Symmetriset konveksit kappaleet

Atte Lohvansuu

Matematiikan Pro Gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2015

Tiivistelmä: A. Lohvansuu, *Symmetriset konveksit kappaleet*, (engl. *Symmetric convex bodies*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 56. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2015.

Tässä tutkielmassa esitellään symmetristen konveksien joukkojen ominaisuuksia. Symmetriset konveksit joukot liittyvät läheisesti äärellisulotteisten Banach-avaruuksien teoriaan, sillä normin määräämä yksikköpallo on aina symmetrinen ja kompakti konveksi joukko, eli symmetrinen konveksi kappale. Konveksit joukot ovat myös olennainen osa ns. konveksia optimointiteoriaa, jolla on lukuisia sovelluskohteita esimerkiksi tietojenkäsittelytieteessä.

Ensimmäisessä luvussa esitellään tarvittavia konveksien joukkojen perusominaisuuksia, ja toisessa karakterisoidaan annetun symmetrisen konveksin kappaleen Johnin ja Löwnerin ellipsoidit. Konveksin kappaleen Johnin ellipsoidi (vast. Löwnerin ellipsoidi) on tilavuudeltaan maksimaalinen (minimaalinen) kappaleen sisältämä (ympäröivä) ellipsoidi Myös klassinen Johnin lause todistetaan symmetrisille konvekseille kappaleille. Sen mukaan symmetriselle konveksille kappaleelle $K \in \mathbb{R}^n$ ja sen Johnin ellipsoidille $\mathcal{E}$ pätee

$$\mathcal{E} \subset K \subset \sqrt{n}\mathcal{E}.$$

Kolmannessa luvussa todistetaan Brascampin ja Liebin epäyhtälön erikoistapaus: kaikille positiivisille L^1-funktioille $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ pätee

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i((x|u_i))^{c_i} \mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i(x) \mathrm{d}x \right)^{c_i},$$

kun vakioihin $c_i > 0$ ja vektoreihin $u_i \in \mathbb{R}^n$ kohdistetaan sopivat oletukset. Brascampin ja Liebin epäyhtälö johtaa tarkkoihin arvioihin symmetrisen konveksin kappaleen ja Johnin tai Löwnerin ellipsoidin tilavuuksien suhteelle. Lopuksi todistetaan nk. käänteinen isoperimetrinen epäyhtälö niinikään symmetrisille konvekseille kappaleille. Sen mukaan annettu symmetrinen konveksi kappale voidaan kuvata lineaariaffiinisti niin, että sillä on sama tilavuus kuin annetulla kuutiolla, mutta pinta-ala on pienempi.

Avainsanat: Konveksi, Erottelulause, Johnin ellipsoidi, Johnin lause, Brascamp-Lieb, tilavuussuhde, käänteinen isoperimetrinen epäyhtälö

Sisältö

Johdanto

Jokainen n-ulotteinen normiavaruus voidaan tunnetusti samaistaa avaruuteen $\mathbb{R}^n$, kunhan se varustetaan sopivalla normilla. Tällaisen normin määräämä yksikköpallo on aina kompakti, sisukseltaan epätyhjä, konveksi ja origon suhteen symmetrinen joukko, eli ns. symmetrinen konveksi kappale. Äärellisulotteisia normiavaruuksia voidaan siten tutkia konveksien joukkojen geometrian kautta. Tähän avaruuksien ja konveksien kappaleiden yhteyteen voi tutustua esimerkiksi Pisierin teoksen [9] avulla. Tässä matematiikan pro gradu -työssä keskitytään pääosin konveksien joukkojen ominaisuuksiin.

Ensimmäisessä luvussa esitellään tarvittavat esitiedot konvekseista joukoista, hypertasoista ja joukkojen summista. Erityisesti ensimmäisessä luvussa todistetaan tärkeä konveksien kappaleiden erottelulause, jonka mukaan kaksi erillistä konveksia joukkoa voidaan erottaa hypertasolla. Ensimmäinen luku perustuu Boydin ja Vandenberghen laajaan konveksia optimointia käsittelevään teokseen [5, kpl. 2]. Toisessa luvussa karakterisoidaan annetun symmetrisen konveksin kappaleen sisältämä tilavuudeltaan maksimaalinen ellipsoidi eli Johnin ellipsoidi, ja ympäröivä tilavuudeltaan minimaalinen ellipsoidi, eli Löwnerin ellipsoidi. Toisessa luvussa todistetaan myös yksi työn päätuloksista, Johnin lause, jonka mukaan symmetristä konveksia kappaletta $K \in \mathbb{R}^n$ voidaan sopivasti arvioida sen Johnin ellipsoidilla $\mathcal{E}$ myös ylhäältä:

$$\mathcal{E} \subset K \subset \sqrt{n}\mathcal{E}.$$

Johnin lause on peräisin F. Johnilta vuodelta 1949. Tästä työstä löytyvä todistus seuraa Ballin tekstiä [1].

Työn loppupuolen tavoitteena on todistaa kuuluisan isoperimetrisen epäyhtälön käänteinen versio. Isoperimetrinen epäyhtälö todistettiin tasossa jo yli sata vuotta sitten (Steiner 1838, Hurwitz 1902), ja sen yleisin muoto on peräisin Federeriltä [7, Th. 3.2.43.] vuodelta 1969. Tasossa isoperimetrisen epäyhtälön mukaan ympärysmitaltaan kiinnitettyjen suljettujen käyrien joukossa ympyräviiva sulkee sisäänsä suurimman pinta-alan. Kääntäen voi kysyä, mikä joukko maksimoi ympärysmitan, jos pinta-ala on kiinnitetty. On tosin helppoa konstruoida joukkoja, joilla on mielivaltaisen suuri ympärysmitta mutta äärellinen pinta-ala, joten käänteinen kysymys ei ole mielekäs. Vuonna 1989 Ball kuitenkin onnistui soveltamaan vuonna 1976 löydettyä Brascampin ja Liebin epäyhtälöä ja osoitti, että annettun symmetrisen konveksin kappaleen jollekin lineaariaffiinille kuvalle pätee sopiva käänteinen epäyhtälö. Tarkemmin sanottuna annettu symmetrinen konveksi kappale voidaan kuvata lineaariaffiinisti niin, että sen tilavuus on sama kuin annetulla kuutiolla, mutta pinta-ala on pienempi.

Kolmannen luvun aiheena on juurikin Brascampin ja Liebin epäyhtälö. Se on merkittävä yleistys Hölderin ja Youngin epäyhtälöille, ja mahdollistaa erilaisten tulojen integraalien laskemisen. Koko yleisen lauseen todistus on sangen vaikea, joten tässä työssä siitä todistetaan vain tarvittava erikoistapaus sekä sen käänteinen versio, Barthen lause. Brascampin-Liebin epäyhtälö käänteisversioineen ovat olennaisessa roolissa viimeisessä luvussa, kun niiden avulla todistetaan tämän työn päätulokset: tarkat arviot konveksin kappaleen sekä sen Johnin tai Löwnerin ellipsoidin tilavuuksien suhteelle sekä Ballin käänteinen isoperimetrinen epäyhtälö symmetrisille konvekseille kappaleille.

1 Esitietoja

Ellei muutoin mainita, oletetaan, että avaruus $\mathbb{R}^n$ on varustettu kanonisella kannalla ja sisätulolla. Vektoreiden $a, b \in \mathbb{R}^n$ sisätuloa merkitään $(a|b)$. Kaikki integraalit oletetaan Lebesgue-integraaleiksi. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ mitalliselle joukolle A merkinnällä $\mathrm{vol}(A)$ tarkoitetaan joukon A n-ulotteista Lebesguen mittaa eli intuitiivisesti tilavuutta.

Tässä työssä muuttujanvaihtolauseella tarkoitetaan seuraavaa tulosta, jonka todistus löytyy esimerkiksi luennoista [8].

Lause 1.1. *(Muuttujanvaihto)*
Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mitallinen funktio, $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ injektiivinen C^1 kuvaus, jonka derivaatta ei häviä missään pisteessä. Tällöin

$$\int_{\varphi(U)} f(x)\mathrm{d}x = \int_U f(\varphi(y))|\det D\varphi(y)|\mathrm{d}y.$$

Myös klassista aritmeettis-geometristä epäyhtälöä tullaan tarvitsemaan useassa paikassa

Lause 1.2. *(Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö)*
Olkoot $(x_i)_{i=1}^n$ ja $(\omega_i)_{i=1}^n$ ei-negatiivisia reaalilukuja ja olkoon $\omega = \sum_i \omega_i$.
Tällöin

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i}\right)^{\frac{1}{\omega}} \leq \frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^n \omega_i x_i.$$

Erityisesti, valitsemalla $\omega_i = 1$ kaikilla i,

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

ja molemmissa epäyhtälöissä yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin kun luvut x_i ovat kaikki yhtä suuria.

1.1 Minkowskin summa

Kahden epätyhjän avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukon A ja B *Minkowskin summa* tai yleensä vain *summa* on joukko

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Reaaliluvulle t määritellään joukon A monikerta

$$tA = \{ta \mid a \in A\}.$$

Merkitään myös $A - B = A + (-B)$ ja $x + B = \{x\} + B$ kun x on jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori. Esimerkiksi myöhemmin esiintyvä epätyhjän joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ ε-pullistuma

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \inf_{a \in A} \|x - a\| \leq \varepsilon\}$$

voidaan esittää muodossa $A_\varepsilon = A + \varepsilon B_2^n$, missä B_2^n on suljettu euklidinen yksikköpallo. Reaalisten epätyhjien joukkojen karteesinen tulo voidaan myös ilmaista summien avulla: olkoot $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}^n$, tällöin

$$A \times B = A \times \{0\}^n + \{0\}^n \times B.$$

Erityisesti tästä nähdään, että mitallisten joukkojen summan ei tarvitse olla mitallinen; voidaan valita A välin $[0,1]$ epämitalliseksi joukoksi ja $B = [0,1]$. Tällöin soveltamalla Fubinin lausetta karakteristisiin funktioihin nähdään, että $A \times B$ ei ole mitallinen, mutta sen sijaan $A \times \{0\}$ ja $\{0\} \times B$ ovat nollanmittaisia, eli myös mitallisia. Summalle pätevät kuitenkin seuraavat topologiset ominaisuudet

Lause 1.3. *Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjiä. Tällöin joukko $A + B$ on*

i) avoin, jos ainakin toinen joukoista A, B on avoin,

ii) suljettu, jos joukot A ja B ovat suljettuja ja ainakin toinen niistä on kompakti

iii) kompakti, jos joukot A ja B ovat molemmat kompakteja

Todistus. Oletetaan, että B on avoin. Tällöin joukko $x + B$ on avoin kaikille $x \in \mathbb{R}^n$. Täten

$$A + B = \bigcup_{a \in A} (a + B)$$

on myös avoin. Olkoot sitten A kompakti ja B suljettu. Olkoon $x \in \overline{A + B}$. Tällöin löydetään joukon $A + B$ pisteiden jono $(a_i + b_i)_{i=1}^\infty$, jonka raja-arvo on x. Koska A on kompakti, voidaan tarvittaessa osajonoon siirtymällä olettaa, että jonolla $(a_i)_{i=1}^\infty$ on raja-arvo $a \in A$. Tällöin jonolla $(b_i)_{i=1}^\infty$ on raja-arvo $x - a$. Nyt B on suljettu, joten $x - a \in B$. Edelleen $x = a + (x - a)$ ja $x \in A + B$. Jos myös B on kompakti, niin selvästi $A + B$ on myös rajoitettu. $\square$

Väitteen *ii)* oletus toisen joukon kompaktiudesta on oleellinen; kahden suljetun joukon summan ei tarvitse olla suljettu. Väite ei itse asiassa päde edes konvekseille joukoille: valitaan

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ja } y \geq x^{-1}\}$$

ja

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ ja } y \geq -x^{-1}\},$$

jolloin A ja B ovat konvekseja ja suljettuja joukkoja. Nyt joukko $A + B$ sisältää koko positiivisen y-akselin, muttei origoa. Täten $A+B$ ei ole suljettu.

1.2 Ellipsoidit

Reaalikertoiminen ja symmetrinen $n \times n$ matriisi A on *positiivisesti definiitti*, tai *positiividefiniitti*, jos kaikille nollasta eroaville vektoreille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$(Ax|x) = x^\intercal Ax > 0.$$

Tällöin merkitään $A > 0$. Listataan seuraavaksi muutamia lineaarialgebrasta tuttuja positiividefiniittien matriisien ominaisuuksia.

Lause 1.4. *Olkoon $A > 0$ reaalinen $n \times n$ matriisi. Tällöin*

i) Matriisin A kaikki ominaisarvot ovat aidosti positiivisia. Erityisesti ne ovat reaalisia.

ii) Matriisin A ominaisvektoreista voidaan muodostaa ortonormaali avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta

iii) Matriisilla A on esitys $UDU^\intercal$, missä U on ortonormaali kannanvaihto, $UU^\intercal = I_n$, ja D on ominaisarvojen muodostama diagonaalimatriisi

Ellipsoidit ovat jatkossa erittäin olennaisessa roolissa. Esitellään seuraavaksi muutama yhtäpitävä ellipsoidin määritelmä. Aloitetaan positiividefiniitin matriisin neliömuodolla.

Määritelmä 1.5. (Ellipsoidi)
Ellipsoideiksi kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettuja osajoukkoja

$$\mathcal{E}_{A,y} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-y)^\intercal A(x-y) \leq 1\}, \tag{1}$$

missä A on positiividefiniitti $n \times n$ matriisi ja $y \in \mathbb{R}^n$. Pistettä y kutsutaan ellipsoidin keskipisteeksi.

Tarkastellaan selkeyden vuoksi origokeskisiä ellipsoideja, ts. oletetaan, että $y = 0$. Muut ellipsoidit saadaan siirroilla:

$$\mathcal{E}_{A,x} = x + \mathcal{E}_{A,0}$$

Koska edellisen lauseen nojalla A on esitettävissä ortonormaalin kannanvaihdon U avulla muodossa $A = UDU^\intercal$, saadaan suoraan laskemalla

$$x^\intercal Ax \leq 1 \Leftrightarrow (Ux)^\intercal D(Ux) \leq 1.$$

Tässä $Ux = ((x|f_i))_{i=1}^n$ on pisteen x esitys jossain ortonormaalissa kannassa $(f_i)_{i=1}^n$. Ellipsoidin epäyhtälöehto (1) saa siis muodon

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|f_i)^2 \leq 1. \tag{2}$$

Tämä on käännettävissä: jos jonkin joukon pisteet toteuttavat ehdon (2) joillekin aidosti positiivisille vakioille $(\lambda_i)_{i=1}^n$ ja ortonormaaleille vektoreille $(f_i)_{i=1}^n$, se on ellipsoidi. Jos $x = \mu f_j$ jollain $\mu > 0$, saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|f_i)^2 = \mu^2 \lambda_j.$$

Jotta μf_j pysyisi ellipsoidissa, täytyy olla $\mu \leq 1/\sqrt{\lambda_j} =: \alpha_j$. Vakioita $(\alpha_j)_{j=1}^n$ kutsutaan ellipsoidin *puoliakselien pituuksiksi.* Kirjoittamalla epäyhtälö (2) uudestaan saadaan ehto (1) vielä uuteen muotoon

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x|f_i)^2}{\alpha_i^2} \leq 1. \tag{3}$$

Olkoon sitten B_2^n suljettu euklidinen pallo. Olkoon $\mathcal{D}$ vakioiden $(\alpha_j)_{j=1}^n$ muodostama diagonaalimatriisi ja valitaan kannanvaihto U niin, että $Ue_i = f_i$, missä $(e_i)_{i=1}^n$ ovat kanoniset kantavektorit. Tarkastellaan lineaarikuvausta $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Lx = U\mathcal{D}x$. Tällöin $(U\mathcal{D})^\intercal = \mathcal{D}U^\intercal$ ja

$$(Lx|f_i) = (U\mathcal{D}x|f_i) = (x|\mathcal{D}U^\intercal f_i) = (x|\mathcal{D}e_i) = \alpha_i(x|e_i) = \alpha_i x_i.$$

Kun $x \in B_2^n$ saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(Lx|f_i)^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2 x_i^2}{\alpha_i^2} \leq 1,$$

eli $Lx \in \mathcal{E}_A$. Tämä päättely on myös käännettävissä käyttäen käänteismatriisia $\mathcal{D}^{-1}U^\intercal$. Täten ellipsoidille $\mathcal{E}_A$ saadaan vielä esitys

$$\mathcal{E}_A = L(B_2^n).$$

Tämän avulla ellipsoidin tilavuudelle saadaan usea käyttökelpoinen esitys, sillä muuttujanvaihtolauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathcal{E}_A) &= |\det(U\mathcal{D})|\mathrm{vol}(B_2^n) \\
&= |\det \mathcal{D}|\mathrm{vol}(B_2^n) \\
&= \mathrm{vol}(B_2^n)\prod_{i=1}^n \alpha_i \\
&= \frac{\mathrm{vol}(B_2^n)}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}} \\
&= \frac{\mathrm{vol}(B_2^n)}{\sqrt{\det A}}.
\end{aligned}$$

Kirjataan vielä kaikki tämän kappaleen tulokset yhdeksi lauseeksi.

Lause 1.6. *Olkoot $A > 0$ reaalinen $n \times n$ matriisi ominaisarvoilla $(\lambda_i)_{i=1}^n$ ja vastaavalla ortonormaalilla ominaiskannalla $\mathcal{F} = (f_i)_{i=1}^n$. Olkoon U ortogonaalinen kannanvaihto kanoniselta kannalta kannalle $\mathcal{F}$. Olkoon vielä $\alpha_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$ ja $\mathcal{D} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

1. $\mathcal{E}_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\intercal A x \leq 1\}$
2. $\mathcal{E}_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{(x|f_i)^2}{\alpha_i^2} \leq 1\}$
3. $\mathcal{E}_A = L(B_2^n)$, *kun* $\mathrm{mat} L = U\mathcal{D}$.

Lisäksi

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_A) = \frac{\mathrm{vol}(B_n^2)}{\sqrt{\det A}}.$$

1.3 Konveksit joukot ja hypertasot

Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko K on *konveksi*, jos se sisältää pisteidensä väliset janat, ts. kaikille $\lambda \in [0,1]$ ja $x,y \in K$ pätee

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in K.$$

Kompaktia sisäpisteellistä konveksia joukkoa kutsutaan *konveksiksi kappaleeksi.* Konveksi kappale K on *symmetrinen*, jos ehdosta $x \in K$ seuraa, että $-x \in K$.

Mielivaltaisen joukon $T \subset \mathbb{R}^n$ *konveksi verho* $\mathrm{co}(T)$ on suppein konveksi joukko, joka sisältää joukon T, tai yhtäpitävästi kaikkien joukon T alkioiden *konveksien kombinaatioiden* joukko:

$$\mathrm{co}(T) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \;\middle|\; x_i \in T, \lambda_i > 0 \text{ kaikilla } i, \text{ ja } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k < \infty \right\}.$$

Konveksisuus toimii hyvin erilaisten joukko-operaatioiden kanssa.

Lause 1.7. *Olkoot $K, T \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjiä ja konvekseja. Tällöin*

i) Sisus $\operatorname{int}(K)$ *on konveksi*

ii) Sulkeuma $\overline{K}$ on konveksi

iii) Kuva $L(K)$ lineaarikuvauksissa $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on konveksi

iv) Summa $K + T$ on konveksi

v) Joukon K monikerroille pätee $\lambda K + \mu K = (\lambda + \mu)K$ kaikille $\lambda, \mu \geq 0$.

Todistus. Kohdat $ii) - iv)$ ovat ilmeisiä. Todistetaan $i)$ ja $v)$. Olkoon $x,y \in \operatorname{int}(K)$, jolloin löydetään säteet $r_x, r_y > 0$ ja avoimet pallot $B_x = B(x, r_x)$ ja $B_y = B(y, r_y)$, jotka sisältyvät joukon K sisustaan. Olkoon $0 < \lambda < 1$. Nyt

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in (1 - \lambda)B_x + \lambda B_y,$$

ja konveksisuuden ja lauseen 1.3 nojalla $(1 - \lambda)B_x + \lambda B_y$ on avoin ja sisältyy joukkoon K.

Väitteen $v)$ tapauksessa voidaan olettaa, että λ ja μ ovat aidosti positiivisia, sillä väite on triviaali jos jompikumpi on nolla. Olkoon $x \in \lambda K + \mu K$, jolloin $x = \lambda k_1 + \mu k_2$ joillekin $k_1, k_2 \in K$. Nyt

$$x = (\lambda + \mu) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} k_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} k_2 \right) = (\lambda + \mu)k \in (\lambda + \mu)K,$$

sillä k on pisteiden k_1 ja k_2 konveksi kombinaatio. Käänteinen inkluusio on triviaali. $\square$

Huomionarvoista on, että väite $v)$ ei päde ilman oletuksia kertoimien positiivisuudesta ja joukkojen konveksisuudesta. Esimerkiksi jos joukossa K on enemmän kuin yksi alkio, sille pätee

$$K - K = \{k_1 - k_2 \mid k_1, k_2 \in K\} \neq \{0\} = 0 \cdot K.$$

Jos konveksi joukko K oletetaan symmetriseksi, saadaan yleisille $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda K + \mu K = |\lambda|K + |\mu|K = (|\lambda| + |\mu|)K,$$

sillä $K = -K$. Toisaalta jos joukolta K ei vaadita konveksisuutta, voidaan valita yksinkertaisesti $K = \{0,1\}$ ja $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, jolloin

$$\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K = \{0, \frac{1}{2}, 1\} \neq K.$$

Mielivaltaisen joukon $K \subset \mathbb{R}^n$ konveksi verho $\mathrm{co}(K)$ koostuu joukon K pisteiden konvekseista kombinaatioista. Seuraavaksi todistettavan Carathéodoryn lauseen mukaan tällainen konveksi kombinaatio voidaan valita niin, että siinä on joukon K pisteitä enintään $n+1$ kappaletta. Toisin sanottuna jokaista verhon pistettä x kohti löytyy enintään $n+1$ pisteen joukon K osajoukko, jonka konveksiin verhoon piste x kuuluu. Esimerkiksi jos $K \subset \mathbb{R}^2$ koostuu yksikköneliön kärjistä, $\mathrm{co}(K)$ on suljettu yksikköneliö. Carathéodoryn lauseen mukaan jokainen neliön piste kuuluu johonkin yksikköneliön kärkipisteiden määräämään kolmioon.

Lause 1.8. *(Carathéodoryn lause)*
Olkoon K avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Jokainen konveksin verhon $\mathrm{co}(K)$ piste voidaan esittää enintään $n+1$ joukon K pisteen konveksina kombinaationa.

Todistus. Olkoon $x \in \mathrm{co}(K)$. Tällöin määritelmän nojalla x voidaan esittää joukon K pisteiden x_i äärellisenä konveksina kombinaationa,

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

missä $\lambda_i > 0$ kaikilla i ja $\sum_i \lambda_i = 1$. Jos $m \leq n+1$, väite pätee, joten voidaan olettaa, että $m > n+1$. Riittää osoittaa että x voidaan esittää enintään $m-1$ pisteen konveksina kombinaationa. Koska pisteitä $x_i - x_1$ on yli n kappaletta, joukko $\{x_i - x_1 | i = 2, \ldots, m\}$ on lineaarisesti riippuva, ts. joillekin reaaliluvuille $(\mu_i)_{i=2}^m$ pätee

$$\sum_{i=2}^{m} \mu_i (x_i - x_1) = 0.$$

Määritellään $\mu_1 = -\sum_{i=2}^m \mu_i$, jolloin $\sum_{i=1}^m \mu_i = 0$ ja $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0$. Merkitään

$$\alpha = \min_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i/\mu_i \mid \mu_i > 0\},$$

jolloin $\alpha = \lambda_k/\mu_k$ jollain k. Nyt kaikille i pätee $\lambda_i - \alpha\mu_i \geq 0$, ja lisäksi $\sum_i (\lambda_i - \alpha\mu_i) = 1$. Täten x voidaan esittää konveksina kombinaationa

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \alpha\mu_i) x_i,$$

missä $\lambda_k - \alpha\mu_k = 0$, ts. x voidaan esittää enintään $m-1$ pisteen konveksina kombinaationa. $\square$

Seuraavan esimerkin nojalla Carathéodoryn lauseen lukua $n+1$ ei voida parantaa. Olkoot $(e_i)_{i=1}^n$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanoniset kantavektorit. Olkoon $K = \mathrm{co}\{0, e_1, \ldots, e_n\}$. Kantavektorien riippumattomuudesta seuraa, että konveksin verhon piste $x = (\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})$ voidaan esittää joukon K pisteiden konveksina kombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla,

$$x = \frac{1}{n+1} \cdot 0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1} e_i.$$

Erityisesti pisteitä tarvitaan täydet $n+1$ kappaletta.

Carathéodoryn lauseesta seuraa näppärästi kompaktin joukon konveksin verhon kompaktisuus.

Lemma 1.9. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti. Tällöin $\mathrm{co}(K)$ on kompakti.*

Todistus. Carathéodoryn lauseen nojalla jokainen joukon $\mathrm{co}(K)$ pisteistä voidaan esittää enintään $n+1$ joukon K pisteen konveksina kombinaationa. Olkoon $X = (\mathbb{R}^n)^{n+1}$, varustettuna normilla $\|x\|' := \max \|x_i\|$. Avaruus X on äärellisulotteinen, joten kaikki normit ovat ekvivalentteja. Normin valinnalla ei siis jatkuvuuden kannalta ole mitään merkitystä. Määritellään kerroinjoukko

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \lambda_i \geq 0 \text{ kaikilla } i \text{ ja } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Tässä luvut λ_i ovat vektorin λ koordinaatit kanonisen kannan suhteen. Määritellään kuvaus

$$f : X \times \Lambda \to \mathbb{R}^n,\; f(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

Kuvaus f on jatkuva, sillä se on bilineaarinen muuttujien x ja λ suhteen, ja

$$\|f(x,\lambda)\| \leq \max \|x_i\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \leq \|x\|' \|\lambda\|.$$

Joukko $K^{n+1} \times \Lambda$ on kompaktien joukkojen karteesisena tulona kompakti. Koska jatkuva kuvaus säilyttää kompaktit joukot, myös

$$\mathrm{co}(K) = f(K^{n+1} \times \Lambda)$$

on kompakti. $\square$

Väite ei päde ilman kompaktisuusoletusta. Voidaan esimerkiksi valita

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{1+x^2}\},$$

jolloin K on suljettu, mutta $\mathrm{co}(K)$ on avoin puolitaso $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

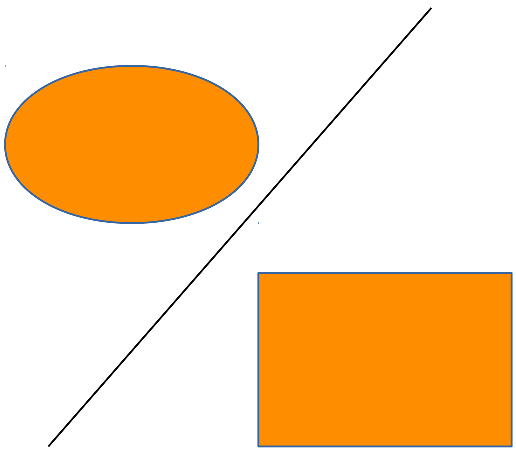
Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan konveksien kappaleiden ja hypertasojen yhteyttä.

Määritelmä 1.10. (Hypertaso)
Nollasta eroavien lineaaristen funktionaalien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tasa-arvojoukkoja kutsutaan (affiineiksi) *hypertasoiksi*. Lineaarifunktionaaleja ovat täsmälleen funktiot $f_a : x \mapsto (x|a)$. Hypertasot ovat täten muotoa

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x|a) = b, a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Esimerkiksi tasossa $\mathbb{R}^2$ hypertasot ovat suoria ja avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ne ovat 2-ulotteisia tasoja.

Seuraavaksi esitettävä konveksien joukkojen erottelulause on jatkon kannalta hyvin olennainen tulos. Sen mukaan pistevieraat konveksit joukot voidaan erottaa hypertason avulla omiin puoliavaruuksiinsa, joskus jopa aidosti.



Kuva 1: Kaksi erillistä konveksia joukkoa voidaan erottaa hypertasolla

Lause 1.11. ***(Erottelulause)***
Olkoot K ja T avaruuden $\mathbb{R}^n$ pistevieraita epätyhjiä konvekseja osajoukkoja. Tällöin on olemassa nollasta eroava lineaarikuvaus $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ja reaaliluku c, jolle $\varphi(k) \geq c \geq \varphi(t)$ kaikilla $k \in K$ ja $t \in T$. Lisäksi kuvaus φ ja vakio c voidaan valita niin, että kaikilla $k \in K$ ja $t \in T$

i) $\varphi(k) > c$, *jos* K *on avoin ja* $\varphi(t) < c$ *jos* T *on avoin, ja*

ii) $\varphi(k) > c > \varphi(t)$ *jos* K *ja* T *ovat suljettuja ja ainakin toinen niistä on kompakti.*

Todistus. Tarkastellaan joukkoa

$$A := K - T = \{k - t \mid k \in K, t \in T\},$$

joka on myös konveksi. Oletetaan aluksi, että A on suljettu. Huomataan, että origo ei sisälly joukkoon A. Näin ollen joukosta A löytyy vektori a, joka minimoi normin,

$$\|a\| = \min\{\|x\| \mid x \in A\} > 0.$$

Oletetaan, että löytyy toinenkin vektori $b \in A$, jolle $\|b\| = \|a\|$ ja $b \neq a$. Tällöin konveksisuuden nojalla jana $[a,b]$ kuuluu joukkoon A. Vektorit a ja b ovat lineaarisesti riippumattomat, koska ne löytyvät samalta pallonkuorelta ja origo ei kuulu joukkoon A. Nyt Cauchyn ja Schwarzin aidon epäyhtälön nojalla

$$\|a\|^2 \leq \|\frac{1}{2}(a+b)\|^2 = \frac{1}{4}(a+b|a+b) = \frac{1}{2}\|a\|^2 + \frac{1}{2}(a|b) < \|a\|^2.$$

Tämä on ristiriita, eli $b = a$. Valitaan nyt lineaarikuvaukseksi $\varphi : \varphi(x) = (x|a)$. Jos $y \in A$, niin konveksisuuden nojalla $(1-\lambda)a + \lambda y \in A$ kaikilla $\lambda \in [0,1]$. Lasketaan

$$\|a\|^2 \leq \|(1-\lambda)a + \lambda y\|^2 = (1-\lambda)^2\|a\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)(a|y).$$

Tästä saadaan ratkaistua

$$(a|y) \geq \frac{(2-\lambda)\|a\|^2 - \lambda\|y\|^2}{2(1-\lambda)},$$

ja sijoittamalla $\lambda = 0$ saadaan

$$(a|y) \geq \|a\|^2. \tag{4}$$

Nyt jokainen $y \in A$ on muotoa $y = k - t$ missä $k \in K$ ja $t \in T$, jolloin

$$(a|k) \geq \|a\|^2 + (a|t)$$

ja siten

$$\varphi(k) \geq \min_{k \in K}(a|k) \geq \|a\|^2 + \max_{t \in T}(a|t) > \varphi(t)$$

ja väite pätee. Väite *ii*) seuraa myös tästä, sillä kompaktin ja suljetun joukon summa on suljettu lauseen 1.3 nojalla.

Siirrytään sitten tapaukseen, missä A ei ole suljettu. Voidaan olettaa, että $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$, sillä muuten se sisältyisi johonkin hypertasoon ja väite on triviaali. Tyhjennetään joukon A sisusta suljetuilla konvekseilla joukoilla

$$A_n = \{x \in A \mid d(x,A^c) \geq 2^{-n}\}$$

missä $d(x, A^c) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in A^c\}$. Tällöin

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Nyt todistuksen alkuosan perusteella jokaisesta joukosta A_n löytyy normin minimoiva nollasta eroava vektori a_n. Normitetaan nämä vektorit yksikkövektoreiksi $\hat{a}_n$. Tällöin jono $(\hat{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ liikkuu kompaktilla yksikköpallon kuorella, eli tarvittaessa osajonoon siirtymällä voidaan olettaa, että sillä on raja-arvo. Olkoon se raja-arvo $a \in S^{n-1}$. Olkoot $k \in K$ ja $t \in T$. Nyt kaikille $k - t \in \mathrm{int}(A)$ pätee (tarpeeksi suurilla n) todistuksen alkuosaa vastaavin perustein

$$(a|k) = \lim_{n\to\infty} (\hat{a}_n|k) \geq \lim_{n\to\infty} [\|a_n\| + (\hat{a}_n|t)] = \lim_{n\to\infty} \|a_n\| + (a|t),$$

sillä kaavan (4) voi johtaa samalla tavalla myös vektoreille a_n. Raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \|a_n\|$ on olemassa, sillä normien jono on alhaalta rajoitettu ja konstruktion nojalla vähenevä. Jatkuvuuden nojalla tämä epäyhtälö pätee myös joukon A reunalla, ja siten

$$\varphi(k) \geq \inf_{x\in K} \varphi(x) \geq \lim_{n\to\infty} \|a_n\| + \sup_{y\in T} \varphi(y) \geq \varphi(t)$$

ja ensimmäinen väite pätee. Jäljellä on väite *i*). Riittää osoittaa, että ylläolevassa epäyhtälöketjussa ensimmäinen epäyhtälö on aito, jos K on avoin. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että on olemassa vektori $\hat{k} \in K$ siten, että $\varphi(\hat{k}) = \inf_K \varphi(k)$. Tällöin jollain $r > 0$ euklidinen pallo $B(\hat{k}, r)$ sisältyy joukkoon K. Erityisesti $\hat{k} - \frac{r}{2}a \in K$ ja

$$\varphi(\hat{k}) \leq \varphi(\hat{k} - \frac{r}{2}a) = \varphi(\hat{k}) - \frac{r}{2} < \varphi(\hat{k}).$$

Tämä on ristiriita. $\square$

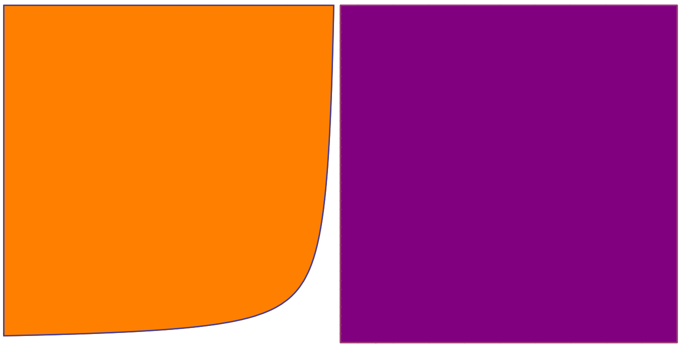
Väitteen *ii*) oletus kompaktisuudesta on olennainen. Jos se unohdetaan, voidaan valita suljetuiksi konvekseiksi joukoiksi vaikkapa

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

ja

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ ja } y \geq -x^{-1}\}.$$

Tällöin ainoa erottava hypertaso, eli tässä tapauksessa suora, on y-akseli. Erityisesti erottelu ei ole aitoa.



Kuva 2: Kahta suljettua konveksia joukkoa ei voi välttämättä erottaa aidosti

Lause 1.12. ***(Kantavan hypertason lause)***
Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ konveksi joukko ja olkoon $x_0 \in \partial K$. Tällöin on olemassa nollasta eroava vektori $a \in \mathbb{R}^n$, jolle pätee $(x|a) \leq (x_0|a)$ kaikille $x \in K$.

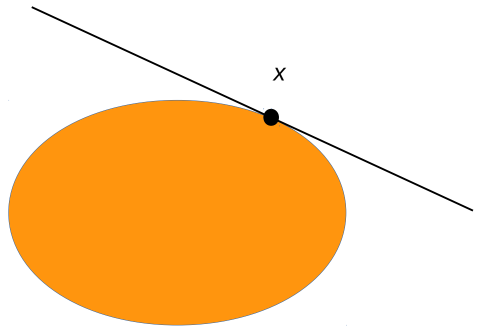
Todistus. Olkoon $x_0 \in \partial K$. Oletetaan aluksi, että joukon K sisus $\operatorname{int}(K)$ on epätyhjä. Tällöin lemman 1.7 nojalla $\operatorname{int}(K)$ on konveksi avoin joukko. Koska euklidisen avaruuden lineaarifunktionaalit ovat täsmälleen väitteen mukaisia sisätuloviritelmiä, väite seuraa erottelulauseesta, kun konvekseiksi joukoiksi valitaan $\operatorname{int}(K)$ ja $\{x_0\}$.

Jos $\operatorname{int}(K) = \emptyset$, joukko K sisältyy johonkin hypertasoon. Jos se ei sisältyisi, joukosta K löytyisi n lineaarisesti riippumatonta vektoria $(v_i)_1^n$. Konveksisuus ja avoimuus säilyvät kääntyvissä äärellisulotteisissa lineaarikuvauksissa, joten voidaan olettaa, että vektorit v_i ovat kanoniset kantavektorit. Näiden konveksi verho $\operatorname{co}\{v_1, \ldots, v_n\}$ on selvästi sisukseltaan epätyhjä ja sisältyy joukkoon K. Joukko K siis sisältyy johonkin hypertasoon ja väite pätee. $\square$

Lauseen 1.12 nojalla konveksin joukon $K \subset \mathbb{R}^n$ jokaista reunapistettä vastaa ainakin yksi vektori $a \neq 0$, jonka määräämä hypertaso

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x|a) = (x_0|a)\} \tag{5}$$

jakaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ kahteen osaan siten, että koko joukko K kuuluu niistä toiseen, ja lisäksi ainakin yksi reunapiste $x_0 \in \partial K$ kuuluu ko. hypertasoon.



Kuva 3: Ellipsin kantava hypertaso reunapisteessä x

Tällaista hypertasoa kutsutaan joukon K *kantavaksi hypertasoksi* pisteessä x_0. Hypertason määritelmästä nähdään, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ kantava hypertaso on aina muotoa (5), ja lauseen 1.12 nojalla ainakin yksi tällainen hypertaso on olemassa jokaista konveksin joukon reunapistettä kohti. Hypertasoja voi olla äärettömän monta, kuten esimerkiksi kuution kärkien tapauksessa. Seuraavat kaksi lemmaa antavat riittävät ehdot yksikäsitteisyydelle.

Lemma 1.13. *Euklidisen pallon B_2^n kantavat hypertasot ovat yksikäsitteisiä.*

Todistus. Olkoon $u \in S^{n-1}$. Hypertasoksi käy ainakin $H = \{x|(x|u) = 1\}$, sillä $u \in H$ ja kaikille $x \in B_2^n$ pätee Cauchy-Schwarzin nojalla

$$|(x|u)| \leq \|x\|\|u\| < 1 = (u|u).$$

Olkoon sitten a nollasta eroava vektori, jolle pätee vastaavasti $(x|a) \leq (u|a)$ kaikille $x \in B_2^n$. Uusi hypertasoehdokas on siis $H' = \{x|(x|a) = (u|a)\}$ Olkoon $\hat{a}$ vektorin a suuntainen yksikkövektori. Nyt $|(u|\hat{a})| < \|u\|\|\hat{a}\| = 1$, kun a ei ole vektorin u virittämällä suoralla. Valitaan $|(u|\hat{a})| < \lambda < 1$, jolloin $\lambda\hat{a} \in B_2^n$ ja

$$(\lambda\hat{a}|a) = \lambda\|a\| > \|a\||(u|\hat{a})| = |(u|a)| \geq (u|a).$$

Vektorin a on siis oltava vektorin u suuntainen, $a = ku$ jollain $k \in \mathbb{R}$. Nyt kuitenkin

$$(x|a) = (u|a) \Leftrightarrow k(x|u) = k(u|u) \Leftrightarrow (x|u) = 1,$$

eli $H' = H$. $\square$

Intuitiivisesti voi ajatella, että joukon K kantava hypertaso pisteessä x on yksikäsitteinen, jos joukon K reuna on tarpeeksi sileä pisteen x ympäristössä. Riittävä ehto tällaiselle sileydelle löytyy seuraavasta lemmasta.

Seuraus 1.14. *Olkoon K konveksi joukko ja $x_0 \in \partial K$. Jos on olemassa pallo $B \subset K$, jolle $x_0 \in \partial B$, niin pistettä x_0 sivuava joukon K kantava hypertaso on yksikäsitteinen*

Todistus. Joukon K kantavat hypertasot pisteessä x_0 ovat myös pallon B kantavia hypertasoja, ja näitähän on edellisen lemman nojalla tasan yksi kappale. □

1.4 Polaarijoukot

Jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ symmetrinen konveksi kappale voidaan esittää jonkin normin suljettuna yksikköpallona; normin voi määritellä myöhemmin tässä kappaleessa esiteltävällä *Minkowskin funktionaalilla*. Reaalisten normiavaruuksien ominaisuuksia tutkitaan usein niiden duaaliavaruuksien avulla, joten konveksien joukkojen ominaisuuksista voidaan saada lisätietoa tutkimalla vastaavien duaaliavaruuksien yksikköpalloja.

Duaaliavaruus koostuu funktionaaleista $f_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_y(x) = (x|y)$, jotka voidaan samaistaa vektoreihin $y \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ jonkin normiavaruuden $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ yksikköpallo ja olkoon K° vastaavan duaaliavaruuden yksikköpallo. Duaalinormin määritelmän

$$\|y\|_{K^\circ} = \max\{(x|y) \mid \|x\|_K = 1\}$$

nojalla $(x|y) \leq 1$ kaikille $x \in K$ täsmälleen silloin, kun y kuuluu konveksiin joukkoon K°. Tämä antaa aiheen *polaarijoukon* määritelmälle.

Määritelmä 1.15. (Polaarijoukko)
Olkoon K konveksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Joukon K polaarijoukoksi kutsutaan joukkoa

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x|y) \leq 1 \text{ kaikille } x \in K\}.$$

On selvää, että konveksin joukon polaarijoukko on myös konveksi. Olkoon K konveksi joukko, jonka yksi sisäpiste on origo. Olkoon $t_0 > 0$ ja $u \in S^{n-1}$. Tällöin $t^{-1}u \in K^\circ$ kaikilla $t \geq t_0$ jos ja vain jos $(u|x) \leq t_0$ kaikilla $x \in K$. Täten t_0 on pienin reaaliluku, jolla $t_0^{-1}u \in K^\circ$ jos ja vain jos hypertaso

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x|u) = t_0\}$$

on joukon K jokin kantava hypertaso. Tämän perusteella polaarin ottaminen kutistaa joukkoa K suunnissa, joissa se on suuri (suurempi kuin euklidinen pallo) ja vastaavasti pullistaa sitä suunnissa, joissa se on pieni. Kun origo ei kuulu joukon K sisäpisteisiin, voi pullistaminen olla ääretöntä. Valitaan esimerkiksi K neliöksi $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, jolloin polaarijoukkoon K° kuuluu koko ääretön alue $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \leq 0\}$.

Osoitetaan sitten, että origokeskisen ellipsoidin polaari on niinikään origokeskinen ellipsoidi. Huomataan ensin, että polaarin ottaminen toimii hyvin lineaarikuvausten kanssa.

Lemma 1.16. *Olkoon K konveksi joukko ja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kääntyvä lineaarikuvaus. Tällöin*

$$(LK)^\circ = (L^\intercal)^{-1}K^\circ.$$

Todistus. Lineaarikuvaukselle L pätee $(Lx|y) = (x|L^\intercal y)$ kaikille $x,y \in \mathbb{R}^n$. Täten

$$\begin{aligned} y \in (LK)^\circ &\Leftrightarrow (y|Lx) \leq 1 \text{ kaikille } x \in K \\ &\Leftrightarrow (x|L^\intercal y) \leq 1 \text{ kaikille } x \in K \\ &\Leftrightarrow L^\intercal y \in K^\circ \\ &\Leftrightarrow y \in (L^\intercal)^{-1}K^\circ \end{aligned}$$

ja molemmat suunnat seuraavat. □

Lemma 1.17. *Suljetun origokeskisen ellipsin, jonka puoliakselien pituudet ovat jonkin ortonormaalin kannan suhteen $(\alpha_i)_{i=1}^n$, polaarijoukko on suljettu origokeskinen ellipsi, jonka puoliakselien pituudet ovat saman kannan suhteen $(\alpha_i^{-1})_{i=1}^n$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että suljetun yksikköpallon B_2^n polaari on se itse. Olkoon $x \in B_2^n$. Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöstä saadaan arvio $(x|y) \leq 1$ kaikille $y \in B_2^n$, joten $B_2^n \subset (B_2^n)^\circ$. Olkoon sitten $x \in (B_2^n)^\circ$. Jos olisi $\|x\| > 1$, niin vektorin x suuntaiselle yksikkövektorille $\hat{x} \in B_2^n$ pätisi $(x|\hat{x}) = \|x\| > 1$, mikä on ristiriita. Täten $(B_2^n)^\circ = B_2^n$.

Origokeskinen ellipsi voidaan kirjoittaa lauseen 1.6 avulla lineaarikuvauksen L avulla muodossa $\mathcal{E} = LB_2^n$. Tässä luonnollisen kannan suhteen lineaarikuvausta L vastaava matriisi on UD, missä U on ortogonaalinen kannanvaihto ja $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Nyt transpoosin käänteiskuvausta $(L^{-1})^\intercal = (L^\intercal)^{-1}$ vastaava matriisi on UD^{-1}, missä $D^{-1} = \operatorname{diag}(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})$. Väitteen mukainen polaariellipsoidi on siis $(L^\intercal)^{-1}B_2^n$. Lemman 1.16 nojalla

$$\mathcal{E}^\circ = (LB_2^n)^\circ = (L^\intercal)^{-1}(B_2^n)^\circ = (L^\intercal)^{-1}B_2^n,$$

kuten haluttiin. □

Lemma 1.18. *Olkoon $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ origokeskinen ellipsoidi. Tällöin*

$$\operatorname{vol}(\mathcal{E})\operatorname{vol}(\mathcal{E}^\circ) = \operatorname{vol}(B_2^n)^2.$$

Todistus. Kuten edellisessä lemmassa, kirjoitetaan $\mathcal{E} = LB_2^n$ jollekin kääntyvälle lineaarikuvaukselle L. Vastaavasti $\mathcal{E}^\circ = (L^\intercal)^{-1}B_2^n$. Täten

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E})\mathrm{vol}(\mathcal{E}^\circ) = \mathrm{vol}(B_2^n)^2 \cdot |\det L| \cdot |\det L|^{-1} = \mathrm{vol}(B_2^n)^2,$$

sillä transpoosi ei vaikuta determinanttiin. □

Edellisten lemmojen nojalla origokeskisille ellipsoideille pätee $(\mathcal{E}^\circ)^\circ = \mathcal{E}$. Tämä relaatio ei päde yleisesti, sillä suoraan määritelmän nojalla origo kuuluu jokaiseen polaarijoukkoon, eli erityisesti myös bipolaariin. Määritelmästä nähdään myös, että $\overline{K} \subset (K^\circ)^\circ$. Toisaalta kaikki polaarijoukot ovat konvekseja ja suljettuja, joten ainakin $\overline{\mathrm{co}}(\overline{K} \cup \{0\}) \subset (K^\circ)^\circ$, kun merkinnällä $\overline{\mathrm{co}}$ tarkoitetaan konveksin verhon sulkeumaa. Osoittautuu, että tämä inkluusio pätee myös toiseen suuntaan.

Lause 1.19. *(Bipolaarilause)*
Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä konveksi joukko. Tällöin $(K^\circ)^\circ = \overline{\mathrm{co}}(\overline{K} \cup \{0\})$.

Todistus. Käänteinen inkluusio on jo perusteltu. Oletetaan , että $x \in (K^\circ)^\circ$ ja tehdään antiteesi: $x \notin \overline{\mathrm{co}}(\overline{K} \cup \{0\})$. Joukko $\overline{\mathrm{co}}(\overline{K} \cup \{0\})$ on konveksi ja suljettu ja yksiö $\{x\}$ on konveksi ja kompakti, joten soveltamalla erottelulausetta saadaan aito epäyhtälö

$$(k|a) < c < (x|a)$$

kaikille $k \in \overline{\mathrm{co}}(\overline{K} \cup \{0\})$, jollekin vektorille $a \neq 0$ ja reaaliluvulle c. Erityisesti sijoittamalla $k = 0$ nähdään, että $c > 0$, joten tarvittaessa skaalaamalla voidaan olettaa $c = 1$. Tämä on ristiriita, sillä nyt $a \in K^\circ$, mutta $(x|a) > 1$, eli $x \notin (K^\circ)^\circ$. □

Todistuksessa olennaista on erottelulauseen aito epäyhtälö: yhtäsuuruus ei saa olla mukana. Aidon epäyhtälön olemassaololle välttämätöntä on, että väitteen konveksi verho on suljettu. Aiemmin nähtiin, lemman 1.9 jälkeen, että yleisen suljetun joukon konveksin verhon ei tarvitse olla suljettu. Vastaesimerkki löytyy myös muotoa $\overline{K} \cup \{0\}$ olevalle joukolle. Esimerkiksi

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1\},$$

jolloin $\mathrm{co}(\overline{K} \cup \{0\})$ on ylempi avoin puolitaso varustettuna origolla. Bipolaarilauseen konveksin verhon sulkeuma on siis välttämätön. Bipolaarilauseesta seuraa, että konveksi joukko on itsensä bipolaari täsmälleen silloin, kun se on suljettu ja sisältää origon; kun K toteuttaa nämä ehdot, on

$$(K^\circ)^\circ = \overline{\mathrm{co}}(\overline{K} \cup \{0\}) = \overline{\mathrm{co}}(K \cup \{0\}) = \overline{\mathrm{co}(K)} = \overline{K} = K.$$

ja kääntäen, sillä bipolaari on aina suljettu ja konveksi ja sisältää origon. Erityisesti symmetrisille konvekseille kappaleille $K^{\circ\circ} = K$.

Esitellään lopuksi kaksi konvekseihin joukkoihin liittyvää funktiota.

Määritelmä 1.20. (Kantajafunktio ja Minkowskin funktionaali)
Konveksia joukkoa $K \subset \mathbb{R}^n$ vastaava *kantajafunktio* on funktio $h_K : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$h_K(x) = \sup\{(x|a) \mid a \in K\}$$

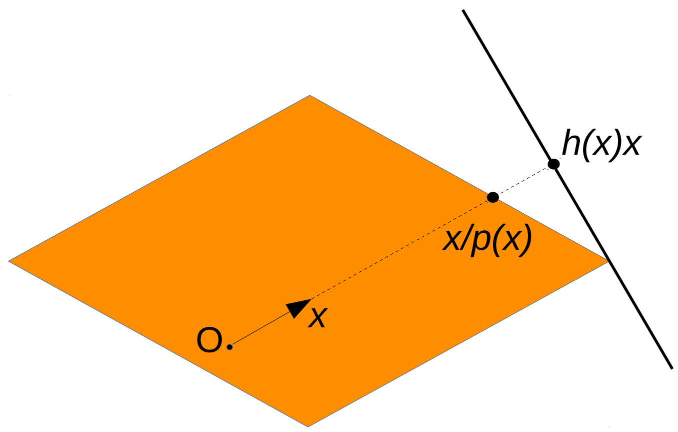
ja *Minkowskin funktionaali* on funktio $p_K : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$

$$p_K(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda^{-1}x \in K\}.$$

Geometrisesti $h_K(x)$ ilmoittaa, kuinka kaukana vektorin x virittämä konveksin joukon K kantava hypertaso on origosta: kun $x \in S^{n-1}$, hypertaso

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y|x) = h_K(x)\}$$

on joukon K kantava hypertaso. Kantajafunktio ottaa huomioon myös suunnan: yleisesti $h_K(-x) \neq h_K(x)$. Minkowskin funktionaali taas mittaa etäisyyttä joukon K reunalta origoon suunnassa x. Jos K on symmetrinen konveksi kappale, Minkowskin funktionaali määrää normin avaruuteen $\mathbb{R}^n$, esimerkiksi pallon $K = B_2^n$ tapauksessa p_K on euklidinen normi.



Kuva 4: Kantajafunktion h ja Minkowskin funktionaalin p geometrinen merkitys yksikkövektorille x.

Minkowskin funktionaalin ja kantajafunktion välille saadaan yhteys polaarin kautta:

Lause 1.21. *Olkoon K suljettu konveksi joukko ja oletetaan, että origo on yksi sen sisäpisteistä. Tällöin $h_{K^\circ} = p_K$.*

Todistus. Oletus origon kuulumisesta joukon K sisustaan takaa väitteen kannalta kaksi elintärkeää faktaa: ensinnäkin Minkowskin funktionaali on joka pisteessä hyvin määritelty ja äärellinen, ja toiseksi kantajafunktio on aina positiivinen. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Jos $\lambda^{-1}x \in K$, niin polaarijoukon määritelmän nojalla kaikille $a \in K^\circ$ pätee $(a|\lambda^{-1}x) \leq 1$, eli $(a|x) \leq \lambda$. Tästä seuraa, että $h_{K^\circ}(x) \leq p_K(x)$.

Toista suuntaa varten oletetaan vastoin väitettä: $h_{K^\circ}(x) < p_K(x)$. Tällöin kaikille $a \in K^\circ$ pätee $(a|x) < p_K(x)$, ja jatkuvuuden nojalla on olemassa aidosti positiivinen reaaliluku λ niin, että $(a|\lambda^{-1}x) \leq 1$ ja $\lambda < p_K(x)$. Tästä seuraa, että $\lambda^{-1}x \in (K^\circ)^\circ$. Nyt kuitenkin bipolaarilauseen nojalla $(K^\circ)^\circ = K$. Tämä on vastoin Minkowskin funktionaalin määritelmää, ja antiteesi kaatuu. $\square$

Tämän konvekseja joukkoja käsittelevän kappaleen lopuksi osoitetaan vielä, että suljettu konveksi joukko voidaan karakterisoida kantavien hypertasojensa avulla.

Lause 1.22. *Kaksi suljettua, konveksia joukkoa ovat samat täsmälleen silloin, kun niiden kantajafunktiot ovat samat.*

Todistus. Toinen suunta on triviaali. Olkoot K ja L avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettuja ja konvekseja osajoukkoja, joille $h_K = h_L$. Tehdään antiteesi: on olemassa piste $y \in K \setminus L$. Sovelletaan erottelulausetta yksiöön $\{y\}$ ja *suljettuun* konveksiin joukkoon L ja löydetään nollasta eroava vektori a ja reaaliluku c, joille $(x|a) < c < (y|a)$ kaikilla $x \in L$. Ristiriita seuraa, sillä kantajafunktion määritelmän perusteella $h_L(a) < (y|a) \leq h_K(a)$. $\square$

2 Johnin lause

2.1 Johnin ellipsoidit

Yleiset konveksit kappaleet voivat olla sangen monimutkaisia, joten on luonnollista yrittää approksimoida niitä helpommilla muodoilla, kuten ellipsoideilla. Sanotaan, että symmetristä konveksia kappaletta $K \subset \mathbb{R}^n$ vastaava ellipsoidi $\mathcal{E}$ on *Johnin ellipsoidi*, jos se on tilavuutensa suhteen maksimaalinen ehdolla $\mathcal{E} \subset K$. Osoittautuu, että Johnin ellipsoidille pätee

$$\mathcal{E} \subset K \subset \sqrt{n}\mathcal{E}.$$

Tämä tulos tunnetaan Johnin lauseena. Se on tarkka, sillä vakiota $\sqrt{n}$ ei ole mahdollista parantaa kun K on kuutio. Johnin lause seuraa helposti, kun ensin ko. ellipsoidit karakterisoidaan.

Osoitetaan ensin, että tilavuuden maksimoivia ellipsoideja on olemassa. Huomataan, että jokainen symmetrisen konveksin kappaleen K sisältämä ellipsoidi voidaan siirtää origokeskiseksi. Jos $\mathcal{E}$ on origokeskinen ellipsoidi ja $y + \mathcal{E} \subset K$, niin symmetrisyyden nojalla myös $-y + \mathcal{E} \subset K$. Erityisesti piste $z \in \mathcal{E}$ voidaan esittää konveksina kombinaationa

$$z = \frac{1}{2}(z + y) + \frac{1}{2}(z - y) \in K,$$

eli $\mathcal{E} \subset K$. Ellipsoidin tilavuus riippuu vain vastaavan matriisin determinantista. Determinantti taas on jatkuva kuvaus matriisien joukolta reaaliluvuille. Maksimaalisuus voidaan siis saada esiin kompaktisuusargumentilla tarkastelemalla sopivaa matriisijoukkoa.

Positiividefiniittien matriisien jonon (A_i) raja-arvo ei välttämättä ole positiividefiniitti; esim. jos $A_i = I_n/i$. Ellipsoidienkaan "raja-arvo" ei siis välttämättä ole ellipsoidi. Seuraavan lemman nojalla tällaista häiriökäytöstä ei pääse tapahtumaan, jos matriisien ominaisarvot ovat tasaisesti alhaalta rajoitetut jollain nollaa suuremmalla vakiolla.

Lemma 2.1. *Olkoon $(A_i)_{i=1}^m$ jono positiividefiniittejä $n \times n$ matriiseja, joka suppenee matriisiin A. Oletetaan, että jokaisen matriisin A_i ominaisarvot ovat välillä $I \subset \mathbb{R}$. Tällöin myös matriisin A kaikki ominaisarvot ovat välillä I.*

Todistus. Matriisin A_i ominaisarvot ovat matriisin karakteristisen polynomin p_{A_i} juuria. Polynomin kertoimet ovat matriisin alkioista muodostettuja polynomeja. Nyt $p_{A_i}(x) \to p_A(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, sillä matriisiavaruuden äärellisulotteisuudesta seuraa normien ekvivalenttius ja siten $A_i \to A$ myös komponenteittain. Koska matriisit A_i ovat positiivideﬁniittejä, ne ovat kääntyviä ja erityisesti niillä on tasan n ominaisarvoa. Täten jokaisella polynomilla p_{A_i} on täsmälleen n nollakohtaa välillä I. Tästä seuraa, että jokainen p_{A_i} on aidosti monotoninen välin $I = [a,b]$ ulkopuolella. Täten, jos jollain $x > b$ (tapaus $x < a$ vastaavasti) pätee $p_{A_i}(x) \to 0$, niin $p_{A_i}(y) \to 0$ kaikilla $y \in [b,x]$. Tällöin p_A on nollafunktio. Tämä on ristiriita, sillä nollafunktio ei ole minkään matriisin karakteristinen polynomi. $\square$

Lause 2.2. *Jokainen symmetrinen konveksi kappale $K \subset \mathbb{R}^n$ sisältää tilavuuden suhteen maksimaalisen ellipsoidin.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{E}_A$ matriisin $A > 0$ virittämä origokeskinen ellipsoidi, eli

$$\mathcal{E}_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\intercal Ax \leq 1\}.$$

Koska joukko K on kompakti, se sisältyy johonkin palloon. Olkoon sen säde R^2. Tästä seuraa, että kaikkien ellipsoidien $\mathcal{E}_A \subset K$ puoliakselien pituudet ovat ylhäältä rajoitettuja vakiolla R^2. Tämä taas tarkoittaa, että ko. matriisien ominaisarvot ovat alhaalta rajoitettuja vakiolla R^{-1}. Toisaalta K myös sisältää jonkin pallon B. Olkoon sen säde r^2 jollain $r > 0$. Tarkastellaan matriiseja A, joille $\mathcal{E}_A \subset K$ ja joiden ominaisarvot ovat ylhäältä rajoitettuja vakiolla $k = R^{n-1}r^{-2n}$. Nimittäin jos matriisille A, jonka ellipsoidi kuuluu joukkoon K, jollekin ominaisarvolle λ_0 pätee $\lambda_0 > k$, niin alaraja-arvion perusteella

$$\sqrt{\det A} \geq \sqrt{R^{1-n}\lambda_0} > r^{-n},$$

joten $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_A) \leq r^n \mathrm{vol}(B_2^n) = \mathrm{vol}(B)$, eli $\mathcal{E}_A$ ei ole maksimaalinen.

Olkoon seuraavassa $\sigma(A)$ matriisin A ominaisarvojen joukko. Tarkastellaan joukkoa

$$X = \{A > 0 \mid R^{-1} \leq \lambda \leq k \text{ kaikille } \lambda \in \sigma(A), \text{ ja } \mathcal{E}_A \subset K\}.$$

Aiempien perustelujen nojalla mahdollista maksimaalista ellipsoidia vastaava matriisi löytyy nimenomaan joukosta X. Determinantin ottaminen on matriisin komponenttien polynomina jatkuva kuvaus, joten riittää osoittaa, että joukko X on kompakti. Joukon X matriisien ominaisarvot ovat rajoitettuja, joten se on rajoitettu joukko operaattorinormin suhteen. Osoitetaan, että X on myös suljettu. Olkoon $A \in \overline{X}$ ja olkoon $(A_i)_{i=1}^\infty$ joukon X jono, joka suppenee matriisiin A jonkin normin (eli kaikkien) suhteen. Lemmasta 2.1 seuraa, että matriisi A on edelleen positiivisesti deﬁniitti ja sen ominaisarvoille pätee joukon X vaatima ominaisuus. Tarkastellaan joukkoa

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\intercal Ax < 1\}.$$

Olkoon $x \in D$. Koska $x^\intercal A_i x \to x^\intercal A x$, jonon (A_i) loppupään matriiseille pätee $x^\intercal A_i x < 1$. Täten $D \subset K$ ja

$$\mathcal{E}_A = \overline{D} \subset \overline{K} = K.$$

Täten joukko X on kompakti ja väite on todistettu. □

Nyt tiedetään, että maksimaalinen ellipsoidi on aina olemassa ja voi kysyä, miten tällainen ellipsoidi voitaisiin karakterisoida. Ensinnäkin, tilavuussuhteet ja konveksisuus säilyvät lineaarikuvauksissa, joten maksimaalinen ellipsoidi voidaan huoletta olettaa yksikköpalloksi. Intuitiivisesti ajatellen tilavuuden maksimoivan ellipsoidin täytyy olla annetun konveksin kappaleen reunoissa kiinni, ja vieläpä sopivasti joka puolelta, jotta sitä ei voisi pullistaa. Formaalisti ilmaistuna tämä ehto on jokin seuraavan lemman ehdoista, eli yksikköpallon ja konveksin kappaleen reunan välisten kontaktipisteiden tulee käyttäytyä lähestulkoon kuten kantavektorien.

Lemma 2.3. *Olkoot $(u_i)_{i=1}^m$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikkövektoreita ja $(c_i)_{i=1}^m$ positiivisia reaalilukuja. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä*

1. *Jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ on esitys $x = \sum_i c_i (x|u_i) u_i$*
2. *Jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ pätee $\|x\|^2 = \sum_i c_i (x|u_i)^2$*
3. *Yksikkömatriisilla on esitys $I_n = \sum_i c_i u_i u_i^\intercal$.*

Lisäksi jos jokin näistä ehdoista on voimassa, vakioille c_i pätee $\sum_i c_i = n$.

Todistus. 1.$\Leftrightarrow$ 3.: Sisätulo $(x|y)$ voidaan kirjoittaa muodossa $y^\intercal x = x^\intercal y$, joten lineaarikuvaukselle $u_i u_i^\intercal$ pätee

$$u_i u_i^\intercal x = (x|u_i) u_i$$

ja väite seuraa.

2.$\Leftrightarrow$ 3.: Tämä perustuu siihen, että kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ on $\|x\|^2 = x^\intercal A x$ symmetriselle A jos ja vain jos $A = I_n$ ja

$$\sum_i c_i (x|u_i)^2 = \sum_i c_i x^\intercal u_i u_i^\intercal x = x^\intercal (\sum_i c_i u_i u_i^\intercal) x.$$

Molemmat suunnat suunnat seuraavat tästä.

Viimeinen väite saadaan matriisien jälkien ja ehdon 3. avulla. Tunnetusti jälki on lineaarinen operaatio ja se ei riipu valitusta kannasta. Huomataan ensin, että

$$\operatorname{tr}(u_i u_i^\intercal) = \sum_{k=1}^n e_k^\intercal u_i u_i^\intercal e_k = \sum_{k=1}^n (e_k^\intercal u_i)^2 = 1.$$

Täten

$$n = \mathrm{tr}(I_n) = \sum_i c_i \mathrm{tr}(u_i u_i^\intercal) = \sum_i c_i.$$

□

Johnin ellipsoidit voidaan nyt karakterisoida:

Lause 2.4. ***(Johnin ellipsoidien karakterisointi)*** *Jokainen symmetrinen konveksi kappale $K \subset \mathbb{R}^n$ sisältää yksikäsitteisen tilavuuden suhteen maksimaalisen ellipsoidin. Kyseinen ellipsoidi on suljettu euklidinen pallo B_2^n jos ja vain jos $B_2^n \subset K$ ja on olemassa m kappaletta sellaisia yksikkövektoreita $(u_i)_{i=1}^m$ ja positiivisia vakioita $(c_i)_{i=1}^m$, että jokainen $u_i \in \partial K$, ja jokainen vektori $x \in \mathbb{R}^n$ on esitettävissä muodossa*

$$x = \sum_{i=1}^m c_i (x|u_i) u_i. \tag{6}$$

Todistuksen tueksi tarvitaan vielä yksi lemma. Tunnetusti bilineaarikuvaus $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ on jatkuva jos ja vain jos $\|f(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|$ jollain vakiolla C ja kaikilla $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 2.5. *Olkoon avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta kiinnitetty. Kuvaus $g : \mathbb{R}^n \to M_{n\times n}$, $g(x) = xx^\intercal$ on jatkuva.*

Todistus. Tarkastellaan bilineaarikuvausta $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to M_{n\times n}$, $f(x,y) = xy^\intercal$. Käytetään matriisinormina avaruuden $\mathbb{R}^{n^2}$ euklidista normia, eli matriisille $A = (a_{ij})_{i,j}^n$

$$\|A\|_M^2 = \sum_i \sum_j a_{ij}^2 = \mathrm{tr}(A^\intercal A).$$

Lasketaan

$$\|f(u,v)\|_M^2 = \mathrm{tr}((uv^\intercal)^\intercal uv^\intercal) = \mathrm{tr}(vu^\intercal uv^\intercal) = \|u\|^2 \mathrm{tr}(vv^\intercal) = \|u\|^2\|v\|^2.$$

Täten f on jatkuva ja siten myös g on jatkuva. □

Lauseen 2.4 todistus. Oletetaan aluksi, että $B_2^n \subset K$ ja että väitteen mukaiset vektorit $u_i \in S^{n-1} \cap \partial K$ ja positiiviset reaaliluvut c_i löytyvät. Olkoon $\mathcal{E} \subset K$ ellipsoidi,

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n \frac{(x|e_i)^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\}.$$

Koska $\mathrm{vol}(\mathcal{E}) = \mathrm{vol}(B_2^n) \cdot \prod_{i=1}^n \alpha_i$, riittää osoittaa, että $\prod_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ ja että yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin, kun $\alpha_i = 1$ kaikilla i. Seurauksen 1.14

nojalla jokaisessa reunapisteessä u_i joukon K kantava hypertaso on yksikäsitteinen ja yhtenee pallon B_2^n tangenttitason $\{x \mid (x|u_i) = 1\}$ kanssa. Tästä seuraa, että jokainen u_i kuuluu polaariellipsoidiin $\mathcal{E}^\circ$, eli lemman 1.17 nojalla $\sum_{k=1}^n \alpha_i^2 (u_i|e_k)^2 \leq 1$. Nyt lemman 2.3 nojalla

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \|e_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sum_{j=1}^m c_j (e_i|u_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^m c_j \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (e_i|u_j)^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m c_j = n.\end{aligned}$$

Väite seuraa aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä (1.2), sillä

$$\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq 1,$$

eli

$$\prod_{i=1}^n \alpha_i \leq 1.$$

Edelleen aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan tämä epäyhtälö on aito aina, kun luvut α_i eivät ole samoja, eli ykkösiä. Tämä todistaa Johnin lauseen toisen puolen.

Oletetaan sitten, että B_2^n on joukon K Johnin ellipsoidi. Halutaan löytää m kappaletta yksikkövektoreita $u_i \in \partial K$ ja positiivisia vakioita c_i siten, että lemman 2.3 mukaisesti

$$\frac{1}{n} I_n = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{n} u_i u_i^\intercal.$$

Edelleen lemmasta 2.3 seuraa, että $\sum_i \frac{c_i}{n} = 1$ ja lisäksi luvut c_i ovat positiivisia. Johnin lauseen toisen puolen väite voidaan nyt saattaa muotoon $\frac{1}{n} I_n \in \mathrm{co}(T)$, missä T on kontaktipisteiden luomien $n \times n$-matriisien joukko

$$T = \left\{ uu^\intercal \in M_{n\times n} | u \in S^{n-1} \cap \partial K \right\}.$$

Tehdään antiteesi: $\frac{1}{n} I_n \notin \mathrm{co}(T)$. Lemman 2.5 nojalla kuvaus

$$g : \mathbb{R}^n \to M_{n\times n},\ g(u) = uu^\intercal$$

on jatkuva. Joukko $S^{n-1} \cap \partial K$ on kompakti, joten $T = g(S^{n-1} \cap \partial K)$ on myös kompakti. Nyt lemman 1.9 nojalla $\mathrm{co}(T)$ on niinikään kompakti. Sovelletaan erottelulausetta kompakteihin joukkoihin $\{I_n/n\}$ ja $\mathrm{co}(T)$ ja löydetään lineaarifunktionaali $\varphi : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$, jolle

$$\varphi(\frac{I_n}{n}) < \varphi(uu^\intercal) \tag{7}$$

kaikille kontaktipisteille u. Lineaarikuvaus φ voidaan tuttuun tapaan esittää matriisimuodossa $H = (h_{ij})_{i,j}^n$, kun h_{ij} on kanonisen kantavektorin e_{ij} kuva. Täten matriisille $A = (a_{ij})_{i,j}^n$ pätee

$$\varphi(A) = \sum_i \sum_j h_{ij} a_{ij}.$$

Voidaan olettaa, että matriisi H on symmetrinen. Epäyhtälö (7) säilyy vaihtamalla matriisi H tarvittaessa symmetriseen matriisiin $\frac{1}{2}(H + H^\intercal)$.

Lisäksi vakion $c \in \mathbb{R}$ lisääminen matriisin H diagonaalille säilyttää epäyhtälön (7), sillä matriisien I_n/n ja $uu^\intercal$ jäljet ovat kaikki ykkösiä. Voidaan siis olettaa, että matriisin H jälki on 0. Täten $H(I_n/n) = 0$, ja epäyhtälö (7) saa muodon

$$\varphi(uu^\intercal) = \sum_i \sum_j h_{ij} u_i u_j = u^\intercal H u > 0. \tag{8}$$

Olkoon $\delta > 0$. Tarkastellaan matriisia $I_n + \delta H$. Neliömuoto $x \mapsto x^\intercal H x$ on jatkuva, joten voidaan merkitä

$$M = \max_{x \in S^{n-1}} |x^\intercal H x|.$$

Arvioidaan

$$x^\intercal (I_n + \delta H) x = \|x\|^2 + \delta x^\intercal H x \geq (1 - \delta M)\|x\|^2.$$

Valitsemalla $\delta < 1/M$ saadaan $x^\intercal(I_n + \delta H)x > 0$, eli matriisi $I_n + \delta H$ on symmetrinen ja positiivisesti definiitti. Täten

$$\mathcal{E}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\intercal (I_n + \delta H) x \leq 1\}$$

on hyvin määritelty ellipsoidi. Ehdon (8) nojalla kaikille kontaktipisteille u pätee

$$u^\intercal (I_n + \delta H) u = 1 + \delta u^\intercal H u > 1,$$

joten kontaktipisteet eivät kuulu ellipsoidiin $\mathcal{E}_\delta$. Koska reuna ∂K on kompakti, neliömuoto $x^\intercal H x$ on siellä tasaisesti jatkuva. Olkoon $\eta > 0$. Määritellään joukko

$$D = \partial K \cap \bigcup_{u \in S^{n-1} \cap \partial K} B(u, \eta)$$

ja valitaan η siten, että kaikille $y \in D$ pätee $y^\intercal H y > 0$. Tällöin kaikille $y \in D \subset \partial K$ pätee

$$y^\intercal (I_n + \delta H) y > 1$$

luvun $\delta < 1/M$ valinnasta riippumatta. Nyt joukko $\partial K \setminus D$ on kompakti, joten normifunktio saavuttaa siellä miniminsä, joka on aidosti suurempi kuin 1 joukon D valinnan perusteella. Olkoon tämä minimi $1+m$, $m > 0$. Valitaan nyt

$$0 < \delta < \frac{1}{M}\left(1 - \frac{1}{(1+m)^2}\right),$$

jolloin kaikille $y \in \partial K \setminus D$ pätee

$$y^\intercal (I_n + \delta H) y \geq (1 - \delta M)(1+m)^2 > 1.$$

Täten mikään joukon ∂K piste ei sisälly ellipsoidiin $\mathcal{E}_\delta$ kun δ on riittävän pieni. Tästä seuraa, että ellipsoidia $\mathcal{E}_\delta$ voidaan laajentaa hieman, eli se ei ole tilavuudeltaan maksimaalinen. Ristiriita syntyy, jos osoitetaan, että ellipsoidin $\mathcal{E}_\delta$ tilavuus on vähintään pallon B_2^n tilavuus. Olkoot $(\lambda_i)_{i=1}^n$ matriisin $I_n + \delta H$ ominaisarvot. Ominaisarvoille pätee yhtälö

$$\sum_i \lambda_i = \mathrm{tr}(I_n + \delta H) = n,$$

sillä matriisin H jälki voitiin valita nollaksi. Koska matriisin $(I_n + \delta H)$ muodostama neliömuoto on positiivisesti definiitti, kaikki ominaisarvot ovat positiivisia. Nyt aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\left(\prod_i \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_i \lambda_i = 1,$$

eli $\prod_i \lambda_i \leq 1$. Nyt saadaan tarvittava arvio

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_\delta) = \mathrm{vol}(B_2^n)\left(\prod_i \lambda_i\right)^{-\frac{1}{2}} \geq \mathrm{vol}(B_2^n)$$

ja antiteesi kaatuu. □

Seuraus 2.6. ***(Johnin lause)***
Olkoon $K \in \mathbb{R}^n$ symmetrinen konveksi joukko ja olkoon $\mathcal{E}$ sen sisältämä Johnin ellipsoidi. Tällöin

$$\mathcal{E} \subset K \subset \sqrt{n}\mathcal{E}$$

Todistus. Käyttämällä sopivaa lineaarikuvausta väite saadaan muotoon

$$B_2^n \subset T \subset \sqrt{n} B_2^n$$

konveksin joukon K kuvalle T. Ellipsoidin maksimaalisuus säilyy, sillä lineaarikuvaus skaalaa kaikkia tilavuuksia samalla kertoimella. Triviaalisti myös konveksisuus ja symmetrisyys säilyvät. Johnin ellipsoidin karakterisaation ja sitä edeltäneen lemman 2.3 nojalla joukon T reunalta löytyvät vektorit $(u_i)_{i=1}^m$ ja positiiviset reaaliluvut $(c_i)_{i=1}^m$ siten, että

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m c_i (x|u_i)^2.$$

Lemman 1.14 nojalla joukkojen T ja B_2^2 kantavat hypertasot pisteissä u_i ovat samat ja kaiken lisäksi yksikäsitteiset. Hypertasot ovat muotoa $\{x|(x|u_i) = 1\}$, joten kaikille $x \in T$ pätee $(x|u_i) \leq 1$. Täten

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m c_i (x|u_i)^2 \leq \sum_{i=1}^m c_i = n,$$

eli $\|x\| \leq \sqrt{n}$ ja $T \subset \sqrt{n} B_2^n$. $\square$

Kuten luvun alussa todettiin, Johnin lauseen tulos on tarkka. Tarkastellaan kuutiota $Q = [-1, 1]^n$, jonka kontaktipisteet yksikköpallon B_2^n kanssa ovat $\{\pm e_i\}$ kun e_i ovat kanoniset kantavektorit. Valitaan Johnin lauseen karakterisaatiossa $(u_i)_{i=1}^m = (e_i)_{i=1}^n$ ja $c_i = 1$ kaikilla i, jolloin triviaalisti ehto $x = \sum_i (x|e_i) e_i$ toteutuu. Täten yksikköpallo B_2^n on kuution Q Johnin ellipsoidi. Lisäksi kärkipisteiden $y = (\pm 1, \ldots, \pm 1) \in Q$ normi on $\sqrt{n}$, joten arviota $Q \subset \sqrt{n} B_2^n$ ei voi parantaa.

2.2 Löwnerin ellipsoidit

Kun symmetrisen konveksin kappaleen sisältämä maksimaalinen ellipsoidi on karakterisoitu, on aiheellista kysyä, voiko saman tehdä minimaaliselle ulkopuoliselle ellipsoidille. Vastaus on myönteinen, ja kyseisiä ellipsoideja kutsutaan joskus Löwnerin ellipsoideiksi. Itse asiassa täysin sama karakterisaatio pätee, mutta täytyy toki olettaa, että euklidinen pallo sisältää tarkasteltavan konveksin joukon.

Lause 2.7. *(Löwnerin ellipsoidien karakterisointi)*
Jokainen konveksi kappale $K \subset \mathbb{R}^n$ voidaan peittää yksikäsitteisellä tilavuuden suhteen minimaalisella ellipsoidilla. Kyseinen ellipsoidi on suljettu euklidinen pallo B_2^n jos ja vain jos $K \subset B_2^n$ ja on olemassa m kappaletta sellaisia

yksikkövektoreita $(u_i)_{i=1}^m$ *ja positiivisia vakioita* $(c_i)_{i=1}^m$*, että jokainen* $u_i \in \partial K$ *ja jokainen vektori* $x \in \mathbb{R}^n$ *on esitettävissä muodossa*

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i (x|u_i) u_i$$

Todistus. Minimaalisen ympäröivän ellipsoidin olemassaolo todistetaan kuten maksimaalisen ellipsoidin olemassaolo eli lause 2.2.

Karakterisaatiota varten osoitetaan, että joukon K minimaalinen ellipsoidi on B_2^n täsmälleen silloin, kun B_2^n on polaarijoukon K° maksimaalinen ellipsoidi. Oletetaan, että $B_2^n \subset K^\circ$ on maksimaalinen. Tällöin $K \subset B_2^n$ polaarin määritelmän nojalla. Oletetaan, että on olemassa joukon K peittävä ellipsoidi $\mathcal{F}$, jolle $\mathrm{vol}(\mathcal{F}) < \mathrm{vol}(B_2^n)$. Origokeskisen ellipsoidin polaari on origokeskinen ellipsoidi, joten olisi mukavaa, jos ellipsoidi $\mathcal{F}$ olisi origokeskinen. Ongelman voisi ratkaista siirtämällä joukkoa K, mutta tällöin K ja K° muuttuisivat epäsymmetrisiksi. On kuitenkin melko helppo nähdä, että ellipsoidia $\mathcal{F}$ voidaan siirtää. Oletetaan, että ellipsoidi $\mathcal{F}$ on muotoa

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-y)^\intercal A(x-y) \leq 1\}.$$

Olkoon $k \in K$. Tällöin myös $-k \in K$. Tällöin $\pm k \in \mathcal{F}$, eli

$$(k \pm y)^\intercal A(k \pm y) \leq 1,$$

kun ylemmät ja alemmat merkit vastaavat toisiaan. Lasketaan

$$2 \geq (k+y)^\intercal A(k+y) + (k-y)^\intercal A(k-y) = 2k^\intercal Ak + 2y^\intercal Ay.$$

Koska $y^\intercal Ay \geq 0$, tästä seuraa, että $k^\intercal Ak \leq 1$ kaikille $k \in K$. Voidaan siis olettaa, että $\mathcal{F}$ on origokeskinen. Tällöin myös $\mathcal{F}^\circ$ on origokeskinen ellipsoidi ja $\mathcal{F}^\circ \subset K^\circ$. Lisäksi lemman 1.18 tuloksesta

$$\mathrm{vol}(\mathcal{F})\mathrm{vol}(\mathcal{F}^\circ) = \mathrm{vol}(B_2^n)^2$$

ja antiteesistä seuraa, että $\mathrm{vol}(\mathcal{F}^\circ) > \mathrm{vol}(B_2^n)$. Tämä on ristiriita, sillä alussa oletettiin, että euklidinen pallo on joukon K° maksimaalinen ellipsoidi. Toinen suunta todistetaan täysin vastaavalla operaatiolla.

Nyt haluttu ympäröivän minimaalisen ellipsoidin karakterisaatio seuraa Johnin lauseesta, sillä vektorit u_i säilyvät polaarin muodostuksessa: Jos $u_i \in S^{n-1} \cap \partial K$, niin $(x|u_i) \leq 1$ kaikilla $x \in K$. Täten $u_i \in K^\circ$. Jos $u_i \notin \partial(K^\circ)$, niin jollain $t > 1$ on $tu_i \in K^\circ$. Tällöin kuitenkin $t = (tu_i|u_i) \leq 1$. Täten $u_i \in \partial(K^\circ)$. Bipolaarilauseen nojalla myös käänteinen pätee. □

3 Brascampin-Liebin ja Barthen epäyhtälöt

Myöhemmissä kappaleissa tarkastellaan konveksien joukkojen ja niiden Johnin ja Löwnerin ellipsoidien tilavuuksien suhteita. Ellipsoidin tilavuus osataan toki laskea, mutta yleisen konveksin kappaleen tapaus on hieman vaikeampi. Johnin lauseen todistuksessa huomattiin, että symmetrisen konveksin kappaleen K Johnin ellipsoidin ollessa yksikköpallo joukon K kaikki alkiot toteuttavat ehdon $(x|u_i) \leq 1$ kaikille kontaktipisteille u_i. Täten joukko K kuuluu puoliavaruuksien leikkaukseen

$$\hat{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |(x|u_i)| \leq 1 \text{ kaikilla } i\},$$

jonka tilavuus saattaa olla helpommin arvioitavissa. Olkoon f välin $[-1,1]$ karakteristinen funktio. Tällöin funktio

$$x \mapsto \prod_{i=1}^{m} f((x|u_i))$$

on joukon $\hat{K}$ karakteristinen funktio. Tilavuuden arviointi muuttuu siis integraalin

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f((x|u_i)) \, \mathrm{d}x$$

arvioinniksi, mikä ei ole kovin helppoa. Apu löytyy nk. Brascampin ja Liebin epäyhtälöstä.

Yleinen *Brascamp-Lieb -epäyhtälö* on vahva yleistys Youngin ja Hölderin epäyhtälöille ja se sanoo seuraavaa:

Olkoot $c_i > 0$, $n_i \in \mathbb{N}$ lukuja, joille pätee $\sum_i c_i n_i = n$, $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to [0, \infty]$ L^1-funktioita ja $B_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_i}$ lineaarisia surjektioita. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(B_i x)^{c_i} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{\sqrt{D}} \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x) \, \mathrm{d}x \right)^{c_i},$$

missä

$$D = \inf \left\{ \frac{\det(\sum_i c_i B_i^{\mathsf{T}} A_i B_i)}{\prod_i (\det A_i)^{c_i}} \right\}$$

ja infimum käy positiividefiniittien $n_i \times n_i$ matriisien A_i yli.

Tässä luvussa todistetaan Brascamp-Lieb -epäyhtälön erikoistapaus, jossa jokainen $n_i = 1$, eli surjektiot B_i ovat muotoa $x \mapsto (x|u_i)$ joillekin vektoreille u_i. Todistuksesta saadaan ilmaiseksi myös käänteinen versio, jota kutsutaan joskus Barthen lauseeksi. Tarkkaan ottaen tässä kappaleessa todistetaan ensin seuraavat kaksi lausetta:

Lause 3.1. ***(Brascamp-Lieb)***
Olkoot m positiivinen kokonaisluku ja $(u_i)_{i=1}^m$ nollasta eroavia avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Olkoot $(c_i)_{i=1}^m$ positiivisia reaalilukuja, joille pätee $\sum_i c_i = n$. Olkoon $F \in [0, \infty]$ pienin luku, jolle yhtälö

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i((x|u_i))^{c_i} \, \mathrm{d}x \leq F \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i(x) \, \mathrm{d}x \right)^{c_i}$$

pätee kaikille $L^1(\mathbb{R}; [0, \infty])$-funktioille $(f_i)_{i=1}^m$. Olkoon vielä

$$D = \inf \left\{ \frac{\det(\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i u_i u_i^\intercal)}{\prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i}} \;\middle|\; \lambda_i > 0 \right\}.$$

Tällöin $F = 1/\sqrt{D}$.

Lause 3.2. ***(Barthe)***
Olkoot m, $(c_i)_{i=1}^m$, $(u_i)_{i=1}^m$, ja D kuten edellisessä lauseessa. Olkoon $E \in [0, \infty]$ suurin luku, jolle epäyhtälö

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \, \mathrm{d}x \geq E \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i(x) \, \mathrm{d}x \right)^{c_i}$$

pätee kaikille $L^1(\mathbb{R}; [0, \infty])$-funktioille $(f_i)_{i=1}^m$, ja mitallisille funktioille h ehdolla

$$h(\sum_{i=1}^m c_i \theta_i u_i) \geq \prod_{i=1}^m f_i(\theta_i)^{c_i}$$

kaikille reaaliluvuille $(\theta_i)_{i=1}^m$. Tällöin $E = \sqrt{D}$.

Lisäksi seuraavassa luvussa todistetaan, että sopiville u_i pätee $F = E = D = 1$. Jotta näissä lauseissa olisi jotain järkeä, on funktion $x \mapsto f((x|u))$ oltava mitallinen aina, kun $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ on. Merkitään $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x|u)$. Mitallisuus seuraa, jos alkukuva $g^{-1}(M)$ on mitallinen kaikille mitallisille joukoille $M \subset \mathbb{R}$. Merkitään $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ja olkoon $e = (1, 0)$. Mitan kiertoinvarianttiuden nojalla voidaan olettaa, että $u = e$. Nyt

$$g^{-1}(M) = M \times \mathbb{R}^n,$$

erityisesti se on mitallisten joukkojen tulona mitallinen.

Brascampin-Liebin ja Barthen lauseiden todistukset

Molemmat lauseet seuraavat samasta todistuksesta, joka on muodoltaan sarja lemmoja ja lauseita. Tämän todistuksen olennaisimmat osat on peräisin F. Barthelta [3].

Kiinnitetään positiivinen kokonaisluku $m \geq n$ ja avaruuden $\mathbb{R}^n$ nollasta eroavat vektorit $(u_i)_{i=1}^m$. Kiinnitetään myös aidosti positiiviset reaaliluvut $(c_i)_{i=1}^m$, joille

$$\sum_{i=1}^m c_i = n.$$

Kirjoitetaan aluksi vakiot E, F toisella tavalla:

$$E = \inf \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, \mathrm{d}x}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \;\middle|\; f_i, h \text{ s.e. } h(\sum_{i=1}^m c_i \theta_i u_i) \geq \prod_{i=1}^m f_i(\theta_i)^{c_i}, \theta \in \mathbb{R}^m \right\},$$

$$F = \sup \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i((x|u_i))^{c_i}\, \mathrm{d}x}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \;\middle|\; f_i \in L^1(\mathbb{R}; [0,\infty]) \right\}.$$

Huomataan, että Brascampin-Liebin ja Barthen lauseet ovat triviaaleja, jos $F = \infty$ ja $E = 0$. Seuraavaksi poistetaan käsittelystä muutama tällainen tapaus.

Määritelmä 3.3. (Ehto (K))
Sanotaan, että vektorit (u_i) toteuttavat ehdon (K), jos

$$\bigcap_{i=1}^m \langle u_i \rangle^\perp = \{0\},$$

missä $\langle u \rangle^\perp$ on vektorin u virittämän aliavaruuden ortogonaalikomplementti.

Lemma 3.4. *Vektorit u_i toteuttavat ehdon (K) jos ja vain jos ne virittävät koko avaruuden $\mathbb{R}^n$.*

Todistus. Oletetaan, että ehto (K) toteutuu. Oletetaan vastoin väitettä, että vektorit u_i eivät viritä koko avaruutta. Tällöin löytyy maksimaalinen aliavaruus V, jonka nollasta poikkeavia alkioita ei voi esittää vektoreiden u_i lineaarikombinaatioina. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ voi esittää suorana summana $V \oplus V^\perp$, eli jokainen $x \in \mathbb{R}^n$ on muotoa $v + u$, missä $v \in V$ ja $u \in V^\perp$. Antiteesin nojalla jokainen vektoreiden u_i lineaarikombinaatio kuuluu joukkoon $V^\perp$. Erityisesti kaikilla u_i pätee $(v|u_i) = 0$ kaikilla $v \in V$ ja antiteesi romuttuu.

Jos taas vektorit u_i virittävät koko avaruuden, ja $(x|u_i) = 0$ kaikilla i jollain $x = \sum_i \mu_i u_i$, saadaan

$$(x|x) = (x|\sum_i \mu_i u_i) = \sum_i \mu_i (x|u_i) = 0,$$

eli $x = 0$. □

Seuraavan lauseen perusteella jatkossa voidaan olettaa, että ehto (K) pätee.

Lause 3.5. *Oletetaan, että ehto (K) ei päde. Tällöin $F = \infty$, $E = 0$ ja $D = 0$*

Todistus. Koska vektorit u_i eivät nyt viritä koko avaruutta, pisteet x jotka voidaan esittää muodossa $x = \sum_i c_i \theta_i u_i$ sisältyvät johonkin aitoon avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuteen V. Olkoon $(f_i)_i$ positiivisia L^1 funktioita. Halutaan löytää mukava mitallinen funktio $h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, jolle

$$h(\sum_i c_i \theta_i u_i) \geq \prod_i f_i(\theta_i)^{c_i}.$$

Valitaan

$$h(x) = \begin{cases} \infty, \text{ kun } x \in V \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}.$$

Koska aidot aliavaruudet ovat nollamittaisia, on $h(x) = 0$ melkein kaikkialla. Tästä seuraa, että $E = 0$.

Olkoot sitten $(f_i)_{i=1}^m$ positiivisia L^1-funktioita, joille $f_i(0) \neq 0$ kaikille i. Koska ehto (K) ei päde, lemman 3.4 nojalla vektorit u_i virittävät vain jonkin aidon aliavaruuden V. Käyttämällä ortogonaalista muuttujanvaihtoa voidaan olettaa, että tämä aito aliavaruus V on jokin $\mathbb{R}^s$, $s < n$. Fubinin lauseen nojalla

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i((x|u_i))^{c_i} = \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^{n-s}} \prod_{i=1}^m f_i((x|u_i))^{c_i} = \int_V \int_{V^\perp} \prod_{i=1}^m f_i(0)^{c_i} = \infty.$$

Täten $F = \infty$.

Viimeinen väite seuraa siitä, että vakion D määritelmässä osoittajassa on matriisi $\sum_i c_i \lambda_i u_i u_i^\intercal$. Jos ehto (K) ei toteudu, löytyy jokin nollasta eroava vektori v, jolle

$$\sum_i c_i \lambda_i u_i u_i^\intercal v = 0,$$

eli ko. lineaarikuvaus ei ole injektio. Täten se ei ole kääntyvä ja sen determinantti on nolla. □

Ottamalla infimum ja supremum pelkästään *Gaussin funktioiden* $t \mapsto \exp(-\lambda t^2)$ yli saadaan vakiot

$$E_g = \inf\left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum_i c_i\theta_i u_i} \prod_{i=1}^m f_i(\theta_i)^{c_i} \, \mathrm{d}x}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \;\middle|\; f_i(t) = \exp(-\lambda_i t^2), \lambda_i > 0 \right\},$$

$$F_g = \sup\left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i((x|u_i))^{c_i} \, \mathrm{d}x}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \;\middle|\; f_i(t) = \exp(-\lambda_i t^2), \lambda_i > 0 \right\}.$$

Vakion E_g määritelmässä on muutama ongelma. Ensinnäkin täytyy olettaa, että jokainen $x \in \mathbb{R}^n$ on ylipäänsä esitettävissä muodossa $x = \sum_i c_i\theta_i u_i$. Esitys on olemassa, kun oletetaan ehto (K). Jos ehto (K) ei päde, voidaan lauseen 3.5 perusteella sopia, että $E_g = 0$. Vakio F_g on sen sijaan hyvin määritelty ja lausetta 3.5 vastaavin perustein $F_g = \infty$, kun ehto (K) ei toteudu. Toinen ongelmallinen kohta vakion E_g määritelmässä on kuvaus

$$x \mapsto \sup_{x=\sum_i c_i\theta_i u_i} \prod_{i=1}^m f_i(\theta_i)^{c_i},$$

joka ei välttämättä ole mitallinen yleisessä tapauksessa[1]. Gaussin funktioiden tapauksessa se kuitenkin on, kuten nähdään lauseen 3.12 todistuksesta. Vastaavasti vakion E määritelmässä funktiota h ei voida korvata vastaavalla supremum-viritelmällä.

Brascampin-Liebin ja Barthen lauseet seuraavat, kun osoitetaan, että $E = E_g = \sqrt{D}$ ja $F = F_g = 1/\sqrt{D}$. Tämä on jo osoitettu, jos ehto (K) ei toteudu. Todistuksesta seuraa, että Gaussin funktiot maksimoivat vakion F ja minimoivat vakion E.

Oletetaan koko loppukappaleen ajan, että ehto (K) pätee. Aloitetaan pienellä lemmalla

Lemma 3.6. *Olkoon A positiividefiniitti $n \times n$ matriisi. Tällöin*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x^\intercal Ax) \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}.$$

Todistus. Koska A on symmetrinen ja positiivisesti definiitti, se voidaan diagonalisoida ortogonaalisella kannanvaihdolla U ja sen ominaisarvot ovat positiiviset. Kirjoitetaan $A = U^\intercal DU$, missä D on kuvauksen A ominaisarvojen

[1] Kun funktiot f_i ovat karakteristisia funktioita, tarkasteltava kuvaus on jonkin joukon $\sum_i c_iK_i$ karakteristinen funktio, kun K_i on (1-ulotteisesti) mitallinen joukko suoralla $\langle u_i \rangle$. On olemassa Cantorin 1/3-joukon osajoukko A, jolle $A+A$ ei ole mitallinen, ks. [6], joten on melko helppoa konstruoida avaruuden $\mathbb{R}^n$ epämitallinen joukko, joka on muotoa $\sum_i c_iK_i$.

λ_i muodostama diagonaalimatriisi. Koska ortogonaaliselle kannanvaihdolle pätee $U^\intercal = U^{-1}$, on myös $|\det U| = 1$. Haluttu tulos saadaan muuttujanvaihdolla $y = Ux$ ja Fubinin lauseella:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x^\intercal Ax)\, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-(Ux)^\intercal D(Ux))\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y^\intercal Dy)\frac{1}{|\det U|}\, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda_i y_i^2)\, \mathrm{d}y \\
&= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda_i y_i^2)\, \mathrm{d}y_i \\
&= \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}.
\end{aligned}$$

□

Lause 3.7. *Edellisin merkinnöin $F_g = 1/\sqrt{D}$.*

Todistus. Olkoot $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i(t) = \exp(-\lambda_i t^2)$ funktioita kaikille $i = 1, \ldots, m$. Matriisi $\sum_i c_i\lambda_i u_i u_i^\intercal$ on positiivisesti definiitti, sillä se on symmetrinen ja sen määräämä neliömuoto $x \mapsto \sum_i c_i\lambda_i (x|u_i)^2$ on positiivinen. Lemmaa 3.6 soveltaen lasketaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i((x|u_i))^{c_i}\, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^m c_i\lambda_i(x|u_i)^2\right)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-x^\intercal\left(\sum_{i=1}^m c_i\lambda_i u_i u_i^\intercal\right)x\right)\, \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(\sum_{i=1}^m c_i\lambda_i u_i u_i^\intercal)}}.
\end{aligned}$$

Erityisesti ehto (K) takaa että edellinen integraali on äärellinen. Vastaavasti lasketaan

$$\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i(x)\, \mathrm{d}x\right)^{c_i} = \prod_{i=1}^m \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}^{c_i} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i}}}.$$

Vakioksi F_g saadaan

$$\begin{aligned}
F_g &= \sup \left\{ \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i}}{\det(\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i u_i u_i^\intercal)}} \;\middle|\; \lambda_i > 0 \right\} \\
&= 1/\inf \left\{ \sqrt{\frac{\det(\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i u_i u_i^\intercal)}{\prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i}}} \;\middle|\; \lambda_i > 0 \right\} \\
&= 1/\sqrt{D}.
\end{aligned}$$

Erityisesti tämä yhtälö pätee myös silloin, kun $D = 0$. □

Edellisen lauseen todistuksesta seuraa myös, että D on aina äärellinen. Seuraavaksi todistetaan $E \geq DF$. Merkitään selkeyden vuoksi funktion f integrointia koko määrittelyjoukon yli symbolilla $\int f$.

Lemma 3.8. *Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ jatkuvia ja integroituvia funktioita. Olkoot $t, T(t) \in \mathbb{R}$ sellaisia, että*

$$\frac{1}{\int f} \int_{-\infty}^{T(t)} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\int g} \int_{-\infty}^{t} g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Tällöin kuvaus $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on C^1-bijektio ja

$$T'(t) f(T(t)) = \frac{\int f}{\int g} g(t).$$

Todistus. Määritellään jatkuvat kuvaukset $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(t) = \frac{1}{\int f} \int_{-\infty}^t f \, \mathrm{d}x$ ja $G(t)$ vastaavasti. Funktioiden f ja g ominaisuuksista seuraa, että F ja G ovat kasvavia C^1-bijektioita välille $(0, 1)$. Erityisesti tästä seuraa, että funktio T on hyvin määritelty. Myös käänteisfunktiot F^{-1} ja G^{-1} ovat jatkuvasti derivoituvia, sillä f ja g ovat aidosti positiivisia. Nyt voidaan kirjoittaa $T = F^{-1} \circ G$, eli myös T on C^1-bijektio. Suoraan derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned}
T'(t) = G'(t)(F^{-1})'(G(t)) &= G'(t)(F^{-1})'(F(T(t))) \\
&= G'(t) \frac{1}{F'(T(t))} \\
&= \frac{g(t)}{\int g} \frac{\int f}{f(T(t))}
\end{aligned}$$

ja väite seuraa. □

Lemma 3.9. *Olkoon $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1-kuvaus ja olkoon $\mathcal{D}V(x)$ sen derivaattakuvaus pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että $\mathcal{D}V(x)$ on positiividefiniitti jokaisessa pisteessä x. Tällöin kuvaus V on injektio.*

Todistus. Olkoot $x,y \in \mathbb{R}^n$ eri pisteitä. Voidaan olettaa, että $x = 0$ ja $V(x) = 0$. Riittää osoittaa, että $V(y) \neq 0$. Integroidaan derivaattamatriisia komponenteittain pitkin janaa $[0, y]$:

$$\int_0^1 \mathcal{D}V(ty)\mathrm{d}t.$$

Kirjoitetaan $x = ty$ ja lasketaan ketjusäännön avulla

$$\frac{\mathrm{d}V_j(ty)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_j(ty)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_j(ty)}{\partial x_i} y_i.$$

Matriisin $\mathcal{D}V(ty)$ rivi j on juurikin $(\partial_i V_j(ty))_i$, joten vektorin

$$\int_0^1 \mathcal{D}V(ty)\mathrm{d}t \cdot y = \int_0^1 \mathcal{D}V(ty)y \ \mathrm{d}t$$

paikan j komponentti on

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_j(ty)}{\partial x_i} y_i = \int_0^1 \mathrm{d}V_j(ty) = V_j(y).$$

Täten

$$\int_0^1 \mathcal{D}V(ty)\mathrm{d}t \cdot y = V(y).$$

Käyttämällä derivaatan positiividefiniittisyyttä saadaan

$$y^\intercal V(y) = \int_0^1 y^\intercal \mathcal{D}V(ty)y \ \mathrm{d}t > 0,$$

eli erityisesti $V(y) \neq 0$. □

Lause 3.10. *Edellisin merkinnöin $E_g \geq E \geq DF \geq DF_g$, kun $D \neq 0$.*

Todistus. Epäyhtälöt $E_g \geq E$ ja $F \geq F_g$ seuraavat suoraan määritelmistä. Olkoon $f_i, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvia ja aidosti positiivisia integroituvia funktioita kaikille $i = 1, \ldots, m$. Määritellään funktiot $T_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä

$$\frac{1}{\int f_i} \int_{-\infty}^{T_i(t)} f_i(x) \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\int g_i} \int_{-\infty}^{t} g_i(x) \ \mathrm{d}x.$$

Lemman 3.8 nojalla T_i on C^1-bijektio ja

$$T_i'(t)f_i(T_i(t)) = \frac{\int f_i}{\int g_i} g_i(t)$$

kaikille $i = 1, \ldots, m$. Määritellään kuvaus $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{m} c_i T_i((y|u_i))u_i.$$

Ketjusäännöstä seuraa, että kuvauksen φ derivaattakuvaus pisteessä y on

$$\mathcal{D}\varphi(y) = \sum_{i=1}^{m} c_i T_i'((y|u_i))u_i u_i^\intercal.$$

Kuvaus φ on lemman 3.9 nojalla injektio; derivaatan $\mathcal{D}\varphi$ pisteessä y määräämän neliömuodon arvolle pisteessä $x \neq 0$ saadaan

$$x^\intercal \left(\sum_{i=1}^{m} c_i T_i'((y|u_i))u_i u_i^\intercal \right) x = \sum_{i=1}^{m} c_i T_i'((y|u_i))(x|u_i)^2 > 0,$$

sillä aidosti kasvavan funktion derivaattana T_i' on aidosti positiivinen ja ehto (K) takaa, että ainakin yksi sisätulo $(x|u_i)$ eroaa nollasta.

Olkoon h mitallinen funktio, jolle kaikilla $\theta \in \mathbb{R}^m$

$$h\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i u_i \right) \geq \prod_{i=1}^{m} f_i(\theta_i)^{c_i}.$$

Tehdään muuttujanvaihto $x = \varphi(y)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\mathrm{d}x &\overset{i)}{\geq} \int_{\mathbb{R}^n} h\left(\sum_{i=1}^{m} c_i T_i((y|u_i))u_i \right) \det\left(\sum_{i=1}^{m} c_i T_i'((y|u_i))u_i u_i^\intercal \right) \mathrm{d}y \\
&\overset{ii)}{\geq} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(T_i((y|u_i)))^{c_i} \det\left(\sum_{i=1}^{m} c_i T_i'((y|u_i))u_i u_i^\intercal \right) \mathrm{d}y \\
&\overset{iii)}{\geq} D \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} \left[f_i(T_i((y|u_i)))T_i'((y|u_i)) \right]^{c_i} \mathrm{d}y \\
&\overset{iv)}{=} D \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\int f_i}{\int g_i} g_i((y|u_i)) \right]^{c_i} \mathrm{d}y \\
&= D \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} g_i((y|u_i))^{c_i} \mathrm{d}y}{\prod_{i=1}^{m} \left(\int g_i \right)^{c_i}} \prod_{j=1}^{m} \left(\int f_j \right)^{c_j}.
\end{aligned}$$

Tässä epäyhtälö i) seuraa muuttujanvaihdosta. Kuvaus φ ei välttämättä ole surjektio, joten integraali on arvioitava alaspäin. Epäyhtälössä ii) käytetään oletusta funktiosta h, kun $\theta_i = T_i((y|u_i))$, ja epäyhtälössä iii) arvioidaan muuttujanvaihdon determinanttia vakiolla D. Kohdassa iv) on käytetty lemman 3.8 antamaa kaavaa funktioille (T_i).

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska jatkuvat funktiot välille $(0, \infty)$ muodostavat tiheän avaruuden $L^1(\mathbb{R}; [0, \infty])$ osajoukon, voidaan funktiot h, $(f_i)_i$ ja $(g_i)_i$ valita niin, että

$$\begin{aligned} E + \varepsilon &\geq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\mathrm{d}x}{\prod_{i=1}^m \left(\int f_i\right)^{c_i}} \\ &\geq D \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m g_i((y|u_i))^{c_i} \mathrm{d}y}{\prod_{i=1}^m \left(\int g_i\right)^{c_i}} \\ &\geq D(F - \varepsilon). \end{aligned}$$

Väite seuraa tästä, sillä D on äärellinen. □

Lemma 3.11. *Olkoot $(\lambda_i)_{i=1}^m$ aidosti positiivisia reaalilukuja. Tällöin kuvaukset $N_\lambda, M_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$N_\lambda(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i (x|u_i)^2},$$

$$M_\lambda(x) = \inf \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i \frac{\theta_i^2}{\lambda_i}} \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^m c_i \theta_i u_i \right\}$$

ovat hyvin määriteltyjä avaruuden $\mathbb{R}^n$ normeja.

Todistus. Todistetaan, että M_λ on normi. Kuvauksen N_λ normiksi todistaminen on hyvin samankaltainen. Selvästi $M_\lambda(x) \in [0, \infty)$, sillä ehto (K) takaa, että jokaisella x on esitys $\sum_i c_i \theta_i u_i$. Selvästi myös $M_\lambda(0) = 0$. Jos $M_\lambda(x) = 0$, on olemassa vektorin x esitys $\sum_i c_i \theta_i u_i$, jossa luvut θ_i ovat itseisarvoltaan tasaisesti mielivaltaisen pieniä. Tästä seuraa, että $x = 0$.

Olkoon $\mu \in \mathbb{R}$ nollasta eroava luku. Ehto $M_\lambda(\mu x) = |\mu| M_\lambda(x)$ on ilmeinen, sillä vektorin μx esityksissä olevat vektorit $\theta = (\theta_i)_i$ ovat täsmälleen vektorit $|\mu|^{-1}\hat{\theta}$, kun $\hat{\theta}$ on vastaava vektori alkion x esityksessä.

Kolmioepäyhtälöä varten määritellään sisätulo $(\cdot|\cdot)_\lambda : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$(\eta|\zeta)_\lambda = \sum_{i=1}^m c_i \frac{\eta_i \zeta_i}{\lambda_i},$$

jolle pätee Cauchy-Schwarzin nojalla

$$(\eta|\zeta)_\lambda^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m c_i \frac{\eta_i^2}{\lambda_i}\right)\left(\sum_{i=1}^m c_i \frac{\zeta_i^2}{\lambda_i}\right) = \sqrt{(\eta|\eta)_\lambda (\zeta|\zeta)_\lambda}$$

ja erityisesti yhtälön $(\eta+\zeta|\eta+\zeta)_\lambda = (\eta|\eta)_\lambda + (\zeta|\zeta)_\lambda + 2(\eta|\zeta)_\lambda$ kautta

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m c_i \frac{(\eta_i+\zeta_i)^2}{\lambda_i}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i \frac{\eta_i^2}{\lambda_i}} + \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i \frac{\zeta_i^2}{\lambda_I}}.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ kiinnitetty. Valitaan vektorit η ja ζ niin, että

$$\sqrt{\sum_i c_i \frac{\eta_i^2}{\lambda_i}} - M_\lambda(x) \leq \varepsilon$$

ja

$$\sqrt{\sum_i c_i \frac{\zeta_i^2}{\lambda_i}} - M_\lambda(y) \leq \varepsilon.$$

Tällöin $\sum_i c_i(\eta_i+\zeta_i)u_i = x+y$ ja

$$M_\lambda(x+y) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i \frac{(\eta_i+\zeta_i)^2}{\lambda_i}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i \frac{\eta_i^2}{\lambda_i}} + \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i \frac{\zeta_i^2}{\lambda_I}} \leq M_\lambda(x)+M_\lambda(y)+2\varepsilon.$$

Kolmioepäyhtälö seuraa tästä. □

Lause 3.12. *Edellisin merkinnöin $E_g F_g = 1$, kun E_g ja F_g ovat äärellisiä. Lisäksi $E_g = 0$ täsmälleen silloin kun $F_g = \infty$ ja kääntäen.*

Todistus. Olkoon $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^m$ vektori jonka alkiot ovat aidosti positiivisia. Merkintöjen lyhentämiseksi asetetaan

$$F_g(\lambda) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m \exp(-\lambda_i (x|u_i)^2)^{c_i} \mathrm{d}x}{\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda_i t^2) \mathrm{d}t\right)^{c_i}}$$

ja

$$E_g(\lambda) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum_i c_i\theta_i u_i} \prod_{i=1}^m \left(\exp\left(-\frac{\theta_i^2}{\lambda_i}\right)\right)^{c_i} \mathrm{d}x}{\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{\lambda_i}\right)\mathrm{d}t\right)^{c_i}},$$

jolloin

$$F_g = \sup\{F_g(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^m\}$$

ja
$$E_g = \inf\{E_g(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}^m_+\}.$$
Määritellään kuvaus
$$N_\lambda(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i (x|u_i)^2}.$$
Lemmasta 3.11 seuraa, että N_λ on hyvin määritelty normi, jonka suljettu yksikköpallo on ellipsoidi $\mathcal{F}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid N_\lambda \leq 1\}$. Olkoon $t > 0$. Tällöin normin skaalausominaisuuden nojalla
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid N_\lambda \leq t\} = t\mathcal{F}_\lambda. \tag{9}$$
ja Lebesguen mitan ominaisuuksien perusteella
$$\mathrm{vol}\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid N_\lambda \leq t\}\right) = t^n \mathrm{vol}(\mathcal{F}_\lambda). \tag{10}$$
Käytetään *Cavalierin periaatetta*, jonka mukaan positiiviselle L^1-funktiolle f pätee
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{vol}\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq t\}\right)\mathrm{d}t.$$
Lasketaan
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m \exp\left(-\lambda_i (x|u_i)^2\right)^{c_i} \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-N_\lambda(x)^2\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{i)}{=} \int_0^\infty \mathrm{vol}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exp\left(-N_\lambda(x)^2\right) \geq t\right\}\right)\mathrm{d}t \\
&\overset{ii)}{=} \int_0^1 \mathrm{vol}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid N_\lambda(x) \leq \sqrt{-\log t}\right\}\right)\mathrm{d}t \\
&\overset{iii)}{=} \mathrm{vol}(\mathcal{F}_\lambda) \int_0^1 (-\log t)^{n/2}\mathrm{d}t \\
&\overset{iv)}{=} \mathrm{vol}(\mathcal{F}_\lambda) \int_0^\infty e^{-u} u^{n/2}\mathrm{d}u \\
&\overset{v)}{=} \mathrm{vol}(\mathcal{F}_\lambda)\Gamma(1 + \frac{n}{2}).
\end{aligned}$$
Yhtälöt *i)* ja *iii)* seuraavat yhtälöistä (9) ja (10). Yhtälö *ii)* seuraa siitä, että joukko
$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exp\left(-N_\lambda(x)^2\right) > 1\right\}$$
on tyhjä ja siten nollanmittainen. Yhtälö *iv)* on muuttujanvaihto $t = e^{-u}$, ja yhtälö *v)* seuraa gammafunktion reaalisesta määritelmästä: kaikille $x > 0$ määritellään
$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Nyt

$$F_g(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}^{c_i} \mathrm{vol}(\mathcal{F}_\lambda)\Gamma(1+\frac{n}{2}) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{F}_\lambda)}{\mathrm{vol}(B_2^n)} \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{c_i/2}, \tag{11}$$

ja erityisesti $F_g(\lambda)$ on äärellinen. Viimeinen yhtäsuuruus tulee n-ulotteisen euklidisen yksikköpallon tilavuudesta, joka on

$$\mathrm{vol}(B_2^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}.$$

Tämän voi nähdä vaihtamalla edellisen laskun normi N_λ euklidiseen normiin.

Määritellään vastaavasti normi

$$M_\lambda(x) = \inf \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\theta_i^2}{\lambda_i}} \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i u_i, (\theta_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m \right\}$$

ja joukko

$$\mathcal{E}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid M_\lambda(x) \leq 1\}.$$

Jälleen lemma 3.11 takaa, että M_λ todella on normi. Kaavat (9) ja (10) pätevät sellaisenaan myös normille M_λ ja joukolle $\mathcal{E}_\lambda$. Myös täysin vastaavalla tavalla integrointi tuottaa

$$E_g(\lambda) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-M_\lambda(x)^2\right) \mathrm{d}x}{\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{\lambda_i}\right) \mathrm{d}t\right)^{c_i}} = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_\lambda)}{\mathrm{vol}(B_2^n)} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^{c_i/2}}. \tag{12}$$

Erityisesti myös $E_g(\lambda)$ on äärellinen ja sen määritelmässä esiintyvä supremumviritelmä muodostaa jatkuvan ja siten mitallisen funktion.

Nyt osoitetaan, että $\mathcal{E}_\lambda$ on itse asiassa ellipsoidin $\mathcal{F}_\lambda$ polaarijoukko. Tämä onnistuu lauseen 1.22 ja kantajafunktioiden avulla. Lauseen 1.21 nojalla polaariellipsoidin $\mathcal{F}_\lambda^\circ$ kantajafunktio on sama kuin joukon $\mathcal{F}_\lambda$ Minkowskin funktionaali. Toisaalta Minkowskin funktionaali on selvästi N_λ. Osoitetaan, että

$$N_\lambda(x) = \sup_{\theta\colon \sum_i c_i \frac{\theta_i^2}{\lambda_i} \leq 1} \sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i(x|u_i). \tag{13}$$

Ehto "$\leq$" seuraa suoralla laskulla valitsemalla $\theta_i = \lambda_i(x|u_i)N_\lambda(x)^{-1}$. Toinen suunta saadaani Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöstä seuraavalla tavalla.

Olkoot θ_i sellaisia, että $\sum_i c_i \frac{\theta_i^2}{\lambda_i} \le 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^m c_i\theta_i(x|u_i)\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^m \left(\sqrt{\frac{c_i}{\lambda_i}}\theta_i\right)\left(\sqrt{c_i\lambda_i}(x|u_i)\right)\right)^2 \\ &\overset{CS}{\le} \left(\sum_{i=1}^m c_i\frac{\theta_i^2}{\lambda_i}\right)\left(\sum_{i=1}^m c_i\lambda_i(x|u_i)^2\right) \\ &\le \sum_{i=1}^m c_i\lambda_i(x|u_i)^2 = N_\lambda(x)^2.\end{aligned}$$

Täten väite (13) on todistettu. Nyt polaariellipsoidin $\mathcal{F}_\lambda^\circ$ kantajafunktiolle pätee

$$\begin{aligned}h_{\mathcal{F}_\lambda^\circ}(x) &= N_\lambda(x) \\ &= \sup_{\theta:\ \sum_i c_i\frac{\theta_i^2}{\lambda_i}\le 1} \sum_{i=1}^m c_i\theta_i(x|u_i) \\ &= \sup_{\theta:\ \sum_i c_i\frac{\theta_i^2}{\lambda_i}\le 1} (x|\sum_{i=1}^m c_i\theta_i u_i) \\ &= \sup_{y\in\mathcal{E}_\lambda}(x|y) \\ &= h_{\mathcal{E}_\lambda}(x).\end{aligned}$$

Lauseen 1.22 nojalla $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda^\circ$ ja siten lemman 1.18 perusteella

$$\mathrm{vol}(\mathcal{F}_\lambda)\mathrm{vol}(\mathcal{E}_\lambda) = \mathrm{vol}(B_2^n)^2.$$

Yhdistämällä tämä yhtälöihin (11) ja (12) mielivaltaiselle $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ saadaan

$$F_g(\lambda)E_g(\lambda) = 1.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos F_g ja E_g ovat molemmat äärellisiä, valitaan λ siten, että $F_g - F_g(\lambda) \le \varepsilon/E_g$. Tällöin

$$1 = F_g(\lambda)E_g(\lambda) \ge F_gE_g - \varepsilon,$$

eli $F_gE_g \le 1$. Toinen suunta pätee vastaavasti. Jos $F_g = \infty$, löytyy mielivaltaisen suuria lukuja $F_g(\lambda)$, eli löytyy mielivaltaisen pieniä lukuja $E_g(\lambda)$. Täten $E_g = 0$ ja kääntäen. □

Lause 3.13. *Edellisin merkinnöin* $E = E_g = \sqrt{D}$ *ja* $F = F_g = 1/\sqrt{D}$

Todistus. Väite seuraa yhdistämällä lauseet 3.5, 3.7, 3.10 ja 3.12, sillä tällöin

$$\sqrt{D} = E_g \geq E \geq DF \geq DF_g = \sqrt{D}.$$

Väite pätee myös, kun $D = 0$, sillä ehdosta $F_g = \infty$ seuraa $E_g = E = 0$ ja $F = \infty$. □

Brascampin-Liebin sekä Barthen epäyhtälöt on nyt todistettu.

3.1 Geometriset versiot

Vakion D laskemiseksi asetetaan vektoreille (u_i) ja vakioille (c_i) Johnin lauseesta tuttu lisäehto: vaaditaan, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ on esitys $x = \sum_i c_i(x|u_i)u_i$.

Vakion D määrittämiseen käytetään Cauchyn ja Binet'n lemmaa, joka yleistää tutun determinanttien laskusäännön $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ matriisituloille, joiden tekijät eivät välttämättä ole neliömatriiseja. Käytetään tässä matriiseille merkintää $A = (a_i)_{i=1}^m$, missä a_i on matriisin A paikan i sarakevektori. Jos taas $(b_i)_i$ ovat matriisin B rivivektorit, kirjoitetaan samalla logiikalla $B = ((b_i)_i)^\intercal$.

Lemma 3.14. *(Cauchy-Binet)*
Olkoot $A = (a_i)_{i=1}^m$ $n \times m$ matriisi ja $B = ((b_i)_{i=1}^m)^\intercal$ $m \times n$ matriisi. Olkoon $\mathcal{S}$ kaikkien joukon $\{1, \ldots, m\}$ n-kombinaatioiden, ts. n alkion osajoukkojen, joukko. Kun $S \in \mathcal{S}$, merkitään $A_S = (a_i)_{i \in S}$ ja $B^S = ((b_i)_{i \in S})^\intercal$. Tällöin

$$\det(AB) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \det(A_S)\det(B^S).$$

Suomeksi sanottuna tulon determinantti saadaan laskettua seuraavasti: valitaan ensin n kappaletta matriisin A sarakevektoreita ja vastaavilta paikoilta n kappaletta matriisin B rivivektoreita. Muodostetaan näistä matriisit A_S ja B^S ja lasketaan niiden determinanttien tulo. Matriisin AB determinantti saadaan summaamalla tulot $\det(A_S)\det(B^S)$ kaikkien mahdollisten sarakevektorien valintojen yli. Cauchyn ja Binet'n lemman todistus ohitetaan. Katso [10, Prop. 2.1.2].

Lause 3.15. *Oletetaan, että luvut $c_i > 0$ ja vektorit u_i toteuttavat ehdot $\|u_i\| = 1$ ja $I_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i u_i^\intercal$. Tällöin $D = 1$.*

Todistus. Valitsemalla vakion D määritelmässä

$$D = \inf\left\{ \frac{\det(\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i u_i u_i^\intercal)}{\prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i}} \;\middle|\; \lambda_i > 0 \right\}$$

$\lambda_i = 1$ kaikilla i saadaan heti arvio $D \leq 1$. Riittää osoittaa, että $D \geq 1$. Olkoot $\lambda_i > 0$ vakioita. Huomataan, että $\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i u_i u_i^\intercal$ on matriisien $A = (\sqrt{c_i}\lambda_i u_i)_{i=1}^m$ ja $B = ((\sqrt{c_i}u_i)_{i=1}^m)^\intercal$ tulo. Nyt riittää osoittaa, että $\det(AB) \geq \prod_i \lambda_i^{c_i}$.

Oletuksen nojalla $I_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i u_i^\intercal$, joten Cauchyn ja Binet'n lemman merkinnöin ja perustein

$$1 = \det(I_n) = \det(B^\intercal B) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \det((B^\intercal)_S) \det(B^S) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \det(B^S)^2, \tag{14}$$

sillä $(B^\intercal)_S = (B^S)^\intercal$. Vastaavasti

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{S \in \mathcal{S}} \det(A_S) \det(B^S) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}} \det(B^S)^2 \prod_{i \in S} \lambda_i. \end{aligned} \tag{15}$$

Huomataan, että yhtälö (15) on painotettu keskiarvo positiivisista alkioista $\prod_{i \in S} \lambda_i$, sillä positiivisten painojen $\det(B^S)^2$ summa on yhtälön (14) mukaisesti 1. Painotetun aritmeettis-geometrisen epäyhtälön 1.2 oletukset toteutuvat ja siten

$$\det(AB) \geq \prod_{S \in \mathcal{S}} \left(\prod_{i \in S} \lambda_i \right)^{\det(B^S)^2} = \prod_{j=1}^m \lambda_j^{\sum_{S, j \in S} \det(B^S)^2}.$$

Riittää osoittaa, että vakion λ_j kokonaiseksponentti on c_j kaikilla j. Lasketaan

$$\begin{aligned} \sum_{S, j \in S} \det(B^S)^2 &= \sum_{S \in \mathcal{S}} \det(B^S)^2 - \sum_{S, j \notin S} \det(B^S)^2 \\ &\overset{i)}{=} 1 - \sum_{S, j \notin S} \det(B^S)^2 \\ &\overset{ii)}{=} 1 - \det(\sum_{i \neq j}^m (\sqrt{c_i} u_i (\sqrt{c_i} u_i)^\intercal)) \\ &\overset{iii)}{=} 1 - \det(I_n - \sqrt{c_j} u_j (\sqrt{c_j} u_j)^\intercal) \\ &\overset{iv)}{=} \|\sqrt{c_j} u_j\|^2 = c_j. \end{aligned}$$

Yhtälö $i)$ seuraa yhtälöstä (14) ja yhtälö $iii)$ seuraa oletuksesta. Yhtälöä $ii)$ varten olkoon C $(m-1) \times n$ -matriisi, joka saadaan matriisista B poistamalla rivi j. Olkoon $\mathcal{S}'$ vastaava n-kombinaatioiden joukko. Kuten yhtälön (14) tapauksessa lasketaan

$$\det(CC^\intercal) = \det(C^\intercal C) = \sum_{S\in\mathcal{S}'} \det(C^S)^2 = \sum_{S\in\mathcal{S}, j\notin S} \det(B^S)^2.$$

Toisaalta

$$CC^\intercal = \sum_{i\neq j}^{m} c_i u_i u_i^\intercal,$$

ja yhtälö $ii)$ seuraa. Yhtälöä $iv)$ varten lasketaan vektoreille $u, v \in \mathbb{R}^n$ blokkimatriiseilla

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ v^\intercal & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + uv^\intercal & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -v^\intercal & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & u \\ 0 & 1 + v^\intercal u \end{pmatrix}.$$

Ottamalla determinantit puolittain saadaan

$$\det(I_n + uv^\intercal) = 1 + v^\intercal u.$$

Yhtälö $iv)$ ja siten koko lause seuraavat valitsemalla $v = -u$. □

Yhdistämällä lauseet 3.1, 3.2 ja 3.15 saadaan kaksi vahvaa ja erittäin käyttökelpoista epäyhtälöä:

Lause 3.16. *(**Geometrinen Brascamp-Lieb**)*
Olkoot $(u_i)_{i=1}^m$ yksikkövektoreita ja $(c_i)_{i=1}^m$ positiivisia vakioita siten, että jokaisella vektorilla $x \in \mathbb{R}^n$ on esitys

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i (x|u_i) u_i.$$

Olkoot vielä $f_i : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ L^1-funktioita kaikille $i = 1, \ldots, m$. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i((x|u_i))^{c_i} \mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i(x) \mathrm{d}x \right)^{c_i}.$$

Lause 3.17. *(**Geometrinen Barthe**)*
Olkoot luvut c_i, vektorit u_i ja funktiot f_i kuten lauseessa 3.16. Oletetaan, että mitalliselle funktiolle $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pätee

$$h(\sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i u_i) \geq \prod_{i=1}^{m} f_i(\theta_i)^{c_i}$$

kaikilla $(\theta_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \mathrm{d}x \geq \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i(x) \mathrm{d}x \right)^{c_i}.$$

Todistuksen perusteella tiedetään, että nämä kaksi epäyhtälöä ovat tarkkoja, eli vakiota $D = 1$ ei voida parantaa. Voidaan kuitenkin tutkia, milloin epäyhtälöt ovat yhtälöitä. Barthen epäyhtälön tapauksessa tässä kysymyksessä on järkeä vain silloin, kun valitaan

$$h(x) = \sup_{x=\sum_i c_i\theta_i u_i} \prod_{i=1}^{m} f_i(\theta_i)^{c_i}.$$

Riittävä ehto yhtäsuuruudelle on se, että vektorit $(u_i)_{i=1}^n$ muodostavat ortonormaalin kannan. Tällöin voidaan valita $c_i = 1$ kaikille i, sillä ehto

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x|u_i)u_i$$

toteutuu ortonormaaleille kannoille. Olkoon U ortonormaali muuttujanvaihto, joka vie kanonisen kannan kannaksi $\{u_i\}$. Nyt

$$(Uy|u_i) = (x|U^\intercal u_i) = (y|e_i) = y_i.$$

Käytetään lineaarista muuttujanvaihtoa $x = Uy$, jolloin $|\det U| = 1$. Muuttujanvaihtolauseen sekä Fubinin lauseen nojalla

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i((x|u_i))^{c_i} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(y_i)^{c_i} \mathrm{d}y = \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i(y) \mathrm{d}y \right)^{c_i},$$

eli Brascampin ja Liebin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus. Tämä pätee myös käänteisessä versiossa, sillä ortogonaalisessa kannassa jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ on täsmälleen yksi esitys $x = \sum_i c_i\theta_i u_i = \sum_i \theta_i u_i = \sum_i (x|u_i)u_i$. Tällöin funktio h on mitallinen ja se saa muodon

$$h(x) = \sup_{x=\sum_i c_i\theta_i u_i} \prod_{i=1}^{m} f_i(\theta_i)^{c_i} = \prod_{i=1}^{m} f_i((x|u_i))^{c_i},$$

eli se on sama kuin Brascampin ja Liebin epäyhtälön vasemman puolen funktio. Yhtäsuuruus siis pätee molemmissa epäyhtälöissä.

Kääntäen, jos $(u_i)_{i=1}^m$ ovat erisuuria yksikkövektoreita ja Brascampin ja Liebin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus joillekin funktioille $(f_i)_{i=1}^m$, joista mikään ei ole identtisesti nollaa eikä gaussinen (melkein kaikkialla), niin $m = n$ ja vektorit u_i muodostavat ortonormaalin kannan avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Todistus tälle faktalle löytyy Barthen artikkelista [4], jossa yhtäsuuruustapaukset on ratkaistu melko tyhjentävästi myös yksittäisille funktiojoukoille $(f_i)_{i=1}^m$.

4 Tilavuussuhteet ja käänteinen isoperimetrinen epäyhtälö

4.1 Tilavuussuhteet

Tutkitaan sitten symmetrisen konveksin kappaleen ja sen Johnin ellipsoidin tilavuuksien suhdetta. Osoittautuu, että tämä tilavuussuhde maksimoituu kuutioilla.

Seuraus 4.1. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ konveksi kappale, ja $\mathcal{E}$ sen sisältämä Johnin ellipsoidi. Tällöin*

$$\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(\mathcal{E})} \leq \frac{2^n}{\mathrm{vol}(B_2^n)}.$$

Todistus. Käyttämällä sopivaa lineaarikuvausta voidaan olettaa, että maksimaalinen ellipsoidi on euklidinen pallo. Väite on siis $\mathrm{vol}(K) \leq 2^n$. Johnin ellipsoidin karakterisaation nojalla Brascampin ja Liebin epäyhtälön oletukset vektoreista u_i ja luvuista c_i toteutuvat. Lisäksi hypertasotarkastelun ja symmetrisyyden perusteella joukko K on joukon

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |(x|u_i)| \leq 1 \text{ kaikilla } u_i\}$$

osajoukko. Valitaan L^1-funktioiksi f_i välin $[-1,1]$ karakteristinen funktio kaikilla i. Tällöin funktio $\prod_i f_i((x|u_i))^{c_i}$ on joukon T karakteristinen funktio. Täten geometrisen Brascampin-Liebin epäyhtälön nojalla

$$\mathrm{vol}(K) \leq \mathrm{vol}(T) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i((x|u_i))^{c_i} \, \mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i(x) \, \mathrm{d}x \right)^{c_i} = \prod_{i=1}^m 2^{c_i} = 2^n,$$

sillä Johnin lauseen ehtojen nojalla $\sum_i c_i = n$. □

Todistetaan sitten seurauksen 4.1 duaaliversio, eli löydetään alaraja symmetrisen konveksin kappaleen ja sen Löwnerin ellipsoidin tilavuuksien suhteelle. Strategiakin on täysin duaalinen: Tilavuussuhde Johnin ellipsoidille todistettiin tarkastelemalla joukkoa

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |(x|u_i)| \leq 1 \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, m\},$$

huomaamalla, että $K \subset T$ ja käyttämällä Brascampin ja Liebin epäyhtälöä. Tilavuussuhde Löwnerin ellipsoidille todistetaan tarkastelemalla joukkoa

$$T^\circ = \mathrm{co}\{\pm u_i \mid i = 1, \ldots, m\},$$

huomaamalla, että $T^\circ \subset K^\circ$ ja käyttämällä käänteistä Brascampin ja Liebin epäyhtälöä.

Koska Johnin ellipsoidin tilavuussuhde maksimoitui kuutioilla, ei ole yllättävää, että Löwnerin ellipsoidin tilavuussuhde minimoituu kuutioiden polaareilla, eli *yleistetyillä oktaedreillä* Δ_n:

$$\Delta_n := \operatorname{co}\{\pm e_i \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Kun oletetaan, että Löwnerin ellipsoidi on euklidinen yksikköpallo, väitteen nojalla joukon T° tilavuus minimoituu, kun vektorit u_i ovat ortogonaaliset. Yllättäen lausetta 3.17 seuraavien huomioiden nojalla käänteisessä Brascampin ja Liebin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus juurikin ortogonaalisessa tapauksessa.

Aloitetaan lemmalla.

Lemma 4.2. *Olkoot vektorit $(u_i)_{i=1}^m$ kuten geometrisessa Brascampin ja Liebin lauseessa. Tällöin symmetrisen konveksin kappaleen $T \subset \mathbb{R}^n$,*

$$T^\circ = \operatorname{co}\{\pm u_i \mid i = 1, \ldots, m\}$$

Minkowskin funktionaalin p_T arvo pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ on

$$p_T(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m c_i|\theta_i| \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^m c_i\theta_i u_i \right\}.$$

Todistus. Merkitään

$$q_T(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m c_i|\theta_i| \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^m c_i\theta_i u_i \right\}.$$

Olkoon $\lambda > 0$ ja $x \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että $\lambda^{-1}x \in T$. Tällöin

$$\lambda^{-1}x = \sum_{i=1}^m \mu_i u_i$$

joillekin vakioille $(\mu_i)_{i=1}^m$, joille $\sum_i |\mu_i| = 1$. Kirjoittamalla $\theta_i = \lambda\mu_i/c_i$ saadaan

$$x = \sum_{i=1}^m c_i\theta_i u_i$$

ja

$$q_T(x) \leq \sum_i c_i|\theta_i| = \lambda.$$

Täten $q_T(x) \leq p_T(x)$. Oletetaan vastoin väitettä, että $q_T(x) < p_T(x)$. Olkoon $\sum_i c_i\theta_i u_i$ pisteen x esitys, jolle $p_T(x) > \lambda = \sum_i c_i|\theta_i|$. Tällöin $\lambda^{-1}x$ on konveksi kombinaatio vektoreista $\{\pm u_i \mid i = 1, \dots, m\}$, eli $\lambda^{-1}x \in T$. Tämä on vastoin Minkowskin funktionaalin määritelmää, ja antiteesi kaatuu. □

Lause 4.3. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ symmetrinen konveksi kappale ja olkoon $\mathcal{E}$ sen Löwnerin ellipsoidi. Tällöin*

$$\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(\mathcal{E})} \geq \frac{2^n/n!}{\mathrm{vol}(B_2^n)}.$$

Todistus. Jälleen voidaan olettaa, että $\mathcal{E} = B_2^n$, jolloin väite on

$$\mathrm{vol}(K) \geq \frac{2^n}{n!},$$

Koska B_2^n on polaarin K° Johnin ellipsoidi, saadaan $K^\circ \subset T^\circ$, ja edelleen $T \subset K$. Todistetaan väite joukolle T.

Joukon T tilavuudelle pitää löytää jokin mukava integraaliesitys, jotta käänteistä Brascampin ja Liebin epäyhtälöä voitaisiin käyttää. Lähes täysin sopiva esitys löytyy lauseen 3.12 todistuksesta; siellähän ellipsoidin $\mathcal{F}_\lambda$ tilavuudelle saatiin Cavalierin periaatteen kautta

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-N_\lambda(x)^2)\mathrm{d}x = \mathrm{vol}(\mathcal{F}_\lambda)\Gamma(1 + \frac{n}{2}),$$

kun N_λ on ellipsoidin $\mathcal{F}_\lambda$ Minkowskin funktionaali. Nyt lemman 4.2 nojalla joukon T Minkowskin funktionaali pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ on

$$p_T(x) = \inf\left\{\sum_{i=1}^m c_i|\theta_i| \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^m c_i\theta_i u_i\right\}.$$

Koska Minkowskin funktionaali määrää normin, täysin vastaavin välivaihein kuin lauseen 3.12 todistuksessa lasketaan

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-p_T(x)) = \mathrm{vol}(T)\Gamma(1 + n) = \mathrm{vol}(T)n!.$$

Toisaalta funktio $h : x \mapsto \exp(-p_T(x))$ on jatkuvana funktiona mitallinen, ja

$$\begin{aligned} h(x) &= \exp(-\inf_{x=\sum_i c_i\theta_i u_i} \sum_i c_i|\theta_i|) \\ &= \sup_{x=\sum_i c_i\theta_i u_i} \exp(-\sum_i c_i|\theta_i|) \\ &= \sup_{x=\sum_i c_i\theta_i u_i} \prod_{i=1}^m \exp(-|\theta_i|)^{c_i} \\ &= \sup_{x=\sum_i c_i\theta_i u_i} \prod_{i=1}^m f_i(\theta_i)^{c_i}, \end{aligned}$$

kun määritellään $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_i(t) = \exp(-|t|)$ kaikille $i = 1, \dots, m$. Täten funktiot $f_1, \dots, f_m$ ja h toteuttavat geometrisen Barthen epäyhtälön 3.17 oletukset, ja siten

$$\mathrm{vol}(T)n! = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\mathrm{d}x \geq \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i(x)\mathrm{d}x \right)^{c_i} = \prod_{i=1}^{m} 2^{c_i} = 2^n.$$

Väite seuraa tästä. □

Todistuksen viimeisellä laskulla voi määrittää yleistetyn oktaedrin Δ_n tilavuuden, sillä käänteisessä Brascampin ja Liebin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus, kun vektorit u_i ovat ortonormaalit. Täten

$$\mathrm{vol}(\Delta_n) = \frac{2^n}{n!}$$

ja minimaalisen ellipsoidin tilavuussuhde todella minimoituu joukoilla Δ_n.

4.2 Käänteinen isoperimetrinen epäyhtälö

Tässä luvussa todistetaan isoperimetrisen epäyhtälön käänteinen versio. Sitä varten tarvitaan pinta-alan käsite korkeammissa ulottuvuuksissa.

Määritelmä 4.4. (Pinta-ala)
Mielivaltaisen konveksin kappaleen $K \in \mathbb{R}^n$ *pinta-ala* on raja-arvo

$$\mathrm{vol}(\partial K) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathrm{vol}(K + \varepsilon B_2^n) - \mathrm{vol}(K)}{\varepsilon},$$

kun se on äärellisenä olemassa.

Kappaletta siis pullistetaan sopivasti joka puolelta, jolloin intuitiivisesti sen tilavuuden muutos on pienillä epsiloineilla suunnilleen $\varepsilon\mathrm{vol}(\partial K)$. Pinta-alan määritelmän raja-arvo ei välttämättä ole olemassa yleiselle joukolle K, mutta konvekseille kappaleille se on hyvin määritelty ja äärellinen, katso [7, Th. 3.2.39.].

Yleisesti pinta-alan ja lineaarikuvausten yhteistyö ei oikein suju, mutta skaalauksen tapauksessa voidaan johtaa mukava relaatio:

Lemma 4.5. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ konveksi kappale ja $t > 0$. Tällöin*

$$\mathrm{vol}(\partial(tK)) = t^{n-1}\mathrm{vol}(\partial K).$$

Todistus. Tämä on suora lasku. Olkoon $\delta = \varepsilon/t$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\partial(tK)) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}(\mathrm{vol}(tK + \varepsilon B_2^n) - \mathrm{vol}(tK)) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{t^n}{\varepsilon}(\mathrm{vol}(K + \frac{\varepsilon}{t} B_2^n) - \mathrm{vol}(K)) \\
&= \lim_{\delta\to 0^+} \frac{t^{n-1}}{\delta}(\mathrm{vol}(K + \delta B_2^n) - \mathrm{vol}(K)) \\
&= t^{n-1}\mathrm{vol}(\partial K).
\end{aligned}$$

□

Intuitiivisesti kuution pinta-ala on tahkojen lukumäärä kertaa tahkon $n-1$ -ulotteinen tilavuus. Tämä seuraa määritelmästäkin.

Lemma 4.6. *Olkoot $a > 0$ ja kuutio $Q = [0,a]^n$. Tällöin*

$$\mathrm{vol}(\partial Q) = 2n\mathrm{vol}(Q)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Todistus. Väite on $\mathrm{vol}(\partial Q) = 2na^{n-1}$, sillä $\mathrm{vol}(Q) = a^n$. Olkoon $Q_\varepsilon = Q + \varepsilon B_2^n$ ja $Q^\varepsilon = [-\varepsilon, a+\varepsilon]^n$. Kaikille $m = 0,\dots,n-1$ melkein kaikki joukkojen

$$A_m = [0,a]^m \times [a,a+\varepsilon] \times [0,a]^{n-m-1}$$

ja

$$B_m = [0,a]^m \times [-\varepsilon, 0] \times [0,a]^{n-m-1}$$

pisteet kuuluvat joukkoon $Q_\varepsilon \setminus Q$, kun sovitaan, että ylläolevista tuloista unohdetaan termit $[0,a]^0$. Täten mitan ominaisuuksien perusteella

$$\mathrm{vol}(Q_\varepsilon) \geq \mathrm{vol}(Q) + \sum_m (\mathrm{vol}(A_m) + \mathrm{vol}(B_m)) = a^n + 2n\varepsilon a^{n-1}.$$

Nyt

$$0 < \mathrm{vol}(Q^\varepsilon) - \mathrm{vol}(Q_\varepsilon) \leq (a+2\varepsilon)^n - a^n - 2n\varepsilon a^{n-1} = \varepsilon^2 p(\varepsilon),$$

missä p on polynomifunktio. Erityisesti

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\mathrm{vol}(Q^\varepsilon) - \mathrm{vol}(Q_\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\partial Q) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathrm{vol}(Q_\varepsilon) - \mathrm{vol}(Q)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathrm{vol}(Q^\varepsilon) - \mathrm{vol}(Q_\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{vol}(Q^\varepsilon) - \mathrm{vol}(Q)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{(a + 2\varepsilon)^n - a^n}{\varepsilon} \\
&= 2na^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Väite seuraa tästä. □

Klassisen *isoperimetrisen epäyhtälön* mukaan tasossa $\mathbb{R}^2$ pituudeltaan L oleva suljettu käyrä sulkee sisäänsä pinta-alan A, jonka suuruus maksimoituu kun käyrä on ympyränkaari. Toisin sanottuna

$$4\pi A \leq L^2.$$

Korkeampiulotteinen vastine tälle on

$$\frac{\mathrm{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}}}{\mathrm{vol}(\partial K)} \leq \frac{\mathrm{vol}(B_2^n)^{\frac{n-1}{n}}}{\mathrm{vol}(\partial B_2^n)} = \frac{1}{n\mathrm{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}}},$$

kun $K \subset \mathbb{R}^n$ on esim. konveksi kappale. Todistus paljon yleisemmille joukoille löytyy Federerin teoksesta [7, Th. 3.2.43.]. Isoperimetrisen epäyhtälön mukaan luku

$$\frac{\mathrm{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}}}{\mathrm{vol}(\partial K)} \tag{16}$$

maksimoituu konveksien joukkojen suhteen, kun K on euklidinen pallo. Voidaan sitten kysyä, onko luvulla (16) jokin nollaa suurempi alaraja. Vastaus on kielteinen, sillä on olemassa hyvin litteitä konvekseja kappaleita, joiden tilavuus on äärellistä mutta pinta-ala voi olla mielivaltaisen suuri. Olkoon esimerkiksi

$$K_r = [0, r]^n \times [0, r^{-n}].$$

Nyt $\mathrm{vol}(K_r) = 1$ ja kuten kuution tapauksessa voidaan laskea

$$\mathrm{vol}(\partial K_r) = 2nr^{n-1}r^{-n} + 2r^n = 2nr^{-1} + 2r^n.$$

Nyt kasvattamalla lukua r saadaan pinta-ala mielivaltaisen suureksi. Seuraavaksi voi kysyä, voidaanko tällaisia litteitä joukkoja kuvata mukavammiksi niin, että luku (16) olisi järkevällä alueella. Affiinit lineaarikuvaukset säilyttävät konveksisuuden joten on luonnollista tutkia konveksien joukkojen lineaariaffiineja kuvia. Osoittautuu, että jokainen symmetrinen konveksi kappale voidaan kuvata lineaariaffiinisti siten, että

$$\frac{\mathrm{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}}}{\mathrm{vol}(\partial K)} \geq \frac{1}{2n}.$$

Tämä tulos tunnetaan käänteisenä isoperimetrisenä epäyhtälönä ja se on peräisin Keith Ballilta vuodelta 1989 [2]. Lemman 4.6 nojalla yhtäsuuruus pätee kun joukon K jokin lineaariaffiini kuva on kuutio.

Lause 4.7. ***(Käänteinen isoperimetrinen epäyhtälö)***
Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ symmetrinen konveksi kappale ja Q kuutio. Tällöin on olemassa joukon K lineaariaffiini kuva, jonka tilavuus on sama kuin kuutiolla Q, mutta pinta-ala on pienempi.

Todistus. Kuutiolle pätee $\mathrm{vol}(\partial Q) = 2n\mathrm{vol}(Q)^{\frac{n-1}{n}}$. Lisäksi lemman 4.5 nojalla konveksin joukon K jollekin lineaariaffiinille kuvalle T pätee

$$\frac{\mathrm{vol}(\partial(tT))}{\mathrm{vol}(tT)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{t^{n-1}\mathrm{vol}(\partial T)}{t^{n-1}\mathrm{vol}(T)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{\mathrm{vol}(\partial T)}{\mathrm{vol}(T)^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Riittää siis osoittaa, että

$$\mathrm{vol}(\partial T) \leq 2n\mathrm{vol}(T)^{\frac{n-1}{n}}$$

ja joukon T tilavuus saadaan skaalauksella samaksi kuin annetulla kuutiolla. Valitaan kuvaus niin, että se vie joukon K joukoksi, jonka Johnin ellipsoidi on origokeskinen euklidinen pallo. Tällöin seurauksen 4.1 nojalla $\mathrm{vol}(T) \leq 2^n$ ja

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\partial T) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathrm{vol}(T + \varepsilon B_2^n) - \mathrm{vol}(T)}{\varepsilon} \\
&\leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathrm{vol}(T + \varepsilon T) - \mathrm{vol}(T)}{\epsilon} \\
&\overset{i)}{=} \mathrm{vol}(T) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon} \\
&= \mathrm{vol}(T)^{\frac{n-1}{n}} \mathrm{vol}(T)^{\frac{1}{n}} n \\
&\leq 2n\mathrm{vol}(T)^{\frac{n-1}{n}},
\end{aligned}$$

kuten haluttiin. Yhtälö $i)$ seuraa lauseesta 1.7, sillä T on lineaariaffiinina konveksin joukon kuvana konveksi. $\square$

Viitteet

[1] K. Ball - *An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry*, Flavors of Geometry, MSRI Publications 31:1-58, 1997

[2] K. Ball - *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*, Journal of the London Math. Soc., 44(2):351–359, 1991, arXiv:math/9201205

[3] F. Barthe - *Inégalités de Brascamp-Lieb et Convexité*, C. R. Acad. Sci. Paris, 324:885–888, 1997

[4] F. Barthe - *On a Reverse Form of the Brascamp-Lieb Inequality*, Inv. Math. 134(2):335-361, 1998, arXiv:math/9705210

[5] S. Boyd, L. Vandenberghe - *Convex Optimization*, Cambridge University Press 2004, `http://stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf`

[6] K. Ciesielski, et. al. - *Measure zero sets with non-measurable sum*, Real Anal. Exchange 27(2):783-794, 2001, `http://www.math.wvu.edu/~kcies/prepF/89A+A/89A+A.pdf`

[7] H. Federer - *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996

[8] J. Malý - *Lectures on Change of Variables in Integral* `http://www.math.helsinki.fi/~analysis/GraduateSchool/maly/gs.pdf`. Luettu 18.8.2015

[9] G. Pisier - *Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge University Press 1989

[10] D. Serre - *Matrices: Theory and Applications*, Graduate Texts in Mathematics 216, Springer-Verlag New York 2002