinen $\tilde{Q} \in \mathcal{D}_{-j}$ siten, että $Q \subset \tilde{Q} \subset Q_{n,0}$ ja $\mu_k(\tilde{Q}) = 2^{-js} = n^{-\frac{s}{2}} \operatorname{diam}(Q)^s$. Siten $\tilde{Q}$ on maksimaalinen dyadinen kuutio, jolle $Q \subset \tilde{Q} \subset Q_{n,0}$ ja $\mu_k(\tilde{Q}) = n^{-\frac{s}{2}} \operatorname{diam}(Q)^s$. Nyt kuutioita $Q \in \mathcal{D}_{-k}$, joille $Q \cap K \neq \emptyset$, on äärellinen määrä. Merkitään niitä $Q^1, \dots, Q^N$. Tällöin mikään dyadisista kuutioista $\tilde{Q}^1, \dots, \tilde{Q}^N$ ei voi sisältää aidosti toistaan, koska tämä olisi ristiriita maksimaalisuuden kanssa. Siispä ne ovat erisuurilla indekseillä joko samoja tai pistevieraita. Kokoelma $\mathcal{V}$ voidaan nyt muodostaa kuutioista $\tilde{Q}^1, \dots, \tilde{Q}^N$ samaistalla indeksit, jotka vastaavat samaa kuutiota, ja uudelleenindeksoimalla.

Kohdasta a) seuraa siis, että $\nu_k(Q) = n^{-\frac{s}{2}} \operatorname{diam}(Q)^s$ jokaiselle $Q \in \mathcal{V}$ ja toisaalta kohdan b) perusteella pätee $\bigsqcup_{Q \in \mathcal{V}} \nu_k(Q) = \nu_k(\bigsqcup_{Q \in \mathcal{V}} Q) = \nu_k(\mathbb{R}^n)$. Tällöin Hausdorff-sisällön $\mathcal{H}_\infty^s(K)$ määritelmän perusteella

$$\mathcal{H}_\infty^s(K) \leq \sum_{Q \in \mathcal{V}} \operatorname{diam}(Q)^s = n^{\frac{s}{2}} \sum_{Q \in \mathcal{V}} \nu_k(Q) = n^{\frac{s}{2}} \nu(\mathbb{R}^n) \overset{(4)}{\leq} n^{\frac{s}{2}}.$$

Siispä kohta (iii) seuraa tästä arviosta. $\square$

Lemman 4.11 konstruktiosta saadut mitat ν_k kompaktille ja epätyhjälle $K \subset Q_{n,0}$ ja luvulle $s \in \mathbb{R}_+$ tavallaan approksimoivat Frostmanin lemmassa olevaa joukon K kantamaa mittaa μ. Nimittäin jos $\mathcal{H}^s(K) > 0$, niin myös $\mathcal{H}^s_\infty(K) > 0$ ja tällöin jokainen ν_k on lemman 4.11 nojalla äärellinen ja epätriviaali Borel-mitta. Mitan ν_k kantaja approksimoi nyt joukkoa K kokoelman dyadisten $\mathcal{D}_{-k}$ kuutioiden tarkkuudella. Lisäksi jokaiselle $r \in \mathbb{R}_+$ löytyy $k_r \in \mathbb{N}$ siten, että $\nu_k(B(x,t)) \leq Ct^s$ jokaisella $t \geq r$ ja $k \geq k_r$, missä C on kiinteä vakio.

Lemma 4.12.
Olkoon $s \in \mathbb{R}_+$, kompakti ja epätyhjä $K \subset Q_{n,0}$, sekä näihin liittyvä mitta ν_k jokaiselle $k \in \mathbb{N}$, kuten lemmassa 4.11. Tällöin jokaiselle $r \in \mathbb{R}_+$ löytyy $k_r \in \mathbb{N}$ siten, että jokaisella $k \geq k_r$ seuraavat ehdot ovat voimassa.

(i) Kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $t \geq r$ pätee $\nu_k(B(x,t)) \leq 2^{n+2s} n^{\frac{s}{2}} t^s$ ja

(ii) $\nu_k(\{y \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(y,K) > r\}) = 0$.

Todistus.
Mielivaltaiselle $t \in \mathbb{R}_+$ löytyy nyt yksikäsitteinen $p_t \in \mathbb{Z}$ siten, että a) $2^{p_t - 1} < 2t \leq 2^{p_t}$. Tällöin lemman 4.10 nojalla mielivaltaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ löytyy pareittain pistevieraat dyadiset kuutiot $Q_1, \ldots, Q_{2^n} \in \mathcal{D}_{p_t}$ siten, että

$$B(x,t) \subset \bigsqcup_{i=1}^{2^n} Q_i \quad \text{ja} \quad \operatorname{diam}\left(\bigsqcup_{i=1}^{2^n} Q_i\right) = 2^{p_t+1}\sqrt{n}. \tag{1}$$

Tällöin käyttämällä b) lemman 4.11 kohtaa (ii) saadaan jokaisella $k \geq \max\{1, -p_t\}$ arvio

$$\nu_k(B(x,t)) \overset{(1)}{\leq} \nu_k\left(\bigsqcup_{i=1}^{2^n} Q_i\right) = \sum_{i=1}^{2^n} \nu_k(Q_i) \overset{b)}{\leq} \sum_{i=1}^{2^n} \operatorname{diam}(Q_i)^s = 2^n n^{\frac{s}{2}} 2^{sp_t} \overset{a)}{<} 2^{n+2s} n^{\frac{s}{2}} t^s. \tag{2}$$

Asetetaan seuraavaksi annetulle $r \in \mathbb{R}_+$ luku $t_r = \frac{r}{8\sqrt{n}}$. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ siten, että $\operatorname{dist}(x,K) > r$. Tällöin löytyy kohdan a) mukainen $p_{t_r} \in \mathbb{Z}$ ja kuutiot $Q_1, \ldots, Q_{2^n} \in \mathcal{D}_{p_{t_r}}$ kohdan (1) mukaisesti pallolle $B(x,t_r)$. Nyt

$$\operatorname{diam}\left(\bigsqcup_{i=1}^{2^n} Q_i\right) \overset{(1)}{=} 2^{p_{t_r}+1}\sqrt{n} \overset{a)}{<} 8t_r\sqrt{n} = r$$

ja siten välttämättä $K \cap \bigsqcup_{i=1}^{2^n} Q_i = \emptyset$. Tällöin $K \cap Q_i = \emptyset$ jokaisella $i = 1, \ldots, 2^n$, joten käyttämällä c) lemman 4.11 kohtaa (i) saadaan jokaisella $k \geq \max\{1, -p_{t_r}\}$

$$\nu_k(B(x,r_t)) \leq \nu_k\left(\bigsqcup_{i=1}^{2^n} Q_i\right) = \sum_{i=1}^{2^n} \nu_k(Q_i) \overset{c)}{=} 0. \tag{3}$$

Lemman 2.11 nojalla löytyy numeroituva ja tiheä osajoukko $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,K) > r\}$. Tällöin jokaisella $k \geq \max\{1, -p_{t_r}\}$

$$\nu_k(\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,K) > r\}) \leq \nu_k\left(\bigcup_{x \in A} B(x,t_r)\right) \leq \sum_{x \in A} \nu_k(B(x,t_r)) \overset{(3)}{=} 0. \tag{4}$$

Mikäli $0 < u \leq v < \infty$, niin $p_u \leq p_v$ kohdan a) mukaisille kokonaisluvuille p_u ja p_v. Siten valitsemalla $k_r = \max\{1, -p_{t_r}\}$ seuraa väite luvulle $r \in \mathbb{R}_+$ kohdista (2) ja (4). $\square$

Nyt hyödyntäen lemman 4.11 mittajonon $(\nu_k)_{k=1}^\infty$ sopivan osajonon heikkoa konvergenssia saadaan Frostmanin lemman toinen suunta toimimaan yksikkökuution $Q_{n,0}$ epätyhjille kompakteille joukoille.

Lemma 4.13.
Olkoon $s \in \mathbb{R}_+$ ja $K \subset Q_{0,n}$ kompakti ja epätyhjä. Mikäli $\mathcal{H}^s(K) > 0$, niin löytyy $\mu \in \mathcal{K}_K$ siten, että $\mu(B(x,r)) \leq r$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$.

Todistus.
Olkoon jono mittoja $(\nu_k)_{k=1}^{\infty}$, jotka liittyvät joukkoon K ja lukuun s lemman 4.11 tavalla. Lemman 4.11 kohdan (i) nojalla spt $\nu_k \in \overline{Q_{n,0}}$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Koska $\mathcal{H}^s(K) > 0$, niin myös $\mathcal{H}^s_\infty > 0$. Lemman 4.11 kohdan (iii) mukaisesti nyt jokaisella $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$n^{-\frac{s}{2}}\mathcal{H}^s_\infty(K) \leq \nu_k(\mathbb{R}^n) \leq 1. \tag{1}$$

Tällöin voidaan määritellä jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ normitettu mitta $\tilde{\nu}_k = \nu_k(\mathbb{R}^n)^{-1}\nu_k$. Tarkastellaan seuraavaksi joukkoa $\overline{Q_{n,0}}$ omana metrisenä aliavaruutenaan, jolloin se on kompakti. Tällöin on helppo nähdä, että $(\tilde{\nu}_k)_{k=1}^{\infty}$ on jono Borel-todennäköisyysmittoja kompaktissa ja metrisessä avaruudessa $\overline{Q_{n,0}}$, jolloin lauseen 2.19 nojalla löytyy osajono $(\tilde{\nu}_{k_j})_{j=1}^{\infty}$, joka suppenee heikosti johonkin avaruuden $\overline{Q_{n,0}}$ Borel-todennäköisyysmittaan ν. Edelleen on helppo päätellä, että ν on avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-todennäköisyysmitta ja $(\tilde{\nu}_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ konvergoi siellä mittaan ν heikosti. Nyt käyttämällä a) lemmaa 2.18 ja b) lemman 4.12 kohtaa (ii) nähdään, että jokaiselle $i \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}
\nu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,K) > i^{-1}\}\right) &\overset{a)}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \tilde{\nu}_{k_j}\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,K) > i^{-1}\}\right) \\
&= \liminf_{j\to\infty} \nu_{k_j}(\mathbb{R}^n)^{-1}\nu_{k_j}\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,K) > i^{-1}\}\right) \\
&\overset{(1)}{\leq} n^{\frac{s}{2}}\mathcal{H}^s_\infty(K)^{-1} \liminf_{j\to\infty} \nu_{k_j}\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,K) > i^{-1}\}\right) \\
&\overset{b)}{=} 0
\end{aligned}$$

Siten mitan ν jatkuvuuden nojalla

$$\nu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,K) > 0\}\right) = \lim_{i\to\infty} \nu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,K) > i^{-1}\}\right) = 0$$

ja tämä implikoi sitä, että spt $\nu \subset K$. Edelleen käyttäen taas c) lemmaa 2.18 ja d) lemman 4.12 kohtaa (i) saadaan jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ arvio

$$\begin{aligned}
\nu\left(B(x,r)\right) &\overset{c)}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \tilde{\nu}_{k_j}\left(B(x,r)\right) \\
&= \liminf_{j\to\infty} \nu_{k_j}(\mathbb{R}^n)^{-1}\nu_{k_j}\left(B(x,r)\right) \\
&\overset{(1)}{\leq} n^{\frac{s}{2}}\mathcal{H}^s_\infty(K)^{-1} \liminf_{j\to\infty} \nu_{k_j}\left(B(x,r)\right) \\
&\overset{d)}{\leq} n^s\mathcal{H}^s_\infty(K)^{-1}2^{n+2s}r^s.
\end{aligned} \tag{2}$$

Tällöin valitsemalla $\mu = n^{-s}\mathcal{H}^s_\infty(K)2^{-n-2s}\nu$ nähdään, että $\mu \in \mathcal{K}_K$ ja arvion (2) perusteella jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ pätee $\mu(B(x,r)) \leq r^s$. □

Nyt on saatu tarpeellinen koneisto kasaan Frostmanin lemman toisen suunnan osoittamiseksi $\mathcal{F}_\sigma$-joukoille avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.14.
Olkoon $s \in \mathbb{R}_+$ ja $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä $\mathcal{F}_\sigma$-joukko. Mikäli $\mathcal{H}^s(A) > 0$, niin löytyy $\mu \in \mathcal{K}_A$ siten, että $\mu\left(B(x,r)\right) \leq r$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$.

Todistus.
Koska A on $\mathcal{F}_\sigma$-joukko, niin se voidaan avaruudessa $\mathbb{R}^n$ esittää joidenkin kompaktien joukkojen K_j, $j \in \mathbb{N}$, numeroituvana yhdisteenä, eli $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$. Tällöin koska $\mathcal{H}^s(A) > 0$, niin subadditiivisuuden nojalla jollekin $i \in \mathbb{N}$ pätee, että myös $\mathcal{H}^s(K_i) > 0$. Nyt löytyy $t \in \mathbb{R}_+$ ja $z \in \mathbb{R}^n$ siten, että $z + tK_i \subset Q_{n,0}$. Tällöin $z + tK_i$ on edelleen kompakti ja $\mathcal{H}^s(z + tK_i) = t^s\mathcal{H}^s(K_i) > 0$. Siispä lemman 4.13 nojalla löytyy $\tilde{\mu} \in \mathcal{K}_{z+tK_i}$ siten, että $\tilde{\mu}\left(B(x,r)\right) \leq r$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Lukijan on nyt helppo todeta, että μ, missä jokaiselle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ asetetaan

$$\mu(B) = t^s\tilde{\mu}\left(\frac{1}{t}(-z+B)\right),$$

kelpaa väitteen mitaksi. □

Frostmanin lemma seuraa nyt siis lemmoista 4.8 ja 4.14.

4.3 Energiakaava

Tämän kappaleen tarkoitus on esitellä ja todistaa tulos, joka antaa yhteyden avaruuden $\mathbb{R}^n$ äärellisen ja kompaktikantajaisen Borel-mitan Rieszin energian ja Fourier-muunnoksen välille. Muista, että vakiolle $s \in \mathbb{R}_+$ kuvaus $k_s : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ on määritelmän 4.1 mukainen Rieszin ydin.

Lause 4.15 (**Energiakaava**).
Olkoon $0 < s < n$ ja $\mu \in \mathcal{K}_n$. Tällöin

$$I_s(\mu) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} c(n,s)\mathrm{k}_{n-s}(x)|\hat{\mu}(x)|^2 \mathrm{d}x, \tag{4.4}$$

missä $c(n,s)$ on vain luvuista n ja s riippuva positiivinen vakio.

Seuraavaksi käydään läpi energiakaavan todistus. Annettava todistus noudattaa Mattilan versiota, katso [18, s.160-163], ja tarkoitus on käydä yksityiskohdat hieman tarkemmin läpi. Aloitetaan todistus seuraavalla teknisellä arviolla, katso [17, Lemma 12.11 s. 161-162]. Todistus noudattelee tätä versiota.

Lemma 4.16.
Olkoon $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ lokaalisti m_n-integroituva ja ei-negatiivinen funktio, $\varphi \in C_0^\infty$ parillinen funktio, joka generoi approksimaatioperheen, ja $\mu \in \mathcal{K}_n$. Jos funktiolla g on yleistetty Fourier-muunnos $\hat{g}$, niin

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} ((g * \psi_\varepsilon) * \mu)(x) \ \mathrm{d}\mu(x) \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(x)||\hat{\mu}(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

missä jokaiselle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ asetetaan $\psi_\varepsilon = \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} * \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Mikäli $\hat{g} \geq 0$, niin yhtäsuuruus on voimassa.

Huomaa, että nyt oletuksessa olevaksi generoivaksi parilliseksi C^∞-generaattoriksi kelpaa esimerkiksi yhtälön (3.2) mukainen funktio. Koska on helppo huomata, että jokaiselle $s \in \mathbb{R}_+$ ja $\mu \in \mathcal{K}_n$ voidaan kirjoittaa energia vaihtoehtoisesti

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{k}_s * \mu)(x) \mathrm{d}\mu(x) \tag{4.5}$$

ja koska k_s on alhaalta puolijatkuva, niin lemman 3.13 nojalla saadaan

$$I_s(\mu) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} ((\mathrm{k}_s * \psi_\varepsilon) * \mu)(x) \ \mathrm{d}\mu(x).$$

Myöhemmin osoitetaan, että jokaisella $0 < s < n$ Rieszin ytimelle k_s löytyy ei-negatiivinen yleistetty Fourier-muunnos, joka voidaan joukossa $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ valita $\hat{\mathrm{k}_s} = c(n,s)\mathrm{k}_{n-s}$, jolloin lemman 4.16 nojalla unohtamalla m_n-nollanmittainen origo saadaan

$$I_s(\mu) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} ((\mathrm{k}_s * \psi_\varepsilon) * \mu)(x) \ \mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} c(n,s)\mathrm{k}_{n-s}(x)|\hat{\mu}(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

Lemman 4.16 todistuksessa hyödynnetään seuraavaa aputulosta, jonka todistaminen jää helpoksi harjoitustehtäväksi.

Lemma 4.17.
Olkoon ei-negatiiviset parametristä $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ riippuvat luvut $b_i(\varepsilon)$, missä $i \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että jokaisella $i \in \mathbb{N}$ pätee $\lim_{\varepsilon \to 0} b_i(\varepsilon) = b_i$, missä $b_i \leq \infty$ ja $b_i \geq b_i(\varepsilon)$ jokaisella ε. Tällöin

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} b_i(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i.$$

Seuraavaksi voidaan todistaa lemma 4.16

Lemman 4.16 todistus.
Lemman 3.10 nojalla $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$ on myös siloittajaytimistä koostuva generoitu approksimaatioperhe. Määritellään aluksi apumitta $\tilde{\mu}$ asettamalla kaikille Borel-joukoille $A\subset\mathbb{R}^n$ $\tilde{\mu}(A)=\mu(-A)$, eli $\tilde{\mu}=\mu\circ -\mathrm{id}$. Selvästi $\tilde{\mu}\in\mathcal{K}_n$. Kaikille μ-integroituville Borel-funktiolle f pätee nyt muuttujanvaihtolauseen nojalla

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{1}$$

Tällöin edelleen nähdään, että jokaiselle $x\in\mathbb{R}^n$

$$\hat{\tilde{\mu}}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\cos\langle -x|y\rangle\mathrm{d}\mu(x)+i\int_{\mathbb{R}^n}\sin\langle -x|y\rangle\mathrm{d}\mu(x)=\overline{\hat{\mu}}(x). \tag{2}$$

Seuraavaksi saadaan laskettua

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}((g*\psi_\varepsilon)*\mu)(x)\ \mathrm{d}\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(g*\psi_\varepsilon)(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y-z)\psi_\varepsilon(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y-z)(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}*\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y-z)\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(z-w)\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)\mathrm{d}w\mathrm{d}z\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\overset{a)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y-z)\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(z-v+y)\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(v-y)\mathrm{d}v\mathrm{d}z\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\overset{b)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(-u)\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(u-v+x)\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(v-y)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\overset{c)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(-u)\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(u-v+x)\mathrm{d}\mu(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(v-y)\ d\mu(y)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\
&\overset{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(-u)\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(u-v-x)\mathrm{d}\tilde{\mu}(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(v-y)\ d\mu(y)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(-u)\int_{\mathbb{R}^n}(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}*\tilde{\mu})(u-v)(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}*\mu)(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u.
\end{aligned} \tag{3}$$

Kohdassa a) on tehty muuttujanvaihto $v=w+y$ ja kohdassa b) $u=z+y-x$ ja kohdassa c) on käytetty useamman kerran Fubinin lausetta. Lemman 3.8 nojalla $\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}*\tilde{\mu},\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}*\mu\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, jolloin lemman 3.5 nojalla $(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}*\tilde{\mu})*(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}*\mu)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, merkitään sitä α_ε. Tällöin voidaan laskea

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(-u)\int_{\mathbb{R}^n}(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}*\tilde{\mu})(u-v)(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}*\mu)(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{R}^n} g(-u)\alpha_\varepsilon(u)\mathrm{d}u\\
&\overset{e)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(u)(\alpha_\varepsilon\circ -\mathrm{id})(u)\mathrm{d}u\\
&\overset{f)}{=} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(u)\overline{\widehat{(\alpha_\varepsilon\circ -\mathrm{id})}(u)}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(u)\hat{\alpha}_\varepsilon(u)\mathrm{d}u\\
&\overset{g)}{=} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(u)\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)\hat{\tilde{\mu}}(u)\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)\hat{\mu}(u)\mathrm{d}u\\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(u)(\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u))^2|\hat{\mu}(u)|^2\mathrm{d}u\\
&\overset{h)}{=} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(u)|\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)|^2|\hat{\mu}(u)|^2\mathrm{d}u\\
&\le \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{g}(u)||\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)|^2|\hat{\mu}(u)|^2\mathrm{d}u.
\end{aligned} \tag{4}$$

Kohta e) seuraa muuttujanvaihdosta $u \mapsto -u$ ja kohta f) $\hat{g}$:n määritelmästä, sillä $\alpha_\varepsilon \circ -\mathrm{id} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Kohdassa g) on käytetty konvoluutiokaavoja 3.16 ja 3.27 ja kohta h) seuraa lemmasta 3.15 (iii), sillä perhe $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ on parillinen. Yhdistämällä nyt kohdat (3) ja (4) saadaan kaikille $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{\mathbb{R}^n} ((g * \psi_\varepsilon) * \mu)(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(u)||\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)|^2 |\hat{\mu}(u)|^2. \tag{5}$$

Lisäksi yhtäsuuruus pätee selvästi epäyhtälössä (5), mikäli $\hat{g} \geq 0$. Näin ollen viimeinen vaihe on osoittaa rajankäynti

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(u)||\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)|^2 |\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(u)||\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u. \tag{6}$$

Integraalin additiivisuutta käyttäen, jokaiselle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(u)||\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)|^2 |\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u & = \sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j} |\hat{g}(u)||\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)|^2 |\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u, \\ \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(u)||\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u & = \sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j} |\hat{g}(u)||\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u, \end{cases} \tag{7}$$

missä Q_j:t ovat numeroituvan kokoelman $\mathcal{D}_0$ kaikki dyadiset kuutiot, katso määritelmä 4.9. Koska $\hat{g}$ on lokaalisti integroituva, $\hat{\mu}$ rajoitettu ja lemman 3.17 nojalla $\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}} \to 1$ tasaisesti dyadisissa kuutioissa, niin jokaiselle Q_j

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Q_j} |\hat{g}(u)||\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)|^2 |\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u = \int_{Q_j} |\hat{g}(u)||\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u. \tag{8}$$

Lemman 3.15 nojalla $\sup |\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}| \leq \|\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}\|_1 = 1$, joten kaikilla Q_j ja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{Q_j} |\hat{g}(u)||\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)|^2 |\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u \leq \int_{Q_j} |\hat{g}(u)||\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u.$$

Tällöin lemman 4.17 nojalla

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j} |\hat{g}(u)||\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)|^2 |\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u = \sum_{j=1}^\infty \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Q_j} |\hat{g}(u)||\hat{\varphi}_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)|^2 |\hat{\mu}(u)|^2 \mathrm{d}u. \tag{9}$$

Siispä yhdistämällä kohdat (7), (8) ja (9) saadaan haluttu rajankäynti (6). □

Seuraavaksi osoitetaan, että jokaisella $0 < s < n$ Rieszin ytimen yleistetty Fourier-muunnos on todellakin olemassa, voidaan valita ei-negatiiviseksi ja joukossa $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ voidaan asettaa $\hat{\mathrm{k}_s} = c(n,s)\mathrm{k}_{n-s}$, missä $c(n,s)$ on kuten energiakaavassa 4.15 ja samalla kyseinen vakio tulee evaluoitua. Tätä ennen määritellään ns. *Gamma-funktio* $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ asettamalla jokaiselle $\beta > 0$

$$\Gamma(\beta) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} t^{\beta - 1} \mathrm{d}t. \tag{4.7}$$

Nyt voidaan todeta kyseinen tulos. Todistus noudattelee lähteen [12] versiota.

Lemma 4.18.
Tapauksessa $0 < s < n$ Rieszin ytimen k_s yleistetty Fourier-muunnos $\hat{\mathrm{k}}_s$ on olemassa ja joukossa $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ voidaan valita $\hat{\mathrm{k}}_s = c(n,s)\mathrm{k}_{n-s}$, missä

$$c(n,s) = 2^{n-s} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)}{\Gamma(\frac{s}{2})},$$

kun Γ on yhtälön (4.7) mukainen Gamma-funktio.

Todistus.
Huomaa, että yleistetty Fourier-muunnos on määritelty pisteittäin äärelliseksi. Sovitaankin, että tässä todistuksessa

$$\mathrm{k}_{n-s}(x) = \begin{cases} \|x\|^{s-n}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

jolloin k_{n-s} on pisteittäin äärellinen Borel-kuvaus. Tällöin on osoitettava, että näin asetettu $c(n,s)\mathrm{k}_{n-s}$ kelpaa yleistetyksi Fourier-muunnokseksi. Yksinkertaisella muuttujanvaihdolla saadaan jokaiselle luvulle $-1 < \beta < \infty$ ja $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t\|x\|^2} t^\beta \mathrm{d}t = \|x\|^{-2\beta-2}. \tag{1}$$

Tapauksessa $x = 0$ yhtälö (1) on triviaali. Valitaan nyt $\beta = \frac{s}{2} - 1$ ja olkoon $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tällöin $k_s\varphi$ on integroituva ja kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\mathrm{k}_s(x) = \|x\|^{-s} = \|x\|^{-2\beta-2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\|x\|^2} t^\beta \chi_{\mathbb{R}_+}(t) \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Siten saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{k}_s(x)\varphi(x)\mathrm{d}x &\overset{a)}{=} \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\|x\|^2} t^\beta \chi_{\mathbb{R}_+}(t)\varphi(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\overset{b)}{=} \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t\|x\|^2} t^\beta \chi_{\mathbb{R}_+}(t)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_{\mathbb{R}_+} t^\beta \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t\|x\|^2} \varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\overset{c)}{=} \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_{\mathbb{R}_+} t^\beta \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \overline{\widehat{\varphi}}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\overset{d)}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} t^{\beta-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \overline{\widehat{\varphi}}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{3}$$

Kohta a) seuraa nyt yhtälöstä (2) unohtamalla m_n-nollanmittainen origo. Kohdassa b) on käytetty taas Fubinin lausetta, sillä kuvaus $(t,x) \mapsto e^{-t\|x\|^2} t^\beta \chi_{\mathbb{R}_+}(t)\varphi(x)$ on integroituva. Kohdassa c) on käytetty Parsevalin kaavaa ja lemmaa 3.21 ja kohta d) seuraa β:n valinnasta. Lasketaan seuraavaksi jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} t^{\beta-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \mathrm{d}t &\overset{e)}{=} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\beta-\frac{n}{2}} u^{\frac{n}{2}-\beta-2} e^{-\|x\|^2 u} \mathrm{d}u \\
&\overset{f)}{=} 2^{n-s} \int_{\mathbb{R}_+} u^{\frac{n-s}{2}-1} e^{-\|x\|^2 u} \mathrm{d}u \\
&\overset{(1)}{=} 2^{n-s}\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right) \|x\|^{s-n}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Kohdassa e) on tehty muuttujanvaihto $u = 1/4t$ ja kohdassa f) on käytetty β:n valintaa. Kohta (4) on taas triviaali tapauksessa $x = 0$. Nyt mikäli voitaisiin vaihtaa integroimisjärjestystä, eli seuraava pätisi

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} t^{\beta-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \overline{\widehat{\varphi}}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}_+} t^{\beta-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \overline{\widehat{\varphi}}(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x, \tag{5}$$

niin kohtien (3) ja (4) nojalla saataisiin

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{k}_s(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} 2^{n-s}\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)}{\Gamma(\frac{s}{2})} \|x\|^{s-n}\overline{\widehat{\varphi}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} c(n,s)\mathrm{k}_{s-n}(x)\overline{\widehat{\varphi}}(x)\mathrm{d}x \tag{6}$$

ja tämä todistaisi väitteen. Nyt k_{n-s} on lokaalisti integroituva ja menee nollaan, kun $\|x\| \to \infty$. Lisäksi $\overline{\widehat{\varphi}}$ on rajoitettu ja lemman 3.18 nojalla $|\overline{\widehat{\varphi}}(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^{-k})$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten kuvaus $k_{n-s}\hat{\varphi}$ on integroituva. Nyt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left|\overline{\widehat{\varphi}}(x) t^{\beta-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \chi_{\mathbb{R}_+}(t)\right| \mathrm{d}t\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\widehat{\varphi}}(x)| \int_{\mathbb{R}_+} t^{\beta-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\overset{(3)}{=} 2^{n-s}\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\widehat{\varphi}}(x)| \|x\|^{s-n}\mathrm{d}x < \infty
\end{aligned}$$

ja siten kuvaus $(t,x) \mapsto \overline{\varphi}(x)t^{\beta-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\chi_{\mathbb{R}_+}(t)$ on Fubinin lauseen nojalla integroituva. Tällöin edelleen Fubinin lauseen nojalla yhtälö (5) ja siten myös yhtälö (6) ovat voimassa. $\square$

Nyt (4.6) on voimassa, eli jokaiselle $\mu \in \mathcal{K}_n$ ja ja $0 < s < n$ pätee

$$I_s(\mu) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} ((k_s * \psi_\varepsilon) * \mu)(x)\ \mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} c(n,s)\mathrm{k}_{n-s}(x)|\hat{\mu}(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

missä approksimaatioperhe $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$ on määritelty lauseen 4.16 muotoilemalla tavalla. Jatkon kannalta perheen $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$ oleelliset ominaisuudet ovat, että se on generoitu perhe ja koostuu siloittajaytimistä. Seuraava lemma on viimeinen askel lauseen 4.4 todistuksessa, katso [17, Lemma 12.12 s.162-163].

Lemma 4.19.
Olkoon $\mu \in \mathcal{K}_n$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ generaattori, $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$ sen generoima approksimaatioperhe ja $0 < s < n$. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{k}_s * \mu)(x)\mathrm{d}\mu(x) \geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} ((\mathrm{k}_s * \psi_\varepsilon) * \mu)(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Todistus.
Aluksi voidaan olettaa, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{k}_s * \mu)(x)\ \mathrm{d}\mu(x) < \infty,$$

sillä muuten väite on selvä. Tästä voidaan epäsuorasti päätellä, että μ ei ole *atominen*, ts.

$$\mu(\{z\}) = 0 \ \text{ kaikilla } z \in \mathbb{R}^n.$$

Tarkastellaan seuraavaksi konvoluutiota $\mathrm{k}_s * \psi_\varepsilon$ pisteessä $z \in \mathbb{R}^n$. Nyt tekemällä muuttujanvaihto $u = {}^{y}/_{\varepsilon}$ saadaan

$$(\mathrm{k}_s * \psi_\varepsilon)(z) = \int_{B(0,\varepsilon)} \|z-y\|^{-s}\varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}y = \int_{B(0,1)} \|z-\varepsilon u\|^{-s}\psi(u)\mathrm{d}u. \tag{1}$$

Oletetaan jatkossa, että $\varepsilon < {}^1/_4$. Tällöin erityisesti pätee $2\varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$. Oletetaan, että $z \neq 0$ ja jaetaan seuraavaksi kohdan (1) oikeanpuoleisen integraalin arvioimiseksi integroimisjoukko kahteen osaan:

$$\begin{cases} A_{z,\varepsilon} := B(0, \frac{\|z\|}{\sqrt{\varepsilon}}) \cap B(0,1), \\ B_{z,\varepsilon} := B(0,1) \setminus B(0, \frac{\|z\|}{\sqrt{\varepsilon}}). \end{cases}$$

Joukko $B_{z,\varepsilon}$ on tyhjä, kun $\|z\| \geq \sqrt{\varepsilon}$. Olkoon $u \in A_{z,\varepsilon}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \|z-\varepsilon u\|^{-s} &= \|z\|^{-s}\left\|\frac{z}{\|z\|} - \frac{\varepsilon u}{\|z\|}\right\|^{-s} \\ &\overset{a)}{\leq} \|z\|^{-s}\left|1 - \frac{\varepsilon\|u\|}{\|z\|}\right|^{-s} \leq \left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)^{-s}\|z\|^{-s}. \end{aligned}$$

Kohdassa a) on käytetty käänteistä kolmioepäyhtälöä. Tämän arvion avulla saadaan edelleen uusi arvio

$$\int_{A_{z,\varepsilon}} \|z-\varepsilon u\|^{-s}\psi(u)\mathrm{d}u \leq \left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)^{-s}\|z\|^{-s}\int_{A_{z,\varepsilon}} \psi(u)\mathrm{d}u \leq \left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)^{-s}\|z\|^{-s}. \tag{2}$$

Arvio on luonnollisesti myös voimassa tapauksessa $z = 0$. Todetaan seuraavaksi, että

$$\int_{B(0,1)} \|z-\varepsilon u\|^{-s}\mathrm{d}u \leq C_{n,s}\|z\|^{-s} \tag{3}$$

jollain vain luvuista n ja s riippuvalla vakiolla $C_{n,s}$, kun $\|z\| < \sqrt{\varepsilon}$. Tätä varten tarkastellaan erikseen tapaukset i) $\|z\| \le 2\varepsilon$ ja ii) $2\varepsilon < z < \sqrt{\varepsilon}$. Tapauksessa i) oleellinen havainto on se, että $B(z,\varepsilon) \subset B(0,3\varepsilon)$. Tällöin saadaan suora arvio

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} \|z-\varepsilon u\|^{-s} \mathrm{d}u &\overset{b)}{=} \varepsilon^{-n} \int_{B(z,\varepsilon)} \|v\|^{-s} \mathrm{d}v \\
&\le \varepsilon^{-n} \int_{B(0,3\varepsilon)} \|v\|^{-s} \mathrm{d}v \\
&\overset{c)}{=} \varepsilon^{-n} (3\varepsilon)^{n-s} \int_{B(0,1)} \|w\|^{-s} \mathrm{d}w \\
&\le 3^n \left(\frac{2}{3}\right)^s \left(\int_{B(0,1)} \|w\|^{-s} \mathrm{d}w\right) \|z\|^{-s}.
\end{aligned}$$

Kohdassa b) on tehty muuttujanvaihto $u = z - \varepsilon u$ ja kohdassa c) $w = \frac{v}{3\varepsilon}$. Tapauksessa ii) hyödynnetään havaintoa $\|z\|/2 > \varepsilon\|u\|$ kaikilla $u \in B(0,1)$. Tällöin käyttämällä d) taas käänteistä kolmioepäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} \|z-\varepsilon u\|^{-s} \mathrm{d}u &\overset{d)}{\le} \int_{B(0,1)} |\|z\| - \varepsilon\|u\||^{-s} \mathrm{d}u \\
&\le \int_{B(0,1)} \left(\frac{\|z\|}{2}\right)^{-s} \mathrm{d}u \\
&= 2^s m_n(B(0,1)) \|z\|^{-s}.
\end{aligned}$$

Yhtälö (3) on siten voimassa, kun valitaan

$$C_{n,s} = \max\left\{3^n \left(\frac{2}{3}\right)^s \left(\int_{B(0,1)} \|w\|^{-s} \mathrm{d}w\right), 2^s m_n(B(0,1))\right\}.$$

Nyt voidaan arvioida yhtälön (4.19) oikeanpuoleista integraalia

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} ((\mathrm{k}_s * \psi_\varepsilon) * \mu)(x) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{k}_s * \psi_\varepsilon)(x-y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,1)} \|x-y-\varepsilon u\|^{-s} \psi(u) \mathrm{d}u \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{A_{x-y,\varepsilon}} \|x-y-\varepsilon u\|^{-s} \psi(u) \mathrm{d}u \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_{x-y,\varepsilon}} \|x-y-\varepsilon u\|^{-s} \psi(u) \mathrm{d}u \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{e)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{A_{x-y,\varepsilon}} \|x-y-\varepsilon u\|^{-s} \psi(u) \mathrm{d}u \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(x,\sqrt{\varepsilon})} \int_{B_{x-y,\varepsilon}} \|x-y-\varepsilon u\|^{-s} \psi(u) \mathrm{d}u \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{f)}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{A_{x-y,\varepsilon}} \|x-y-\varepsilon u\|^{-s} \psi(u) \mathrm{d}u \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) + \sup|\psi| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(y,\sqrt{\varepsilon})} \int_{B(0,1)} \|x-y-\varepsilon u\|^{-s} \mathrm{d}u \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{(2)+(3)}{\le} \left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)^{-s} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x-y\|^{-s} \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y) + C_{n,s} \sup|\psi| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(x,\sqrt{\varepsilon})} \|x-y\|^{-s} \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)^{-s} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{k}_s * \mu)(x) \mathrm{d}\mu(x) + C_{n,s} \sup|\psi| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{k}_s(x-y) \chi_{B(x,\sqrt{\varepsilon})}(y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Kohdat e) ja f) seuravata joukon $B_{x-y,\varepsilon}$ määritelmästä. Koska nyt $k_s * \mu < \infty$ μ-melkein kaikkialla, niin kuvaus g_x, missä jokaiselle $y \in \mathbb{R}^n$

$$g_x(y) = \mathrm{k}_s(x-y),$$

on μ integroituva μ-melkein kaikilla x. Olkoon nyt laskeva jono $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ siten, että $\varepsilon_j < 1/4$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $\varepsilon_j \to 0$, kun $j \to \infty$. Tällöin kuvausjono $(f_{x,j})_{j=1}^{\infty}$, missä jokaiselle $y \in \mathbb{R}^n$

$$f_{x.j}(y) = \mathrm{k}_s(x-y)\chi_{B(x,\sqrt{\varepsilon_j})}(y)$$

konvergoi pisteittäin funktioon f_x, missä jokaiselle $y \in \mathbb{R}_n$

$$f_x(y) = \begin{cases} \infty, & y = x, \\ 0, & y \neq x. \end{cases}$$

Koska nyt $0 \leq f_x \leq g_x$, niin dominoidun konvergenssin lauseella μ-melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_{x,j}(y)\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_x(y)\mathrm{d}\mu(y) \overset{g)}{=} 0. \tag{5}$$

Kohta g) seuraa nyt f_x:n määritelmästä ja μ:n ei-atomisuudesta. Määritellään jono $(F_j)_{j=1}^{\infty}$, missä jokaiselle x asetetaan

$$F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{k}_s(x-y)\chi_{B(x,\sqrt{\varepsilon_j})}(y)\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_x(y)\mathrm{d}\mu(y).$$

Fubinin lauseen jokainen F_j on Borel-funktio ja kohdan (5) nojalla jono $(F_j)_{j=1}^{\infty}$ konvergoi pisteittäin μ-melkein kaikkialla nollaan. Koska nyt on helppo huomata, että kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee $0 \leq F_j \leq k_s * \mu$ ja $k_s * \mu$ on oletuksen perusteella integroituva, niin soveltamalla toisen kerran dominoidun konvergenssin lausetta saadaan, että

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{k}_s(x-y)\chi_{B(x,\sqrt{\varepsilon_j})}(y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_j(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Tämä implikoi, että

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{k}_s(x-y)\chi_{B(x,\sqrt{\varepsilon_j})}(y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) = 0. \tag{6}$$

Ottamalla nyt arviosta (4) puolittain liminf ja käyttämällä kohtaa (6) on väite selvä. □

Energiakaava 4.15 seuraa nyt yhtälöstä (4.5), arviosta (4.6) ja lemmasta 4.19.

4.4 Rieszin energian ja Fourier-muunnosten yhteys

Tarkastellaan lopuksi energiakaavan 4.15 joitain seurauksia, jotka liittyvät oleellisesti luokan $\mathcal{K}_n$ Borel-mittojen energian äärellisyyteen ja Fourier-muunnoksen käytökseen. Aloitetaan seuraavalla havainnolla, katso [18, s.19].

Lemma 4.20.
Olkoon $\mu \in \mathcal{K}_n$, $0 < s < n$ ja $c(n,s)$ kuten lauseessa 4.15.

(i) Mikäli $I_s(\mu) < \infty$, niin $\int_{B(0,R)} |\hat{\mu}(x)|^2\mathrm{d}x \leq \frac{(2\pi)^n}{c(n,s)} I_s(\mu)R^{n-s}$ kaikilla $R \in \mathbb{R}_+$

(ii) Mikäli $\int_{B(0,R)} |\hat{\mu}(x)|^2\mathrm{d}x = \mathcal{O}(R^s)$, niin $I_t(\mu) < \infty$ kaikilla $0 < t < n-s$.

Huomaa analogia lemman 4.3 kanssa.

Todistus.
Kohta (i) on yksinkertainen arvio yhtälön (4.4) pohjalta, joten todetaan vain kohta (ii).Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan olettaa, että löytyy vakio $C \in \mathbb{R}_+$ siten, että $\int_{B(0,R)} |\mu(x)|^2\mathrm{d}x \leq CR^s$ kaikilla $R \geq 1$. Koska $k_{n-t}|\hat{\mu}|^2$ on aina lokaalisti integroituva, niin väite on lauseen 4.15 nojalla selvä, mikäli todetaan, että

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,1)} \mathrm{k}_{n-t}(x)|\hat{\mu}(x)|^2\mathrm{d}x < \infty. \tag{1}$$

Tämä nähdään seuraavalla arviolla

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,1)} \mathrm{k}_{n-t}(x)|\hat{\mu}(x)|^2 \mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{B(0,2^j)\setminus B(0,2^{j-1})} \mathrm{k}_{n-t}(x)|\hat{\mu}(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(j-1)(t-n)} \int_{B(0,2^j)\setminus B(0,2^{j-1})} |\hat{\mu}(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &\leq 2^{n-t}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j(n-t)} \int_{B(0,2^j)} |\hat{\mu}(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &\leq 2^{n-t} C \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j(n-s-t)}.\end{aligned}$$

Oletuksen perusteella geometrinen sarja $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j(n-s-t)}$ suppenee, joten väite on selvä. □

Frostmanin lemman kautta nähdään nyt Fourier-muunnoksen käytöksen yhteys Hausdorff-dimensioon. Mikäli $\mathcal{F}_\sigma$-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $\dim_c(A) \leq n$, niin lemmojen 4.5 ja 4.20 nojalla voidaan kapasitiivinen dimensio kirjoittaa

$$\dim_H(A) = \sup\left\{ n-s>0 : 0<s<n,\ \mu\in\mathcal{K}_A, \int_{B(0,R)} |\hat{\mu}(x)|^2 \mathrm{d}x = \mathcal{O}(R^s)\right\}, \tag{4.8}$$

missä $\mathcal{K}_A$ on yhtälön (4.3) mukainen kokoelma. Koska Frostmannin lemma yleistyy mielivaltaisille Borel-joukoille, niin myös edellä oleva esitys on voimassa aina Borel-joukolle A, mikäli $\dim_c(A) \leq n$.
Yleisemmin luokan $\mathcal{K}_n$ mitan energian äärellisyydestä voidaan vetää joitain arvioita Fourier-muunnoksen polynomiaalisesti keskimäärin sopivissa tilanteissa. Mikäli kompaktikantajaisen Borel-mitan μ energia $I_s(\mu) < \infty$, missä $0 < s < n$, niin lauseen 4.15 pohjalta voidaan päätellä, että $|\hat{\mu}(x)|$ vähenee polynomiaalisesti keskimääräisesti "isossa skaalassa". Seuraava lemma pyrkii hieman täsmentämään toteamusta, vertaa huomioon [16, s.40].

Lemma 4.21.
Olkoon $\mu \in \mathcal{K}_n$ ja $0 < s < n$ siten, että $I_s(\mu) < \infty$. Tällöin kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ ja $0 < t \leq \frac{s}{2}$

$$\frac{m_n\left(\{y \in B(x,R) : |\hat{\mu}(y)| \leq \|y\|^{-t}\}\right)}{m_n\left(B(x,R)\right)} = 1 + h_x(R),$$

missä virheelle $h_x(R)$ pätee $R^{s-2t}h_x(R) \to 0$, kun $R \to \infty$.

Todistus.
Väite on selvä mikäli osoitetaan, että jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ ja $0 < t \leq \frac{s}{2}$

$$\lim_{R\to\infty} R^{s-2t}\frac{m_n\left(\{y \in B(x,R) : |\hat{\mu}(y)| > \|y\|^{-t}\}\right)}{m_n\left(B(x,R)\right)} = 0. \tag{1}$$

Koska nyt jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ ja $R \in \mathbb{R}_+$ saadaan arvio

$$\frac{m_n\left(\left\{y \in B(x,R) : |\hat{\mu}(y)| > \|y\|^{-\frac{s}{2}}\right\}\right)}{m_n\left(B(x,R)\right)} \leq \frac{m_n\left(\left\{y \in B(0,R+\|x\|) : |\hat{\mu}(y)| > \|y\|^{-\frac{s}{2}}\right\}\right)}{m_n\left(B(x,R+\|x\|)\right)}\frac{m_n\left(B(0,R+\|x\|)\right)}{m_n\left(B(0,R)\right)},$$

sekä lisäksi

$$\lim_{R\to\infty}\frac{m_n\left(B(0,R+\|x\|)\right)}{m_n\left(B(0,R)\right)} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{R\to\infty}\left(\frac{R}{R+\|x\|}\right)^{s-2t} = 1,$$

niin yhtälöä (1) varten riittää todeta tapaus $x = 0$. Kiinnitetään $0 < t \leq \frac{s}{2}$ ja määritellään jokaiselle jokaiselle $R \in \mathbb{R}_+$.

$$A_R = \left\{y \in B(0,R) : |\hat{\mu}(y)| > \|y\|^{-t}\right\}.$$

Seuraavaksi tehdään *antiteesi*: löytyy nouseva jono säteitä $(R_j)_{j=1}^{\infty}$ ja positiivinen vakio $\alpha \in \mathbb{R}_+$ siten, että $\lim_{j\to\infty} R_j = \infty$ ja jokaiselle $j \in \mathbb{N}$

$$m_n\left(A_{R_j}\right) \geq \alpha R_j^{2t-s}\, m_n\left(B(0,R_j)\right). \tag{2}$$

Tarvittaessa siirtymällä osajonoon voidaan olettaa, että kaikilla $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$R_{j+1}{}^{1+\frac{2t-s}{n}} > j^2 R_j. \tag{3}$$

Edelleen jokaiselle $j \in \mathbb{N}$ arvioidaan erotuksen $A_{R_{j+1}} \setminus A_{R_j}$ Lebesguen mittaa. Koska nyt $A_{R_j} \subset A_{R_{j+1}}$, niin

$$\begin{aligned}
m_n\left(A_{R_{j+1}} \setminus A_{R_j}\right) &= m_n\left(A_{R_{j+1}}\right) - m_n\left(A_{R_j}\right) \\
&\geq m_n\left(A_{R_{j+1}}\right) - m_n\left(B(0,R_j)\right) \\
&\overset{(2)}{\geq} \alpha R_{j+1}{}^{2t-s}\, m_n\left(B(0,R_{j+1})\right) - m_n\left(B(0,R_j)\right) \\
&= m_n\left(B(0,1)\right) R_{j+1}{}^{n+2t-s}\left[\alpha - \left(\frac{R_j}{R_{j+1}{}^{1+\frac{2t-s}{n}}}\right)^n\right] \\
&\overset{(3)}{\geq} m_n\left(B(0,1)\right) R_{j+1}{}^{n+2t-s}\left[\alpha - j^{-2n}\right].
\end{aligned} \tag{4}$$

Olkoon luonnollinen $N \geq 2$. Nyt saadaan arvio alhaaltapäin energialle $I_s(\mu)$

$$\begin{aligned}
I_s(\mu) &\overset{a)}{=} \frac{(2\pi)^n}{c(n,s)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{k}_{n-s}(y)|\hat{\mu}(y)|^2 \mathrm{d}y \\
&\geq \frac{(2\pi)^n}{c(n,s)} \int_{A_{R_N}\setminus A_{R_1}} k_{n-s}(y)|\hat{\mu}(y)|^2 \mathrm{d}y \\
&\overset{b)}{\geq} \frac{(2\pi)^n}{c(n,s)} \int_{A_{R_N}\setminus A_{R_1}} \|y\|^{-n+s-2t} \mathrm{d}y \\
&\overset{c)}{=} \frac{(2\pi)^n}{c(n,s)} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{A_{R_{j+1}}\setminus A_{R_j}} \|y\|^{-n+s-2t} \mathrm{d}y \\
&\geq \frac{(2\pi)^n}{c(n,s)} \sum_{j=1}^{N-1} R_{j+1}^{-n+s-2t} m_n\left(A_{R_{j+1}} \setminus A_{R_j}\right) \\
&\overset{(4)}{\geq} \frac{(2\pi)^n}{c(n,s)} m_n\left(B(0,1)\right) \sum_{k=1}^{N-1}\left[\alpha - j^{-2n}\right] \\
&\geq \frac{(2\pi)^n}{c(n,s)} m_n\left(B(0,1)\right)\left[(N-1)\alpha - \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}\right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Kohta a) on tässä energiakaava 4.15 ja kohdat b) ja c) seuraavat joukkojen A_R määritelmästä. Arviosta (5) nähdään, että välttämättä $I_s(\mu) = \infty$. Tämä on ristiriita ja yhtälö (1) pätee tapauksessa $x = 0$. $\square$

Lemman 4.21 perusteella energian $I_s(\mu)$ äärellisyys tapauksessa $0 < s < n$ takaa sen, että isoissa palloissa suhteellisesti suurimman osan "tilavuudesta" vie niiden pisteiden joukko, jossa $\hat{\mu}$ vähenee polynomiaalisesti. Fourier-muunnoksen käyttäytymisestä voidaan tehdä myös pidemmälle meneviä arvioita energian äärellisyyden perusteella. Esimerkkinä muunnosten neliöiden pintaintegraalit pallokuorten yli, katso [16, Lemma 3.15 s.43] tai [18, s.19-20]. Kuitenkaan mitan $\mu \in \mathcal{K}_n$ ei tarvitse välttämättä energian äärellisyydestä huolimatta olla edes Rajchman-mitta. Reaaliakselin Cantorin $1/3$-joukkoon $C_{\frac{1}{3}}$ rajoitettu Hausdorff-mitta $\mathcal{H}^s \llcorner C_{\frac{1}{3}}$, missä $s = \log 2/\log 3$, on esimerkki tällaisesta mitasta, katso tarkemmin [18, s.17]. Lemman 4.21 pohjalta voidaan kysyä, millä reunaehdoilla ehdosta $I_s(\mu) < \infty$, $0 < s < n$, seuraa, että $\hat{\mu}(x) = \mathcal{O}(\|x\|^{-\frac{s}{2}})$. Tämän kysymyksen kautta päästään Borel-joukkojen *Fourier-dimensioon.*

Määritelmä 4.22 (**Fourier-dimensio**).
Borel-joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Fourier-dimensio asetetaan

$$\dim_F(A) = \sup\{s \in [0,n] : \mu \in \mathcal{K}_A,\ |\hat{\mu}(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^{-\frac{s}{2}})\}.$$

Mikäli tällaista mittaa μ ei löydy millään $s \in \mathbb{R}_+$, niin asetetaan $\dim_F(A) = 0$.

Fourier-muunnoksen $\hat{\mu}$ polynomiaalinen väheneminen potensilla $\eta \in \mathbb{R}^n$ puolestaan implikoi energiakaavan 4.15 kautta suoraan energian $I_s(\mu)$ äärellisyyden riittävän kaikilla $0 < s < 2\eta$, koska nyt $\mathrm{k}_{n-s}|\hat{\mu}|^2$ on lokaalisti integroituva ja

$$(\mathrm{k}_{n-s}|\hat{\mu}|^2)(x) = \mathcal{O}(\|x\|^{s-n-2\eta}).$$

Tämän havainnon ja lemman 4.5 nojalla on helppo todeta, että kaikille Bore-joukoille A pätee arvio $\dim_c(A) \geq \dim_F(A)$. Erityiseti nyt lauseen 4.7 nojalla $\dim_H(A) \geq \dim_F(A)$ kaikille $\mathcal{F}_\sigma$-joukoille A. Koska Frostmanin lemma ja siten lause 4.7 laajenee myös mielivaltaisiin Borel-joukkoihin, niin $\dim_H(A) \geq \dim_F(A)$ kaikilla Borel-joukoilla A. Mikäli A on Borel-joukko, jolle pätee $\dim_H(A) = \dim_F(A)$, niin sitä kutsutaan *Salem-joukoksi*. Lisätarkasteluja varten Salem-joukoista, katso [16, s.40-42], [17, s.168-169] ja [18].

5 Symbolista dynamiikkaa jonoavaruudessa

Tässä luvussa tarkastellaan luonnollisista luvuista koostuvia lukujonoja $(a_j)_{j=1}^{\infty}$. Niiden muodostamaa joukkoa sopivalla topologialla varustettuna kutsutaan *jonoavaruudeksi*. Keskeisessä roolissa on kuvaus $(a_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto (a_{j+1})_{j=1}^{\infty}$, jota kutsutaan *vasemmaksi siirroksi*. Mukaan lisätään mittateoreettinen aspekti tarkastelemalla jonoavaruuden Borel-todennäköisyysmittoja, jotka vasen siirto säilyttää. Nämä tarkastelut sisältyvät *ergodisuusteorian* tutkimusalaan ja todennäköisyysavaruus vasemmalla siirrolla on esimerkki *dynaamisesta systeemistä*. Lisäksi määritellään *paine* ja *entropia* sekä tarkastellaan niiden yhteyttä. Näiden tarkasteluiden motivaatio tulee statistisesta fysiikasta tai informaatioteoriasta, jolloin puhutaan *termodynaamisesta formalismista*. Näiden konseptien avulla päästään luvun päätavoitteeseen määrittelemällä *Gibbsin mitat* ja *Ruellen siirto-operaattori*. Kokonaisuutta voidaan kutsua vasemman siirron dynamiikaksi tai otsikonmukaisesti symboliseksi dynamiikaksi.

Motivaatio symboliselle dynamiikalle on se, että voidaan mallintaa monia muita dynaamisia systeemejä jonoavaruuden kanssa homeomorfisissa avaruuksissa. Näitä systeemejä kutsutaan *konjugaattisysteemeiksi*. Tällöin jonoavaruudella kehitetty teoria voidaan siirtää usein lähes sellaisenaan konjugaattisysteemeihin ja tätä hyödynnetään erityisesti seuraavassa luvussa.

Käydään lyhyesti läpi luvun rakenne. Ensimmäisessä kappaleessa esitellään jonoavaruus, vasen siirto ja eräitä jonoavaruuden reaaliarvoisia kuvauksia. Toisessa kappaleessa luodaan katsaus yleisempiin dynaamisiiin systeemeihin ja vasemman siirron suhteen invariantteihin mittoihin. Kolmannessa kappaleessa määritellään sopiville kuvauksille paine vasemman siirron suhteen ja neljännessä mitoille entropia. Viidennessä kappaleessa käydään läpi tulos, joka yhdistää entropian ja paineen jonoavaruudessa. Kuudennessa kappaleessa määritellään paineen avulla Gibbsin mitat, jotka ovat nyt vahvasti sidottuja vasemman siirron dynamiikkaan. Seitsemännessä kappaleessa esitellään Ruellen siirto-operaattori ja tarkastellaan sen yhteyttä Gibbsin mittoihin.Viimeisessä kappaleessa käsitellään lyhyesti konjugattisysteemejä.

Pääasiallisina lähteinä on käytetty Waltersin teosta ergodisuusteoriasta [25], sekä Mauldinin ja Urbańskin teosta yleisemmästä symbolisesta dynamiikasta [20]. Esitelty kokonaisuus on kasattu näiden pohjalta soveltaen.

5.1 Jonoavaruus

Merkintä $\mathbb{N}^{\infty}$ tarkoittaa niiden lukujonojen, jotka koostuvat luonnollista luvuista, joukkoa. Täsmällisemmin

$$\mathbb{N}^{\infty} = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{N} \ \text{ kaikilla } j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Merkitään sen alkioita lihavoiduilla kirjaimilla $\mathbf{a}$ ja kutsutaan niitä *äärettömiksi sanoiksi*. Äärettömät sanat ovat siis jonoja, mutta käytetään mukavuussyistä vektorinotaatiota $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$. Tulojoukon $\mathbb{N}^n$ alkioita $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ kutsutaan puolestaan *n-pituisiksi äärellisiksi sanoiksi*. Huomaa, että notaatiot ovat yksinkertaisuuden vuoksi samat, ja kontekstin ollessa selvä puhutaan lyhesti *sanasta*. Jokaiselle sanalle $\mathbf{a}$, jonka pituus on vähintään $n \in \mathbb{N}$, merkintä a_i on tarkoittaa sanan i. komponenttia tai *projektiota*. Mikäli sanan pituus on yksi, eli se on luonnollinen luku, sitä ei poikkeuksellisesti lihavoida. Edelleen jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja sanalle $\mathbf{a}$, jonka pituus on vähintään n, asetetaan *n-rajoittuma* $\mathbf{a}|_n = (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{N}^n$. Äärettömille sanoille jokainen n-rajoittuma on luonnollisesti määritelty. Mikäli $A \subset \mathbb{N}$, niin merkitään sen ääretönkertaista tuloa

$$A^{\infty} = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{N}^{\infty} : a_j \in A \ \text{ kaikilla } j \in \mathbb{N}\}.$$

Vastaavasti A^n tarkoittaa n-kertaista tuloa, joka koostuu niistä n-pituisista äärellisistä sanoista, joiden komponentit ovat joukossa A. Jokaiselle äärelliselle sanalle asetetaan *sylinteri* seuraavalla tavalla.

Määritelmä 5.1 (Sylinteri).
Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$. Sanaan $\mathbf{a}$ liittyvä sylinteri määritellään osajoukoksi

$$[\mathbf{a}] = \{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{\infty} : \mathbf{b}|_n = \mathbf{a}\}.$$

Sylinterit muodostavat *puurakenteen* (sylinterit ovat aina pareittain pistevieraat tai sisäkkäiset) ja on luonnollista määritellä niiden avulla topologia joukkoon $\mathbb{N}^{\infty}$. Tällöin sitä kutsutaan jonoavaruudeksi.

Määritelmä 5.2 (**Jonoavaruus**).
Jonoavaruudeksi kutsutaan topologista avaruutta $(\mathbb{N}^\infty, \tau)$*, missä topologian* τ *kannan muodostaa kokoelma*

$$\beta = \{[\mathbf{a}] \subset \mathbb{N}^\infty : \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Huomaa, että avaruudessa ei ole määritelty mitään algebrallisia laskutoimituksia. Sylinterien määritelmästä on selvää, että kokoelma β sisältää alkioidensa leikkaukset, joten topologian määritelmä on järkevä. Toisaalta on helppo nähdä, että jonoavaruus on avaruuden $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ääretön tuloavaruus varustettuna tulotopologialla. Koska sylintereitä on vain numeroituvan monta, niin jonoavaruus separoituu. Mikäli $A \subset \mathbb{N}$ on äärellinen, niin se on kompakti avaruudessa $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, ja siten klassisen *Tihonovin lauseen* [2, Lause 20.17 s.209] nojalla A^∞ on kompakti jonoavaruudessa. Jonoavaruus $\mathbb{N}^\infty$ itsessään ei ole edes lokaalisti kompakti, mutta se metrisoituu.

Lemma 5.3.
Jonoavaruus $\mathbb{N}^\infty$ *on metristyvä.*

Todistus.
Esitellään seuraava esimerkki yhteensopivasta metriikasta katso [20, s.4] . Kiinnitetään $\alpha > 0$ ja määritellään $\mathrm{d}_\alpha : \mathbb{N}^\infty \times \mathbb{N}^\infty \to [0, 1]$,

$$\mathrm{d}_\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} 1, \text{ mikäli } a_1 \neq b_1, \\ \inf\{e^{-\alpha k} : k \in \mathbb{N}, \mathbf{a}|_k = \mathbf{b}|_k\} \text{ muutoin.} \end{cases}$$

Selvästi kyseessä on metriikka, jossa sylinterit ovat avoimia palloja. Toisaalta sylintereistä saa kannan metriikan indusoimaan topologiaan. □

Jatkossa ei tarvita muuta informaatiota kuin, että topologia metrisoituu. Seuraavaksi määritellään jonoavaruuden vasen siirto, joka on keskeisessä roolissa jatkossa.

Määritelmä 5.4 (**Vasen siirto**).
Kuvausta $\sigma : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$, $\sigma(a_1, a_2, \dots) = (a_2, a_3 \dots)$ *kutsutaan jonoavaruuden vasemmaksi siirroksi.*

Vasemman siirron määritelmästä on helppo nähdä, että se on jatkuva ja avoin surjektio. Kaikille $j \in \mathbb{N}$ merkintä σ^j tarkoittaa j kertaista yhdistettä kuvauksen itsensä kanssa ja merkintä σ^{-j} puolestaan j kertaista alkukuvaa tai yhdisteen σ^j alkukuvaa. Lisäksi σ^0 tarkoittaa identtistä kuvausta. Mielivaltaisen sanan $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$ *radaksi* vasemman siirron suhteen kutsutaan jonoa $(\sigma^j \mathbf{a})_{j \in \mathbb{N}}$. Vasemman siirron *dynamiikalla* yksinkertaisimmillaan tarkoitetaan sanojen ratojen tutkimista. Jokaiseen n-pituiseen äärelliseen sanaan $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ liitetään n-jaksollinen ääretön sana $\mathbf{b}^\infty = (\mathbf{b}, \mathbf{b}, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$. Nämä ovat täsmälleen niitä sanoja $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$, joilla on vasemman siirron suhteen n-jaksollinen rata, eli $\sigma^n \mathbf{a} = \mathbf{a}$. Jaksottomalla sanalla voi puolestaan olla tiheä rata jonoavaruudessa.

Lemma 5.5.
On olemassa sana $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$ *siten, että rata* $\{\mathbf{a}, \sigma\mathbf{a}, \sigma^2\mathbf{a}, \dots\}$ *on tiheä jonoavaruudessa.*

Todistus.
Koska äärellisten sanojen kokoelma numeroituu, ne voidaan esittää jossain järjestyksessä $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$. Tällöin asettamalla $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots)$ on selvää, että sanan $\mathbf{a}$ rata on tiheä.

□

Mielivaltaista kuvausta $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{R}$ kutsutaan *potentiaaliksi.* Jokaiselle potentiaalille f määritellään n*. kertaluvun variaatio*

$$\mathrm{Var}_n(f) = \sup\{|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{c})| : \mathbf{b}, \mathbf{c} \in [\mathbf{a}],\ \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n\},$$

joka kuvaa siis funktion maksimaalista heilahtelua n. tason sylintereissä. Jatkossa tarkastellaan pääasiassa potentiaaleja, joilla on seuraava säännöllisyysominaisuus.

Määritelmä 5.6 (**Summautuva variaatio**).
Potentiaalilla f *on summautuva variaatio, mikäli*

$$Var(f) := \sum_{n=1}^{\infty} Var_n(f) < \infty.$$

Sylinteritopologiassa summautuva variaatio implikoi jatkuvuuden. Merkitään tällaisten potentiaalien kokoelmaa symbolilla Σ. Erityisesti kaikki funktiot, jotka ovat muotoa $\sum_{[\mathbf{a}]\in\mathcal{J}} a_{[\mathbf{a}]}\chi_{[\mathbf{a}]}$, missä (numeroituva) kokoelma $\mathcal{J}$ koostuu pistevieraista sylintereistä ja $a_{[\mathbf{a}]} \in \mathbb{R}$, kuuluvat kokoelmaan Σ. Esitellään vielä seuraava potentiaalityyppi.

Määritelmä 5.7 (**Lokaalisti Hölder potentiaali**).
Potentiaali φ on lokaalisti Hölder, mikäli löytyy luvut $\delta \in]0,1[$ ja $C \in [0,\infty[$ siten, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$Var_n(\varphi) \leq C\delta^n.$$

Merkitään lokaalisti Höldereiden potentiaalien kokoelmaa symbolilla $\mathcal{H}$. Tällöin selvästi $\mathcal{H} \subset \Sigma$. Muista, että merkintä $\mathcal{B}_{\mathbb{N}^\infty}$ tarkoittaa jonoavaruuden Borel-mittojen kokoelmaa. Edelleen $\mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$ on jonoavaruuden Borel-todennäköisyysmittojen osakokoelma.

5.2 Dynaamisista systeemeistä ja ergodisuudesta

Luodaan aluksi hyvin suppea katsaus yleisiin mittateoreettisiin dynaamisiin systeemeihin ja ergodisuusteoriaan. Tarkastellaan epätyhjää joukkoa Y, sen jotain sigma-algebraa $\mathcal{A}$ ja todennäköisyysmittaa ν sigma-algebrassa $\mathcal{A}$. Muista, että kuvaus $F : Y \to Y$ on $\mathcal{A}$-mitallinen, mikäli jokaiselle $A \in \mathcal{A}$ pätee $F^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Mikäli kuvaus $F : Y \to Y$ on $\mathcal{A}$-mitallinen, niin todennäköisyysavaruutta, johon on liitetty kuvaus F, kutsutaan dynaamiseksi systeemiksi $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$. Mielenkiinnon kohteena on *mitan säilyttävät* dynaamiset systeemit.

Määritelmä 5.8 (**Mitan säilyttävä dynaaminen systeemi**).
Dynaaminen systeemi $(X, \mathcal{A}, \nu, F)$ säilyttää todennäköisyysmitan ν, mikäli kaikilla $A \in \mathcal{A}$ pätee

$$\nu(A) = \nu(F^{-1}(A)).$$

Mitan säilyttävässä dymaamisessa systeemissä siis $\nu \circ F^{-1} = \nu$. Määrittelemällä *Birkhoffin summat* voidaan tutkia myös mitallisten ja reaaliarvoisten kuvausten käytöstä dynaamisissa systeemeissä.

Määritelmä 5.9 (**Birkhoffin summat**).
Olkoon $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ dynaaminen systeemi ja $f : Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mitallinen. Tällöin sen n. kertaluvun Birkhoffin summa määritellään kuvauksena

$$S_n f = \sum_{j=0}^{n-1} f \circ F^j. \tag{5.1}$$

Tässä F^j tarkoittaa j kertaista yhdistettä, kun $j \in \mathbb{N}$ ja F^0 identtistä kuvausta.

Mikäli $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ on mitan säilyttävä, niin soveltamalla muuttujanvaihtolausetta 2.10 ja tietoa $\nu = \nu \circ F^{-1}$. saadaan seuraava huomio.

Lemma 5.10.
Olkoon $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ on mitan säilyttävä dynaaminen systeemi, Tällöin jokaiselle ν-integroituvalle kuvaukselle $f : Y \to \mathbb{R}$ on yhdiste $f \circ Y$ myös ν-integroituva ja

$$\int_Y f \circ F \, \mathrm{d}\nu = \int_Y f \, \mathrm{d}\nu.$$

Huomaa, että mikäli $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ on mitan säilyttävä, niin lemman 5.10 seurauksena jokaiselle ν-integroituvalle kuvaukselle $f : Y \to \mathbb{R}$ pätee

$$\int_Y S_n f \, \mathrm{d}\nu = \int_Y nf \, \mathrm{d}\nu. \tag{5.2}$$

Määritellään seuraavaksi *ergodinen* dynaaminen systeemi.

Määritelmä 5.11 (**Ergodisuus**).
Mitan säilyttävä dynaaminen systeemi $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ on ergodinen, mikäli jokaiselle $A \in \mathcal{A}$, jolle $F^{-1}(A) = A$ pätee $\nu(A) \in \{0, 1\}$.

Esitellään seuraavaksi ergodisuusteorian yksi keskeisimmistä tuloksista, jota kutsutaan *Birkhoffin ergodisuuslauseeksi*, katso [25, Lause 1.14 s.34].

Lause 5.12 (**Birkhoffin ergodisuuslause**).
Mikäli dynaaminen systeemi $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ on ergodinen ja funktio $f : X \to \mathbb{R}$ on ν-integroituva, niin ν-melkein kaikilla $x \in Y$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) = \int_Y f \, \mathrm{d}\nu,$$

missä $S_n f$ yhtälön (5.1) mukainen Birkhoffin summa.

Jatkossa tähän lauseeseen viitataan puhumalla lyhyemmin ergodisuuslauseesta. Ergodisuuslauseen funktion f integraalia voidaan approksimoida ν-melkein kaikkialla pisteen x radan $\{x, F(x), F^2(x), \ldots\}$ alkupään kuvapisteiden aritmeettisella keskiarvolla

$$\frac{f(x) + f(F(x)) + \ldots + f(F^{n-1}(x))}{n},$$

kun ν on ergodinen ja f ν-integroituva.

Seuraavaksi keskitytään tarkastemaan jonoavaruudessa $\mathbb{N}^\infty$ vasempaan siirtoon σ liittyviä dynaamisia systeemejä $(\mathbb{N}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{N}^\infty), \mu, \sigma)$, missä $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$. Huomaa, että koska σ on jatkuva, niin se on myös $\mathcal{B}(\mathbb{N}^\infty)$-mitallinen. Sanotaan, että Borel-todennäköisyysmitta $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$ on *σ-invariantti* vasemman siirron dynamiikassa, mikäli $(\mathbb{N}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{N}^\infty), \mu, \sigma)$ on mitan säilyttävä. Merkitään näiden mittojen osakokoelmaa $\mathcal{M}_\sigma$. Sanotaan, että edelleen $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ on ergodinen vasemman siirron dynamiikassa, mikäli $(\mathbb{N}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{N}^\infty), \mu, \sigma)$ on ergodinen.

Vasemman siirron dynamiikassa mitan σ-invarianttiuden toteamiseksi riittää tarkastella vain sylintereitä.

Lemma 5.13.
Olkoon $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$. Tällöin se on σ-invariantti täsmälleen silloin, kun kaikille sylintereille $[\mathbf{a}]$ on voimassa $\mu(\sigma^{-1}[\mathbf{a}]) = \mu([\mathbf{a}])$.

Todistus.
Ensimmäinen suunta on triviaali, joten oletetaan, että $\mu(\sigma^{-1}[\mathbf{a}]) = \mu([\mathbf{a}])$ kaikille sylintereille $[\mathbf{a}]$. Mikäli $U \subset \mathbb{N}^\infty$ on avoin, niin se voidaan se voidaan esittää yhdisteenä

$$U = \bigcup_{[\mathbf{a}]\in\mathcal{A}} [\mathbf{a}],$$

missä $\mathcal{A}$ on numeroituva kokoelma sylintereitä. Koska kaksi sylinteriä ovat aina keskenään sisäkkäiset tai pistevieraat, niin voidaan olettaa, että kokoelma koostuu pistevieraista sylintereistä. Tällöin numeroituvaa additiivisuutta käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\mu(\sigma^{-1}U) &= \mu\left(\sigma^{-1} \bigsqcup_{[\mathbf{a}]\in\mathcal{A}} [\mathbf{a}]\right) = \mu\left(\bigsqcup_{[\mathbf{a}]\in\mathcal{A}} \sigma^{-1}[\mathbf{a}]\right) \\ &= \sum_{[\mathbf{a}]\in\mathcal{A}} \mu(\sigma^{-1}[\mathbf{a}]) = \sum_{[\mathbf{a}]\in\mathcal{A}} \mu([\mathbf{a}]) = \mu\left(\bigsqcup_{[\mathbf{a}]\in\mathcal{A}} [\mathbf{a}]\right) = \mu(U). \qquad (1)\end{aligned}$$

Jonoavaruus on metristyvä ja μ äärellinen, joten lemman 2.2 nojalla mielivaltaiselle Borel-joukolle C pätee

$$\mu(C) = \inf\{\mu(U) : C \subset U, U \text{ on avoin}\}. \qquad (2)$$

Nyt koska a) σ on avoin ja jatkuva kuvaus, niin mielivaltaiselle Borel-joukolle B saadaan

$$\begin{aligned}\mu(\sigma^{-1}B) &\overset{(2)}{=} \inf\{\mu(U') : \sigma^{-1}B \subset U', U' \text{ on avoin}\} \\ &\overset{a)}{=} \inf\{\mu(\sigma^{-1}U) : B \subset U, U \text{ on avoin}\}\end{aligned}$$

$$\overset{(1)}{=} \inf\{\mu(U) : B \subset U, U \text{ on avoin}\}$$
$$\overset{(2)}{=} \mu(B).$$

□

5.3 Paine

Tässä kappaleessa jatketaan vasemman siirron dynamiikan tutkimista ja kehitellään termodynaamista formalismia määrittelemällä paine potentiaaleille vasemman siirron suhteen. Kappale pohjautuu pääosin [20]:n lukuun 2.1. Tarkastelu rajataan nyt vain potentiaaleille, joilla on summautuva variaatio. Aloitetaan tarkastelu määrittelemällä potentiaalien partitiot vasemman siirron suhteen. Muista, että n. kertaluvun Birkhoffin summa potentiaalille f asetettiin vasemman siirron suhteen yhtälön (5.1) mukaisesti, eli $S_n f = \sum_{j=0}^{n-1} f \circ \sigma^j$.

Määritelmä 5.14 (**Potentiaalin partitio**).
Olkoon $F \subset \mathbb{N}$ epätyhjä. Tällöin jokaiselle potentiaalille $f \in \Sigma$ asetetaan n. kertaluvun partitio joukon F^∞ suhteen

$$Z_n(F^\infty, f) = \sum_{\mathbf{a} \in F^n} e^{S_n f(\mathbf{a}^\infty)} = \sum_{\mathbf{a} \in F^\infty : \sigma^n \mathbf{a} = \mathbf{a}} e^{S_n f(\mathbf{a})}.$$

Huomaa, että potentiaalin partitio voi olla ääretön. Jos $\#F = \infty$, niin vakiokuvauksille partitio joukon F^∞ suhteen on ääretön. Jonolla $(Z_n(F^\infty, f))_{n \in \mathbb{N}}$ on multiplikatiivisuutta muistuttava ominaisuus.

Lemma 5.15.
Olkoon $F \subset \mathbb{N}$ epätyhjä ja $f \in \Sigma$. Tällöin kaikille $m, n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$Z_m(F^\infty, f) Z_n(F^\infty, f) e^{-2\,Var(f)} \leq Z_{m+n}(F^\infty, f) \leq Z_m(F^\infty, f) Z_n(F^\infty, f) e^{2\,Var(f)}.$$

Todistus.
Todetaan vain oikeanpuoleinen epäyhtälö, sillä todistukset menevät vastaavasti. Koska summassa $Z_{m+n}(F^\infty, f)$ on vain positiivisia termejä, niin summausjärjestys on vapaa ja voidaan kirjoittaa

$$Z_{m+n}(F^\infty, f) = \sum_{\mathbf{a} \in F^{m+n}} e^{S_{m+n} f(\mathbf{a}^\infty)} = \sum_{\mathbf{b} \in F^m} \sum_{\mathbf{c} \in F^n} e^{S_{m+n} f((\mathbf{b}, \mathbf{c})^\infty)}. \tag{1}$$

Nyt jokaiselle $\mathbf{b} \in F^m$ ja $\mathbf{c} \in F^n$ saadaan arvio

$$\begin{aligned}
S_{m+n} f((\mathbf{b}, \mathbf{c})^\infty) &= \sum_{k=0}^{m+n-1} f\left(\sigma^k (\mathbf{b}, \mathbf{c})^\infty\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\sigma^k (\mathbf{b}, \mathbf{c})^\infty\right) + \sum_{k=m}^{m+n-1} f\left(\sigma^k (\mathbf{b}, \mathbf{c})^\infty\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} \left(f\left(\sigma^k \mathbf{b}^\infty\right) + \mathrm{Var}_{m-k}(f)\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\sigma^k \mathbf{c}^\infty\right) + \mathrm{Var}_{n-k}(f)\right) \\
&= S_m f(\mathbf{b}^\infty) + S_n f(\mathbf{c}^\infty) + 2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_k(f) \\
&\leq S_m f(\mathbf{b}^\infty) + S_n f(\mathbf{c}^\infty) + 2\mathrm{Var}(f).
\end{aligned} \tag{2}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
Z_{m+n}(F^\infty, f) &\overset{(1)+(2)}{\leq} \sum_{\mathbf{b} \in F^m} \sum_{\mathbf{c} \in F^n} e^{S_m f(\mathbf{b}^\infty) + S_n f(\mathbf{c}^\infty) + 2\mathrm{Var}(f)} \\
&= \left(\sum_{\mathbf{b} \in F^m} e^{S_m f(\mathbf{b}^\infty)} \right) \left(\sum_{\mathbf{c} \in F^n} e^{S_n f(\mathbf{c}^\infty)} \right) e^{2\mathrm{Var}(f)} \\
&= Z_m(F^\infty, f) Z_n(F^\infty, f) e^{2\mathrm{Var}(f)}.
\end{aligned}$$

□

Edellisen lemman perusteella nähdään, että joko $Z_n(F^\infty, f) < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ tai $Z_n(F^\infty, f) = \infty$ kaikilla kertaluvuilla. Äärellisessä tapauksessa nähdään, että jokaiselle $m, n \in \mathbb{N}$ pätee arviot

$$\log Z_{m+n}(F^\infty, f) \leq \log Z_m(F^\infty, f) + \log Z_n(F^\infty, f) + 2\mathrm{Var}(f) \quad \text{ja}$$
$$\log Z_{m+n}(F^\infty, f) \geq \log Z_m(F^\infty, f) + \log Z_n(F^\infty, f) - 2\mathrm{Var}(f).$$

Tällöin seuraavan lemman jono $(\frac{1}{n} \log Z_n(F^\infty, f))_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee, katso [25, Lemma 4.9 s.87].

Lemma 5.16.
Olkoon reaalilukujono $(a_n)_{n=1}^\infty$ ja $C \in \mathbb{R}$. Mikäli

(i) $a_{n+p} \leq a_n + a_p + C$ kaikilla $n, p \in \mathbb{N}$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n + C}{n},$$

(ii) $a_{n+p} \geq a_n + a_p + C$ kaikilla $n, p \in \mathbb{N}$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n + C}{n}.$$

Mikäli $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n > -\infty$, niin raja-arvo ei ole negatiivinen.

Todistus.
Korvataan $(a_n)_{n=1}^\infty$ jonolla $(b_n)_{n=1}^\infty$, missä jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ asetetaan $b_n = a_n + C$. Tällöin jokaiselle $n, p \in \mathbb{N}$ pätee tapauksessa (i) $b_{n+p} \leq b_n + b_c$ ja tapauksessa (ii) $b_{n+p} \geq b_n + b_c$. Epäyhtälöt

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} \quad \text{ja} \tag{1}$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} \tag{2}$$

ovat nyt triviaalisti voimassa. Kiinnitetään seuraavaksi mielivaltainen $n \in \mathbb{N}$. Nyt jokainen luonnollinen $m > n$ voidaan kirjoittaa muodossa $m = k_m n + i_m$, missä $k_m \in \mathbb{N}$ ja $0 \leq i_m < n$. Tällöin tapauksessa (i) saadaan

$$\frac{b_m}{m} = \frac{b_{k_m n + i_m}}{k_m n + i_m} \leq \frac{k_m b_n + b_{i_m}}{k_m n + i_m} = \frac{k_m n}{k_m n + i_m} \frac{b_n}{n} + \frac{b_{i_m}}{m} \tag{3}$$

ja vastaavasti tapauksessa (ii)

$$\frac{b_m}{m} \geq \frac{k_m n}{k_m n + i_m} \frac{b_n}{n} + \frac{b_{i_m}}{m}. \tag{4}$$

Kun luku m kasvaa rajatta, niin myös k_m kasvaa rajatta. Koska i_m ja b_{i_m} ovat nyt rajoitettuja, niin tapauksessa (i) antamalla ensin $m \to \infty$ ja ottamalla sen jälkeen puolittain infimum luvun n suhteen saadaan arviosta (3), että

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n}. \tag{5}$$

Vastaavasti tapauksessa (ii) antamalla ensin $m \to \infty$ ja ottamalla sitten puolittain supremum luvun n suhteen saadaan arviosta (4), että

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n}. \tag{6}$$

Tällöin tapauksessa (i)

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n + C}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n} \overset{(1)+(5)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + C}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

ja vastaavasti tapauksessa (ii)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n + C}{n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n} \overset{(2)+(5)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + C}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Väitteen viimeinen kohta on nyt ilmeinen seuraus. $\square$

Näiden tarkastelujen perusteella voidaan asettaa paineen määritelmä.

Määritelmä 5.17 (Paine).
Olkoon $F \subset \mathbb{N}$ epätyhjä ja $f \in \Sigma$. Tulkinnalla $\log \infty = \infty$ määritellään potentiaalin f paine joukon F^∞ yli asettamalla

$$P(F^\infty, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n(F^\infty, f).$$

Painetta koko jonoavaruuden yli merkitään jatkossa $P(f) := P(\mathbb{N}^\infty, f)$. Paineen voi asettaa useammalla keskenään yhtenevällä tavalla luokan Σ potentiaaleille. Esimerkiksi potentiaalien partitioissa eksponentissa oleva termi $S_n f(\mathbf{c}^\infty)$ voitaisiin korvata termillä $\sup_{\mathbf{a}\in[\mathbf{c}]} S_n f(\mathbf{a})$, katso [20, s.6] Seuraavat ominaisuudet on nyt helppo nähdä määritelmän ja lemmojen 5.15 ja 5.16 avulla.

Lemma 5.18.
Olkoon $f \in \Sigma$ ja $F \subset \mathbb{N}$ epätyhjä. Tällöin $P(F^\infty, f) > -\infty$ aina ja $P(F^\infty, f) < \infty$ täsmälleen silloin, kun $Z_n(F^\infty, f) < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Mikäli $P(F^\infty, f) < \infty$, niin

(i) $P(F^\infty, f - P(F^\infty, f)) = 0$ *ja*

(ii) kaikille $n \in \mathbb{N}$ saadaan arvio

$$-\frac{2\,Var(f)}{n} + \frac{1}{n}\log Z_n(F^\infty, f) \le P(F^\infty, f) \le \frac{1}{n}\log Z_n(F^\infty, f) + \frac{2\,Var(f)}{n}.$$

Seuraavaksi nähdään, että painetta $P(f)$ voidaan approksimoida alhaaltapäin paineilla $P(F^\infty, f)$, missä F on äärellinen ja epätyhjä.

Lemma 5.19.
Jokaiselle $f \in \Sigma$

$$P(f) = \sup\{P(F^\infty, f) : \emptyset \ne F \subset \mathbb{N}, \#F < \infty\}.$$

Todistus.
Määritelmästä on selvää, että $P(f) \ge \sup\{P(F^\infty, f) : \emptyset \ne F \subset \mathbb{N}, \#F < \infty\}$. Oletetaan, että $P(f) < \infty$. Tällöin lemman 5.15 nojalla $Z_n(\mathbb{N}^\infty, f) < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ löytyy epätyhjä ja äärellinen $F_n \subset \mathbb{N}$ siten että,

$$Z_n(\mathbb{N}^\infty, f) \le 2 Z_n(F_n^\infty, f). \tag{1}$$

Tällöin lemman 5.18 (ii) perusteella

$$\begin{aligned} P(F_n^\infty, f) &\ge -\frac{2\mathrm{Var}(f)}{n} + \frac{1}{n}\log Z_n(F_n^\infty, f) \\ &\overset{(1)}{\ge} -\frac{2\mathrm{Var}(f)}{n} + \frac{1}{n}\log Z_n(\mathbb{N}^\infty, f) - \frac{\log 2}{n} \\ &\ge -\frac{2\mathrm{Var}(f)}{n} - \frac{\log 2}{n} + P(f). \end{aligned}$$

Siten $P(f) \le \sup\{P(F^\infty, f) : \emptyset \ne F \subset \mathbb{N}, \#F < \infty\}$. Tapaus $P(f) = \infty$ menee vastaavasti. □

5.4 Entropia

Määritellään tässä kappaleessa yleisessä dynaamisessa systeemissä entropia ja tarkastellaan sen ominaisuuksia erityisesti invarianteissa systeemeissä. Osio pohjautuu [25]:n lukuun 4 ja [22]:n lukuun 4.

Tarkastellaan taas aluksi mielivaltaista todennäköisyysavaruutta $(Y, \mathcal{A}, \nu)$. Avaruuden *partitiolla* ξ tarkoitetaan numeroituvaa $\mathcal{A}$:n osakokoelmaa epätyhjiä joukkoja, jotka muodostavat joukon Y osituksen. Esimerkkinä jonoavaruuden Borel-todennäköisyysavaruuksille $(\mathbb{N}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{N}^\infty), \mu)$ partitiosta toimii *standardipartitio* $\alpha = \{[a] : a \in \mathbb{N}\}$. Partitio ξ_1 on partitiota ξ_2 *hienompi*, mikäli kaikki ξ_2:n alkiot voidaan esittää ξ_1:n alkioiden yhdisteenä. Tällöin merkitään $\xi_2 \le \xi_1$. Kahden partition ξ_1 ja ξ_2 *hienonnus* $\xi_1 \vee \xi_2$ asetetaan kokoelmana

$$\xi_1 \vee \xi_2 = \{\mathrm{A}_1 \cap A_2 \ne \emptyset : A_i \in \xi_j,\ j = 1, 2\}.$$

On helppoa nähdä, että $\xi_1 \vee \xi_2$ on itsekin partitio ja $\xi_1, \xi_2 \leq \xi_1 \vee \xi_2$. Edelleen n partition $\xi_1, \dots \xi_n$ hienonnus asetetaan

$$\bigvee_{j=1}^{n} \xi_j = \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} A_j \neq \emptyset : A_j \in \xi_j,\ j = 1, \dots, n \right\}.$$

Tämäkin on partitio ja selvästi $\xi_1, \dots, \xi_n \leq \bigvee_{j=1}^{n} \xi_j$. Seuraavaksi määritellään systeemin entropia partition suhteen.

Määritelmä 5.20 (**Entropia partition suhteen**).
Olkoon $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ todennäköisyysvaruus. Tällöin mitan ν entropiaksi partition ξ suhteen asetetaan

$$H(\xi, \nu) = -\sum_{A \in \xi} \mu(A) \log \mu(A).$$

Tässä muodollisesti $0 \cdot \log 0 = 0$.

Määritelmästä nähdään, että entropia voi saada arvoja joukosta $[0, \infty]$. Entropialle voidaan esittää seuraavanlainen informaatioteoreettinen tulkinta. Partitio ξ edustaa mittaussysteemiä ja jokainen sen elementti A mahdollista mittaustulosta. Elementin mitta $\mu(A)$ kuvaa mittaustuloksen todennäköisyyttä ja luku $-\log \mu(A)$ mittaustulokseen liittyvää informaatioarvoa. Mitä pienempi todennäköisyys saada joku mittaustulos, sitä suurempi on sen informaatioarvo. Entropia kuvaa tällöin mittauksen keskimääräistä informaatioarvoa. Mikäli joku mittaustulos A on täysin varma, eli $\mu(A) = 1$, niin entropia on nolla, ts. mittauksella ei ole informaatioarvoa.
Jatkossa hyödyllisenä työkaluna käytetään seuraava konveksisuustulosta.

Lemma 5.21.
Olkoon $u : [0, \infty[\to \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \log x, & \textit{muuten.} \end{cases}$$

Mikäli on luvut $a_i \in [0, 1]$ ja $x_i \in [0, \infty[$ numeroituvalla indeksijoukolla J siten, että $\sum_i a_i = 1$ ja $\sum_{i \in J} a_i x_i$ suppenee, niin

$$u\left(\sum_{i \in J} a_i x_i\right) \leq \sum_{i \in J} a_i u(x_i).$$

Mikäli lukuja on äärellinen määrä $k \in \mathbb{N}$ ja $a_i = k^{-1}$ kaikilla $i = 1, \dots, k$, niin yhtäsuuruus on voimassa.

Todistus.
Äärellisen monen summattavan tapauksessa epäyhtälön ja yhtäsuuruuden todistus on alkeisanalyysiä, katso [25, Lause 4.2 s.79]. Osoitetaan siis, että väite pätee tapauksessa, kun indeksijoukko J on ääretön. Tällöin voidaan olettaa, että $J = \mathbb{N}$. Nyt käyttämällä a) u:n jatkuvuutta ja b) väitettä äärellisen monen summattavan tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned} u\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) &\overset{a)}{=} \lim_{N \to \infty} u\left(\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right) = \lim_{N \to \infty} u\left(\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} a_j\right) \cdot 0 + \sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right) \\ &\overset{b)}{\leq} \liminf_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} a_i u(x_i). \end{aligned} \tag{1}$$

Väite on tällöin selvä osoittamalla, että sarja $\sum_{i=1}^{\infty} a_i u(x_i)$ suppenee (mahdollisesti $+\infty$:ään), jolloin $\liminf_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} a_i u(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u(x_i)$. Näin käy, jos osoitetaan, että negatiivisten termien osasarja on äärellinen, eli $> -\infty$. Nyt

$$\begin{aligned} -\infty < \inf u \leq u\left(\sum_{i : a_i u(x_i) < 0} a_i x_i\right) &= u\left(\left(\sum_{i : a_i u(x_i) \geq 0} a_i\right) \cdot 0 + \sum_{i : a_i u(x_i) < 0} a_i x_i\right) \\ \overset{(1)}{\leq} \liminf_{N \to \infty} \sum_{\substack{i \leq N \\ a_i u(x_i) < 0}} a_i u(x_i) &= \sum_{i : a_i u(x_i) < 0} a_i u(x_i). \end{aligned}$$

$\square$

Partitioiden entropioille on voimassa seuraavat ominaisuudet.

Lemma 5.22.
Olkoon $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ todennäköisyysavaruus ja sen partitiot ξ_1 ja ξ_2. Tällöin

(i) $H(\xi_1 \vee \xi_2, \nu) \leq H(\xi_1, \nu) + H(\xi_2, \nu)$ ja *(subadditiivisuus)*

(ii) jos $\xi_2 \leq \xi_1$, niin $H(\xi_2, \nu) \leq H(\xi_1, \nu)$. *(monotonisuus)*

Todistus.
Todetaan vain subadditiivisuus, sillä monotonisuus on helppo päätellä. Voidaan olettaa, että $0 < \nu(A_1) < 1$ kaikilla $A_1 \in \xi_1$. Olkoon u kuten lemmassa 5.21. Tällöin saadaan laskettua

$$
\begin{aligned}
H(\xi_1 \vee \xi_2, \nu) &= -\sum_{A \in \xi_1 \vee \xi_2} \nu(A) \log \nu(A) \\
&\overset{a)}{=} -\sum_{A_1 \in \xi_1} \sum_{A_2 \in \xi_2} \nu(A_1 \cap A_2) \log \nu(A_1 \cap A_2) \\
&= -\sum_{A_1 \in \xi_1} \log \nu(A_1) \sum_{A_2 \in \xi_2} \nu(A_1 \cap A_2) \left(1 + \overbrace{\frac{\log \nu(A_1 \cap A_2)}{\log \nu(A_1)} - 1}^{\geq 0} \right) \\
&= -\sum_{A_1 \in \xi_1} \log \nu(A_1) \sum_{A_2 \in \xi_2} \nu(A_1 \cap A_2) - \sum_{A_1 \in \xi_1} \sum_{A_2 \in \xi_2} \nu(A_1 \cap A_2) \log \frac{\nu(A_1 \cap A_2)}{\nu(A_1)} \\
&= -\sum_{A_1 \in \xi_1} \nu(A_1) \log \nu(A_1) - \sum_{A_2 \in \xi_2} \sum_{A_1 \in \xi_1} \nu(A_1 \cap A_2) \log \frac{\nu(A_1 \cap A_2)}{\nu(A_1)} \\
&= H(\xi_1, \nu) - \sum_{A_2 \in \xi_2} \sum_{A_1 \in \xi_1} \nu(A_1) \frac{\nu(A_1 \cap A_2)}{\nu(A_1)} \log \frac{\nu(A_1 \cap A_2)}{\nu(A_1)} \\
&= H(\xi_1, \nu) - \sum_{A_2 \in \xi_2} \sum_{A_1 \in \xi_1} \nu(A_1) u \left(\frac{\nu(A_1 \cap A_2)}{\nu(A_1)} \right) \\
&\overset{b)}{\leq} H(\xi_1, \nu) - \sum_{A_2 \in \xi_2} u \left(\sum_{A_1 \in \xi_1} \nu(A_1) \frac{\nu(A_1 \cap A_2)}{\nu(A_1)} \right) \\
&= H(\xi_1, \mu) - \sum_{A_2 \in \xi_2} u(\nu(A_2)) = H(\xi_1, \nu) + H(\xi_2, \nu).
\end{aligned}
$$

Kohdassa a) on summaan lisätty nollia, sillä osa leikkauksista voi olla nyt tyhjiä. Kohdassa b) on käytetty lemmaa 5.21. $\square$

Seuraavaksi tutkitaan entropiaa dynaamisessa systeemissä $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$. Mikäli ξ on $(Y, \mathcal{A}, \nu)$:n partitio, niin asetetaan jokaiselle $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$F^{-j}\xi = \{F^{-j}(A) : A \in \xi\}.$$

Huomaa, että $F^0\xi = \xi$. Jokainen $F^{-j}\xi$ on selvästi partitio, koska F on $\mathcal{A}$-mitallinen. Määritellään edelleen jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ partition n. kertaluvun hienonnus kuvauksen F suhteen asettamalla

$$\xi^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} F^{-j}\xi.$$

Huomaa, että jonoavaruuden standardipartitiolle α saadaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ $\alpha^n = \{[\mathbf{a}] : \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n\}$. Mitan säilyttäville dynaamisille systeemeille saadaan seuraava tulos.

Lemma 5.23.
Mikäli $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ on mitan säilyttävä, niin jono $(H(\xi^n, \nu))_{n \in \mathbb{N}}$ on subadditiivinen.

Todistus.
Olkoon $m, n \in \mathbb{N}$ kiinnitetty. Nyt huomataan, että $\xi^{m+n} = \xi^m \vee F^{-m}\xi^n$. Koska systeemi on mitan säilyttävä, on helppo nähdä, että $H(F^{-m}\xi^n, \nu) = H(\xi^n, \nu)$, jolloin väite seuraa lemmasta 5.22. □

Huomaa, että nyt joko kaikki entropiat $H(\xi^n, \nu)$ ovat yhtä aikaa joko äärettömiä tai äärellisiä. Tällöin muistaen lemma 5.16 voidaan määritellä mitan keskimääräinen entropia partition suhteen mitan säilyttävässä dynaamisessa systeemissä.

Määritelmä 5.24.
Olkoon $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ mitan sälyttävä ja sen ξ partitio. Tällöin ν:n keskimääräiseksi entropiaksi partition ξ suhteen systeemissä $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ asetetaan

$$h(\xi, \nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi^n, \nu) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} H(\xi^n, \nu).$$

Termin $H(\xi^n, \nu)$ voi mieltää kuvaavan n peräkkäisen mittauksen entropiaa kuvauksen F toimiessa mittaussysteemin evoluutiona. Tällöin $h(\xi, \nu)$ kuvaa yksittäisen mittauksen keskimääräistä entropiaa, kun toistoja tehdään loputtomiin. Huomaa, että $H(\xi, \nu) \geq h(\xi, \nu) \geq 0$ ja toisaalta $h(\xi, \nu) < \infty$ täsmälleen silloin, kun $H(\xi, \nu) < \infty$. Lopuksi määritellään mitalle mitan säilyttävässä dynaamisessa systeemissä *Kolmogorov–Sinai-entropia* tai *metrinen entropia.*

Määritelmä 5.25 (Kolmogorov–Sinai-entropia).
Olkoon $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ mitan säilyttävä. Tällöin mitan ν Kolmogorov–Sinai-entropiaksi systeemissä asetetaan

$$h_\nu = \sup\{h(\xi, \mu) : \xi \text{ on } (Y, \mathcal{A}, \nu)\text{:n partitio},\ H(\xi, \nu) < \infty\}.$$

Jatkossa entropialla pääsääntöisesti tarkoitetaan Kolmogorov–Sinai-entropiaa. Sanotaan, että partitio ξ on mitan säilyttävän systeemin $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ suhteen *vahvasti generoiva*, jos $\mathcal{A}$ on pienin sigma-algebra, joka sisältää kaikki joukot kokoelmista ξ^n, kun $n \in \mathbb{N}$, eli $\bigcup_{n=1}^\infty \xi^n$ generoi $\mathcal{A}$:n. Seuraava tulos sanoo, että mikäli lisäksi $H(\xi, \nu) < \infty$, niin $h(\xi, \nu)$ on Kolmogorov–Sinai-entropia, katso [22, Lause 4.4 s.106].

Lause 5.26 (Kolmogorov–Sinai).
Olkoon $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ mitan säilyttävä ja sen suhteen vahvasti generoiva partitio ξ. Tällöin mikäli $H(\xi, \nu) < \infty$ tai $h(\xi, \nu) < \infty$, niin $h_\nu = h(\xi, \nu)$.

Erityisesti standardipartitio α on vahvasti generoiva jokaisen systeemin $(\mathbb{N}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{N}^\infty), \mu, \sigma)$ suhteen, kun $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$. Tällöin mikäli $H(\alpha, \nu) < \infty$, niin seurauksena saadaan entropialle seuraava esitysmuoto jonoavaruuden vasemman siirron dynamiikassa

$$h_\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n, \mu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} \mu([\mathbf{a}]) \log \mu([\mathbf{a}]). \tag{5.3}$$

Jatkossa mitoille $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ entropialla tarkoitetaan pääasiassa yhtälön (5.3) esitysmuotoa. Ergodisessa systeemissä vahvasti generoivalle partitiolle äärellisellä entropialla pätee seuraava tulos, katso [22, Lause 4.3 s.104].

Lause 5.27 (Shannon–McMillan–Breiman).
Olkoon $(Y, \mathcal{A}, \nu, F)$ ergodinen ja sen suhteen vahvasti generoiva partitio ξ siten, että $H(\xi, \nu) < \infty$ (siis $h(\xi, \nu) < \infty$). Tällöin μ-melkein kaikille $x \in Y$

$$h(\xi, \nu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(A_n(x)),$$

missä $A_n(x) \in \xi^n$ ja $x \in A_n(x)$.

Tällöin taas käyttämällä standardipartitiota α saadaan Shannon–McMillan–Breiman-lauseen nojalla ergodiselle mitalle $\nu \in \mathcal{M}_\sigma$ äärellisellä $H(\alpha, \nu)$ ja ν-melkein kaikilla $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$

$$h_\nu = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \nu([\mathbf{a}|_n]). \tag{5.4}$$

5.5 Variaatioperiaate

Tässä kappaleessa esitellään jonoavaruudessa termodynaamisen formalismin perustulos – *variaatioperiaate*, joka sitoo paineen, entropian ja σ-invariantit mitat. Muista, että α tarkoitti jonoavaruuden standardipartitiota.

Lause 5.28 (**Variaatioperiaate**).
Olkoon $f \in \Sigma$. Tällöin

$$P(f) = \sup\left\{h(\alpha,\mu) + \int_{\mathbb{N}^\infty} f \; \mathrm{d}\mu : \mu \in \mathcal{M}_\sigma, \; \int_{\mathbb{N}^\infty} f \; \mathrm{d}\mu > -\infty\right\}.$$

Muista, että ehto $\int_{\mathbb{N}^\infty} f \; \mathrm{d}\mu > -\infty$ tarkoittaa funktion negatiiviosan f^- integroituvuutta. Mittaa $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$, joka toteuttaa yhtälön kutsutaan potentiaalin *tasapainotilaksi*. Huomaa, että mikäli $P(f) = 0$ ja μ on potentiaalin tasapainotila, niin $h(\alpha,\nu) < \infty$ ja siten $H(\alpha,\nu) < \infty$. Tällöin lauseen 5.26 nojalla

$$h_\mu = -\int_{\mathbb{N}^\infty} f \; \mathrm{d}\mu.$$

Osion rungon muodostaa lauseen 5.28 todistuksen läpikäyminen. Todistus pohjautuu lähteen [20] kappaleen 2.1 esitykseen. Kuten tavallista todistus kulkee toteamalla epäyhtälöt molempiin suuntiin. Ensimmäinen niistä on melko suoraviivainen todistaa ja esitettävä todistus on pitkälle kuten [20, Lause 2.2.7 s.10-11].

Lemma 5.29.
Jokaiselle $f \in \Sigma$ on

$$P(f) \geq \sup\left\{h(\alpha,\mu) + \int_{\mathbb{N}^\infty} f \; \mathrm{d}\mu : \mu \in \mathcal{M}_\sigma, \; \int_{\mathbb{N}^\infty} f \; \mathrm{d}\mu > -\infty\right\}.$$

Todistus.
Voidaan olettaa, että $P(f) < \infty$, sillä muuten väite on triviaalisti selvä. Tällöin $Z_n(\mathbb{N}^\infty, f) < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon mielivaltainen $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ siten, että $\int_{\mathbb{N}^\infty} f \; \mathrm{d}\mu > -\infty$. On helppo nähdä, että mikäli $\int_{\mathbb{N}^\infty} f \; \mathrm{d}\mu = \infty$, niin myös $Z_1(\mathbb{N}^\infty, f) = \infty$ ja siten myös $P(f) = \infty$, joten voidaan olettaa, että f on integroituva mitan μ suhteen. Tällöin yhtälön (5.2) nojalla saadaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$

$$n\int_{\mathbb{N}^\infty} f \; \mathrm{d}\mu = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{\mathbb{N}^\infty} f\circ\sigma^j \; \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \; \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

Siten myös $S_n f$ on integroituva, jolloin integraalin additiivisuutta ja monotonisuutta hyödyntäen saadaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ arvio

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n}\int_{[\mathbf{a}]} S_n f \; \mathrm{d}\mu &\leq \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n}\int_{[\mathbf{a}]} S_n f(\mathbf{a}^\infty) + \mathrm{Var}(f) \; \mathrm{d}\mu \\ &\leq \mathrm{Var}(f) + \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n}\mu([\mathbf{a}])S_n f(\mathbf{a}^\infty). \end{aligned} \tag{2}$$

Olkoon funktio u kuten lemmassa 5.21. Nyt saadaan laskettua jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ seuraava arvio

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}H(\alpha^n,\mu) + \int_{\mathbb{N}^\infty} f \; \mathrm{d}\mu \\ &\overset{(1)+(2)}{\leq} \frac{1}{n}H(\alpha^n,\mu) + \frac{1}{n}\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n}\mu([\mathbf{a}])S_n f(\mathbf{a}^\infty) + \frac{1}{n}\mathrm{Var}(f) \\ &= -\frac{1}{n}\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n}\mu([\mathbf{a}])\left(\log\mu([\mathbf{a}]) - S_n f(\mathbf{a}^\infty)\right) + \frac{1}{n}\mathrm{Var}(f) \\ &= -\frac{1}{n}\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} e^{S_n f(\mathbf{a}^\infty)} u\left(\mu([\mathbf{a}])e^{-S_n f(\mathbf{a}^\infty)}\right) + \frac{1}{n}\mathrm{Var}(f)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{n} Z_n(\mathbb{N}^\infty, f) \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} e^{S_n f(\mathbf{a}^\infty)} Z_n(\mathbb{N}^\infty, f)^{-1} u\left(\mu([\mathbf{a}]) e^{-S_n f(\mathbf{a}^\infty)}\right) + \frac{1}{n}\mathrm{Var}(f) \\
&\overset{a)}{\leq} -\frac{1}{n} Z_n(\mathbb{N}^\infty, f) u\left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} e^{S_n f(\mathbf{a}^\infty)} Z_n(\mathbb{N}^\infty, f)^{-1} \mu([\mathbf{a}]) e^{-S_n f(\mathbf{a}^\infty)}\right) + \frac{1}{n}\mathrm{Var}(f) \\
&= -\frac{1}{n} Z_n(\mathbb{N}^\infty, f) u\left(Z_n(\mathbb{N}^\infty, f)^{-1}\right) + \frac{1}{n}\mathrm{Var}(f) \\
&= \frac{1}{n} \log Z_n(\mathbb{N}^\infty, f) + \frac{1}{n}\mathrm{Var}(f).
\end{aligned}
$$

Kohta a) seuraa tässä suoraan lemmasta 5.21. Tällöin antamalla $n \to \infty$ saadaan $h(\alpha, \mu) + \int_{\mathbb{N}^\infty} f \, \mathrm{d}\mu \leq P(f)$ ja väite seuraa, koska μ oli mielivaltaisesti valittu. □

Toinen epäyhtälö todetaan epäsuorasti. Ideana on käyttää lemmaa 5.19, jonka nojalla

$$
P(f) = \sup\{P(F^\infty, f) : \emptyset \neq F \subset \mathbb{N}, \#F < \infty\}.
$$

Tällöin toisen suunnan osoittamiseksi on riittävää osoittaa seuraava tulos.

Lemma 5.30.
Olkoon $F \subset \mathbb{N}$ epätyhjä ja äärellinen ja $f \in \Sigma$. Tällöin löytyy joukon F^∞ kantama mitta $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ siten, että

$$
P(F^\infty, f) \leq h(\alpha, \mu) + \int_{\mathbb{N}^\infty} f \, \mathrm{d}\mu.
$$

Todistus on konstruktiivinen ja se pohjautuu pääosin lähteen [25] kappaleeseen 9.3. Idea tarkastella äärellisiä joukkoja $F \subset \mathbb{N}$ piilee tulojoukon F^∞ kompaktiudessa. Tällöin muistetaan, että F^∞:n Borel-todennäköisyysmittojen joukko $\mathcal{M}_{F^\infty}$ on heikosti jonokompakti, koska F^∞ on nyt aliavaruutena kompakti ja metristyvä. Huomaa, edelleen että $\mathcal{M}_{F^\infty}$ on nyt täsmälleen kaikki joukon F^∞ kantamat Borel-todennäköisyysmitat kokoelmassa $\mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$. Määritellään aluksi jono apumittoja.

Määritelmä 5.31.
Olkoon $F \subset \mathbb{N}$ epätyhjä ja äärellinen ja $f \in \Sigma$. Asetetaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ mitta

$$
\nu_n = \frac{1}{Z_n(F^\infty, f)} \sum_{\mathbf{a} \in F^n} e^{S_n f(\mathbf{a}^\infty)} \delta_{\mathbf{a}^\infty}.
$$

Selvästi jokainen ν_n on joukon F^∞ kantama Borel-todennäköisyysmitta. Pienellä laskulla saadaan seuraava havainto.

Lemma 5.32.
Olkoon $F \subset \mathbb{N}$ epätyhjä ja äärellinen, $f \in \Sigma$ ja ν_n jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ kuten määritelmässä 5.31. Tällöin jokaiselle $n \in \mathbb{N}$

$$
\log Z_n(F^\infty, f) = H(\alpha^n, \nu_n) + \int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \, \mathrm{d}\nu_n.
$$

Mikäli $\#F > 1$ on selvää, että ν_n ei ole σ-invariantti, kun $n \geq 2$. Määritellään siis uusi jono apumittoja mittojen ν_n avulla.

Määritelmä 5.33.
Olkoon $F \subset \mathbb{N}$ epätyhjä ja äärellinen, $f \in \Sigma$ ja ν_n jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ kuten määritelmässä 5.31. Asetetaan edelleen jokaiselle n

$$
\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \nu_n \circ \sigma^{-k}.
$$

Taas jokainen μ_n on helppo huomata joukon F^∞ kantamaksi Borel-todennäköisyysmitaksi. Mittojen μ_n ja ν_n välillä on seuraavat relaatiot.

Lemma 5.34.
Olkoon $F \subset \mathbb{N}$ epätyhjä ja äärellinen, $f \in \Sigma$ ja mitat ν_n ja μ_n jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ kuten määritelmissä 5.31 ja 5.33. Tällöin jokaiselle $m \in \mathbb{N}$

(i)
$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} H\left(\alpha^m, \nu_n \circ \sigma^{-i}\right) = H(\alpha^m, \mu_n) \quad \text{ja}$$

(ii)
$$\frac{1}{n}\int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \,\mathrm{d}\nu_n = \int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \,\mathrm{d}\mu_n.$$

Todistus.
Todistetaan vain kohta (i). Olkoon kuvaus u kuten lemmassa 5.21. Lähdetään liikkeelle vasemmanpuoleisesta summasta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} H\left(\alpha^m, \nu_n \circ \sigma^{-i}\right) &= -\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^m} \nu_n(\sigma^{-i}[\mathbf{a}])\log\nu_n(\sigma^{-i}[\mathbf{a}]) \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mathbf{a}\in F^m} \nu_n(\sigma^{-i}[\mathbf{a}])\log\nu_n(\sigma^{-i}[\mathbf{a}]) \\
&= -\sum_{\mathbf{a}\in F^m}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \nu_n(\sigma^{-i}[\mathbf{a}])\log\nu_n(\sigma^{-i}[\mathbf{a}]) \\
&= -\sum_{\mathbf{a}\in F^m}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}u(\nu_n(\sigma^{-i}[\mathbf{a}])) \\
&\overset{a)}{\leq} -\sum_{\mathbf{a}\in F^m} u\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\nu_n(\sigma^{-i}[\mathbf{a}])\right) \\
&= -\sum_{\mathbf{a}\in F^m} u\left(\mu_n([\mathbf{a}])\right) = H(\alpha^m, \mu_n).
\end{aligned}$$

Tässä kohta a) seuraa lemmasta 5.21. □

Hyödynnetään seuraavaksi heikkoa jonokompaktiutta ja löydetään sopiva invariantti mitta.

Lemma 5.35.
Olkoon $F \subset \mathbb{N}$ epätyhjä ja äärellinen ja $f \in \Sigma$ ja mittajono $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ kuten määritelmässä 5.33. Tällöin löytyy joukon F^∞ kantama mitta $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ ja osajono $(\mu_{n_j})_{j=1}^\infty$, joka suppenee mittaan μ heikosti.

Todistus.
Lemman alkuosa on suora seuraus lauseesta 2.19, koska F^∞ on metristyvä ja kompakti aliavaruus ja $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_{F^\infty}$. Invarianttiutta varten riittää lemman 5.13 nojalla todeta, että $\mu(\sigma^{-1}[\mathbf{a}]) = \mu([\mathbf{a}])$ mielivaltaisella sylinterillä $[\mathbf{a}]$. Koska jokaisen sylinterin $[\mathbf{a}]$ ja sen alkukuvan $\sigma^{-1}[\mathbf{a}]$ karakteristisen funktioiden rajoittumat joukkoon F^∞ ovat jatkuvia, niin välttämättä $\mu_{n_j}([\mathbf{a}]) \to \mu([\mathbf{a}])$ ja $\mu_{n_j}(\sigma^{-1}[\mathbf{a}]) \to \mu(\sigma^{-1}[\mathbf{a}])$, kun $j \to \infty$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma^{-1}[\mathbf{a}]) - \mu([\mathbf{a}]) &= \lim_{j\to\infty}\left(\nu_{n_j}(\sigma^{-1}[\mathbf{a}]) - \nu_{n_j}([\mathbf{a}])\right) \\
&= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\left(\nu_{n_j}(\sigma^{-n_j}[\mathbf{a}]) - \nu_{n_j}([\mathbf{a}])\right) = 0.
\end{aligned}$$

Tässä ν_n on kuten määritelmässä 5.31. □

Lemmassa 5.35 oleva mitta μ on nyt lemmassa 5.30 etsitty mitta. Ennen kuin voidaan todeta tämä, tarvitaan seuraavaa teknistä tulosta liittyen indeksijonon $\{0,\dots,n-1\}$ partitiointiin, katso [25, Huomatus 2 s.188]. Reaaliluvulle $u \in \mathbb{R}$ merkitään jatkossa tavanomaisesti kokonaislukuosaa $\lfloor u\rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq u\}$.

Lemma 5.36.
Olkoon $m, n \in \mathbb{N}$ siten, että $1 < m < n$. Määritellään jokaiselle $0 \le j \le m-1$ $a(j) = \lfloor \frac{n-j}{m} \rfloor$. Tällöin seuraavat ovat voimassa.

(i) Luvut $\{j + mr : r = 0, \dots, a(j) - 1,\ j = 0, \dots, m-1\}$ ovat keskenään erisuuria ja alle luvun $n - m$.

(ii) Jokaiselle $j = 0, \dots, m-1$ pätee

$$\{0, \dots, n-1\} = S_j \sqcup \bigsqcup_{r=0}^{a(j)-1} \{j + mr + i : i = 0, \dots, m-1\},$$

missä $\# S_j < 2m$.

Todistus.
Kohtaa (i) varten oletetaan, että $j_1 + mr_1 = j_2 + mr_2$, joillain $0 \le j_i \le m-1$ ja $0 \le r_i \le a(j_i) - 1$, $i = 1, 2$. Mutta tällöin m jakaa luvun $|j_1 - j_2|$, joten välttämättä $j_1 = j_2$ ja siten $r_1 = r_2$. Lisäksi jokaiselle $0 \le j \le m-1$ ja $0 \le r \le a(j) - 1$ saadaan arvio

$$j + mr \le j + m\alpha(j) - m \le j + \frac{n-j}{m} m - m = n - m.$$

Kohdassa (ii) on nyt riittävää todeta, että $\# S_j < 2m$. Koska

$$S_j = \{0, \dots, j-1, a(j)m + j, \dots, n-1\}$$

tapauksessa $j > 0$ ja $S_0 = \{a(0)m, \dots, n-1\}$, niin

$$\# S_j = n - a(j)m = n - \left\lfloor \frac{n-j}{m} \right\rfloor m \le n - \left(\frac{n-j}{m} - 1 \right) m = j + m < 2m.$$

□

Lopulta voidaan todistaa lemma 5.30. Vertaa todistukseen [25, Lause 9.10 s.218–221].

Lemman 5.30 todistus.
Olkoon ν_n ja μ_n kaikille $n \in \mathbb{N}$ kuten määritelmässä 5.31 ja 5.33 ja mitta μ kuten lemmassa 5.35. Olkoon $(\mu_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ osajono, joka suppenee heikosti mittaan μ. Kiinnitetään luonnolliset luvut $1 < m < n$. Nyt lemman 5.36 kohdan (ii) nojalla voidaan kirjoittaa jokaiselle $0 \le j \le m-1$ partitio α^n muodossa

$$\alpha^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} \sigma^{-k} \alpha = \bigvee_{r=0}^{a(j)-1} \sigma^{-j-mr} \alpha^m \vee \bigvee_{l \in S_j} \sigma^{-l} \alpha, \tag{1}$$

missä $\# S_j < 2m$. Entropialle $H\left(\bigvee_{l \in S_j} \sigma^{-l} \alpha, \nu_n \right)$ saadaan seuraava arvio

$$\begin{aligned} H\left(\bigvee_{l \in S_j} \sigma^{-l} \alpha, \nu_n \right) &\le \sum_{l \in S_j} H(\sigma^{-l} \alpha, \nu_n) \\ &= - \sum_{l \in S_j} \sum_{a \in \mathbb{N}} \nu_n(\sigma^{-l}[a]) \log \nu_n(\sigma^{-l}[a]) \\ &= - \sum_{l \in S_j} \sum_{a \in F} \nu_n(\sigma^{-l}[a]) \log \nu_n(\sigma^{-l}[a]) \\ &\le \# S_j \# F \le 2m \# F. \end{aligned} \tag{2}$$

Seuraavaksi jokaiselle $0 \le j \le m-1$ saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log Z_n(F^\infty, f) &\overset{a)}{=} \frac{1}{n} H(\alpha^n, \nu_n) + \frac{1}{n} \int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \, \mathrm{d}\nu_n \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{r=0}^{a(j)-1} \sigma^{-r-mj} \alpha^m \vee \bigvee_{l \in S_j} \sigma^{-l} \alpha, \nu_n \right) + \frac{1}{n} \int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \, \mathrm{d}\nu_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{a(j)-1} H\left(\sigma^{-r-mj}\alpha^m, \nu_n\right) + \frac{1}{n}\sum_{l\in S_j} H\left(\sigma^{-l}\alpha, \nu_n\right) + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \ \mathrm{d}\nu_n \\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{a(j)-1} H\left(\alpha^m, \nu_n \circ \sigma^{-r-mj}\right) + \frac{1}{n}\sum_{l\in S_j} H\left(\sigma^{-l}\alpha, \nu_n\right) + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \ \mathrm{d}\nu_n \\
&\overset{(2)}{\le} \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{a(j)-1} H\left(\alpha^m, \nu_n \circ \sigma^{-r-mj}\right) + \frac{2m\#F}{n} + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \ \mathrm{d}\nu_n.
\end{aligned}
$$

Tässä yhtäsuuruus a) seuraa lemmasta 5.32. Summaamalla tämä arvio yli lukujen $j = 0, \ldots, \mathrm{m}-1$ saadaan edelleen

$$
\begin{aligned}
&\frac{m}{n}\log Z_n(F^\infty, f) \\
&\le \frac{m}{n}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{a(j)-1} H\left(\alpha^m, \nu_n \circ \sigma^{-r-mj}\right) + \frac{2m^2\#F}{n} + \frac{m}{n}\int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \ \mathrm{d}\nu_n \\
&\overset{b)}{\le} \frac{m}{n}\sum_{i=0}^{n-1} H\left(\alpha^m, \nu_n \circ \sigma^{-i}\right) + \frac{2m^2\#F}{n} + \frac{m}{n}\int_{\mathbb{N}^\infty} S_n f \ \mathrm{d}\nu_n \\
&\overset{c)}{=} mH\left(\alpha^m, \mu_n\right) + \frac{2m^2\#F}{n} + m\int_{\mathbb{N}^\infty} f \ \mathrm{d}\mu_n.
\end{aligned}
$$

Epäyhtälö b) seuraa lemman 5.36 kohdasta (i) ja yhtäsuuruus c) lemman 5.34 molemmista kohdista. Korvaamalla n osajonon indeksillä $n_j > m$ ja antamalla $j \to \infty$ saadaan heikolla konvergenssilla

$$
mP(F^\infty, f) \le H(\alpha^m, \mu) + m\int_{\mathbb{N}^\infty} f \ \mathrm{d}\mu.
$$

Nyt jakamalla luvulla m ja antamalla $m \to \infty$ on lemma todistettu. □

Variaatioperiaate seuraa siten lemmoista 5.29, 5.19 ja 5.30.

5.6 Gibbsin mitat

Kappaleessa määritellään Gibbsin mitat jonoavaruuden vasemman siirron dynamiikassa ja tarkastellaan lyhyesti niiden joitain ominaisuuksia. Tarkastelu pohjautuu lähteen [20] kappaleeseen 2.2. Merkitään lokaalisti Hölderien ja äärellispaineisten potentiaalien kokoelmaa symbolilla $\mathcal{U}$. Merkitään edelleen lokaalisti Höldereiden ja rajoitettujen potentiaalien kokoelmaa tai luokkaa symbolilla $\mathcal{H}_B$. Aloitetaan antamalla Gibbsin mitan muodollinen määritelmä.

Määritelmä 5.37 (**Gibbsin mitta**).
Mitta $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ on Gibbsin mitta, mikäli löytyy potentiaali $\varphi \in \mathcal{U}$ ja $Q \ge 1$ siten, että kaikille $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ ja $\mathbf{b} \in [\mathbf{a}]$ pätee

$$
Q^{-1}e^{S_n\varphi(\mathbf{b})-nP(\varphi)} \le \mu([\mathbf{a}]) \le Qe^{S_n\varphi(\mathbf{b})-nP(\varphi)}. \tag{5.5}
$$

Jos $P(\varphi) = 0$, niin sylinterin mitta $\mu([\mathbf{a}])$ vertautuu suoraan *painoon* $e^{S_n\varphi(\mathbf{b})}$, missä $\mathbf{b} \in [\mathbf{a}]$. Potentiaaliin $\varphi \in \mathcal{U}$ mahdollisesti liittyvää Gibbsin mittaa merkitään jatkossa μ_φ. Määritelmä on nyt rajattu vain σ-invariantteihin mittoihin mutta se voitaisiin laajentaa Borel-todennäköisyys mittojen joukkoon. Määritelmän etuna on nyt se, että potentiaaliin mahdollisesti liittyvä Gibbsin mitta voidaan osoittaa yksikäsitteiseksi ja ergodiseksi, katso [20, Lause 2.2.4 s.14].

Lause 5.38.
Mikäli potentiaalilla $\varphi \in \mathcal{U}$ on Gibbsin mitta μ_φ, niin se on yksikäsitteinen ja ergodinen.

Usein potentiaalin Gibbsin mitta esiintyy tasapainotilana, todistus kuten [20, Lause 2.2.9 s.24].

Lause 5.39.
Mikäli potentiaalilla $\varphi \in \mathcal{U}$ on Gibbsin mitta μ_φ, jolle $\int_{\mathbb{N}^\infty} \varphi \,\mathrm{d}\mu_\varphi > -\infty$, niin μ_φ on φ:n tasapainotila.

Todistus.
Variaatioperiaatteesta ja $\mathcal{U}$:n määritelmästä nähdään, että φ on μ_φ-integroituva ja $h(\alpha, \mu_\varphi) < \infty$. Tällöin lauseen 5.26 nojalla $h(\alpha, \mu_\varphi) = h_{\mu_\varphi}$ ja koska μ_φ on ergodinen, niin lauseen 5.27 nojalla μ_φ -melkein kaikilla $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$

$$h(\alpha, \mu_\varphi) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu_\varphi([\mathbf{a}|_n]). \tag{1}$$

Edelleen ergodisuuslauseen nojalla μ_φ-melkein kaikilla $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(\mathbf{a}) = \int_{\mathbb{N}^\infty} \varphi \,\mathrm{d}\mu_\varphi. \tag{2}$$

Siispä

$$\begin{aligned}
h(\alpha, \mu_\varphi) &\overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu_\varphi([\mathbf{a}|_n]) \\
&\overset{a)}{\geq} \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \left(Q e^{S_n(\mathbf{a}) - nP(\varphi)} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n} \log Q - \frac{1}{n} S_n(\mathbf{a}) + P(\varphi) \right) \\
&\overset{(2)}{=} - \int_{\mathbb{N}^\infty} \varphi \,\mathrm{d}\mu_\varphi + P(\varphi).
\end{aligned}$$

Tässä epäyhtälö a) seuraa suoraan Gibbsin mitan määritelmästä ja Q on määritelmän mukainen vakio. Koska integraali $\int_{\mathbb{N}^\infty} \varphi \,\mathrm{d}\mu_\varphi$ on äärellinen, saadaan $h(\alpha, \mu_\varphi) + \int_{\mathbb{N}^\infty} \varphi \,\mathrm{d}\mu_\varphi \geq P(\varphi)$. Yhtäsuuruus seuraa siten variaatioperiaatteesta. □

Tasapainotila voidaan osoittaa myös yksikäsitteiseksi, katso edelleen [20, Lause 2.2.9 s.24]. Sopivissa tilanteissa Gibbsin mitan entropia voidaan esittää integraalina negatiivisen potentiaalin yli.

Lemma 5.40.
Olkoon $\varphi \in \mathcal{U}$ ja sille Gibbsin mitta μ_φ. Mikäli $P(\varphi) = 0$ ja $H(\alpha, \mu_\varphi) < \infty$, niin

$$h_{\mu_\varphi} = - \int_{\mathbb{N}^\infty} \varphi \,\mathrm{d}\mu_\varphi.$$

Todistus.
Väite seuraa lauseesta 5.39, mikäli $\int_{\mathbb{N}^\infty} \varphi \,\mathrm{d}\mu_\varphi > -\infty$. Integraalille on helppo saada arvio

$$\int_{\mathbb{N}^\infty} \varphi \,\mathrm{d}\mu_\varphi \geq \sum_{a\in\mathbb{N}} \mu_\varphi([a]) \inf_{\mathbf{b}\in[a]} \varphi(\mathbf{b}). \tag{1}$$

Olkoon Q määritelmän 5.37 mukainen vakio. Tällöin on helppo nähdä määritelmästä 5.37, että jokaiselle $a \in \mathbb{N}$ pätee $\log \mu([a]) \leq \log Q + \inf_{\mathbf{b}\in[a]} \varphi(\mathbf{b})$. Soveltamalla tätä arvioon (1) saadaan

$$\int_{\mathbb{N}^\infty} \varphi \,\mathrm{d}\mu_\varphi \geq -\log Q + \sum_{a\in\mathbb{N}} \mu_\varphi([a]) \log \mu([a]) = -\log Q - H(\alpha, \mu_\varphi) > -\infty.$$

□

Esimerkkeinä Gibbsin mitoista toimivat tulomitan tyyppiset *Bernoullin mitat.* Mittaa $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$ kutsutaan Bernoullin mitaksi, mikäli löytyy todennäköisyysjakauma, eli luvut $p_1, p_2, \ldots \in]0, 1]$, joille $\sum_{i=1}^\infty p_i = 1$, siten, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja sanalle $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ sylinterin mitta on $\mu([\mathbf{a}]) = \prod_{i=1}^n p_{a_i}$. Tämä on helppo todeta σ-invariantiksi. Määrittelemällä potentiaali $\varphi : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{R}$, missä kaikille $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$ asetetaan $\varphi(\mathbf{a}) = \log p_{a_1}$, nähdään se lokaalisti Hölderiksi ja $P(\varphi) = 0$. Tällöin jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ ja $\mathbf{b} \in [\mathbf{a}]$ saadaan

$$\mu([\mathbf{a}]) = \prod_{i=1}^n p_{a_i} = e^{S_n\varphi(\mathbf{b})}.$$

Siispä $\mu = \mu_\varphi$ ja arvio (5.5) muuttuu tarkaksi.

Aiemmin todettiin, että Gibbsin mitta potentiaalille on yksikäsitteinen, jos se on olemassa. Kääntäen voidaan kysyä, minkälaiset potentiaalit luokassa $\mathcal{U}$ jakavat saman Gibbsin mitan. Sanotaan, että $f, g : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{R}$ ovat keskenään *kohomologiset* luokassa $\mathcal{H}_B$, mikäli löytyy $h \in \mathcal{H}_B$ siten, että $f - g = h - h \circ \sigma$. Tämän konseptin avulla voidaan vastata kysymykseen täsmällisesti seuraavan lemman avulla, katso [20, Lause 2.2.7 s.19]. Todistus noudattelee tässä annettua todistusta.

Lemma 5.41.
Potentiaaleilla $\varphi, \phi \in \mathcal{U}$ on yhteinen Gibbsin mitta (mikäli se on olemassa) täsmälleen silloin, kun $\varphi - \phi$ on kohomologinen vakion kanssa luokassa $\mathcal{H}_B$, eli $\varphi = \phi + h - h \circ \sigma + c$, missä $h \in \mathcal{H}_B$ ja $c \in \mathbb{R}$.

Todistus.
Todetaan, ehdon riittävyys. Ensinnäkin on helppo tarkistaa, että yhdistetty kuvaus $h \circ \sigma$ on edelleen luokassa $\mathcal{H}_B$. Tällöin mikäli a priori oletetaan, että vain $\phi \in \mathcal{U}$, niin mielivaltainen $\varphi = \phi + h - h \circ \sigma + c$, on lokaalisti Hölder. Edelleen kaikille $n \in \mathbb{N}$ $S_n\varphi = S_n\phi + h - h \circ \sigma^n + nc$ ja siten

$$Z_n(\mathbb{N}^\infty, \varphi) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} e^{S_n\varphi(\mathbf{a}^\infty)} = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} e^{S_n\phi(\mathbf{a}^\infty) + h(\mathbf{a}^\infty) - h(\mathbf{a}^\infty) + nc} = e^{nc} Z_n(\mathbb{N}^\infty, \phi).$$

Tällöin paineen määritelmän nojalla $P(\phi) = P(\varphi) - c$, joten $\varphi \in \mathcal{U}$. Lisäksi saadaan arvio

$$S_n\phi - nP(\phi) - 2\sup|h| \le S_n\varphi - nP(\varphi) \le S_n\phi - nP(\phi) + 2\sup|h|. \tag{1}$$

Mikäli μ_ϕ on olemassa ja $Q \ge 1$ on määritelmän 5.37 mukainen vakio, niin tällöin valitsemalla $Q' = Qe^{2\sup|h|}$ nähdään arvion (1) avulla, että

$$Q'^{-1} e^{S_n\phi(\mathbf{b}) - nP(\phi)} \le \mu_\phi([\mathbf{a}]) \le Q' e^{S_n\phi(\mathbf{b}) - nP(\phi)}.$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ ja $\mathbf{b} \in [\mathbf{a}]$. Tällöin $\mu_\varphi = \mu_\varphi$.
Todetaan seuraavaksi ehdon välttämättömyys. Olkoon sitä varten $\varphi, \phi \in \mathcal{U}$, joille $\mu_\varphi = \mu_\phi$. Korvaamalla nämä potentiaaleilla $\varphi - P(\varphi)$ ja $\phi - P(\phi)$ ja käyttämällä todistuksen alkuosaa voidaan olettaa, että $P(\varphi) = 0 = P(\phi)$. Olkoon potentiaalien Gibbsin mittoihin liittyvät vakiot $Q_\varphi, Q_\phi \ge 1$ kuten määritemässä 5.37. Merkitsemällä $Q = \max\{Q_\varphi, Q_\phi\}$ ja käyttämällä oletusta $\mu_\varphi = \mu_\varphi$ saadaan kaikille $n \in \mathbb{N}$

$$-2\log Q \le S_n(\varphi - \phi) \le 2\log Q. \tag{2}$$

Koska jokaisella $k, n \in \mathbb{N}$ ja $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ pätee $S_{kn}(\varphi - \phi)(\mathbf{a}^\infty) = kS_n(\varphi - \phi)(\mathbf{a}^\infty)$, niin käyttämällä arviota (2) ja antamalla $k \to \infty$ päätellään, että

$$S_n(\varphi - \phi)(\mathbf{a}^\infty) = 0. \tag{3}$$

Lemman 5.5 nojalla löytyy sana $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^\infty$, jolla on tiheä rata. Erityisesti joukko $\Gamma = \{\sigma\mathbf{v}, \sigma^2\mathbf{v}, \dots\}$ on tiheä jonoavaruudessa. Määritellään kuvaus $h^* : \Gamma \to \mathbb{R}$ asettamalla $h^*(\sigma^n\mathbf{v}) = S_n(\phi - \varphi)(\mathbf{v})$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Koska Γ koostuu keskenään erillisistä pisteistä, on h^* hyvin asetettu. Arviosta (2) nähdään suoraan, että kyseessä on rajoitettu kuvaus. Lisäksi jokaiselle $\sigma^n\mathbf{v}$

$$h^*(\sigma^n\mathbf{v}) - (h^* \circ \sigma)(\sigma^n\mathbf{v}) = -(\phi - \varphi)(\sigma^n\mathbf{v}) = \varphi(\sigma^n\mathbf{v}) - \phi(\sigma^n\mathbf{v}). \tag{4}$$

Todetaan h^* lokaalisti Hölderiksi. Olkoon sitä varten mielivaltaiset $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ ja $\sigma^k\mathbf{v}, \sigma^l\mathbf{v} \in [\mathbf{a}]$, joillain $k, l \in \mathbb{N}$. Voidaan olettaa, että $k > l$. Asetetaan sana $\mathbf{w} = (\mathbf{v}|_l, \sigma^l\mathbf{v}|_{k-l}^\infty) = (v_1, \dots, v_l, (v_{l+1}, \dots, v_k)^\infty)$. Tällöin nähdään, että

$$\sum_{j=l}^{k-1} (\phi - \varphi)(\sigma^j\mathbf{w}) = -S_{k-l}(\varphi - \phi)(\sigma^l\mathbf{v}|_{k-l}^\infty) \overset{(3)}{=} 0. \tag{5}$$

Tutkimalla erikseen tapaukset $n \le k-l$ ja $n > k-l$ nähdään, että pätee $\sigma^j(\mathbf{v}), \sigma^j(\mathbf{w}) \in [(v_{j+1}, \dots, v_k, a_1, \dots, a_n)]$ jokaisella $j = 1, \dots, k-1$ $(\star)$. Olkoon $C_\phi, C_\varphi \ge 0$ ja $\delta_\phi, \delta_\varphi \in]0,1[$ potentiaalien ϕ ja φ lokaalin Hölder

-jatkuvuuden mukaiset vakiot. Merkitään $C = \max\{C_\phi, C_\varphi\}$ ja $\delta = \max\{\delta_\phi, \delta_\varphi\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|h^*(\sigma^k \mathbf{v}) - h^*(\sigma^l \mathbf{v})| &= \left| \sum_{j=l}^{k-1} (\phi - \varphi)(\sigma^j \mathbf{v}) \right| \\
&\overset{(5)}{=} \left| \sum_{j=l}^{k-1} (\phi - \varphi)(\sigma^j \mathbf{v}) - \sum_{j=l}^{k-1} (\phi - \varphi)(\sigma^j \mathbf{w}) \right| \\
&\leq \sum_{j=l}^{k-1} |\phi(\sigma^j \mathbf{v}) - \phi(\sigma^j \mathbf{w})| + \sum_{j=l}^{k-1} |\varphi(\sigma^j \mathbf{v}) - \varphi(\sigma^j \mathbf{w})| \\
&\overset{(\star)}{\leq} \sum_{j=l}^{k-1} C_\phi \delta_\phi^{n+k-j} + \sum_{j=l}^{k-1} C_\varphi \delta_\varphi^{n+k-j} \leq \frac{2C}{1-\delta} \delta^n.
\end{aligned}$$

Siispä h^* on lokaalisti Hölder ja siten tasaisesti jatkuva sylintereiden tiheissä osissa, jolloin se voidaan laajentaa lemman 2.12 nojalla jatkuvaksi (tasainen jatkuvuus sylintereissä) ja yksikäsitteiseksi kuvaukseksi $h : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{R}$. Tällöin h perii tiheässä joukossa olevalta rajoittumalta h^* rajoittuneisuuden ja lokaalin Hölder-jatkuvuuden, eli $h \in \mathcal{H}_B$. Lisäksi yhtälö (4) pätee tiheässä joukossa, jolloin se laajenee koko jonoavaruuteen. Tällöin φ ja ϕ ovat keskenään kohomologisia luokassa $\mathcal{H}_B$. □

On helppoa nähdä, että relaatio $\varphi \sim \phi$, kun erotus $\varphi - \phi$ on kohomologinen vakion kanssa luokassa $\mathcal{H}_B$, on ekvivalenssirelaatio joukossa $\mathcal{U}$. Merkitään vastaavaa tekijäjoukkoa tavanomaisesti $\mathcal{U}/\sim$ ja potentiaaliin $\varphi \in \mathcal{U}$ liittyvää ekvivalenssiluokkaa symbolilla $[\varphi] \in \mathcal{U}/\sim$. Huomaa, että näillä ei ole mitään algebrallista rakennetta, eli tekijäjoukkoon $\mathcal{U}/\sim$ ei ole määritelty laskutoimituksia. Lemman 5.41 nojalla potentiaalit jakavat saman Gibbsin mitan täsmälleen silloin, kun ne kuuluvat samaan eksivalenssiluokkaan. Myöhemmin nähdään, että jokaiselle luokalle löytyy Gibbsin mitta.

5.7 Ruellen siirto-operaattori

Tässä kappaleessa määritellään jokaiselle potentiaalille $\varphi \in \mathcal{U}$ Ruellen siirto-operaattori $\mathcal{L}_\varphi$ jonoavaruuden jatkuvien ja rajoitettujen kuvausten avaruudelle ja tarkastellaan niiden yhteyttä Gibbsin mittoihin. Ensimmäisessä pykälässä tarkastellaan siirto-operaattorien joitain perusominaisuuksia. Toisessa osiossa määritellään siirto-operaattoreille duaalioperaattorit ja osoitetaan näiden avulla, että jokaisessa luokassa $[\varphi] \in \mathcal{U}/\sim$ on Gibbsin mitta ja sopiva potentiaali, johon liittyvälle duaalioperaattorille kyseisen Gibbsin mitan integraalioperaattori on invariantti.

5.7.1 Ruellen siirto-operaattori

Palataan tutkimaan jatkuvien ja rajoitettujen kuvausten $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{R}$ reaalikertoimista vektoriavaruutta $C_B := C_B(\mathbb{N}^\infty; \mathbb{R})$. Muistetaan, että tämä varustettuna tasaisen konvergenssin normilla $\|\cdot\|_\infty$ tekee siitä Banach-avaruuden. Tarkastellaan edelleen potentiaalia $\varphi \in \mathcal{U}$ ja kuvausta $g \in C_B$. Asetetaan jokaiselle $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$ muodollisesti sarja

$$\sum_{a=1}^{\infty} e^{\varphi((a,\mathbf{b}))} f((a,\mathbf{a})). \tag{5.6}$$

Lokaalin Hölder-jatkuvuuden nojalla $\varphi((a,\mathbf{a})) \leq C\delta + \varphi((a)^\infty)$, missä C ja δ ovat määritelmän 5.7 mukaiset vakiot potentiaalille φ. Tällöin saadaan arvio

$$\sum_{a=1}^{\infty} |e^{\varphi((a,\mathbf{a}))} g((a,\mathbf{a}))| \leq \sup |g| e^{C\delta} Z_1(\mathbb{N}^\infty, \varphi).$$

Koska $P(\varphi) < \infty$, niin lemman 5.18 nojalla $Z_1(\mathbb{N}^\infty, \varphi) < \infty$ ja sarja (5.6) suppenee itseisesti ja on tasaisesti rajoitettu. Lisäksi nähdään, että suppeneminen on tasaista. Tällöin sarjaopin perussovelluksena saadaan, että kuvaus

$$\mathbf{a} \mapsto \sum_{a=1}^{\infty} e^{\varphi((a,\mathbf{a}))} g((a,\mathbf{a}))$$

on jatkuva ja rajoitettu. Koska summausjärjestys on vapaa, niin sarja (5.6) voidaan kirjoittaa nyt vaihtoehtoisessa muodossa

$$\sum_{\mathbf{b}\in\sigma^{-1}\{\mathbf{a}\}} e^{\varphi(\mathbf{b})}g(\mathbf{b}).$$

Tämän tarkastelun perusteella voidaan määritellä Ruellen siirto-operaattori.

Määritelmä 5.42 (Ruellen siirto-operaattori).
Olkoon potentiaali $\varphi \in \mathcal{U}$. Asetetaan φ:n Ruellen siirto-operaattori $\mathcal{L}_\varphi : C_B \to C_B$,

$$\mathcal{L}_\varphi g(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{b}\in\sigma^{-1}\{\mathbf{a}\}} e^{\varphi(\mathbf{b})}g(\mathbf{b}) \quad \textit{kaikille } g \in C_B \textit{ ja } \mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty.$$

Ruellen siirto-operaattori on määritelmän perusteella lineaarikuvaus avaruudessa C_B. Tällöin sen operaattorinormille saadaan aiemman tarkastelun perusteella arvio

$$\|\mathcal{L}_\varphi\|_{op} \leq e^{C\delta} Z_1(\mathbb{N}^\infty, \varphi) < \infty,$$

jolloin se on jatkuva operaattori normiavaruudessa $(C_B, \|\cdot\|_\infty)$. Lisäksi, jos $g \geq 0$, niin myös $\mathcal{L}_\varphi g \geq 0$, joten kyseessä on positiivinen operaattori.
Mikäli operaattorilla $\mathcal{L}_\varphi$ operoidaan kaksi kertaa kuvaukseen $g \in C_B$, niin saadaan kaikille $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$

$$\begin{aligned}
{\mathcal{L}_\varphi}^2 g(\mathbf{a}) &= \sum_{\mathbf{b}'\in\sigma^{-1}\{\mathbf{a}\}} e^{\varphi(\mathbf{b}')}\mathcal{L}_\varphi g(\mathbf{b}') \\
&= \sum_{\mathbf{b}'\in\sigma^{-1}\{\mathbf{a}\}} e^{\varphi(\mathbf{b}')} \sum_{\mathbf{b}\in\sigma^{-1}\{\mathbf{b}\}} e^{\varphi(\mathbf{b})}g(\mathbf{b}) \\
&= \sum_{\mathbf{b}'\in\sigma^{-1}\{\mathbf{a}\}} \sum_{\mathbf{b}\in\sigma^{-1}\{\mathbf{b}'\}} e^{\varphi(\mathbf{b})+\varphi(\mathbf{b}')}g(\mathbf{b}) \\
&= \sum_{\mathbf{b}\in\sigma^{-2}\{\mathbf{a}\}} e^{\varphi(\mathbf{b})+\varphi(\sigma\mathbf{b})}g(\mathbf{b}) \\
&= \sum_{\mathbf{b}\in\sigma^{-2}\{\mathbf{a}\}} e^{S_2\varphi(\mathbf{b})}g(\mathbf{b}) \\
&= \sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{N}^2} e^{S_2\varphi((\mathbf{c},\mathbf{a}))}g((\mathbf{c},\mathbf{a})).
\end{aligned}$$

Huomaa, että summausjärjestys on vapaa johtuen tuplasarjan itseisestä suppenemisesta. Induktiolla voidaan edelleen yleistää tulos mielivaltaisen monelle peräkkäiselle operaatiolle.

Lemma 5.43.
Olkoon $\varphi \in \mathcal{U}$, $g \in C_B$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin kaikilla $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$

$${\mathcal{L}_\varphi}^n g(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{b}\in\sigma^{-n}\{\mathbf{a}\}} e^{S_n\varphi(\mathbf{b})}g(\mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{N}^n} e^{S_n\varphi((\mathbf{c},\mathbf{a}))}g((\mathbf{c},\mathbf{a})).$$

Tätä perustulosta hyödynnetään jatkossa ahkerasti siihen viittaamatta. Funktiojonon $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tasainen konvergenssi, eli konvergenssi normin mielessä, funktioon g avaruudessa C_B takaa siirto-operaattorin $\mathcal{L}_\varphi$ jatkuvuuden nojalla kuvajonon $(\mathcal{L}_\varphi g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tasaisen konvergenssin kuvaan $\mathcal{L}_\varphi g$. On kuitenkin helppo nähdä, että pelkkä pistettäinen konvergenssi takaa myös pisteittäisen konvergenssin kuvapuolella.

Lemma 5.44.
Olkoon $\varphi \in \mathcal{U}$ ja $g \in C_B$. Mikäli rajoitettu funktiojono $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_B$ konvergoi funktioon $g \in C_B$ pisteittäin, niin $\mathcal{L}_\varphi g_n \to \mathcal{L}_\varphi g$ pisteittäin, kun $n \to \infty$.

Todennäköisyysjakaumaan $p_1, p_2, p_3 \ldots \in \,]0,1]$ liittyvälle potentiaalille φ, missä $\varphi(\mathbf{a}) = p_{a_1}$, on helppo todeta, että $\mathcal{L}_\varphi 1 = 1$. Nyt siis 1 tarkoittaa ykköskuvausta $\mathbf{a} \mapsto 1$. Tarkastellaan yleisemmin potentiaaleja $\varphi \in \mathcal{U}$, joille $\mathcal{L}_\varphi 1 = 1$. Seuraavat ominaisuudet ovat näille aina voimassa.

Lemma 5.45.
Olkoon $\varphi \in \mathcal{U}$ siten, että $\mathcal{L}_\varphi 1 = 1$. Tällöin $\varphi \leq 0$ ja $P(\varphi) = 0$.

Todistus.
Kiinnitetään mielivaltainen $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$. Nyt $1 = \mathcal{L}_\varphi 1(\sigma\mathbf{a}) = \sum_{b=1}^\infty e^{\varphi((b,\sigma\mathbf{a}))}$, jolloin erityisesti $1 \geq e^{\varphi((a_1,\sigma\mathbf{a}))} = e^{\varphi(\mathbf{a})}$. Siten välttämättä $\varphi \leq 0$. Todetaan sitten, että $P(\varphi) = 0$. Kiinnitetään $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$. Tällöin

$$1 = \mathcal{L}_\varphi{}^n 1(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n} e^{S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{a}))}$$

ja siten saadaan arvio $e^{-\mathrm{Var}(\varphi)} \leq Z_n(\mathbb{N}, \varphi) \leq e^{\mathrm{Var}(\varphi)}$. Ottamalla tästä logaritmi puolittain, jakamalla luvulla n ja antamalla $n \to \infty$ nähdään paineen määritelmästä, että $P(\varphi) = 0$. □

Pykälän lopuksi tavoitteena on osoittaa, että jokaisessa ekvivalenssiluokassa $[\varphi] \in \mathcal{U} \,/ \sim$ on potentiaali $\phi \in [\varphi]$, jolle $P(\phi) = 0$ ja $\mathcal{L}_\phi 1 = 1$.

Pykälän loppuosan tarkastelu nojautuu pääosin lähteen [20] kappaleeseen 2.4, katso myös [23, Lemma 1 s.558]. Tutkitaan aluksi hieman tarkemmin lokaalisti Höldereitä potentiaaleja. Merkitään symbolilla $\mathcal{H}_\delta$ kaikkien niiden lokaalisti Hölderien potentiaalien kokoelmaa, jotka ovat jatkuvia vakiolla $\delta \in]0,1[$, ts. jokaiselle $\varphi \in \mathcal{H}_\delta$ löytyy $C \in [0,\infty[$ siten, että $\mathrm{Var}_n(\varphi) \leq C\delta^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jokaiselle potentiaalille asetetaan

$$V_\delta(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}_n(f)\delta^{-n}.$$

Huomaa, että nyt voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi

$$V_\delta(f) = \inf\{C \in [0,\infty] \ : \mathrm{Var}_n(f) \leq C\delta^n \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin $V_\delta(f) < \infty$ täsmälleen silloin, kun $f \in \mathcal{H}_\delta$. Seuraavaksi todetaan tekninen aputulos.

Lemma 5.46.
Olkoon $\delta \in]0,1[$ ja $\varphi \in \mathcal{H}_\delta$ siten, että $P(\varphi) = 0$. Tällöin jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pätee

(i)
$$e^{-3\,Var(\varphi)} \leq \mathcal{L}_\varphi{}^n 1 \leq e^{3\,Var(\varphi)} \quad ja$$

(ii)
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\delta(\mathcal{L}_\varphi{}^n 1) < \infty.$$

Iteroitu kuvausperhe $\{\mathcal{L}_\varphi^n 1\}_{n\in\mathbb{N}}$ on siten rajoitettu ja tasaisesti yhtäjatkuva.

Todistus.
Koska $P(\varphi) = 0$, niin lemman 5.18 (ii) nojalla jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$e^{-2\mathrm{Var}(\varphi)} \leq Z_n(\mathbb{N}^\infty, \varphi) \leq e^{2\mathrm{Var}(\varphi)}. \tag{1}$$

Tällöin saadaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$ että

$$\begin{aligned} e^{-3\mathrm{Var}(\varphi)} &\overset{(1)}{\leq} e^{-\mathrm{Var}(\varphi)} Z_n(\mathbb{N}^\infty, \varphi) = \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n} e^{S_n\varphi(\mathbf{b}^\infty) - \mathrm{Var}(\varphi)} \\ &\leq \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n} e^{S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{a}))} = \mathcal{L}_\varphi{}^n 1(\mathbf{a}) \\ &\leq \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n} e^{S_n\varphi(\mathbf{b}^\infty) + \mathrm{Var}(\varphi)} = e^{\mathrm{Var}(\varphi)} Z_n(\mathbb{N}^\infty, \varphi) \\ &\overset{(1)}{\leq} e^{3\mathrm{Var}(\varphi)}. \end{aligned}$$

Siten yhtälö (i) on selvä. Yhtälöä (ii) varten hyödennetään perusanalyysistä seuraavaa tulosta: jokaiselle $c > 0$ löytyy vakio $M_c > 0$ siten, että kaikilla $t \in [-1,1]$

$$|1 - e^{ct}| \leq M_c|t|. \tag{2}$$

Kiinnitetään seuraavaksi $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^k$ ja $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [\mathbf{c}]$. Tällöin mielivaltaisilla $n \in \mathbb{N}^n$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned}|S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{v})) - S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{u}))| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi(\sigma^j(\mathbf{b},\mathbf{v})) - \varphi(\sigma^j(\mathbf{b},\mathbf{u}))| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} V_\delta(\varphi)\delta^{k+n-j} \leq V_\delta(\varphi)\frac{\delta}{1-\delta}\delta^k \\ &=: C(\varphi,\delta)\delta^k. \end{aligned} \tag{3}$$

Tällöin saadaan arvio

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}_\varphi{}^n 1(\mathbf{u}) - \mathcal{L}_\varphi{}^n 1(\mathbf{v})| &\leq \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n} \left| e^{S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{u}))} - e^{S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{v}))} \right| \\ &= \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n} e^{S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{u}))} \left| 1 - e^{S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{v}))-S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{u}))} \right| \\ &\overset{(2)+(3)}{\leq} \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n} e^{S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{u}))} M_{C(\varphi,\delta)}\delta^k \\ &= \mathcal{L}_\varphi{}^n 1(\mathbf{u}) M_{C(\varphi,\delta)}\delta^k \\ &\overset{(i)}{\leq} e^{3\mathrm{Var}(\varphi)} M_{C(\varphi,\delta)}\delta^k. \end{aligned}$$

Siten kaikille $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Var}_k(\mathcal{L}_\varphi{}^n 1) \leq e^{3\mathrm{Var}(\varphi)} M_{C(\varphi,\delta)}\delta^k$$

ja edelleen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\delta(\mathcal{L}_\varphi{}^n 1) \leq e^{3\mathrm{Var}(\varphi)} M_{C(\varphi,\delta)} < \infty.$$

□

Tämän avulla voidaan konstruoida jokaiselle nollapaineiselle potentiaalille $\varphi \in \mathcal{U}$ sopiva kuvaus joukosta $\mathcal{H}_B$, joka on operaattorin $\mathcal{L}_\varphi$ kiintopiste.

Lemma 5.47.
Olkoon $\varphi \in \mathcal{U}$ siten, että $P(\varphi) = 0$. Tällöin löytyy $h \in \mathcal{H}_B$ siten, $\mathcal{L}_\varphi h = h$ ja

$$e^{-3\,Var(\varphi)} \leq h \leq e^{3\,Var(\varphi)}.$$

Todistus.
Koska $\varphi \in \mathcal{U}$, niin löytyy $\delta \in]0,1[$ siten, että $\varphi \in \mathcal{H}_\delta$. Asetetaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ kuvaus $h_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_\varphi^k 1$, missä $\mathcal{L}_\varphi^0 1 = 1$. Tällöin lemman 5.46 nojalla on nähdään, että $e^{-3\mathrm{Var}(\varphi)} \leq h_n \leq e^{3\mathrm{Var}(\varphi)}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\delta(h_n) < \infty$. Siispä $(h_n)_{n=1}^\infty$ on rajoitettu jono tasaisesti yhtäjatkuvia funktioita. Koska jonoavaruus separoituu, niin lemman 2.13 nojalla löytyy osajono $(h_{n_k})_{k=1}^\infty$ ja tasaisesti jatkuva kuvaus $h : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{R}$ siten, että $h_{n_k} \to h$ pisteittäin, kun $k \to \infty$. Nyt on helppo todeta, että $e^{-\mathrm{Var}(\varphi)} \leq h \leq e^{3\mathrm{Var}(\varphi)}$ ja $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\delta(h) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} V_\delta(h_n) < \infty$ ja siten $h \in \mathcal{H}_B$. Tällöin lemman 5.44 nojalla $\mathcal{L}_\varphi h_{n_k} \to \mathcal{L}_\varphi h$ pisteittäin, kun $k \to \infty$. Erityisesti

$$h_{n_k} - \mathcal{L}_\varphi h_{n_k} \to h - \mathcal{L}_\varphi h$$

pisteittäin, kun $k \to \infty$. Toisaalta

$$\|h_{n_k} - \mathcal{L}_\varphi h_{n_k}\|_\infty = \frac{1}{n_k}\|1 - \mathcal{L}_\varphi^{n_k} 1\|_\infty \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mikä implikoi, että $h = \mathcal{L}_\varphi h$. □

Kiintopistettä hyödyntäen päästään haluttuun tulokseen.

Lause 5.48.
Jokaiselle $\varphi \in \mathcal{U}$ löytyy $\phi \in [\varphi]$ siten, että $\mathcal{L}_\phi 1 = 1$.

Todistus.
Koska $\varphi - P(\varphi) \in [\varphi]$ ja $P(\varphi - P(\varphi)) = 0$, niin voidaan olettaa $P(\varphi) = 0$. Lemman 5.47 nojalla löytyy $h \in \mathcal{H}_B$ siten, että $\mathcal{L}_\varphi h = h$ ja $\inf h > 0$. Asetetaan kuvaus $\phi = \varphi + \log h - \log h \circ \sigma$. Koska $h > 0$, niin ϕ on hyvin määritelty. Seuraavaksi todetaan, että $\log h \in \mathcal{H}_B$. Tätä varten tarvitaan seuraavaa arviota. Jokaiselle $x \in [1, \infty[$ pätee

$$\log(1 + x) \leq x. \tag{1}$$

Aluksi helppo todeta, että $\log h$ on rajoitettu. Edelleen $h \in \mathcal{H}_\delta$, jollain $\delta \in]0, 1[$. Kiinnitetään mielivaltaiset $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ ja $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in [\mathbf{a}]$. Voidaan olettaa, että $h(\mathbf{b}) \geq h(\mathbf{c})$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|\log h(\mathbf{b}) - \log h(\mathbf{c})| &= \log \frac{h(\mathbf{b})}{h(\mathbf{c})} \\
&\leq \log \frac{h(\mathbf{c}) + V_\delta(h)\delta^n}{h(\mathbf{c})} \\
&\leq \log \left(1 + \frac{V_\delta(h)}{\inf h}\delta^n\right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \frac{V_\delta(h)}{\inf h}\delta^n.
\end{aligned}$$

Tällöin voidaan päätellä, että $V_\delta(\log h) \leq \frac{V_\delta(h)}{\inf h}$ ja siten $\log h \in \mathcal{H}_\delta$. Siispä $\log h \in \mathcal{H}_B$. Nyt lemman 5.41 nojalla $\phi \in [\varphi]$. Kiinnitetään sitten mielivaltainen $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\phi 1(\mathbf{a}) &= \sum_{b \in \mathbb{N}} e^{\phi((b, \mathbf{a}))} = \sum_{b \in \mathbb{N}} e^{\varphi((b,\mathbf{a})) + \log h((b,\mathbf{a})) - \log h(\mathbf{a})} \\
&= \frac{1}{h(\mathbf{a})} \sum_{b \in \mathbb{N}} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} h((b, \mathbf{a})) = \frac{1}{h(\mathbf{a})} \mathcal{L}_\varphi h(\mathbf{a}) \\
&= \frac{1}{h(\mathbf{a})} h(\mathbf{a}) = 1.
\end{aligned}$$

□

5.7.2 Siirto-operaattorin ja Gibbsin mitan yhteys

Otsikon mukaisesti tässä pykälässä tarkastellaan, miten Gibbsin mitat liittyvät Ruellen siirto-operaattoriin. Aiemmin todettiin, että jokainen potentiaali mielivaltaisessa ekvivalenssiluokassa $[\varphi] \in \mathcal{U}/\sim$ jakaa saman Gibbsin mitan, mikäli se on olemassa. Pykälän päätavoite on nyt osoittaa, että jokaiselle ekvivalenssiluokalle $[\varphi]$ löytyy Gibbsin mitta μ ja $\phi \in [\varphi]$, jolle $\mathcal{L}_\phi 1 = 1$ ja

$$\int_{\mathbb{N}^\infty} \mathcal{L}_\phi g \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{N}^\infty} g \, \mathrm{d}\mu \tag{5.7}$$

jokaiselle $g \in C_B$. Muista, että normiavaruuden C_B normiduaali $C_B^* := C_B(\mathbb{N}^\infty; \mathbb{R})^*$ tarkoitti normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen jatkuvien lineaarikuvausten $C_B \to \mathbb{R}$ reaalikertoimista normiavaruutta, joka on varustettu tavanomaisella operaattorinormilla $\|\cdot\|_{op}$. Mielivaltaiselle mitalle $\mu \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}^\infty}$ määriteltiin integraalioperaattori $T_\mu \in C_B^*$ asettamalla yhtälön 2.5 mukaisesti jokaiselle $g \in C_B$

$$T_\mu(g) = \int_{\mathbb{N}^\infty} g \, \mathrm{d}\mu.$$

Mielivaltaiselle potentiaalille $\varphi \in \mathcal{U}$ duaalioperaattori $\mathcal{L}_\varphi^*$ normiduaaliin kuten aiemmin.

Määritelmä 5.49 (Duaalioperaattori).
Olkoon $\varphi \in \mathcal{U}$. Tällöin siirto-operaattorin $\mathcal{L}_\varphi$ duaalioperaattori $\mathcal{L}_\varphi^* : C_B^* \to C_B^*$ asetetaan jokaiselle $T \in C_B^*$

$$\mathcal{L}_\varphi^* T = T \circ \mathcal{L}_\varphi.$$

Duaalioperaattori on helppo todeta normiduaalin opertaattorinormin suhteen rajoitetuksi, eli jatkuvaksi, lineaarikuvaukseksi. Huomaa, että operoimalla n kertaa funktionaaliin T saadaan määritelmästä

$$\mathcal{L}_\varphi^{*\,n} T = T \circ \mathcal{L}_\varphi{}^n.$$

Seuraava havainto liittää duaalioperaattorin sopivat ominaisintegraalioperaattorit ja Gibbsin mitat yhteen, katso [20, Lause 2.2.8 s.28].

Lemma 5.50.
Olkoon $\varphi \in \mathcal{U}$. Mikäli löytyy $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ siten, että $\mathcal{L}_\varphi^* T_\mu = C T_\mu$ jollain $C \in \mathbb{R}$, niin $C = e^{P(\varphi)}$ ja $\mu = \mu_\varphi$.

Todistus.
Nyt jokaiselle $n \in \mathbb{N}$

$$C^n = C^n T_\mu(1) = \mathcal{L}_\varphi^{*\,n} T_\mu(1) = T_\mu(\mathcal{L}_\varphi{}^n 1) = \int_{\mathbb{N}^\infty} \mathcal{L}_\varphi{}^n 1 \; \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{N}^\infty} \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n} e^{S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{a}))} \; \mathrm{d}\mu(\mathbf{a}).$$

Tästä saadaan edelleen arvio

$$e^{-\mathrm{Var}(\varphi)} Z_n(\mathbb{N}^\infty, \varphi) \leq C^n \leq e^{\mathrm{Var}(\varphi)} Z_n(\mathbb{N}^\infty, \varphi).$$

Tällöin välttämättä $C > 0$. Nyt ottamalla logaritmi puolittain ja jakamalla luvulla n saadaan edelleen

$$-\frac{1}{n}\mathrm{Var}(\phi) + \frac{1}{n}\log Z_n(\mathbb{N}^\infty, \varphi) \leq \log C \leq \frac{1}{n}\mathrm{Var}(\phi) + \frac{1}{n}\log Z_n(\mathbb{N}^\infty, \varphi).$$

Antamalla $n \to \infty$ nähdään paineen määritelmästä, että $\log C = P(\varphi)$. Kiinnitetään seuraavaksi mielivaltaiset $n \in \mathbb{N}$ ja $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mu([\mathbf{u}]) &= T_\mu\left(\chi_{[\mathbf{u}]}\right) \\
&= e^{-nP(\varphi)} \mathcal{L}_\varphi^{*\,n} T_\mu\left(\chi_{[\mathbf{u}]}\right) \\
&= e^{-nP(\varphi)} T_\mu\left(\mathcal{L}_\varphi{}^n \chi_{[\mathbf{u}]}\right) \\
&= e^{-nP(\varphi)} \int_{\mathbb{N}^\infty} e^{S_n\varphi((\mathbf{u},\mathbf{a}))} \; \mathrm{d}\mu(\mathbf{a}). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Kiinnittämällä mielivaltainen $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}]$ on kohdan (1) perusteella helppo arvioida, että

$$e^{-\mathrm{Var}(\varphi)} e^{S_n\varphi(\mathbf{v}) - nP(\varphi)} \leq \mu([\mathbf{u}]) \leq e^{\mathrm{Var}(\varphi)} e^{S_n\varphi(\mathbf{v}) - nP(\varphi)}.$$

Tällöin Gibbsin mitan määritelmän nojalla $\mu = \mu_\varphi$ ja väite on selvä. □

Annetulle potentiaalille φ σ-invariantti $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ toteuttaa ehdon (5.7), täsmälleen silloin, kun T_μ on vastaaavan duaalioperaattorin $\mathcal{L}_\varphi^*$ kiintopiste, eli $\mathcal{L}_\varphi^* T_\mu = T_\mu$. Tällöin lemman 5.50 nojalla erityisesti $\mu = \mu_\varphi$.

Seuraava tavoite on osoittaa, että mikäli $\mathcal{L}_\varphi 1 = 1$, niin duaalioperaattorille $\mathcal{L}_\varphi^*$ löytyy kiintopiste $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$. Tarkastelu pohjautuu taas lähteen [20] kappaleeseen 2.7. Tätä varten tarkastellaan aluksi jonoavaruuden sopivia kompakteja joukkoja. Muista, että mikäli $F \subset \mathbb{N}$ on äärellinen ja epätyhä, niin vastaava tulojoukko $F^\infty \subset \mathbb{N}^\infty$ on kompakti. Tarkastellaan tätä topologisena aliavaruutena, joka metrisoituu. Merkinnällä $C(F^\infty; \mathbb{R})$ tarkoitettiin jatkuvien funktoiden $F^\infty \to \mathbb{R}$ reaalikertoimista vektoriavaruutta, joka on varustettu tasaisen konvergenssin normilla $\|\cdot\|_\infty$. Sen normiduaali $C(F^\infty; \mathbb{R})^*$ on varustettu puolestaan tavanomaisella operaattorinormilla. Muista, että symbolilla $\mathcal{B}_{F^\infty}$ merkittiin F^∞:n Borel-mittojen kokoelmaa ja symbolilla $\mathcal{M}_{F^\infty}$ sen Borel-todennäköisyysmittojen kokoelmaa. Nyt on selvää, että $\mathcal{B}_{F^\infty}$ voidaan assosioida kokoelman $\mathcal{B}_{\mathbb{N}^\infty}$ osajoukoksi, joka sisältää kaikki joukon F^∞ kantamat mitat kokoelmasta $\mathcal{B}_{\mathbb{N}^\infty}$. Vastaavasti voidaan mieltää $\mathcal{M}_{F^\infty} \subset \mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$.

Mielivaltaiselle potentiaalille $\varphi \in \mathcal{U}$ voidaan määritellä Ruellen siirto-operaattorin kanssa analoginen operaattori $\mathcal{L}_{\varphi,F^\infty} : C(F^\infty;\mathbb{R}) \to C(F^\infty;\mathbb{R})$ asettamalla jokaiselle $g \in C(F^\infty;\mathbb{R})$ ja $\mathbf{a} \in F^\infty$

$$\mathcal{L}_{\varphi,F^\infty} g(\mathbf{a}) = \sum_{b\in F} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} g((b,\mathbf{a})).$$

On helppo nähdä, että kuvaus on hyvin määritelty ja normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen jatkuva lineaarikuvaus. Kuten Ruellen siirto-operaattori $\mathcal{L}_{\varphi,F^\infty}$ on myös positiivinen operaattori ja jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ nähdään, kuten lemmassa 5.43, että

$$\mathcal{L}_{\varphi,F^\infty}{}^n g(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{b}\in F^n} e^{S_n\varphi((\mathbf{b},\mathbf{a}))} g((\mathbf{b},\mathbf{a})),$$

kaikille $g \in C(F^\infty;\mathbb{R})$ ja $\mathbf{a} \in F^\infty$. Operaattorille $\mathcal{L}_{\varphi,F^\infty}$ voidaan määritellä seuraavanlainen duaaliope-raattori $\mathcal{L}^*_{\varphi,F^\infty} : C(F^\infty;\mathbb{R})^* \to C(F^\infty;\mathbb{R})^*$ asettamalla jokaiselle $T \in C(F^\infty;\mathbb{R})^*$

$$\mathcal{L}^*_{\varphi,F^\infty} T = T \circ \mathcal{L}_{\varphi,F^\infty}.$$

Huomaa analogia operaattoriin $\mathcal{L}^*_\varphi$. Nyt aiemmin esitellyn teorian avulla löydetään ominaismitta $\mu \in \mathcal{M}_{F^\infty}$ operaattorille $\mathcal{L}^*_{\varphi,F^\infty}$.

Lemma 5.51.
Olkoon $\varphi \in \mathcal{U}$ ja $F \subset \mathbb{N}$ äärellinen ja epätyhjä. Tällöin löytyy $\mu \in \mathcal{M}_{F^\infty}$ siten, että

$$\mathcal{L}^*_{\varphi,F^\infty} T_\mu = \left((\mathcal{L}^*_{\varphi,F^\infty} T_\nu)(1_{F^\infty})\right) T_\mu.$$

Todistus.
Merkitään $Y = \{T_\nu : \nu \in \mathcal{M}_\sigma\} \subset C(F^\infty;\mathbb{R})^*$. Koska $F^\infty \subset \mathbb{N}^\infty$ on kompakti ja metristyvä (ali)avaruus, niin lauseen 2.19 perusteella Y on kompakti normiduaalin $C(F^\infty;\mathbb{R})^*$ heikko*-topologiassa. Edelleen Rieszin esityslauseen 2.17 avulla Y on helppo nähdä konveksiksi joukoksi.

Määritellään seuraavaksi kuvaus $H : Y \to Y$ asettamalla jokaiselle $\nu \in \mathcal{M}_{F^\infty}$

$$H(T_\nu) = \frac{\mathcal{L}^*_{\varphi,F^\infty} T_\nu}{(\mathcal{L}^*_{\varphi,F^\infty} T_\nu)(1_{F^\infty})} = \frac{T_\nu \circ \mathcal{L}_{\varphi,F^\infty}}{T_\nu(\mathcal{L}_{\varphi,F^\infty} 1_{F^\infty})}, \tag{1}$$

Aluksi huomataan, että

$$(\mathcal{L}^*_{\varphi,F^\infty} T_\nu)(1_{F^\infty}) = T_\nu(\mathcal{L}_{\varphi,F^\infty} 1_{F^\infty}) = \int_{F^\infty} \overbrace{\sum_{b\in F} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))}}^{>0} \, \mathrm{d}\nu(\mathbf{a}) > 0.$$

Edelleen, koska $H(T_\mu)$ on positiivinen ja $H(T_\mu)(1_{F^\infty}) = 1$ jokaiselle $T_\mu \in Y$, niin Rieszin esityslauseen 2.17 nojalla $H(T_\mu) \in Y$. Siten $H : Y \to Y$ on hyvin määritelty.

Koska $\mathcal{L}_{\varphi,F^\infty} : C(F^\infty;\mathbb{R}) \to C(F^\infty;\mathbb{R})$ on jatkuva normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen, niin lemman 2.15 nojalla $\mathcal{L}^*_{\varphi,F^\infty}$ on jatkuva normiduaalin $C(F^\infty;\mathbb{R})^*$ heikko*-topologiassa. Kuvaus $T \mapsto T(\mathcal{L}_{\varphi,F^\infty} 1_{F^\infty})$ on puolestaan heikko*-topologian määritelmän nojalla jatkuva. Siten kuvaus $H : Y \to Y$ on jatkuva normiduaalin heikko*-topologiassa (tai Y:n aliavaruustopologiassa).

Aiemman todettiin, että $C(F^\infty;\mathbb{R})^*$ varustettuna heikko*-topologialla on vektoriavaruus, joka on lokaalisti konveksi ja Hausdorff-avaruus. Koska nyt Y on sen epätyhjä, konveksi ja kompakti osajoukko, sekä $H : Y \to Y$ jatkuva, niin Schauder–Tihonv-lauseen 2.16 nojalla löytyy kuvaukselle H kiintopiste $T_\mu \in Y$. Väite seuraa tällöin yhtälöstä (1). □

Tämän aputuloksen avulla löydetään operaattorille $\mathcal{L}^*_\varphi$ sopiva kiintopiste, kun $\mathcal{L}_\varphi 1 = 1$, katso [20, Lause 2.7.3 s.50]. Annettu todistus noudattelee tätä.

Lause 5.52.
Olkoon $\varphi \in \mathcal{U}$ siten, että $\mathcal{L}_\varphi 1 = 1$. Tällöin löytyy $\mu \in \mathcal{M}$ siten, että

$$\mathcal{L}^*_\varphi T_\mu = T_\mu.$$

Todistus.
Koska $P(\varphi) < \infty$, niin lemman 5.18 nojalla jokaisella $k \in \mathbb{N}$

$$Z_k(\mathbb{N}, \varphi) < \infty. \tag{1}$$

Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ joukko $F_n = \{1, \ldots, n\}$. Lemman 5.51 nojalla jokaiselle operaattorille $\mathcal{L}^*_{\varphi, F_n^\infty}$ löytyy $\mu_n \in \mathcal{M}_{F_n^\infty}$ siten, että

$$\mathcal{L}^*_{\varphi, F_n^\infty} T_{\mu_n} = C_n T_{\mu_n}, \tag{2}$$

missä

$$C_n = \mathcal{L}^*_{\varphi, F_n^\infty} T_\mu(1_{F_n^\infty}) = \int_{F_n^\infty} \sum_{b=1}^{n} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} \, \mathrm{d}\mu_n(\mathbf{a}). \tag{3}$$

Ensimmäiseksi todetaan, että jono $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$ on tiivis, eli jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy kompakti $K_\varepsilon \subset \mathbb{N}^\infty$ siten, että $\mu_n(\mathbb{N}^\infty \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja määritellään jokaiselle $d, k \in \mathbb{N}$ joukko

$$A(d,k) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty : a_k = d\} = \sigma^{1-k}\left([d]\right).$$

Mielivaltaisella sylinterillä $[\mathbf{u}]$ ja $n \in \mathbb{N}$ karakteristisen funktion rajoittuma $\chi_{[\mathbf{u}] \cap F_n^\infty} \in C(F_n^\infty; \mathbb{R})$. Tällöin jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
C_n^k \mu_n\left(A(d,k)\right) &= C_n^k \mu_n\left(\sigma^{1-k}\left([d]\right) \cap F_n^\infty\right) \\
&= \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{k-1}} C_n^k \mu_n\left([(\mathbf{b}, d)] \cap F_n^\infty\right) \\
&= \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{k-1}} C_n^k T_{\mu_n}\left(\chi_{[(\mathbf{b},d)] \cap F_n^\infty}\right) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{k-1}} {\mathcal{L}^*_{\varphi, F_n^\infty}}^k T_{\mu_n}\left(\chi_{[(\mathbf{b},d)] \cap F_n^\infty}\right) \\
&= \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{k-1}} \int_{F_n^\infty} {\mathcal{L}_{\varphi, F_n^\infty}}^k \chi_{[(\mathbf{b},d)] \cap F_n^\infty} \mathrm{d}\mu_n \\
&= \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{k-1}} \int_{F_n^\infty} e^{S_k\varphi((\mathbf{b},d,\mathbf{a}))} \chi_{[(\mathbf{b},d)] \cap F_n^\infty}((\mathbf{b},d,\mathbf{a})) \mathrm{d}\mu_n(\mathbf{a}) \\
&\leq \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{k-1}} e^{S_k\varphi((\mathbf{b},d)^\infty) + \mathrm{Var}(\varphi)}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Huomaa, että tapauksessa $k = 1$ sovitaan muodollisesti, että summamerkki häviää. Nyt edelleen ottamalla yhdiste indeksien $d, d+1, d+2, \ldots$ yli saadaan

$$\begin{aligned}
\mu_n\left(\bigsqcup_{\tilde{d}=d}^{\infty} A(\tilde{d}, k)\right) &= \sum_{\tilde{d}=d}^{\infty} \mu_n\left(A(\tilde{d}, k)\right) \\
&\overset{(4)}{\leq} C_n^{-k} \sum_{\tilde{d}=d}^{\infty} \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{k-1}} e^{S_k\varphi((\mathbf{b},\tilde{d})^\infty) + \mathrm{Var}(\varphi)} \\
&\overset{(3)}{=} \left(\int_{F_n^\infty} \sum_{b=1}^{n} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} \, \mathrm{d}\mu_n(\mathbf{a})\right)^{-k} \sum_{\tilde{d}=d}^{\infty} \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{k-1}} e^{S_k\varphi((\mathbf{b},\tilde{d})^\infty) + \mathrm{Var}(\varphi)} \\
&\leq \left(e^{\varphi((1)^\infty) - \mathrm{Var}_1(\varphi)}\right)^{-k} \sum_{\tilde{d}=d}^{\infty} \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{k-1}} e^{S_k\varphi((\mathbf{b},\tilde{d})^\infty) + \mathrm{Var}(\varphi)} \qquad (5) \\
&\leq e^{\mathrm{Var}(\varphi) + k\mathrm{Var}(\varphi) - k\varphi((1)^\infty)} Z_k(\mathbb{N}^\infty, \varphi) \overset{(1)}{<} \infty.
\end{aligned}$$

Arvion (5) perusteella $\mu_n\left(\bigsqcup_{\tilde{d}=d}^{\infty} A(\tilde{d},k)\right) \to 0$ tasaisesti indeksin n suhteen, kun $d \to \infty$. Tällöin jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ löytyy $d_k \in \mathbb{N}$ siten, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\mu_n\left(\bigsqcup_{\tilde{d}=d_k+1}^{\infty} A(\tilde{d},k)\right) \leq 2^{-k}\varepsilon. \tag{6}$$

Määritellään nyt $K_\varepsilon = \prod_{k=1}^{\infty}\{1,\dots,d_k\}$, joka on Tihonovin lauseen nojalla kompakti. Nyt on helppo nähdä joukkojen $A(d,k)$ määritelmästä, että

$$\mathbb{N}^\infty \setminus K_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigsqcup_{\tilde{d}=d_k+1}^{\infty} A(\tilde{d},k)$$

ja siten jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n\left(\mathbb{N}^\infty \setminus K_\varepsilon\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n\left(\bigsqcup_{\tilde{d}=d_k+1}^{\infty} A(\tilde{d},k)\right) \overset{(6)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon.$$

Jono $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ on siten tiivis. Koska $\mathbb{N}^\infty$ on metristyvä ja separoituva, niin Prokhorovin lauseen 2.20 nojalla löytyy osajono $(\mu_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ ja $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$ siten, että $\mu_{k_j} \to \mu$ heikosti. Todistus on valmis osoittamalla, että $\mathcal{L}_\varphi^*\mu = \mu$. Kiinnitetään tätä varten mielivaltainen $g \in C_B$. Huomaa, että funktionaalin T_{μ_n} voi mieltää toimimaan yhtä aikaa avaruuksilla C_B^* ja $C(F_n^\infty;\mathbb{R})$ ja tällöin $T_{\mu_n}(g) = T_{\mu_n}(g|_{F_n^\infty})$. Nyt jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}^\infty} \sum_{b=1}^{n} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} g((b,\mathbf{a}))\, \mathrm{d}\mu_n(\mathbf{a}) &= \int_{F_n^\infty} \mathcal{L}_{\varphi,F_n^\infty}\, g|_{F_n^\infty}(\mathbf{a})\, \mathrm{d}\mu_n(\mathbf{a}) \\
&= \mathcal{L}_{\varphi,F_n^\infty}^* T_{\mu_n}(g|_{F_n^\infty}) \\
&= C_n T_{\mu_n}(g|_{F_n^\infty}) \\
&= C_n T_{\mu_n}(g).
\end{aligned} \tag{7}$$

Nyt käyttämällä kolmioepäyhtälöä saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}_\varphi^* T_\mu(g) - T_\mu(g)\right| &\leq \left|\mathcal{L}_\varphi^* T_\mu(g) - \mathcal{L}_\varphi^* T_{\mu_{n_j}}(g)\right| && \text{(a)} \\
&+ \left|\mathcal{L}_\varphi^* T_{\mu_{n_j}}(g) - \int_{\mathbb{N}^\infty} \sum_{b=1}^{n_j} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} g((b,\mathbf{a}))\, \mathrm{d}\mu_{n_j}(\mathbf{a})\right| && \text{(b)} \\
&+ \left|\int_{\mathbb{N}^\infty} \sum_{b=1}^{n_j} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} g((b,\mathbf{a}))\, \mathrm{d}\mu_{n_j}(\mathbf{a}) - C_{n_j} T_\mu(g)\right| && \text{(c)} \\
&+ \left|C_{n_j} T_\mu(g) - T_\mu(g)\right|. && \text{(d)}
\end{aligned}$$

Todetaan, että termit a) – d) menevät nollaan, kun j kasvaa rajatta. Koska $\mu_{n_j} \to \mu$ heikosti, kun $j \to \infty$, niin

$$\mathcal{L}_\varphi^* T_{\mu_{n_j}}(g) = T_{\mu_{n_j}}(\mathcal{L}_\varphi g) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} T_\mu(\mathcal{L}_\varphi g) = \mathcal{L}_\varphi^* T_\mu(g)$$

ja siten a) menee nollaan. Termille b) saadaan helposti arvio

$$\left|\mathcal{L}_\varphi^* T_{\mu_{n_j}}(g) - \int_{\mathbb{N}^\infty} \sum_{b=1}^{n_j} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} g((b,\mathbf{a}))\, \mathrm{d}\mu_{n_j}(\mathbf{a})\right| \leq (\sup|g|) e^{\mathrm{Var}_1(g)} \sum_{b=n_j+1}^{\infty} e^{\varphi((b)^\infty)},$$

joten tämäkin menee nollaan indeksin j (ja siten indeksin n_j) kasvaessa. Kohdan (7) nojalla nähdään, että termi c) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left|\int_{\mathbb{N}^\infty} \sum_{b=1}^{n_j} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} g((b,\mathbf{a}))\, \mathrm{d}\mu_{n_j}(\mathbf{a}) - C_{n_j} T_\mu(g)\right| = C_{n_j} |T_{\mu_{n_j}}(g) - T_\mu(g)|. \tag{8}$$

Koska summa

$$\sum_{b=1}^{n} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{b=1}^{\infty} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} = \mathcal{L}_\varphi 1(\mathbf{a}) = 1$$

tasaisesti muuttujan $\mathbf{a}$ suhteen, niin on helppo nähdä, että

$$C_n \overset{(3)}{=} \int_{F_n^\infty} \sum_{b=1}^{n} e^{\varphi((b,\mathbf{a}))} \, \mathrm{d}\mu_n(\mathbf{a}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \,. \tag{9}$$

Tällöin koska heikon konvergenssin nojalla $T_{\mu_{n_j}}(g) \to T_\mu(g)$, kun $j \to \infty$, niin kohdan (8) nojalla termi c) menee nollaan. Edelleen kohdasta (9) nähdään, että termi d) menee myös nollaan indeksin j kasvaessa. Tällöin on selvää, että $\mathcal{L}_\varphi^* T_\mu(g) = T_\mu(g)$ ja väite seuraa. □

Lopulta yhdiställä havainnot saadaan todistettua pykälän alussa esitetty tulos.

Lause 5.53.
Jokaiselle luokalle $[\varphi] \in \mathcal{U}/\sim$ löytyy yksikäsitteinen Gibbsin mitta μ ja edelleen $\phi \in [\varphi]$ siten, että $\mathcal{L}_\phi 1 = 1$ ja $\mathcal{L}_\varphi^* T_\mu = T_\mu$.

Todistus.
Lauseen 5.48 nojalla löytyy $\phi \in [\varphi]$ siten, että $\mathcal{L}_\phi 1 = 1$. Edelleen lauseen 5.52 nojalla löytyy $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}^\infty}$ siten, että $\mathcal{L}_\phi^* T_\mu = T_\mu$. Tällöin toteamalla, että μ on σ-invariantti saadaan lemman 5.50 nojalla $\mu = \mu_\phi$ ja yksikäsitteisyys seuraa lauseesta 5.38. Lemma 5.13 muistaen σ-invarianttiutta varten riittää todeta, että mielivaltaisille $n \in \mathbb{N}$ ja $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$

$$\mu(\sigma^{-1}[\mathbf{u}]) = \mu([\mathbf{u}]). \tag{1}$$

Lähtemällä liikkeelle väitetyn yhtälön oikealta puolelta ja a) käyttämällä monotonisen konvergenssin lausetta saadaan

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma^{-1}[\mathbf{u}]) &= \mu\left(\bigsqcup_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}} [(\mathbf{b},\mathbf{u})]\right) = \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}} \mu\left([(\mathbf{b},\mathbf{u})]\right) \\
&= \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}} T_\mu\left(\chi_{[(\mathbf{b},\mathbf{u})]}\right) = \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}} {\mathcal{L}_\varphi^*}^n T_\mu\left(\chi_{[(\mathbf{b},\mathbf{u})]}\right) \\
&= \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}} T_\mu\left({\mathcal{L}_\varphi}^n \chi_{[(\mathbf{b},\mathbf{u})]}\right) = \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}^\infty} e^{S_n((\mathbf{b},\mathbf{a}))} \chi_{[\mathbf{u}]}(\mathbf{a}) \, \mathrm{d}\mu(\mathbf{a}) \\
&\overset{a)}{=} \int_{\mathbb{N}^\infty} \chi_{[\mathbf{u}]}(\mathbf{a}) \mathcal{L}_\phi 1(\mathbf{a}) \mathrm{d}\mu(\mathbf{a}) = \int_{\mathbb{N}^\infty} \chi_{[\mathbf{u}]}(\mathbf{a}) \mathrm{d}\mu(\mathbf{a}) \\
&= \mu([\mathbf{u}]).
\end{aligned}$$

□

5.8 Konjugaattisysteemeistä

Käsitellään hieman vasemman siirron konjugaattisysteemeitä. Tullaan huomaamaan, että nämä eivät oleellisesti poikkea mitenkään vasemman siirron dynaamisista systeemeistä.

Tarkastellaan topologista avaruutta E, joka on homeomorfinen jonoavaruuden $\mathbb{N}^\infty$ kanssa, jollain homeomorfismilla $\pi : \mathbb{N}^\infty \to E$. Jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja sanalle $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ määritellään avaruuteen E *n. kertaluvun sylinteri* sylinterin $[\mathbf{a}]$ kuvana $\pi([\mathbf{a}])$. Tällöin sylinterien kokoelma $\{\pi([\mathbf{a}]) : \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}\}$ muodostaa avaruuden E topologisen kannan ja vastaavantyyppisen puurakenteen kuin jonoavaruudessa, ts. sylinterit ovat aina sisäkkäisiä tai pistevieraita ja $[\mathbf{a}] \subset [\mathbf{b}]$ täsmälleen silloin, kun $[\mathbf{a}] \subset [\mathbf{b}]$. Jokaisella avaruuden E alkiolla x on tällöin yksikäsitteinen rekisteri sylinterien avulla $[\mathbf{a}(x)|_1], [\mathbf{a}(x)|_2] \ldots$, missä $\mathbf{a}(x) = \pi^{-1}(x)$.

Kuvauksia $f : E \to \mathbb{R}$ kutsutaan potentiaaleiksi. Kuten jonoavaruudessa $\mathbb{N}^\infty$ jokaiselle potentiaalille asetetaan n. kertaluvun variaatio

$$\mathrm{Var}_n(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \pi([\mathbf{a}]), \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n\},$$

joka kuvaa maksimaalista heilahtelua sylintereissä. Potentiaalilla f on summautuva variaatio, mikäli $\mathrm{Var}(f) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}_n(f) < \infty$. Edelleen sanotaan, että f on lokaalisti Hölder, mikäli löytyy vakiot $C \in [0, \infty[$ ja $\delta \in]0, 1[$ siten, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pätee $\mathrm{Var}_n(f) \leq C\delta^n$. Oikeastaan kuvauksella $f : E \to \mathbb{R}$ on summautuva variaatio tai lokaali Hölder-ominaisuus täsmälleen silloin, kun näin on kuvaukselle $f \circ \pi : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{R}$.
Vasemmalle siirrolle voidaan määritellä luonnollinen vastine homeomorfisiin avaruuksiin.

Määritelmä 5.54 (**Konjugaattikuvaus ja konjugaattisysteemit**).
Olkoon topologinen avaruus E jonoavaruuden $\mathbb{N}^\infty$ kanssa homeomorfinen ja $\pi : \mathbb{N}^\infty \to E$ vastaava homeomorfismi. Tällöin vasemman siirron σ konjugaattikuvaukseksi kuvauksen π suhteen avaruudessa E asetetaan $F_{\sigma,\pi} = \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$. Tällöin dynaamisia systeemeitä

$$(E, \mathcal{B}(E), \mu, F_{\sigma,\pi}),$$

missä μ on avaruuden E Borel-todennäköisyysmitta Borel-joukkojen kokoelmalla $\mathcal{B}(E)$, kutsutaan vasemman siirron konjugaattisysteemeiksi kuvauksen π suhteen.

Huomaa, että systeemi riippuu paitsi avaruudesta E myös homeomorfismista π. Homeomorfisuudesta johtuen voidaan suoraan siirtää aiemmin esitellyt konseptit ja tulokset vasemman siirron dynamiikasta konjugaattisysteemeille.

Kuten jonoavaruudessa vasemmalle siirrolle avaruuden E Borel-todennäköisyysmittaa μ kutsutaan $F_{\sigma,\pi}$-*invariantiksi*, mikäli jokaiselle Borel-joukolle $B \subset E$ pätee $\mu(B) = \mu(F_{\sigma,\pi}^{-1}(B))$. Merkitään näiden kokoelmaa symbolilla $\mathcal{M}_{F_{\sigma,\pi}}$. Huomaa, että kuvaus $\mu \mapsto \mu \circ \pi$ on bijektio kokoelmalta $\mathcal{M}_{F_{\sigma,\pi}}$ kokoelmalle $\mathcal{M}_\sigma$. Ergodisuus määritellään myös analogisella tavalla ja tällöin $\mu \in \mathcal{M}_{F_{\sigma,\pi}}$ on ergodinen täsmälleen silloin, kun $\mu \circ \pi \in \mathcal{M}_\sigma$ on sitä. Huomaa, että muuttujanvaihtolauseen 2.10 ja π:n homeomorfisuuden nojalla Borel-kuvaus $f : E \to \mathbb{R}$ on μ-integroituva täsmälleen silloin, kun $f \circ \pi$ on $\mu \circ \pi$-integroituva, ja tällöin

$$\int_E f \; \mathrm{d}\mu = \int_E f \; \mathrm{d}(\mu \circ \pi \circ \pi^{-1}) = \int_{\mathbb{N}^\infty} f \circ \pi \; \mathrm{d}(\mu \circ \pi).$$

Jonoavaruuden starndardipartition α kuvakokoelma $\pi(\alpha) = \{\pi([a]) : a \in \mathbb{N}\}$ on edelleen avaruuden E partititio, joka koostuu ensimmäisen kertaluvun sylintereistä. Merkitään tätä symbolilla α_π ja kutsutaan tätä avaruuden E standardipartitioksi kuvauksen π suhteen. Nyt jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pienellä laskulla nähdään, että n. kertaluvun hienonnus konjugaatin $F_{\sigma,\pi}$ suhteen voidaan kirjoittaa

$$\alpha_\pi^n = \pi(\alpha^n) = \{\pi([\mathbf{a}]) : \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n\}.$$

Tällöin jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pätee $H(\alpha_\pi^n, \mu) = H(\alpha^n, \mu \circ \pi)$. Mitan $\mu \in \mathcal{M}_{F_{\sigma,\pi}}$ entropia partition $\pi(\alpha)$ yli on siten $h(\alpha_\pi, \mu) = h(\alpha, \mu \circ \pi)$. Edelleen α_π on vahvasti generoiva, sillä $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_\pi^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\pi([\mathbf{a}]) : \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n\}$. Tällöin mikäli $\mu \in \mathcal{M}_{F_{\sigma,\pi}}$ on ergodinen ja $h(\alpha_\pi, \mu) < \infty$, niin lauseiden 5.26 ja 5.27 nojalla μ-melkein kaikilla $x \in E$

$$h_\mu = h(\alpha_\pi, \mu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu\left(\pi([\mathbf{a}(x)|_n])\right).$$

Potentiaalille $f : E \to \mathbb{R}$, jolla on summautuva variaatio, asetetaan paine

$$P(f) = P(f, E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{x \in E \\ F_{\sigma,\pi}{}^n(x) = x}} e^{S_n f(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} e^{S_n \varphi(\pi(\mathbf{a}^\infty))},$$

missä $S_n f$ on n. kertaluvun Birkhoffin summa konjugaatin $F_{\sigma,\pi}$ suhteen. Paine on hyvin määritelty, sillä $P(f, E) = P(f \circ \pi, \mathbb{N}^\infty)$. Erityisesti tällöin $P(f) > -\infty$. Paineen avulla asetetaan Gibbsin mitat konjugaattisysteemissä täysin analogisesti.

Määritelmä 5.55 (**Gibbsin mitat konjugaattisysteemissä**).
Olkoon topologinen avaruus E jonoavaruuden $\mathbb{N}^\infty$ kanssa homeomorfinen ja homeomorfismi $\pi : \mathbb{N}^\infty \to E$. Olkoon $(E, \mathcal{B}(E), \mu, F_{\sigma,\pi})$ vasemman siirron konjugaattisysteemi kuvauksen π suhteen. Tällöin $\mu \in \mathcal{M}_{F_{\sigma,\pi}}$ on Gibbsin mitta konjugaattisysteemissä, mikäli löytyy $Q \geq 1$ ja lokaalisti Hölder potentiaali φ siten, että $P(\varphi) < \infty$ ja jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$ ja $x \in \pi([\mathbf{a}])$ pätee arvio

$$Q^{-1} e^{S_n\varphi(x) - nP(\varphi)} \leq \mu(\pi[\mathbf{a}]) \leq Q e^{S_n\varphi(x) - nP(\varphi)}.$$

Potentiaaliin φ liittyvää Gibbsin mittaa merkitään taas symbolilla μ_φ. Taas on helppo nähdä, että $\mu \in \mathcal{M}_{F_{\sigma,\pi}}$ on Gibbsin mitta potentiaalilla φ täsmälleen silloin, kun $\mu \circ \pi \in \mathcal{M}_\sigma$ on Gibbsin mitta potentiaalilla $\varphi \circ \pi$. Koska $\mu \circ \pi \in \mathcal{M}_\sigma$ on Gibbsin mittana lauseen 5.38 nojalla ergodinen, niin myös $\mu \in \mathcal{M}_{F_{\sigma,\pi}}$ on aina (Gibbsin mittana) ergodinen.

Oletetaan, että Gibbsin mitalle μ pätee $H(\alpha_\pi, \mu) < \infty$ ja siihen liittyvälle potentiaalille φ paine $P(\varphi) = 0$. Tällöin myös vasemman siirron Gibbsin mittaan $\mu \circ \pi$ liittyvälle potentiaalille $\varphi \circ \pi$ pätee $P(\varphi \circ \pi, \mathbb{N}^\infty) = P(\varphi, E) = P(\varphi) = 0$. Edelleen $H(\alpha, \mu \circ \pi) = H(\alpha_\pi, \mu) < \infty$. Tällöin hyödyntämällä faktaa $h_\mu = h(\alpha_\pi, \mu) = h(\alpha, \mu \circ \pi) = h_{\mu\circ\pi}$, lemmaa 5.40 ja muuttujanvaihtolausetta 2.10 saadaan tasapainoyhtälö

$$h_\mu = h_{\mu\circ\pi} = -\int_{\mathbb{N}^\infty} \varphi \circ \pi \ \mathrm{d}(\mu \circ \pi). = -\int_E \varphi \ \mathrm{d}\mu. \tag{5.8}$$

Määritelmä 5.56 (Ruellen siirto-operaattori konjugaattisysteemissä).
Olkoon topologinen avaruus E jonoavaruuden $\mathbb{N}^\infty$ kanssa homeomorfinen, homeomorfismi $\pi : \mathbb{N}^\infty \to E$ ja konjugaattisysteemi $(E, \mathcal{B}(E), \mu, F_{\sigma,\pi})$. Olkoon lokaalisti Hölder potentiaali $\varphi : E \to \mathbb{R}$ siten, että $P(\varphi) < \infty$. Tällöin potentiaaliin siirtyvä Ruellen siirto-operaattori määritellään kuvauksena $\mathcal{L}\varphi : C_B(E;\mathbb{R}) \to C_B(E;\mathbb{R})$, missä jokaiselle $g \in C_B(E;\mathbb{R})$ asetetaan

$$\mathcal{L}_\varphi g = (\mathcal{L}_{\varphi\circ\pi}(g \circ \pi)) \circ \pi^{-1}.$$

Tässä $\mathcal{L}_{\varphi\circ\pi}$ on kuten määritelmässä 5.42.

Koska $P(\varphi\circ\pi) = P(\varphi) < \infty$ ja $g\circ\pi \in C_B(\mathbb{N}^\infty;\mathbb{R})$, niin $\mathcal{L}_{\varphi\circ\pi}(g\circ\pi) \in C_B(\mathbb{N}^\infty;\mathbb{R})$ ja siten $\mathcal{L}_\varphi g \in C_B(E;\mathbb{R})$, joten siirto-operaattori on hyvin määritelty. On helppo huomata myös, että se on lineaarinen. Seuraavaksi nähdään miten $\mathcal{L}_\varphi$ liittyy konjugaattikuvaukseen $F_{\sigma,\pi}$ Tarkastellaan mielivaltaisia $g \in C_B(E;\mathbb{R})$ ja $x \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\varphi g(x) &= (\mathcal{L}_{\varphi\circ\pi}(g \circ \pi))\,(\pi^{-1}(x)) \\
&= \sum_{\mathbf{b}\in\sigma^{-1}\{\pi^{-1}(x)\}} e^{(\varphi\circ\pi)(\mathbf{b})}(g\circ\pi)(\mathbf{b}) \\
&\overset{a)}{=} \sum_{\pi(\mathbf{b})\in\pi(\sigma^{-1}\{\pi^{-1}(x)\})} e^{\varphi(\pi(\mathbf{b}))} g(\pi(\mathbf{b})) \\
&\overset{b)}{=} \sum_{y\in F_{\sigma,\pi}{}^{-1}\{x\}} e^{\varphi(y)} g(y).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Tässä a) seuraa π:n injektiivisyydestä ja b) konjugaatin $F_{\sigma,\pi}$ määritelmästä. Ruellen siirto-operaattori $\mathcal{L}_\varphi$ voidaan laajentaa myös jatkuville ja rajoitetuille kompleksisarvoisille kuvauksille $g \in C_B(E;\mathbb{C})$ laskelman (5.9) mukaisesti. Eli jokaiselle $x \in E$

$$\mathcal{L}_\varphi g(x) \sum_{y\in F_{\sigma,\pi}{}^{-1}\{x\}} e^{\varphi(y)} g(y).$$

Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\mathcal{L}_\varphi g = \mathcal{L}_\varphi \mathrm{Re}(g) + i\mathcal{L}_\varphi \mathrm{Im}(g),$$

missä reaali ja imaginääriosat ovat luonnollisesti joukossa $C_B(E;\mathbb{R})$. Edelleen on helppo yleistää lemma 5.43 laajennetulle operaattorille $\mathcal{L}_\varphi : C_B(E;\mathbb{C}) \to C_B(E;\mathbb{C})$, eli jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $g \in C_B(E;\mathbb{C})$

$$\mathcal{L}_\varphi{}^n g(x) = \sum_{y\in F_{\sigma,\pi}{}^{-n}\{x\}} e^{S_n\varphi(y)} g(y), \tag{5.10}$$

missä $S_n\varphi$ on konjugaattiin liittyvä Birkhoffin summa (asetetaan vastaavasti kompleksiarvoisille kuvauksille). Siirto-operaattorin yhteys konjugaattisysteemin Gibbsin mittoihin on myös analoginen. Seuraava tulos on helppo todeta lemman 5.52, lauseen 5.53, muuttujanvaihtolauseen 2.10 ja edellisen siirto-operaattorin laajennushuomion pohjalta.

Lause 5.57.
Olkoon konjugaattisysteemi $(E, \mathcal{B}(E), \mu, F_{\sigma,\pi})$ *ja* $\varphi : E \to \mathbb{R}$ *lokaalisti Hölder, jolle* $P(\varphi) < \infty$*. Tällöin potentiaalille löytyy yksikäsitteinen Gibbsin mitta* μ_φ*. Toisaalta mikäli* $\mu \in \mathcal{M}_{F_{\sigma,\pi}}$ *on Gibbsin mitta, niin löytyy lokaalisti Hölder potentiaali* φ *siten, että*

(i) $P(\varphi) = 0$,

(ii) $\varphi \leq 0$,

(iii) $\mathcal{L}_\varphi 1 = 1$ *ja*

(iv) $\int_X \mathcal{L}_\varphi g \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu$ *jokaisella* $g \in C_B(E; \mathbb{C})$.

6 Rajchman-mitoista Gaussin kuvaukselle

Tässä luvussa palataan takaisin kysymykseen, milloin Borel-mitan Fourier-muunnos vähenee polynomiaalisesti. Aiemmin todettiin Rieszin-energian avulla, että sopivissa tilanteissa sen äärellisyys takaa polynomiaalisen vähenemisen "suurissa" joukoissa. Luvussa esitellään Thomas Jordanin ja Tuomas Sahlstenin tulos (lause 6.15), joka antaa riittävän ehdon Gibbsin mitalle μ *Gaussin kuvaksen dynamiikassa*, jotta μ:n tai sen laajennoksen reaaliakselille $\tilde{\mu}$ Fourier-muunnos vähenee polynomiaalisesti. Gaussin kuvauksen dynaamiset systeemit ovat esimerkki jonoavaruuden $\mathbb{N}^\infty$ vasemman siirron konjugaattisysteemeistä. Luvun tarkoitus on toimia eräässä mielessä johdantona tai supeana katsauksena Jordanin ja Sahlstenin paperiin [10], jossa tulos on käsitelty.

Gaussin kuvaus T määritellään välin $[0,1]$ irrationaaliluvuille, joiden luonnollisen metriikan indusoimaa reaaliakselin $\mathbb{R}$ metristä aliavaruutta merkitään lyhyesti symbolilla X. Gaussin kuvaus asetaan tällöin kuvauksena

$$x \mapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Avaruus X nähdään homeomorfiseksi jonoavaruuden $\mathbb{N}^\infty$ kanssa *ketjumurtolukukehitelmien* avulla. Toisin sanoen mielivaltaiseen pisteeseen $x \in X$ voidaan liittää yksikäsitteinen sana $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$ siten, että voidaan muodollisesti kirjoittaa

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Esitysmuotoa kutsutaan luvun x *ketjumurtolukukehitelmäksi*. Gaussin kuvaus voidaan nyt nähdä vasemman siirron σ konjugaattina.

Luvun yhtenä tarkoituksena on toimia (joiltain osin) apuna lukijan perehtyessä lauseen 6.15 todistukseen Jordanin ja Sahlstenin paperissa. Ensimmäisessä kappaleessa käsitellään pintapuolisesti ketjumurtolukukehitelmien konstruktio ja Gaussin kuvauksen yhteys vasempaan siirtoon. Toisessa kappaleessa käsitellään lyhyesti tai oikeastaan kerrataan Gaussin kuvauksen dynamiikkaa, koska kyseessä oli konjugaattisysteemi. Kolmannessa kappaleessa käsitellään tarkasti pari yksityiskohtaa Gaussin kuvauksen dynamiikassa ergodisten mittojen *eksakteihin dimensioihin* liittyen. Näitä ei ole käsitelty Jordanin ja Sahlstenin katsauksessa, joten kappale pyrkii näiltä osin täydentämään heidän paperiaan. Näihin liittyvät todistukset pohjautuvat omiin pohdintoihin ja keskusteluihin ohjaajan kanssa. Lopuksi esitellään itse tulos ja käydään Jordanin ja Sahlstenin todistus karkealla ideatasolla läpi. Todistus on erittäin tekninen ja pohjautuu paitsi symboliseen dynamiikkaan ja termodynaamiseen formalismiin konjugaattisysteemeille myös Gaussin kuvauksen spefieihin ominaisuuksiin ja ketjumurtolukujen teoriaan. Jälkimmäisiä aiheita ei tässä tutkielmassa käsitellä, vaan mielenkiinto on niissä kohdissa, joissa voidaan soveltaa aiemman kehiteltyä teoriaa konjugaattisysteemeille.

6.1 Ketjumurtolukukehitelmät ja Gaussin kuvaus

Tutkitaan miten jonoavaruus $\mathbb{N}^\infty$ samaistuu ketjumurtolukukehitelmän kautta homeomorfisesti avaruuteen X ja esitellään Gaussin kuvaus. Esitellään lyhyesti ketjumurtolukukehitelmien konstruointi. Ketjumurtolukuihin ja niiden ominaisuuksiin voi tarkemmin perehtyä tarkemmin vaikkapa Khinchinin klassisessa perusteoksessa [11]. Määritellään aluksi äärellisiin sanoihin liittyvät *sylinterikuvaukset* välille $[0,1]$.

Määritelmä 6.1 **(Sylinterikuvaus).**
Olkoon $n \in \mathbb{N}$ mielivaltainen. Määritellään sanaan $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ liittyvä sylinterikuvaus $T_\mathbf{a} : [0,1] \to [0,1]$ yhdisteenä $T_{a_1} \circ \cdots \circ T_{a_n}$, missä jokaiselle $i = 1, \dots, n$ määritellään $T_{a_i} : [0,1] \to [0,1]$ asettamalla jokaiselle $x \in [0,1]$

$$T_{a_i}(x) = \frac{1}{a_i + x}.$$

Sylinterikuvaukset ovat aina aidosti monotonisia. Parittomille n ja $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ kuvaukset $T_\mathbf{a}$ ovat aidosti laskevia ja vastaavasti parillisille aidosti nousevia. Jokainen sylinterikuvaus kuvaa irrationaaliluvut irrationaalisiksi ja rationaaliluvut rationaalisiksi. Mikäli jonoavaruuden sylinterit $[\mathbf{a}]$ ja $[\mathbf{b}]$ sisältyvät toisiinsa, niin välit $T_{\mathbf{a}}([0,1])$ ja $T_{\mathbf{b}}([0,1])$ ovat sisäkkäiset. Mikäli sylinterit ovat pistevieraat, niin välit leikkaavat korkeintaan yhdessä reunapisteessä. Sylinterikuvausten avulla voidaan konstruoida *päättyvät yksinkertaiset ketjumurtolukuesitykset.*

Määritelmä 6.2 (**Päättyvä yksinkertainen ketjumurtolukukehitelmä**).
Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Sanaan liittyvä yksinkertainen ketjumurtoluku(kehitelmä) asetetaan

$$T_{\mathbf{a}}(0) = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Päättyvät ketjumurtolukuesitykset edustavat aina rationaalilukuja. Toisaalta on helppo keksiä algoritmi, jolla jokaiselle rationaaliselle $x \in]0,1]$ saadaan äärellinen ketjumurtolukuesitys. Tämä on kaksikäsitteinen kaikissa tapauksissa $x \neq 1$. Mikäli sanalle $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ pätee $a_n \neq 1$, niin $T_{\mathbf{a}}(0) = T_{\mathbf{a}'}(0)$, missä $\mathbf{a}' = (a_1, \ldots, a_n - 1, 1) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Vastaavasti, jos $n \geq 2$ ja $a_n = 1$, niin $T_{\mathbf{a}}(0) = T_{\mathbf{a}'}(0)$, missä $\mathbf{a}' = (a_1, \ldots, a_{n-1} + 1) \in \mathbb{N}^{n-1}$. Syy johtuu siitä, että ketjumurtolukuesitykset edustavat parittomilla n ja $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ suljetun välin $T_{\mathbf{a}}([0,1])$ minimiä ja parillisilla maksimia.

Varsinaisena mielenkiinnon kohteena ovat *päättymättömät ketjumurtolukuesitykset.* Tarkastellaan mielivaltaista sanaa $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$. Tällöin jono $(T_{\mathbf{a}|_n}([0,1]))_{n=1}^\infty$ koostuu sisäkkäisistä ja suljetuista väleistä, joille läpimitta $\operatorname{diam}(T_{\mathbf{a}|_n}([0,1])) \to 0$, kun $n \to \infty$. Siten reaalilukujen täydellisyyden ja Cantorin lemman nojalla löytyy $x \in [0,1]$ siten, että $\{x\} = \bigcap_{n=1}^\infty T_{\mathbf{a}_n}([0,1])$ ja tällöin $x = \lim_{n\to\infty} T_{\mathbf{a}|_n}(0)$. Nyt voidaan määritellä *päättymättömät yksinkertaiset ketjumurtolukukehitelmä.*

Määritelmä 6.3 (**Päättymätön yksinkertainen ketjumurtolukukehitelmä**).
Olkoon $\mathbf{a} = (a_1, a_2 \ldots) \in \mathbb{N}^\infty$. Siihen liittyvä päättymätön yksinkertainen ketjumurtolukukehitelmä asetetaan raja-arvona

$$\lim_{n\to\infty} T_{\mathbf{a}|_n}(0) = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Jokainen päättymätön ketjumurtolukuesitys voidaan osoittaa irrationaaliseksi ja toisaalta jokaiselle $x \in X$ löytyy sana $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$ siten, että $x = \lim_{n\to\infty} T_{\mathbf{a}|_n}(0)$, katso [11, Lause 14 s.16]. Tällöin kuvaus $\hat{\pi} : \mathbb{N}^\infty \to X$, missä jokaiselle $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\infty$

$$\hat{\pi}(\mathbf{a}) = \lim_{n\to\infty} T_{\mathbf{a}|_n}(0), \tag{6.1}$$

on hyvin määritelty bijektio. Merkitään nyt jokaiseen pisteeseen $x \in X$ liittyvää sanaa $\mathbf{a}(x)$, eli $\mathbf{a}(x) = \hat{\pi}^{-1}(x)$. Edelleen merkitään sanan $\mathbf{a}(x)$ n. komponenttia $a_n(x)$. Avaruuteen X määrätään sylinterit jonoavaruuden $\mathbb{N}^\infty$ kanssa vastaavasti.

Määritelmä 6.4 (**Sylinterit**).
Olkoon äärellinen sana $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ siihen liittyvä avaruuden X sylinteri asetetaan kuvajoukkona $I_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}}(X)$.

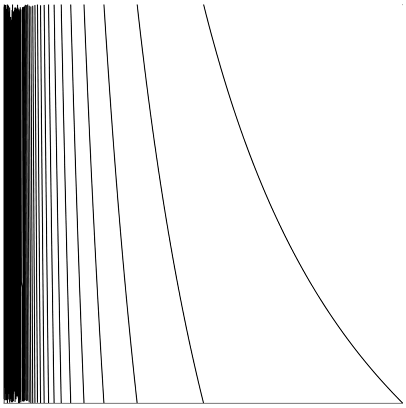
Kuten jonoavaruudessa sylinterit ovat aina sisäkkäisiä tai pistevieraita ja sylinterien kokoelma muodostaa numeroituvan topologisen kannan metriseen avaruuteen X. Lisäksi jokaiselle äärelliselle sanalle $\mathbf{a}$ nähdään ketjumurtolukuesityksen kautta, että $\hat{\pi}([\mathbf{a}]) = I_{\mathbf{a}}$. Siten $\hat{\pi}$ on avoin ja jatkuva bijektio, eli homeomorfismi.

Lause 6.5.
Jonoavaruus $\mathbb{N}^\infty$ on homeomorfinen avaruuden X kanssa kuvauksella $\hat{\pi}$.

Tällöin jonoavaruuteen voidaan asettaa sylinteritopologian kanssa yhteensopiva metriikka siten, että kuvaus $\hat{\pi}$ on isometria. Määritellään seuraavaksi Gaussin kuvaus.

Määritelmä 6.6 (**Gaussin kuvaus**).
Gaussin kuvaus $T : [0,1] \to [0,1]$ määritellään asettamalla $T(0) = 0$ ja jokaiselle $x \in]0,1]$

$$T(x) = \frac{1}{x} \mod 1 := \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$



Gaussin kuvauksen visualisaatio välillä $[0, 1]$.

On selvää, että Gaussin kuvaus kuvaa irrationaaliluvut irrationaaliluvuiksi. Ketjumurtolukukehitelmien avulla on helppo nähdä, että jokainen rationaaliluku väliltä $[0, 1]$ ajautuu nollaan Gaussin kuvauksen dynamiikassa äärellisen monella iteraatiolla. Lisäksi ketjumurtolukukehitelmän kautta nädään, että T:n rajoittuma avaruuteen X on vasemman siirron σ konjugaatti kuvauksessa $\hat{\pi}$, eli yhdiste $\hat{\pi} \circ \sigma \circ \hat{\pi}^{-1}$. Gaussin kuvauksen rajoittuma avaruudessa X on siten jatkuva ja avoin surjektio. Merkitään rajoittumaa avaruuteen X edelleen yksinkertaisuuden vuoksi symbolilla T ja kutsutaan sitä edelleen Gaussin kuvaukseksi.

6.2 Gaussin kuvauksen dynamiikasta

Koska systeemi $(X, \mathcal{B}(X), \mu, T)$, missä μ on avaruuden X Borel-todennäköisyysmitta, on vasemman siirron konjugaattisysteemi homeomorfismilla $\hat{\pi}$. Käydään seuraavaksi kertauksenomaisesti läpi keskeisimmät määritelmät Gaussin kuvauksen dynamiikan kontekstissa ja esitellään muutama notaatio jatkoa varten. Kaikki tulokset ja konseptit pohjautuvat edellisen luvun viimeiseen kappaleeseen konjugaattisysteemeistä.

Muista, että $X = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ on välin $[0, 1]$ tai reaaliakselin $\mathbb{R}$ metrinen aliavaruus varustettuna luonnollisella aliavaruusmetriikalla. Jokaiselle äärelliselle sanalle $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ sanalle asetettiin n. kertaluvun sylinteri kuvana $I_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}}(X)$. Nämä vastasivat nyt jonoavaruuden n. kertaluvun sylintereitä, sillä $I_{\mathbf{a}} = \hat{\pi}([\mathbf{a}])$, missä $\hat{\pi} : \mathbb{N}^{\infty} \to X$ on yhtälön (6.1) mukainen homeomorfismi. Edelleen kokoelma $\alpha_{\hat{\pi}} = \hat{\pi}(\alpha) = \{I_a : a \in \mathbb{N}\}$ muodostaa generoivan partition Gaussin kuvauksen dynamiikassa, missä α oli jonoavaruuden standardipartitio. Kutsutaan partitiota $\alpha_{\hat{\pi}}$ edelleen pelkäksi standardipartitioksi. Standardipartition n. kertaluvun hienonnus on nyt

$$\alpha_{\hat{\pi}}^n = \hat{\pi}(\alpha)^n = \hat{\pi}(\alpha^n) = \{I_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathbb{N}\},$$

eli se koostuu n. kertaluvun sylintereistä.

Jatkossa halutaan laajentaa avaruuden X Borel-todennäköisyysmitta μ reaaliakselille. Määritellään sen laajennus $\tilde{\mu}$ reaaliakselille $\mathbb{R}$ asettamalla

$$\tilde{\mu} = \mu \llcorner X. \tag{6.2}$$

On helppo todeta, että laajennos m^* on nyt välin $[0, 1]$ kantama Borel-mitta.

Merkitään T-invarianttien Borel-todennäköisyysmittojen kokoelmaa $\mathcal{M}_T$. Nyt mitalle $\mu \in \mathcal{M}_T$ voidaan kirjoittaa entropia standardipartition suhteen

$$H(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) = \sum_{a \in \mathbb{N}} \mu(I_a) \log \mu(I_a)$$

ja edelleen keskimääräinen entropia standardipartition suhteen Gaussin kuvauksen dymiikassa

$$h(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) = \lim_{n \to \infty} -\frac{1}{n} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \mu(I_{\mathbf{a}}) \log \mu(I_{\mathbf{a}}).$$

Mikäli $H(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) < \infty$ (tai $h(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) < \infty$), niin lauseen 5.26 nojalla $h(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) = h_\mu$, missä h_μ oli Kolmogorov–Sinai-entropia, katso määritelmä 5.25. Ergodisuus mitalle $\mu \in \mathcal{M}_T$ tarkoittaa ehtoa $\mu(B) \in \{0, 1\}$, mikäli joukolle $B \in \mathcal{B}(X)$ pätee $T^{-1}(B) = B$.

Kuvauksia $\varphi : X \to \mathbb{R}$ kutsuttiin potentiaaleiksi ja potentiaalille määriteltiin summautuva variaatio ja lokaali Hölder-ominaisuus sylinterien avulla, kuten aiemmin. Erityisesti φ on lokaalisti Hölder, jos löytyy vakiot $C \in [0, \infty[$ ja $\delta \in]0, 1[$ siten, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \pi([\mathbf{a}]), \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n\} \leq C\delta^n.$$

Mikäli potentiaalilla φ on summautuva variaatio, niin paine voidaan kirjoittaa Gaussin kuvauksen dynamiikassa

$$P(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} e^{S_n\varphi(\hat{\pi}(\mathbf{a}^\infty))},$$

missä $S_n\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k$ on n. kertaluvun Birkhoffin summa. Mikäli lokaalisti Hölderillä potentiaalilla φ on äärellinen paine, sille voidaan asettaa Ruellen siirto-operaattori $\mathcal{L}_\varphi : C_B(X; \mathbb{C}) \to C_B(X; \mathbb{C})$ yhtälön (5.10) pohjalta asettamalla jokaiselle $g \in C_B(X; \mathbb{C})$ ja $x \in X$

$$\mathcal{L}_\varphi g(x) = \sum_{y\in T^{-1}\{x\}} e^{\varphi(y)} g(y) = \sum_{a\in\mathbb{N}} e^{\varphi(T_a(x))} g(T_a(x)).$$

Tässä $C_B(X; \mathbb{C})$ on siis jatkuvien kuvausten $X \to \mathbb{C}$ vektoriavaruus. Edelleen n kertaa operoimalla saadaan

$$\mathcal{L}_\varphi{}^n g(x) = \sum_{y\in T^{-n}\{x\}} e^{\varphi(y)} g(y) = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} e^{\varphi(T_\mathbf{a}(x))} g(T_\mathbf{a}(x)). \tag{6.3}$$

Olkoon $\mu \in \mathcal{M}_T$ ergodinen ja lokaalisti Hölder potentiaali φ, jolle $P(\varphi) < \infty$. Mikäli löytyy $Q \geq 1$ siten, että kaikille $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ ja $x \in I_\mathbf{a}$ saadaan vertailu

$$Q^{-1} e^{S_n\varphi(x) - nP(\varphi)} \leq \mu(I_\mathbf{a}) \leq Q e^{S_n\varphi(x) - nP(\varphi)},$$

niin sanotaan, että μ on potentiaaliin φ liittyvä Gibbsin mitta Gaussin kuvauksen dynamiikassa ja merkitään $\mu_\varphi = \mu$. Yhtäpitävästi voidaan vaatia, että kaikille $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ ja $x \in X$

$$Q^{-1} e^{S_n\varphi(T_\mathbf{a}(x)) - nP(\varphi)} \leq \mu(I_\mathbf{a}) \leq Q e^{S_n\varphi(T_\mathbf{a}(x)) - nP(\varphi)}. \tag{6.4}$$

Muista, että lauseen 5.57 nojalla jokaiseen lokaalisti Hölderiin ja äärellispaineiseen potentiaaliin voidaan liittää yksikäsitteinen Gibbsin mitta.

6.3 Eksakti dimensionaalisuus ergodisille mitoille

Tässä kappaleessa pääosin tarkastellaan, millä ehdoilla ergodinen mitta $\mu \in \mathcal{M}_T$ on Gaussin kuvauksen dynamiikassa eksaktisti dimensionaalinen. Annetaan tälle täsmällinen määritelmä ilman erillistä pohjustusta.

Määritelmä 6.7 (Eksaksti dimensionaalisuus).
Avaruuden X Borel-todennäköisyysmitta μ on eksaktisti (Hausdorff-)dimensionaalinen, mikäli löytyy $s \in [0, \infty[$ siten, että μ-melkein kaikilla $x \in X$ pätee

$$\lim_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log(2r)} = s.$$

Tällöin sanottiin, että mitan μ eksakti (Hausdorff-)dimensio on $\dim_H \mu = s$.

Yleisemmin mittojen Hausdorff-dimensioista voi lukea vaikkapa seuraavasta artikkelista [19]. Asetetaan seuraavaksi todennäköisyysmitalle ns. *Ljapunovin eksponentti.*

Määritelmä 6.8 (Ljapunovin eksponentti).
Olkoon μ avaruuden X Borel-todennäköisyysmitta. Tällöin sen Ljapunovin eksponentiksi asetetaan

$$\lambda_\mu = \int_X \log |T'| \, \mathrm{d}\mu.$$

Koska Gaussin kuvaus T on välillä $]0,1[$ derivoituva erityisesti osajoukossa X ja sen derivaatta derivoituvassa pisteessä $x \in]0,1[$ on $T'(x) = -x^{-2}$, niin määritelmä on järkevä. Nyt entropian $H(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu)$ ja Ljapunovin eksponentin λ_μ äärellisyydestä saadaan riittävä ehto ergodisen mitan $\mu \in \mathcal{M}_T$ eksaktille dimensionaalisuudelle, joka on tämän osion päätulos.

Lause 6.9.
Olkoon $\mu \in \mathcal{M}_T$ ergodinen siten, että $\lambda_\mu, H(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) < \infty$. Tällöin μ on eksaktisti dimensionaalinen dimensiolla

$$\dim_H \mu = \frac{h_\mu}{\lambda_\mu}.$$

Koska $\log |T'(x)| > 0$ kaikilla $x \in X$, niin aina $\lambda_m > 0$ ja siten $\frac{h_\mu}{\lambda_\mu}$ on määritelty. Seuraavaksi käydään läpi lauseen 6.8 todistus läpi. Määritellään aluksi apukuvaus $\psi :]0,1[\to \mathbb{R}$ asettamalla jokaiselle $x \in X$

$$\psi(x) = 2 \log x. \tag{6.5}$$

Tällöin mitalle $\mu \in \mathcal{M}_T$ Ljapunovin eksponentti voidaan kirjoittaa $\lambda_\lambda = -\int_X \psi \, \mathrm{d}\mu$. Otetaan käyttöön vielä muutama merkintä. Määritellään jokaiselle äärelliselle sanalle $\mathbf{a}$ kuvajoukko

$$I^*_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}}(]0,1[) =]\min\{T_{\mathbf{a}}(0), T_{\mathbf{a}}(1)\}, \max\{T_{\mathbf{a}}(0), T_{\mathbf{a}}(1)\}[.$$

Siten $I^*_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja $I_{\mathbf{a}} = I^*_{\mathbf{a}} \cap X$, joten kutsutaan sitä sylinterin $I_{\mathbf{a}}$ *laajentumaksi* reaaliakselille. Lisäksi merkintä $B(x,r)$ tarkoittaa tässä osiossa avaruuden X palloa ja $B^*(x,r)$ sen laajentumaa reaaliakselille, eli reaaliakselin x-keskeistä ja r-säteistä palloa. Siis $B(x,r) = B^*(x,r) \cap X$.

Todetaan aluksi apukuvaukselle ψ lokaalia Hölderiyttä vastaava säännöllisyystulos.

Lemma 6.10.
Jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sup_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \sup\{|\psi(x) - \psi(y)| : x, y \in I^*_{\mathbf{a}}\} \leq 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Todistus.
Todistus menee vaikkapa induktiolla luvun n suhteen. Tapauksessa $n = 1$ valitaan mielivaltainen $a \in \mathbb{N}$ ja mielivaltaiset $x, y \in I^*_a$. Valitaan $x', y' \in]0,1[$ siten, että $T_a(x') = x$ ja $T_a(y') = y$. Nyt saadaan suoraviivainen arvio erotukselle

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(y)| &= 2|\log(x) - \log(y)| \\ &= 2\left|\log\left(\frac{T_a(x')}{T_a(y')}\right)\right| \\ &= 2\left|\log\left(\frac{a+y'}{a+x'}\right)\right| \leq 2\log 2 \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Kiinnitetään sitten $n \geq 2$ ja tehdään *induktio-oletus*: Jokaisella $k = 1, \ldots, n-1$, $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^k$ ja $u, v \in I^*_{\mathbf{c}}$ pätee

$$|\psi(u) - \psi(v)| \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{1}$$

Kiinnitetään mielivaltainen $\mathbf{a} = a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ ja mielivaltaiset $x, y \in I^*_{\mathbf{a}}$. Taas löytyy $x', y' \in]0,1[$ siten, että $T_{\mathbf{a}}(x') = x$ ja $T_{\mathbf{a}}(y') = y$. Huomaa, että nyt

$$T_{\mathbf{a}}(z) = \frac{1}{a_1 + T_{\tilde{\mathbf{a}}}(z)} \tag{2}$$

kaikille $z \in X$, missä $\tilde{\mathbf{a}} = (a_2, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$. Hyödynnetään vielä lisäksi pientä algebrallista tulosta, joka sanoo, että mikäli $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$, niin kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\alpha + k}{\beta + k} \leq \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{3}$$

Lisäksi voidaan olettaa, että $T_{\tilde{\mathbf{a}}}(y') \geq T_{\tilde{\mathbf{a}}}(x')$. Arvioidaan lopulta erotusta

$$\begin{aligned}
|\psi(x) - \psi(y)| &= 2\left|\log\left(\frac{T_{\mathbf{a}}(x')}{T_{\mathbf{a}}(y')}\right)\right| \\
&\overset{(2)}{=} 2\log\left(\frac{a_1 + T_{\tilde{\mathbf{a}}_1}(y')}{a_1 + T_{\tilde{\mathbf{a}}}(x')}\right) \\
&\overset{(3)}{\leq} 2\log\sqrt{\frac{T_{\tilde{\mathbf{a}}}(y')}{T_{\tilde{\mathbf{a}}}(x')}} \\
&= \frac{1}{2}\left|\psi(T_{\tilde{\mathbf{a}}}(y')) - \psi(T_{\tilde{\mathbf{a}}}(x'))\right| \\
&\overset{(1)}{\leq} \frac{1}{2}3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

Väite seuraa siten induktioperiaatteesta. □

Siten kuvauksen ψ rajoittuma avaruuteen X (jota merkitään samalla symbolilla) on lokaalisti Hölder. Sivuhuomiona tähän liittyvä Gibbsin mitta μ_G, jota kutsutaan *Gaussin mitaksi*, määritetään asettamalla jokaiselle $B \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu_G(B) = \frac{1}{\log 2}\int_B \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Yksityiskohtien tarkastaminen jätetään lukijalle.

Mikäli korvataan jokaiselle pisteelle $x \in X$ pallot sylintereillä $I_{\mathbf{a}(x)|_k}$ saadaan seuraava havainto.

Lemma 6.11.
Olkoon $\mu \in \mathcal{M}_T$ ergodinen siten, että $\lambda_\mu, H(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) < \infty$. Tällöin μ-melkein kaikilla $x \in X$ pätee, että

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu\left(I_{\mathbf{a}(x)|_n}\right) = h_\mu$$
$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\operatorname{diam}\left(I_{\mathbf{a}(x)|_n}\right) = \lambda_\mu.$$

Todistus.
Koska $\alpha_{\hat{\pi}}$ on vahvasti generoiva ja $H(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) < \infty$, niin lauseiden 5.26 ja 5.27 nojalla μ-melkein kaikilla $x \in X$

$$-\frac{1}{n}\log\mu\left(I_{\mathbf{a}(x)|_n}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h_\mu. \tag{1}$$

Edelleen koska $0 < -\int_X \psi\,\mathrm{d}\mu = \lambda_\mu < \infty$, niin ψ on μ-integroituva. Siten Birkhoffin ergodisuuslauseen nojalla μ-melkein kaikilla $x \in X$

$$-\frac{1}{n}S_n\psi(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_\mu. \tag{2}$$

Oletetaan sitten, että pisteelle $x \in X$ on voimassa rajankäynnit (1) ja (2). Merkitään nyt $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$ ja kiinnitetään $n \in \mathbb{N}$. Koska $T_{\mathbf{a}|_n}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$, niin differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla löytyy $z_n \in]0,1[$ siten, että $|T_{\mathbf{a}|_n}(1) - T_{\mathbf{a}|_n}(0)| = |T'_{\mathbf{a}|_n}(z_n)|$. Tällöin

$$\operatorname{diam}\left(I_{\mathbf{a}|_n}\right) = \operatorname{diam}\left(I^*_{\mathbf{a}|_n}\right) = \left|T_{\mathbf{a}|_n}(1) - T_{\mathbf{a}|_n}(0)\right| = \left|T'_{\mathbf{a}|_n}(z_n)\right|.$$

Edelleen saadaan laskettua a) ketjusääntöä käyttämällä, että

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{diam}\left(I_{\mathbf{a}|_n}\right) &= \log\left|T'_{\mathbf{a}|_n}(z_n)\right| \\
&\overset{a)}{=} \log\prod_{k=1}^{n}\left|T'_{a_k}\left(T_{(a_{k+1},\ldots,a_n)}(z_n)\right)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2\log\frac{1}{a_k + T_{(a_{k+1},\ldots,a_n)}(z_n))}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ T^k \left(T_{\mathbf{a}|_n}(z_n) \right). \tag{3}$$

Huomaa, että tapauksessa $k = n$ tarkoittaa $T_{(a_{k+1},\dots,a_n)}$ identtistä kuvausta. Edelleen, koska $T^k(x), T^k \left(T_{\mathbf{a}|_n}(z_n) \right) \in I^*_{\mathbf{a}|_{n-k}}$, missä $k = 0, \dots, n-1$, niin käyttämällä lemmaa 6.10 saadaan

$$\begin{aligned} \left| S_n\psi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ T^k(T_{\mathbf{a}|_n}(z_n)) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \psi \circ T^k(x) - \psi \circ T^k(T_{\mathbf{a}|_n}(z_n)) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} 3 \left(\frac{1}{2} \right)^k \leq 3. \end{aligned} \tag{4}$$

Tällöin yhdistämällä kohdat (2), (3) ja (4) saadaan pisteelle x

$$-\frac{1}{n} \log \operatorname{diam}(I_{\mathbf{a}(x)|_n}) = -\frac{1}{n} S_n\psi(x) + \frac{1}{n} \left(S_n\psi(x) - \log \operatorname{diam} \left(I_{\mathbf{a}(x)|_n} \right) \right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_\mu. \tag{5}$$

Koska (1) ja (5) pätevät μ-melkein kaikille $x \in X$, niin väite seuraa. □

Tällöin mikäli palloja voidaan approksimoida sopivasti sylintereillä, saadaan lause 6.9 todistettua. Jokaiselle kiinnitetylle pisteelle $x \in X$ ja riittävän pienelle $r > 0$ (eli $B(x,r) \subset I_{\mathbf{a}(x)|_1}$) asetetaan

$$\begin{aligned} N(x,r) &= \max \left\{ k \in \mathbb{N} : B(x,r) \subset I_{\mathbf{a}(x)|_k} \right\} \\ n(x,r) &= \min \left\{ k \in \mathbb{N} : I_{\mathbf{a}(x)|_k} \subset B(x,r) \right\}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Selvästi $N(x,r) \leq n(x,r)$ sylinterien sisäkkäisyydestä johtuen ja $N(x,r) \to \infty$, kun $r \to 0$. Olkoon nyt $x \in X$ ja riittävän pieni $r > 0$. Tällöin saadaan arvio

$$\frac{N(x,r)}{n(x,r)} \frac{-\frac{\log \mu\left(I_{\mathbf{a}(x)|_{N(x,r)}}\right)}{N(x,r)}}{-\frac{\log \operatorname{diam}\left(I_{\mathbf{a}(x)|_{n(x,r)}}\right)}{n(x,r)}} \leq \frac{\log \mu\left(B(x,r)\right)}{\log(2r)} \leq \frac{n(x,r)}{N(x,r)} \frac{-\frac{\log \mu\left(I_{\mathbf{a}(x)|_{n(x,r)}}\right)}{n(x,r)}}{-\frac{\log \operatorname{diam}\left(I_{\mathbf{a}(x)|_{N(x,r)}}\right)}{N(x,r)}}. \tag{6.7}$$

Mikäli aina $n(x,r)/N(x,r) \to 1$, kun $r \to 0$, niin lause 6.9 seuraa lemmasta 6.11 ja arviosta (6.7). Seuraavan havainnon perusteella näin käy.

Lemma 6.12.
Olkoon $x \in X$ ja $r > 0$ riittävän pieni, eli $B(x,r) \subset I_{\mathbf{a}(x)|_1}$. Tällöin $n(x,r) \leq N(x,r) + 3$, missä $N(x,r), n(x,r)$ ovat kuten yhtälöissä (6.6).

Todistus.
Huomaa, että voidaan kirjoittaa

$$N(x,r) = \max \left\{ k \in \mathbb{N} : I^*_{\mathbf{a}(x)|_k} \subset B^*(x,r) \right\}$$

ja

$$n(x,r) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : B^*(x,r) \subset I^*_{\mathbf{a}(x)|_k} \right\}.$$

Merkitään nyt $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$, $N = N(x,r)$ ja $n = n(x,r)$. Koska äärelliselle sanalle $\mathbf{c}$ laajentuma $I^*_{\mathbf{c}}$ on aina reaaliakselin avoin väli, niin luvun N määritelmästä johtuen nyt joko (i) $\sup I^*_{\mathbf{a}|_{N+1}} < x + r$ tai (ii) $\inf I^*_{\mathbf{a}|_{N+1}} > x - r$. Todistus nojautuu nyt kuvauksen $T_{\mathbf{a}|_k}$ kasvavuuteen tai laskevuuteen, joka riippuu luvun k pariteetista, ja kuvauksen $|T'_{\mathbf{c}}|$ laskevuuteen mielivaltaiselle äärelliselle sanalle $\mathbf{c}$ (tämä on lukijan helppo todeta).

Valitaan nyt $l = 1, 2$ siten, että tapauksessa (i) luku $N + l$ on pariton ja tapauksessa (ii) se on parillinen. Merkitään $b = a_{N+l+1}$, missä siis a_{N+l+1} on $\mathbf{a}$:n $N + l + 1$. komponentti. Nyt voidaan kirjoittaa

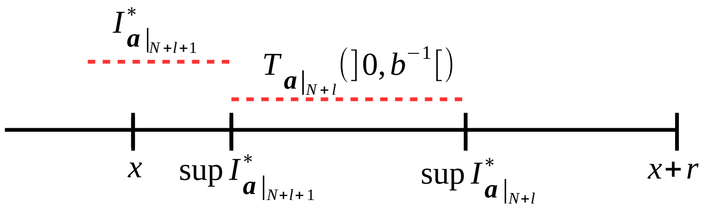
$$I^*_{\mathbf{a}|_{N+l+1}} = T_{\mathbf{a}|_{N+l}}(I^*_b) = T_{\mathbf{a}|_{N+l}}\left(\left](b+1)^{-1}, b^{-1}\right[\right). \tag{1}$$

Kuvaus $T_{\mathbf{a}|_{N+l}}$ on nyt laskeva tapauksessa (i) ja nouseva tapauksessa (ii). Tällöin saadaan tapauksessa (i), että

$$\begin{aligned} x &\leq \sup I^*_{\mathbf{a}|_{N+l+1}} \overset{(1)}{=} \sup T_{\mathbf{a}|_{N+l}}\left(](b+1)^{-1}, b^{-1}[\right) = \inf T_{\mathbf{a}|_{N+l}}\left(]0,(b+1)^{-1}[\right) \\ &= \inf I^*_{\mathbf{a}|_{N+l}} \leq \sup I^*_{\mathbf{a}|_{N+l}} \leq \sup I^*_{\mathbf{a}|_{N+1}} < x+r \end{aligned}$$

ja vastaavasti tapauksessa (ii)

$$\begin{aligned} x &\geq \inf I^*_{\mathbf{a}|_{N+l+1}} \overset{(1)}{=} \inf T_{\mathbf{a}|_{N+l}}\left(](b+1)^{-1}, b^{-1}[\right) = \sup T_{\mathbf{a}|_{N+l}}\left(]0,(b+1)^{-1}[\right) \\ &= \sup I^*_{\mathbf{a}|_{N+l}} \geq \inf I^*_{\mathbf{a}|_{N+l}} \geq \inf I^*_{\mathbf{a}|_{N+1}} > x-r. \end{aligned}$$



Tilanteen visualisaatio tapauksessa (i).

Kummassakin tapauksessa nähdään, että

$$\operatorname{diam}\left(T_{\mathbf{a}|_{N+l}}\left(]0,(b+1)^{-1}[\right)\right) < r. \tag{2}$$

Seuraavaksi todetaan, että välin $T_{\mathbf{a}|_{N+l}}(I^*_b)$ pituus ei voi ylittää välin $T_{\mathbf{a}|_{N+l}}\left(]0,(b+1)^{-1}[\right)$ pituutta. Käyttämällä a) kuvauksen $|T'_{\mathbf{a}|_{N+l}}|$ laskevuutta ja b) differentiaalilaskennan väliarvolausetta saadaan

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}\left(T_{\mathbf{a}|_{N+l}}(I^*_b)\right) &= \operatorname{diam}\left(T_{\mathbf{a}|_{N+l}}\left(](b+1)^{-1}, b^{-1}[\right)\right) \\ &\overset{b)}{\leq} \operatorname{diam}\left(T_{\mathbf{a}|_{N+l}}\left(](b+1)^{-1}, b^{-1}[\right)\right) \sup_{y\in I^*_b}\left|T'_{\mathbf{a}|_{N+l}}(y)\right| \\ &= \frac{1}{b(b+1)} \sup_{y\in I^*_b}\left|T'_{\mathbf{a}|_{N+l}}(y)\right| \\ &\leq \frac{1}{b} \sup_{y\in I^*_b}\left|T'_{\mathbf{a}|_{N+l}}(y)\right| \\ &\overset{a)}{\leq} \frac{1}{b} \inf_{y\in]0,(b+1)^{-1}[}\left|T'_{\mathbf{a}|_{N+l}}(y)\right| \\ &= \operatorname{diam}\left(]0,(b+1)^{-1}[\right) \inf_{y\in]0,(b+1)^{-1}[}\left|T'_{\mathbf{a}|_{N+l}}(y)\right| \\ &\overset{b)}{\leq} \operatorname{diam}\left(T_{\mathbf{a}|_{N+l}}\left(]0,(b+1)^{-1}[\right)\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Koska nyt $x \in I^*_{\mathbf{a}|_{N+l+1}} = T_{\mathbf{a}|_{N+l}}(I^*_b)$, niin arvioiden (2) ja (3) nojalla välttämättä

$$I^*_{\mathbf{a}|_{N+l+1}} \subset B^*(x,r)$$

ja siten $n \leq N+l+1 \leq N+3$. □

Lemma 6.12 viimeistelee siten lauseen 6.9 todistuksen. Osion loppuun todetaan muutama pieni huomio jatkoa varten. Riittävä ehto mitan μ entropian $H(\alpha_{\pi\mu},\mu)$ ja Ljapunovin eksponentin äärellisyydelle on sen hännän polynomiaalinen väheneminen.

Lemma 6.13.
Olkoon $\mu \in \mathcal{M}_T$. Mikäli löytyy $\delta > 0$ siten, että $\mu(\{x \in X : a_1(x) \geq n\}) = \mathcal{O}(n^{-\delta})$, niin $\lambda_\mu, H(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) < \infty$.

Todistus.
Oletus voidaan yhtäpitävästi kirjoittaa $\sum_{a=n}^{\infty} \mu(I_{\mathbf{a}}) = \mathcal{O}(n^{-\delta})$. Ilman yleisyyden menettämistä voidaan olettaa vakion $C > 0$ olemassaolo siten, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{a=n}^{\infty} \mu(I_{\mathbf{a}}) \leq Cn^{-\delta}. \tag{1}$$

Todetaan ensiksi Ljapunovin eksponentin äärellisyys. Nyt voidaan arvioida, että

$$\begin{aligned}
\lambda_\mu &= -2 \int_X \log x \,\mathrm{d}\mu(x) \leq 2 \sum_{a=1}^{\infty} \mu(I_a) \log(a+1) \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{a=2^k}^{2^{k+1}-1} \mu(I_a) \log(a+1) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2 \sum_{a=2^k}^{2^{k+1}-1} \mu(I_a) \log 2^{k+1} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2 \log 2 (k+1) \sum_{a=2^k}^{\infty} \mu(I_a) \overset{(1)}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} 2 \log 2 (k+1) C 2^{-\delta k} \\
&= (2C \log 2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) 2^{-\delta k} < \infty.
\end{aligned}$$

Entropian äärellisyyttä varten käytetään apuna kuvausta $-u$, missä $u : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, on kuten lemmassa 5.21. Nyt a) on helppo huomata, että $-u$ on kasvava välillä $[0, e^{-1}]$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
H(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) &= -\sum_{a=1}^{\infty} \mu(I_a) \log \mu(I_a) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(- \sum_{\substack{2^k \leq a < 2^{k+1} \\ \mu(I_a) \geq 2^{-2(k+3)}}} \mu(I_a) \log \mu(I_a) - \sum_{\substack{2^k \leq a < 2^{k+1} \\ \mu(I_a) < 2^{-2(k+3)}}} \mu(I_a) \log \mu(I_a) \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left((2 \log 2)(k+3) \sum_{a=2^k}^{\infty} \mu(I_a) + \sum_{\substack{2^k \leq a < 2^{k+1} \\ \mu(I_a) < 2^{-2(k+3)}}} -u\left(\mu(I_a)\right) \right) \\
&\overset{a)}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \left((2 \log 2)(k+3) \sum_{a=2^k}^{\infty} \mu(I_a) + \sum_{\substack{2^k \leq a < 2^{k+1} \\ \mu(I_a) < 2^{-2(k+3)}}} -u\left(2^{-2(k+3)}\right) \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left((2 \log 2)(k+3) \sum_{a=2^k}^{\infty} \mu(I_a) + 2^k 2^{-2(k+3)} (2 \log 2)(k+3) \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \left((2 \log 2)(k+3) C 2^{-\delta k} + (2^{-5} \log 2)(k+3) 2^{-k} \right) \\
&= (2C \log 2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+3) 2^{-\delta k} + (2^{-5} \log 2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+3) 2^{-k} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Lopuksi todetaan, että eksakti dimensio avaruuden X Borel-todennäköisyysmitalle ei voi ylittää lukua 1.

Lemma 6.14.
Mikäli avaruuden X Borel-todennäköisyysmitta μ on eksaktisti dimensionaalinen, niin $\dim_H \mu \leq 1$.

Todistus.
Tehdään *antiteesi*: $\dim_H \mu > 1$. Tällöin määritelmän 6.7 nojalla löytyy $A \in \mathcal{B}(X)$, jolle $\mu(A) = 1$ ja jokaiselle pisteelle $x \in A$ löytyy $0 < r_x < \frac{1}{2}$, siten että kaikille $0 < r \leq r_x$ pätee

$$1 < \dim_H \mu = \lim_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log(2r)}.$$

Nyt pisteelle $x \in A$ voidaan kirjoittaa vaihtoehtoisesti

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log(2r)} = \lim_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}.$$

Tällöin jokaiselle $x \in A$ ja $0 < r \leq r_x$ pätee

$$\mu(B(x,r)) < r. \tag{1}$$

Tarkastellaan seuraavaksi mitan m yhtälön (6.2) mukaisesti asetettua laajentumaa $\tilde{\mu}$ reaaliakselille, joka oli välin $[0,1]$ kantama Borel-mitta. Nyt annetuille $x \in A$, $0 < r < r_x$ ja $0 < \varepsilon < r_x - r$ saadaan

$$\mu([x-r, x+r] \cap X) \leq \mu(B(x, r+\varepsilon)) < r + \varepsilon.$$

ja siten antamalla $\varepsilon \to 0$ nähdään $\mu([x-r, x+r] \cap X) \leq r$. Tällöin tästä huomiosta ja kohdasta (1) saadaan laajentuman määritelmää käyttäen, että jokaiselle $x \in A$ ja $0 < r < \frac{r_x}{2}$

$$\tilde{\mu}([x-r, x+r]) = \mu([x-r, x+r] \cap X) \leq r < 2r = \operatorname{diam}([x-r, x+r]). \tag{2}$$

Nyt voidaan olettaa, että a) jokaisella $x \in A$ pätee $[x - r_x, x + r_x] \subset]0,1[$ ja b) $\inf_{x \in A} r_x = 0$. Tällöin käyttämällä oletusta b) ja Vitalin peitelausetta 2.23 (A on nyt reaaliakselin Borel-joukko) suljetuille väleille $[x - 4^{-1} r_x, x + 4^{-1} r_x]$ löytyy numeroituvasti pisteitä $x_1, x_2, \ldots \in A$ siten, että välit $[x_i - 4^{-1} r_{x_i}, x_i + 4^{-1} r_{x_i}]$ ovat c) pareittain pistevieraat ja

$$\tilde{\mu}\left(A \setminus \bigsqcup_i [x_i - 4^{-1} r_{x_i}, x_i + 4^{-1} r_{x_i}]\right) = 0. \tag{3}$$

Mutta tällöin

$$\begin{aligned}
1 &= \mu(A) \\
&\overset{(6.2)}{=} \tilde{\mu}(A) \\
&\overset{a)}{=} \tilde{\mu}\left(A \cup \bigsqcup_i [x_i - 4^{-1} r_{x_i}, x_i + 4^{-1} r_{x_i}]\right) \\
&= \tilde{\mu}\left(A \setminus \bigsqcup_i [x_i - 4^{-1} r_{x_i}, x_i + 4^{-1} r_{x_i}]\right) + \tilde{\mu}\left(\bigsqcup_i [x_i - 4^{-1} r_{x_i}, x_i + 4^{-1} r_{x_i}]\right) \\
&\overset{(3)}{=} \sum_i \tilde{\mu}\left([x_i - 4^{-1} r_{x_i}, x_i + 4^{-1} r_{x_i}]\right) \\
&\overset{(2)}{<} \sum_i \operatorname{diam}\left([x_i - 4^{-1} r_{x_i}, x_i + 4^{-1} r_{x_i}]\right) \overset{a)+c)}{\leq} 1.
\end{aligned}$$

Tämä on ristiriita ja siten välttämättä $\dim_H \mu \leq 1$. $\square$

6.4 Gibbsin mitan Fourier-muunnoksen väheneminen

Lopuksi tarkastellaan, millä reunaehdoilla Gibbsin mitan tai sen laajennuksen Fourier-muunnos on polynomiaalisesti vähenevä ja erityisesti siten Rajchman-mitta. Seuraava tulos, jota voi pitää luvun ja oikeastaan koko tutkielman huipentumana, antaa yhden vastauksen tähän kysymykseen katso [10, Lause 1.3 s.4].

Lause 6.15 (**Jordan–Sahlsten**).
Olkoon $\mu \in \mathcal{M}_T$ Gibbsin mitta Gaussin kuvaukselle ja $\tilde{\mu}$ yhtälön mukainen laajentuma. Mikäli

(i) jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee $\mu(\{x \in X : a(x)_1 \geq n\}) = \mathcal{O}(n^{-\delta})$, jollain $\delta > 0$ ja

(ii) $\dim_H \mu > \frac{1}{2}$,

niin löytyy $\eta > 0$ siten, että $\hat{\tilde{\mu}}(z) = \mathcal{O}(|z|^{-\eta})$. Siten $\tilde{\mu}$ on Rajchman-mitta.

Huomaa, että lemman 6.12 nojalla ehto (i) takaa eksatin dimensionaalisuuden. On huomattava, että tulos on osoitettu nimenomaan Gaussin kuvauksen antamassa dynaamisessa systeemissä. Jordan ja Sahlsten ovat käyttäneet nyt mitan $\tilde{\mu}$ muunnokselle konventiota

$$\hat{\tilde{\mu}}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i z y} \mathrm{d}\tilde{\mu}(y),$$

joka poikkeaa tässä työssä käytetystä määritelmästä. Koska ne kuitenkin poikkeavat vain vakiokertoimella toisistaan, on tämä yhdentekevää. Nyt voidaan kysyä, voiko tuloksen yleistää yleisiin vasemman siirron konjugaattisysteemeihin. Lauseelle 6.15 löytyy erinäisiä sovelluksia, katso [10, s.4–5].

Lopuksi käydään Jordanin ja Sahlstenin todistus lauseelle 6.15 läpi ideatasolla. Tarkka todistus on hyvin työläs ja tekninen ja lukijan tehtäväksi jää itse tutkia tämä paperista [10] läpi. Tarkastelun painopiste onkin tässä katsauksessa ennen kaikkea kohdissa, joihin voidaan soveltaa aiemmin esiteltyä teoriaa vasemman siirron konjugaattisysteemeistä. Kappaleen 6.3 tuloksia tarvitaan myös tarkasteluissa. Tarkastelu on jaoteltu nyt pienempiin pykäliin.

6.4.1 Alustus

Tarkasteluissa μ on lauseen 6.15 ehdot toteuttava Gibbsin mitta Gaussin kuvaukselle ja $Q \geq 1$ on määritelmän 5.37 mukainen vakio mitalle μ. Olkoon edelleen φ nyt lauseen 5.57 mukainen potentiaali, jolle seuraavat ominaisuudet ovat voimassa

(i) $P(\varphi) = 0$,

(ii) $\varphi \leq 0$,

(iii) $\mathcal{L}_\varphi 1 = 1$,

(iv) $\int_X \mathcal{L}_\varphi g \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu$ jokaisella $g \in C_B(X; \mathbb{C})$.

Jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ määritellään *paino* $w_{\mathbf{a}} : X \to \mathbb{R}$ asettamalla jokaiselle $x \in X$

$$w_{\mathbf{a}}(x) = e^{S_n \varphi(T_{\mathbf{a}}(x))}.$$

Kyseessä on merkintöjä selkeyttävä notaatio, sillä nyt arvio (6.4) sylinterin $I_{\mathbf{a}}$ mitasta voidaan kirjoittaa

$$Q^{-1} w_{\mathbf{a}} \leq \mu(I_{\mathbf{a}}) \leq Q w_{\mathbf{a}}. \tag{6.8}$$

Edelleen yhtälöstä (6.3) saadaan esitys n kertaa siirto-operaattorilla operoidulle kuvaukselle $g \in C_B(X; \mathbb{C})$

$$\mathcal{L}_\varphi{}^n g = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} w_{\mathbf{a}} \, (g \circ T_{\mathbf{a}}). \tag{6.9}$$

Lauseen 6.15 oletuksesta (i) seuraa nyt lemman 6.14 ja lauseen 6.8 nojalla, että μ on eksaktisti dimensionaalinen ja $\dim_H \mu = {}^{h_\mu}/_{\lambda_\mu}$. Merkitään tätä lukua jatkossa symbolilla s. Kuvaus $\psi : X \to \mathbb{R}$ asetetaan kuten yhtälössä (6.5). Birkhoffin ergodisuuslauseen nojalla saadaan nyt, että μ-melkein kaikilla $x \in X$

$$-\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(x) = -\int_X \psi \, \mathrm{d}\mu = \lambda_\mu.$$

Koska nyt $H(\alpha_{\hat{\pi}}, \mu) < \infty$ ja $P(\varphi) = 0$, niin tasapainoyhtälön (5.8) mukaisesti

$$h_\mu = -\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu.$$

Tällöin edelleen soveltaen ergodisuuslausetta saadaan, että μ-melkein kaikilla $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n\varphi(x)}{S_n\psi(x)} = \frac{h_\mu}{\lambda_\mu} = s.$$

Jatkossa halutaan approksimoida dimensiota s osamäärän ${}^{S_n\varphi(x)}/{}_{S_n\psi(x)}$ avulla. Lemman 6.14 ja lauseen 6.15 oletuksen (ii) nojalla saadaan arvio dimensiolle

$$\frac{1}{2} < s \leq 1. \tag{6.10}$$

6.4.2 Suuret poikkeamat ja säännölliset sylinterit

Aiemman tarkastelun perusteella μ-melkein kaikille $x \in X$ saadaan

$$\frac{1}{n} S_n\varphi(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\lambda_\mu \quad \text{ja} \quad \frac{S_n\varphi(x)}{S_n\psi(x)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s.$$

Annetulle tarkkuudelle $\varepsilon > 0$ voidaan osoittaa, että niiden pisteiden, joille $\frac{1}{n}S_n\varphi(x)$ poikkeaa tarkkuuden ε yli termistä $-\lambda_\mu$, joukon mitta vähenee eksponentiaalisesti muuttujan n suhteen. Vastaavaa koskee myös niiden pisteiden joukkoa, joille $\frac{S_n\varphi(x)}{S_n\psi(x)}$ poikkeaa tarkkuuden ε yli dimensiosta s. Siis jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ja $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että jokaiselle $n \geq n_1$

$$\begin{aligned} &\mu\left(\left\{x \in X : \left|\frac{1}{n}S_n\psi(x) + \lambda\right| > \varepsilon\right\}\right) \leq e^{-n\delta} \quad \text{ja} \\ &\mu\left(\left\{x \in X : \left|\frac{S_n\varphi(x)}{S_n\psi(x)} - s\right| > \varepsilon\right\}\right) \leq e^{-n\delta}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Näitä kutsutaan *arvioiksi suurille poikkeamille*, katso [10, s.11–14]. Epäyhtälöiden (6.11) todistuksessa tarvitaan paitsi erinäisiä teknisiä tuloksia, myös erityisesti informaatiota

$$\mu(\{x \in X : a(x)_1 \geq n\}) = \mathcal{O}(n^{-\delta}).$$

Annetuille $\varepsilon > 0$ ja $n \geq 2$ määritellään *n-säännöllisten pisteiden joukko* asettamalla

$$A_n(\varepsilon) = \left\{x \in X : \left|\frac{1}{n}S_n\psi(x) + \lambda\right|, \left|\frac{S_n\varphi(x)}{S_n\psi(x)} - s\right| < \varepsilon\right\}.$$

Edelleen annetulle $\varepsilon > 0$ asetetaan *n-säännöllisten sanojen* kokoelma asettamalla

$$\mathcal{R}_n(\varepsilon) = \bigcap_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n} \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n : I_{\mathbf{a}|_k} \subset A_k(\varepsilon)\}.$$

Mikäli $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$ on n-säännöllinen, niin tällöin $I_\mathbf{a}$ *on n-säännöllinen sylinteri.* Merkitään näiden sylinterien unionia

$$R_n(\varepsilon) = \bigcup_{\mathbf{a}\in\mathcal{R}_n(\varepsilon)} I_\mathbf{a}.$$

Seuraavaksi annetulle $\varepsilon > 0$ löytyy sopivasti valittu parillinen $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sitten, että jokaiselle $n \geq n_0$ ja $\mathbf{a} \in \mathcal{R}_n(\varepsilon)$ saadaan erinäisiä arvioita mm. vastaavaan sylinteriin $I_\mathbf{a}$ ja painoon $w_\mathbf{a}$ liittyen, joita tarvitaan myöhemmin, katso [10, s.15–16]. Ympäripyöreästi sanottuna n-säännöllisillä sylintereillä on erinäisiä säännöllisyysominaisuuksia, kun $n \geq n_0$. Edelleen saadaan arvioiden (6.11) pohjalta jokaiselle $n \geq n_0$ arvio

$$\mu\left(X \setminus R_n(\varepsilon)\right) \leq e^{-\frac{\delta n}{4}}, \tag{6.12}$$

missä $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{2})$ on kuten arvioissa suurille poikkeamille, katso [10, Lemma 5.2 s.16]. Siispä isoilla indekseillä n-säännöllisten sylinterien ulkopuolelle jää mitan mielessä muuttujan n suhteen eksponentiaalisesti pienenevä joukko, kun n kasvaa rajatta.

6.4.3 Vakioiden kiinnitys ja Fourier-muunnoksen hajotelma

Seuraavaksi päästään aloittelemaan varsinaista todistusta, katso [10, s.16–17]. Määritellään aluksi vakio

$$\eta_s = \frac{2s^2 - s}{(4-s)(1+2s)}.$$

Huomaa, että arvion (6.10) nojalla $\eta_s > 0$. Kiinnitetään sitten $\varepsilon > 0$ niin pieneksi, että

$$\varepsilon < \frac{1}{26} \text{ ja } \eta_s - 38\varepsilon > 0.$$

Tavoitteena on nyt osoittaa

$$|\hat{\tilde{\mu}}(z)| = \mathcal{O}\left(|z|^{-\eta_s+38\varepsilon} + |z|^{-\frac{\delta}{12\lambda_\mu}}\right), \tag{6.13}$$

jolloin lause 6.15 selvä. Olkoon sitten $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ja $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ kuten aiemmin. Kiinnitetään seuraavaksi z siten, että $|z| \geq e^{(1+2s)\lambda_\mu n_0}$. Tällöin löytyy $n \geq n_0$, jolle

$$e^{(1+2s)\lambda_\mu n} \leq |z| < e^{(1+2s)\lambda_\mu (n+1)}. \tag{6.14}$$

Tarkastellaan muunnosta $\hat{\tilde{\mu}}$ pisteessä z. Aluksi voidaan kirjoittaa

$$\hat{\tilde{\mu}}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i z y} \, \mathrm{d}\tilde{\mu}(x) = \int_X e^{-2\pi i z y} \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Määritellään kuvaus $h_z : X \to \mathbb{C}$, missä kaikille $x \in X$ asetetaan $h_z(x) = e^{-2\pi i z y}$. Selvästi $h \in C_B(X;\mathbb{C})$, joten nyt voidaan soveltaa Ruellen siirto-operaattoria n kertaa ja saadaan

$$\hat{\tilde{\mu}}(z) = \int_X h_z \, \mathrm{d}\mu = \int_X \mathcal{L}_\varphi{}^n h_z \, \mathrm{d}\mu.$$

Seuraavaksi tarkastellaan n kertaa operoitua kuvausta h. Nyt yhtälön (6.9) mukaisesti

$$\mathcal{L}_\varphi{}^n h_z = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} w_{\mathbf{a}} \, (h \circ T_{\mathbf{a}}).$$

Jaetaan tämä säänöllisten ja epäsäännöllisten sanojen avulla kahden funktion summaksi $\mathcal{L}_\varphi{}^n h_z = f_z + g_z$, missä

$$f_z = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{R}_n(\varepsilon)} w_{\mathbf{a}} \, (h \circ T_{\mathbf{a}})$$

on *säännöllinen osa* ja

$$g_z = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n \setminus \mathcal{R}_n(\varepsilon)} w_{\mathbf{a}} \, (h \circ T_{\mathbf{a}}).$$

on *epäsäännöllinen osa*. Tällöin muunnos saadaan hajotettua integraaleiksi säännöllisen ja epäsäännöllisen osan yli

$$\hat{\tilde{\mu}}(z) = \int_X f_z \, \mathrm{d}\mu + \int_X g_z \, \mathrm{d}\mu. \tag{6.15}$$

Motivaatio hajotelmaan on se, että säännöllisen osan integraalin arvioinnissa voidaan hyödyntää n-säännöllisten sylinterien ominaisuuksia, kun taas toista integraalia voidaan kontrolloida mitan mielessä.

6.4.4 Säännöllisen ja epäsäännöllisen osan integraalin arviointi

Mikäli integraaleja $\int_X f_z \, \mathrm{d}\mu$ ja $\int_X g_z \, \mathrm{d}\mu$ osataan estimoida sopivasti, niin edellisen yhtälön (6.15) pohjalta saadaan haluttu väite. Jatkossa notaatio $u(z) \ll v(z)$ tarkoittaa, että löytyy riippumaton vakio K siten, että jokaiselle $z \in \mathbb{R}$, jolle $|z| \geq e^{(1+2s)\lambda_\mu n_0}$, pätee

$$u(z) \leq K v(z).$$

Epäsäännöllisen osan integraali on helppo tapaus, sillä sitä voidaan kontrolloida mitalla suurten poikkeamien arvion pohjalta. Saadaan siis arvio

$$\begin{aligned}\int_X |g_z| \,\mathrm{d}\mu &= \int_X \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n\setminus\mathcal{R}_n(\varepsilon)} w_{\mathbf{a}} \,\mathrm{d}\mu \overset{a)}{\leq} \int_X \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n\setminus\mathcal{R}_n(\varepsilon)} Q\mu(I_{\mathbf{a}}) \,\mathrm{d}\mu \\ &= Q \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n\setminus\mathcal{R}_n(\varepsilon)} \mu(I_{\mathbf{a}}) = Q\mu(X\setminus R_n(\varepsilon)) \\ &\overset{b)}{\leq} Qe^{-\frac{\delta n}{4}} \overset{c)}{\leq} Qe^{\frac{\delta}{4}}|z|^{-\frac{\delta}{4(1+2s)\lambda_\mu}} \\ &= Qe^{\frac{\delta}{4}}|z|^{\frac{\delta}{4\lambda_\mu}(\frac{1}{3}-\frac{1}{1+2s})}|z|^{-\frac{\delta}{12\lambda_\mu}} \overset{d)}{\leq} Qe^{\frac{\delta}{4}}|z|^{-\frac{\delta}{12\lambda_\mu}}.\end{aligned}$$

Tässä kohdassa a) on käytetty arviota (6.8), kohdassa b) arviota (6.12), kohdassa c) arviota (6.14) itseisarvolle $|z|$ ja kohta d) seuraa havainnoista $\frac{\delta}{4\lambda_\mu}(\frac{1}{3}-\frac{1}{1+2s}) \leq 0$ ja $|z|>1$. Siten epäsäännöllisen osan integraalille pätee

$$\int_X |g_z| \,\mathrm{d}\mu \ll |z|^{-\frac{\delta}{12\lambda_\mu}}. \tag{6.16}$$

Seuraavaksi päästään säännöllisen osan arviointiin, johon Jordan ja Sahlsten ovat varsinaisesti keskittyneet, katso [10, s.19–27]. Ohitetaan kaikki teknisyydet ja tarkastellaan muutamaa käännekohtaa. Aluksi hyödyntämällä säännöllisten sylinterien ominaisuuksia saadaan arvio

$$\int_X |f_z| \,\mathrm{d}\mu \ll e^{(-\beta\lambda_\mu+\varepsilon\gamma)n} + \|f_z\|_2^2 e^{((1-s)\alpha\lambda_\mu(3-s)\beta\lambda_\mu+3\lambda_\mu\varepsilon\gamma)n} + e^{-\frac{\delta\gamma n}{4}}, \tag{6.17}$$

missä $\alpha = 2s+2\varepsilon$, $\beta = (1+2s)\eta_s$, $\gamma = \alpha+\beta$ ja $\|f_z\|_2$ on yhtälön (2.2) mukainen $\mathcal{L}^2$-seminormi[3] Lebesguen mitan rajoittuman suhteen avaruudessa X, katso käsittelyä varten [10, s.19–20 ja s.26]. Tarkastellaan epäyhtälön (6.17) oikealla puolella olevia termejä, joita merkitään nyt

$$\begin{aligned}t_1(z) &= e^{(-\beta\lambda_\mu+\varepsilon\gamma)n}, \\ t_2(z) &= \|f_z\|_2^2 e^{((1-s)\alpha\lambda_\mu(3-s)\beta\lambda_\mu+3\lambda_\mu\varepsilon\gamma)n}, \\ t_3(z) &= e^{-\frac{\delta\gamma n}{4}}.\end{aligned}$$

Termeille $t_1(z)$ ja $t_3(z)$ on helppo laskea arvion (6.13) pohjalta arviot

$$t_1(z) \ll |z|^{-\eta_s+7\varepsilon} \quad \text{ja} \quad t_3(z) \ll |z|^{-\frac{\delta}{12\lambda_\mu}}, \tag{6.18}$$

katso [10, s.26]. Ongelmaksi muodostuu termi $t_2(z)$, sillä $\mathcal{L}^2$-seminormin neliön edessä oleva kerroin $e^{((1-s)\alpha\lambda_\mu(3-s)\beta\lambda_\mu+3\lambda_\mu\varepsilon\gamma)n}$ kasvaa eksponentiaalisesti luvun n kasvaessa rajatta. Ongelma on kuitenkin poistuva, sillä normin neliölle saadaan arvio

$$\|f_z\|_2^2 \ll |z|^{-\frac{1}{2}} e^{(\frac{\lambda_\mu}{2}+15\lambda_\mu\varepsilon)n} + e^{(-s\lambda_\mu+3\lambda_\mu\varepsilon)n}, \tag{6.19}$$

katso [10, s.20–27]. Arviointityö on erittäin työläs, tekninen ja nojaa vahvasti säännöllisiin sylintereihin ja Gaussin kuvauksen epälineaariseen luonteeseen. Tämän avulla pienen laskemisen jälkeen, katso [10, s.27], saadaan myös termille $t_2(z)$ arvio

$$t_2(z) \ll |z|^{-\eta_s+38\varepsilon}. \tag{6.20}$$

Tällöin arvioiden (6.17), (6.18) ja (6.20) pohjalta saadaan

$$\int_X |f_z| \,\mathrm{d}\mu \ll |z|^{-\eta_s+38\varepsilon} + |z|^{-\frac{\delta}{12\lambda_\mu}}.$$

Tämä yhdistettynä yhtälöön (6.15) ja arvioon (6.16) saadaan lopulta arvio (6.14) ja lause 6.15 on siten selvä.

[3] Jordan ja Sahlsten puhuvat L^2-normista

Kirjallisuutta

[1] Ravi P. Agarwal, Kanishka Pereral ja Sandra Pinelas: *An Introduction to Complex Analysis.* Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[2] Richard F. Bass: *Real Analysis for Graduate Students Version 2.1.* 2013.

[3] Richard F. Bass: *Stochastic Processes.* Cambridge University Press, Cambridge , 2011.

[4] Lennart Carleson: *Selected problems on exceptional sets.* D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton NJ, 1967.

[5] Keith Condrad: *The Gaussian Integral.* http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/gaussianintegral.pdf. Linkkiin viitattu 2.8.2016.

[6] Ioannis Farmakis ja Martin Moskowitz: *Fixed Point Theorems and Their Applications.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack NJ, 2013.

[7] Mi-Ho Giga, Yoshikazu Giga ja Jürgen Saal: *Nonlinear Partial Differential Equations: Asymptotic Behavior of Solutions and Self-Similar Solutions.* Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 2010.

[8] Edwin Hewitt ja Karl Stromberg: *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable.* Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1965.

[9] John K. Hunter: *Measure Theory.* https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_notes.pdf. Linkkiin viitattu 2.8.2016.

[10] Thomas Jordan ja Tuomas Sahlsten: *Fourier transforms of Gibbs measures for the Gauss map.* Math. Ann. 364 (2016), no.3-4, s.983–1023.

[11] A. Ya. Khinchin: *Continued Fractions.* Dover Publications, Inc., Mineola NY, 1997.

[12] Davar Khosnenvisan: *Handout on Riesz Kernels and Fourier Analysis.* http://www.math.utah.edu/~davar/ps-pdf-files/Denmark07/Handout_RieszKernels.pdf. Linkkiin viitattu 2.8.2016.

[13] Tero Kilpeläinen: *Mitta- ja integraaliteoria.* http://users.jyu.fi/~miparvia/Opetus/Mitta/MATS110-1.pdf. Linkkiin viitattu 2.8.2016.

[14] Carlos S. Kubrusly: *Measure Theory: A First Course.* Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.

[15] Boris Makarov ja Anatolii Podkorytov: *Real Analysis: Measures, Integrals and Applications.* Springer-Verlag, London, 2013.

[16] Pertti Mattila: *Fourier Analysis and Hausdorff Dimension.* Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[17] Pertti Mattila: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[18] Pertti Mattila: *Hausdorff dimension, projections, and the Fourier transform.* Publ. Mat. 48 (2004), no.1, s.3–48.

[19] Pertti Mattila, Manuel Morán ja José-Manuel Rey: *Dimension of a measure.* Studia Math. 142 (2000), no.3, s.219–233.

[20] R. Daniel Mauldin ja Mariusz Urbański: *Graph Directed Markov Systems: Geometry and Dynamics of Limit Sets.*
Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[21] Gabriel Nagy: *Real Analysis Version 2.0.*
https://www.math.ksu.edu/~nagy/real-an/ Linkkiin viitattu 2.8.2016.

[22] Omri Sarig: *Lecture Notes on Ergodic Theory.*
http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~sarigo/506/ErgodicNotes.pdf.
Linkkiin viitattu 2.8.2016.

[23] Omri Sarig: *Phase Transitions for Countable Markov Shifts.*
Comm. Math. Phys. 217 (2001), no.3, s.555–577.

[24] Robert S. Strichartz: *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms.*
CRC Press, Boca Raton, 1994.

[25] Peter Walters: *An Introduction to Ergodic Theory.*
Springer-Verlag, New York Berlin, 1982.