SUBSTITUUTIOJOUSTON ESTIMOINTI: SIMULOINTIHAVAINTOJA OLETUSTEN VAIKUTUKSISTA TULOKSIIN

Jyväskylän yliopisto
Kauppakorkeakoulu

Pro gradu -tutkielma

2016

Timo Eirola
Taloustiede
Ohjaaja:
Jaakko Pehkonen

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

TIIVISTELMÄ

Tekijä Timo Eirola	
Työn nimi Substituutiojouston estimointi: simulointihavaintoja oletusten vaikutuksista tuloksiin	
Oppiaine Taloustiede	Työn laji Pro gradu -työ
Aika Maaliskuu 2016	Sivumäärä 43

Tiivistelmä – Abstract

Tässä työssä tutkitaan substituutiojouston estimointia. Substituutiojousto on tunnusluku, joka kuvaa tuotantopanoksen korvaamisen helppoutta jollakin toisella tuotantopanoksella. Substituutiojousto voidaan estimoida jonkin tuotantofunktion parametrien avulla. Tässä työssä tarkastellaan lähemmin CES- ja Translog-tuotantofunktioita.

Substituutiojousto on määritelty alun perin kahden tuotantopanoksen tuotantofunktioille. Määritelmä voidaan kuitenkin yleistää usean tuotantopanoksen tuotantofunktioille. Esimerkkejä substituutiojouston yleistyksistä usean tuotantopanoksen tilanteessa ovat Allen-substituutiojousto, Morishima-substituutiojousto ja varjosubstituutiojousto.

Sekä substituutiojouston että sen yleistysten estimointi vaatii useita taustaoletuksia. Tässä työssä hahmotellaan erästä oletuskehikkoa, jossa yritysten tuotantofunktiot ovat CES-muotoisia. Oletuksia tarkastellaan myös esittämällä simulointiesimerkkejä, joissa oletukset eivät toteudu kaikilta osin. Simuloinnin avulla on mahdollista tarkastella, millä tavalla oletusten vapauttaminen vaikuttaa estimoinnin onnistumiseen.

Asiasanat
Susbtituutiojousto, tuotantofunktio, yrityksen teoria, estimointi, simulointi

Säilytyspaikka Jyväskylän yliopiston kauppakorkeakoulu

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

Tässä työssä tutkitaan yrityksen tuotantopanosten kysyntään liittyvien joustojen estimointia. Pääasiallisen tarkastelun kohteina ovat substituutiojousto ja sen laajennukset. Tarkastelun kohteina olevat joustot liittyvät erityisesti yrityksen teoriaan, vaikka näitä joustoja käsiteltäessä voidaan yrityksen näkökulman sijasta keskittyä periaatteessa minkä tahansa tuotantopanoksia tarvitsevan taloudellisen yksikön näkökulmaan. Substituutiojouston ja sen laajennusten lisäksi esitellään kysynnän hinta- sekä ristijoustot ja tarkastellaan eri joustojen välisiä yhteyksiä.

Substituutiojousto on tunnusluku, joka kuvaa tuotantopanoksen korvaamisen helppoutta jollakin toisella tuotantopanoksella. Mitä suurempi substituutiojousto eri tuotantopanosten välillä on, sitä helpompi yrityksen on korvata tuotantopanos toisella tuotantopanoksella. Kahden tuotantopanoksen tilanteessa voidaan määritellä tavallinen substituutiojousto, joka on taloustieteessä yleisesti käytetty tunnusluku. Substituutiojousto on tietyin oletuksin mahdollista estimoida yksinkertaisilla lineaarisilla menetelmillä.

Useamman kuin kahden tuotantopanoksen tilanteessa teoria on huomattavasti monimutkaisempaa. Tällaisiin tilanteisiin on pyritty yleistämään substituutiojouston määritelmää siten, että kahden tuotantopanoksen substituutiojouston ominaisuudet säilyisivät mahdollisimman hyvin. Vaihtoehtoisia yleisiä substituutiojouston määritelmiä ovat muun muassa Allen-substituutiojousto, Morishima-substituutiojousto ja varjosubstituutiojousto. Nämä kaikki ovat läheisessä yhteydessä kysynnän hinta- ja ristijoustoihin, jotka mittaavat jonkin tuotantopanoksen hinnan muutoksen vaikutusta joko saman tai jonkin muun tuotantopanoksen kysyntään.

Jokaisen edellä mainitun jouston estimointiin on empiirisessä kirjallisuudessa kehitetty useita menetelmiä. Tämän työn teoreettisessa osuudessa esitellään näiden menetelmien taustalla olevaa teoriaa. Menetelmille yhteistä on se, että ne perustuvat tuotantopanosten kysyntään liittyviin teoreettisiin malleihin, joissa tehdään tiettyjä oletuksia. Oletukset mahdollistavat tunnuslukujen estimoinnin empiirisen aineiston avulla. Tässä työssä pyritään johdonmukaisesti listaamaan estimoinnin taustalla olevia oletuksia. Lisäksi pohditaan oletusten uskottavuutta sekä sitä, millaisia ongelmia oletusten vapauttaminen voi aiheuttaa.

Tämän työn empiirisessä osiossa testataan erästä yksinkertaista estimointimenetelmää, joka mahdollistaa substituutiojouston estimoinnin lineaarista regressiota käyttämällä. Tarkoituksena on kokeilla, mitä tapahtuu estimoinnin tarkkuudelle, kun oletuksia vapautetaan. Kokeilu suoritetaan simuloimalla tilanne, jossa yksi tai useampi oletuksista ei ole voimassa. Tämän jälkeen suoritetaan estimointi huolimatta oletuksien toteutumattomuudesta.

2 TUOTANTOFUNKTIOIDEN TEORIAA JA SUBSTITUUTIOJOUSTO KAHDEN TUOTANTOPANOKSEN TILANTEESSA

2.1 Tuotantofunktio

Tuotantofunktio on funktio, joka kuvaa tuotannontekijöiden, kuten työn, pääoman ja raaka-aineiden, sekä tuotannon välistä yhteyttä. Tuotantofunktio ilmaisee, kuinka paljon tuotteita tuotetaan kunkin tuotannontekijäkombinaation avulla. Tuotantofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x_1,...,x_n) = (y_1,...,y_m),\ x_i \geq 0 \ \text{ kaikilla } \ i = 1,...,n, \tag{2.1}$$

missä $y_1,...,y_m$ ovat tuotteiden $1,...,m$ tuotantomääriä ja $x_1,...,x_n$ ovat tuotantopanosten $1,...,n$ määriä. Tässä työssä tarkastellaan ainoastaan tuotantofunktioita, joissa usean tuotantotekijän avulla voidaan tuottaa vain yhtä tuotetta. Tällöin (2.1) typistyy muotoon

$$f(x_1,...,x_n) = y,\ x_i \geq 0 \ \text{ kaikilla } \ i = 1,...,n, \tag{2.2}$$

missä y on kuvaa valmistettavan tuotteen määrää.

Tuotantofunktio voi kuvata sekä yksittäisen yrityksen, että jonkin suuremman kokonaisuuden, kuten koko kansantalouden tuotantoa. On selvää, että yritys tai varsinkin koko kansantalous voi käyttää suurta määrää erilaisia tuotantopanoksia ja tuottaa suurta määrää erilaisia tuotteita. Tällöin ei ole käytännöllistä yksilöidä jokaista tuotantopanosta ja tuotetta funktiossa. Sen sijaan voidaan käyttää aggregoituja tuotantopanoksia ja tuotteita. Esimerkiksi työvoimaa ei välttämättä voida pitää yhtenä homogeenisena tuotantopanoksena, sillä työntekijät ovat keskenään hyvin erilaisia ominaisuuksiltaan ja kyvyiltään. Silti usein empiirisessä tutkimuksessa käytetään työvoimaa yhtenä aggregoituna tuotantopanoksena, joka muodostuu hyvin heterogeenisesta joukosta työntekijöitä. Tämä yksinkertaistaa oleellisesti tuotantoa käsitteleviä malleja, sillä tuotantopanosten määrä voidaan näin pudottaa kuhunkin tarkoitukseen soveltuvaksi.

Periaatteessa myös kaavan (2.1) mukaisen tuotantofunktion käsittelystä siirtyminen kaavan (2.2) mukaiseen tuotantofunktion käsittelyyn voidaan tehdä aggregoimalla tuotteet $1,...,m$ yhdeksi tuotteeksi, jonka määrää kuvaa y. Aggregaattituotteen määrää voidaan kuvata esimerkiksi kaikkien tuotteiden yli summatulla kokonaistuotannolla, jolloin jokaisen tuotteen määrää painotetaan sen hinnalla. Yhden agregaattituotteen käyttäminen analyysissa usean tuotteen sijaan on tarkoituksen mukaista erityisesti silloin, kun analyysi koskee tuotantopanosten välisiä riippuvuussuhteita. Tällöin tuotantopanosten analysointi yksinkertaistuu huomattavasti, vaikka malli ei sisällä kaikkea mahdollista informaatiota tuotettavista tuotteista.

Jos $k < 0$ on jokin vakio ja tuotantofunktio toteuttaa ehdon

$$f(tx_1,...,tx_n) = t^k f(tx_1,...,tx_n) \text{ kaikilla } x_1,...,x_n, t \geq 0, \tag{2.3}$$

niin sanotaan, että tuotantofunktio f on k:nnen asteen homogeeninen funktio. Tuotantofunktio on ensimmäisen asteen homogeeninen täsmälleen silloin, kun se noudattaa kaikkialla vakioskaalatuottoja. Tällöin tuotannon määrä kasvaa samassa suhteessa kuin tuotantopanosten määrä.

2.2 Kustannusten minimointi

Selvyyden vuoksi tuotantofunktiota käsitellään tässä työssä yrityksen näkökulmasta, ellei erikseen toisin mainita. Lisäksi tästä eteenpäin tuotantopanos lyhennetään panokseksi. Yrityksen tuotantofunktio f ja jokin tuotantomäärä y määräävät panoskombinaatiojoukon, joka sisältää ne panoskombinaatiot $(x_1,...,x_n)$, joille $f(x_1,...,x_n) = y$. Kyseistä panoskombinaatiojoukkoa kutsutaan yrityksen tuotantomäärää y vastaavaksi isokvantiksi $I(y)$:

$$I(y) := \{(x_1,...,x_n) : f(x_1,...,x_n) = y\}. \tag{2.4}$$

Mikrotaloustieteellisen analyysin mahdollistamiseksi tehdään seuraavat kolme oletusta:

$$f(x_1,...,x_n) \text{ on kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva,} \tag{2.5}$$

$$f(x_1,...,x_n) \text{ on aidosti kvasikonkaavi,} \tag{2.6}$$

$$MP_i := \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} > 0 \text{ kaikilla } i = 1,...,n. \tag{2.7}$$

Oletukset (2.5)-(2.7) takaavat sen, että kullakin tuotannon tasolla y ja panosten $1,...,n$ panoshinnoilla $p_1 > 0,...,p_n > 0$ kustannusten minimointiongelma

$$\min_{x_1,...,x_n} \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \text{ s.e. } f(x_1,...,x_n) = y \text{ ja } x_i \geq 0 \text{ kaikilla } i = 1,...,n \tag{2.8}$$

voidaan ratkaista. Toisin sanottuna on olemassa yksikäsitteiset ehdolliset panoskysynnät $x_1^* := x_1^*(p_1,...,p_n,y),...,x_n^* := x_n^*(p_1,...,p_n,y)$, jotka minimoivat kustannukset. On huomattava, että ehdolliset panoskysynnät lasketaan minimoimalla tuotantokustannukset annetulla tuotannon tasolla. Tällä tavoin laskettavaa (panos)kysyntäfunktiota kutsutaan hicksiläiseksi kysyntäfunktioksi x^*:

$$x^*(p_1,...,p_n,y) = \left(x_1^*(p_1,...,p_n,y),...,x_n^*(p_1,...,p_n,y)\right) = \arg\min_{x_1,...,x_n} \sum_{k=1}^{n} p_k x_k. \tag{2.9}$$

Vastaavasti voitaisiin laskea panoskysynnät maksimoimalla tuotanto annetulla kustannustasolla, jolloin (panos)kysyntäfunktiota kutsutaan marshallilaiseksi kysyntäfunktioksi x_m:

$$x^m(p_1,...,p_n,c) = \left(x_1^m(p_1,...,p_n,c),...,x_n^m(p_1,...,p_n,c)\right) = \arg\max_{x_1,...,x_n \in B_c} \sum_{k=1}^{n} f(x_1,...,x_n), \tag{2.10}$$

missä $B_c := \{(x_1,...,x_n) : \sum_{k=1}^{n} p_k x_k < c\}$.

Ehdolliset panoskysynnät x_i^* voidaan ratkaista esimerkiksi Kuhn-Tucker-ehtojen avulla (Gravelle & Reese 2004, 688-695). Jos lisäksi oletetaan, että $x_i^* > 0$ kaikilla $i = 1,...,n$, niin ehdolliset panoskysynnät voidaan ratkaista Lagrangen menetelmällä yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = p_n - \lambda \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - f(x_1,...,x_n) = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

missä $L := \sum_{k=1}^{n} p_k x_k + \lambda[y - f(x_1,...,x_n)]$ ja $\lambda > 0$ (Gravelle & Reese 2004, 116).

Ehdollisten panoskysyntöjen avulla yritykselle voidaan määritellä kustannusfunktio $C(p_1,...,p_n,y)$:

$$C(p_1,...,p_n,y) := \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^*. \tag{2.12}$$

Yhtälöryhmän (2.11) parametria λ voidaan tulkita kokonaiskustannusten tuotannon tason y muutoksen vaikutukseksi kokonaiskustannusten C muutokseen hintojen pysyessä vakioina (Gravelle & Reese 2004, 116):

$$\lambda = \frac{\partial C(p_1,...,p_n,y)}{\partial y}. \tag{2.13}$$

Ehdollisen panoskysynnän x_i^* ja kustannusfunktion C yhteyttä kuvaa seuraava Shephard'n lemma:

$$x_i^* = \frac{\partial C(p_1,...,p_n,y)}{\partial p_i} \text{ kaikilla } i = 1,...,n. \tag{2.14}$$

Kustannusfunktion ja ehdollisen panoskysynnän avulla voidaan myös määrätä kustannusosuudet $s_1,...,s_n$:

$$s_i := s_i(p_1, ..., p_n, y) = \frac{p_i x_i^*}{\sum_{k=1}^n p_k x_k^*} \text{ kaikilla } i = 1, ..., n. \tag{2.15}$$

2.3 Kahden panoksen funktion substituutiojousto

Substituutiojousto on keskeinen tuotantofunktioon liittyvä suure. Sen esitti alun perin John Hicks (1932) teoksessaan *Theory of Wages*. Substituutiojousto on skalaariarvoinen ja se määritellään kahden panoksen tuotantofunktiolle. Se mittaa panosten rajatuottojen suhteen MP_1/MP_2 muutoksen vaikutusta panosten suhteellisiin määriin tuotannon tason ollessa vakio. Substituutiojouston ollessa korkea voidaan sanoa, että tuotanto on joustavaa panosten käytön suhteen. Alla substituutiojousto σ määritellään formaalisti.

Olkoon $f(x_1, x_2)$ kahden panoksen tuotantofunktio. Tällöin

$$\sigma(x_1, x_2) := \left. \frac{d\log(x_2/x_1)}{d\log(MP_1/MP_2)} \right|_y = \left. \frac{d(x_2/x_1)}{d(MP_1/MP_2)} \cdot \frac{MP_1/MP_2}{x_2/x_1} \right|_y. \tag{2.16}$$

Substituutiojousto riippuu näin ollen tuotantopanosten x_1 ja x_2 määristä. Substituutiojousto on hyvin määritelty, kun $x_1, x_2 > 0$ ja oletukset (2.5)-(2.7) ovat voimassa. Jos yritys minimoi kustannukset annetulla tuotantomäärällä y asettamalla $x_1 = x_1^*$ ja $x_2 = x_2^*$, joille $x_1^*, x_2^* > 0$, niin $MP_1/MP_2 = p_1/p_2$. Tällöin substituutiojousto voidaan esittää seuraavassa muodossa hintojen p_1 ja p_2 sekä tuotantomäärän y funktiona:

$$\sigma(p_1, p_2, y) := \frac{d\log(x_2^*/x_1^*)}{d\log(p_1/p_2)} = \frac{d(x_2^*/x_1^*)}{d(p_1/p_2)} \cdot \frac{p_1/p_2}{x_2^*/x_1^*} = \frac{(x_2^*/x_1^*)\text{:n suhteellinen muutos}}{(p_1/p_2)\text{:n suhteellinen muutos}}. \tag{2.17}$$

Nyt huomataan, että substituutiojousto mittaa panosten suhteellisten hintojen muutoksen vaikutusta panosten suhteellisiin määriin tuotannon tason ollessa vakio. Kun substituutiojousto on korkea, niin panosten suhteelliset hinnat määräävät niiden kysyntää enemmän kuin substituutiojouston ollessa matala. Yleensä substituutiojoustoa käsiteltäessä käytetään jälkimmäistä määritelmää, jolloin implisiittisesti oletetaan, että yritys minimoi kustannuksia. Näin tehdään myös tässä työssä.

Voidaan osoittaa, että oletusten (2.5)-(2.7) ollessa voimassa $0 < \sigma < \infty$. Lisäksi

$$\frac{d(p_1 x_1^*/p_2 x_2^*)}{d(p_1/p_2)} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{p_1}{p_2}\frac{d(x_1/x_2)}{d(p_1/p_2)} = \frac{x_1}{x_2}\left[1 + \frac{d(x_1/x_2)}{d(p_1/p_2)} \cdot \frac{(p_1/p_2)}{(x_1/x_2)}\right] = \frac{x_1}{x_2}(1-\sigma). \tag{2.18}$$

Edellinen lasku osoittaa, että jos $\sigma < 1$ (> 1), niin hyödykkeen hinnan suhteellinen nousu kasvattaa (vähentää) kyseisen hyödykkeen suhteellisia kustannuksia. Jos $\sigma = 1$, niin suhteelliset kustannukset eivät muutu suhteellisten hintojen muuttuessa.

2.4 Cobb-Douglas-tuotantofunktio

Jotta substituutiojousto tai mikä tahansa muu tuotantofunktioon liittyvä tunnusluku voitaisiin estimoida tilastollisesta aineistosta, on määriteltävä jokin rakenne, joka sallii kyseisen tunnusluvun estimoinnin. Empiirisessä taloustieteessä on vakiintunut käytäntö, jossa oletetaan jokin tuotantofunktio, jonka parametreja estimoidaan. Jos tuotantofunktion parametreista voidaan johtaa haluttu tunnusluku, niin tällöin parametriestimaateista saadaan johdettua estimaatti kyseiselle tunnusluvulle. Tuotantofunktioiden avulla voidaan siis parhaassa tapauksessa estimoida aineistosta esimerkiksi substituutiojousto kahden todellisen tuotantopanoksen välille, vaikka substituutiojouston määritelmä on täysin teoreettinen.

Yksi varhaisista tuotantofunktioista on edelleen merkittävässä asemassa oleva Cobb-Douglas-tuotantofunktio. Sen esittivät ensimmäistä kertaa Charles Cobb ja Paul Douglas (1928) julkaisussa *A Theory of Production*. Cobb-Douglas-tuotantofunktio määritellään seuraavasti:

$$f(x_1, x_2) := \gamma x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \tag{2.19}$$

missä $\gamma > 0$, $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ ovat funktion parametreja. Kun $\alpha + \beta = 1$, niin funktio on ensimmäisen asteen homogeeninen funktio, joka saa muodon

$$f(x_1, x_2) := \gamma x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \gamma > 0, 0 < \alpha < 1. \tag{2.20}$$

Cobb-Douglas-tuotantofunktio toteuttaa oletukset (2.5)-(2.7). Näin ollen, jos $x_1 > 0$ ja $x_2 > 0$, niin substituutiojousto on hyvin määritelty. Cobb-Douglas-tuotantofunktion ominaisuutena on se, että ehdolliset panoskysynnät ovat aina positiivisia yrityksen minimoidessa kustannuksia. Erityinen Cobb-Douglas-tuotantofunktion ominaisuus on se, että substituutiojousto on yksi riippumatta parametreista γ, α ja β. Seuraavaksi perustellaan tämä tulos.

Olkoon $f(x_1, x_2) := \gamma x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$. Tällöin $\frac{MP_1}{MP_2} = \frac{\gamma \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{\gamma \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$. Nyt huomataan, että

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1, x_2) &= \frac{d(x_2/x_1)}{d(MP_1/MP_2)} \cdot \frac{MP_1/MP_2}{x_2/x_1} \\
&= \frac{d(x_2/x_1)}{d(\alpha x_2/\beta x_1)} \cdot \frac{\alpha x_2/\beta x_1}{x_2/x_1} \\
&= \frac{d(\beta\theta/\alpha)}{d\theta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

missä $\theta := \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$.

Näin ollen Cobb-Douglas-tuotantofunktiosta voidaan johtaa suoraan substituutiojouston arvo. Substituutiojouston estimoimiseen Cobb-Douglas-tuotantofunktio ei kuitenkaan sovellu, sillä substituutiojouston arvo ei riipu lainkaan funktion parametreista γ, α ja β. Näin ollen parametrien estimointi Cobb-Douglas-tuotantofunktiosta ei anna mitään informaatiota substituutiojouston todellisesta arvosta. Sen sijaan Cobb-Douglas tuotantofunktiota voidaan käyttää monien muiden tuotantoteorian kannalta olennaisten tunnuslukujen estimointiin. Seuraavaksi esitellään Cobb-Douglas-tuotantofunktion yleistys, joka sallii substituutiojoustolle kaikki arvot väliltä $(0, \infty)$.

2.5 CES-tuotantofunktio

CES-tuotantofunktio (constant elasticity of substitution) on johdonmukainen funktio substituutiojouston estimointiin. Sen esitti ensimmäistä kertaa Robert Solow (1956). Tämän jälkeen Kenneth Arrow, Hollis Chenery, Bagicha Minhas ja Robert Solow (1961) käyttivät sitä kuuluisassa julkaisussaan *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency*. CES-tuotantofunktiolla on substituutiojouston estimoinnin kannalta hyviä ominaisuuksia. Ensinnäkin parametreista voidaan johtaa substituutiojousto. Toiseksi substituutiojousto voi parametreista riippuen vaihdella välillä $(0, \infty)$. Lisäksi CES-funktion substituutiojousto on funktion nimen mukaisesti vakio. Tämä tarkoittaa sitä, että funktion parametrit määräävät substituutiojouston täysin. Tällöin substituutiojouston arvo ei muutu funktion eri pisteissä. CES-tuotantofunktio määritellään seuraavasti:

$$f(x_1, x_2) = \gamma \left[\alpha x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \tag{2.22}$$

missä $\alpha \in (0,1)$, $\gamma > 0$ ja $\sigma \in (0,1) \cup (1, \infty)$ ovat parametreja. Parametri σ voi olla mikä tahansa luvusta 1 eroava positiivinen reaaliluku. CES-tuotantofunktio on ensimmäisen asteen homogeeninen funktio ja sen substituutiojousto on σ. Substituutiojouston johtaminen vastaa Cobb-Douglas-funktion substituutiojouston johtamista.

Olkoon $f(x_1, x_2)$ muotoa (2.22). Tällöin

$$MP_1 = \gamma \left[\alpha x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \alpha x_1^{-\frac{1}{\sigma}} \text{ ja} \tag{2.23}$$

$$MP_2 = \gamma \left[\alpha x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} (1-\alpha) x_2^{-\frac{1}{\sigma}}. \tag{2.24}$$

Edelleen

$$\frac{MP_1}{MP_2} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{2.25}$$

Jos nyt merkitään, että $\theta := \log\frac{MP_2}{MP_1} = \log\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, niin huomataan, että $\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \sigma\theta - \sigma\log\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$.

Tällöin

$$
\begin{aligned}
\sigma(x_1, x_2) &= \frac{d\,log(x_2/x_1)}{d\,log(MP_1/MP_2)} \\
&= \frac{d\left[\sigma\theta - \sigma\,log\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right]}{d\theta} = \sigma.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Arrow ym. (1961) osoittivat, että kaikki ensimmäisen asteen homogeeniset kahden panoksen tuotantofunktiot, joiden substituutiojousto on vakio, ovat joko CES-muotoa, kun substituutiojousto eroaa luvusta yksi tai Cobb-Douglas-muotoa, kun substituutiojousto on yksi. Lisäksi CES-funktion rajafunktio substituutiojouston lähestyessä lukua yksi on Cobb-Douglas-muotoinen.

$$
\lim_{\sigma\to 1}\gamma\left[\alpha x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \gamma x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \tag{2.27}
$$

Edellisen yhtälön oikea puoli vastaa Cobb-Douglas-muotoa (2.20). Nyt, jos yleistetään CES-funktio (2.22) siten, että parametrin σ arvolla 1 funktio on Cobb-Douglas-muotoinen (2.20), voidaan tuotantofunktio kirjoittaa muodossa

$$
\lim_{s\to\sigma}\gamma\left[\alpha x_1^{\frac{s-1}{s}} + (1-\alpha)x_2^{\frac{s-1}{s}}\right]^{\frac{s}{s-1}} = \begin{cases} \gamma x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} & \text{, jos } \sigma = 1 \\ \gamma\left[\alpha x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} & \text{, jos } \sigma \neq 1 \end{cases} \quad ,\gamma > 0, 0 < \alpha < 1, \sigma > 0. \tag{2.28}
$$

Nyt, jos oletetaan yritykselle tai jollekin muulle taloudelliselle yksikölle vakioskaalatuotot, niin tiedetään, että sen tuotantofunktio on ensimmäisen asteen homogeeninen funktio panosten suhteen. Jos vakioskaalatuottojen lisäksi oletetaan vakiosubstituutiojousto, voidaan ilman lisäoletuksia päätellä tuotantofunktiolle yleinen CES-muoto (2.28). Edelleen CES-muotoisen tuotantofunktion substituutiojouston estimointi palautuu parametrin σ estimointiin.

2.6 Substituutiojouston estimointi CES-tuotantofunktiosta

Lähdetään nyt tarkastelemaan substituutiojouston estimointia CES-tuotantofunktiosta. Oletetaan, että kahden tuotantopanoksen yrityksen tuotantofunktio f on CES-muotoinen jollakin tarkasteltavaksi valikoidulla periodilla. Oletetaan lisäksi, että yrityksen tuotannon määrä y on vakio ja tuotantopanosten hinnat p_1 ja p_2 ovat eksogeenisiä. Tämä tarkoittaa sitä, että yrityksen kysyntä ei vaikuta tuotantopanosten hintoihin. Yritys voi siis valita haluamansa kysyntäkombinaation tuotantopanoksille x_1 ja x_2 siten, että tuotannon määrä on y eli $f(x_1, x_2) = y$. Oletetaan vielä, että yritys minimoi kustannukset.

Yrityksen ehdolliset panoskysynnät $x_1^*(p_1, p_2, y)$ ja $x_2^*(p_1, p_2, y)$ saadaan ratkaisemalla minimointiongelma (2.8). Substituutiojousto on hyvin määritelty, kun x_1^* ja x_2^* ovat positiivisia. Jos näin on, niin x_1^* ja x_2^* toteuttavat Lagrangen yhtälöryhmän (2.11)

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda\gamma\alpha x_1^{-\frac{1}{\sigma}}\left[\alpha x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda\gamma(1-\alpha) x_2^{-\frac{1}{\sigma}}\left[\alpha x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - \gamma\left[\alpha x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Yhtälöryhmästä (2.29) voidaan ratkaista ehdolliset panoskysynnät x_1^* ja x_2^* panoshintojen ja tuotannon funktiona:

$$\begin{aligned} x_1^*(p_1, p_2, y) &= \frac{y}{\gamma\left[\alpha + (1-\alpha)^{\sigma}\left(\frac{p_1}{\alpha p_2}\right)^{\sigma-1}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}, \\ x_2^*(p_1, p_2, y) &= \frac{y}{\gamma\left[(1-\alpha) + \alpha^{\sigma}\left(\frac{p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{\sigma-1}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Lisäksi ehdollisten panoskysyntöjen suhde $\frac{x_2^*}{x_1^*}$ voidaan kuvata panoshintojen avulla:

$$\frac{x_2^*}{x_1^*} = \left[\frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}\right]^{\sigma}. \tag{2.31}$$

Myös Cobb-Douglas-muotoisesta (2.20) tuotantofunktiosta voidaan johtaa samalla menetelmällä vastaava yhtälö, jossa $\sigma = 1$. Kun yhtälöstä (2.31) otetaan logaritmit puolittain, saadaan

$$\log\left(\frac{x_2^*}{x_1^*}\right) = \sigma\log\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right] + \sigma\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right). \tag{2.32}$$

Yhtälössä (2.32) vasemmalla puolella ehdollisten panoskysyntöjen suhteen logaritmi. Koska termi $\sigma log[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}]$ on vakio, yhtälön oikealla puolella on jokin vakio plus substituutiojouston ja panoshintojen suhteen logaritmin tulo. Oletetaan, että käytössä on aineisto, joka sisältää usean yrityksen havainnot tuotantopanosten määristä ja hinnoista. Tällainen tilanne on esimerkiksi, jos yritysten kaksi tuotantopanosta ovat matalan osaamisen työvoima ja korkean osaamisen työvoima ja käytössä on havainnot molempien ryhmien työtunneista ja palkoista. Jos yritykset ovat homogeenisia siten, että niiden tuotantofunktio on CES-muotoinen samoilla parametreilla, saadaan substituutiojousto estimoitua jollakin lineaarisella käyttämällä hyväksi yhtälöä (2.32). Kootaan vielä oletukset, joita on käytetty estimointiyhtälön johtamiseen.

1. Käytössä on usean yrityksen havaintoja tuotantopanosten määristä ja hinnoista joltakin periodilta.
2. Jokainen yritys käyttää kahta tuotantopanosta.
3. Yritysten tuotantofunktiot ovat samanlaiset.
4. Tuotantofunktiot ovat CES-muotoisia (2.28).
5. Yritysten tuotantomäärät ja tuotantopanosten hinnat ovat eksogeenisia.
6. Yritykset minimoivat kustannuksia.
7. Tuotantopanosten kysyntä on sopeutunut vallitseviin hintoihin ja tuotantopanosten hinnat säilyvät muuttumattomina koko tarkasteltavan periodin ajan.

Oletus (1) ei sinänsä liity teoreettiseen malliin, mutta ilman kyseisiä havaintoja estimointiyhtälöä ei voida käyttää. Oletus (2) on usein varsin epärealistinen. Tämä johtuu siitä, että vaikka yrityksen voitaisiin ajatella käyttävän kahta eri tuotantopanosta (esimerkiksi työtä ja pääomaa), voidaan panokset jakaa pienempiin osiin. Esimerkiksi työvoima voidaan jakaa taitojen mukaan useaan osaan ja vastaavasti pääoma voidaan jakaa fyysiseen ja immateriaaliseen pääomaan. Nämä panokset voidaan edelleen jakaa pienempiin osiin. Tätä ongelmaa voi yrittää sivuuttaa ajattelemalla luvun 2.1 tapaan tuotantopanoksia aggregaattipanoksina. Tällöin ongelmaksi muodostuu se, että tuotantofunktio ei riipu vain tuotantopanosten määrästä, vaan myös niiden laadusta. Tällöin koko tuotantofunktion käsite hämärtyy. Myöhemmin osoitetaan, että oletusta (2) voidaan keventää hieman, jos tuotantofunktiolla on tietty separoituvuusrakenne.

Oletus (2) ei ole voimassa, jos jotkin yritykset eivät käytä lainkaan toista panoksista. Tällöin voidaan olettaa, että yrityksen tuotantofunktio sallisi toisenkin panoksen käytön, mutta yritys valitsee toisin panoksen korkean hinnan vuoksi. Ongelmaksi muodostuu tällöin myös havaitsematon panoksen hinta. Hinnaksi voi asettaa esimerkiksi panoksen keskimääräisen hinnan muille yrityksille. Ongelma voidaan myös kiertää jättämällä tällaiset yritykset estimoinnin ulkopuolelle, mutta se voi aiheuttaa harhaa estimointiin.

Myös oletus (3) on usein epärealistinen. Voidaan ajatella, että yrityksen tuotantofunktion ominaisuudet riippuvat olennaisesti yrityksen koosta, toimialasta ja monista muista ominaisuuksista. Havaittuja ominaisuuksia voidaan jossain määrin kontrolloida tietyin lisäoletuksin. Myös havaitsemattomia tekijöitä voidaan tietyin lisäoletuksin kontrolloida esimerkiksi paneelimenetelmillä, jos käytössä on aineistoa useammalta kuin yhdeltä ajanjaksolta. Oletus (3) on sitä epärealistisempi, mitä enemmän yritykset eroavat toisistaan. On perusteltua ajatella, että estimoinnin harha on pienempää, jos yritykset ovat keskenään homogeenisia esimerkiksi toimialan tai yrityskoon perusteella. Ongelmaksi voi tällöin muodostua aineiston koon pienentyminen ja sen myötä estimoinnin tarkkuus. Lisäksi usein mielenkiinnon kohteena on nimenomaan heterogeeniseen yritysryhmään liittyvän substituution tutkiminen, jolloin estimoinnin harha voi olla suuri.

Kun yritys käyttää kahta tuotantopanosta ja oletukset (2.5)-(2.7) ovat voimassa, on substituutiojousto hyvin määritelty. Tällöin, jos yritysten tuotantofunktiot ovat ensimmäisen asteen homogeenisiä ja niillä on vakiosubstituutiojousto, ne toteuttavat ehdon (4). Jos lisäksi ehto (3) on voimassa, niin yritysten tuotantofunktiot ovat CES-muotoisia täsmälleen samoilla parametreilla. Ihanteellinen funktiomuoto substituutiojouston estimointiin olisi sellainen, joka on mahdollisimman joustava. Tällöin funktiolla voidaan parhaiten approksimoida yleistä tuotantofunktiota, jonka muoto ei välttämättä ole mikään tietty eksplisiittisesti määritelty funktio. CES-tuotantofunktio on ainakin siinä mielessä riittävän joustava, että se sallii kaikki substituutiojouston arvot väliltä $(0,\infty)$.

Oletus (5) yritysten tuotantomäärien ja panoshintojen eksogeenisyydestä on myös tärkeä. Sitä ollaan käytetty jo substituutiojoustoa määriteltäessä. Erityisen tärkeää on oletus panoshintojen eksogeenisyydestä, jos halutaan estimoida yhtälö (2.32) lineaarisella regressiomallilla. Jos yrityksen panoskysyntä vaikuttaa panoshintoihin, niin mallin vastemuuttuja vaikuttaa selittävään muuttujaan, mikä tuottaa estimointiharhaa. Oletus siitä, että palkat säilyvät muuttumattomina tarkasteltavan periodin ajan takaa sen, että yritysten kustannusrakenne säilyy samana koko tarkasteltavan periodin aikana.

Oletus (6) takaa sen, että yritykset käyttäytyvät johdonmukaisesti. Yritysten kustannusten minimointi johtaa siihen $x_1 = x_1^*$ ja $x_2 = x_2^*$. Edelleen tällöin estimointiyhtälön vasen puoli on havaittu. Ilman minimointioletusta ei voitaisi muodostaa havaintojen perusteella vastemuuttujaa estimointiyhtälössä, mikä estäisi estimoinnin. Oletus (7) takaa sen, että vastemuuttuja reagoi nimenomaan havaintohetken hintoihin. Tämäkin oletus on hieman epärealistinen, sillä käytännössä yrityksellä vie aikaa rekrytoida tai irtisanoa työntekijöitä. Lisäksi palkat saattavat muuttua periodin sisällä, minkä huomioon ottaminen tekisi tilanteesta monimutkaisemman.

Vaikka oletukset kuulostavat jyrkästi tulkittuna epärealistisina, voidaan estimointia pitää johdonmukaisena tai ainakin suuntaa antavana, jos oletukset pitävät keskimäärin paikkansa. Toisin sanottuna, jos oletusten mukainen maailma on lähellä todellista maailmaa, voidaan toivoa, että estimoudut tulokset olisivat lähellä totuutta. Koska tiedossa ei ole sitä, kuinka lähellä oletusten mukainen maailma ja todellinen maailma ovat toisiinsa nähden, ei estimoinnissa tapahtuvan harhan suuruutta tai sen suuntaa voida tietää. Myöhemmin tässä työssä tarkastellaan simulointimenetelmillä erilaisia tilanteita, joissa yksi tai useampi oletuksista ei ole voimassa.

2.7 Koko talouden substituutiojousto

Yrityksen näkökulman sijaan substituutiojoustoa voidaan myös tarkastella jonkin laajemman kokonaisuuden, kuten esimerkiksi jonkin toimialan tai koko talouden näkökulmasta. Useassa tapauksessa tällainen tarkastelu saattaa olla jopa suuremman mielenkiinnon kohteena kuin pelkkä yksittäisen yrityksen substituutiojouston tarkasteleminen. Tämä johtuu siitä, että esimerkiksi koko talouden substituutiojousto tarjoaa informaatiota siitä, miten muutokset panoshinnoissa vaikuttavat panosten kysyntään koko talouden sisällä. Tällainen parametri on helpommin tulkittavissa kokonaistaloudellisten kausaalisuhteiden näkökulmasta kuin yksittäistä yritystä koskeva parametri. Sen sijaan yksittäisen yrityksen substituutiojoustoa kuvaava parametri ja vastaavasti moni muu yksittäistä yritystä koskeva parametri on usein hyödyllinen yleisen tasapainon malleissa, jotka pyrkivät kuvaamaan koko talouden käyttäytymistä ottamalla huomioon mahdollisimman tarkasti yksittäisten toimijoiden välisiä riippuvuussuhteita.

Koko talouden substituutiojousto ei ole johdettavissa suoraan yksittäisen yrityksen substituutiojoustosta. Useat ilmiöt vaikuttavat yksittäisen yrityksen ja koko talouden substituutiojoustojen väliseen yhteyteen. Erityisesti luovan tuhon vaikutukset ovat huomattava tässä yhteydessä. On mahdollista, että yksittäisten yritysten tuotantorakenteet ovat hyvin joustamattomia, mikä ilmenee pienenä substituutiojoustona yrityksen näkökulmasta, mutta koko talouden tuotantorakenteet ovat joustavia, mikä ilmenee suurena substituutiojoustona koko talouden näkökulmasta. Tämä johtuu hyvin menestyvien yritysten kasvusta suhteessa huonosti menestyviin yrityksiin. Erityisesti substituutiojoustosta puhuttaessa on olennaista tarkentaa, minkä kokonaisuuden kannalta asiaa tarkastellaan.

Koko talouden substituutiojousto voidaan estimoida edellä mainituilla menetelmillä, kun vain oletetaan, että koko taloutta kuvaava tuotantofunktio on CES-muotoinen ja käytettävissä on tarvittava aineisto usealta homogeeniselta taloudelta. Jos ei pidetä uskottavana sitä, että eri talouksilla olisi toisiaan vastaava tuotantofunktio, voidaan tarkastelu myös suorittaa yksittäistä taloutta koskevasta aikasarja-aineistosta. Katz ja Murphy (1992) esittävät tähän ideaan perustuvan menetelmän substituutiojouston estimointiin. Ongelmaksi aikasarjamenetelmässä muodostuu aineiston pieni havaintomäärä ja siitä johtuvat suuret uskottavuusvälit estimaateille.

3 SUBSTITUUTIOJOUSTON LAAJENNUKSIA USEAN TUOTANTOPANOKSEN TILANTEESSA

3.1 Ensimmäinen yritys määritellä substituutiojousto usean panoksen tilanteessa

Substituutiojouston määritelmät (2.16) ja (2.17) eivät sellaisenaan yleisty usean panoksen funktioille. Kahden panoksen funktiolla vain panosten suhteellisen rajatuoton MP_1/MP_2 tai suhteellisen hinnan p_1/p_2 vaikutusta suhteelliseen panoskysyntään. Jos panoksia on useampi kuin kaksi, voidaan saada eri tulos samalle suhteelliselle muutokselle riippuen esimerkiksi siitä nouseeko panoksen 1 rajatuotto (hinta) vai laskeeko panoksen 2 rajatuotto (hinta). Tämä johtaa siihen, että usean panoksen funktioiden panoskorvautuvuutta käsiteltäessä on oltava varovainen määriteltäessä substituutiojouston käsitettä.

Yksi mahdollinen määritelmä usean panoksen tuotantofunktion substituutiojoustolle saataisiin määrittelemällä usean panoksen tuotantofunktio kahden valitun panoksen funktiona sillä oletuksella, että kaikki muut panokset vakioitaisiin. Esimerkiksi tuotantofunktiosta $f_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ voitaisiin $(n-2)$:n viimeisen panoksen määrät asettaa vakioiksi, jolloin tuotantofunktio supistuisi muotoon $f_2(x_1, x_2)$. Nyt tälle "kahden panoksen" funktiolle voidaan määritellä substituutiojousto normaaliin tapaan. Itse asiassa Allen ja Hicks (1934) ehdottivat tätä määritelmää substituutiojouston yleistykseksi usean panoksen tuotantofunktioille. Blackorby ja Russel (1989) kuitenkin huomauttavat, että tämä määritelmä ei tarjoa informaatiota panosten kysynnän todellisista muutoksista, sillä se ei salli panoskysyntöjen optimaalista sopeutumista, kun osa panosmääristä on vakioitu.

Alaluvussa 3.2 käsitellään monitasoista CES-tuotantofunktiota, joka sallii tutun substituutiojouston määritelmän usean tuotantopanoksen funktiolle. Tämän jälkeen alaluvuissa 3.4, 3.6 ja 3.8 esitellään kolme uutta yritystä yleistää substituutiojouston määritelmää yleisemmälle usean tuotantopanoksen tuotantofunktiolle. Nämä yritykset ottavat huomioon mahdolliset muutokset kaikkien panosten kysynnöissä toisin kuin edellä mainittu yritys. Nämä yleistykset ovat vahvasti kytköksissä taloustieteessä yleisesti käytettyihin kysynnän hinta- ja ristijoustoihin, joita käsitellään alaluvussa 3.3. Lisäksi tässä luvussa käydään läpi tuotantofunktioiden teoriaa usean tuotantopanoksen tilanteessa. Lopulta esitellään translog-funktio, joka mahdollistaa edellä mainittujen joustojen estimoinnin.

3.2 Monitasoinen CES-tuotantofunktio

Monitasoinen CES-tutantofunktio on CES-funktiota (2.22) mukaileva tuotantofunktio useammalle kuin kahdelle panokselle. Esimerkiksi kolmelle panokselle voidaan määritellä kaksitasoinen tuotantofunktio seuraavasti:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\gamma_1\left[\alpha x_1^{\frac{\sigma_{1,z}-1}{\sigma_{1,z}}}+(1-\alpha)z^{\frac{\sigma_{1,z}-1}{\sigma_{1,z}}}\right]^{\frac{\sigma_{1,z}}{\sigma_{1,z}-1}}, \tag{3.1}$$

missä

$$z=\gamma_2\left[\alpha x_2^{\frac{\sigma_{2,3}-1}{\sigma_{2,3}}}+(1-\alpha)x_3^{\frac{\sigma_{2,3}-1}{\sigma_{2,3}}}\right]^{\frac{\sigma_{2,3}}{\sigma_{2,3}-1}}. \tag{3.2}$$

Tuotantofunktion ylempi taso (3.1) on CES-muotoinen funktio panosten 1 ja z välillä. Panos z on panoksista 2 ja 3 muodostuva yhdistelmäpanos. Yhdistelmäpanoksen arvo määräytyy alemman tason (3.2) CES-muotoisesta funktiosta. Nyt voidaan ajatella, että $\sigma_{1,z}$ kuvaa substituutiojoustoa panoksen 1 ja yhdistelmäpanoksen z välillä, kun taas $\sigma_{2,3}$ kuvaa substituutiojoustoa panosten 2 ja 3 välillä.

Van der Verf (2008) esittää estimointimenetelmän, jolla substituutiojoustoparametrit voidaan estimoida edellisen kaltaisesta kaksitasoisesta CES-tuotantofunktiosta, kun käytettävissä on paneeliaineisto. Van der Werfin käyttämien funktioiden esitysmuoto ei ole täsmälleen sama kuin funktioiden (3.1) ja (3.2), mutta vastaava menetelmä voidaan pienin muutoksin johtaa yllä olevaan esitykseen. Substituutiojoustoparametrien $\sigma_{1,z}$ ja $\sigma_{2,3}$ estimointia varten johdetaan yhtälöryhmä, josta parametrit estimoidaan.

Luonnollisesti monitasoinen CES-tuotantofunktio voidaan määritellä useammalle panokselle käyttämällä tarvittaessa useampaa kuin kahta tasoa. Monitasoisen CES-funktion estimoinnissa tulee ottaa huomioon samat asiat kuin yksitasoisen CES-funktion (2.22) estimoinnissa (katso luvun 2.6 oletukset). Lisäksi tulee ottaa huomioon se, että esimerkiksi kolmelle panokselle tuotantofunktio voidaan konstruoida kolmella eri tavalla riippuen siitä, mitkä kaksi panosta valitaan muodostamaan yhdistelmäpanosta z. Jos ollaan kiinnostuneita erityisesti kahden nimenomaisen tuotantopanoksen välisestä substituutiojoustosta, on nämä kaksi valittava muodostamaan yhdistelmäpanosta. Tällöin voidaan kysyä, millä perusteella voidaan olettaa, että juuri valittu vaihtoehto olisi realistinen kahden muun sijaan.

Rakenteen valinta ei ole monitasoisen CES-tuotantofunktion ainoa ongelma. Voidaan myös kysyä, millä perusteella on ylipäänsä syytä olettaa, että mikään vaihtoehtoisista monitasoisen CES-tuotantofunktion rakenteista olisi järkevä. Mikään teoria ei nimittäin varsinaisesti tue kyseistä funktiomuotoa siinä mielessä, että voitaisiin ajatella sen olevan lähellä todellisuutta. Monitasoista CES-tuotantofunktiota käytetään lähinnä, koska siinä voidaan valita tarkoitukseen sopiva rakenne, joka ei välttämättä vastaa todellisuutta, mutta josta halutut parametrit voidaan estimoida helposti tietyin oletuksin. Ratkaisuna tähän ongelmaan esitellään myöhemmin tässä työssä translog-tuotantofunktio, joka pyrkii approksimoimaan yleistä usean panoksen tuotantofunktiota.

3.3 Kysynnän hintajousto ja ristijousto

Kysynnän hintajousto on tunnusluku, joka kuvaa tuotteen tai panoksen kysynnän joustavuutta sen hinnan suhteen. Jos oletetaan tuotantofunktio $f(x_1,...,x_n)$ ja vakioidaan tuotannon taso y, voidaan panoksen i kysynnän hintajoustolle PE_{ii} antaa seuraava formaali määritelmä:

$$PE_{ii} := \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i^*}. \tag{3.3}$$

Kun kysynnän hintajousto on suurempi (pienempi) kuin -1, panokseen käytettävät kustannukset kasvavat (laskevat) hinnan kasvaessa, kun yritys minimoi kustannuksia:

$$\frac{\partial(p_i x_i^*)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{p_i x_i^*} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} p_i + x_i^*\right)\frac{1}{x_i^*} = PE_{ii} + 1. \tag{3.4}$$

On huomattava, että kysynnän hintajoustolla tarkoitetaan tässä siis nimenomaan hicksiläistä kysynnän hintajoustoa, joka mittaa kysynnän joustavuutta hinnan suhteen, kun tuotannon taso ja muut hinnat pysyvät vakioina. Tätä ei tule sekoittaa marshallilaiseen kysynnän hintajoustooon MPE_{ii}, joka mittaa kysynnän joustavuutta hinnan suhteen, kun kustannustaso ja muut hinnat pysyvät vakioina:

$$MPE_{ii} := \frac{\partial x_i^m}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i^m}. \tag{3.5}$$

Kysynnän hintajousto voidaan luontevasti yleistää kysynnän ristijoustoksi, joka kuvaa panoksen kysynnän joustavuutta jonkin muun panoksen hinnan muuttuessa. Kun $i \neq j$, panoksen i (hicksiläinen) kysynnän ristijousto PE_{ij} hinnan p_j suhteen määritellään seuraavasti:

$$PE_{ij} := \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i^*}. \tag{3.6}$$

Kysynnän ristijousto kuvaa kahden panoksen välistä suhdetta. Kun kysynnän ristijousto PE_{ij} on suurempi (pienempi) kuin nolla, panoksen i kysyntä kasvaa (laskee) panoksen j hinnan noustessa, kun yritys minimoi kustannuksia.

Vastaavasti marshallilainen kysynnän ristijousto määritellään seuraavasti:

$$MPE_{ij} := \frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i^m}. \tag{3.7}$$

Tässä työssä jatkossa kysynnän hinta- ja ristijoustoista puhuttaessa tarkoitetaan nimenomaan hicksiläisiä kysynnän hinta- ja ristijoustoja. Tämä johtuu siitä, että ne ovat läheisessä suhteessa substituutiojouston yleistyksiin usean panoksen tilanteessa. On huomionarvoista, että jo alkuperäinen kahden panoksen funktion substituutiojousto 2.16 on määritelty käyttäen hicksiläistä panoskysyntäfunktiota.

3.4 Allen-substituutiojousto

Eräs merkittävä yritys yleistää substituutiojousto usean panoksen tuotantofunktioille löytyy Roy Allenin kirjasta *Mathematical analysis for economists* vuodelta 1938. Allen käytti määrittelemästään joustosta englannin kielistä nimitystä *partial elasticity of substitution* (osittaissubstituutiojousto). Myöhemmin kyseisestä joustosta on käytetty muun muassa nimityksiä *Allen elasticity of substitution* ja *Allen-Uzawa elasticity of substitution* keksijänsä Allenin ja Hirofumi Uzawan mukaan. Uzawa vaikutti merkittävästi Allenin määrittelemän jouston teoriaan, kuten myöhemmin havaitaan. Tässä työssä käytetään kyseisestä joustosta nimitystä Allen-substituutiojousto.

Olkoon $f(x_1,...,x_n)$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva tuotantofunktio. Tällöin Allen-susbtituutiojousto σ_{ij}^A panoksille i ja j, missä $i \neq j$ voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$\sigma_{ij}^A := \frac{\sum_{k=1}^n x_k f_k}{x_i x_j} \cdot \frac{F_{ij}}{F}, \tag{3.8}$$

missä $f_k := \partial f / \partial x_k$, $f_{kl} := \partial^2 f / \partial x_k \partial x_l$,

$$F := \det \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

ja F_{ij} on matriisin F alkion f_{ij} kofaktori eli $F_{ij} := (i+j)^{-1} \det(F_{ij})$, missä F_{ij} vastaa matriisia F, josta on poistettu rivi ja sarake, jolla alkio f_{ij} esiintyy.

Edellisestä määritelmästä on varsin hankalaa ymmärtää, minkälainen tulkinta Allen-substituutiojoustolle tulisi antaa tai miten Allen-substituutiojoustoa voidaan verrata tavalliseen kahdelle tuotantopanokselle määriteltävään substituutiojoustoon. Määritelmän nojalla kuitenkin havaitaan se, että Allen-substittuutiojousto on symmetrinen parametri eli $\sigma^A_{ij} = \sigma^A_{ji}$ kaikilla $i, j = 1,,, n$. Allen (1938) osoitti, että yrityksen minimoidessa kustannuksia voidaan Allen-substituutiojoustolle johtaa huomattavasti yksinkertaisempi muoto tuotannon määrän ja panoshintojen funktiona. Alla on esitettynä Blackorbyn ja Russelin (1989) käyttämä muoto Allen-substituutiojoustosta yrityksen minimoidessa kustannuksia:

$$\sigma^A_{ij}(p_1,...,p_n,y) = \frac{PE_{ij}(p_1,...,p_n,y)}{s_j(p_1,...,p_n,y)}, \tag{3.10}$$

missä PE_{ij} on panoksen i kysynnän ristijousto hinnan p_j suhteen ja s_j on panoksen j kustannusosuus. (Tässä on oletettu, että ehdolliset panoskysyntäfunktiot $x^*_i(p_1,...,p_n,y)$ ovat kolme kertaa jatkuvasti differentioituvia ja positiivisia.) Erityisesti tästä muodosta huomataan Allen-substituutiojouston yhteys kysynnän ristijoustoon. Lisäksi, jos oletetaan yrityksen minimoivan kustannuksia, voidaan Allen-substituutiojousto estimoida estimoimalla kysynnän ristijousto ja kustannusosuus. Usein on kustannusosuus on saatavilla suoraan aineistosta.

3.5 Usean tuotantopanoksen CES-tuotantofunktio

Aikaisemmin esitellyn monitasoisen CES-tuotantofunktion lisäksi voidaan CES-tuotantofunktio yleistää yhden tason ja usean tuotantopanoksen funktioksi seuraavalla tavalla:

$$f(x_1,...,x_n) = \gamma\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}. \tag{3.11}$$

Uzawa (1962) osoitti tätä muotoa olevalle funktiolle Allen-substituutiojousto $\sigma^A_{ij} = \sigma$ kaikille $i \neq j$. Tästä tuloksesta havaitaan, että ainakin CES-muotoisille funktioille Allen-substituutiojousto on tavallisen kahden panoksen substituutiojouston yleistys. Toisaalta huomataan myös, että usean panoksen CES-funktiota ei voida käyttää erottelemaan eri panoskaksikkojen välistä substituutiojoustoa. Toisin sanoen usean panoksen CES-funktiota ei voida käyttää tutkimaan sitä, minkä kahden panoksen välillä tapahtuu eniten keskinäistä korvautumista hintojen muuttuessa.

Uzawa (1962) osoitti myös käänteisen tuloksen, jonka mukaan Allen-substituutiojoustojen ollessa vakioita ja identtisiä (eli $\sigma_{12} = ... = \sigma_{(n-1),n} = \sigma$) usean panoksen tuotantofunktio on muotoa (3.11) (paitsi, jos $\sigma = 1$, vrt. CES- ja Cob-Douglas-tuotantofunktiohin). Erityisesti Uzawan työn jälkeen Allen-substituutiojoustoa alettiin käyttämään substituutiojouston korvikkeena usean panoksen funktioita käsitellessä. Allen-substituutiojoustoon liitettiin (ja liitetään yhä) toisinaan myös Uzawan nimi.

Uzawan työn jälkeen heräsi kysymys siitä, mikä olisi hyvä usean panoksen funktiomuoto Allen-substituutiojouston (tai muiden vastaavien parametrien) estimointiin. Kuten yllä havaitsimme, usean panoksen CES-tuotantofunktio (3.11) oli melko rajoittunut tähän tehtävään. Toki usean panoksen CES-funktio voidaan muuttaa monitasoiseksi usean panoksen CES-funktioksi funktioiden (3.1) ja (3.2) tavoin. Tällaista monitasoista usean panoksen CES-funktiota tarkastelee esimerkiksi Sato (1967).

Voidaan myös kysyä, onko Allen-substituutiojousto hyvä parametri kuvaamaan kahden panoksen korvautuvuutta panoshintojen suhteen. Tämähän on substituutiojouston alkuperäinen tarkoitus. Seuraavaksi siirrytään ensin tarkastelemaan kysymystä sopivasta parametrista ja tämän jälkeen sopivasta estimointifunktiosta.

3.6 Morishima-substituutiojousto

Allen-substituutiojoustolle vaihtoehtoinen parametri usean panoksen tuotantofunktiolle on Morishima-substituutiojousto. Kyseisen parametrin esitti ensimmäisenä Michio Morishima japaninkielisessä artikkelissaan (1967). Myöhemmin Blackorby ja Russell (1975) keksivät saman parametrin itsenäisesti. Heidän työnsä ansiosta Morishima-substituutiojouston käyttö on saanut vankempaa kannatusta taloustieteellisessä tutkimuksessa. Blackorby ja Russell (1989) esittivät myös, että Allen-substituutiojoustossa olisi selkeitä puutteita verrattuna Morishima-Substituutiojoustoon.

Morsihima-substituutiojousto σ_{ij}^M määritellään seuraavasti:

$$\sigma_{ij}^M := \frac{d\log(x_i^*/x_j^*)}{d\log(p_j/p_i)}\bigg|_{p_j}. \tag{3.12}$$

Määritelmän mukaan siis Morishima-substituutiojousto mittaa panosten i ja j suhteellisten hintojen muutoksen vaikutusta panosten i ja j suhteellisiin määriin tuotannon tason ja panoksen j hinnan ollessa vakioituna ja yrityksen minimoidessa kustannukset. Määritelmän (2.17) nojalla huomataan välittömästi, että Morishima-substituutiojousto on kahden panoksen funktion substituutiojouston aito yleistys usean tuotantopanoksen funktioille. Toisin sanottuna Morishima-substituutiojousto ja alkuperäinen substituutiojousto tarkoittavat samaa asiaa kahden panoksen tilanteessa. Tämän vuoksi Morishima-substituutiojouston määritelmä on silminnähden oikeutettu toisin kuin Allen-substituutiojouston määritelmä, josta ei määritelmää katsomalla suoraan näy, miten se liittyy alkuperäiseen substituutiojouston määritelmään.

Nopea laskutoimitus osoittaa, miten kysynnän hinta- ja ristijousto liittyvät Morishima-substituutiojoustoon:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^M := \left.\frac{d\log(x_i^*/x_j^*)}{d\log(p_j/p_i)}\right|_{p_j} &= \left.\frac{d(\log x_i^* - \log x_j^*)}{d(\log p_j - \log p_i)}\right|_{p_j} \\
= -\frac{d(\log x_i^* - \log x_j^*)}{d\log p_i} &= \frac{d\log x_j^*}{d\log p_i} - \frac{d\log x_i^*}{d\log p_i} \\
= \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_j^*} - \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i^*} &= PE_{ji} - PE_{ii}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Yllä olevasta esimerkistä huomataan, että Morishima-substituutiojouston estimointi palautuu kysynnän hinta- ja ristijoustojen estimointiin. Myöhemmin esitetään menetelmä, jolla pyritään estimoimaan kyseiset joustot usean tuotantopanoksen tilanteessa. Näistä estimaateista voidaan helposti johtaa estimaatit sekä Allen- että Morishima-substituutiojoustolle.

3.7 Morishima- ja Allen-substituutiojouston vertailua esimerkin avulla

Blackorby ja Russell (1989) esittävät seuraavan esimerkin perusteella, miksi Morishima-substituutiojoustoa tulisi käyttää substituutiojouston yleistyksenä Allen-substituutiojouston sijaan. Määritellään kolmen panoksen tuotantofunktio seuraavasti:

$$
f(x_1, x_2, x_3) = \min\left\{x_1, x_2^{1/2} x_3^{1/2}\right\}. \tag{3.14}
$$

Tutotantofunktio on siis kaksitasoinen funktio, jossa ylempi taso $f(x_1, z) = \min\{x_1, z\}$ on niin sanottu Leontief-tuotantofunktio ja alempi taso on puolestaan $z = x_2^{1/2} x_3^{1/2}$ on Cobb-Douglas-tuotantofunktio.

Tässä on huomattava, että Leontief-tuotantofunktio ja siten myöskään funktio (3.14) ei toteuta oletuksia (2.5)-(2.7). Kuitenkin ehdolliset panoskysynnät on laskettavissa myös Leontief-tuotantofunktiosta ja siten myös funktiosta (3.14). Itse asiassa substituutiojouston määritelmän (2.17) mukainen erotusosamäärä on helposti laskettavissa myös Leontief-tuotantofunktiolle ja osoittautuu, että sen arvo on nolla kaikilla hinnoilla ja tuotannon tasoilla. Voidaan siis ajatella, että Leontief-tuotantofunktiossa substituutiojousto on nolla. Tällä tavoin joissakin tapauksissa voidaan yleistää substituutiojouston määritelmää koskemaan myös joitakin sellaisia funktioita, jotka eivät toteuta oletuksia (2.5)-(2.7).

Osoitetaan, että myös funktion (3.14) panosten 2 ja 3 välille on laskettavissa substituutiojouston määritelmän (2.17) mukainen erotusosamäärä. Ehdolliset panoskysynnät ovat

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= y, \\
x_2^* &= p_2^{-1/2} p_3^{1/2} y, \\
x_3^* &= p_2^{1/2} p_3^{-1/2} y.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Edelleen

$$
\frac{x_2^*}{x_3^*} = \frac{p_3}{p_2}. \tag{3.16}
$$

Näin ollen

$$
\frac{d \log(x_2^* / x_3^*)}{d \log(p_3 / p_2)} = \frac{d \log(p_3 / p_2)}{d \log(p_3 / p_2)} = 1. \tag{3.17}
$$

Voidaan siis ajatella, että substituutiojousto panosten 2 ja 3 välillä on 1. Tämä johtuu luonnollisesti alemman tason Cobb-Douglas-funktiomuodosta. Olisi järkevää ajatella, että substituutiojouston yleistys usean panoksen funktioille toimisi samalla tavalla. Näin ei kuitenkaan ole Allen-substituutiojouston kohdalla, kuten nähdään seuraavasta laskusta:

$$
\begin{aligned}
PE_{23} &= \frac{\partial x_2^*}{\partial p_3} \cdot \frac{p_3}{x_2^*} = \frac{1}{2} \\
s_3 &= \frac{p_3 x_3^*}{p_1 x_1^* + p_2 x_2^* + p_3 x_3^*} = \frac{p_2^{1/2} p_3^{1/2}}{p_1 + 2 p_2^{1/2} p_3^{1/2}} \\
\Rightarrow \sigma_{23}^A &= \frac{PE_{23}}{s_3} = \frac{1}{2} p_1 p_2^{-1/2} p_3^{-1/2} + 1.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Huomataan, että Allen-substituutiojousto σ_{23}^A riippuu olennaisesti hinnoista p_1, p_2 ja p_3. Itse asiassa riippumatta tuotannon tason y ja hintojen p_2 ja p_3 tasoista σ_{23}^A voi saada mitä tahansa arvoja välillä $(1, \infty)$, kun hintaa p_1 valitaan sopivati. Tämä on hieman erikoista, sillä ehdolliset panoskysynnät x_2^* ja x_3^* ovat riippumattomia hinnasta p_1. Näin ollen hinta p_1 ei vaikuta mitenkään siihen, miten panokset 2 ja 3 jakautuvat yrityksen minimoidessa kustannuksia.

Morishima-substituutiojousto σ_{23}^M voidaan myös ratkaista. Tulosta (3.17) mukaillen voidaan osoittaa, että $\sigma_{23}^M = \sigma_{23}^M = 1$. Näin ollen Morishima-substituutiojousto käyttäytyy tässä tapauksessa, kuten substituutiojouston kuuluukin. Se antaa informaatiota siitä, miten panokset 2 ja 3 korvautuvat toisillaan hintojen muuttuessa.

On myös havainnollista tarkastella panokseen 1 liittyviä Morishima-substituutiojoustoja. Koska hinta p_1 ei vaikuta yhteenkään ehdolliseen panoskysyntään, huomataan, että

$$
\sigma_{12}^M = \left. \frac{d \log(x_1^* / x_2^*)}{d \log(p_2 / p_1)} \right|_{p_2} = 0. \tag{3.19}
$$

Vastaavasti $\sigma_{13}^M = 0$. Tämä voidaan tulkita siten, että hinnan p_1 kasvaessa tai laskiessa panoksen 1 kysyntä säilyy entisellään suhteessa panoksen 2 (tai panoksen 3) kysyntään. Toisaalta

$$\sigma_{21}^M = PE_{12} - PE_{22} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1^*} - \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_2^*} = \frac{1}{2} \tag{3.20}$$

ja vastaavasti $\sigma_{31}^M = \frac{1}{2}$. Toisin sanoen panoksen 2 (tai panoksen 3) hinnan noustessa sen määrä suhteessa panoksen 1 määrään laskee ja vastaavasti hinnan laskiessa sen määrä suhteessa panoksen 1 määrään nousee. Morishima-substituutiojousto tarjoaa siis informaatiota siitä, miten jokin panos korvautuu jollakin toisella panoksella tietyn hinnan muutoksen seurauksena.

3.8 Varjosubstituutiojousto

Edellisistä laskuista huomataan myös, että Morishima-substituutiojousto ei ole symmetrinen, sillä $\sigma_{12}^M \neq \sigma_{21}^M$. Vaikka Morishima-substituutiojoustoa voidaan perustellusti pitää informatiivisempana parametrina kuin Allen-substituutiojoustoa, voidaan joissakin tilanteissa tarvita nimenomaan symmetristä substituutiojoustoparametria. Tällaisissa tilanteissa Allen-substituutiojoustoa voidaan käyttää Morishima-substituutiojouston sijaan.

Kuitenkin Morishima-substituutiojoustosta voidaan myös johtaa symmetrinen substituutiojousto-parametri panosten i ja j välille esimerkiksi valitsemalla keskiarvo parametreista σ_{ij}^M ja σ_{ji}^M. Vaihtoehtoisesti parametriksi voidaan valita painotettu keskiarvo kyseisistä parametreista. Esimerkiksi Chambers (1988, 97) määrittelee varjosubstituutiojouston (shadow elasticity of substitution) σ_{ji}^S seuraavasti:

$$\sigma_{ij}^S := \frac{s_i}{s_i + s_j}\sigma_{ij}^M + \frac{s_j}{s_i + s_j}\sigma_{ji}^M. \tag{3.21}$$

Helposti huomataan, että myös varjosubstituutiojousto on kahden panoksen substituutiojouston aito yleistys. Varjosubstituutiojousto kuvaa Morishima-substituutiojouston tavoin kahden panoksen korvautuvuutta panoshintojen muuttuessa. Varjosubstituutiojousto painottaa panosten hinnan muutosten vaikutusta niiden kustannusosuuksien suhteessa. Näin ollen, jos $s_i > s_j$, niin σ_{ij}^S on lähempänä parametria σ_{ij}^M kuin parametria σ_{ji}^M. Tässä määriteltyä varjosubstituutiojoustoa ei tule sekoittaa McFaddenin (1963) määrittelemään varjosubstituutiojoustoon, joka perustuu Allen-substituutiojoustoon.

3.9 Translog-tuotantofunktio

Tässä alaluvussa esitellään Translog-tuotantofunktio ja seuraavassa alaluvussa esitellään Translog-kustannusfunktio. Nämä funktiot soveltuvat edellisissä alaluvuissa esitettyjen parametrien estimointiin. Kuten jo aikaisemmin huomattiin, usean panoksen CES-tuotantofunktio vaikuttaa liian rajoittuneelta funktiolta tähän tarkoitukseen. Olisi toivottavaa löytää jokin mahdollisimman joustava funktiomuoto siinä mielessä, että se approksimoi erilaisia tuotantorakenteita mahdollisimman tarkasti. Eräs potentiaalinen tuotantofunktio on Translog-tuotantofunktio. Sen esitti ensimmäistä kertaa Kmenta (1967) approksimoidakseen CES-tuotantofunktiota kahden tuotantopanoksen tilanteessa. Myöhemmin sitä käsittelevät formaalisti esimerkiksi Christensen, Jorgenson ja Lau (1973).

Esitellään nyt Translog-tuotantofunktio. Esitetään ensiksi tuotantofunktio f panosmäärien logaritmien funktiona g seuraavalla tavalla:

$$g(\log x_1, ..., \log x_n) = f(x_1, ..., x_n). \tag{3.22}$$

Tämän jälkeen approksimoidaan funktiota g 2. asteen Taylorin polynomilla nollan (eli pisteen $x_1 = 1, ..., x_n = 1$) ympärillä:

$$\begin{aligned}
&\log[f(x_1, ..., x_n)] = \log[g(\log x_1, ..., \log x_n)] \\
&\approx \log[g(0, ..., 0)] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log[g(0, ..., 0)]}{\partial \log x_i} \log x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \log[g(0, ..., 0)]}{\partial \log x_i \partial \log x_j} \log x_i \log x_j \\
&= \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \log x_i \log x_j,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

missä $\beta_0 = \log[g(0, ..., 0)]$, $\beta_i = \frac{\partial \log[g(0,...,0)]}{\partial \log x_i}$ ja $\delta_{ij} = \frac{\partial^2 \log[g(0,...,0)]}{\partial \log x_i \partial \log x_j}$. Toisten derivaattojen symmetrisyydestä huomataan, että $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Edellisen laskun viimeinen muoto on itse asiassa eräs Translog-tuotantofunktio. Translog-tuotantofunktion yleinen muoto onkin

$$\log[f(x_1, ..., x_n)] = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \log x_i \log x_j, \tag{3.24}$$

missä $\beta_i, i = 0, 1, ..., n$ ja $\delta_{ij}, i, j =, 1, ..., n$ ovat parametreja, jotka voivat saada mitä vain reaaliarvoja, kunhan vain symmetrisyysoletus $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ on voimassa kaikilla $i, j = 1, ..., n$.

Translog-funktion lisäksi on ehdotettu muitakin joustavia funktiomuotoja, joista voidaan estimoida haluttuja parametreja. Tällaisia ovat esimerkiksi CRESH-funktio (Hanoch, 1971), yleistetty Leontief-funktio (Diewert, 1971) ja yleistetty Cobb-Douglas-funktio (Magnus, 1979).

3.10 Translog-kustannusfunktio ja joustojen estimointi Translog-kustannusfunktiosta

Translog-funktion ideaa voidaan käyttää myös muodostettaessa kustannusfunktiota. Kun ehdolliset panoskysynnät ovat hyvin määriteltyjä, voidaan esittää tuotantofunktiota vastaava kustannusfunktio $C(p_1,...,p_n,y) := \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^*$ (2.12). Kustannusfunktiota voidaan tuotantofunktion tavoin approksimoida toisen asteen Taylorin polynomilla. Greene (2002, 366-369) esittää, miten Translog-kustannusfunktion parametrit voidaan estimoida.

Translog-kustannusfunktio, joka vastaa toisen asteen Taylorin polynomia logaritmisesta kustannusfunktiosta on muotoa

$$\log[C(p_1,...,p_n,y)] = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log p_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \log p_i \log p_j, \tag{3.25}$$

missä $\beta_i, i = 0,1,...,n$ ja $\delta_{ij}, i, j =, 1,...,n$ ovat parametreja ja $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ kaikilla $i, j = 1,...,n$.

Nyt huomataan, että Shephard'n lemman (2.14) nojalla

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{p_i x_i^*}{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^*} = \frac{p_i \frac{\partial C(p_1,...,p_n,y)}{\partial p_i}}{C(p_1,...,p_n,y)} = \frac{d \log C(p_1,...,p_n,y)}{d \log p_i} \\ &= \beta_i + \delta_{1i} \log p_1 + ... + \delta_{ni} \log p_n \end{aligned} \tag{3.26}$$

kaikilla $i = 1,...,n$. Näin saadaan kustannusosuuksista s_i seuraava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} s_1 = \beta_1 + \delta_{11} \log p_1 + ... + \delta_{1n} \log p_n \\ s_2 = \beta_2 + \delta_{21} \log p_1 + ... + \delta_{2n} \log p_n \\ \vdots \\ s_n = \beta_n + \delta_{n1} \log p_1 + ... + \delta_{nn} \log p_n. \end{cases} \tag{3.27}$$

Koska kustannusosuuksien tulee summautua lukuun 1 kaikilla hintayhdistelmillä, vaaditaan Translog-kustannusfunktiolta myös jo mainitun symmetrisyysrajoitteen lisäksi seuraavat rajoitteet:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1 \ \text{ ja } \ \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} = 0 \ \text{ kaikilla } \ j = 1,...,n \tag{3.28}$$

Greene (2002, 368) esittää, että singulaarisuusongelmista eroon pääsemiseksi $(n-1)$:stä ensimmäisestä yhtälöistä voidaan vähentää $\sum_{i=1}^{n} \delta_{in} \log p_n = 0$. Tällöin estimoitavaksi yhtälöryhmäksi tulisi

$$\begin{cases} s_1 & = \beta_1 + \delta_{11} \log \frac{p_1}{p_n} + \ldots + \delta_{1,n-1} \log \frac{p_{n-1}}{p_n} \\ s_1 & = \beta_2 + \delta_{21} \log \frac{p_1}{p_n} + \ldots + \delta_{2,n-1} \log \frac{p_{n-1}}{p_n} \\ \vdots \\ s_{n-1} & = \beta_{n-1} + \delta_{n-1,1} \log \frac{p_1}{p_n} + \ldots + \delta_{n-1,n-1} \log \frac{p_{n-1}}{p_n}, \end{cases} \tag{3.29}$$

missä asetettaisiin rajoituksiksi $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ kaikilla $i, j = 1, \ldots, n-1$. Tämän jälkeen estimoimattomat parametrit β_n ja $\delta_{1n}, \ldots, \delta_{nn}$ voidaan määrätä estimoitujen parametrien ja rajoitteiden (3.28) avulla. Yhtälöryhmä (3.29) voidaan estimoida esimerkiksi SUR-menetelmällä (seemingly unrelated regression), jota käsittelee Greene (2002, 357-362).

Frondel (2013) näyttää, miten Translog-kustannusfunktion parametreista voidaan johtaa kysynnän hinta- ja ristijousto. Laskun (3.26) nojalla nähdään, että $\frac{d \log C}{d \log p_i} = s_i$ ja $\frac{d s_i}{d \log p_i} = \beta_{ii}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} PE_{ii} &= \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i^*} = \frac{d \log x_i^*}{d \log p_i} = \frac{d \log \left[\frac{s_i C}{p_i} \right]}{d \log p_i} \\ &= \frac{d \log s_i}{d \log p_i} + \frac{d \log C}{d \log p_i} - \frac{d \log p_i}{d \log p_i} \\ &= \frac{1}{s_i} \frac{d s_i}{d \log p_i} + s_i - 1 = \frac{\beta_{ii}}{s_i} + s_i - 1. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Vastaavasti laskun (3.26) nojalla $\frac{d \log C}{d \log p_j} = s_j$ ja $\frac{d s_i}{d \log p_j} = \beta_{ij}$. Näin ollen, kun $i \neq j$

$$\begin{aligned} PE_{ij} &= \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i^*} = \frac{d \log x_i^*}{d \log p_j} = \frac{d \log \left[\frac{s_i C}{p_i} \right]}{d \log p_j} \\ &= \frac{d \log s_i}{d \log p_j} + \frac{d \log C}{d \log p_j} - \frac{d \log p_i}{d \log p_j} \\ &= \frac{1}{s_i} \frac{d s_i}{d \log p_j} + s_j - 0 = \frac{\beta_{ij}}{s_i} + s_j. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Edelleen kysynnän hinta- ja ristijouston sekä kustannusosuuksien avulla määriteltävät parametrit Allen-substituutiojousto σ_{ij}^A, Morishima-substituutiojousto σ_{ij}^M ja varjosubstituutiojousto σ_{ij}^S ovat johdettavissa.

$$\sigma^A_{ij} = \frac{PE_{ij}}{s_j} = \frac{\beta_{ij}}{s_i s_j} + 1$$
$$\sigma^M_{ij} = PE_{ji} - PE_{ii} = \frac{\beta_{ij}}{s_j} - \frac{\beta_{ii}}{s_i} + 1 \tag{3.32}$$
$$\sigma^S_{ij} = \frac{s_i}{s_i + s_j}\sigma^M_{ij} + \frac{s_j}{s_i + s_j}\sigma^M_{ji} = \frac{\left(\frac{s_i}{s_j} + \frac{s_j}{s_i}\right)\beta_{ij} - \beta_{ii} - \beta_{jj}}{s_i + s_j} + 1$$

Edellisten joustojen arvioinnissa käytetään sekä estimoitavia parametreja β_{ij}, että kustannusosuuksia s_i. Nyt joustot voidaan luontevasti arvioida käyttämällä kustannusosuuksina keskiarvoisia kustannusosuuksia estimoinnin kohteena olevista yrityksistä. Tämä ei välttämättä ole ihanteellinen tapa, sillä näin toimiessa joudutaan käyttämään aggregoituja kustannusosuuksia arvioidessa yksittäisten yritysten tasolla määräytyviä parametreja. Parempaa vaihtoehtoa on kuitenkin haastavaa keksiä.

3.11 Usean panoksen substituutiojouston tulkinnasta

Tässä luvussa on laajennettu substituutiojouston analyysia tilanteeseen, jossa tuotantopanoksia on useampia kuin kaksi. Ensimmäinen ongelma oli substituutiojouston yleistämisen ongelma usean tuotantopanoksen tilanteeseen. Morishima-substituutiojousto on luonteva ja mahdollisimman informatiivinen yleistys. Symmetristä parametria haluttaessa Morishima-substituutiojoustosta johdettava varjosubstituutiojousto on myös käyttökelpoinen substituutiojouston yleistys. Myös Allen-substituutiojoustoa on kirjallisuudessa käytetty paljon tähän tarkoitukseen.

Sopivan parametrin löydyttyä seuraa kysymys siitä, kuinka parametri voitaisiin estimoida tilastollisesta aineistosta. Edellisessä alaluvussa esitimme menetelmän, jonka avulla tässä työssä määriteltyjä joustoja (kysynnän hintajousto, kysynnän ristijousto, Allen-substituutiojousto, Morishima-substituutiojousto ja varjosubstituutiojousto) voidaan estimoida. Alaluvun (2.6) tavoin on mahdollista koota oletuksia, joiden varassa edellisen alaluvun estimointi voitaisiin suorittaa. Oletukset eivät laadultaan eroaisi tässä merkittävästi alaluvun (2.6) oletuksista. Olennaista tässä vaiheessa on huomata, että näin saatujen estimointien informaatio riippuu siitä, kuinka paljon oletettu maailma vastaa todellista maailmaa. Kuten alaluvussa (2.6), mahdollisen harhan suuruutta tai sen suuntaa ei tässäkään tilanteessa voida tietää.

Seuraavassa luvussa pyrimme simulointimenetelmillä tarkastelemaan tilanteita, joissa yksi tai useampi oletuksista ei ole voimassa. Tarkastelemme yksinkertaisuuden vuoksi kuitenkin vain tilanteita, jossa jokainen yritys käyttää kahta tuotantopanosta ja jokaisen yrityksen tuotantorakenne määräytyy CES-tuotantofunktion avulla. Samanlainen analyysi olisi luonnollisesti mahdollista tehdä myös alaluvun (3.10) tilanteen mukaisesti yrityksille, joiden kustannusrakenne määräytyy Translog-kustannusfunktion avulla usean tuotantopanoksen tilanteessa.

4 SIMULOINTIESIMERKKEJÄ SUBSTITUUTIOJOUSTON ESTIMOINNISTA

4.1 Milloin estimointi toimii?

Nyt palataan luvun (2.6) tilanteeseen, jossa yritykset käyttävät kahta tuotantopanosta ja niiden tuotantofunktiot ovat CES-muotoisia. Oletetaan havainnollisuuden vuoksi, että käytettävät tuotantopanokset ovat taitava työvoima (panos 1) ja taitamaton työvoima (panos 2). Tällöin panoshinnat vastaavat työntekijöille maksettavaa palkkaa. Kertauksen vuoksi esitetään oletukset (1)-(7).

1. Käytössä on usean yrityksen havaintoja tuotantopanosten määristä ja hinnoista joltakin periodilta.
2. Jokainen yritys käyttää kahta tuotantopanosta.
3. Yritysten tuotantofunktiot ovat samanlaiset.
4. Tuotantofunktiot ovat CES-muotoisia (2.28).
5. Yritysten tuotantomäärät ja tuotantopanosten hinnat ovat eksogeenisia.
6. Yritykset minimoivat kustannuksia.
7. Tuotantopanosten kysyntä on sopeutunut vallitseviin hintoihin ja tuotantopanosten hinnat säilyvät muuttumattomina koko tarkasteltavan periodin ajan.

Alaluvussa (2.6) osoitettiin, että oletusten ollessa voimassa, jokaiselle yritykselle pätee yhtälö

$$\log\left(\frac{x_2^*}{x_1^*}\right) = \sigma \log\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right] + \sigma \log\left(\frac{p_1}{p_2}\right), \tag{4.1}$$

missä x_1^* on taitavan työvoiman kysyntä, x_2^* on taitamattoman työvoiman kysyntä, p_1 on taitavan työvoiman palkka, p_2 on taitamattoman työvoiman palkka ja α sekä σ ovat CES-muotoisen tuotantofunktion parametreja.

Oletuksen (1) ansiosta saadaan kerättyä tilastoaineisto yritysten työvoiman käytöstä ja palkoista. Tällöin voidaan tehdä kaksiulotteinen pistekuvio, jossa pystyakselin arvot kuvaavat yritysten logaritmista suhteellista työvoiman käyttöä $\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ ja vaaka-akselin arvot kuvaavat yritysten kohtaamia logaritmisia suhteellisia palkkoja $\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$. Kun oletukset

(2)-(7) ovat voimassa, kuvion pisteet muodostavat lineaarisen pistejonon, jonka kulmakerroin on yritysten substituutiojousto σ. Oletusten ollessa voimassa substituutiojouston selvittäminen ei siis ole erityisen vaikea tehtävä.

Todellisuudessa aineisto ei ikinä muodosta edellä esitettyä lineaarista pistejonoa. Tästä voidaan suoraan päätellä, että vähintään yksi oletuksista ei päde ainakaan täydellisesti. Tämä ei tietenkään ole mikään ihme, kun otetaan huomioon kuinka rajoittavia oletukset jyrkästi tulkittuna ovat. Tilanteesta voidaan tehdä todenmukaisempi lisäämällä virhetermi, joka kuvaa yritysten käyttäytymisessä ilmenevää satunnaisuutta. Tällaista tilannetta voidaan kuvata esittämällä jokaiselle yritykselle i seuraava yhtälö:

$$\log\left(\frac{x_{2,i}}{x_{1,i}}\right) = \beta + \sigma \log\left(\frac{p_{1,i}}{p_{2,i}}\right) + \epsilon_i, \tag{4.2}$$

missä $x_{1,i}$ on yrityksen i taitavan työvoiman käyttö, $x_{2,i}$ taitamattoman työvoiman käyttö, $p_{1,i}$ yrityksen i kohtaama taitavalle työvoimalle maksettava palkka, $p_{2,i}$ taitamattomalle työvoimalle maksettava palkka ja ϵ_i mallin satunnaisuutta kuvaava yrityksen i virhetermi.

Vaikka oletukset eivät täydellisesti pitäisikään paikkaansa, voidaan kuitenkin ajatella, että ne pitävät keskimäärin paikkansa. Se, mitä oletusten keskimääräinen paikkansa pitävyys tarkoittaa, on hankalaa täsmentää matemaattisesti. Voidaan esimerkiksi ajatella, että virhetermit ovat sekä keskenään, että työvoiman käytön suhteen riippumattomia ja samaa normaalijakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia, joiden odotusarvo on nolla. Jos edelleen palkat ja tuotantorajoitteet muodostuvat eksogeenisesti ja yritykset minimoivat kustannuksensa, voidaan lineaarinen regressiomallin avulla estimoida harhattomasti yhtälöstä parametrit (4.2) parametrit β ja σ. Tällöin σ voidaan tulkita parametriksi, joka ilmoittaa kuinka paljon $\log\left(\frac{x_{2,i}}{x_{1,i}}\right)$ muuttuu keskimäärin $\log\left(\frac{p_{1,i}}{p_{2,i}}\right)$:n muuttuessa. Tämä parametri vastaa jonkinlaista keskimääräistä substituutiojoustoa.

Tyypillisesti minkä tahansa tuotantofunktion mitä tahansa parametria estimoidessa oletetaan jokin vastaava satunnaismalli, johon on kehitetty estimointimenetelmä. Useissa tapauksissa voidaan myös tarkistaa, onko malli aineiston perusteella uskottava. Esimerkiksi edellä esitellyssä mallissa (4.2) voidaan aineiston perusteella tutkia, onko uskottavaa, että virhetermit ovat samoin jakautuneita. Valitettavasti ei voida kuitenkaan tehdä johtopäätöstä, että malli olisi todellinen, vaikka aineisto sopisikin malliin. Sen sijaan joudutaan luottamaan siihen, että oletukset pätevät ja toivomaan, että estimointi tarjoaa ainakin suuntaa antavaa informaatiota.

Yksi tapa tutkia, mitä tapahtuu, kun oletukset eivät päde, on simulointi. Ideana tässä on esittää toinen matemaattinen satunnaismalli yritysten panoskäytöstä ja hinnoista, jossa yksi tai useampi oletuksista ei päde. Tämä toinen malli tulee voida simuloida esimerkiksi jonkin tietokoneohjelman avustuksella. Simuloinnin jälkeen voidaan estimoida malli, jossa oletukset eivät ole voimassa menetelmällä, jossa tehdään kyseiset oletukset. Seuraavaksi esitellään erilaisia simuloituja tilanteita, jossa yksi tai useampi oletuksista ei ole voimassa ja katsotaan, antaako mallin (4.2) mukainen lineaarinen regressio hyviä estimaatteja simuloiduissa tilanteissa.

4.2 Satunnaistetut parametrit

Oletetaan seuraava satunnaistettujen parametrien malli.

- Taloudessa on 10 000 yritystä.
- Jokainen yritys käyttää kahta työpanosta, jotka ovat taitava työvoima (x_1) ja taitamaton työvoima (x_2).
- Yrityskohtaiset palkat ovat eksogeenisia ja muodostuvat riippumattomasti noudattaen seuraavia jakaumia: $p_{1,i} \sim Gamma(64,32)$, $p_{2,i} \sim Gamma(16,16)$.
- Jokaisen yrityksen tuotanto on 10 yksikköä.
- Jokaisella yrityksellä i on CES-tuotantofunktio

  $$f(x_1,x_2) = \gamma\left[\alpha_i x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha_i)x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

  missä $\gamma = 1$, $\sigma = 0.5$ ja parametrit α_i muodostuvat riippumattomasti noudattaen jakaumaa $\alpha_1 \sim Beta(15,5)$.
- Jokainen yritys palkkaa kumpaakin työpanosta annetulla tuotannon määrällä minimoiden kustannuksensa.

Tässä $Gamma(\alpha,\beta)$-jakaumalla tarkoitetaan jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \; x > 0, \tag{4.3}$$

missä $\alpha,\beta > 0$ ovat parametreja ja

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \tag{4.4}$$

on gammafunktio.

Gammajakauman keskiarvo on $\frac{\alpha}{\beta}$ ja varianssi on $\frac{\alpha}{\beta^2}$. Näin ollen mallin yritysten kohtaamien palkkojen $p_{1,i}$ keskiarvo on $64/32 = 2$ ja varianssi on 0.625, kun taas palkkojen $p_{2,i}$ keskiarvo on $16/16 = 1$ ja varianssi on 0.625. Tämä ilmentää sitä, että taitavalle työvoimalle maksettavat palkat ovat suurempia kuin taitamattomalle työvoimalle maksettavat palkat.

$Beta(\alpha,\beta)$-jakaumalla tarkoitetaan jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \; 0 \le x \le 1, \tag{4.5}$$

missä $\alpha,\beta > 0$ ovat parametreja.

Betajakauman keskiarvo on $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ ja varianssi on $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$. Näin ollen mallin yritysten tuotantofunktion parametri α_i keskiarvo on $15/20 = 0.75$ ja varianssi on 0.009. Tämä ilmentää CES-tuotantofunktion (2.22) mukaan sitä, että taitava työvoima on yrityksille arvokkaampaa kuin taitamaton työvoima.

Oletetaan, että satunnaistettujen parametrien mallin tilanteessa tutkija haluaa selvittää yritysten substituutiojouston ja hänellä on käytettävissään tiedot kaikkien yritysten tuotannosta, palkasta ja havainnoista. Tällöin hän voi välittömästi aineistoa tutkimalla havaita, että jokin oletuksista ei pidä paikkaansa. Tässä tapauksessa oletus (3) tuotantofunktioiden samanlaisuudesta ei pidä paikkaansa. Jokaisen yrityksen i tuotantofunktio nimittäin määräytyy sen mukaan, minkä arvon parametri α_i saa. Tutkija voi tässä tapauksessa estimoida virhetermin sisältävän lineaarisen regressiomallin (4.2) selvittääkseen substituutiojouston.

Satunnaistettujen parametrien malli voidaan helposti simuloida. Tämän jälkeen simuloiduista tuloksista voidaan tehdä yhtälön (4.2) mukainen lineaarinen regressio. Alla on esitettynä tällaisen simuloinnin jälkeiset estimaatit ja 95%:n luottamusvälit parametreille β ja σ.

Parametri	Estimaatti	Keskivirhe	Luottamusväli
β	-0.587	0.007	(-0.601, -0.572)
σ	0.496	0.009	(0.477, 0.515)

Tuloksista huomataan, että substituutiojouston σ estimointi onnistuu erittäin hyvin, sillä estimaatti on hyvin lähellä varsinaista parametria ja luottamusvälikin on pieni. Edellä havaittu ilmiö olisi ideaalinen substituutiojoustoa estimoidessa. On kuitenkin muistettava, että satunnaistettujen parametrien mallin oletukset ovat alkuperäisten oletusten (1)-(7) tavoin varsin rajoitteellisia ja epärealistisia, joten tätä tulosta ei voida pitää vakuuttavana todisteena siitä, että substituutiojousto olisi todellisessa maailmassa estimoitavissa tällä tavoin.

Satunnaistettujen parametrien mallissa parametrin α ja palkkojen p_1 sekä p_2 lisäksi myös parametrit γ ja σ ja tuotannon määrä y olisi mahdollista satunnaistaa. Yhtälöstä (4.1) kuitenkin huomataan, että parametri γ ja tuotannon määrä y eivät vaikuta suhteelliseen panoskysyntään eivätkä siten varsinaiseen analyysiin. Parametria σ ei tässä haluttu satunnaistaa, sillä se oli varsinainen mielenkiinnon kohde. Jos sallitaan parametrin σ vaihtelevan yrityksittäin, voidaan pyrkiä estimoimaan keskimääräinen substituutiojousto. Tätä ei kuitenkaan tehty epäselvyyksien välttämiseksi.

4.3 Havaitsemattomat työntekijäryhmät

Edellä on oletettu, että tutkija havaitsee, mihin ryhmään eri työntekijät kuuluvat (oletus (1)). Tilanne voi kuitenkin olla toinen. Oletetaan nyt edellisessä alaluvussa kuvattu satunnaistettujen parametrien malli sillä erotuksella, että tutkija ei pysty jaottelemaan työvoimaa taitavaan ja taitamattomaan työvoimaan. Sen sijaan yritykset pystyvät tämän tekemään ja palkkaavat kumpaakin työvoimaa minimoiden kustannukset. Tällöin tutkija voi perustaa analyysinsa johonkin työvoimaryhmiä kuvaavaan korvikemuuttujaan, joka kertoo jotakin työvoiman tasosta. Tällainen korvikemuuttuja voi olla esimerkiksi koulutus. Oletamme nyt tilanteen, jossa tutkija pystyy jaottelemaan yritysten käyttämän työvoiman korkeasti koulutettuihin ja matalasti koulutettuihin. Oletamme myös, että taitava työvoima sisältää pääasiassa korkeasti koulutettua työvoimaa ja taitamaton työvoima sisältää pääasiassa matalasti koulutettua työvoimaa, mutta ryhmittelyt eivät vastaa täydellisesti toisiaan.

Esitetään malli formaalisti.

- Taloudessa on 10 000 yritystä.
- Jokainen yritys käyttää kahta työpanosta, jotka ovat taitava työvoima (x_1) ja taitamaton työvoima (x_2).
- Yrityskohtaiset palkat ovat eksogeenisia ja muodostuvat riippumattomasti noudattaen seuraavia jakaumia: $p_{1,i} \sim Gamma(64, 32),\ p_{2,i} \sim Gamma(16, 16)$.
- Jokaisen yrityksen tuotanto on 10 yksikköä.
- Jokaisella yrityksellä i on CES-tuotantofunktio

  $$f(x_1, x_2) = \gamma \left[\alpha_i x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha_i) x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

  missä $\gamma = 1$, $\sigma = 0.5$ ja parametrit α_i muodostuvat riippumattomasti noudattaen jakauaa $\alpha_1 \sim Beta(15, 5)$.
- Jokainen yritys palkkaa kumpaakin työpanosta annetulla tuotannon määrällä minimoiden kustannuksensa.
- Jokaisen yrityksen käyttämä taitava työvoima jakautuu korkeasti koulutettuun työvoimaan ja matalasti koulutettuun työvoimaan suhteessa satunnaisesti siten, että matalasti koulutetun työvoiman osuus noudattaa jakaumaa $Beta(5, 20)$.
- Jokaisen yrityksen käyttämä taitamaton työvoima jakautuu korkeasti koulutettuun työvoimaan ja matalasti koulutettuun työvoimaan suhteessa satunnaisesti siten, että korkeasti koulutetuni koulutetun työvoiman osuus noudattaa jakaumaa $Beta(5, 20)$.
- Tutkija havaitsee yritysten käyttämän työvoiman koulutuksen mukaan ja molempien koulutusryhmien keskipalkat yrityksittäin.

Tutkija voi tässä tilanteessa tehdä analyysin olettaen, että yritysten käyttämät työpanokset olisivat korkeasti koulutettu työvoima ja matalasti koulutettu työvoima. Tällöin hän voisi edellisen luvun tavoin estimoida lineaarisen regressiomallin (4.2) selvittääkseen substituutiojouston.

Myös tämän alaluvun malli voidaan simuloida ja tehdä yhtälön (4.2) mukainen lineaarinen regressio. Alla on lineaarisen regression mukaiset estimaatit ja 95%:n luottamusvälit parametreille β ja σ.

Parametri	Estimaatti	Keskivirhe	Luottamusväli
β	-0.294	0.007	(-0.308, -0.280)
σ	0.370	0.015	(0.341, 0.399)

Tuloksista huomataan, että substituutiojouston estimaatti arvioi alakanttiin todellisen substituutiojouston. Näin ollen, kun todellisia substituutiojoustoestimaatteja tehdään, olisi hyvä pohtia, miten työvoima (ja muut panokset) voidaan jaotella kahteen tai useampaan panosryhmään. Todellisuudessa työntekijät muodostavat erittäin heterogeenisen massan, jossa eri yksilöillä on hyvin erilaisia taitoja ja kykyjä. Vaikka jonkinlainen enemmän tai vähemmän keinotekoinen ryhmittely eri työntekijäryhmiin on välttämätöntä estimoinnin kannalta, voi ryhmittely johtaa vakaviin yksinkertaistuksiin, joiden vuoksi tulokset voidaan kyseenalaistaa.

4.4 Jäykkä kysyntä

Seuraavaksi tarkastellaan tilannetta, jossa yritysten työvoiman käyttö ei sopeudu välittömästi palkkojen muuttuessa. Tällainen tilanne voi tulla kyseeseen esimerkiksi silloin, kun työehtosopimuksen mukainen palkka muuttuu, eikä yritys kykene välittömästi korjaamaan työvoiman käyttöään uuden tilanteen mukaisesti. Oletetaan luvun (4.2) satunnaistettujen parametrien mukainen tilanne sillä muutoksella, että jokaisen yrityksen palkkaan tulee satunnainen eksogeeninen muutos siten, että yrityksen työvoiman käyttö säilyy entisellään.

Esitetään kaksivaiheinen jäykän kysynnän malli formaalisti.

- Taloudessa on 10 000 yritystä.
- Jokainen yritys käyttää kahta työpanosta, jotka ovat taitava työvoima (x_1) ja taitamaton työvoima (x_2).
- Ensimmäisen vaiheen yrityskohtaiset palkat $p_{1,i}(1)$ ja $p_{2,i}(1)$ ovat eksogeenisia ja muodostuvat riippumattomasti noudattaen seuraavia jakaumia: $p_{1,i}(1) \sim Gamma(64, 32)$, $p_{2,i}(1) \sim Gamma(16, 16)$.
- Jokaisen yrityksen tuotanto on 10 yksikköä.

- Jokaisella yrityksellä i on CES-tuotantofunktio

$$f(x_1,x_2)=\gamma\left[\alpha_i x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+(1-\alpha_i)x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

  missä $\gamma = 1$, $\sigma = 0.5$ ja parametrit α_i muodostuvat riippumattomasti noudattaen jakauaa $\alpha_1 \sim Beta(15,5)$.

- Jokainen yritys palkkaa kumpaakin työpanosta annetulla tuotannon määrällä minimoiden kustannuksensa.

- Palkoissa tapahtuu riippumaton satunnainen muutos siten, että toisen vaiheen palkat $p_{1,i}(2)$ ja $p_{2,i}(2)$ noudattavat seuraavia jakaumia:
  $p_{1,i}(2) \sim Gamma(32\cdot p_{1,i}(1),32),\ p_{2,i} \sim Gamma(16\cdot p_{2,i}(1),16)$.

- Yritysten työvoiman käyttö säilyy ennallaan.

Tässä jäykän kysynnän mallissa oletuksen (3) lisäksi myöskään oletus (7) tuotantopanosten kysynnän sopeutumisesta ei ole voimassa. Yritykset minimoivat kustannuksensa ensimmäisen vaiheen mukaisilla palkoilla. Palkkojen muuttuessa yrityksen työvoiman käyttö kuitenkin säilyy entisellään, minkä vuoksi uudet palkat eivät täysin vastaa yritysten työvoiman käyttöä kustannusten minimoinnin kannalta. Tämä saattaa aiheuttaa estimointiin harhaa siitä huolimatta, että uusien palkkamuutosten odotusarvo on nolla mallin jakaumavalinnoilla.

Tutkija voi jälleen edellisten lukujen tavoin estimoida lineaarisen regressiomallin (4.2) selvittääkseen substituutiojouston. Jälleen edellä esitetty kaksivaiheinen jäykän kysynnän malli on simuloitu ja alla on yhtälön (4.2) mukaisen lineaarisen regression tulokset mukaiset estimaatit ja 95%:n luottamusvälit parametreille β ja σ.

Parametri	Estimaatti	Keskivirhe	Luottamusväli
β	-0.404	0.006	(-0.416, -0.397)
σ	0.244	0.007	(0.230, 0.257)

Tässäkin tapauksessa substituutiojouston estimaatti arvioi varsinaisen substituutiojouston alakanttiin jopa selvemmin kuin edellisessä alaluvussa. Tämä voidaan selittää sillä, että kysynnän joustavuus on vähäisempää kuin aikaisemmissa malleissa, jolloin myös kysynnän joustavuutta mittaavan substituutiojouston arvo tulisi olla pienempi. Tällaisen päättelyn seurauksena tosin substituutiojouston käsite hämärtyy selvästi. Aikaisemmin nimittäin substituutiojouston on ollut matemaattisessa mielessä eksakti. Jos ajatellaan, että substituutiojousto mukailee tätä eksaktia määritelmää ottaen kuitenkin jollain epämääräisellä tavalla huomioon kysynnän jäykkyyden lyhyellä aikavälillä, ei substituutiojouston käsite ole enää selkeästi tulkittavissa.

5 JOHTOPÄÄTÖKSET JA ARVIOINTI

Tässä työssä on käsitelty substituutiojouston estimointia. Substituutiojousto on tunnusluku, joka kuvaa tuotantopanoksen korvaamisen helppoutta jollakin toisella tuotantopanoksella. Alaluvussa (2.3) on esitelty substituutiojouston määritelmä tuotantofunktion avulla kahden panoksen tilanteessa. Substituutiojousto voidaan estimoida tietyin oletuksin esimerkiksi CES-tuotantofunktiosta kahden tuotantopanoksen tilanteessa. Alaluvuissa (2.6) ja (4.1) on käsitelty näitä oletuksia ja substituutiojouston estimointia CES-tuotantofunktiosta.

Luvussa (3) on käsitelty substituutiojouston estimointia usean panoksen tilanteessa. Usean panoksen tilanteessa ei ole täysin selvää, miten substituutiojousto määritelmä tulisi yleistää. Vaihtoehtoisia substituutiojouston yleistyksiä usean tuotantopanoksen tilanteeseen ovat muun muassa Allen-subtituutiojousto, Morishima-substituutiojousto ja varjosubstituutiojousto. Nämä kaikki ovat johdettavissa kysynnän hinta- ja ristijoustojen avulla. Morishima-substituutiojousto on Allen-substituutiojoustoa johdonmukaisempi yleistys. Tätä väitettä tukee esimerkiksi alaluvun (3.7) esimerkki. Jos usean panoksen tilanteessa halutaan käyttää epäsymmetrisen Morishima-substituutiojouston sijaan symmetristä substituutiojoutoparametria, on Morihima-substituutiojoustosta johdettu varjosubstituutiojousto hyvä vaihtoehto. Alaluvussa (3.10) esitellään Translog-kustannusfunktio ja yhtälöryhmä, jonka avulla kysynnän hinta- ja ristijoustot ja siten myös edellä mainitut substituutiojouston yleistykset voidaan estimoida tietyin oletuksin.

Luvussa (4) on tarkasteltu kolmea eri simulointiesimerkkiä substituutiojouston estimoinnista. Kussakin simulointiesimerkissä tilanne on rakennettu siten, että alalukujen (2.6) ja (4.1) oletukset (1)-(7) ovat pieniä muutoksia lukuun ottamatta voimassa. Ensimmäisessä esimerkissä, jossa CES-funktiota satunnaistettiin yritysten välillä hieman, substituutiojouston estimointi onnistuu riittävän tarkasti. Toisessa ja kolmannessa esimerkissä substituutiojousto aliarvioitiin estimoinnissa. Toisessa esimerkissä yritysten käyttämistä työpanosryhmistä ei ole tarkkaa informaatiota. Todellisten työpanosryhmien sijaan analyysissä hyödynnetään työpanosjaottelua, joka mukailee todellista jaottelua. Kolmannessa esimerkissä yritysten työvoiman käyttö ei sopeudu välittömästi palkkamuutosten seurauksena.

Kussakin annetuista esimerkeistä on pyritty mukailemaan jotakin ilmiötä, joka todellisessa maailmassa saattaa aiheuttaa ongelmia substituutiojouston estimoinnin kannalta. Esimerkit itsessään ovat sinällään alkuperäisten oletusten tavoin äärimmäisen yksinkertaistettuja kuvauksia todellisuudesta. Myös toiseen ja kolmanteen esimerkkiin voitaisiin kehitellä menetelmä, jossa substituutiojouston estimointi onnistuu tarkasti. Olennaista on kuitenkin huomata, että estimoidessa substituutiojoustoa ei voida tietää, mikä tilanne todellisuudessa esiintyy. Itse asiassa todellisen maailman tuotanto-, panoskysyntä- ja panoshintarakenteet ovat niin monimutkaisia, että joka tapauksessa on tehtävä valtavia yksinkertaistuksia. Simulointiesimerkit osoittavat kuitenkin, että jo pienet muutokset oletuksiin saattavat aiheuttaa ongelmia substituutiojouston estimoinnissa.

Vastaava päättely toimii käytännössä kaikkiin muihinkin tuotantofunktiosta johdettujen parametrien estimointiin. Tuotantofunktiot ovat taloustieteen teorian kannalta äärimmäisen tärkeitä välineitä. Ne tarjoavat mahdollisuuden tarkastella sekä teoreettisia, että empiirisiä kysymyksiä johdonmukaisella tavalla. Kuitenkin tuotantofunktioiden parametrien estimointiin liittyy aina enemmän tai vähemmän uskottavia oletuksia. Usein rajoittavia oletuksia asetetaan sen vuoksi, että estimointi onnistuisi jollakin tietyllä menetelmällä. Oletusten ollessa epärealistisia tuotantofunktiosta johdettujen parametrien estimointiin liittyy epävarmuutta, jonka merkitystä on usein mahdotonta arvioida.

Luvun (4) esimerkit esittävät myös, miten simulointia voi käyttää apuvälineenä substituutiojouston tai vaihtoehtoisesti myös muiden tuotantofunktiosta johdettujen parametrien estimoinnissa. Simuloinnin avulla on mahdollista pureutua ilmiöihin, jotka voivat vaikuttaa oletusten realistisuuteen. Tässä työssä käytetyt simulointiesimerkit ovat gradun luonteen vuoksi erittäin yksinkertaisia. Olisi mielekästä tutkia jatkossa, miten taloustieteessä yleisesti käytetyt tuotantofunktiosta johdettujen parametrien estimointimenetelmät toimisivat monimutkaisemmissa ja kunnianhimoisemmin todellisuutta kohti pyrkivissä simulointimalleissa.

LÄHTEET

Allen, R. G. D. 1938. Mathematical Analysis for Economists. London: Macmillan.
Allen, R. G. D. & Hicks, J. R. 1934. A Reconsideration of the Theory of Value. Economica 1 (2), 196-219.
Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S. & Solow, R. M. 1961. Capital-labor substitution and economic efficiency. Review of Economics and Statistics 43 (3), 225–250.
Blackorby, C. & Russell, R. 1975. The Partial Elasticity of Substitution. Discussion Paper No. 75-1, Economics. University of California. Artikkeliin viitattu julkaisussa: Blackorby, C. & Russell, R. 1989. Will the Real Elasticity of Substitution Please Stand Up? (A Comparison of the Allen/Uzawa and Morishima Elasticities). The American Economic Review 79 (4), 882-888.
Blackorby, C. & Russell, R. 1989. Will the Real Elasticity of Substitution Please Stand Up? (A Comparison of the Allen/Uzawa and Morishima Elasticities). The American Economic Review 79 (4), 882-888.
Chambers, R. G. 1988. Applied Production Analysis: A Dual Approach. Cambridge: Cambridge University Press.
Christensen, L. R. Jorgenson, D. W. & Lau, L. J. 1973. Transcendental Logarithmic Production Frontiers. The Review of Economics and Statistics 55 (1), 28-45.
Cobb, C. W. & Douglas, P. H. 1928. A Theory of Production. American Economic Review 18 (1), 139–165.
Diewert, W. E. 1971. An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function. Journal of Political Economy 79 (3), 481-507.
Frondel, M. 2013. Substitution elasticities: A theoretical and empirical comparison. SFB 823, Discussion Paper 33/2010.
Gravelle, H. & Rees, R. 2004. Microeconomics, 3rd ed. Harlow: Prentice Hall.
Greene, W. H. 2002. Econometric analysis, 5th ed. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, Inc.
Hanoch, G. 1971. CRESH Production Functions. Econometrica 39 (5), 695-712.
Hicks, J. R. 1932. The Theory of Wages. London: Macmillan.
Katz, L. & Murphy K. 1992. Changes in Relative Wages, 1963-1987: Supply and Demand Factors. The Quarterly Journal of Economics 107 (1), 35-78.
Kmenta, J. On Estimation of the CES Production Function. International Economic Review 8 (2), 180-189.
Magnus, J.R. 1979. Substitution Between Energy and Non-Energy in the Netherlands 1950-1976. International Economic Review 20 (2), 465-484.
McFadden, D. 1963. Constant Elasticity of Substitution Production Functions. The Review of Economic Studies 30 (2), 73–83.
Morishima, M. 1967. A Few Suggestions on the Theory of Elasticity (Japaniksi). Keizai Hyoron. Artikkeliin viitattu julkaisussa: Blackorby, C. & Russell, R. 1989. Will the Real

Elasticity of Substitution Please Stand Up? (A Comparison of the Allen/Uzawa and Morishima Elasticities). The American Economic Review 79 (4), 882-888.

Sato, K. 1967. A Two-Level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function. The Review of Economic Studies 34 (2), 201-218.

Solow, R. M. 1956. A contribution to the theory of economic growth. The Quarterly Journal of Economics 70 (1), 65–94.

Uzawa, H. 1962. Production Functions with Constant Elasticities of Substitution. The Review of Economic Studies 29 (4), 291-299.

Van der Werf, E. 2008. Production functions for climate policy modeling: An empirical analysis. Energy Economics 30 (6), 2964-2979.