Esimerkkien anto peruskoulun matematiikan erityisopetuksessa

Maria Ylä-Ajos

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
Syyslukukausi 2015
Kasvatustieteiden laitos
Erityispedagogiikan yksikkö
Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Ylä-Ajos, Maria. 2015. Esimerkkien anto peruskoulun matematiikan erityisopetuksessa. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden laitos.

Esimerkeillä on keskeinen rooli matematiikan opetuksessa. Käytännönläheisillä ja oppilaiden kokemusmaailmaa laajentavilla esimerkeillä voidaan konkretisoida ja havainnollistaa opittavaa ainesta, eheyttää opetusta sekä kehittää oppilaiden laaja-alaista osaamista ja kokonaisuuksien hallintaa. Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin erityisopettajan rakentamia esimerkkejä autenttisissa opetustilanteissa luokkaympäristössä. Tutkimustehtävät olivat seuraavat: Miten erityisopettajat rakentavat esimerkkejä matematiikan osa-aikaisessa erityisopetuksessa? sekä Millaisia tehtäviä erityisopettajan rakentamat esimerkit palvelevat opetuksessa?

Koska tarkoituksena on tutkia, miten opetuspuheeseen upotetut esimerkit käytännössä esitetään, valikoitui tutkimusmenetelmäksi etnometodologinen keskustelunanalyysi. Aineistona olivat kahdessa peruskoulussa videotallennetut osa-aikaisen erityisopetuksen matematiikan oppitunnit. Opettajilta, oppilailta ja heidän vanhemmiltaan oli kysytty kirjalliset luvat tutkimukseen.

Tutkimustulokset osoittavat, että peruskoulun matematiikan osa-aikaisessa erityisopetuksessa esimerkkejä rakennettiin usein yhdessä oppilaiden kanssa. Opettaja vei esimerkinantoa eteenpäin osallistaen oppilaita siihen kysymysten kautta ja tarvittaessa johdattelemalla oppilaita löytämään oikeita vastauksia. Näin opettaja palautti jo opittuja asioita oppilaan mieleen tai siltasi oppilaalla jo olemassa olevaa tietoa uuden tiedon kanssa. Esimerkkejä annettiin myös suoran opetuksen yhteydessä. Tällöin oli kyse oppilaille uuden asian käsittelystä.

Erityisopettajan rakentamilla esimerkeillä oli neljä eri tehtävää. Nämä eri tehtävät olivat seuraavat: yleisen säännön rakentaminen yksittäisestä tilanteesta, matemaattisen määritelmän tai käsitteen havainnollistaminen, opittavan asian rinnastaminen tuttuun asiaan sekä matemaattisen käsitteen yhdistäminen oppilaan arkikokemuksiin. Siten matematiikan osa-aikaisen erityisopetuksen tunneilla käytettyjen esimerkkien ensisijainen tehtävä oli tehdä abstraktit matemaattiset käsitteet konkreettisiksi ja tutuiksi oppilaille. Tulokset vahvistavat esimerkeillä olevan tärkeän pedagogisen roolin matematiikan opetuksessa.

Hakusanat: esimerkki, keskustelunanalyysi, matematiikka, osa-aikainen erityisopetus

SISÄLTÖ

1 JOHDANTO 5

2 ESIMERKIN MERKITYS MATEMATIIKAN OPETUKSESSA 8

2.1 Esimerkin käsite 8

2.2 Esimerkin tehtävät 10

2.3 Esimerkkien väärinkäyttö 13

3 ESIMERKKIEN KÄYTTÖ MATEMATIIKAN OPETUKSESSA 15

3.1 Esimerkkien valinnan ja luomisen periaatteet 15

3.2 Esimerkinanto ja oppimisvaikeudet 17

3.3 Opettajan ja oppilaan välinen vuorovaikutus esimerkin antamisessa . 19

3.4 Oppilaan vasteet esimerkin antoon 21

3.5 Opettajan vasteet oppilaan viestiessä ymmärtämistä 23

4 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN 24

4.1 Tutkimuksen osallistujat ja tutkimuksen eteneminen 24

4.2 Tutkimusmenetelmät 25

4.3 Aineiston analyysi 27

5 TULOKSET 29

5.1 Esimerkin rakentaminen matematiikan tunnilla 29

5.1.1 Esimerkinannon aloittaminen 29

5.1.2 Esimerkinannon eteneminen 32

5.1.3 Esimerkinannon päättäminen 35

5.2 Matematiikan opetuksen yhteydessä annettujen esimerkkien tehtävät 38

5.2.1 Yleisen säännön rakentaminen yksittäisestä tilanteesta 38

5.2.2 Matemaattisen käsitteen konkretisointi 40

5.2.3 Opittavan asian rinnastaminen tuttuun asiaan 42

5.2.4 Matemaattisen käsitteen yhdistäminen oppilaan arkikokemuksiin 45

6 POHDINTA ... 48

6.1 Tulosten tarkastelua ... 48

6.1.1 Esimerkin rakentaminen yhdessä oppilaiden kanssa ... 48

6.1.2 Esimerkkiin siirtyminen ja sen päättäminen ... 50

6.1.3 Opettajan rakentamien esimerkkien tehtävät ... 52

6.1.4 Oppilaiden ohjaaminen esimerkkien avulla ... 54

6.1.5 Konkreettiset havaintovälineet ... 56

6.1.6 Suunnitellut vs. spontaanit esimerkit ... 56

6.2 Luotettavuus ja eettiset ratkaisut ... 57

6.3 Siirrettävyys ... 60

6.4 Jatkotutkimushaasteita ... 62

LÄHTEET ... 64

LIITTEET ... 69

1 JOHDANTO

Koulusivistyksen muodollisuuteen, teoreettisuuteen ja arkielämästä irtautumiseen kohdistunut kritiikki on kannustanut luomaan koulujen opetussuunnitelmiin mielekkyyttä ja tarkoituksenmukaisuutta koulun ulkopuolisen elämän sekä työelämän konkreettisen todellisuuden kautta (Williams & Wake 2007). Työpaikoilla työntekijöiden matemaattisten taitojen puutteet eivät näy niinkään laskutoimitusten suorittamisessa vaan suurempien järjestelmien ymmärtämisen puutteina. Ne tulevat esiin kehitettäessä järjestelmiä tai kommunikoitaessa työtovereiden kanssa. (Hoyles, Noss, Kent & Bakker 2010.) Swanson ja Williams (2014) esittävät, että koulut sekä työelämä voisivat olla tieteellisen ajattelun ja käytännön sovellutuspaikkoja, jos niissä ilmeneviä ajattelua rajoittavia rakenteita haastettaisiin tietoisesti.

Perusopetuksessa opetussuunnitelma ja suoritusten arviointi ohjaavat voimakkaasti matematiikan opetusta ja opettajilla on vain vähän tilaa muokata oppisisältöjä ja soveltaa vaihtoehtoisia opetustapoja. Iso-Britanniassa aikuisille suunnatuilla matematiikan tehokursseilla pyritään välttämään tiedon sirpaloitumista painottamalla oppiaineksen yhtenäisyyttä sekä tähtäämällä syvään ja laajaan käsitteiden ymmärtämiseen. (Stevenson 2008.) Samansuuntaisia ajatuksia ollaan tuomassa myös suomalaiseen perusopetukseen. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) tuodaan esiin tarve opetuksen eheyttämiseen, oppilaiden laaja-alaisen osaamisen kehittämiseen sekä monialaisten oppimiskokonaisuuksien tuomiseen kaikkien oppilaitten ulottuville (Opetushallitus 2015). Matematiikassa käytännönläheisten ja oppilaiden kokemusmaailmaa laajentavien esimerkkien antaminen on yksi mielekäs tapa vastata näihin uusiin vaatimuksiin sekä parantaa oppilaiden kokonaisuuksien hallintaa. Kuten Simo Kivelä (2007) toteaa, ”pätevän matematiikan opettajan – olipa kyseessä mikä tahansa opetuksen taso – tulisi kyetä avaamaan oppilailleen näköaloja ja liittämään opetus laajempaan kontekstiin”.

Matemaattinen tieto ja siihen liittyvät käsitteet ovat luonteeltaan abstrakteja. Esimerkeillä onkin keskeinen abstraktia tietoa konkretisoiva rooli matematiikan pedagogiikassa kaikilla koulutasoilla (Rowland 2008). Kuten Rowland (2008) on esittänyt, aloittelevat opettajat tarvitsevat yksityiskohtaista ohjausta ja apua ymmärtääkseen esimerkkien erilaiset roolit matematiikan opettamisessa. Kasvatuspsykologisissa esimerkin antamista koskevissa tutkimuksissa esimerkit usein luokitellaan käsitteitä havainnollistaviin ja sääntöjä havainnollistaviin esimerkkeihin. Leen (2004) mukaan luokkien sisällä on mahdollista arvioida, miten hyvin annetut esimerkit täyttävät tarkoituksensa sekä tarkastella esimerkkien pedagogista roolia.

Tällainen luokitteleva käsittelytapa ulkoistaa esimerkin kontekstistaan eli opetustilanteesta luokkaympäristössä (Lee 2004). Sen sijaan etnometodologisen sosiologian piiristä löytyy menetelmä, keskustelunanalyysi, jolla voidaan pyrkiä selvittämään, mitä puheenvuoroilla saadaan aikaiseksi (Hakulinen 1997, 9, 15) ja miten opetuspuheeseen upotetut esimerkit käytännössä esitetään (Lee 2004). Siten keskustelunanalyysillä on mahdollista selvittää, kuinka esimerkkejä tuotetaan reaaliaikaisessa luokkahuonevuorovaikutuksessa sekä millaisia tehtäviä tuotetuilla esimerkeillä on (Lee 2004). Vaikka esimerkkien merkitys matematiikan oppimisen tukena tunnetaan ja tunnustetaan, aihetta on tutkittu melko niukasti.

Tällä tutkimuksella pyritään lisäämään tietoa siitä, miten esimerkkejä työstetään ala- ja yläkoulun matematiikan oppitunneilla. Tutkimustehtävät ovat:

1. Miten erityisopettajat rakentavat esimerkkejä matematiikan osa-aikaisessa erityisopetuksessa?

   sekä

2. Millaisia tehtäviä erityisopettajan rakentamat esimerkit palvelevat opetuksessa?

2 ESIMERKIN MERKITYS MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

2.1 Esimerkin käsite

Esimerkit ovat olennainen osa matemaattista ajattelua, oppimista ja opettamista etenkin abstrahoinnissa, todistelussa ja analogioiden muodostamisessa (Goldenberg & Mason 2008; Zodik & Zaslavsky 2008). Ne voidaan nähdä oppijan ja matemaattisten käsitteiden, menettelytapojen tai teoreemien välisinä välittävinä tekijöinä. Esimerkit ovat tärkeä keino saada tuntumaa abstrakteihin ideoihin ja ne ovat myös matemaattisen viestinnän väline. (Goldenberg & Mason 2008.) Laajasti ymmärrettynä esimerkillä tarkoitetaan mitä tahansa asiaa, jonka avulla oppija voi yleistää oppimansa toiseen tilanteeseen (Watson & Mason 2005, 3 Johnson, Blume, Shimizu, Graysay & Konnovan 2014) mukaan). Siten teoreettisesti jokainen matemaattinen objekti voidaan nähdä esimerkkinä. On kuitenkin esitetty, että matemaattisesta objektista tulee esimerkki vasta, kun objektin havainnut henkilö tunnistaa sen esimerkiksi jostakin laajemmasta asiasta (Goldenberg & Mason 2008; Zodik & Zaslavsky 2008).

Esimerkille on olemassa myös tarkempia ja toisistaan poikkeavia määritelmiä. Esimerkki voidaan tulkita 1) yksittäiseksi tapaukseksi yleisemmästä käsitteestä (Johnson ym. 2014) tai sillä voidaan tarkoittaa 2) tiettyä tilannetta (esimerkkiä) suuremmasta ryhmästä, johon kyseinen tilanne voidaan yleistää (Zodik & Zaslavsky 2008). Jälkimmäistä tulkintaa on kutsuttu myös havainnollistamiseksi (Watson & Mason 2005, 3 Johnsonin ym. 2014 mukaan). Esimerkin käsitteen erilaisten tulkintojen perimmäinen ero on erityisen ja yleisen välisessä suhteessa: ensimmäisessä määritelmässä vaaditaan kuvittelemaan tietty tapaus osana jotakin yleisempää, kun taas toisessa määritelmässä pyritään näkemään yleinen yksittäisten tapausten kautta

(Watson & Mason 2005, 4 Johnsonin ym. 2014 mukaan). Watson ja Shipman (2008) määrittelivät esimerkin ensimmäisen tulkinnan mukaisesti tapaukseksi, havaintoesimerkiksi, tilanteeksi tai (perus)tekijäksi jostakin matemaattisesta käsitteestä, kappaleesta, prosessista tai luokasta.

Van Gogin ja Rummelin (2010) mukaan esimerkkejä hyödyntävää opetusta voidaan tarkastella sekä kognitiivisesta että sosio-kognitiivisesta näkökulmasta. Molemmat teoriat painottavat tarkoituksenmukaisten, myöhempiä suorituksia ohjaavien kognitiivisten edustusten muodostamisen tärkeyttä oppijalle. Oppijoille on tehtävä selväksi, mitkä esimerkin piirteistä tekevät siitä esimerkin eli mitkä tutkittavan ilmiön piirteistä ovat pysyviä ja mitä piirteitä on mahdollista muuttaa ja miten (Goldenberg & Mason 2008).

Eri tutkimuksissa painottuvat erilaiset esimerkit sen mukaan, onko tutkimus tehty kognitiivisesta vai sosio-kognitiivisesta näkökulmasta. Kognitiivisesta näkökulmasta tehdyissä tutkimuksissa käsitellään useimmiten työskentelyä ohjaavia esimerkkejä (*worked examples*) ja sosio-kognitiivisissa tutkimuksissa mallintavia esimerkkejä (*modeling examples*) (van Gog & Rummel 2010) Työskentelyä ohjaavissa esimerkeissä oppilaalle tarjotaan tutkittavaksi kirjallinen, ideaalisesti toteutettu malli ongelman ratkaisemisesta kaikkine välivaiheineen ja ilman suoritusta häiritseviä tekijöitä (Sweller & Cooper 1985 van Gogin & Rummelin 2010 mukaan). Tällaisia esimerkkejä ovat esimerkiksi matematiikan oppikirjojen esimerkkilaskut. Mallintavissa esimerkeissä oppilaalla on mahdollisuus tarkkailla tehtävää suorittavaa aikuista tai vertaismallia ja oppia häneltä. Oppimistilanteessa saattaa olla mukana myös häiritsevää informaatiota ja epäolennaisia yksityiskohtia, joihin oppijan huomio voi kiinnittyä. (van Gog & Rummel 2010.)

Erityisesti vasta-alkajat hyötyvät työskentelyä ohjaaviin esimerkkeihin nojautuvasta ohjauksesta ja saavuttavat näin hyviä oppimistuloksia usein nopeammin ja vaivattomammin kuin muuten (Atkinson, Derry, Renkl & Wortham 2000). Työskentelyä ohjaavat esimerkit ehkäisevät heikkojen ongelmanratkaisustrategioiden käyttöä (Sweller 1988 van Gogin & Rummelin 2010 mukaan), vähentävät kognitiivista kuormitusta (Kay & Edwards 2012;

Paas, Renkl & Sweller 2003) ja edesauttavat kognitiivisten skeemojen muodostamista (Sweller 1988 van Gogin & Rummelin 2010 mukaan). Ne avaavat oppijan käyttöön asiantuntijan muodostaman mentaalisen ongelmanratkaisumallin opittavasta asiasta kaikkine ratkaisuun johtavine välivaiheineen (Reed, Willis & Guarino 1994). Sen sijaan pääosin tavanomaisten ongelmien ratkaisemisesta koostuva ohjaus pakottaa aloittelevat oppilaat turvautumaan työmuistia kuormittaviin heikkoihin ongelmanratkaisustrategioihin, jotka eivät auta luomaan ongelman ratkaisusta kognitiivista skeemaa, eivätkä siten ole oppimisen kannalta tehokkaita (Sweller 1988 van Gogin & Rummelin 2010 mukaan).

Työskentelyä ohjaavien esimerkkien avulla voidaan abstrahoida (eli käsitteellistää) sääntöjä (Anderson & Fincham 1994) ja siten yleistää opittua. Työskentelyä ohjaavia esimerkkejä käytetään esimerkiksi opetettaessa hyvin strukturoituja kognitiivisia tehtäviä, kuten algebraa (Carroll 1994 van Gogin & Rummelin 2010 mukaan) tai geometriaa (Schwonke ym. 2009), mutta ne voivat olla tehokkaita myös vähemmän strukturoituja kognitiivisia tehtäviä (van Gog & Rummel 2010), kuten argumentointitaitoja (Schworm & Renkl 2007) opeteltaessa. Mallintavia esimerkkejä on käytetty myös strukturoituja kognitiivisia tehtäviä opetettaessa, mutta useimmiten niitä käytetään kuitenkin opetettaessa vähemmän strukturoituja taitoja (van Gog & Rummel 2010), kuten kirjoittamista ja metakognitiivisia taitoja (esimerkiksi itsesäätely) (Zimmerman & Kitsantas 2002).

2.2 Esimerkin tehtävät

Opettajien matematiikan opetuksessa käyttämillä esimerkeillä on useita erilaisia tarkoituksia. Rowland (2008) korostaa, että annettujen esimerkkien soveltuvuutta tulisi arvioida suhteessa aiottuun tarkoitukseensa. Hyväkään esimerkki ei sellaisenaan takaa hyviä oppimistuloksia. Suurimman osan oppijoista on oppiakseen (uudelleen)konstruoitava valmiit esimerkit ja niiden rakentamistavat ja muokattava ne omaa ajatteluaan tukevaan muotoon

(Goldenberg & Mason 2008). Useiden esimerkkien käytön on havaittu olevan hyvä käytäntö, sillä eri esimerkkien vertailu tukee oppimista ja opitun siirtämistä uusiin tilanteisiin (Guo, Yang & Ding 2013).

Ensimmäinen esimerkin antotapa matematiikan tunnilla on antaa esimerkki induktiivisesti. Tällöin sen tarkoitus on *olla esimerkkinä jostain yleisemmästä matemaattisesta käsitteestä* (kuten viivojen symmetrisyydestä) (Rowland 2008) ja esimerkkiä käytetään apuna abstraktien matemaattisten käsitteiden ilmentämisessä ja määritelmien työstämisessä ja testaamisessa (Johnson ym. 2014; Watson & Shipman 2008). Esimerkillä voidaan siis helpottaa käsitteellistämistä (Rowland 2008) tai sen tehtävä on edustaa yleisiä menettelytapoja, jolloin esimerkkisuorituksella mallinnetaan haluttua toimintaa (Lee 2004; Rowland 2008). Abstrahointiin pyrittäessä opettajan valitsemat esimerkit heijastavat hänen ymmärrystään käsitteen luonteesta ja niistä asioista, jotka siihen sisältyvät. Käsitteen omaksumisen jälkeen oppija kykenee muodostamaan siitä esimerkkejä omakohtaisten kokemustensa perusteella. (Rowland 2008.) Abstrahointiin voidaan pyrkiä myös antamalla oppilaiden sopivasti tuettuina muodostaa itse esimerkkejä käsiteltävästä aiheesta. Watson ja Shipman (2008) havaitsivat, että esimerkkien keksiminen motivoi oppilaita, tarjosi oman tutkimisen kautta kollektiivisen lähtökohdan uuteen aiheeseen sekä teki matemaattisesta tiedosta omakohtaisempaa.

Toinen esimerkkien käyttötapa on *suunnata* niiden avulla *oppilaiden huomiota*. Opettaja saattaa käyttää spesifiä esimerkkiä havainnollistamaan tiettyä omasta näkökulmastaan keskeistä matemaattista ajatusta, mikäli oppilaat keskittyvät epäoleellisiin piirteisiin. Esimerkkien antamisen ydin onkin ”nähdä yleinen yksityiskohtien läpi”. (Zodik & Zaslavsky 2008.) Esimerkkejä voidaan käyttää myös matemaattisten käsitteiden kuvailemiseen ja suunnata näin oppilaiden huomiota matemaattisten ilmiöiden relevantteihin piirteisiin (Johnson ym. 2014; Watson & Shipman 2008).

Kolmas esimerkkien käyttötapa opetuksessa on *harjoituspainotteinen havainnollistaminen* eli harjoitustehtävät. Harjoitteet sisältävät useita toistoja ja tukevat näin opittavien menettelytapojen mielessä pitämistä sekä toiminnon sujuvuutta (Rowland 2008). Oppilaiden onnistumisen kokemuksia kartutetaan usein harjoittelemalla ensin rutiininomaisilla esimerkeillä ja siirtymällä sitten haastavampiin tehtäviin (Rowland 2008).

Neljänneksi esimerkeillä voidaan *elävöittää opetusta* ja tuoda matematiikka lähelle oppilaiden arkikokemuksia. Hassisen (2008) mukaan tieteen maailmasta lähtevä matematiikan opetus voi olla puhdasta ja kaunista, mutta se jää usein oppilaille vieraaksi. Opiskelijat kaipaavat esimerkkejä tuomaan opetukseen elävyyttä (Hassinen 2008) ja käytännönläheisyyttä (Honkiniemi & Manninen 2004). Tämä on yhteydessä tehokkaaseen matematiikan opetukseen. Matematiikan opetus on tehokasta, kun oppilaiden matematiikan oppimista edistetään mahdollisimman hyvin eli kun laskutaidot ja ymmärtäminen kehittyvät optimaalisesti (Pehkonen & Kaasila 2008).

Yksittäinen esimerkki voi palvella opetuksessa samanaikaisesti useampaa tarkoitusta ja siten esimerkkien yksiselitteinen luokittelu onkin vaikeaa, ellei jopa mahdotonta (Rowland 2008). Myös oppilaat suhtautuvat annettuihin esimerkkeihin eri tavoin (Guo ym. 2013). Hyvin valitut esimerkit ottavat huomioon aiheen monimutkaisuuden, hyödyntävät oppijan jo tietämiä asioita ja tuovat esiin ilmiön taustalla vaikuttavia matemaattisia lainalaisuuksia (Rowland 2008). Esimerkkien vertailun tulisi perustua oppilaiden kriittisiin oppimisen näkökulmiin. Oppilaita, joilta puuttuu kriittinen näkökulma ratkaisumenetelmiin, tulisi esimerkein helpottaa tämän kehittymisessä (Guo ym. 2013).

Useiden esimerkkien käyttö tukee oppimista paremmin kuin vain yhden esimerkin tarjoaminen, sillä useiden esimerkkinen aikaan saama vertailu tukee oppimista ja opitun siirtämistä uusiin tilanteisiin (Guo ym. 2013). Rowland (2008) havaitsi, että myös melko kokemattomat opettajat saattavat valitsemillaan esimerkeillä toteuttaa tiedostamattomasti hyvän opetuksen periaatteita. Hyvä tapa on valita esimerkit huolellisesti etukäteen ja käyttää niitä harkitusti, sillä sattumanvaraisesti luodut esimerkit eivät välttämättä palvele pedagogista tarkoitustaan (Rowland 2008; Zodik & Zaslavsky 2008).

2.3 Esimerkkien väärinkäyttö

Esimerkkejä voidaan käyttää myös väärin. Esimerkkien väärinkäyttö voi matematiikan opetuksessa ilmetä virheellisinä esimerkkeinä tai käyttämällä esimerkkejä ja kuvailua matemaattisten määritelmien korvikkeena. Zodikin ja Zaslavskyn (2008) mukaan matemaattinen esimerkki voi olla paikkansapitämätön kolmella tavalla. Esimerkkiä (erikoistapausta) voidaan ensinnäkin käsitellä kuin se olisi esimerkki jostakin yleisemmästä luokasta, vaikka se ei sitä todellisuudessa ole (esimerkiksi väittämällä, että 0,333 on esimerkki irrationaaliluvusta). Toiseksi esimerkkiä voidaan käsitellä kuten vastaesimerkkiä, vaikka esimerkki ei loogisesti olisi väitteen tai otaksuman kanssa ristiriidassa. Tällainen käyttötapa olisi esimerkiksi käyttää funktiota $f(x)=x^3+1$ vastaesimerkkinä väitteelle, että kaikki parittomat funktiot ovat monotonisia. Kolmanneksi esimerkkinä voidaan matemaattisesti virheellisesti käsitellä tapausta, jota ei ole olemassa (esimerkiksi tasakylkistä kolmiota, jonka kyljet ovat 6 ja kanta 12 yksikköä). (Zodik & Zaslavsky 2008.)

Zodik ja Zaslavsky (2008) havaitsivat, että matematiikan opettajat käyttävät hyvin vähän virheellisiä esimerkkejä. Toisaalta virheellistä esimerkkiä voi käyttää oppimisen syventämiseen. Heemsoth ja Heinze (2014) selvittivät, että esimerkkien virheellisyyden pohtimisella oli positiivinen vaikutus pitkälle edenneiden opiskelijoiden tiedonhankintaan. Selittäessään, miksi virheellinen esimerkki on virheellinen, oppilas joutuu kohtaamaan virheellisessä esimerkissä esitetyn ratkaisun puutteet ja pohtimaan pääsyä oikeaan ratkaisuun (Heemsoth & Heinze 2014).

Virheellisten esimerkkien tarjoamisen lisäksi toinen tapa väärinkäyttää esimerkkejä matematiikan opetuksessa on se, että erityisesti aloittelevat matematiikan opettajat eivät välttämättä puheissaan tee eroa määritelmän ja kuvailun välille (Johnson ym. 2014). Matemaattisen määritelmän tulee olla ristiriidaton ja yksimerkityksinen (Zaslavsky & Shir 2005; Zazkis & Leikin 2008), kun taas kuvailu on käsitteenä väljempi ja termeiltään yksinkertaisempi sekä helpommin ymmärrettävä (Johnson ym. 2014). Johnsonin ja kumppaneiden (2014) mukaan aloittelevasta opettajasta määritelmän hyvyys voi riippua siitä, kenelle määritelmä on tarkoitus esittää. Matematiikan professorille tarjottava ”hyvä määritelmä” saattaa siten olla erilainen kuin peruskoulun oppilaille esitettävä määritelmä. Tällöin jälkimmäiselle ryhmälle hyvinä määritelminä saatetaan pitää kuvauksia (Johnson ym. 2014) tai hyvin monisanaisesti esitettyjä määritelmiä (Zazkis & Leikin 2008). Vaikka esimerkeillä havainnollistaminen on tehokas tapa opettaa ja tukea oppimista, eivät ne kuitenkaan korvaa matemaattisia määritelmiä (Johnson ym. 2014).

Opetuksessa myös liiallinen menettelytapojen painottaminen teoreettisen ymmärryksen kustannuksella saattaa johtaa oppilaat muodostamaan harhakäsityksiä käsiteltävästä matemaattisesta ilmiöstä (Swanson & Williams 2014). Swanson ja Williams (2014) antavat asiasta murtolukuihin liittyvän esimerkin: oppilas saattaa ehdottaa murtolukujen yhteenlaskussa sekä nimittäjien että osoittajien summaamista suoraan ($1/2 + 1/3 = 2/5$). Tämä saattaa olla yhteydessä siihen, että yhteenlaskua on käsitelty samoin kuin murtolukujen kertolaskua (Swanson & Williams 2014). Kun opettajalla on tietoa oppilaiden yleisimmistä virhekäsityksistä, voi hän oikaista niitä jo esimerkinannon yhteydessä.

3 ESIMERKKIEN KÄYTTÖ MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

3.1 Esimerkkien valinnan ja luomisen periaatteet

Zodikin ja Zaslavskyn (2008) mukaan sopivan esimerkin valitseminen edellyttää opettajalta herkkyyttä tunnistaa oppilaiden taitojen ja tietojen vahvuuksia ja heikkouksia. Esimerkkien valinnan taustalla vaikuttavat sekä pedagoginen sisältötietous että herkkyys opiskelijoiden tarpeille (Zodik & Zaslavsky 2008). Matematiikan opettamisen yksi elementti on ymmärtää oppilaiden tekemiä virheitä ja tiedostaa, miten opettaja voi tehtyihin virheisiin vastata (Swanson & Williams 2014).

Zodik ja Zaslavsky (2008) jakoivat yläkoulun matematiikan opetuksessa havaitsemansa esimerkit spontaanisti valittuihin ja suunniteltuihin esimerkkeihin. Lähes puolet oppitunneilla havaituista esimerkeistä luokittui spontaaneiksi esimerkeiksi. Niitä tuotettiin pääasiassa kahdesta syystä: vasteena opiskelijoiden lausumiin, kuten kumoamaan vääriä käsityksiä, tai opettajan huomatessa ennakkoon suunnittelemansa esimerkin olevan vajavainen. (Zodik & Zaslavsky 2008.) Ensimmäisessä tapauksessa suunnittelematon esimerkki on usein kokonaan uusi esimerkki, kun taas jälkimmäisessä tapauksessa se on suunnitellun esimerkin muunnelma. Zodik ja Zaslavsky (2008) määrittelivät suunnitellut esimerkit esimerkeiksi, joita opettaja on ajatellut etukäteen ja päättänyt käyttää tunnilla. Suunnitellut esimerkit esiintyvät joko tuntisuunnitelmissa, tehtävämonisteissa tai oppikirjassa, tai opettajan toimista ja lausumista voidaan muutoin päätellä esimerkin olevan suunnitellun (Zodik & Zaslavsky 2008).

Esimerkkejä voidaan käyttää matematiikan opetuksessa myös siten, että oppilaat opiskelevat uusia käsitteitä luomalla niitä kuvaavia esimerkkejä ja yleistämällä esimerkit käsitteiksi. Watson ja Shipman (2008) havaitsivat, että myös heikosti matematiikassa suoriutuvat oppilaat pystyvät luomaan esimerkkejä. Itse luomiensa esimerkkien kautta käsitteitä oppineet oppilaat sitoutuvat oppimaansa emotionaalisesti ja kokevat kyseiset käsitteet merkityksellisinä ja realistisina (Watson & Shipman 2008).

Zodikin ja Zaslavskyn (2008) mukaan esimerkkien valinnan ja luomisen taustalla vaikuttavat seuraavat viisi periaatetta, jotka he ovat muokanneet ohjeiksi opettajille: 1) Aloita yksinkertaisesta tai tutusta tapauksesta ja etene monimutkaisempaan tapaukseen. 2) Rakenna esimerkit huomioiden oppilaiden yleisesti tekemät virheet ja muut oppilaiden yleensä hankaliksi kokemat asiat. 3) Kiinnitä huomio opetettavan ilmiön relevantteihin piirteisiin. Vältä esimerkkejä, jotka ovat erityisiä tavalla, joka saattaa viedä huomion yleisemmästä tilanteesta. 4) Valitse yleistämiseen tähtääviin esimerkkeihin ”sattumanvaraisia” helppoymmärteisiä lukuja. 5) Sisällytä esimerkkeihin myös harvinaisempia tapauksia. Zodikin ja Zaslavskyn (2008) ohjeiden lisäksi esimerkeissä tulee pyrkiä yksitulkintaisuuteen (Goldenberg & Mason 2008).

Esimerkinantoon liittyy vaihteleva määrä pragmaattisia siirtoja, joilla opettaja rakentaa esimerkit oppilaille merkityksellisiksi (Lee 2004). Tällaisia keinoja ovat esimerkiksi kysymysten ja lausahdusten uudelleen muotoilut, muut korjausjäsennykset, vertailut opiskeltavaa käsitettä lähellä oleviin käsitteisiin sekä oppilaiden yleistiedon ja arkikokemusten hyödyntämien esimerkkien kehittelyssä (Lee 2004). Tiedon välittämiseen pyrkivässä opetuksessa selittämisellä on keskeinen asema (Swanson & Williams 2014). Zodikin ja Zaslavskyn (2008) mukaan esimerkit nojaavat suureen määrään luotettavaa matemaattista tietoa relevantista aiheesta. Huolimatta opettajaksi opiskelevien nuorten pyrkimyksestä tiedon välittämiseen ja vastaavanlaisista omista oppimiskokemuksista, on havaittu, että opiskelijat ovat motivoituneita saavuttamaan matemaattisten käsitteiden syvemmän ymmärryksen. Tätä motivoi halu pystyä yhdistämään teoreettista matematiikkaa opettamisen konkreettisiin käytäntöihin. (Swanson & Williams 2014.)

3.2 Esimerkinanto ja oppimisvaikeudet

Matemaattisilla oppimisvaikeuksilla viitataan useisiin erilaisiin matemaattisten taitojen häiriöihin alkaen laskemisen vaikeuksista aina ongelmanratkaisutaitojen häiriöihin asti (Fletcher, Lyon & Fuchs 2006, 207). Vaikeudet saattavat johtua useista kognitiivisten prosessien heikkouksista. Tällaisia ovat esimerkiksi työmuistin toiminta, kielelliset vaikeudet ja tarkkaamattomuus. (Fletcher ym. 2006 235.) Kansainvälinen tautiluokitus ICD-10 (International Classification of Diseases-10; World Health Organization 1992) luokittelee matemaattiset oppimisvaikeudet spesifiksi aritmeettisten taitojen häiriöksi. Häiriö voidaan todeta jos lapsen suoriutuminen standardoidussa matemaattisten taitojen testissä jää vähintään kaksi keskihajontaa alle ikätason ja yleisen älykkyyden perusteella odotetun keskiarvon. Yksilön heikkoa suoriutumista ei diagnosoida matemaattisiksi oppimisvaikeuksiksi, mikäli vaikeuksien taustalla on keskitason alittava älykkyys, normaalista poikkeavat aistitoiminnot, riittämättömät mahdollisuudet kouluttautumiseen tai jokin muu kehityksellinen tai emotionaalinen häiriö (World Health Organization 1992, 146).

Matemaattisia oppimisvaikeuksia on havaittu 5–6 %:lla kouluikäisistä lapsista. Esiintyvyys on tytöillä ja pojilla sama. (Shalev, Auerbach, Manor & Gross-Tsur 2000.) Vaikeuksille on esitetty useita erilaisia alaluokitteluja (Östergren 2013, 17). Yhden mahdollisen luokittelun ovat esittäneet Wilson ja Dehaene (2007), joiden mukaan matemaattisilla oppimisvaikeuksilla on kolme neurologista alkuperää olevaa alatyyppiä. Ensimmäisen alatyypin vaikeudet johtuvat puutteista verbaalis-symbolisissa edustuksissa. Tällaisilla ihmisillä on vaikeuksia oppia ja palauttaa mieleensä aritmeettisia faktoja. Toinen alatyyppi sisältää menettelytapojen käytön sekä strategioiden ja aritmeettisten faktojen mieleen palauttamisen vaikeuksiin johtavat toiminnanohjauksen vajeet. Kolmanteen alatyyppiin kuuluvat avaruudellisen hahmottamisen vaikeudet. (Wilson & Dehaene 2007).

On olemassa useita eri keinoja tukea oppilaita, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia. Testitilanteessa oppimisvaikeuksisen oppilaan suoriutumista tuetaan usein pidentämällä koeaikaa, järjestämällä kuulustelu suullisena, muuttamalla kokeen ulkoasua (esimerkiksi suurentamalla fonttikokoa), järjestämällä rauhallinen koetila sekä tarjoamalla käyttöön teknisiä apuvälineitä. Suurimmalla osalla näistä mukautuksista ei ole havaittu olevan systemaattista, suoritusta parantavaa, vaikutusta. Mukautusten käyttöä kuitenkin puoltaa se, että niistä ei ole todettu olevan ainakaan haittaa. (Lindstrom 2010.) Sekä yksilöllisten tavoitteiden mukaisesti opiskelevien että yleisopetuksen oppilaiden kuvaa itsestään matematiikan osaajina on mahdollista parantaa tarjoamalla heille heidän kokemusmaailmastaan lähtöisin olevia, itsenäisesti suoritettavia, oppimistehtäviä. Oppimistehtävinä laskuesimerkkejä työstäneet ja työnsä tuloksia toisille oppilaille esitelleet oppilaat kokivat tehtävien myötä olevansa koetilanteessa itsevarmempia ja osaavampia. Myös heidän koesuoriutumisensa parani pitkällä aikavälillä. (Kalchman 2011.)

Sekä esimerkin annolla että harjoittamisella on keskeinen merkitys oppimisvaikeuksisten oppilaiden tarpeisiin vastattaessa (Strickland & Maccini 2010). Esimerkki voi olla myös nauhoitettu, jolloin oppilailla on mahdollisuus itse määrätä milloin ja missä he opiskelevat. Kay ja Edwards (2012) raportoivat oppilaiden video podcasteina katsomien työskentelyä ohjaavien esimerkkien parantavan oppimistuloksia. Oppilaat olivat erityisen tyytyväisiä esimerkin etenemiseen askel askeleelta, selitysten olemiseen helposti seurattavia ja mahdollisuuteen kontrolloida oppimisensa tahtia. Erityisen hyödyllisiä nauhoitetut esimerkit voivat olla oppilaille, joille tekstikirjan käyttö tai opetuksen kuunteleminen suuressa, monia häiriötekijöitä sisältävässä, luokassa ovat haasteellisia. (Kay & Edwards 2012.)

Matematiikan oppimisen ohjaamisessa suositeltavia strategioita ovat konkreettisten käsittelyjen tekeminen ja visuaalisten esitysten käyttäminen, sillä ne edesauttavat oppilaiden käsitteiden ymmärtämistä (Kay & Edwards 2012; Strickland & Maccini 2010). Heikot pohjatiedot omaavat oppilaat toivovat matematiikan opetukseen enemmän käytännönläheisyyttä ja esimerkkejä, parempia mahdollisuuksia saada pienryhmäopetusta sekä opiskelijoiden erilaisten tieto- ja taitotasojen huomioimista (Honkiniemi & Manninen 2004). Suoran opetuksen (*explicit instruction*) osatekijöiden sekä kuvallisen havainnollistamisen (*graphic organizers*) on todettu olevan lupaavia oppimisvaikeuksisten oppilaiden opetukseen soveltuvia interventioita (Strickland & Maccini 2010). Suoralla opetuksella tarkoitetaan opettajajohtoista menetelmää, joka sisältää seuraavia opetuksellisia toimintoja: orientoituminen oppimiseen, opettajan antama esimerkki, ohjattu harjoittelu, itsenäinen harjoittelu, kasautuva harjoittelu ja oppilaan opintosuunnitelman mukaisen edistymisen tarkkailu. Fuchs kollegoineen (1996) havaitsi, että oppimisvaikeuksiset oppilaat hyötyvät myös koulutetun vertaisohjaajan tuesta ja näiden antamista matemaattisten käsitteiden selityksistä. Oppimistulokset olivat sitä parempia mitä paremmin vertaisohjaaja itse suoriutui matematiikasta. Hyvin matematiikassa suoriutuvien vertaisohjaajien selitykset sisälsivät monipuolisempia selitysstrategioita ja olivat käsitesuuntautuneempia kuin heikommin matematiikassa suoriutuvien vertaisohjaajien. (Fuchs ym. 1996.) Opettajan antamien vihjeiden ja apulomakkeiden avulla myös oppimisvaikeuksiset oppilaat voivat toimia vertaisohjaajina saaden tukea samalla myös omalle oppimiselleen (Impecoven-Lind & Foegen 2010).

Oppimisvaikeuksisille opiskelijoille tarjottavien esimerkkien tulee olla virheettömiä. On havaittu, että pitkälle edenneet opiskelijat oppivat esimerkeissä esiintyvien virheiden pohtimisesta, mutta heikot edeltävät tiedot omaavat oppilaat hyötyvät eniten paikkansapitävistä, tarkoituksenmukaisista esimerkeistä (Heemsoth & Heinze 2014).

3.3 Opettajan ja oppilaan välinen vuorovaikutus esimerkin antamisessa

Oppitunneilla annettavilla esimerkeillä voidaan selkeyttää ja jäsentää opittavana olevaa asiaa. Koolen (2012) mukaan oppilaat saattavat tarvita lisäselitystä seuraavissa hankaluuksia aiheuttavissa tilanteissa: proseduraalisissa ongelmissa (miten suorittaa tehtävä), konseptuaalisissa ongelmissa (matemaattisten käsitteiden ymmärtämisen pulmat) ja tekstuaalisissa ongelmissa (tehtävän ymmärtämisen vaikeudet). Opettajan selitystä sisältävä vuorovaikutus voi jäsentyä kahdella tavalla. Ensimmäinen mahdollinen tapa on opettajan puhe, jolloin opettaja kertoo oppilaille, miten jatkaa tehtävän parissa. Toinen tapa on vuoropuhelu oppilaan kanssa, jonka yhteydessä opettaja kyselee oppilaalta kysymyksiä, ja antaa tälle palautetta. (Koole 2010.) Vuorovaikutus ei rajoitu pelkästään suulliseen ilmaisuun, vaan opettaja voi siirtää vuoron oppilaalle myös kehollisesti, tai tuottaa kehollisen vuoronannon yhtaikaisesti puheella tuotetun vuorovaikutustoiminnon kanssa (Kääntä 2011, 141). Puhuessaan opettaja suosii usein ymmärtämisen osoittavia vasteita sekä edellyttää oppilaalta ymmärtämisen ilmauksia (Koole 2010). Opettajille on tyypillistä varmistaa oppilaiden ymmärtäminen vaatimatta heiltä ymmärtämisen osoittamista tai näyttämistä. Tätä muodollista vahvistusta käytetään siltana oppitunnin seuraavaan vaiheeseen siirtymiselle. (Ylönen, Vehkakoski & Björn 2014.) Oppilaiden ymmärtämisen ilmauksia ja niitä kuvaavia vasteita käsitellään tarkemmin alla.

Opettajan selityksestä ja esimerkinannosta huolimatta oppilas ei aina ymmärrä opiskeltavaa asiaa. Tällainen tilanne voi ilmetä usealla eri tavalla. Koole ja Elbers (2014) jaottelivat tilanteet seuraavasti: 1) tilanteet, joissa oppilas väittää ettei ymmärrä 2) tilanteet, joissa oppilas osoittaa ettei ymmärrä sekä 3) tilanteet, joissa oppilas esittää ymmärtämisen tai tietämisen ilmaisuja vaikka ei ymmärrä opiskeltavaa asiaa. Kahdessa ensimmäisessä tilanteessa opettajan voidaan olettaa toimivan jollakin tavalla löytääkseen ja täyttääkseen aukon oppilaan tietämyksessä tai taidoissa (Koole & Elbers 2014).

Oppilaat eivät yleensä yksilöi tarkasti sitä, mistä johtuu, etteivät he käsitä opiskeltavaa asiaa. Tällöin opettaja voi reagoida oppilaan tarpeisiin vain, jos hän onnistuu määrittelemään oppilaan kokemat vaikeudet oikein (Koole & Elbers 2014; Ylönen ym. 2014). Koole (2012) havaitsi, että näin ei useinkaan ole, kun kyseessä on monikielinen luokka. Tällöin opettajat ottivat oppilaiden esiin tuomista ongelmista tiedollisen ylivallan ja käsittelivät niitä matemaattisina ongelmina, vaikka todellisuudessa oppilaat kokivat tehtävissä käytetyn kielen ongelmakseen (Koole 2012). Oppilaiden ymmärtämisen vaikeudesta tai osaamattomuudesta kertovat ilmaukset saatetaan jopa kokonaan sivuuttaa (Ylönen ym. 2014).

Opettajan tarjoama selitys oppilaan tuen tarpeeseen on vuorovaikutuksellinen vain, jos oppilaan ongelmasta pyritään rakentamaan yhteinen ymmärrys opettajan ja oppilaan välille ennen tuen tarpeeseen vastaamista (Koole 2012; Koole & Elbers 2014). Ongelman esiin tuominen on tilanteena oppilaalle haastava, sillä hänen pitäisi kyetä ymmärtämään ja selittämään opettajalle se, mitä hän ei tehtävässä ymmärrä. Mikäli yhteisymmärrystä käsiteltävästä ongelmasta ei ole, seurauksena voi olla tilanne, jossa opettajan tarjoama selitys ei sovi yhteen oppilaan ongelman kanssa. (Koole 2012.)

3.4 Oppilaan vasteet esimerkin antoon

Oppilaan vasteet tarjoavat opettajalle mahdollisuuden päätellä, mitä oppilas tietää ja ymmärtää (Koole 2010; Lee 2004). Mikäli esimerkki annetaan vasteena oppilaan aloitteeseen, oppilas reagoi annettuun esimerkkiin jotenkin. Koole (2010) tutki, millaisia tietoon pääsyn (*epistemic access*) osoituksia oppilaat osoittivat opettajan selittäessä matemaattisten ongelmien ratkaisuja. Hän esitti, että oppilaiden osoitukset tietoon pääsystä voidaan jakaa tietämisen ja ymmärtämisen osoituksiin. Tietämisen ja ymmärtämisen osoituksilla on erilainen vuorovaikutuksellinen tarkoitus, ja niiden paikka vuorovaikutusjaksossa on erilainen. (Koole 2010.) Koolen (2010) mukaan jotkut sekvenssit eli vuorovaikutusjaksot vaativat tietoon pääsyn osoittamista (esimerkiksi ”mikä on”), kun taas toiset suosivat ymmärtämisen osoittamista (esimerkiksi ”selitä miten”).

Toisaalta oppilaan vaste ja esimerkkiin reagoiminen riippuvat opettajan edeltävästä vuorosta. Kysyessään oppilaalta ”ymmärsitkö” opettaja samalla odottaa oppilaalta ymmärtämisen väittämistä. Esittäessään oppilaalle ”tiedätkö” – kysymyksen opettaja testaa oppilaalla jo olemassa olevia tietoja ja odottaa oppilaalta myönteisen vastauksen lisäksi tietämisen osoittamista. Ymmärtämisen tarkistamisella opettaja pyrkii selvittämään, onko käsiteltävä asia ymmärretty oikein ja päättää keskustelun ollessaan tyytyväinen oppilaan vasteeseen. (Koole 2010.) Oppilaan ei välttämättä tarvitse osoittaa ymmärtämistään tai tietämistään suullisesti. Opettaja ja oppilaat tulkitsevat toistensa toimintaa oppitunneilla sekä kielellisen että kehollisen vuorovaikutuksen kautta (Kääntä 2011, 147). Oppilas voi vastauksellaan osoittaa, miten jokin on ymmärretty ja onko asia todella ymmärretty (myös sen, jos jotakin ei ole ymmärretty)(Koole 2010). Ylönen ym. (2014) raportoivat, että oppilaat viittaavat ymmärtämiseensä vain käänteisessä merkityksessä eli ilmaistessaan ymmärtämisen vaikeuksia. Ymmärtämisen vakuutuksia esiintyy myös muuten kuin vasteina opettajan aloitteisiin (Koole 2010). Tietämisen voi Koolen (2010) mukaan periaatteessa osoittaa sekä väittämällä että osoittamalla, mutta pelkkiä tietämisen väittämisiä ei hänen tutkimuksessaan oppilaiden puheessa juuri esiintynyt.

Opettaja päättää selityksensä, kuten selventävän esimerkinannon, usein oppilaan myönteistä vastausta edellyttävällä kysymyksellä siitä, ymmärsikö oppilas asian (Koole 2012). Vastatessaan myönteisesti opettajan antamaan selitykseen oppilas voi väittää (*claim*) asian ymmärtämistään nonverbaalilla myönteisellä eleellä (esimerkiksi nyökkäämällä tai palaamalla paikalleen) (Koole 2010; Kääntä 2011, 147) tai verbaalisesti (esimerkiksi äännähtämällä, kuten sanoilla ”ai” tai ”kyllä”) (Koole 2010; Koole & Elbers 2014). Oppilas voi liittää ymmärtämistä väittävään eleeseen myös ymmärtämisen osoituksen (*demonstration*), jolla hän kuvaa, miten hän on asian ymmärtänyt (Koole 2010). Opettaja ei voi kovin luotettavasti päätellä oppilaan ymmärryksen väittämisestä, onko oppilas todella ymmärtänyt asian (Koole 2010; Koole 2012). Siten opettaja ei välttämättä vakuutu pelkästä ymmärtämisen väittämisestä, vaan saattaa edellyttää oppilaalta ymmärtämisen osoitusta, esimerkiksi konkreetista tekemistä (Ylönen ym. 2014).

3.5 Opettajan vasteet oppilaan viestiessä ymmärtämistä

Oppilaan vasteet tarjoavat opettajalle mahdollisuuden päätellä, mitä oppilas tietää ja ymmärtää (Koole 2010; Lee 2004). Vasteet myös mahdollistavat esimerkkien muotoilun siten, että niiden kautta oppilaalle välittyy mahdollisimman olennaista tietoa (Lee 2004). Oppilaan reagoidessa opettajan kysymykseen tai esimerkinantoon ymmärtämistä viestivällä tavalla opettaja voi joko hyväksyä oppilaan vasteen ja päättää sananvaihdon tai kyseenalaistaa oppilaan vasteen ja jatkaa keskustelua tarjoamalla lisäselitystä asiaan (Koole & Elbers 2014).

Oppilas voi väittää ymmärtävänsä käsiteltävän asian, vaikka ei asiaa todellisuudessa ymmärtäisikään (Koole & Elbers 2014). Tällainen tilanne on opettajalle haasteellinen. Oppilaat tuottavat ymmärtämistä viestiviä eleitä ja äännähdyksiä usein vasteena opettajan kysymyksiin. Tällaisia oppilaalta tietynlaista vastausta edellyttäviä kysymyksiä ovat 1) polaariset (ei tai kyllä) kysymykset ("Se on tämä viiva eikö olekin"); 2) (opettajan) tyytyväiseksi tekevät kysymykset ("Onko asia nyt selvä?") ja 3) vastausvaihtoehdot sisältävät kysymykset ("Kerrotaanko tällä ylempi vai alempi luku?") (Koole & Elbers 2014). Edellä esitetyn tyyppisiin kysymyksiin vastatessaan oppilaalla on mahdollisuus osallistua vuorovaikutukseen, mutta vain opettajan määrittelemällä panoksella (Koole 2012). Voimakkaasti myönteistä vastausta preferoivilla kysymyksillä, kuten "ymmärsitkö asian nyt" tai "se on tuo eikö olekin", opettaja pyrkii ennemmin päättämään vuorovaikutuksen (Koole 2012) tai johdattelemaan oppilasta löytämään oikean vastauksen (Koole & Elbers 2014) kuin tarkistamaan, onko oppilas ymmärtänyt asian..

4 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

4.1 Tutkimuksen osallistujat ja tutkimuksen eteneminen

Tutkimuksessa käytetty aineisto on alun perin kerätty osana Kuopion ja Mikkelin kaupunkien koulutusjärjestelmien kehittämiseen liittyvää tilaustutkimusta (Kuorelahti & Vehkakoski 2008–2009). Samaa perusopetuksen 78 oppitunnista koostuvaa aineistoa on käytetty myös Suomen Akatemian rahoittamassa Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden laitoksen "Erilaista pedagogiikkaako? Luokkahuonevuorovaikutus erityisopetusympäristöissä" –tutkimusprojektissa (Vehkakoski 2008–2010).

Tässä tutkimuksessa analysoidut matematiikan oppitunnit on videotallennettu keväällä 2008 erään yläkoulun (Stenvallin koulu, nimi muutettu) ja erään alakoulun (Metsäpellon koulu, nimi muutettu) osa-aikaisessa matematiikan erityisopetuksessa. Oppitunteja oli yhteensä 12. Viidellä kuudesta yläkoulussa tallennetusta matematiikan oppitunnista käsiteltiin trigonometrisiä funktioita. Näillä tunneilla oli pääsääntöisesti samoja yhdeksäsluokkalaisia oppilaita. Kuudennella videotallennetulla oppitunnilla opettaja opettaa geometrian kappaleiden tunnistamista, nimeämistä ja piirtämistä kahdeksasluokkalaisille oppilaille. Oppilaita oli oppitunneilla kerrallaan 2–5. Alakoulussa 1–2 -luokkalaisten parissa tallennetuilla matematiikan tunneilla käsiteltiin luonnollisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskua sekä lukujen rakentumista kymmenjärjestelmässä. Kuudesta tallennetusta tunnista kolmella oli ensimmäisen luokan oppilaita ja kolmella toisen luokan oppilaita. Opetuksesta vastasi erityisopettaja ja häntä avusti joko lastentarhanopettaja (neljällä oppitunnilla) tai koulunkäynninohjaaja (kahdella oppitunnilla). Oppilaita oli tunneilla kerrallaan 6. Oppitunnit oli videoitu vähintään kahdella videokameralla, ja videoinnin jälkeen oppitunnit oli raakalitteroitu.

Oppituntien nauhoittaminen mahdollisti vuorovaikutustilanteiden yksityiskohtaisen ja täsmällisen tarkastelemisen, sillä nauhoitusta voidaan katsella useaan kertaan (Atkinson & Heritage 1984, 4). Raakalitteraatteja on tarkennettu tähän tutkimukseen valittujen esimerkinantoa sisältävien katkelmien osalta hyödyntäen Seppäsen (1997, 22–23) kuvaamia litterointimerkkejä (Liite 1). Ennen videointia oppilailta ja heidän vanhemmiltaan oli kysytty kirjalliset luvat tutkimukseen. Osa-aikaista erityisopetusta antavalta erityisopettajalta lupa tuntien nauhoittamiseen oli kysytty sekä sähköpostitse että suullisesti.

Matematiikan oppitunnit tähän tutkimukseen valikoituneissa kahdessa luokkahuoneessa jakautuivat kaikille tarkoitettuun opetuspuheeseen, jossa käytiin läpi uutta aihetta tai kerrattiin aiemmin opittuja asioita, sekä oppilaiden itsenäiseen työskentelyyn matematiikan tehtävien parissa. Jälkimmäisen osan aikana opettaja neuvoi yksittäisiä oppilaita ongelmakohdissa. Tässä tutkimuksessa mielenkiinnon kohteena olevia opettaja rakentamia esimerkkejä esiintyi sekä opetuspuheessa että opettajan ohjatessa yksittäisiä oppilaita itsenäisen työskentelyn aikana.

Laajan tulkinnan mukaan jokainen matemaattinen objekti voidaan nähdä esimerkkinä eli erityisenä tilanteena jostakin laajemmasta luokasta (Zodik & Zaslavsky 2008). Tässä tutkimuksessa esimerkin antamiseksi tulkittiin kuitenkin vain opettajan selitys tai toiminta, joka täytti seuraavat ehdot: tavoitteena tehdä käsiteltävästä asiasta oppilaille helpommin ymmärrettävä ja/tai toiminnoilla suunnataan oppilaiden huomiota opittavan asian eri piirteisiin. Esimerkkien antamisen joukosta rajattiin pois tilanteet, joissa opettaja käsitteli oppilaiden kanssa oppikirjasta löytyviä esimerkkejä eli harjoitustehtäviä. Edellä mainitun rajauksen jälkeen tallenteista löydettiin yhteensä 34 opettajan rakentamaa esimerkkiä.

4.2 Tutkimusmenetelmät

Tutkimusmenetelmänä käytettiin keskustelunanalyysiä. Kyseistä menetelmää on käytetty tutkittaessa opetuskäytäntöjä sekä opettajan ja oppilaiden vuorovaikutusta, kuten miten oppilaat vastaavat opettajien aloitteisiin (Koole

2010) ja miten opettajat reagoivat saamiinsa vastauksiin (Koole & Elbers 2014; Macbeth 2004). Keskustelunanalyysi pureutuu siihen, miten vuorovaikutuskumppanit ilmaisevat toisilleen sen, miten he ymmärtävät toisen puheenvuoron ja miten he haluaisivat toisen ymmärtävän oman sanomansa, eli mitä vuorovaikutuskumppanit tuovat toisilleen näkyväksi (Drew 2005; Koole & Elbers 2014; Lee 2004). Etnometodologisen näkemyksen mukaan keskustelunanalyysillä ei keskitytä vain paljastamaan opettajien loogisten väitteiden ominaisuuksia, vaan kuvataan niitä menettelytapoja, joita opettajat (opetuksellisessa) vuorovaikutustilanteessa käyttävät tehdäkseen esimerkkejä vuorovaikutuskumppanilleen ymmärrettäviksi (Lee 2004). Keskustelunanalyysin lähtökohtana on havainto sosiaalisen vuorovaikutuksen noudattamista vakiintuneista järjestäytyneistä rakenteista, joihin osallistujat suuntautuvat normatiivisesti (Heritage 2009).

Keskustelunanalyysissä keskeisenä analyysikohteena pidetään sekä sanotun kielellistä merkitystä että toiminnan merkitystä eli keskustelun yhteistoiminnallisuutta (Hakulinen 1997, 14). Keskustelunanalyysin tutkimusmateriaalia ovat nauhoitetut vuorovaikutustilanteet, joista analysoidaan yksityiskohtaisesti kielellistä vuorovaikutusta. Huomio kiinnitetään luokkahuonekontekstin yksityiskohtiin, järjestyksenmukaiseen etenemiseen sekä opettajien ja oppilaiden asiantunteviin käytänteisiin rakentaa maailmaa. Keskustelunanalyysillä pyritään tuomaan esiin se, miten pragmaattiset siirrot esimerkiksi esimerkin antamisessa käytännössä toteutetaan. (Lee 2004.)

Keskustelunanalyysin teoreettinen lähtökohta on havainto siitä, että vuorovaikutuksessa käytetyillä ilmauksilla luodaan suunta niitä seuraavalle vuorovaikutukselle (Koole & Elbers 2014). Puhujat orientoituvat keskustelussa omaa vuoroaan edeltävään puheeseen sekä hetkellisesti että jaksollisesti säännöllisin tavoin (Schegloff 1972 Leen 2004 mukaan). Toisin sanoen puheenvuoro on sidoksissa sitä edeltäneeseen vuoroon. Jokainen vuoro ilmaisee sen, miten puhuja on ymmärtänyt edeltävän vuoron (Moerman &

Sacks 1971/1988 Leen 2001 mukaan) eli mitä puhujan mielestä edeltävä vuoro tarkoittaa ja mitä sillä tavoitellaan (Macbeth 2001 Leen 2001 mukaan).

Keskustelunanalyysillä siis tutkitaan merkityksiä sosiaalisena ilmiönä (Koole & Elbers 2014). Keskustelunanalyysin kohteena on vuorovaikutus ja keskipisteenä ovat kaikki vuorovaikutuksessa olevat osapuolet (Seppänen 1997). Esimerkinanto sopii hyvin keskustelunanalyyttiseksi tutkimuskohteeksi, sillä Zodikin ja Zaslavskyn (2008) mukaan esimerkkejä tulisi tutkia asiayhteydessään.

4.3 Aineiston analyysi

Omassa tutkimuksessani olin kiinnostunut siitä, miten ihmiset toimivat autenttisessa luokkahuonevuorovaikutuksessa antaessaan ja vastaanottaessaan esimerkkejä. Lisäksi minua kiinnosti se, mitä tehtävää erityisopettajan rakentamat esimerkit opetuksessa palvelivat. Tietoa hankittiin havainnoimalla luokkahuonovuorovaikutusta videonauhoitetuilta oppitunneilta. Havainnointi antaa välitöntä, suoraa tietoa yksilöiden ja ryhmien toiminnasta ja käyttäytymisestä. Lisäksi havainnointi sopii erinomaisesti vuorovaikutuksen tutkimiseen, sillä menetelmällä voidaan selvittää mitä luonnollisessa ympäristössä todella tapahtuu. (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2004, 201–202.) Havainnoinnissa kiinnitin systemaattisesti huomiota opettajan rakentamiin esimerkkeihin. Esimerkit purettiin auki ja niitä tarkasteltiin keskustelunanalyysin menetelmin. Koska aineistonani olivat videotallennetut oppitunnit, jo olosuhteiden pakostakin havainnoin vuorovaikutustilanteita ulkopuolisena tarkkailijana.

Havaintoaineisto oli valmiiksi raakalitteroitu. Kävin matematiikan oppitunneista kirjoitetut raakalitteraatit tarkasti läpi ja etsin niistä sekvenssit, joissa opettaja rakentaa esimerkkejä. Löysin esimerkinantoon viittaavia jaksoja yhteensä 34. Pyrin varmistamaan kaikkien esimerkkien ottamisen mukaan analyysiin katsomalla nauhoitetut oppitunnit. Merkitsin muistiin kohdat, joissa videotallenteella rakennettiin esimerkki ja vertasin niitä ja raakalitteraateista havaitsemiani esimerkkejä toisiinsa.

Tarkastelin löytämiäni esimerkinannon sisältäviä sekvenssejä kiinnittäen ensin huomiota siihen, miten opettaja rakentaa esimerkkejä. Luokittelin esimerkit ensin esimerkin aloitustapaa, sitten esimerkin etenemisen tapaa ja lopuksi esimerkin päättämisen tapaa kuvaaviin luokkiin. Toiseksi tarkastelin opettajan rakentamien esimerkkien tehtäviä ja pohdin erikseen jokaisen esimerkin tarkoitusta sekä luokittelin ne tulkintani mukaisen pääasiallisen tarkoituksen mukaisesti eri ryhmiin. Aineistosta nousi aluksi esiin viisi esimerkin tehtävää kuvaavaa alustavaa luokkaa: oppilaan huomion suuntaaminen yksittäisestä yleiseen, matemaattisen määritelmän tai käsitteen konkretisointi, opetuksen elävöittäminen, oppilaan työskentelyn ohjaaminen ja aiempien tietojen mieleen palauttaminen. Analyysin edetessä tarkensin luokkia ja niitä kuvaavaa otsikointia sekä lisäksi yhdistin kaksi alustavaa esimerkin tarkoituksen luokkaa (oppilaan työskentelyn ohjaaminen ja aiempien tietojen mieleen palauttaminen). Esimerkit luokittuivat lopulta neljään niiden tehtävää kuvaavaan luokkaan: yleisen säännön rakentaminen yksittäisestä tilanteesta, matemaattisen määritelmän tai käsitteen konkretisointi, opittavan asian rinnastaminen tuttuun asiaan sekä matemaattisen käsitteen yhdistäminen oppilaan arkikokemuksiin. Sijoitin jokaisen yksittäisen esimerkin vain yhteen luokkaan sen ensisijaisen tarkoituksen mukaan.

Esimerkkejä oli tässä vaiheessa tarkasteltavana vielä melko paljon. Koska keskustelunanalyysi perustuu hyvin yksityiskohtaiseen tarkasteluun, on aineisto hyvä pitää suppeana. Valitsin esimerkkien joukosta jokaista esimerkin rakentumista (aloittaminen, eteneminen, lopettaminen) ja esimerkkien tarkoitusta kuvaavaa luokkaa parhaiten edustavat esimerkit. Nämä malliesimerkit litteroin tarkasti ja kirjoitin auki tuloksiin.

5 TULOKSET

Seuraavaksi esittelen erityisopettajien matematiikan osa-aikaisessa erityisopetuksessa rakentamista esimerkeistä saamani tulokset. Ensimmäisenä käsittelen aineistossa ilmenneitä erilaisia tapoja rakentaa esimerkkejä: miten erityisopettajien antamat esimerkit alkavat, miten esimerkinantoa viedään eteenpäin ja miten esimerkinanto päätetään. Toisena käsittelen opettajan rakentamien esimerkkien tehtäviä opetuksessa.

5.1 Esimerkin rakentaminen matematiikan tunnilla

Matematiikan tunnilla annettuja esimerkkejä voidaan rakentaa eri tavoin. Alla käsittelen tutkimusaineistosta löytyneitä erilaisia tapoja aloittaa esimerkinanto, edetä siinä ja päättää esimerkinanto.

5.1.1 Esimerkinannon aloittaminen

Erityisopettajan peruskoulun matematiikan osa-aikaisessa erityisopetuksessa rakentamat esimerkit alkavat kolmella eri tavalla: oppilaalle suunnatulla kysymyksellä, oppilaan tuotosta korjaamalla tai viittaamalla oppilaalla jo olevaan tietoon. Esimerkin rakentaminen alkaa pääsääntöisesti opettajan aloitteesta. Opettaja aloittaa vain muutamia esimerkkejä vasteena oppilaan osaamattomuuden osoitukseen.

Ensimmäinen tapa alkaa esimerkinanto on esittää oppilaalle kysymys. Aineistoesimerkissä 1 esimerkinanto alkaa oppilaalle suunnatulla, lukujen rakentumista kymmenjärjestelmässä pohtimaan ohjaavalla, kysymyksellä. Esimerkin yhteydessä pelattavassa pelissä tarkoituksena on muodostaa mahdollisimman suuria kolminumeroisia lukuja satunnaisesti lukualueelta 0-9 valituiksi tulevista numerokorteista, joissa on kussakin yksi kokonaisluku. Numerokortteja käännetään korttipinosta esiin yksitellen.

Aineistoesimerkki 1 (Metsäpellon koulu)

1 Lto: mieti millä perusteella minä laitan tämän ysi:n satasiin (.)
2 mietippäs vähä (.) miks mä kolmosen laitoin ↑ykkösiin ja nyt minä
3 laitankii mulla tuli <ysi:> ni mä laitan sen >satasiin<=
4 Ope: =Tiinalla [yheksän]
5 Oppilas: [son enemmän]=
6 Ope: =no nii

Aineistoesimerkissä 1 opettaja ottaa esimerkiksi oman tapansa muodostaa nostamistaan korteista mahdollisimman suuren luvun. Hän sisällyttää esimerkin kysymykseen eli kehottaa riveillä 1–2 oppilaita miettimään itse, miksi hän täydensi rakenteilla olevaa lukua laittamalla korttipinosta saamansa kolmosen ykkösiin ja yhdeksikön satoihin. Opettajan rivillä 2 esittämä ”Miksi?” – kysymys edellyttää oppilaalta tietämisen osoituksen sisältävää vastausta. Rivillä 5 oppilas osoittaakin ymmärtäneensä asian ”son enemmän”. Eli yhdeksikön ollessa suurempi kuin kolmonen, kannattaa yhdeksikkö sijoittaa kymmenjärjestelmässä mahdollisimman korkeaan asemaan, mikä tässä esimerkissä tarkoittaa satojen paikalle. Opettaja hyväksyy oppilaan vastauksen rivillä 6 ”no nii” lausumalla.

Toinen tapa alkaa esimerkin rakentaminen on korjata oppilaan tuotosta. Aineistoesimerkissä 2 oppilaalle on ollut haastavaa ratkaista kymmenylityksen sisältävä vähennyslasku. Opettaja lähtee rakentamaan kyseiseen tehtävään mallisuoritusta. Esimerkissä havainnollistetaan kymmenylitystä (ja satoja sisältävien laskujen laskemista) kymmenjärjestelmävälineellä. Kymmenjärjestelmävälineessä ykköset havainnollistetaan pienillä irrallisilla muovikuutioilla, kymmenet kymmenen yhteen liitetyn ykköskuution kokoisilla muovisauvoilla ja sadat kymmenen kyppisauvan kokoisilla muovilevyillä. Kymmenjärjestelmävälineen avulla opettaja voi hyvin konkreettisesti mallintaa yhteen- ja vähennyslaskujen suorittamista.

Aineistoesimerkki 2 (Metsäpellon koulu)

1 EO: Sami ois voinu näin vaihtaa että ois antanu antanu satalevyn
2 ↑minulle ja minä annan otan sen talteen ↓tuonne (.) ja Sami saa
3 kymmenen näitä kymppisauvoja (.) siihen tilalle (.)
4 ((Opettaja näyttää oppilaille toisessa kädessään Samilta ottamaansa
5 satalevyä ja toisessa kädessään kymmentä kymppisauvaa.))

Aineistoesimerkissä 2 rivillä 1 opettaja aloittaa esimerkinannon korjausjäsennyksellä, kertomalla mitä oppilaan, Samin, olisi pitänyt tehdä päästäkseen eteenpäin laskutehtävässä. Opettaja jatkaa vuoroaan ottamalla satalevyt ja kymppisauvat konkreettisiksi esimerkeiksi ja havainnollistamisvälineiksi siitä, miten toiminta olisi jatkunut (rivit 2-3). Korjauksessa opettaja painottaa kymmenjärjestelmän rakennetta: sata muodostuu kymmenestä kympistä. Tämän asian huomaaminen on oleellista tehtävässä eteenpäin pääsemisessä.

Kolmas tapa alkaa esimerkin rakentaminen on viitata oppilaalla jo olevaan tietoon. Aineistoesimerkissä 3 ennen esimerkinantoon johtavaa tilannetta erityisopettaja ja lastentarhanopettaja ovat havainnollistaneet vähennyslaskun vähentäjän ja erotuksen välistä yhteyttä pienen näytelmän ja siinä esitettyjen ja taululle kirjoitettujen vähennyslaskujen avulla. Esimerkkiä edeltää tilanne, jossa oppilas ei pysty sujuvasti laskemaan tehtävänä olevia vähennyslaskuja ja opettaja viittaa oppilaalla jo olevaan tietoon taululle kirjoitettujen laskujen kautta.

Aineistoesimerkki 3 (Metsäpellon koulu)

1 Miriam: [(-)]
2 EO: [(-) katoppa katoppa tuollaki kato melkein] samanlainen ku
3 otettiin ensin viis pois jäi [seittemän sit ku otettiin seittemän pois ni
4 jäi [viis. huomaatko],
5 Miriam: [↑aaa (.) mä luulin et (--)]

Aineistoesimerkissä 3 havainnollistetaan vähennyslaskussa vähentäjän ja erotuksen välistä yhteyttä käyttäen hyväksi taululle jo kirjoitettua esimerkkiä. Yhtälö pysyy totena, vaikka vähennyslaskussa vaihdetaan vähentäjän ja erotuksen paikkoja. Opettaja kehottaa rivillä 2 oppilasta katsomaan taululla olevaa esimerkkiä, jota on aiemmin tutkittu yhdessä. Esimerkin avulla opettaja kiinnittää oppilaan huomion laskettavana olevien laskujen ja taululla olevan, jo lasketun, esimerkkilaskun samankaltaisuuteen (rivillä 2: ”melkein samanlainen” ja rivillä 4: ”huomaatko”). Näin toimien hän tekee laskutehtävästä oppilaalle entuudestaan tutun. Rivillä 5 oppilas osoittaa ymmärtäneensä esimerkin kohteena olleen asian oivaltamista ilmaisevalla ”aaa” äännähdyksellä.

5.1.2 Esimerkinannon eteneminen

Erityisopettaja käyttää esimerkin antamisen eteenpäin viemiseen kahta erilaista tapaa. Suurin osa esimerkeistä etenee opettajan oppilaille esittämien kysymysten avulla. Pienempi osa esimerkeistä etenee opettajan suoran opetuksen varassa.

Alla oleva aineistoesimerkki osoittaa, miten opettaja rakentaa esimerkkejä tunnilla vieden esimerkinantoa eteenpäin kysymysten avulla. Opettaja ottaa näin oppilaat mukaan esimerkin rakentamiseen pitäen kysymysten valinnalla huolta siitä, että esimerkkiä työstetään hänen valitsemaansa suuntaan. Aineistoesimerkki on tilanteesta, jossa opettaja pyrkii palauttamaan oppilaiden mieliin erityyppisten kolmioiden ominaisuuksia voidakseen rakentaa uutta tietoa tämän oppilailla jo olevan tiedon päälle.

Aineistoesimerkki 4 (Stenvallin koulu)

((Esimerkkitilanteessa käydään läpi opettajan taululle piirtämiä kolmioita))

1 Opettaja: minkä niminen kolmio tää on tää seuraava aa bee see (4.3)

2 siellä on tuolla kohalla vois olla merkit (11.3) se oli nimel[tä:än

3 ((opettaja piirtää 11.3 sekunnin tauon alussa taululle piirrettyyn kolmioon

4 kylkien pituuden yhtäläisyyttä osoittavat viivat))

Nanna: [°Tasa]sivuinen°=
Ope: =Ööö >toinen on tasasivuinen näistä toinen on tasakylkinen (.) <
kumpi on=
Nanna: =°Kylkinen°=
Ope: =Joo tää on tasakylkinen.
((Opettaja kirjoittaa kolmion nimen taululle))
Ope: No mitäs muistatte tasakylkisestä kolmiosta? (3.9) minkälaisia <ne
kyljet on>
Raita: Yhtä pitkät=
Ope: =Yhtä ↓pitkät öö miten tä:mmösestä ko:lmiosta laskettais tuo
kulma alfa mitä pitäs tehä ensin (2.6).

Aineistoesimerkissä 4 opettaja auttaa oppilaita palauttamaan mieleen matemaattisten objektien, kuten kolmioiden, nimiä ja ominaisuuksia. Esimerkki koostuu taululle piirretystä kuviosta sekä oppilaiden omaa ajattelua ja opitun muistiin palauttamista tukevista kysymyksistä sekä oppilaiden niihin antamista vastauksista. Vuorovaikutus alkaa rivillä 1 oppilaille suunnatulla kolmion nimeämiseen tähtäävällä kysymyksellä ” minkä niminen kolmio”. Kysymyksen esittämisen jälkeinen pitkähkö tauko (4,3 s) paljastaa, että oppilaat eivät varmuudella tiedä vastausta kysymykseen. Opettaja ei myöskään pyri nimeämään yksittäistä oppilasta vastausvuoroon, vaan pitää kysymyksensä avoimena kaikille. Koska kukaan oppilaista ei ota puheenvuoroa itselleen, opettaja jatkaa omaa vuoroaan antamalla lisävihjeitä piirtämällä taululle kolmion kylkien yhtäläisyyttä osoittavat merkit (rivi 2). Koska vuoronsiirto ei pitkästä tauosta (11,3 s) huolimatta taaskaan onnistu, toistaa opettaja kysymyksensä rivillä 2: ”se oli nimeltään”. Opettaja siis vie esimerkinantoa eteenpäin kysymystään helpottamalla ja sitä toistamalla.

Rivillä 5 Nanna ottaa vuoron kesken opettajan aloittaman lausuman, mutta vastaus ei ole sitä mitä opettaja haki. Vastausta seuraa rivillä 6 opettajan uudelleen muotoilema kysymys, joka helpottaa vastaamista tarjoamalla oppilaille vastausvaihtoehdot: ”toinen on tasasivuinen näistä toinen on tasakylkinen”, ”kumpi on”. Uudelleen muotoillun kysymyksen avulla opettaja tuo käsitteet oppilaiden saataville. Itse asiassa kysymys muotoutuu polaariseksi (kyllä–ei) kysymykseksi, sillä vaihtoehto ’tasasivuinen kolmio’ rajautui jo pois opettajan hylätessä oppilaan vastauksen. Oppilas korjaakin vastauksensa oikeaksi ja opettaja päättää rivillä 9 kuvion nimeämiseen tähtäävän vuorovaikutuksen hyväksymällä oppilaan vastauksen myönteisellä ”joo”-äännähdyksellä sekä toistamalla annetun vastauksen.

Esimerkinanto jatkuu tukeutuen uusiin oppilaille suunnattuihin kysymyksiin. Opettaja pyrkii palauttamaan kolmioiden ominaisuuksia oppilaiden mieliin seuraavilla johdattelevilla kysymyksillä: ”mitäs muistatte”, ”minkälaisia <ne kyljet on>” ja ”miten tä:mmösestä ko:lmiosta laskettais tuo kulma alfa mitä pitäs tehä ensin” (rivit 11, 12 ja 14). Opettajan esimerkkiä eteenpäin vievät kysymykset rakentuvat siis siten, että niihin vastaaminen edellyttää tietämisen osoittamista. Aineistoesimerkissä 4 tulee myös ilmi opettajan sinnikkyys. Opettaja jatkaa esimerkin työstämistä kysymys–vastaus -vuoroparirakennetta hyödyntäen, vaikka oppilaat eivät ota vastausvuoroa. Kun opettaja usean yrityksen jälkeen saa siirrettyä vastausvuoron oppilaalle, ei oppilaan vastaus ole opettajan toivoma. Hän kuitenkin jatkaa esimerkin rakentamista kysymyksin, mutta muotoilee kysymyksensä uudelleen helpottaen sitä tarjoamalla oppilaalle vastausvaihtoehtoja.

Toinen vaihtoehto antaa esimerkki on tehdä se suoran opettamisen kautta. Aineistoesimerkki 5 etenee opettajan suoran opettamisen varassa. Esimerkissä tutkitaan geometristen kappaleiden ominaisuuksia ja havainnollistetaan käsitettä yhtenevä.

Aineistoesimerkki 5 (Stenvallin koulu)

Jaakko: oliks se että pohja ja kansi on jotenkin (0.3) samankokosia vai miten se oli=

((opettaja irrottaa ja asettaa ympyrälieriön pohjan ja kannen päällekkäin))

Ope:= joo >samankokosia< <yhteneviä> tarkottaa sitä että kun ne laitetaan tällei päällekkäin niin ei (0.2) totaa ei jää ylimääräsiä alueita tänne (.) eikä: oo toinen pienempi kuin toinen et ne on yhtenevät ne menee päällekkäin ↓täsmällisesti.

Yllä olevassa aineistoesimerkissä 5 opettaja selittää mitä termi yhtenevä tarkoittaa. Oppilas palauttaa rivillä 1 opettajan hakeman lieriön määritelmään kuuluvan käsitteen ”yhtenevä” sijaan epätarkan termin ”samankokosia”. Opettaja jatkaa rivillä 4 vuorovaikutusta hyväksymällä oppilaan vastauksen myöntävällä äänteellä ”joo” ja toistamalla oppilaan antaman vastauksen, mutta jatkaa vuoroaan tarkentamalla oppilaan tarjoamaa termiä konkreettisesti sanallisen selityksen ”tarkottaa sitä” (rivit 4-7) ja konkreettisten mallikappaleiden eli muovilieriöstä irrottamiensa pohjan ja kannen avulla. Opettaja käyttää samanaikaisesti sekä sanallista selittämistä että konkreettista mallikappaleilla näyttämistä osoittaakseen pohjan ja kannen menevän saumattomasti päällekkäin: rivillä 5 ”tällei” ja ”tänne”. Hän jatkaa vuoroaan osoittamalla kappaleiden päällekkäin olon olevan ”täsmällistä” siten ettei ”ylimääräisiä alueita” jää. Hän tiivistää lopuksi konkreettisen kappaleen näyttämiseen yhdistetyn selityksensä ilmaisuun ”ne menee päällekkäin täsmällisesti”. Siten opettajan selitys ja konkretisointi yhdessä muodostavat opettajajohtoisesti etenevän esimerkin.

5.1.3 Esimerkinannon päättäminen

Matematiikan osa-aikaisessa erityisopetuksessa annetut esimerkit päättyvät joko hyväksyvään palautteeseen, oppilaan ymmärtämisen varmistamiseen tai ne päätetään ilman erityistä lopetusta. Alla annan esimerkkejä erilaisista tavoista päättää esimerkki.

Ensimmäinen esimerkin päättämistapa on opettajan antama hyväksyvä palaute. Hyväksyvään palautteeseen päättyvät erityisesti kysymysten avulla rakennetut esimerkit. Aineistoesimerkissä 6 opettaja työstää kymmenjärjestelmää havainnollistavaa esimerkkiä yhdessä oppilaan kanssa. Lukuja kuvataan kymmenjärjestelmävälineen avulla. Esimerkinanto päättyy opettajan antamaan, oppilaan osaamisen tunnustavaan, hyväksyvään sanalliseen palautteeseen.

Aineistoesimerkki 6 (Metsäpellon koulu)

1 LTO: montako kymppiä.=
2 Sami: =kymmene.
3 LTO: mihinkä sää a-vaihat minun kanssa,
4 Sami: ↓tä:hä=
5 ((Sami ottaa satalevyn käteensä))
6 LTO: =mikä se tämä on?
7 Sami: °sata°
8 LTO: ↑hyvä

Aineistoesimerkissä 6 tarkoituksena on konkretisoida kymmenjärjestelmää. Esimerkissä opettaja pyytää oppilasta rakentamaan yhteenlaskun tuloksena saadun luvun kymmenjärjestelmävälineellä siten, että satoja edustavat satalevyt, kymmeniä kymmensauvat ja ykkösiä pienet kuutiot. Onnistuminen edellyttää kymmensauvojen vaihtamista satalevyyn. Omissa vuoroissaan (rivillä 1 ”montako kymppiä”, rivillä 3 ”mihinkä sää a-vaihat” ja rivillä 6 ”mikä se tämä on”) opettaja selvittää kysymysten avulla tietääkö oppilas miten hänen tulisi edetä. Oppilaan annettua opettajan odottamat vastaukset päättää opettaja esimerkin hyväksyvään sanalliseen palautteeseen ”hyvä” (rivi 8).

Toinen tapa päättää esimerkinanto on varmistaa, että oppilas ymmärsi asian. Ymmärtämisen varmistaminen voi tapahtua kuullun oppilaan oivaltamista osoittavan äännähdyksen perusteella, kuten aineistoesimerkissä 3 (luku 5.1.1 Esimerkinannon aloittaminen) tai edellyttämällä oppilaalta varmuutta. Vastausvarmuutta edellytetään aineistoesimerkissä 7. Esimerkissä opettaja havainnollistaa vähennyslaskussa vähentäjän ja erotuksen välistä suhdetta konkreettisesti antamalla oppilaille tehtäväksi laskea linnun munien määrä ennen ja jälkeen, kun osa munista on kuoriutunut. Esimerkki on upotettu kehyskertomukseen, jossa lastentarhanopettajan esittämää Kasse-lintua oli pyydetty tilapäisesti hoitamaan eläinkauppaa.

Aineistoesimerkki **7** (Metsäpellon koulu)

1 LTO/Kasse: paljonko minulla on (.) YHteensä
2 ((näyttää laatikkoa, jossa viisi valkoista ja seitsemän ruskeaa
3 munaa))
4 x: kaksi[toista
5 Olavi: [@kaksi]toista@ =
6 LTO/Kasse: = oot edelleen sitä mieltä kaksitoista (1.7)
7 ((kirjoittaa luvun taululle))
8 jos minulta jos nämä viisi kuoriutuvat? (0.5)
9 ((ottaa laatikosta pois viisi valkeaa munaa))
10 Johannes: jää seittemän sitten ruskeaa kananmunia.
11 LTO/Kasse: >ootko varma<?
12 Johannes ja x: joo

Esimerkissä 7 opettaja ja oppilaat tutkivat vähennyslaskua konkreettisesti muovisilla munilla. Seitsemän munista on ruskeita ja viisi valkeita. Opettaja havainnollistaa munien alkuperäistä määrää lisäksi kirjoittamalla määrän taululle (rivi 7). Osa munista kehyskertomuksen mukaan kuoriutuu ja oppilaitten huomio suunnataan sekä konkreettisesti ottamalla munia pois että sanallisesti siihen, että vähentäjän ja erotuksen summa on yhtä suuri kuin vähenevä (rivit 6-8: ”jos nämä viisi ((valkoista munaa)) kuoriutuvat”). Yksi oppilas, Johannes, huomaakin tämän todeten, että ”jää seittemän”, joka on ruskeitten munien lukumäärä. Opettaja varmistaa oppilaitten ymmärtämistä rivillä 11 edellyttämällä oppilailta ymmärtämisen väittämistä kysymällä ”ootko varma”. Oppilaat väittävätkin ymmärtäneensä asian rivillä 12 vastaamalla ”joo”, minkä jälkeen opettaja päättää esimerkin käsittelyn.

Kolmas tapa päättää esimerkinanto on tehdä se ilman erityistä lopetusta. Oppilaalta ei odoteta mitään reaktiota. Aineistoesimerkissä 8 opettaja havainnollistaa oppilaille mallikappaleiden avulla erilaisia särmiöitä ottaen käsiteltäväksi särmiön erikoistapauksen kuution. Esimerkinanto päättyy viittaukseen oppilaalla jo olemassa olevaan tietoon ja muistituen tarjoamiseen.

Aineistoesimerkki 8 (Stenvallin koulu)

1 Assi: =°onks se kuutio°,=

2 Ope: =kuutio kyllä eli a**r**pakuutiosta tiiätte tää on nyt kuutio,

Aineistoesimerkissä 8 opettaja vie kappaleen nimeämiseen tähtäävää vuorovaikutusta eteenpäin suuntaamalla oppilaan huomion käsillä olevaa kappaletta vastaavaan oppilaille tuttuun esineeseen. Vuorovaikutuksen lopussa opettaja nimeää oppilaan ehdotuksen vahvistaen kappaleen kuutioksi. Kuution nimi antaa muistisäännön arjesta tutun arpakuution nimestä (rivillä 2: ”a**r**pakuutiosta tiiätte tää on nyt kuutio”). Opettajan toteamuksena esittämä viittaus oppilaiden arpakuution tietämykseen antaa ymmärtää, että kyseessä on tulevaisuudessa käyttöön otettavaksi tarjottu muistituki.

5.2 Matematiikan opetuksen yhteydessä annettujen esimerkkien tehtävät

Erityisopettajan peruskoulun matematiikan osa-aikaisessa erityisopetuksessa rakentamilla esimerkeillä on neljä eri tehtävää. Nämä eri tehtävät ovat seuraavat: yleisen säännön rakentaminen yksittäisestä tilanteesta, matemaattisen määritelmän tai käsitteen konkretisointi, opittavan asian rinnastaminen tuttuun asiaan sekä matemaattisen käsitteen yhdistäminen oppilaan arkikokemuksiin.

5.2.1 Yleisen säännön rakentaminen yksittäisestä tilanteesta

Esimerkeissä, joissa tavoitteena on rakentaa yleinen sääntö yksittäisen tilanteen pohjalta, pyritään kiinnittämään oppilaan huomio tarkasteltavan ilmiön olennaisiin piirteisiin. Oppilaiden huomion suuntaamista edesautetaan ja vuorovaikutusta ylläpidetään esimerkiksi konkreettisin mallikappalein ja esittämällä heille toistuvasti ilmiön relevantteja piirteitä korostavia kysymyksiä, kuten aineistoesimerkissä 9. Siten yleisen säännön rakentaminen yksittäisen tilanteen pohjalta voi tapahtua hyvin konkreettisesti. Kahdeksassa aineistosta löytyneistä esimerkeistä tavoitteena on rakentaa yksittäisen tilanteen perusteella yleinen sääntö.

Aineistoesimerkki 9 (Stenvallin koulu)

Ope: mikä tää oli nimeltään? (3.05)
((opettaja näyttää kädessään olevaa muovista lieriötä oppilaille))
Assi: °ympyräkartio (1.12) eiku joku ympyrä°
Ope: onks tää kartio? (0.81)
Assi: ei=
Ope: =↑ei (2.35) tässä ei ollu >mitä tässä ei oo<,
Assi: kulmia
Ope: niin ei oo ↑kulmia eikä (1.64) >mikä se toinen on< (1.86)
Assi: särmiä=
Ope: =↑**sä**rmiä ei oo särmiä tää oli (.) tuli nimi tästä?
((opettaja irrottaa kädessään olevasta lieriöstä ympyränmuotoisen pohjan
ja näyttää sitä oppilaalle))
Assi: ympyrä joku lieriö,=
Ope: =↑ympyrälieriö joo kyllä,

Aineistoesimerkissä 9 esimerkinannon rakentuminen alkaa riveillä 1-2 opettajan kysymyksellä ja konkreettisen kappaleen (lieriö) näyttämisellä oppilaalle. Kysymyksen imperfekti-aikamuoto viittaa siihen, että kyseessä on kertaava kysymys, jonka tarkoituksena on saada oppilas palauttamaan mieleensä kappaleen nimi. Oppilas tarjoaa rivillä 3 käsitettä ”ympyräkartio” vastauksena opettajan kysymykseen. Koska välitöntä palautetta ei tule, oppilas tulkitsee vastauksen vääräksi ja alkaa korjata omaa vuoroaan lausumapartikkelilla ”eiku” päätyen epämääräiseen ilmaisuun ”joku ympyrä”. Opettaja kiinnittää oppilaan huomion vastauksen virheelliseen osaan vaihtoehtokysymyksellä ”onks tää kartio” (rivi 4). Kun yksimielisyys siitä, että kappale ei ole kartio, on saavutettu ohjaa opettaja rivillä 6 oppilaan huomion haetun termin kannalta oleelliseen mallikappaleen yksityiskohtaan käänteisellä kysymyksellä ”mitä ei oo”. Kun oppilas tuottaa rivillä 9 avustettuna oikean vastauksen, opettaja vie vielä kappaleen nimeämiseen tähtäävää vuorovaikutusta eteenpäin suuntaamalla oppilaan huomion käsillä olevan kappaleen pohjan muotoon. Pohjan muoto antaa vihjeen kappaleen nimestä, ja opettaja tuo tämän oppilaan tietoon sekä sanallisesti ”nimi tuli tästä” että konkreettisesti näyttämällä pohjaa oppilaalle (rivi 11). Esimerkissä 9 siis johdetaan yksityiskohdista yleinen sääntö eli ympyrälieriö koostuu kahdesta yhtenevästä ympyrän muotoisesta pohjasta ja niitä yhdistävästä vaipasta. Vietäessä esimerkinantoa eteenpäin oppilaan huomiota kiinnitetään kappaleen relevantteihin piirteisiin toistuvasti kysymyksin, kunnes yksityiskohtien määrä riittää yleisen säännön luomiseen ja sitä kautta oikean vastauksen löytämiseen.

5.2.2 Matemaattisen käsitteen konkretisointi

Esimerkkejä käytetään myös konkretisoimaan matemaattisia määritelmiä tai käsitteitä sekä laskutoimituksia. Yhdeksässä esimerkissä tavoitteena oli konkretisoida yleistä sääntöä yksittäisen tilanteen avulla. Aineistoesimerkissä 10 opettaja konkretisoi kymmenjärjestelmää ja mallintaa oppilaille vähennyslaskun suorittamista.

Aineistoesimerkki 10 (Metsäpellon koulu)

1 ((Opettaja levittää kymppisauvat pöydälle))
2 Tuukka: kymmenen[kymppisauvaa eli se on satasella
3 EO: [no nii:n (0.2)] nytpä meillä onkin helpompi taas
4 tehtävä nyt minä voin asetella ne tähän rivviin (.)
5 [nä::in ja seuraavaksi otetaanki yks täys kymppi tarkasteluun
6 ((Opettaja näyttää oppilaille kymppisauvaa))
8 AV: [(--)]
9 EO: ↑montako tommosta (.)
10 ((Opettaja näyttää kymppisauvaa))
11 minä voisin vaihtaa Saleh (.) minä voisin vaihtaa tämän (.) kymppisauvan
12 nyt johonkin vielä.
13 ((osoittaa kymppisauvaa viistäen sitä sormella ylhäältä alas))
14 Saleh: kymmenen (.) ykköstä.
15 Tuukka: ykkösiä.

Saleh: ykkösiä.
EO: joo montako ykköstä minä saan tällä yhellä ↓kymppisauvalla
oppilaat yhdessä: ↓ky:mmene:n
EO: no antakaas mulle kymmenen ykköstä.

Aineistoesimerkissä 10 kymmenylitystä konkretisoidaan kymmenjärjestelmävälineen avulla (rivit 1, 4, 6, 10 ja 13). Opettaja sitoo oppilaat mukaan esimerkin antoon käyttämällä esimerkin eteenpäin viemisessä apuna kysymyksiä (ensimmäinen pari: rivit 11–13 ja 14, toinen pari: rivit 17 ja 18). Kysymysten avulla opettaja tukee ja ohjaa oppilaiden työskentelyä siten, että laskutehtävästä muodostuu oppilaille työskentelyä ohjaava esimerkki. Todetessaan rivillä 11 ”minä voisin vaihtaa tämän (.) kymppisauvan nyt johonkin vielä” opettaja sekä kertoo oppilaille miten tehtävässä tulee edetä että edellyttää oppilailta tietämisen osoittamisen sisältävää vastetta. Lausuman loppuosa ”johonkin vielä” kertoo, että vaihtoja on jo tehty, mutta nyt niitä jatketaan. Koska ei ole tarkoitus palata vaihdoilla takaisin alkuperäiseen tilanteeseen, antaa lausuman loppuosa oppilaille vihjeen siitä, mikä vaihdon kohde on. Rivillä 17 opettaja edellyttää kysymyksellään ”montako ykköstä minä saan tällä yhellä ↓kymppisauvalla” oppilailta tietämisen osoitusta, jonka oppilaat antavatkin vastatessaan ”↓ky:mmene:n” rivillä 16. Tämä saa opettajan päättämään esimerkinannon rivillä 19 kymmenien ja ykkösten välisen suhteen konkretisoivaan lausahdukseen ”no antakaas mulle kymmenen ykköstä”.

Aineistoesimerkki 10 osoittaa miten opettaja saa kysymystensä avulla oppilaat mukaansa työstämään esimerkkiä, jolla konkretisoidaan kymmenjärjestelmän mukaisen laskutehtävän suorittamista. Esimerkissä opettaja kiinnittää oppilaitten huomion kymmenjärjestelmän rakenteeseen. Ylemmän tason yksikkö sisältää aina kymmenen edellisen tason yksikköä eli kymmenen muodostuu kymmenestä ykkösestä. Esimerkissä kymppisauva vaihdetaan konkreettisesti kymmeneen ykköspalikkaan.

5.2.3 Opittavan asian rinnastaminen tuttuun asiaan

Rinnastaessaan opittavaa asiaa tuttuun asiaan opettaja upottaa opittavan asian harjoittelemiseen, kuten tehtävien tekemiseen, yksinkertaistettuja malleja. Tällä tavoin opettaja pyrkii vähitellen syventämään oppilaiden tietoja ja rakentamaan uutta asiaa edeltävän tiedon päälle (kumuloituvuus). Opittavaa asiaa oppilaille tuttuun asiaan rinnastavia esimerkkejä löytyi aineistosta kahdeksan kappaletta. Esimerkki 11 sisältää yksinkertaistettuna mallina helpon esimerkkilaskun tarjoamisen. Ennen mallilaskun antamista yksi oppilaista, Jaana, on toistuvasti ilmaissut, ettei hän enää tiedä, miten laskuissa mennään eteenpäin. Koska tehtävässä eteneminen ei onnistu, rakentaa opettaja liitutaululle yksinkertaistetun mallin helpottamaan oppilaiden työskentelyä.

Aineistoesimerkki 11 (Stenvallin koulu)

((Opettaja menee taululle))
Ope: he he Etkä hypänny £tähän asti oot ollu ihan hyvin£ (-) eli:
tota (3.93) mies laitan tähän tämmösen näkyviin kuus jaettuna
kolmella on yhtä kuin kaks (3.09) tää on nytte muodoltaan Jaana
samannäkönen kuin kolme äk kolme pilkku äks kolme pilkku kaks
jaettuna äksällä on yhtä kuin kosiini kakskytneljä eiks niin (.)
saman nälö:nen (.) ulkoasultaan. Onko?
Jaana: Mmm
Ope: Nyt jos mää peitän täältä tän kolmosen (.) niin miten sie saat
kuutosesta ja kakkosesta kolmosen. (5.55)
Jaana: nnn. Jakamalla sen=
Ope: =Mikä jaat millä?
Jaana: #En tiiä# en jaksa ajatella (2.36) °hermo loppuu mulla°
Ope: £Nytte hermolomaan on kuule aikaa£ >vielä muutama viikko
ennen ku loma koittaa< kuus jaettuna ↓millä >mikä sulla on
vaihtoehto< (1.84)
Jaana: Kaks=
Ope: =Kaks. Elikkä kun tuo on tuntematon tuo kolmonen (1.31)
niin sää ratkaset tän tehtävän kuus jaettuna kahella (1.71) ja sieltä

tulee se ↓vastaus. >Nyt ku se on< ihan saman muotonen tuo (1.52)
trigonometrinen yhtälö tuolla niin (.) se ratkastaan ihan samalla
tavalla (3.87) eli? (4.07) miten ratkastaan.=
Jaana: =no tuo jaettuna tolla
Ope: tuo jaettuna tolla voit sanoo numerot he he [mikä]
Jaana: [jompi kumpi] jaettuna
Ope: jompi kumpi no kumpi on kutosen paikalla
Jaana: No kolme pilkku kaks
Ope: Joo kolme pilkku [kaks]
Jaana: [jaettuna] kahellakymmenelläneljällä
Ope: Joo jaettuna kosiini kakskytneljä on yhtä kuin äks (...) ja sit
suoritetaan tuo jakolasku siihen ihan samaan myö päästiin tuolla

Aineistoesimerkissä 11 opettaja vastaa oppilaan tietämättömyyden osoitukseen rakentamalla spontaanin esimerkin (yksinkertaistettu mallilasku) riveillä 1-20. Esimerkin spontaaniuteen viittaavat sekä aloittamista viivästävät sanat (eli: tota) että pitkähkö tauko (3.93 s). Yksinkertaisella mallilaskulla ($\frac{6}{3} = 2$) pyritään palauttamaan mieleen aiemmin opittu työskentelytapa eli yhtälön ratkaiseminen. Mallilaskussa luvut ovat helpommat kuin ratkaistavana olevassa tehtävässä. Kun mallilaskun jokin osa merkitään tuntemattomaksi, pystytään ratkaisemiseen tarvittava laskutoimitus päättelemään jäljelle jääneistä luvuista.

Opettaja pyrkii tekemään trikonometrisen funktion sisältävästä laskusta oppilaalle tutun osoittamalla sen samanlaiseksi kuin kokonaisluvuilla tapahtuva jakolasku seuraavin ilmauksin: rivillä 3 ″mies laitan tähän tämmösen näkyviin kuus jaettuna kolmella on yhtä kuin kaks″, riveillä 4–6 ″tää on nytte muodoltaan Jaana samannäkönen kuin kolme äk kolme pilkku äks kolme pilkku kaks jaettuna äksällä on yhtä kuin kosiini kakskytneljä eiks niin (.) saman nätkö:nen (.) ulkoasultaan″ ja riveillä 20–22 ″>Nyt ku se on< ihan saman muotonen tuo (1.52) trigonometrinen yhtälö tuolla niin (.) se ratkastaan ihan samalla tavalla″. Termien ″muodoltaan samannäkönen″, ″samannäkönen ulkoasultaan″, ″ihan saman muotonen″, ″ratkastaan ihan samalla tavalla″,

”ihan samaan myö päästiin tuolla kun me kerrottiin äksällä” avulla opettaja siis kiinnittää oppilaan huomion siihen, että hankalalta vaikuttava lasku ratkaistaankin itse asiassa samoin kuin tuttu jakolasku. Riveillä 22 ja 26 opettaja vielä varmistaa, että oppilas ymmärsi esimerkin: ”miten ratkastaan”, ”no kumpi on”. Varmistelu jatkuu riveillä 30–31 opettajan varmistaessa, että oppilas osaa soveltaa saamaansa yksinkertaistettua mallia työstämänsä tehtävän ratkaisemiseen: ”ja sit suoritetaan tuo jakolasku”, ”ihan samaan myö päästiin tuolla”.

Aineistoesimerkissä 12 opettaja ohjaa oppilaan työskentelyä koetilanteessa. Oppilas ei pääse eteenpäin tehtävässä. Opettaja havainnollistaa vaihtoehtoisia etenemistapoja palauttamalla oppilaan mieleen esimerkkejä erilaisista etenemistavoista. Esimerkinanto tapahtuu suuntaamalla oppilaan huomio erilaisiin mahdollisiin etenemistapoihin kysymysten avulla. Kysymysten avulla osoitetaan oppilaalle, että kyseinen etenemistapa on mahdollinen.

Aineistoesimerkki 12 (Stenvallin koulu)

1 Ope: mikä trigonometrinen funktio, (1.48) >mieti mielessäsi< (.)
2 laita (-) paikalleen (6.23) oliko sini kosini vai tangentti >minkä
3 saat tästä näin?< (0.50) no:oh saatko sä siniä ↑siitä, (2.43)
4 Nanna: no saan=
5 Ope: =no sit sie voit ottaa vaikka sinin, (1.14) saat sie kosinin siitä?
6 Nanna: saan
7 Ope: okei sie voit ottaa kosininkin (0.72) saatko sie tangentinkin
8 siitä?
9 Nanna: saan
10 Ope: noni sitten vaan jonkun valitset niistä (3.97) elikkä tuo tuon
11 osaat tehä siinä ei oo mittään >ainakin puolet pisteistä saat< siitä
12 sitten (8.12) joo ihan oike:in oot lähteny tuota tekemään,
13 Nanna: °mie en ymmärrä°
14 Ope: jaksa ny kirjottaa ainakin ↓tota ainakin trigonometrinen
15 funktio siihen et miten se laskettais.

16 Nanna: °no en minä tiiä°,
17 Ope: no sie oot sen sinne piirtäny ihan oike:in (2.42) sitten mietit
18 että mitä kohtaa kysytä:än (1.37) mitenkä rupeisit ratkasemaan sitä
19 kyl sie osaat tuon ei siinä oo mitään ongelmia ollenkaan oot
20 laskenu näitä monta. (4.45) ↓tuo ja tuo >niitä kokeilet<.

Aineistoesimerkissä 12 esimerkin pohjana toimii koetehtävä ja koska kyseessä on koe, opettaja ei voi antaa ratkaisuesimerkkiä. Siispä opettaja auttaa oppilasta etenemään tehtävässä antamalla kysymysten avulla esimerkkejä siitä, että on olemassa useita erilaisia tapoja ratkaista käsillä oleva ongelma: rivillä 3 ”no:oh saatko sä siniä ↑siitä”, rivillä 5 ”saat sie kosinin siitä” ja rivillä 7 ”saatko sie tangentinkin”. Erilaisia vaihtoehtoja tarjotessaan hän samalla toteaa tarjoamiensa vaihtoehtoisten etenemistapojen olevan oppilaalle entuudestaan tuttuja, rivillä 5: ”no sit sie voit ottaa vaikka sinin” ja rivillä 7: ”sie voit ottaa kosininkin”, ja lopuksi rohkaisee oppilasta toteamalla tämän voivan edetä tehtävässä näitä tuttuja laskutapoja käyttäen (rivi 10: ”sitten vaan jonkun valitset niistä”). Oppilas tunnistaa ja hyväksyy erilaiset ratkaisutavat (”saan” lausumat riveillä 4, 6 ja 9), ja opettaja kannustaa häntä valitsemaan jonkin esiin tuomistaan ratkaisutavoista. Oppilas ei kuitenkaan osaa soveltaa tietoaan trigonometrisista funktioista, eikä siten osaa valita tarjotuista vaihtoehdoista yhtä etenemistapaa, vaan toistelee tietämättömyyttään: rivillä 13 ”mie en ymmärrä” ja rivillä 16 ”no en minä tiiä”. Opettaja rohkaisee oppilasta jatkamaan ”sie oot sen sinne piirtäny ihan oike:in” ja kannustaa valitsemaan jonkin esimerkkeinä vihjaamistaan ratkaisutavoista ”sitten mietit että mitä kohtaa kysytä:än (1.37) mitenkä rupeisit ratkasemaan sitä kyl sie osaat”. Opettaja vielä toteaa riveillä 19–20 laskun olevan oppilaalle entuudestaan tutun ”oot laskenu näitä monta” ja siten tehtävän olevan oppilaan ratkaistavissa.

5.2.4 Matemaattisen käsitteen yhdistäminen oppilaan arkikokemuksiin

Esimerkkejä antamalla voidaan myös yhdistää matemaattisia käsitteitä oppilaitten arkikokemuksiin (aineistoesimerkki 13) ja elävöittää opetusta. Harjoituspainotteisen havainnollistamisen elävöittäminen voi tapahtua esimerkiksi pelillisesti, kuten aineistoesimerkissä 14 harjoittamalla yhteenlaskua bingoa pelaamalla. Seitsemässä esimerkissä tavoitteena oli opetuksen elävöittäminen sekä matematiikan tuominen lähelle oppilaan arkikokemuksia.

Aineistoesimerkki 13 (Stenvallin koulu)

((Opettaja näyttää oppilaille muovista kuutiota))

Ope: minkä niminen muuten tämä hh £särmiö on (6.8) £ sitä ei oo tuolla taululla mutta varmaan te tiiätte se on neliöpohjanen sen ne kaikki sivut yhtä pitkiä,=

Assi: =°onks se kuutio°,=

Ope: =kuutio kyllä eli arpakuutiosta tiiätte tää on nyt kuutio,

Aineistoesimerkissä 13 opetellaan nimeämään geometrisia kappaleita. Mallikappaleena on särmiön erikoistapaus eli kuutio. Esimerkinanto alkaa opettaja esitellessä muovista mallikappaletta ja pyytäessä oppilaita nimeämään sen ”minkä niminen muuten tämä hh £särmiö on”. Siitä, että opettaja esittää termin ”särmiö” hymyillen, voi päätellä hänen olettavan oppilaiden tunnistavan kappaleen kuutioksi, mutta ei välttämättä mieltävän sitä särmiöksi. Oppilas tunnistaakin rivillä 5 kappaleen kuutioksi, mutta on epävarma vastauksestaan. Epävarmuus näkyy vastauksen muotoilemisena kysymykseksi ”onks se kuutio”. Opettaja hyväksyy rivillä 6 oppilaan vastauksen toistamalla sen välittömästi sekä vahvistamalla vastauksen oikeellisuuden myönteisellä ”kyllä” ilmauksella. Opettaja rakentaa esimerkin kytkemällä matemaattisen termin ”kuutio” oppilaiden arkikokemuksiin viitatessaan arpakuutioon ja siinä esiintyvään muotoon (rivi 6). Samalla hän tarjoaa muistiinpalautusvihjeen oppilaille ”arpakuutiosta tiiätte tää on nyt kuutio”.

Aineistoesimerkissä 14 harjaannutetaan oppilaiden vähennyslaskutaitoja pelillisesti. Laskurutiinin kehittyminen vaatii useita esimerkkejä harjaannutettavasta laskutoimituksesta. Pelin avulla toistojen määrää on mahdollista kasvattaa oppilaille mielekkäällä tavalla. Ennen esimerkkilaskujen antamista opettaja on ohjeistanut oppilaat tekemään itselleen 4x4 bingoruudukon ja selostanut pelin kulun.

Aineistoesimerkki 14 (Metsäpellon koulu)

EO: ensimmäinen lasku nyt jos sinulta löytyy tämän laskun vastaus
sieltä punaisesta ruudukosta lai:ta siihen ruudun päälle **r**asti (1.3)
((näyttää samalla sormella miten rasti tehdään))
AV: aaha
EO: näin ((piirtää rastin taululle)) ja nyt lähetään metsästämään
bingoja. OLETKO valmis
oppilaat yhdessä: ole:n
EO: ensimmäinen lasku (1.1) viisitoista miinus kolme (.) °minä kir
joitan [sen tänne°
Johannes:[viisitoista] miinus kolme sehän on helppo se on
kaksdonaa

Aineistoesimerkin 14 alussa (rivi 3) opettaja konkretisoi oppilaille sormella näyttämällä, miten tehdään rasti ruutuun, josta löytyy haluttu luku. Riviltä 8 alkavat esimerkit vähennyslaskusta, joiden pelillinen antotapa ”nyt lähetään metsästämään bingoja” elävöittää matematiikan oppituntia ja tuo siihen toiminnallisuutta. Oppilaat vastaavat mielessään laskutoimitusta havainnollistaviin esimerkkeihin (laskutehtäviin) ja etsivät samaa vastausta myös omista bingoruudukoistaan. Yllä olevaan aineistoesimerkkiin on poimittu opettajan esittämistä laskutehtävistä vain ensimmäinen.

6 POHDINTA

6.1 Tulosten tarkastelua

6.1.1 Esimerkin rakentaminen yhdessä oppilaiden kanssa

Tämän tutkimuksen fokuksessa olivat institutionaalisessa kontekstissa eli matematiikan osa-aikaisen erityisopetuksen oppitunneilla annetut esimerkit. Aineistosta nousi esiin, että opettaja rakensi esimerkkejä usein yhdessä oppilaan kanssa osallistaen heitä kysymyksiä tekemällä. Opettajan kysymykset toimivat oppilaita osallistumaan kutsuvina aloitteina. Luokkahuonekeskustelulle onkin tyypillistä, että oppilaat ovat orientoituneet tilanteeseen, jossa opettaja asettaa kysymyksiä ja he vastaavat niihin (Hakulinen 1997, 33). Opettaja kiinnittää kysymyksillään oppilaan huomiota tärkeiksi katsomiinsa seikkoihin ja samalla osoittaa omaa suhdettaan ja pääsyään esimerkinannon kohteeseen. Opettajalla on tiedossaan oikea vastaus. Tällaista rakennetta käytetään paljon luokkahuonevuorovaikutuksessa (ks. Raevaara 1997, 92).

Opettaja pyrki esimerkinannon yhteydessä aktiivisesti selvittämään, mitä oppilas jo tietää. Hän muutti esimerkkien avulla käsitteet sarjaksi menettelytapoja, johon oppilaat voivat ottaa osaa. Oppilaiden vastausten sisältö ja järjestyminen paljastavat heidän tietämyksensä käsiteltävästä asiasta auttaen opettajaa ymmärtämään miten oppilaat ovat ymmärtäneet käsitteiden merkityksiä (ks. myös Lee 2004). Oppilaiden tietojen ja ymmärtämisen selvittämisen myötä opettaja saattoi esimerkinannollaan vastata heidän todelliseen tiedontarpeeseensa.

Tässä tutkimuksessa havaittiin, että työstäessään esimerkkiä vuorovaikutuksessa oppilaiden kanssa opettajat edellyttivät oppilailta tietämisen osoittamisen (ks. Koole 2010) sisältäviä vasteita. Eli oppilaille suunnattujen kysymysten avulla rakennetut esimerkit päättyivät vasta oppilaan tietämisen osoitukseen ja sitä seuraavaan opettajan hyväksyvään palautteeseen. Joidenkin esimerkinantojen yhteydessä opettaja pyrki lisäksi varmistamaan, että oppilaat olivat ymmärtäneet käsiteltävän asian. Tämä tapahtui kysymällä esimerkissä käsiteltyä asiaa hieman eri tavoin muotoillulla kysymyksellä. Näin ollen opettaja edellytti oppilailta tietämisen osoittamisen toistamista. Oppilaiden tietämisen tai ymmärtämisen varmistaminen ei ole itsestään selvää, sillä esimerkiksi Ylönen työryhmineen (2014) on raportoinut opettajien suosivan oppilaiden muodollisia ymmärtämisen vahvistamisia vaatimatta heiltä ymmärtämisen osoittamista tai näyttämistä.

Rakentaessaan esimerkkiä kysymys–vastaus–rakennetta hyödyntäen opettaja ohjasi vuorovaikutusta haluamaansa suuntaan. Vuorovaikutuksen ohjailu tapahtui valikoimalla kysymyksiä, uudelleen muotoilemalla niitä, rajoittamalla oppilaan vastausvaihtoehtoja sekä suuntaamalla oppilaiden huomiota relevantteihin seikkoihin esimerkissä. Vuorovaikutuksen säätely kysymyksiä uudelleen muotoilemalla tapahtui vihjaamalla oikeasta vastauksesta polaarisilla kyllä/ei -kysymyksillä, sisällöllisillä kysymyksillä tai vastausvaihtoehdot sisältävillä kysymyksillä (ks. myös Koole & Elbers 2014). Huolella valitsemillaan kysymyksillä opettaja johdatti oppilaan tuottamaan oikean vastauksen (Koole & Elbers 2014) ja siten sai hänet täydentämään rakenteilla olevan esimerkin.

Esimerkin rakentaminen kysymysten välityksellä saattaa olla erityisen käyttökelpoinen etenemistapa erityisopetusympäristöissä, joissa oppilasmäärä on usein pieni. Oppilaiden osallistaminen esimerkinantoon tekee esimerkistä heille omakohtaisen ja samalla suuntaa heidän tarkkaavaisuuttaan meneillään olevaan toimintaan. Myös mahdollisesta virheen tekemisestä johtuva kasvojen menettämisen pelko saattaa olla pienessä ryhmässä pienempi tehden siten osallistumisen mahdolliseksi. Toisaalta esimerkinannon ja keskustelun eteneminen kysymyksin sitoo oppilaat opettajajohtoiseen vuorovaikutukseen. Tällä on vaikutusta erityisesti oppilaiden puheenvuoroihin, sillä institutionaalisessa vuorovaikutuksessa vuorottelun sitominen kysymysten esittämiseen ja niihin vastaamiseen rajoittaa vastaajan eli oppilaan puheenvuorot kysymyksiin vastaamiseen (ks. Heritage 2005, 116).

6.1.2 Esimerkkiin siirtyminen ja sen päättäminen

Esimerkin anto käynnistyi useimmiten opettajan aloitteesta ja esimerkit rakennettiin opettajan määrittelemin ehdoin. Aineistossa oli vain vähän esimerkkejä, jotka olisivat lähteneet liikkeelle oppilaan aloitteesta (kysymyksestä, epätietoisuuden ilmauksesta tms.). Tämä oli vastoin tutkijan alkuperäistä oletusta siitä, että esimerkkejä annetaan erityisesti vasteena oppilaan tietämättömyyden osoituksiin. Vaikka muutamia esimerkkejä rakennettiin vasteena oppilaan tietämättömyyden osoitukseen, ei ennen esimerkin antoa pyritty muodostamaan yhteistä näkemystä siitä, missä oppilaalla on tiedollinen aukko (ks. Koole & Elbers 2014). Toisaalta, koska useimmiten opettaja osallisti oppilaat esimerkin antoon tekemällä heille kysymyksiä, paljastuivat tiedolliset aukot kysymyksiin vastaamisen yhteydessä.

Opettaja päätyi esimerkin antamiseen reagoidessaan oppilaiden tekemiin virheisiin. Tällöin opettaja lähti esimerkin avulla korjaamaan oppilaan suoritusta. Korjauksen yhteydessä opettaja kiinnitti oppilaan huomion suorituksen virheelliseen osaan ja ohjasi kysymystensä avulla oppilaan kysymyksin löytämään oikean ratkaisun. Kokeneiden opettajien on mahdollista myös ennakoida oppilaiden usein tekemiä virheitä ja ehkäistä niiden tekemistä hyvin rakennettujen ennalta suunniteltujen esimerkkien avulla. Esimerkiksi Swanson ja Williams (2014) ovat havainneet opettajien hyödyntävän oppilaiden toistuvasti tekemiä virheitä suunnitellessaan oppitunnilla esitettäviksi aikomiaan esimerkkejä. Tässä tutkimuksessa ei ollut mahdolista arvioida sitä, miten opettajat huomioivat rakentamissaan esimerkeissä oppilaiden usein tekemät virheet.

Osa opettajan aloittamista esimerkeistä alkoi viittaamalla oppilaalla jo olemassa oleviin tietoihin. Näin hän auttoi oppilasta yhdistämään yksittäisiä tehtäviä ja esimerkkejä kokonaisuuksiksi. Tällöin esimerkki sekä ohjasi oppilaan työskentelyä että ehkäisi tiedon sirpaloitumista. Siten esimerkkien annolla voidaan edistää myös oppiaineksen yhtenäisyyden, käsitteiden syvällinen ymmärtäminen ja opetuksen eheyttämisen tavoitteita (ks. Stevenson 2008; Opetushallitus 2015).

Esimerkkien anto päättyi usein opettajan hyväksyvään palautteeseen. Näin oli etenkin yhdessä oppilaiden kanssa työstettyjen esimerkkien ollessa kyseessä. Mikäli oppilaat eivät vastanneet opettajan kysymyksiin hänen odotustensa mukaisesti, jatkoi opettaja esimerkin työstämistä. Tämä on yhdenmukaista yleisen opetussyklin rakenteen kanssa. Sykli päättyy opettajan hyväksyvään palautteeseen tai jatkuu siihen asti, että haettu vastaus löytyy (ks. Kääntä 2011, 129). Samanmielisyys onkin tärkeä vuorovaikutuksen kulkua ohjaava yleinen periaate (Sacks 1987 Tainion 1997, 110 mukaan). Toivottavia, esimerkinannon päättämiseen johtavia vasteita olivat oppilaan tietämisen tai ymmärtämisen väittämät, tietämisen osoittaminen sekä oivaltamisen ilmaisut (ks. myös Koole & Elbers 2014). Tällaiset vasteet viestivät esimerkin onnistuneisuudesta. Tässä aineistossa opettaja useimmiten edellytti oppilailta tietämisen osoittamista ennen esimerkinannon päättämistä. Oivalluksesta viestiviä esimerkinannon päättämiseen johtaneita oppilaan vasteita esiintyi vain muutamien esimerkkien yhteydessä. Tässä aineistossa opettaja ei edellyttänyt oppilailta ymmärtämisen väittämistä esimerkinannon päätteeksi. Ymmärtämisen väittämä ei olekaan kovin luotettava viesti oppilaan todellisesta ymmärtämisen tasosta (Koole 2010; Koole 2012), vaikka sitä käytetään usein siltana oppitunnin seuraavaan vaiheeseen siirtymiselle. (Ylönen ym. 2014).

Osa esimerkeistä päättyi ilman erityistä päättämistä. Oppilailta ei edellytetty mitään reaktiota eikä heidän ymmärtämistään tai tietämistään pyritty esimerkinannon jälkeen varmistamaan. Usein ilman erityistä päättämistä päättyneiden esimerkkien tehtävä oli tuoda matemaattisia käsitteitä lähelle oppilaan arkikokemuksia tai elävöittää opetusta. Esimerkin palvelema tehtävä ei siten edellyttänyt oppilaan ymmärtämisen varmistamista eikä erityinen esimerkin päättäminen ollut tarpeen. Tässä tutkimuksessa esimerkit rakennettiin aina loppuun asti. Esimerkkien rakentamisen yhteydessä ei esiintynyt esimerkin rakentamista häiritseviä tapahtumia eivätkä oppilaat viestineet ymmärtämisestään kesken esimerkinannon. Kesken esimerkinannon esitetty ymmärtämisen väittämä saattaisi johtaa opettajan tulkitsemaan vuorovaikutussekvenssin tulokselliseksi ja olla näin syy päättää esimerkinanto kesken selityksen (ks. myös Koole ja Elbers 2014).

6.1.3 Opettajan rakentamien esimerkkien tehtävät

Esimerkeillä oli matematiikan opetuksessa erilaisia käyttötarkoituksia. Tässä aineistossa esimerkit luokiteltiin neljään ryhmään esimerkin pääasiallisen tarkoituksen perusteella: yleisen säännön rakentaminen yksittäisestä tilanteesta, matemaattisen määritelmän tai käsitteen konkretisointi, opittavan asian rinnastaminen tuttuun asiaan sekä matemaattisen käsitteen yhdistäminen oppilaan arkikokemuksiin.

Opettajan rakentama matemaattinen esimerkki oli usein hyvin konkreettinen. Opettajat käyttivät konkreettisia esimerkkejä sekä suunnatessaan oppilaiden huomiota yksittäisiin tilanteisiin ja rakentaessaan niiden avulla yleisiä sääntöjä että havainnollistaessaan yleistä sääntöä tai käsitettä yksittäisen tilanteen avulla. Opettajat esimerkiksi havainnollistivat geometristen kappaleitten matemaattisia määritelmiä muovisten mallikappaleiden avulla ja antoivat esimerkkejä laskutoimituksia konkreettisin apuvälinein. Esimerkeissä oppilaiden huomio suunnattiin konkreettisten kappaleiden avulla tutkittavana olevan ilmiön oleellisiin piirteisiin. Yksi esimerkkien keskeisistä tehtävistä onkin konkretisoida abstraktia tietoa (Rowland 2008).

Opettaja teki esimerkkien avulla laskutehtävistä oppilaille entuudestaan tuttuja esimerkiksi rakentaessaan esimerkkejä kysymysten välityksellä. Sopivasti valitsemillaan kysymyksillä hän kiinnitti oppilaiden huomion käsillä olevan esimerkkitehtävän ja aiemmin tehtyjen tehtävien samankaltaisuuteen. Opettaja myös edellytti oppilailta tietämisen osoittamisen sisältäviä vastauksia esittäessään heille esimerkkiä eteenpäin vieviä kysymyksiä. Jos oppilaiden vastaus viipyi tai se ei ollut odotetunlainen, helpotti opettaja vastaamista esimerkiksi rajoittamalla vastausvaihtoehtoja tai antamalla lisävihjeitä. Toinen tapa rinnastaa opittavia asioita oppilaille tuttuihin asioihin oli upottaa esimerkkeihin työskentelyä ohjaavia yksinkertaistettuja malleja. Näillä keinoilla opettaja pakotti oppilaat tunnistamaan jotain, jonka he jo tiesivät (ks. myös Lee 2004).

Esimerkkejä käytettiin myös elävöittämään opetusta ja asioita opetettiin pelien ja näytelmien välityksellä. Oppilaat saatiin esimerkiksi harjaannuttamaan yhteenlaskutaitojaan ja tekemään opittavien menettelytapojen mielessä pitämistä ja laskurutiinin kehittymistä edesauttavia toistoja (ks. myös Rowland 2008) pelien avulla. Pelaamisen yhteydessä oppilaitten ratkaistavaksi annettiin pitkä sarja laskuesimerkkejä. Tällainen satunnaiselta näyttävä sarja saattaa olla hyvin huolellisesti valittu (Rowland 2008), ja siten tehtävällä voidaan harjoittaa hyvinkin spesifejä taitoja. Sarjana annetuilla laskuesimerkeillä tuettiin laskurutiinin kehittymistä ja laskutoimitusten mieleen painamista.

Tässä tutkimuksessa peleihin upotettujen laskuesimerkkien avulla tehtiin rutiiniharjoittelua oppilaille mielekkäämmäksi. Rutiininomaisilla, laskutaitoa kartuttavilla esimerkeillä on myös toinen tärkeä tehtävä. Ne tarjoavat oppilaille onnistumisen kokemuksia ennen siirtymistä haastavampiin tehtäviin (Rowland 2008). Lisäksi useiden esimerkkien käytön myötä oppilaalla on mahdollisuus vertailla eri esimerkkejä. Opettaja myös kannusti oppilaita vertailemaan esimerkkejä ja suoritettavana olevia laskutehtäviä. Esimerkkien vertailun tiedetään tukevan oppimista ja opitun siirtämistä uusiin tilanteisiin (Guo ym. 2013). Koulumatematiikkaa pyritään yleisemminkin elävöittämään käsittelemällä arkipäivän tilanteita ja lisäämällä opetustilanteisiin toiminnallisuutta ja pelejä (Hassinen 2004). Esimerkit ovat tärkeä tapa tuoda opetukseen oppilaiden kaipaamaa elävyyttä (Hassinen 2008) ja käytännönläheisyyttä (Honkiniemi & Manninen 2004).

Tehokas matematiikan opetus edellyttää riittävien toistojen ohella monipuolisten esimerkkien tarjoamista. Tässä tutkimuksessa havaittiin opettajan sekä rakentavan useita erilaisia tehtäviä palvelevia esimerkkejä että vaikeustasoltaan vaihtelevia esimerkkejä. Opettaja rakensi esimerkit vastaamaan oppilaiden osaamistasoa. Tämä näkyi esimerkiksi kysymysten välityksellä yhdessä oppilaiden kanssa rakennettujen esimerkkien kohdalla siten, että opettaja tarvittaessa helpotti esimerkin rakentumista eteenpäin vieviä kysymyksiä. Sweller (1988 van Gogin & Rummelin 2010 mukaan) on todennut, että pääosin tavanomaisten ongelmien ratkaisemisesta koostuva ohjaus saa taidoiltaan heikot oppilaat turvautumaan työmuistia kuormittaviin heikkoihin ongelmanratkaisustrategioihin, jotka eivät auta luomaan ongelman ratkaisusta kognitiivista skeemaa, eivätkä siten ole oppimisen kannalta tehokkaita. Toisin sanoen osa-aikaisen erityisopetuksen matematiikan tunneilla on tärkeää rakentaa monipuolisia ja vaikeusasteeltaan erilaisia esimerkkejä. Näin tämän tutkimuksen aineiston perusteella tapahtuukin.

6.1.4 Oppilaiden ohjaaminen esimerkkien avulla

Ohjatessaan esimerkeillä oppilaiden työskentelyä opettaja rakensi sekä työskentelyä ohjaavia että mallintavia esimerkkejä. Työskentelyä ohjaavissa esimerkeissä, työstettiinpä niitä opettajajohtoisesti tai yhdessä oppilaiden kanssa, annettiin oppilaan käyttöön kaikki välivaiheet sisältävä ongelmanratkaisumalli (ks. myös Reed ym. 1994). Myös työskentelyä ohjaavissa esimerkeissä käytettiin apuna konkreettisia havaintovälineitä kuten 10-järjestelmävälinettä. Erityisesti kokemattomien oppijoiden matematiikan oppimista hyödyttää enemmän työskentelyä ohjaaviin esimerkkeihin nojautuva opetus ja ohjaus (Atkinson ym. 2000; van Loon-Hillen, van Gog & Brand-Gruwel 2012) kuin ongelmanratkaisua edellyttävät tehtävät (van Loon-Hillen, van Gog & Brand-Gruwel 2012). Työskentelyä ohjaavat esimerkit ehkäisevät heikkojen ongelmanratkaisustrategioiden käyttöä (Sweller 1988 van Gogin & Rummelin 2010 mukaan) ja vähentävät kognitiivista kuormitusta (Kay & Edwards 2012; Paas ym. 2003). Tässä tutkimuksessa havaittiin opettajan vähentävän oppilaiden kognitiivista kuormitusta sekä rakentamalla työskentelyä ohjaavia esimerkkejä että kokonaisuuksien muodostamista tukevia esimerkkejä. Kun esimerkit ovat hyvin suunniteltuja, niihin tukeutuva ohjaus tehokasta ja tuloksellista (van Loon-Hillen ym. 2012).

Mallintavia esimerkkejä rakennettiin ohjattaessa oppilaita löytämään erilaisia tapoja edetä tehtävässä eli havainnollistettaessa erilaisten ratkaisuvaihtoehtojen olemassaoloa. Tässä tutkimuksessa havaittiin opettajan rakentavan ratkaisuvaihtoehtoja havainnollistavia esimerkkejä usein oppilaan ratkaistavana olevan matematiikan kirjan (tai kokeen) tehtävän pohjalta. Esimerkkiä antaessaan opettaja kiinnitti oppilaan huomion tehtävän ratkaisemisen kannalta oleellisten tietojen poimimiseen ja niiden yhdistelyyn. Mallintavassa esimerkissä oppilailla on mahdollisuus tarkkailla tehtävää suorittavaa aikuista ja oppia häneltä (van Gog & Rummel 2010). Todettakoon vielä, ettei pelkkää ratkaisuvaiheiden ohjaamista eli tilanteita, joissa opettaja neuvoi miten kirjassa oleva lasku vaiheittain lasketaan, ole tässä tutkimuksessa katsottu opettajan rakentamiksi esimerkeiksi.

Rakentaessaan oppilaiden työskentelyä ohjaavia esimerkkejä opettaja toimi Zodikin ja Zaslavskyn (2008) esittämien esimerkkien valinnan ja luomisen taustalla vaikuttavien periaatteiden mukaisesti. Ensinnäkin esimerkkien rakentaminen aloitettiin oppilaille tutusta tapauksesta edeten monimutkaisempiin tapauksiin. Toiseksi esimerkkien kautta oppilaiden huomio kiinnitettiin opetettavan ilmiön relevantteihin piirteisiin ja laskutehtäviä mallinnettiin valiten esimerkkeihin ”sattumanvaraisia” helppoymmärteisiä lukuja. Kolmanneksi erityisopettaja sisällytti esimerkkeihin myös erikoistapauksia. Erikoistapausten tai harvinaisempien tapausten sisällyttäminen mukaan opetukseen tapahtui esimerkiksi yhdistämällä uusia käsitteitä oppilaille arjesta tuttuihin esineisiin. Tästä esimerkkinä särmiön erikoistapaus kuutio, joka on oppilaille entuudestaan tuttu arpakuutiosta. Neljänneksi opettaja ei ottanut mukaan tarpeettomia yksityiskohtia pitäen näin oppilaitten työmäärän mahdollisimman pienenä. Edellä luetellut ovat Zodikin ja Zaslavskyn (2008) mukaan tehokkaalle esimerkille tyypillisiä piirteitä.

6.1.5 Konkreettiset havaintovälineet

Tässä tutkimuksessa havaittiin erityisopettajan hyödyntävän paljon visuaalisia esityksiä ja konkreettisia havaintovälineitä rakentaessaan esimerkkejä osa-aikaisen erityisopetuksen matematiikan tunneilla. Havaintovälineitä hyödynnettiin kaikkia neljää eri tarkoitusta palvelemaan rakennettuja esimerkkejä työstettäessä. Rakennettaessa esimerkin avulla yksittäisestä tilanteesta yleistä sääntöä oppilaiden huomio kiinnitettiin konkreettisten mallikappaleiden avulla esimerkiksi geometrisen kappaleen oleellisiin piirteisiin tai laskutoimituksen vaihdannaisuuteen. Konkreettisia kappaleita käytettiin myös matemaattisia määritelmiä tai käsitteitä, kuten kymmenjärjestelmää, konkretisoitaessa. Usein konkreettisten havaintovälineitten avulla tuettiin sanallista määritelmien ja käsitteiden selittämistä. Matematiikan oppimisen ohjaamisessa suositeltavia strategioita ovatkin konkreettisten käsittelyjen tekeminen ja visuaalisten esitysten käyttäminen, sillä ne edesauttavat oppilaiden käsitteiden ymmärtämistä (Strickland & Maccini 2010).

Konkreettisia havaintovälineitä käytettiin myös opetuksen elävöittämiseen ja matemaattisten käsitteiden liittämiseen oppilaiden arkikokemuksiin. Mallikappaleiden avulla palautettiin oppilaiden mieliin esineitä ja asioita, joihin käsiteltävä asia kytkeytyy. Sen sijaan opettajan palautettaessa jo opittuja asioita oppilaiden mieleen, hänen rakentamansa esimerkit olivat lähellä oppilaan ohjaamista, eikä konkreettisia havaintovälineitä yleensä käytetty. Oppilaan työskentelyä ohjaavat esimerkit eroavat muista esimerkeistä myös siten, että ne rakennettiin spontaanimmin kuin muihin tässä tutkimuksessa havaittuihin tarkoituksiin annetut esimerkit.

6.1.6 Suunnitellut vs. spontaanit esimerkit

Tässä aineistossa esiintyi vain vähän spontaanisti annettuja esimerkkejä. Tämä on ristiriidassa Zodik ja Zaslavsky (2008) havaintojen kanssa, joiden mukaan yli puolet yläkoulun matematiikan opetuksessa annetuista esimerkeistä oli etukäteen suunniteltuja ja vähän alle puolet spontaanisti annettuja esimerkkejä. Spontaaniksi esimerkiksi voi luokitella esimerkin, jonka valinta ainakin jossain määrin riippuu käsillä olevassa tilanteessa tehdystä päätöksestä (Zodik & Zaslavsky 2008). Spontaanien esimerkkien vähäinen määrä saattaa johtua oppilaiden passiivisuudesta. Oppilaat eivät tunneilla juurikaan esittäneet oppisisältöön liittyviä kysymyksiä tai virheellisiä väittämiä, joten spontaaneille esimerkeille ei ollut tarvetta.

Spontaanisti annetuilta esimerkeiltä vaikuttivat etenkin esimerkit, joissa opettaja helpotti tehtävien ratkaisemista upottamalla esimerkkeihin yksinkertaistettuja malleja. Toisaalta tämän tutkimuksen aineisto antaa hieman kapean mahdollisuuden arvioida annettujen esimerkkien suunnitelmallisuutta. Käytettävissä ei ollut tuntisuunnitelmia, oppilaille suunniteltuja tehtäväpapereita, tunneilla käytettyjä oppikirjoja eikä mahdollisuutta haastatella opettajia oppituntien jälkeen. Annettujen esimerkkien suunnitelmallisuutta oli mahdollista arvioida vain videonauhoitetuilla oppitunneilla esiintyvän opettajan ruumiinkielen, epäröinnin ja lausumien perusteella.

6.2 Luotettavuus ja eettiset ratkaisut

Tässä tutkimuksessa selvitettiin, miten esimerkkejä rakennettiin ja millaisia tehtäviä ne palvelivat ala- ja yläkoulun osa-aikaisen erityisopetuksen matematiikan tunneilla. Tutkimuksen kohde ei ole neutraali. Vaikka oppitunneilla ei käsitelty arkaluonteisia asioita, saattaa osa-aikaisessa erityisopetuksessa opiskelu itsessään olla oppilaalle arka asia. Edelleen oppituntia pitävä opettaja saattaa pitää tutkimusaineiston keruuta oman työnsä tarkkailuna ja tuntea olevansa arvostelun kohteena. Kielteisiä tuntemuksia pyrittiin ehkäisemään tiedottamalla tutkimuksesta etukäteen.

Laadullisen tiedon luotettavuuden arvioinnissa tutkimusta on arvioitava kokonaisuutena. Luotettavuuteen vaikuttaviin tekijöihin kuuluvat tutkimuksen kohde ja tarkoitus, tutkimuksen tutkijan omat sitoumukset kyseisessä tutkimuksessa, aineiston keruu, tutkimuksen tiedonantajat, tutkija-tiedonantaja suhde, tutkimuksen kesto, aineiston analyysi ja eettinen kestävyys. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 140–141.) Tämän tutkimuksen tekijän tavoitteena on valmistua erityisopettajaksi ja hankkia lisäksi peruskoulun matematiikan aineenopettajan pätevyys. Siten tutkimuksen aihe oli tutkijalle jo henkilökohtaisestikin mielenkiintoinen ja tärkeä. Tulevana opettajana koen tärkeäksi sen, että opetus vastaa mahdollisimman tehokkaasti oppilaiden tuen tarpeisiin. Tutkijana tarkastelin aineistoani enemmän opettajan kuin oppilaan näkökulmasta. Tämä voi vaikuttaa tekemiini tulkintoihin, mutta toisaalta myös tutkimusaiheeni painottuu opettajan toimintaan. Aineistoa analysoidessani olen pyrkinyt ottamaan etäisyyttä tulevaan opettajan rooliini ja tarkastelemaan aineistoesimerkkejä vain vuorovaikutustilanteina.

Tutkijan oma näkemys on aina mukana laadullisen tutkimuksen teossa ja analysoinnissa. Siten tutkimuksen tulkinta ei ole täysin objektiivista. Kuitenkin olen pyrkinyt analysoimaan tulokset mahdollisimman puolueettomasti ja systemaattisesti jättämättä mitään analysoitavaa pois. Päädyin tutkimukseni tuloksiin purkamalla aineistossa havaitsemani esimerkit auki ja sijoittamalla ne laajempaan yhteyteen käyttäen relevanttia ja ajantasaista kirjallisuutta. Tulkinnat ja johtopäätökset olen tehnyt aineistoon tukeutuen. Olen myös tarkentanut analyysiä tekemällä yksityiskohtaista kielellisten piirteiden analyysiä, jolla sidoin tulkinnat aineistoon. Hyvistä pyrkimyksistä huolimatta tutkijan kokemattomuus saattoi näkyä sekä tulosten käsittelyssä että tulkinnassa.

Laadullisen tutkimuksen validiutta voidaan parantaa neljän eri triangulaation kautta. Näitä ovat metodologinen-, tutkija-, teoreettinen- ja aineistotriangulaatio. Tutkijatriangulaatiossa samaa aineistoa analysoi useampi kuin yksi tutkija. (Hirsjärvi ym. 2004, 218.) Tässä tutkimuksessa toteutin tutkijatriangulaatiota luettamalla aineistoesimerkkejä ja niistä auki kirjoittamiani tuloksia vertaisilla eli toisilla graduopiskelijoilla. Vertaispalautteen jälkeen kävin aineistoesimerkit uudelleen läpi sekä tarkistin ja varmistin tekemäni päätelmät. Tutkimusraportissa esitän otteita alkuperäisistä oppitunneista, joiden perusteella myös lukija voi arvioida aineistoa ja verrata tulkintojani omiinsa. Lisäksi keskustelunanalyysi menetelmänä vähentää tutkijan vaikutusta tuloksiin, sillä analyysiä ei pohjata tutkijan tulkintoihin puhujien aikomuksista (Tainio 2007, 25).

Katsoessani oppituntien videointeja ja lukiessani niistä kirjoitettuja litteraatteja pyrin tarkkuuteen ja huolellisuuteen. Katsoin oppituntien videoinnit useaan kertaan ja luin niistä kirjoitetut litteraatit tarkasti ja huolellisesti. Tarkensin raakalitteraateista ja videotallenteista löytämiäni esimerkin rakentamisen sisältäviä jaksoja vastaamaan keskustelunanalyysin vaatimuksia. Oppituntien nauhoituksissa ei ilmennyt häiriöääniä, jotka olisivat voineet vaikuttaa tulkintoihin haastateltavien sanoista. Joissakin tapauksissa yksittäisistä oppilaiden sanomista oli vaikea saada selvää. Merkitsin epäselvien sanojen tai lyhyiden lausumien tilalle litteraatteihin viivan. Opettajan rakentamien esimerkkien kannalta näillä yksittäisillä sanoilla oli hyvin vähäinen merkitys. Huolellisuudesta huolimatta on mahdollista, etteivät kaikki aineistossa esiintyneet esimerkit ole tulleet poimituiksi analyysiin mukaan. Toisaalta erään käsityksen mukaan esimerkki voidaan katsoa esimerkiksi vain, jos vastaanottaja ymmärtää sen esimerkiksi (Goldenberg & Mason 2008; Zodik & Zaslavsky 2008). Siten oletan, että jos en esimerkinantoon kohdistuvan tutkimuksen tekijänä ole nauhoituksista jotakin esimerkkiä tunnistanut esimerkiksi, luultavasti ei myöskään oppilas, jolle esimerkki on annettu, ole sitä esimerkiksi mieltänyt.

Tutkimus oli eettisesti kestävä. Tässä tutkimuksessa käytettiin etukäteen kerättyä aineistoa. Siten en itse ole osallistunut aineiston keruuseen. Ennen opinnäytetyöni kirjoittamista olen saanut luotettavan tiedon aineiston hankinnassa käytetyistä menetelmistä ja tutkittavien kohtelusta. Alaikäisten tiedonantajien vanhemmilta pyydettiin kirjallinen suostumus oppituntien kuvaamiseen. Osa-aikaista erityisopetusta antavilta opettajilta kysyttiin sekä suullinen että kirjallinen lupa tutkimuksen toteuttamiseen. Oppilaille, huoltajille ja opettajille kerrottiin tutkimuksesta, sen luonteesta, ja siihen mahdollisesti sisältyvistä vaaroista ja sitoumuksista. Tutkittavia ei saa altistaa riskeille, jotka ovat suurempia kuin tutkimuksesta mahdollisesti saatava hyöty (Bogdan & Biklen 2007, 48). Osallistumisen painotettiin olevan vapaaehtoista. Tiedonantajilla oli mahdollisuus keskeyttää osallistumisensa missä vaiheessa tahansa, ja halutessaan kieltää itseään koskevan tiedon käyttö myös jälkikäteen. Näin tehden toimittiin hyvän, eettisen tutkimustavan mukaisesti (Mäkinen 2006, 95; Bogdan & Biklen 2007, 48).

Tutkimukseen osallistuneita tiedonantajia koskevia tietoja on käsitelty luottamuksellisesti. Heidän henkilöllisyyttään on suojattu muuttamalla sekä tiedonantajien että heidän käymänsä koulun nimet jo litterointivaiheessa. Siten tutkittavien henkilöllisyydet eivät tule julki missään tutkimuksen vaiheessa. Esiin ei tuoda myöskään koulujen tarkkaa sijaintia. Hyvän tutkimustavan mukaisesti oppilaista ja opettajista kirjoitetaan kunnioittavasti eikä heidän toimintaansa arvostella. Oppituntien videotallenteita ja niistä tehtyjä litteraatteja on säilytetty ja käsitelty luottamuksellisesti. Kerätty materiaali tullaan hävittämään projektin päätyttyä.

6.3 Siirrettävyys

Tutkimustulokset kuvaavat kahden erityisopettajan tapaa rakentaa esimerkkejä matematiikan tunneilla. Tulokset sinänsä eivät ole yleistettäviä, kuten laadullisen tutkimuksen kohdalla usein on. Opettajan tapa rakentaa esimerkkejä riippuu hänen ammattitaidostaan ja persoonastaan. Käsitteitä ja esimerkkien tuottamisen tapa on osa hänen asiantuntijuuttaan (Lee 2004). Tulokset kuitenkin antavat melko hyvän kuvan esimerkkien rakentamisesta peruskoulun matematiikan tunneilla. Toisen opettajan oppitunnit oli suunnattu alkuopetuksen oppilaille (puolet tarkastelluista tunneista) ja toisen opettajan tunnit yläkoulun oppilaille (toinen puoli tarkastelluista tunneista). Kuitenkin molempien opettajien rakentamissa esimerkeissä korostuivat abstraktien käsitteiden ja laskutoimitusten konkretisointi ja oppilaiden osallistaminen esimerkinantoon kysymyksin.

Esimerkeillä on useita tärkeitä tehtäviä matematiikan opetuksessa. Etenkin aloittelevien opettajien on esitetty tarvitsevan ohjausta ymmärtääkseen nämä erilaiset tehtävät (Rowland 2008). Tämä opinnäyte ei pyri olemaan opas esimerkkien rakentamisesta tai niiden toimivuuden arvioinnista. Esimerkit ovat tilannesidonnaisia eikä siten ole olemassa yhtä ainoaa oikeaa tapaa rakentaa esimerkkejä. Yksittäisellä esimerkillä ei myöskään pystytä vastaamaan kaikkien oppijoiden tarpeisiin. Jokaisen opettajan tulee löytää oma tapansa rakentaa esimerkkejä ja olla samalla valmis muokkaamaan omaksumaansa tapaa tilanteen niin vaatiessa. Toivon, että työni tarjoaa tuleville opettajakollegoille käyttökelpoista tietoa esimerkkien tehtävistä ja vihjeitä erilaisista tavoista rakentaa esimerkkejä sekä virittävän halun tarkastella omaa esimerkkien rakentamisen tapaansa.

Esimerkeillä on sekä tämän tutkimuksen että aiempien tutkimusten (kuten Rowland 2008) mukaisesti keskeinen rooli matematiikan opetuksen kaikilla tasoilla. Oppilaiden (erityisesti oppimisvaikeuksisten oppilaiden) ohjaaminen sisältää opettajan mallintamista, ohjattua harjoittelua, itsenäistä työtä ja korjaavaa palautetta (Strickland & Maccini 2010). Sekä pienryhmä itsessään että ryhmässä työstetyt esimerkit saattavat edistää oppilaiden oppimista, sillä heikot matematiikan pohjatiedot omaavat oppilaat kokevat mielekkäinä opetuksen käytännönläheisyyden, runsaan esimerkkimäärän, toimimisen pienryhmässä sekä opiskelijoiden erilaisten tieto- ja taitotasojen huomioimisen (Honkiniemi & Manninen 2004). Kuitenkaan tässä aineistossa oppilaat eivät itse tehneet aloitteita, kuten kysymyksiä, joiden perusteella opettaja olisi alkanut työstää esimerkkejä. Opettajan rakentamat esimerkit olivat joko ennalta suunniteltuja tai vastasivat oppilaan tietämättömyyden osoituksiin (toimintaa ohjaavat esimerkit).

Erityisesti yläkoulun matematiikalta on perätty jäykkärakenteisuuden, hierarkkisuuden ja kaavamaisuuden sijaan idealähtöistä mallia, jossa opetus rakennetaan muutaman keskeisen idean varaan (Hassinen 2008). Tähän ei vielä tämän aineiston perusteella ylletä. Matematiikan oppitunnit ja niillä esitetyt esimerkit kietoutuivat vahvasti matematiikan oppikirjan sisältöihin ja asiat esitettiin pieninä sisältöyksiköinä tietyssä järjestyksessä. Toisaalta tämä saattaa lähiaikoina muuttua, sillä uusi opetussuunnitelma velvoittaa opetuksen eheyttämiseen sekä monialaisten oppimiskokonaisuuksien tarjoamiseen oppilaille (Opetushallitus 2015).

Pyrkimykset luokan opetussuunnitelman kytkemiseksi oppilaan omiin kokemuksiin eivät ole uusia yhdellekään opettajalle, mutta huolellisella luokassa esiintyvien puheenvuorojen järjestymisen analysoinnilla voidaan saada tietoa siitä, miten tämä tapahtuu (Lee 2004). Tämä tutkimus lisäsi tietoa siitä, miten esimerkkejä esitetään ja miten niihin sisällytetään käsiteltävän käsitteen olennainen aines. Tulokset vahvistavat esimerkeillä olevan tärkeän pedagogisen roolin matematiikan opetuksessa. Tutkimuksen tulokset ovat matematiikan opettajien ja erityisopettajien hyödynnettävissä antaen tukea esimerkkien valintaan ja avaten esimerkkien rakentamisen käytänteitä.

6.4 Jatkotutkimushaasteita

Tässä tutkimuksessa havaittiin opettajan rakentavan esimerkkejä matematiikan osa-aikaisessa erityisopetuksessa usein yhdessä oppilaiden kanssa. Oppilaat osallistettiin esimerkin antoon tekemällä heille esimerkkiä eteenpäin vieviä kysymyksiä. Mielenkiintoinen jatkotutkimuksen aihe olisi selvittää millaisena oppilaat kokevat tämän tyyppisen esimerkin rakentamisen. Tekeekö esimerkinantoon osallistuminen opittavasta asiasta omakohtaisemman ja jäävätkö näin opitut tiedot paremmin oppilaiden mieliin kuin annettaessa esimerkkejä suoran opetuksen varassa? Osallistettaessa oppilaita esimerkinantoon syntyy samalla tilanne, joissa oppilas mahdollisesti tekee virheen oppilastovereiden edessä. Aiheuttaako tällainen tilanne oppilaissa pelkoa kasvojen menettämisestä ja siten mahdollisesti rajoittaa heidän osallistumistaan oppitunnilla. Osa-aikaisessa erityisopetuksessa ryhmäkoko on tyypillisesti pienempi kuin yleisopetuksessa. Onko pieni ryhmäkoko tekijä, joka mahdollistaa tämän tyyppisen esimerkin rakentamisen. Mielenkiintoista olisi myös selvittää, tapahtuuko esimerkinanto erityisopetuksessa eri tavoin kuin yleisopetuksessa ja mitkä nämä mahdolliset erot ovat.

LÄHTEET

Anderson, J. R. & Fincham, J. M. 1994. Acquisition of procedural skills from examples. Journal of Experimental Psychology. Learning, Memory, and Cognition 20, 1322–1340.

Atkinson, J. M. & Heritage, J. 1984. Introduction. Teoksessa J. Heritage & J. M. Atkinson (toim.) Structures of Social Action: Studies in Conversation Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1–15.

Atkinson, R. K., Sharon J. Derry, Renkl, A. & Wortham, D. 2000. Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. Review of Educational Research, 70(2), 181–214.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. 2007. Qualitative research for education. an introduction to theories and methods. 5. painos. Boston: Pearson.

Drew, P. 2005. Conversation analysis. Teoksessa K. Fitch & R.E. Sanders (toim.) Handbook of language and social interaction. Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum, 71–102.

Fletcher, J. M., Lyon, G. R. & Fuchs, L. S. 2006. Learning disabilities : From identification to intervention. New York: Guilford Press.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Karns, K., Hamlett, C. L., Dutka, S. & Katzaroff, M. 1996. The relation between student ability and the quality and effectiveness of explanations. American Educational Research Journal, 33(3), 631–664.

Goldenberg, P. & Mason, J. 2008. Shedding light on and with example spaces. Educational Studies in Mathematics, 69, 183–194.

Guo, J., Yang, L. & Ding, Y. 2013. Effects of example variability and prior knowledge in how students learn to solve equations. European Journal of Psychology of Education 29(1) 21–42.

Hakulinen, A. 1997. Johdanto. Teoksessa L. Tainio (toim.) Keskustelunanalyysin perusteet. Tampere: Vastapaino, 13–17.

Hassinen, S. (2008). Ideaa koulumatematiikkaan. Dimensio, 72(2) 25–26.

Heemsoth, T. & Heinze, A. 2014. The impact of incorrect examples on learning fractions: A field experiment with 6th grade students. Instructional Science: An International Journal of the Learning Sciences, 42(4), 639–657.

Heritage, J. 2005. CA and Institutional Talk. Teoksessa K. Fitch & R. E. Sanders (toim.) Handbook of language and social interaction. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Heritage, J. 2009. Conversation analysis as social theory. Teoksessa B. S. Turner, (toim.) The new blackwell companion to social theory. Malden, Mass: Wiley-Blackwell, 300–320.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2004. Tutki ja kirjoita. 10. osin uudistettu painos. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Honkiniemi, M. & Manninen, T. 2004. Pienryhmä parantaa matematiikan taitoja. Dimensio, 68(1) 24–26.

Hoyles, C., Noss, R., Kent, P. & Bakker, A. 2010. Improving mathematics at work: The need for technomathematical literacies. London: Routledge. Viitannut: Swanson, D. ja Williams, J. 2014. Making abstract mathematics concrete in and out of school. Education Studies in Mathematics, 86: 193–209.

Impecoven-Lind, L. S. & Foegen, A. 2010. Teaching algebra to students with learning disabilities. Intervention in School and Clinic, 46(1), 31–37.

Johnson, H. L., Blume, G. W., Shimizu, J. K., Graysay, D. & Konnova, S. 2014. A teacher's conception of definition and use of examples when doing and teaching mathematics. Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 16(4) 285–311.

Kalchman, M. 2011. Using the math in everyday life to improve student learning. Middle School Journal 43 (1), 24–31.

Kay, R. & Edwards, J. 2012. Examining the use of worked example video podcasts in middle school mathematics classrooms: A formative analysis. Canadian Journal of Learning and Technology 38 (3), 1–20.

Kivelä, S. K. 2007. Matematiikan opettamisen vaikeus. Arkhimedes 3, 28–29.

Koole, T. 2010. Displays of epistemic access: Student responses to teacher explanations. Research on Language and Social Interaction 43 (2), 183–209.

Koole, T. 2012. The epistemics of student problems: Explaining mathematics in a multi-lingual class. Journal of Pragmatics 44 (13), 1902–1916.

Koole, T. & Elbers, E. 2014. Responsiveness in teacher explanations: A conversation analytical perspective on scaffolding. Linguistics and Education 26 (Jun), 57–69.

Kääntä, L. 2011. Katse, nyökkäys ja osoittava ele opettajan vuoronannoissa luokkahuonevuorovaikutuksessa. Teoksessa L. Kääntä (toim.) Kieli, keho ja vuorovaikutus: multimodaalinen näkökulma sosiaaliseen toimintaan. Helsinki : Suomalaisen Kirjallisuuden Seura, 122–151.

Lee, Y. 2004. The work of examples in classroom instruction. Linguistics and Education 15 (1-2), 99–120.

Lindstrom, J. H. 2010. Mathematics assessment accommodations: Implications of differential boost for students with learning disabilities. Intervention in School and Clinic 46 (1), 5–12.

Macbeth, D. 2004. The relevance of repair for classroom correction. Language in Society 33 (5), 703–736.

Mäkinen, O. 2006. Tutkimusetiikan ABC. Helsinki: Tammi.

Opetushallitus 2015. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. opetushallitus, määräykset ja ohjeet 2014:96. Tampere: Juvenes Print - Suomen Yliopistopaino Oy.

Paas, F., Renkl, A. & Sweller, J. 2003. Cognitive load theory and instructional design: Recent developments. Educational Psychologist 38 (1), 1–4.

Pehkonen, E. & Kaasila, R. 2008. Tehokkaan matematiikanopetuksen piirteitä. Dimensio: Matemaattis-Luonnontieteellinen Aikakauslehti 72 (2), 37–40.

Reed, S. K., Willis, D. & Guarino, J. 1994. Selecting examples for solving word problems. Journal of Education & Psychology 86, 380–388.

Rowland, T. 2008. The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. Educational Studies in Mathematics 69 (2), 149–163.

Schwonke, R., Renkl, A., Krieg, C., Wittwer, J., Aleven, V. & Salden, R. 2009. The worked-example effect: Not an artefact of lousy control conditions. Computers in Human Behavior 25 (2), 258–266.

Schworm, S. & Renkl, A. 2007. Learning argumentation skills through the use of prompts for self-explaining examples. Journal of Educational Psychology 99 (2), 285–296.

Seppänen, E. 1997. Vuorovaikutus paperilla. Teoksessa L. Tainio (toim.) Keskustelunanalyysin perusteet. Tampere: Vastapaino, 18–31.

Shalev, R. S., Auerbach, J., Manor, O. & Gross-Tsur, V. 2000. Developmental dyscalculia: Prevalence and prognosis. European Child & Adolescent Psychiatry 9 (2), S58–S64.

Stevenson, M. 2008. 'Profound understanding of fundamental mathematics': a study into aspects of the development of a curriculum for content and pedagogical subject knowledge. Paperiesitys, BSRLM –konferenssi, Southampton. http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip28-2/BSRLM-IP-28-2-Full.pdf. Luettu 7.8.2015.

Strickland, T. K. & Maccini, P. 2010. Strategies for teaching algebra to students with learning disabilities: Making research to practice connections. Intervention in School and Clinic 46 (1), 38–45.

Swanson, D. & Williams, J. (2014). Making abstract mathematics concrete in and out of school. Educational Studies in Mathematics 86 (2), 193–209.

Tainio, L. (toim.) 2007. Vuorovaikutusta luokkahuoneessa. Näkökulmana keskustelunanalyysi. Helsinki: Gaudeamus.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2009. Laadullinen tutkimus ja sisällön analyysi. 10. painos. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

van Gog, T. & Rummel, N. 2010. Example-based learning: Integrating cognitive and social-cognitive research perspectives. Educational Psychology Review 22 (2), 155–174.

van Loon-Hillen, N., van Gog, T. & Brand-Gruwel, S. 2012. Effects of worked examples in a primary school mathematics curriculum. Interactive Learning Environments 20 (1), 89–99.

Watson, A. & Shipman, S. 2008. Using learner generated examples to introduce new concepts. Educational Studies in Mathematics 69 (2), 97–109.

Williams, J. & Wake, G. 2007. Black boxes in workplace mathematics. Educational Studies in Mathematics 64 (3), 317–343.

Wilson, A. J. & Dehaene, S. 2007. Number sense and developmental dyscalculia. Teoksessa D. Coch, G. Dawson & K. Fischer (toim.) Human behavior, learning, and the developing brain: Atypical development. New York: Guilford, 212– 238.

World Health Organization. 1992. The ICD-10 classification of mental and behavioral disorders: Clinical descriptions and diagnostic guidelines. Geneva: World Health Organization.

Ylönen, A., Vehkakoski, T. & Björn, P. M. 2014. "Älysikkö nyt?" ymmärtämiseen liittyvä puhe yläkoulun matematiikan oppitunneilla. Kasvatus 45 (5), 444–458.

Zaslavsky, O. & Shir, K. 2005. Students' conceptions of a mathematical definition. Journal for Research in Mathematics Education 36 (4), 317–346.

Zazkis, R. & Leikin, R. 2008. Exemplifying definitions: a case of a square. Educational Studies in Mathematics 69 (2), 31–148.

Zimmerman, B. J. & Kitsantas, A. 2002. Acquiring writing revision and self-regulatory skill through observation and emulation. Journal of Education & Psychology 94, 660–668.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. 2008. Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics 69 (2), 165–182.

Östergren, R. 2013. Mathematical learning disability: Cognitive conditions, development and predictions. Linköping, SWE: Linköping University Electronic Press. Linköping Studies in Arts and Science, Volume 584.

LIITTEET

LIITE 1. Keskustelunkatkelmien litteroimiseen käytetyt merkit

Keskustelun katkelmat on litteroitu alla esitellyin Seppäsen (1997, 22–23) kuvaamin litterointimerkein.

1. SÄVELKULKU

Prosodisen kokonaisuuden lopussa:

.	laskeva intonaatio
,	tasainen intonaatio
?	nouseva intonaatio

Prosodisen kokonaisuuden sisällä tai alussa:

↑	seuraava sana lausuttu ympäristöä korkeammalta
↓	seuraava sana lausuttu ympäristöä matalammalta
heti	(alleviivaus) painotus tai sävelkorkeuden nousu muualla kuin sanan lopussa

2. PÄÄLLEKKÄISYYDET JA TAUOT

[	päällekkäispuhunnan alku
]	päällekkäispuhunnan loppu
(.)	mikrotauko: 0.2 sekuntia tai vähemmän
(0.4)	mikrotaukoa pitempi tauko; pituus on ilmoitettu sekunnin kymmenesosina
=	kaksi puhunnosta liittyy toisiinsa tauotta

3. PUHENOPEUS JA ÄÄNEN VOIMAKKUUS

> <	(sisäänpäin osoittavat nuolet) nopeutettu jakso
< >	(ulospäin osoittavat nuolet) hidastettu jakso
e::i	(kaksoispisteet) äänteen venytys
° °	ympäristöä vaimeampaa puhetta
SIIS	(kapiteelit) äänen voimistaminen

4. NAURU

he he	naurua

s(h)ana	suluissa oleva h sanan sisällä kuvaa uloshengitystä, useimmiten kyse nauraen lausutusta sanasta
£ £	hymyillen sanottu sana tai jakso

5. MUUTA

# #	nariseva ääni
@ @	äänen laadun muutos
si-	(tavuviiva) sana jää kesken
s'tä-	(rivinylinen pilkku) vokaalin kato
kiva	voimakkaasti äännetty klusiili
(tai)	sulkeiden sisällä epäselvästi kuultu jakso tai puhuja
(-)	sana, josta ei ole saatu selvää
(--)	pitempi jakso, josta ei ole saatu selvää
(( ))	kaksoissulkeiden sisällä litteroijan kommentteja ja selityksiä tilanteesta