SATTUMAA SATUMAASSA

Todennäköisyyslaskentaa nopanheitosta mittateoriaan

Noora Karvinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2015

Tiivistelmä: Noora Karvinen, *Sattumaa satumaassa – Todennäköisyyslaskentaa nopanheitosta mittateoriaan* (engl. *Random events in wonderland – Probability from throwing dice to measure theory*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 99 s., Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos, heinäkuu 2015.

Tutkielman ensimmäisessä osassa, joka sisältää luvut 2–7, käsitellään lukion "Todennäköisyyslaskenta ja tilastot" -kurssin sisältö (vuosien 2003 ja 2015 opetussuunnitelmien mukaan) hieman laajennettuna ja useimmat tulokset todistettuina. Tärkeimpiä sisältöjä ovat klassinen ja tilastollinen todennäköisyys, todennäköisyyden laskusäännöt, kombinatoriikka, diskreetti ja jatkuva todennäköisyysjakauma ja tilastollinen jakauma, jakauman tunnusluvut, yleisimmät jakaumat (muun muassa normaalijakauma) sekä diskreetin ja jatkuvan jakauman odotusarvo ja keskihajonta. Ensimmäinen luku sisältää tutkielman kannalta oleelliset joukko-opin merkinnät.

Ensimmäinen osa rakentuu kirjoittamani fiktiivisen tarinan ympärille. Tarinan avulla nostetaan esiin erilaisia ongelmia, joiden avulla lukijaa motivoidaan oppimaan tulevia asioita. Useimmat esimerkit olen kehittänyt itse niin, että ne ovat osa tarinaa, ja osan esimerkeistä olen muokannut muista lähteistä tarinaan sopivaksi. Ensimmäisen osan tarkoitus on toimia opettajalle opetusmateriaalina ja lisätiedon lähteenä. Toiveena on, että opettaja voisi saada oppilaat motivoitumaan paremmin kurssin sisältöihin tarinan avulla.

Tutkielman toinen osa sisältää luvut 8–11 ja siinä selvitetään, mihin mittateoriaa tarvitaan todennäköisyyslaskennassa. Aineiston olen koonnut useista eri lähteistä ja muokannut tähän tarkoitukseen sopivaksi, loogisesti eteneväksi kokonaisuudeksi.

Banachin-Tarskin paradoksin ja Vitali-joukkojen avulla huomataan aluksi, että on olemassa joukkoja, joille tavanomaisen mitan määrittäminen ei onnistu yksikäsitteisesti ja näin ollen niille ei voida määrittää geometrisia todennäköisyyksiäkään. Tämän jälkeen yritetään konstruoida mitta, joka toteuttaa seuraavat luonnolliset toiveet: mitan tulee vastata geometrista havaintoa, säilyä siirroissa ja kierroissa, olla määritelty kaikille joukoille, saada arvoja väliltä $[0, \infty]$ ja olla lisäksi additiivinen eli erillisten joukkojen yhdisteen mitan on oltava yhtä suuri kuin summa näiden joukkojen mitoista. Päädytään kuitenkin siihen tulokseen, että kaikki näistä toiveista eivät voi olla voimassa yhtä aikaa. Konstruoinnin tuloksena saadaan kuitenkin Lebesguen mitta, joka ei ole määritelty kaikille joukoille, mutta joka toteuttaa muut luonnolliset toiveet.

Lebesguen mitan konstruoinnin jälkeen käsitellään hieman yleistä mittateoriaa, jossa mitta tulkitaan abstraktimmin: sen ei tarvitse vastata enää geometrista havaintoa. Mitta saadaan ulkomitan avulla niin, että lähtöjoukkona onkin σ-algebra, ja viimein päädytään Carathéodoryn lauseeseen, jota ei kuitenkaan todisteta. Tämän jälkeen määritellään vielä lyhyesti Lebesguen integraali, kuitenkin mitään todistamatta.

Tutkielman lopussa tuodaan esille mittateorian yhteys todennäköisyyslaskentaan: todennäköisyys on mitan erikoistapaus. Jatkuvien satunnaismuuttujien todennäköisyyksien laskemiseen tarvitaan Lebesguen integraalia. Lebesguen mitan avulla puolestaan saadaan selvitettyä, mille joukoille geometrinen todennäköisyys voidaan määrittää ja miten se määritetään.

Sisältö

Johdanto

Tutkielmani käsittelee todennäköisyyslaskentaa, joka sai alkunsa uhkapeleihin liittyvistä ongelmista 1600-luvulla. Todennäköisyyslaskenta kehittyi vuosien saatossa, kun todennäköisyyksiä pyrittiin laskemaan yhä monimutkaisemmille tapahtumille. Lopulta tuli vastaan tapahtumia, jotka olivat niin monimutkaisia, että niille ei enää osattu laskea yksikäsitteistä todennäköisyyttä. Ratkaisu ongelmiin löydettiin mittateorian avulla. Todennäköisyyslaskentaa tarvitaan nykyään muun muassa liike-elämässä, sääennusteissa, teoreettisessa fysiikassa, vakuutustoiminnassa ja biotieteissä.

Tarkoituksenani on luoda tässä tutkielmassa läpikatsaus todennäköisyyslaskentaan ja vastata kysymykseen, miksi mittateoriaa tarvitaan todennäköisyyslaskennassa. Asiat esitetään samassa järjestyksessä kuin ne on todellisuudessakin kehitetty: Liikkeelle lähdetään diskreeteistä todennäköisyyksistä yksinkertaisten nopanheittoon liittyvien ongelmien kautta. Tämän jälkeen pohditaan geometrista todennäköisyyttä ja jatkuvien satunnaismuuttujien todennäköisyyksiä. Lopussa kohdataan ongelmia laskettaessa tilavuuksia ja pituuksia tietyille joukoille, minkä vuoksi perehdytään mittateorian alkeisiin.

Tutkielma jakautuu kahteen osaan. Ensimmäinen osa sisältää luvut 2−7 ja siinä käsitellään kaikki lukion pitkän matematiikan "Todennäköisyys ja tilastot" -kurssiin kuuluvat asiat (vuosien 2003 ja 2015 opetussuunnitelmien mukaan). Lauseiden todistukset ja tähdellä (*) merkityt osiot eivät kuulu kurssin pakolliseen sisältöön, mutta opettajan on hyödyllistä hallita niissä annettava lisätieto. Lisäksi opettaja voi eriyttää opetustaan antamalla tähdellä merkittyjä asioita lisämateriaalina pidemmälle edenneille ja todennäköisyyslaskennasta kiinnostuneille oppilailleen. Ensimmäisen osan esitiedoiksi riittää siis lukion pitkän matematiikan oppimäärä ja joukko-opin alkeet, jotka käsitellään luvussa 1. Lauseiden todistusten ja tähdellä merkittyjen osioiden ymmärtämistä helpottaa, jos lukija on opiskellut yliopistossa matematiikan perus- ja aineopinnot.

Tutkielman toinen osa, joka sisältää luvut 8−11, on sisällöllisesti haastavampi ja siinä selvennetään mittateorian merkitystä todennäköisyyslaskennassa. Sisällön olen koonnut useista eri lähteistä, mutta asioiden esitystavan ja ajatuksenkulun olen muotoillut itse. Esitietoina on hyvä olla matematiikan yliopistotasoiset perus- ja aineopinnot. Mittateoriaan perehtyneisyyttä ei tarvita, sillä mittateoriasta käsitellään vain alkeet. Itse asiassa tämän osan tavoitteena on motivoida lukija opiskelemaan mittateoriaa enemmänkin. Jos taas lukija on jo hieman opiskellut mittateoriaa, tutkielman luettuaan hän toivottavasti ymmärtää paremmin, mitä hyötyä mittateoriasta todella on ja mikä on sen yhteys todennäköisyyslaskentaan.

Tutkielmani ensimmäinen osa poikkeaa tavanomaisesta matematiikan pro gradu -tutkielmasta siten, että siinä edetään fiktiivisen tarinan avulla. Tarinan avulla nostan esiin erilaisia ongelmia, jolloin lukijalle tulee luonnollinen halu ymmärtää ja oppia seuraavaksi käsiteltävä asia. Tarkoituksena on, että ensimmäinen osa voisi toimia opetusmateriaalina ja lisätiedon lähteenä lukion pitkän matematiikan kurssin "Todennäköisyys ja tilastot" opettajalle. Uskon, että tarinan avulla opettaja voisi saada motivoitua useampia oppilaita ja tehdä kurssista hauskemman. Lisäksi hän voisi hyödyntää valmiita tarinaan liittyviä esimerkkejä, joiden uskon olevan oppilaille mielenkiintoisempia kuin toisistaan täysin irralliset esimerkit, jotka eivät mahdollisesti liity mitenkään tosielämän tilanteisiin. Mukana on myös pari toiminnallista esimerkkiä, jotka opettaja voi toteuttaa luokassa konkreettisesti. Tarinan ja suurimman osan esimerkeistä olen kehittänyt itse, mutta osa esimerkeistä on muokattu muista lähteistä.

Idean tarinamuotoisuuteen sain kandidaatin tutkielmastani "Affiini kombinaatio ja riippuvuus". Sitä kirjoittaessani ohjaajani Mikko Saarimäki sanoi, että kirjoitelma ei saa olla kuin luentomuistiinpanot, vaan ennemminkin tarina. Kerroin tämän miehelleni, joka ehdotti vitsillään, että voisin kirjoittaa salapoliisitarinan. Innostuin ideasta niin, että sellainen kandidaatin tutkielmastani lopulta tulikin, kiitos Saarimäen myötämielisyyden. Myöhemmin keksin, että vastaavanlaista menetelmää voisin toteuttaa myös gradussani. Aihepiiri valikoituikin osittain sen mukaan, että voisin hyödyntää tutkielmaani ja siinä olevaa tarinaa tulevana opettajana.

Kiitokset avusta ja tuesta ohjaajalleni Anni Laitiselle sekä ideoista tarinan kehittelyssä miehelleni Antti Karviselle ja muutamalle muulle sukulaiselle!

Jyväskylässä heinäkuussa 2015,
Noora Karvinen

LUKU 1

Joukko-oppia

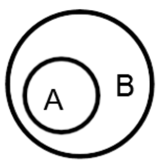
Tässä luvussa esitetään joukko-opin perusteet. Joukko-oppia tarvitaan käsiteltäessä tilanteita, joita tulee vastaan todennäköisyyksiä laskiessa. Lisäksi sen avulla todistetaan eräitä lauseita. Usein joukko-opin tilanteita havainnollistetaan Vennin diagrammeilla. Niissä ympyrä tai muu kuvio kuvaa joukkoa, joka sisältää tietyt alkiot.

Joukko-opin merkintöjä:

(1) Joukkoja merkitään usein isoilla kirjaimilla, esimerkiksi kirjaimilla A ja B.
(2) $\emptyset$ on tyhjä joukko eli joukko, joka ei sisällä yhtään alkiota.
(3) $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tarkoittaa, että alkiot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ muodostavat joukon A.
(4) $B = \{x \mid \text{ehto alkioille } x\}$ tarkoittaa, että joukko B muodostuu niistä alkioista x, jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan ehdon (esimerkiksi $x > 0$).
(5) $x \in A$ tarkoittaa, että alkio x kuuluu joukkoon A.
(6) $y \notin A$ tarkoittaa, että alkio y ei kuulu joukkoon A.

Joukkoja voidaan vertailla keskenään niiden sisältämien alkioiden perusteella, ja joukkojen avulla voidaan muodostaa uusia joukkoja: yhdisteitä, leikkauksia, erotuksia ja komplementteja.

(6) $A = B$ tarkoittaa, että joukot A ja B ovat samat eli ne sisältävät täsmälleen samat alkiot.
(7) $A \subset B$ tarkoittaa, että joukko A on joukon B osajoukko. Joukko B sisältää siis jokaisen joukon A alkion ja mahdollisesti, mutta ei välttämättä, myös muita alkioita.



Kuva 1.1. Joukko A on joukon B osajoukko.

(8) $A \cup B$ tarkoittaa joukkojen A ja B yhdistettä. Yhdiste on joukko, johon kuuluvat joko joukkoon A tai joukkoon B kuuluvat alkiot ja ne alkiot, jotka kuuluvat sekä joukkoon A että joukkoon B.
(9) $A \cap B$ tarkoittaa joukkojen A ja B leikkausta. Leikkaus on joukko, johon kuuluvat ainoastaan sekä joukkoon A että joukkoon B kuuluvat alkiot.

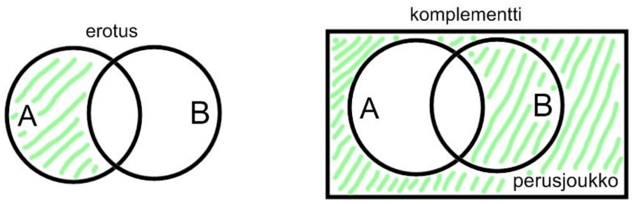
Esimerkki 1.1. Olkoot joukko $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja joukko $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Tällöin joukkojen A ja B yhdiste on $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ ja leikkaus on $A \cap B = \{2, 4\}$.

Kuva 1.2. Joukkojen A ja B yhdiste ja leikkaus.

(10) $A \setminus B$ on joukkojen A ja B erotus. Erotus on joukko, johon kuuluvat ainoastaan ne joukon A alkiot, jotka eivät kuulu joukkoon B.

(11) $\bar{A}$ tai A^C on joukon A komplementti. Komplementti on joukko, johon kuuluvat kaikki määrätyn perusjoukon alkiot lukuunottamatta joukon A alkioita.

Todennäköisyyslaskennassa perusjoukkoa merkitään usein kirjaimella Ω (omega). Se sisältää käsiteltävän tilanteen kaikki mahdolliset tapaukset.



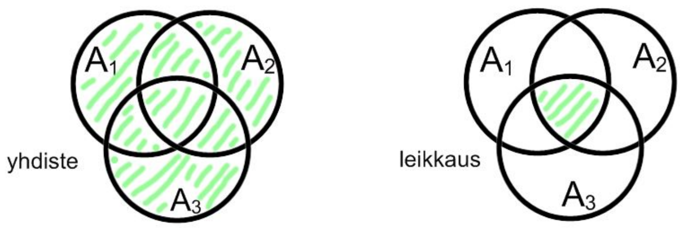
Kuva 1.3. Joukkojen A ja B erotus ja joukon A komplementti.

Yhdiste ja leikkaus voidaan yleistää myös useammalle kuin kahdelle joukolle. Joukkojen A_i yhdiste, missä $i = 1, 2, \ldots, n$, sisältää kaikki alkiot, jotka kuuluvat ainakin yhteen joukoista A_i:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Joukkojen A_i leikkaus, missä $i = 1, 2, \ldots, n$, sisältää ne alkiot, jotka kuuluvat jokaiseen joukkoon A_i:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$



Kuva 1.4. Yhdiste ja leikkaus, kun $n = 3$.

LUKU 2

Todennäköisyyksiä äärellisille joukoille

2.1. Todennäköisyyden käsite ja satunnaismuuttuja

Olipa kerran erittäin kaunis saari, jonka suurta kuningaskuntaa hallitsi kuningas Erik. Hän ja hänen vaimonsa, kuningatar Esme, elivät onnellisina silmäteränsä prinsessa Melinan kanssa. Kuningas Erikin lempipuuhaa olivat uhkapelit. Useiden vuosien pelikokemuksen jälkeen hän alkoi huomata, miten nopanheitossa kannattaa neljää noppaa heitettäessä veikata mieluummin, että tulee ainakin yksi kuutonen kuin ei yhtään. Viisaudestaan huolimatta Erik ei kuitenkaan ymmärtänyt miksi näin käy, joten hän pyysi luokseen nuoren lupauksen: saaren ainoan matemaatikon, Williamin. Tämä kiinnostui heti kuninkaan esittämästä ongelmasta. Koska William ei kuitenkaan ollut perehtynyt lainkaan todennäköisyyden ongelmiin, kuten eivät oikeastaan muutkaan matemaatikot tuohon aikaan, hän aloitti aiheeseen liittyvän kirjeenvaihdon kauempana asuvan kollegansa Kevinin kanssa. Vasta muutamien kirjeiden jälkeen William uskaltautui kuninkaan eteen.[1]

- Hyvää päivää, arvon kuningas! Olen nyt saapunut neuvoakseni sinua ongelmassasi. Saamme ratkaistua sen todennäköisyyksien avulla, William sanoo kunnioittavasti astuessaan kuninkaan eteen ja kumartaa kohteliaasti.

- Hienoa! Asia onkin vaivannut minua jo pitkään. Kutsu vain Erikiksi, kavereitahan tässä ollaan, kuningas vastaa ja jatkaa: - Minun täytyy kyllä tunnustaa, että suhtaudun todennäköisyyksiin hieman epäluuloisesti. Kävin yhdellä hieman kajahtaneella lääkärillä nimittäin. Hän kauhistui tajutessaan mikä sairaus minua vaivaa ja sanoi: "Tähän tautiin kuolee 10% todennäköisyydellä ja olet kymmenes tätä tautia sairastava potilaani. Yksikään aiemmista potilaistani ei ole kuollut!"

- Voi ei! Lääkäri tulkitsi todennäköisyyden aivan väärin. Tuo 10% todennäköisyys on saatu tautiin kuolleiden ja kaikkien tautiin sairastuneiden suhteena, jolloin puhutaan tilastollisesta todennäköisyydestä. Se antaa jotain kuvaa siitä, kuinka epävarmaa tautiin kuoleminen on. Yksittäisen ihmisen kohdalla ei kuitenkaan voida tietää, kuoleeko hän tautiin vai ei. Tämä on yksi niistä tilanteista, joissa jotain tapahtuu tai ei tapahdu, mutta mitään täsmällistä todennäköisyyttä ei yksittäiselle tilanteelle voida mitenkään määrittää.

- Miten sitten voit ratkaista ongelmani todennäköisyyksien avulla, jos täsmällisiä todennäköisyyksiä ei voida määrittää? kuningas ihmettelee.

- Joissain tilanteissa voidaan hyödyntää matemaattisia malleja. Teoreettisia todennäköisyyksiä voidaan siis laskea eri tapahtumille ja niillä voidaan mallintaa joitain todellisia tilanteita. Esimerkiksi nopanheittoon liittyviä todennäköisyyksiä voidaan hyvin mallintaa matemaattisesti, jos käytössä on reilu noppa.

- No sehän on hyvä juttu!

[1]Todennäköisyyslaskenta todellakin sai alkunsa 1600-luvulla uhkapeleistä. Ranskalainen aatelismies Chevalier de Méré pyysi Blaise Pascalilta selitystä noppapeleissä tekemiinsä havaintoihin. Tämän jälkeen Pascal ja Pierre de Fermat kehittivät todennäköisyyslaskennan periaatteita kirjeenvaihdon kautta vuoden 1654 aikana. Todennäköisyyslaskennan historiasta on kerrottu enemmän lähteen [**7**] luvussa 15.

- No niin, Erik. Yritän nyt selittää sinulle asian. Ensinnäkin nopanheitossa on kyse satunnaisilmiöstä eli ilmiöstä, jonka lopputuloksen määrää sattuma. Satunnaisilmiön mahdollisia tuloksia kutsutaan alkeistapauksiksi.

Esimerkki 2.1. Nopanheitto on satunnaisilmiö. Sen alkeistapaukset ovat nopan silmäluvut eli 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Perusjoukko Ω koostuu kaikista kyseisessä tilanteessa mahdollisista alkeistapauksista eli $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Aloitetaan hieman yksinkertaisemmista todennäköisyyksistä, sillä ilman niitä et voi ymmärtää ongelmasi ratkaisua, William jatkaa. - Mietitään ensin tilannetta, jossa noppaa heitetään vain kerran. Saatko jokaisella heitolla jonkin silmäluvuista?

- Höh, no tottakai saan. Koskaan ei ole jäänyt noppa kallelleen.

- Niinpä. Koska jokaisella heitolla tulee varmasti jokin silmäluvuista eli kyseessä on varma tapahtuma, todennäköisyys saada noppaa heittämällä jokin luku yhdestä kuuteen on 100 % eli 1. Kuinka monta eri vaihtoehtoa on nopan silmäluvulle?

- Kuusi, koska nopassa on silmäluvut yhdestä kuuteen.

- Aivan oikein. Entä osaatko sanoa, onko jokaisen silmäluvun todennäköisyys yhtä suuri?

- Kai sen pitäisi olla, sillä noppa on symmetrinen. Tällöinhän todennäköisyys saada yhdellä heitolla kuutonen on... Kyllä, sen on oltava $\frac{1}{6}$!

- Hyvä! Niin asia todellakin teoreettisesti on. Tällä teoreettisella mallilla pystytään hyvin mallintamaan käytännön tilannetta. Jos et usko, voit heittää noppaa vaikka 10 000 kertaa ja laskea kuinka monesti kutakin silmälukua saat. Aika kuluisi varmasti mukavasti.

Määritelmä 2.2. Alkeistapauksen x_i todennäköisyyttä $P(\{x_i\}) = p_i$ sanotaan pistetodennäköisyydeksi ja perusjoukon kaikkien alkeistapausten $x_i \in \Omega$, missä $i = 1, 2, \ldots, n$, todennäköisyyksien summa $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Määritelmä 2.3. Satunnaisilmiön mahdolliset tulokset eli alkeistapaukset ovat symmetrisiä, jos jokaisen alkeistapauksen todennäköisyys on yhtä suuri.

Huomautus 2.4. Olkoon tapahtuma A jokin symmetrisistä alkeistapauksista muodostettu joukko. Tällöin tapahtuman A todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{\text{suotuisten alkeistapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}},$$

kun alkeistapauksia on äärellinen määrä.

Huomautus 2.5. Huomautus 2.4 voidaan yleistää epäsymmetrisille alkeistapauksille. Kun pistetodennäköisyydet tiedetään, tapahtuman A todennäköisyys on tapahtuman A muodostavien alkeistapausten $x_i \in A$ todennäköisyyksien p_i summa $P(A) = \sum\limits_{i\,:\,x_i \in A} p_i$.

Lisäksi todennäköisyyden määritelmä voidaan yleistää tilanteisiin, joissa satunnaismuuttujan arvoja on numeroituvasti ääretön määrä. Numeroituvasti äärettömässä tilanteessa alkeistapausten $x_i \in \Omega$, missä $i \in \mathbb{N}$, todennäköisyyksien p_i summan on oltava edelleen 1 eli $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, ja tapahtuman A todennäköisyys on $P(A) = \sum\limits_{i\,:\,x_i \in A} p_i$. Äärettömien joukkojen todennäköisyyksiin perehdytään tarkemmin luvuissa 4 ja 11.

Esimerkki 2.6. Tapahtuma A = ”nopanheitossa saatu silmäluku on pariton” muodostuu alkeistapauksista 1, 3 ja 5. Tämän tapahtuman todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{\text{parittomien silmälukujen lukumäärä}}{\text{kaikkien silmälukujen lukumäärä}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Esimerkki 2.7. Nopanheitossa alkeistapausten 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 pistetodennäköisyydet ovat $p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{6}, p_3 = \frac{1}{6}, p_4 = \frac{1}{6}, p_5 = \frac{1}{6}$ ja $p_6 = \frac{1}{6}$.

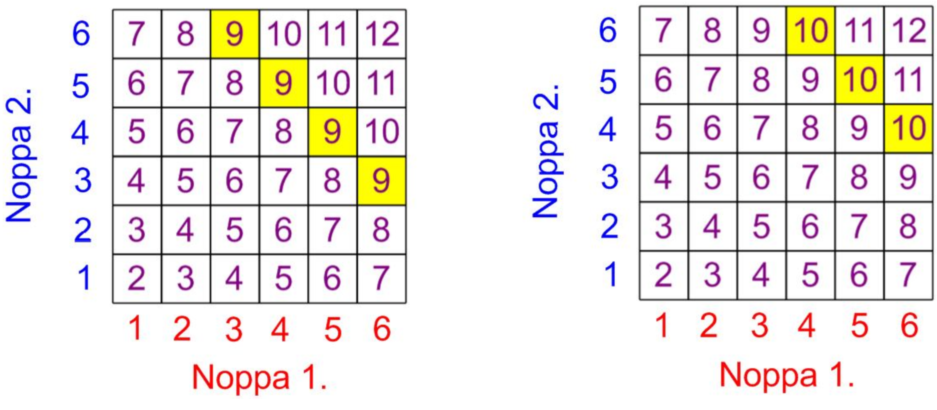
- Tämähän on helppoa! Erik toteaa.
- Niinkö? Ratkaise sitten tämä ongelma, William haastaa.

Ongelma 2.8. Kahta noppaa heitettäessä noppien silmälukujen summa on jokin luvuista 2, 3, 4, . . ., 12. Sekä 9 että 10 voidaan saada silmälukujen summaksi kahdella eri tavalla: $9 = 3+6 = 4+5$ ja $10 = 4+6 = 5+5$. Miksi summaksi saadaan kuitenkin useammin 9 kuin 10?

Ratkaisu: On huomioitava, että tapahtuma ”1. nopalla 3, 2. nopalla 6” on eri tapahtuma kuin ”1. nopalla 6, 2. nopalla 3”.
Merkitään $(x, y) =$ (1. nopan silmäluku, 2. nopan silmäluku).

Summaksi saadaan 9 seuraavilla tavoilla: $(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)$.
Summaksi saadaan 10 seuraavilla tavoilla: $(4, 6), (6, 4), (5, 5)$.

Koska molemmilla nopilla voidaan saada 6 eri silmälukua, erilaisia lukupareja (x, y) on $6 \cdot 6 = 36$ ja jokaisella lukuparilla on sama todennäköisyys. Näin ollen summan 9 todennäköisyys on $\frac{4}{36}$ ja summan 10 todennäköisyys on $\frac{3}{36}$.



Kuva 2.1. Ruudukossa on noppien 1 ja 2 silmälukujen summa kussakin tilanteessa. Summaksi saadaan 9 neljässä tilanteessa ja 10 kolmessa tilanteessa.

Kun William on saanut selitettyä ongelman ratkaisun Erikille, joka ei keksinyt ratkaisua pitkänkään pohdinnan jälkeen, kaunis prinsessa Melina saapuu paikalle ja alkaa jutella isänsä kanssa. Hetkeen William ei meinaa saada sanaa suustaan.

- Melina, William saa lopulta sanotuksi. - Minulla on tässä kolme pussia, joista yhdessä on makeisia ja kahdessa kiviä. Saat valita niistä itsellesi yhden.

- Ai siis, mitä pelleilyä tämä on? Melina ihmettelee saaden Williamin punastumaan. Melina suostuu kuitenkin ja valitsee pusseista yhden. Tämän jälkeen William avaa toisen kahdesta jäljelle jääneestä pussista ja sieltä paljastuu kiviä.

- Haluatko vaihtaa valitsemasi pussin tähän toiseen? William kysyy Melinalta osoittaen itsellään olevaa suljettua pussia.

- En tietenkään, Melina vastaa ja avaa ensin valitsemansa pussin. Sieltä paljastuu kiviä. Ystävällisesti William kuitenkin avaa makeisia sisältäneen pussin ja tarjoaa siitä Melinalle ja Erikille.

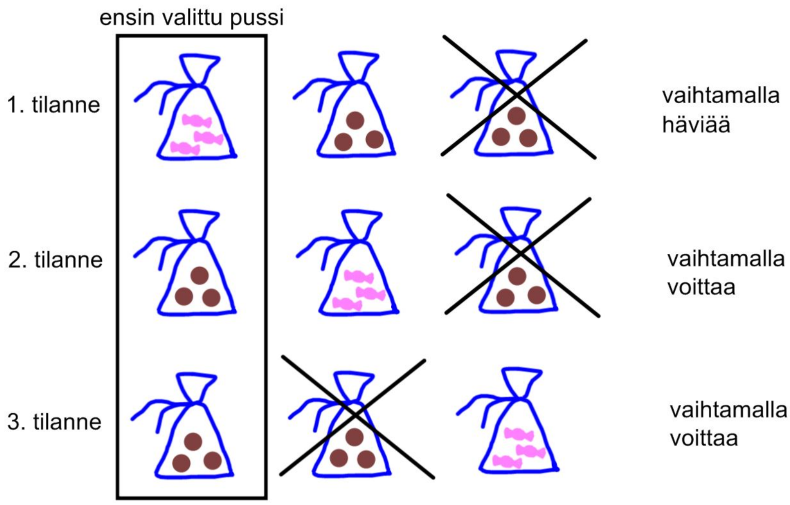
- Olisiko Melina saanut makeiset suuremmalla todennäköisyydellä vaihtamalla pussia vai ei? William kysyy Erikiltä Melinan poistuttua.

Ongelma 2.9. Williamilla on kolme pussia, joista yhdessä on makeisia ja kahdessa kiviä. Prinsessa Melina saa valita pusseista yhden. Tämän jälkeen William avaa toisen kahdesta muusta pussista ja sieltä paljastuu kiviä. William tietää mitä pusseissa on, joten hän ei avaa sitä pussia, jossa on makeiset. Halutessaan Melina saa vaihtaa valitsemansa pussin toiseen suljettuna olevaan pussiin. Kannattaako makeisia rakastavan Melinan vaihtaa pussia? [2]

Ratkaisu: Jos Melina ei vaihda pussia, Melina saa makeiset todennäköisyydellä

$$p = \frac{\text{makeisia sisältävien pussien lukumäärä}}{\text{kaikkien pussien lukumäärä}} = \frac{1}{3}.$$

Jos Melina vaihtaa pussia, alkeistapaukset ovat kuvan 2.2 tilanteiden mukaiset. Kahdessa tilanteessa kolmesta Melina saa makeiset vaihtamalla, joten todennäköisyys saada makeiset vaihtamalla on $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$. Melinan siis kannattaa vaihtaa pussia.



Kuva 2.2. Oletetaan, että Melina valitsee vasemmalla olevan pussin. Makeiset voivat olla joko vasemmanpuoleisessa, keskimmäisessä tai oikeanpuoleisessa, joten eri tilanteita on kolme. Ruksin alla oleva pussi on se, jonka William avaa.

[2]Opettaja voi toteuttaa tämän luokassa esimerkiksi nurin käännettyjen pahvimukien avulla, joista yhden alla on jokin esine. Jos jokainen oppilas pääsee valitsemaan vuorollaan, voidaan tilastoida kuinka moni voitti vaihtamalla ja kuinka moni pysymällä alkuperäisessä valinnassaan. Tämän jälkeen oppilaat voivat miettiä ratkaisua: kummalla tavalla voittaa todennäköisemmin.

Pitkien selitysten jälkeen Erik vihdoin uskoo, että pussia kannattaa vaihtaa. William esittää hänelle vielä yhden mielenkiintoisen ongelman ja siirtyy sen jälkeen luennoimaan satunnaismuuttujista.

ONGELMA 2.10. Kaksi pelaajaa, A ja B, pelaavat seuraavanlaista noppapeliä: Pelaaja A numeroi kolme tavallista noppaa uudelleen siten, että hän saa käyttää lukuja 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 niin monesti kutakin kuin haluaa. Pelaaja B valitsee jonkin näistä nopista ja pelaaja A jomman kumman jäljelle jääneistä nopista. Noppia heitettäessä suuremman luvun saanut voittaa.

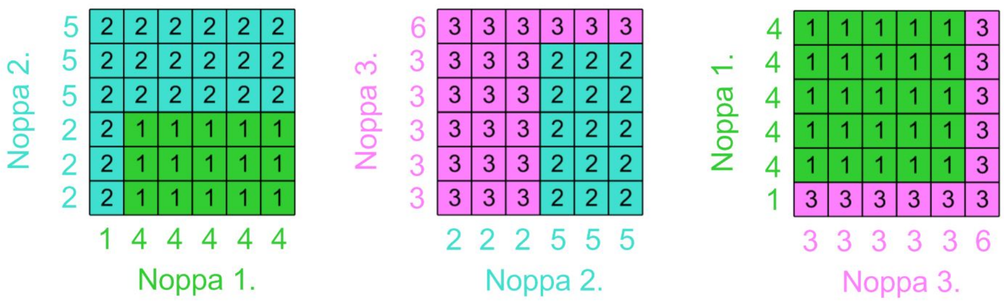
Voisi luulla, että ensin nopan valitseva saa parhaan nopan, jolloin hän voittaa vähintään 50% todennäköisyydellä. Kuitenkin, jos pelaaja A numeroi nopat oikein, hänellä on yli 50% todennäköisyys voittaa. Miten pelaajan A kannattaa numeroida nopat? [3]

Ratkaisu:

Pelaaja A voittaa vähintään todennäköisyydellä $\frac{21}{36}$, jos hän numeroi nopat seuraavasti:

noppa 1: 1, 4, 4, 4, 4, 4,
noppa 2: 2, 2, 2, 5, 5, 5 ja
noppa 3: 3, 3, 3, 3, 3, 6.

Jos pelaaja B valitsee nopan 1, pelaajan A tulee valita noppa 2. Vastaavasti pelaajan B valitessa nopan 2 tai 3, pelaajan A tulee valita noppa 3 tai 1.



KUVA 2.3. Ruudukossa näkyy, mikä noppa voittaa kussakin tilanteessa.

Edellä olevien käsitteiden rinnalla puhutaan myös *satunnaismuuttujista*, joita merkitään usein kirjaimella X tai Y. Nopanheitossa satunnaismuuttuja on nopan silmäluku. Satunnaismuuttuja eroaa alkeistapauksesta siten, että satunnaismuuttujan arvot ovat reaalilukuja.[4] Esimerkiksi kolikonheitossa alkeistapaukset ovat kruuna ja klaava, mutta satunnaismuuttujan arvot voivat olla esimerkiksi luvut 0 ja 1, jolloin luku 0 kuvaa kruunua ja luku 1 klaavaa. Satunnaismuuttujan avulla merkinnät yksinkertaistuvat: $P(\text{tulee klaava}) = P(X = 1)$.

[3] Opettaja voi antaa tämän haasteen oppilailleen. Oppilaat voivat valkoisten tarrojen avulla numeroida nopat uudelleen haluamallaan tavalla, jonka jälkeen oppilaat voivat pelata hetken parinsa kanssa. Tämän jälkeen voidaan yhdessä pohtia, miten nopat olisi kannattanut numeroida.

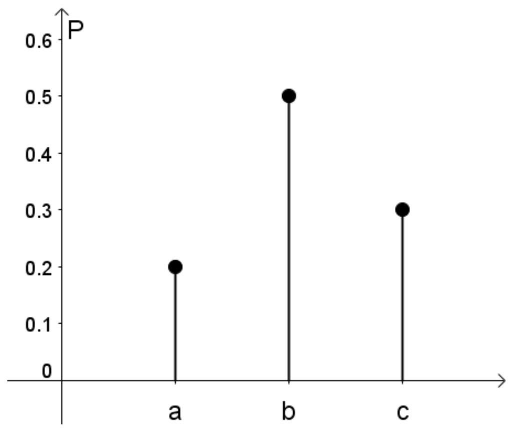
[4] Tässä tutkielmassa käsiteltävien satunnaismuuttujien arvot ovat reaalilukuja, mutta yleisesti ne voivat olla myös esimerkiksi funktioita tai vektoreita.

Yleisesti voidaan sanoa, että satunnaismuuttuja on funktio $X : \Omega \to \mathbb{R}$, joka muuttaa alkeistapaukset tietyiksi reaaliluvuiksi. Tätä reaalilukujoukkoa kutsutaan satunnaismuuttujan *arvojoukoksi*. Nopanheitossa arvojoukko on $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Satunnaismuuttujan *jakauma* kuvaa sitä, miten todennäköisyydet jakautuvat eri tapahtumien kesken. Perusjoukko Ω voidaan jakaa erillisiin tapahtumiin, joista tapahtuu kerrallaan täsmälleen yksi. Näiden tapahtumien todennäköisyyksien summa on 1 ja sitä voidaan ajatella todennäköisyysmassana. Satunnaismuuttujan jakauma kertoo, miten tämä todennäköisyysmassa jakautuu edellä kuvattujen tapahtumien kesken.

Kun satunnaismuuttujan arvojoukko on äärellinen tai numeroituvasti ääretön, puhutaan *diskreetistä satunnaismuuttujasta*. Numeroituvasti äärettömän joukon alkiot voidaan aina luetella tietyssä järjestyksessä. Esimerkiksi luonnollisten lukujen joukko on numeroituvasti ääretön.

Diskreetin satunnaismuuttujan jakaumaa kuvataan ilmoittamalla pistetodennäköisyydet. Esimerkiksi jos satunnaismuuttujan X arvojoukko on $\{a, b, c\}$, jakauma muodostuu pistetodennäköisyyksistä $P(X = a), P(X = b)$ ja $P(X = c)$. Todennäköisyysmassaa on siis ainoastaan arvojen a, b ja c kohdissa.



Kuva 2.4. Esimerkki diskreetin satunnaismuuttujan jakaumasta, kun satunnaismuuttujan mahdolliset arvot ovat a, b ja c ja niiden pistetodennäköisyydet $P(X = a) = 0{,}2$, $P(X = b) = 0{,}5$ ja $P(X = c) = 0{,}3$.

Pistetodennäköisyydet voidaan esittää kootusti pistetodennäköisyysfunktion avulla.

Määritelmä 2.11. Diskreetin satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio on funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = P(X = x).$$

Määritelmä 2.12. Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = P(X \leq x).$$

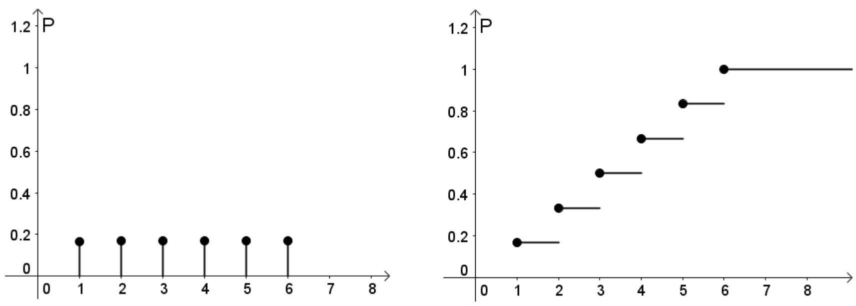
Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio pisteessä x kertoo siis, millä todennäköisyydellä satunnaismuuttujan arvo on korkeintaan x.

Esimerkki 2.13. Nopan silmäluku on diskreetti satunnaismuuttuja. Sen pistetodennäköisyysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{jos } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja kertymäfunktio

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \in]-\infty, 1[, \\ \frac{1}{6}, & \text{jos } x \in [1, 2[, \\ \frac{2}{6}, & \text{jos } x \in [2, 3[, \\ \frac{3}{6}, & \text{jos } x \in [3, 4[, \\ \frac{4}{6}, & \text{jos } x \in [4, 5[, \\ \frac{5}{6}, & \text{jos } x \in [5, 6[, \\ 1, & \text{jos } x \in [6, \infty[. \end{cases}$$



Kuva 2.5. Pistetodennäköisyysfunktion ja kertymäfunktion kuvaajat nopanheittotilanteessa.

Diskreetin satunnaismuuttujan pistetodennäköisyysfunktio ja kertymäfunktio ovat selvästi yhteydessä toisiinsa: jos toinen tiedetään, saadaan selvitettyä toinenkin.

2.2. Todennäköisyyden laskusäännöt

- No niin, Erik, William aloittaa. - Nyt kun ymmärrät, mistä diskreeteissä todennäköisyyksissä on kyse, käydään läpi muutama laskusääntö, joiden avulla nopanheitto-ongelmasi saadaan ratkaistua.

- Vihdoin siis asiaa! Erik ilahtuu.

- Aluksi muutama perusjuttu:

Kaikkien tapahtumien A todennäköisyyksille pätee $0 \leq P(A) \leq 1$. Symmetrisistä alkeistapauksista koostuvan äärellisen perusjoukon todennäköisyys eli todennäköisyys, että jokin perusjoukon n alkeistapauksesta tapahtuu, on $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$ eli kyseessä on varma tapahtuma. Vastaavasti tyhjän joukon todennäköisyys eli todennäköisyys, ettei mikään n alkeistapauksesta tapahdu, on $P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0$, joten kyseessä on mahdoton tapahtuma. [5]

[5] Myös niille tilanteille, joissa alkeistapaukset ovat epäsymmetrisiä tai niitä on ääretön määrä, pätee $P(\Omega) = 1$ ja $P(\emptyset) = 0$. Luvussa 4 käsitellään niiden joukkojen todennäköisyyksiä, joissa on ääretön määrä alkeistapauksia.

MÄÄRITELMÄ 2.14. Tapahtumat A ja B ovat erillisiä eli pistevieraita, jos niillä ei ole yhteisiä alkeistapauksia eli niiden leikkaus on tyhjä joukko:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Tapahtumat $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ovat (pareittain) erillisiä eli pistevieraita, jos kaikille $i \neq j$ pätee $A_i \cap A_j = \emptyset$.

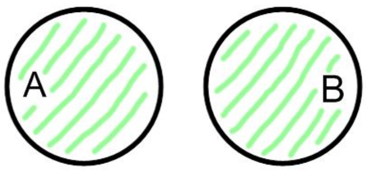
- Nopanheitossa tapahtumat A = "saatu silmäluku on parillinen" = $\{2, 4, 6\}$ ja B = "saatu silmäluku on luku 3" = $\{3\}$ ovat erillisiä. Tapahtumat A ja C = "saatu silmäluku on luku kolme tai sitä pienempi luku" = $\{1, 2, 3\}$ puolestaan eivät ole erillisiä, sillä ne molemmat sisältävät saman alkeistapauksen, silmäluvun kaksi, jolloin niiden leikkaus on $A \cap C = \{2\}$, William selventää.

- Tajusin kyllä, mutta miten tämä oikein liittyy minun ongelmaani? Erik hämmästelee.

- Tämä seuraava lause ja sen seuraus ovat erittäin tärkeitä, mutta niitä voidaan käyttää vain erillisille tapahtumille. On siis tiedettävä, mitä erilliset tapahtumat ovat.

LAUSE 2.15. *Erillisten tapahtumien A ja B yhdisteen todennäköisyys on tapahtumien A ja B todennäköisyyksien summa:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$



KUVA 2.6. Erillisten joukkojen yhdiste.

SEURAUS 2.16. *Lause* 2.15 *pätee myös pareittain erillisille joukoille $A_1, A_2, \ldots, A_n$:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

- Tämän seurauksen avulla saamme laskettua, millä todennäköisyydellä yhden kerran noppaa heitettäessä ei saada kuutosta eli saadaan jokin luvuista 1, 2, 3, 4 tai 5, William toteaa Erikille.[6]

ESIMERKKI 2.17. Olkoon tapahtuma A = "nopanheitossa saatu silmäluku ei ole luku 6".

Olkoon tapahtuma A_i = "saadaan silmäluku i", kun $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Aiemmin jo totesimme, että kunkin silmäluvun todennäköisyys on $\frac{1}{6}$ eli $P(A_i) = \frac{1}{6}$ kaikilla $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

[6]Tämä voitaisiin toki laskea helpomminkin jakamalla suotuisten silmälukujen summa kaikkien silmälukujen summalla. Seurausta 2.16 kannattaakin käyttää tilanteissa, joissa tapahtumien todennäköisyydet eivät ole yhtä suuret.

Nyt tapahtuman A todennäköisyys on

$$P(A) = P(\text{"ei saada kuutosta"}) = P(\text{"saadaan luku 1, 2, 3, 4 tai 5"})$$
$$= P(\bigcup_{i=1}^{5} A_i) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

- Sehän on kiva, mutta tämä ei kuitenkaan ole ratkaisu ongelmaani, Erik tuhahtaa.
- Ei koko ratkaisu, mutta osa sitä. Tulevaa helpottaakseni kerron vielä, että tuon äsken lasketun todennäköisyyden olisi voinut laskea helpomminkin: tapahtuman komplementin avulla.

Lause 2.18. *Tapahtuman A komplementin $\bar{A}$ todennäköisyys on $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.*

Todistus. Tapahtumat A ja $\bar{A}$ ovat erillisiä, joten $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Toisaalta $A \cup \bar{A} = \Omega$, koska Ω sisältää kaikki mahdolliset alkeistapaukset ja $\bar{A}$ sisältää kaikki paitsi joukkoon A kuuluvat alkeistapaukset. Näin ollen yhtälön $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$ avulla saadaan $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, joten $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. □

Esimerkki 2.19. Käytetään edellisen esimerkin 2.17 merkintöjä. Tapahtuman A komplementti on $\bar{A}$ = "saadaan kuutonen" ja sen todennäköisyys on $P(\bar{A}) = P(A_6) = \frac{1}{6}$. Tapahtuman A todennäköisyys on

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

- Molemmilla tavoilla saatiin siis sama ratkaisu. Kannattaa aina miettiä, kumpi tapa on helpompi.
- Joo. Tämähän on helppoa! kuningas ilahtuu.
- Liikaa ei kannata innostua. On muistettava, että jos tapahtumat A ja B eivät ole erillisiä, niiden yhdisteen $A \cup B$ todennäköisyyttä ei voida laskea samalla tavalla kuin erillisten tapahtumien tilanteessa. Kuvasta 2.7 huomataan, että joukkojen A ja B yhteinen alue eli niiden leikkauksen todennäköisyys tulee huomioitua kahteen kertaan niiden todennäköisyyksien summassa. Tämä tulee huomioida yhdisteen todennäköisyyttä laskiessa.

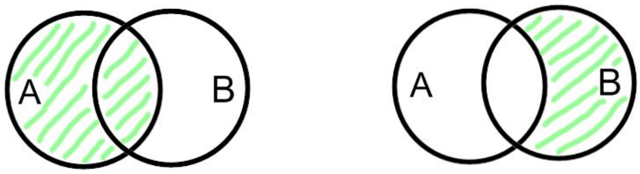
Kuva 2.7. Joukot A ja B, jotka eivät ole erillisiä.

Lause 2.20 (Yhteenlaskusääntö). *Tapahtumien A ja B yhdisteen todennäköisyys on*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Todistus. Tapahtumat A ja $B \setminus A$ ovat erillisiä (kuva 2.8). Lisäksi tapahtuma B on erillisten tapahtumien $B \setminus (A \cap B)$ ja $(A \cap B)$ yhdiste ja $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$, joten lauseen 2.15 mukaan

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= P(A) + P([B \setminus (A \cap B)] \cup [A \cap B]) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) \\ &= P(A) + P(B \setminus A) \\ &= P(A \cup (B \setminus A)) \\ &= P(A \cup B). \end{aligned}$$ □



Kuva 2.8. Joukot A ja $B \setminus A$ ovat erillisiä.

- Nyt tuntuu siltä, että kirjaimet ja merkit vaan pyörii päässä. Mitä nämä yhdiste ja leikkaus siis käytännössä nyt olivatkaan? Erik ihmettelee.

- Yhdisteen todennäköisyys kertoo, millä todennäköisyydellä A tai B tapahtuu tai molemmat tapahtuvat eli

$$P(A \cup B) = P(A \text{ tai } B).$$

Leikkauksen todennäköisyys kertoo, millä todennäköisyydellä sekä A että B tapahtuvat eli

$$P(A \cap B) = P(A \text{ ja } B).$$

Vaikutat jo sen verran väsyneeltä, että käydään tämä asia vielä loppuun ja jatketaan huomenna, William vastaa myötätuntoisena.

Esimerkki 2.21. Nopanheitossa tapahtumien $A = \{1, 3, 5\}$ ja $B = \{1, 2\}$ leikkaus on $A \cap B = \{1\}$, jolloin niiden yhdisteen todennäköisyys on

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}.$$

* Huomautus 2.22. Yhteenlaskusääntö voidaan yleistää myös useammalle kuin kahdelle tapahtumalle:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = &\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ &+ (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned}$$

- Tämä päivä taisikin sitten olla tässä, William toteaa jo melkein puoliunessa olevalle kuninkaalle. - Nähdään huomenna sitten vähän pirteämpinä ja fiksumpina!

....

Seuraavana päivänä William saapuu jälleen kuninkaan linnaan. Sisältä kuuluu valtava itku pihalle asti. Hämmentyneenä William koputtaa ovelle.

- Mikä täällä on hätänä? William kysyy Erikiltä tämän avatessa oven.

- Pieni sukulaispoikamme Tim tuli meille päiväksi hoitoon ja nyt hän ei löydä lelulaatikoistaan lempiautoaan eikä pehmokoiraansa, Erik vastaa heidän kulkiessaan olohuoneeseen, jossa Esme istuu lattialla lohduttamassa Timiä. Vieressä on kaksi suurta lelulaatikkoa, jotka ovat vieläkin lähes täynnä leluja, vaikka lattiakin tuntuu lainehtivan laatikoista otetuista leluista.

- Timin vanhemmilla oli tullessaan kolme lelulaatikkoa, mutta yksi niistä unohtui autoon. Pelkäämme, että sekä auto että koira ovat juuri siinä laatikossa, Esme huikkaa lattialta. - Tim kuitenkin sanoo, että leluja pakatessaan hän laittoi auton ja koiran eri laatikoihin.

- Jos Tim on oikeassa, jompi kumpi leluista on varmasti tässä huoneessa, William vastaa. - Ja molemmat lelut löytyvät täältä kolmasosan todennäköisyydellä.

Tim rauhoittuu, kun Esme vakuuttaa hänelle ainakin toisen leluista varmasti löytyvän, ja he alkavat penkoa laatikoita.

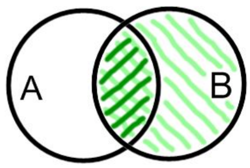
- Oho. Mistä hatusta tuon kolmasosan vetäisit? Erik puolestaan ihmettelee.

- Annas kun selitän. Saamme ratkaistua sen ehdollisen todennäköisyyden avulla, William sanoo heidän poistuessaan huoneesta.

Määritelmä 2.23. Tapahtuman A todennäköisyys ehdolla, että B tapahtuu, on

$$P(A \text{ ehdolla } B) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

kun $P(B) > 0$.



Kuva 2.9. Tiedetään, että B tapahtuu. Todennäköisyyttä sille, että tällöin myös A tapahtuu, voidaan havainnollistaa tapahtumien A ja B leikkauksen ja tapahtuman B todennäköisyyksien suhteella.

Esimerkki 2.24 (Timin leluongelman ratkaisu). Halutaan selvittää todennäköisyys, että kumpikaan Timin haluamista leluista ei ole autoon jääneessä laatikossa, kun oletetaan, että ne ovat eri laatikoissa.

Olkoon nyt tapahtuma A = ”kumpikaan leluista ei ole autoon jääneessä laatikossa” ja B = ”lempiauto ja pehmokoira eivät ole samassa laatikossa”.

Tällöin kysytty tapahtuma on $A \mid B$. Sen todennäköisyyden laskemiseksi täytyy ensin selvittää tapahtumien A ja B leikkauksen todennäköisyys ja tapahtuman B todennäköisyys.

Numeroidaan laatikot yhdestä kolmeen niin, että laatikko 3 on se laatikko, joka jäi autoon.[7] Auto ja koira voivat sijoittua eri laatikoihin yhdeksällä eri tavalla (kuva 2.10). Tapahtumalle $A \cap B$ suotuisia alkeistapauksia ovat ne, joissa auto ja koira ovat laatikoissa 1 ja 2, mutta eivät kuitenkaan samassa laatikossa. Kuvasta 2.10 nähdään, että suotuisia alkeistapauksia on kaksi. Näin ollen tapahtumien A ja B leikkauksen todennäköisyys on

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}.$$

laatikko 1	A K	-	-	A	A	K	-	K	-
laatikko 2	-	A K	-	K	-	A	A	-	K
laatikko 3	-	-	A K	-	K	-	K	A	A

Kuva 2.10. Keltaiseksi värjätyillä sarakkeilla ovat suotuisat alkeistapaukset, sillä auto (A) ja koira (K) ovat laatikoissa 1 ja 2, mutta kuitenkin eri laatikoissa.

Tapahtuman B todennäköisyys saadaan laskettua helpoiten komplementin kautta:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\text{"auto ja koira ovat samassa laatikossa"}) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{2}{3}.$$

Näin ollen kysytyn tapahtuman todennäköisyys on

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.$$ [8]

- Aivan. Kiitos kauheasti! Erik ilahtuu ymmärtäessään Timin leluongelman ratkaisun.
- Mennään nyt kahville ja saat samalla selittää ratkaisun nopanheitto-ongelmaani.
- Nopanheitto-ongelmasi ratkaisemiseen tarvitaan vielä kertolaskusääntöä, William toteaa kahvipöydässä.

Lause 2.25 (Yleinen kertolaskusääntö). *Tapahtumien A ja B leikkauksen todennäköisyys on*

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B).$$

Todistus. Seuraa suoraan ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä 2.23. □

- Sinun ongelmassasi on kyse riippumattomista tapahtumista, jolloin voimme käyttää yleisen kertolaskusäännön yksinkertaistettua versiota, William kertoo. - Selitän siis ensin, mitä riippumattomat tapahtumat ovat. Lähden liikkeelle matemaattisesta määritelmästä, jonka kautta lopulta päädyn intuitiiviseen määritelmään.

[7]Numerointi suoritetaan vain, jotta tiedettäisiin, mistä laatikosta on milloinkin kyse. Vaikka laatikot numeroitaisiin eri tavoin, ratkaisu pysyisi samana eli numerointi ei vaikuta tehtävän ratkaisuun.

[8]Tämä esimerkki olisi voitu laskea yksinkertaisemminkin: millä todennäköisyydellä autoon jäi juuri se laatikko, jossa ei ole lempiautoa eikä pehmokoiraa, kun oletetaan, että ne ovat eri laatikossa.

Määritelmä 2.26. Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

* Määritelmä 2.27. Tapahtumat A, B ja C ovat riippumattomia, jos

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C), \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B), \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \text{ ja} \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C). \end{aligned}$$

* Paradoksi 2.28. Heitetään kahta kolikkoa. Olkoot tapahtumat
$A =$ "ensimmäinen kolikko on kruuna",
$B =$ "toinen kolikko on kruuna" ja
$C =$ "ainoastaan toinen kolikoista on kruuna".

Tällöin tapahtumat A, B ja C ovat pareittain riippumattomat. Kuitenkin jos tiedetään näistä minkä tahansa kahden tapahtuman osalta, ovatko ne tapahtuneet vai ei, tiedetään myös tapahtuuko kolmas. Miten tämä voi olla mahdollista?

Ratkaisu: Selvästi tapahtumat A ja B ovat riippumattomat, sillä edellisen heiton tulos ei vaikuta seuraavan heiton tulokseen. Myös tapahtumat A ja C (samoin kuin B ja C) ovat riippumattomat: alkeistapaukset ovat (kr, kr), (kr, kl), (kl, kr) ja (kl, kl), joten $P(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(C)$ ja $P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$.

Kuitenkin $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$, joten nämä kolme tapahtumaa riippuvat toisistaan eli kaksi niistä määrää kolmannen. Tämä paradoksi osoittaakin, että pareittain riippumattomuudesta ei seuraa kaikkien tapahtumien keskenäinen riippumattomuus.

* Huomautus 2.29. Tapahtumien riippumattomuus voidaan määritellä useammallekin kuin kolmelle joukolle vastaavaan tapaan: tapahtumat A_i ovat riippumattomat, jos kaikille indeksikombinaatioille $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ pätee

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

* Huomautus 2.30. Tapahtumien A ja B välistä riippuvuutta voidaan kuvata *korrelaation* avulla.

Tapahtumien A ja B välinen korrelaatio on *positiivinen*, jos

$$P(A \cap B) > P(A)P(B)$$

(vertaa määritelmään 2.26). Positiivinen korrelaatio tarkoittaa sitä, että jos tapahtumaa A esiintyy paljon, myös tapahtumaa B esiintyy paljon ja jos tapahtumaa A esiintyy vähän, myös tapahtumaa B esiintyy vähän.

Tapahtumien A ja B välinen korrelaatio on *negatiivinen*, jos

$$P(A \cap B) < P(A)P(B).$$

Tällöin jos tapahtumaa A esiintyy paljon, tapahtumaa B esiintyy vähän ja päinvastoin.[9]

[9]Korrelaatiota käsitellään täsmällisemmin luvussa 6.

Lause 2.31. *Jos tapahtumat A ja B ovat riippumattomia ja $P(B) > 0$, niin*

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Todistus. Ehdollisen todennäköisyyden ja tapahtumien riippumattomuuden määritelmistä 2.23 ja 2.26 seuraa

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

□

Vertaamalla edellistä lausetta ja yleistä kertolaskusääntöä 2.25 saadaan tapahtumien riippumattomuuden intuitiivinen määritelmä: tapahtumat ovat riippumattomia, jos toisen tapahtuman todennäköisyys ei riipu siitä, onko toinen tapahtunut aiemmin vai ei.

Jos tiedetään, että tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, niiden leikkauksen todennäköisyys saadaan todennäköisyyksien $P(A)$ ja $P(B)$ tulona. Tämä yleistyy myös useammille riippumattomille tapahtumille.

Huomautus 2.32 (Kertolaskusääntö). Jos tiedetään, että tapahtumat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ovat riippumattomia, niiden leikkauksen todennäköisyys on

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

- Kertolaskusäännön (huomautus 2.32) avulla saadaan lopulta ratkaistua ongelmasi! William sanoo hymyillen.

Esimerkki 2.33 (Erikin ongelman ratkaisu). Lasketaan todennäköisyys sille, että neljä kertaa noppaa heitettäessä ei saada yhtään kuutosta. Heiton silmäluku ei riipu mitenkään siitä, mitä lukuja on heitetty aiemmin, joten heitot ovat riippumattomia tapahtumia.

Olkoon tapahtuma A_k = ”k:nnella heitolla ei saada kuutosta”. Todennäköisyys sille, että yhdellä heitolla ei saada kuutosta on $\frac{5}{6}$ (ks. esimerkki 2.17) eli $P(A_k) = \frac{5}{6}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$.

Nyt tapahtuman B = ”4 heitolla ei yhtään kuutosta” todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } A_3 \text{ ja } A_4) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \\ &= \frac{625}{1296} = 0,48225308641\ldots < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Todennäköisyys, että neljällä heitolla saadaan vähintään yksi kuutonen on äskeisen tapahtuman komplementti, eli sen todennäköisyys $P(\bar{B}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$. Tämän vuoksi neljää noppaa heitettäessä on todennäköisempää voittaa, kun veikkaa, että tulee ainakin yksi kuutonen kuin ei yhtään.

Kahvittelujen jälkeen kuningas kiittelee Williamia oppimistaan asioista: - Kiitosta vaan ymmärrykseni lisäämisestä! Toivottavasti näemme jatkossakin, vaikka ongelmani onkin ratkaistu.

2.3. * Kokonaistodennäköisyyden kaava ja Bayesin kaava

Kuningasperhe on kutsuttu hienoihin juhliin, jotka läheisen saaren kuningas ja kuningatar järjestävät. Edellisenä iltana Esme ja Erik pohtivat, mitä laittaisivat päälleen juhliin.

- Haluaisin laittaa tämän vihreän mekon. En voi kuitenkaan laittaa sitä, koska tiarassani on punaisia jalokiviä, kuningatar Esme harmittelee Erikille.

- Eihän tuo ole ongelma eikä mikään, Erik toteaa. - Pyydän paikallista kultaseppää tekemään sinulle tiaran, jossa on vihreä jalokivi.

- Voi, se olisi ihanaa! Mutta ehtiiköhän hän?

Erik lähtee saman tien kultasepän luo. Kultaseppä Jan suostuu tehtävään ja lupaa tiaran olevan valmis seuraavana aamuna.

....

Seuraavana aamuna William poikkeaa kultasepän liikkeeseen tuomaan isoäitinsä hopeaaterimet kiillotettavaksi.

- Huhuu! Onko täällä ketään? William huhuilee tiskin takaa.

- Täällä ollaan! kultaseppä Jan huutaa takahuoneestaan ja saapuu paikalle. - Mitä pidät tiarasta, jonka tein kuningatar Esmelle illan juhliin? Sain sen juuri valmiiksi. Hän halusi tähän vihreän jalokiven, jotta se sopisi hänen mekkoonsa.

- Mutta tuo jalokivihän on punainen! William huomauttaa.

- Mitä? Ei voi olla! Jan huudahtaa ja painelee takahuoneeseen. - Otin sen varmasti tästä jalokivirasiasta, jossa on vain vihreitä jalokiviä! Kun taas punaiset jalokivet ovat tässä toisessa rasiassa, Jan sanoo tullessaan takaisin kahden samanlaisen rasian kanssa.

- Mutta noissa molemmissa rasioissa on sekä punaisia että vihreitä jalokiviä, William sanoo katsottuaan rasioihin.

- Voi ei, ne ovat menneet sekaisin! Ja minä olen värisokea, niin en huomannut sitä! Mitä minä nyt teen?

- Kai sinä ehdit vielä vaihtaa sen, jos juhlat kerran ovat illalla, William sanoo. Samassa kuningas Erik tulee paikalle tiaraa noutamaan.

- Millä ihmeen todennäköisyydellä näin on voinut käydä? Erik ihmettelee kuullessaan tarinan.

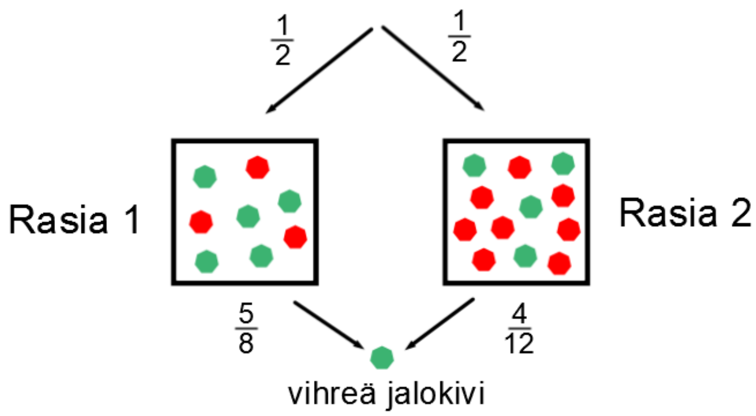
- Jos sinulla, Erik, ei ole mitään tekemistä nyt odotellessasi, voisimme poiketa tuossa läheisessä kahvilassa sillä aikaa, kun Jan vaihtaa tiaraan vihreän jalokiven. Samalla voimme selvittää tämän todennäköisyyden, William ehdottaa kuninkaalle, joka suostuu tähän mielellään.

- Menkää vain. Tulen sitten kertomaan, kun tämä on korjattu, Jan lupaa.

Ongelma 2.34. Rasiassa 1, josta kultaseppä Jan on ottanut punaisen jalokiven, on 2 punaista ja 5 vihreää jalokiveä. Alunperin rasiassa 1 oli siis 3 punaista ja 5 vihreää jalokiveä. Rasiassa 2 on 8 punaista ja 4 vihreää jalokiveä. Millä todennäköisyydellä värisokea kultaseppä saa vihreän jalokiven, kun rasiat 1 ja 2 ovat samannäköisiä eli kultasepällä on yhtä suuri todennäköisyys valita kumpi tahansa rasioista?

Jan voi saada vihreän jalokiven vaihtoehtoisilla tavoilla: valitsemalla rasian 1 tai rasian 2. Vihreän jalokiven saamisen todennäköisyyteen vaikuttaa kuitenkin se, kumman rasioista hän valitsee, sillä rasioissa on eri määrä vihreitä ja punaisia jalokiviä.

Todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ Jan valitsee rasian 1. Tämän rasian valittuaan todennäköisyys saada vihreä jalokivi on $\frac{5}{8}$. Todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ Jan valitsee rasian 2. Tällöin todennäköisyys saada vihreä jalokivi on $\frac{4}{12}$.



Kuva 2.11

Olkoot tapahtumat A = ”Jan valitsee rasian 1”, B = ”Jan valitsee rasian 2” ja V = ”Jan saa vihreän jalokiven”. Kuvasta 2.11 nähdään, että tapahtuma V voi tapahtua kahdella eri tavalla: $A \cap V$ tai $B \cap V$, jolloin $P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V)$.

Tämä saadaan laskettua yleisen kertolaskusäännön (lause 2.25) avulla:

$$\begin{aligned} P(V) &= P(A \cap V) + P(B \cap V) = P(A)P(V \mid A) + P(B)P(V \mid B) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{12} = \frac{23}{48} = 0,479166666\ldots < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kultaseppä Janin on siis hieman todennäköisempää saada punainen kuin vihreä jalokivi.

Edellisen esimerkin idea yleisessä muodossa on nimeltään kokonaistodennäköisyyden kaava.

Lause 2.35 (Kokonaistodennäköisyyden kaava). *Olkoon $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ perusjoukon Ω ositus erillisiin tapahtumiin eli $A_i \cap A_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$ ja $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Tapahtuman B todennäköisyys on*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

Todistus. Huomataan, että $B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$. Joukot $A_i \cap B$ ovat erillisiä, sillä joukot A_i ovat erillisiä, joten seurauksen 2.16 ja yleisen kertolaskusäännön 2.25 avulla saadaan:

$$P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

$\square$

- Mielenkiintoista! Erik toteaa.
- Niinpä. Mutta erikoista on se, että vaikka kultasepän oli todennäköisempää saada punainen kuin vihreä jalokivi, niin punaisen jalokiven saaminen juuri rasiasta A oli epätodennäköisempää kuin sen saaminen rasiasta B.
- Kuinka niin?
- Jania ei vielä näy, niin ehdimme tosiaan laskea vielä tämänkin. Sen saamme Bayesin kaavan avulla.

LAUSE 2.36 (Bayesin kaava). *Olkoon* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *perusjoukon* Ω *ositus erillisiin tapahtumiin (kuten lauseessa* 2.35*). Ehdollinen todennäköisyys* $P(A_k \mid B)$ *on*

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

TODISTUS. Käytetään yleistä kertolaskusääntöä ehdollisen todennäköisyyden kaavan osoittajaan ja kokonaistodennäköisyyden kaavaa nimittäjään:

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

□

ESIMERKKI 2.37. Tiedetään, että kultaseppä Jan valitsi punaisen jalokiven. Millä todennäköisyydellä hän valitsi sen rasiasta 1?

Olkoot tapahtumat A = ”Jan valitsee rasian 1”, B = ”Jan valitsee rasian 2” ja R = ”Jan saa punaisen jalokiven”.

Tällöin

$$P(A)P(R \mid A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$$

ja

$$P(A)P(R \mid A) + P(B)P(R \mid B) = \frac{3}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{12} = \frac{25}{48},$$

joten

$$P(A \mid R) = \frac{P(A)P(R \mid A)}{P(A)P(R \mid A) + P(B)P(R \mid B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{25}{48}} = \frac{9}{25} = 0,36 < \frac{1}{2}.$$

Punaisen jalokiven saaminen olisi siis ollut todennäköisempää rasiasta 2.

- Tiara on valmis! kultaseppä Jan huudahtaa kahvilan ovelta.
- Tuhannet kiitokset! Erik sanoo vastaanottaessaan tiaran. - Olette molemmat tervetulleet vajaan kolmen tunnin päästä meille lounaalle. Nähdään silloin!

LUKU 3

Kombinatoriikkaa

3.1. Permutaatiot ja kombinaatiot

Pari tuntia sen jälkeen, kun Erik on saapunut tiaraa hakemasta, prinsessa Melina pohtii asuaan illan juhliin.

- Iskä! Mitkä vaatteet mä laittaisin illan juhliin? Vaihtoehtoina ovat nämä kaksi kruunua, neljä mekkoa ja kolmet kengät, Melina huutaa tuskastuneena isälleen.

- Vaikea sanoa. Mitä jos näyttäisit minulle kaikki vaihtoehdot niin olisi helpompi vastata?

- No siinähän menee ikuisuus. Vaihtoehtoja tulee näistä vaikka kuinka paljon.

- Höpöhöpö. Muutama vaatekappale vain niin ei tuossa kauaa mene.

Melina aloittaa vaatteiden sovittelun. Viidentoista minuutin jälkeen hän on saanut näytettyä isälleen peräti viisi erilaista asukokonaisuutta. Molemmat alkavat kuitenkin jo hieman tuskastua siitä, kuinka paljon kokonaisuuksia on vielä jäljellä ja kuinka kauan vaatteiden sovitteluun menee. Syömäänkin pitäisi jo pian mennä. Samassa oveen koputetaan.

- Mitäs täällä puuhaillaan? William kysyy astuttuaan sisälle huoneeseen kultaseppä Janin kanssa.

- Melina ei osaa päättää, mitkä vaatteet laittaisi illan juhliin, Erik huokaisee.

- Niin. Mulla on kaksi kruunua, neljä mekkoa ja kolmet kengät. Iskä ei osaa sanoa mielipidettään ennen kuin on nähnyt kaikki vaihtoehdot. Lisäksi hän väittää, ettei niitä vaihtoehtoja kovin montaa voi olla. Tässä on kuitenkin mennyt jo vartti ja tuntuu että näitä vaihtoehtoja on vielä miljoona, Melina huudahtaa vihaisena ja melkein purskahtaa itkuun.

- Otetaan nyt ihan rauhallisesti, ei tässä aivan miljoonaa vaihtoehtoa ole. Kombinatoriikka pelastaa! William vastaa hymyillen.

- Ko... Mikä pelastaa?

- *Kombinatoriikka.* Sitä tarvitaan, kun halutaan selvittää kuinka monta erilaista yhdistelmää voidaan muodostaa annetuista osista, William selittää ja jatkaa: - Mietitäänpäs. Jos ensin valitset kruunuista tuon isomman ja mekoista tuon punaisen. Näiden kanssa voit valita kolmet erilaiset kengät, eli asukokonaisuuksia on nyt kolme. Kuinka monta asukokonaisuutta voit valita tuon isomman kruunun ja vihreän mekon kanssa?

- Eihän siinä voi vaihtaa kuin kenkiä eli vastaus on kolme, Melina vastaa.

- Aivan. Kuinka monta erilaista asukokonaisuutta voit siis valita isomman kruunun kanssa?

- Punaisen mekon kanssa vaihtoehtoja oli kolme ja vihreän kanssa kolme. Vastaavasti pinkin ja sinisen kanssa on kolme. Eli yhteensä 12.

- Totta. Jokaisen neljän mekon kanssa sinulla on siis valittavana kolmet kengät. Vaihtoehtoja on $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$. Entä jos valitsetkin tuon toisen kruunun? Kuinka monta vaihtoehtoa sinulla on sen kanssa? William kysyy.

- Pienempi kruunu. Ensin punainen mekko ja kenkiä on kolmet erilaiset. Sitten vihreän mekon kanssa kolmet kengät... Hei! Tämähän menee ihan samanlailla kuin ison kruunun kanssa. Vaihtoehtoja tulee siis 12.

- Jolloin vaihtoehtoja yhteensä on?

- Ison kruunun kanssa 12 ja pienen kruunun kanssa 12 eli yhteensä 24. Voi ei! Vielä pitää kokeilla 19 erilaista asua.

- Ei siihen mene enää kuin vähän alle tunti, jos jatkat samalla tahdilla kuin tähän asti, William naurahtaa. - Tai sitten valitset tuon pinkin mekon isomman kruunun ja violettien kenkien kanssa ja tulet meidän kanssa syömään.

KUVA 3.1. Prinsessan erilaiset asukokonaisuudet

LAUSE 3.1 (Tuloperiaate). *Tarkastellaan koetta, jossa tehdään n peräkkäistä valintaa. Oletetaan, että vaiheessa i on k_i vaihtoehtoa ja $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tällöin kokeessa on*

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$$

erilaista tulosvaihtoehtoa.

ESIMERKKI 3.2. Kuinka monta erilaista asukokonaisuutta Melina voi muodostaa, kun hänellä on kaksi kruunua, neljä mekkoa ja kolmet kengät?

Melinan on tehtävä kolme peräkkäistä valintaa. Ensin hän voi valita kruunun kahdella eri tavalla eli hänellä on kaksi eri vaihtoehtoa. Seuraavaksi hän voi valita mekon neljällä eri tavalla ja lopuksi kengät kolmella eri tavalla. Edellisen lauseen mukaan erilaisia asukokonaisuuksia on

$$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24.$$

MÄÄRITELMÄ 3.3. Olkoon n-alkioinen joukko $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Joukon E alkioista muodostettua järjestettyä n-paikkaista jonoa

$$(a_{i1}, a_{i2} \dots, a_{in})$$

kutsutaan joukon E permutaatioksi.

Toisin sanottuna jokainen jono, jossa jokainen joukon A alkio esiintyy täsmälleen yhden kerran, on joukon A permutaatio.

HUOMAUTUS 3.4. Jono on järjestetty joukko eli jos alkioiden paikkoja vaihdetaan, jono ei ole enää sama.

ESIMERKKI 3.5. Kuningasperhe on vihdoin saanut valittua juhlavaatteensa ja lounaan jälkeen he pääsevät lähtemään kuninkaallisella laivallaan juhliin läheiselle saarelle. Kuningas Erik (K), kuningatar Esme (E) ja prinsessa Melina (M) voivat kävellä laivaan vievää kapeaa siltaa kuudessa eri järjestyksessä eli muodostaa kuusi erilaista jonoa: KEM, KME, EKM, EMK, MKE ja MEK.

Erilaisia permutaatioita on siis kuusi.

LAUSE 3.6. *Joukolla* $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *on* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ *permutaatiota.*

TODISTUS. Jonon, jossa on n paikkaa, ensimmäiseksi alkioksi voidaan valita mikä tahansa joukon E alkioista eli vaihtoehtoja on n kappaletta.

Saman jonon toiseksi alkioksi voidaan valita mikä tahansa joukon E alkioista paitsi se, joka valittiin jonon ensimmäiseksi alkioksi. Vaihtoehtoja on siis $n - 1$ kappaletta.

Näin jatketaan. Kolmanneksi alkioksi voidaan valita jokin jäljellä olevista $n - 2$ alkiosta ja niin edelleen. Tuloperiaatteen nojalla erilaisia tulosvaihtoehtoja on

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

kappaletta. □

ESIMERKKI 3.7. Kun Erik, Esme ja Melina kävelevät jonossa kapeaa laivaan vievää siltaa, he voivat kävellä $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ eri järjestyksessä. Heidän kuuden hengen seurueensa voi kävellä laivaan $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ eri järjestyksessä.

HUOMAUTUS 3.8. Sanotaan, että luku $n!$ on luvun n kertoma.

On sovittu, että $0! = 1$.

Kertoman laskeminen on helpompaa pienillä luvuilla n, kun huomataan, että

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

* HUOMAUTUS 3.9. Suurilla luvuilla luvun n kertomaa voidaan approksimoida eli arvioida Stirlingin kaavan avulla:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

jossa $e \approx 2,71828$ on Neperin luku.

MÄÄRITELMÄ 3.10. Olkoon joukko $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Joukon E alkioista muodostettua järjestettyä k-paikkaista jonoa, missä $0 \leq k \leq n$, kutsutaan joukon E k-permutaatioksi.

ESIMERKKI 3.11. Laivan kannella olevalle penkille mahtuu istumaan 3 ihmistä. Esmellä (E), Melinalla (M) ja heidän seuralaisillaan Jasminilla (J) ja Sophiella (S) on 24 eri mahdollisuutta, kuinka kolme heistä voi istua penkillä:

EMJ, EJM, MEJ, MJE, JEM, JME,
EMS, ESM, MES, MSE, SEM, SME,
EJS, ESJ, JES, JSE, SEJ, SJE,
MJS, MSJ, JMS, JSM, SMJ ja SJM.

Erilaisia 3-permutaatioita on siis 24.

LAUSE 3.12. *Joukon* $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ k*-permutaatioiden lukumäärä, jota merkitään* $(n)_k$*, on*

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Todistus. Jonon ensimmäinen alkio voidaan valita n eri tavalla, toinen alkio $n-1$ eri tavalla ja niin edelleen. Viimeinen eli k. alkio voidaan valita $n-(k-1) = n-k+1$ eri tavalla. Tuloperiaatteen nojalla erilaisia tulosvaihtoehtoja on $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ eli $(n)_k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))$. Yhtälön ensimmäinen yhtäsuuruus on siis todistettu.

Lisäksi

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-(k+1))\cdot(n-k)\cdot(n-(k-1))\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-(k+1))\cdot(n-k)}\\ &= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\\ &= (n)_k,\end{aligned}$$

joten myös toinen yhtäsuuruus pätee. □

Huomautus 3.13. Käytännössä k-permutaatioiden lukumäärä kertoo sen, kuinka monella eri tavalla n-alkioisesta joukosta voidaan muodostaa k-paikkainen jono.

Esimerkki 3.14. Kuningasperhe on vihdoin päässyt perille juhliin. Paikalla on 7 miestä ja 11 naista. Kuinka monella tavalla voidaan muodostaa tanssiparit avajaistanssiin?

Tanssipareja muodostettaessa naisten valintajärjestyksellä on merkitystä, sillä järjestyksen muuttuessa tanssipari vaihtuu. Ajatellaan, että miehet seisovat jonossa tietyssä järjestyksessä. Tällöin halutaan siis tietää, kuinka monta erilaista 7 naisen jonoa voidaan muodostaa 11 naisesta eli joukon $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$ 7-permutaatioiden lukumäärä $(n)_k$, missä $n = 11$ ja $k = 7$. Tämä saadaan selvitettyä lauseen 3.12 avulla:

$$(11)_7 = \frac{11!}{(11-7)!} = 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1663200.$$

Tanssiparit voidaan siis muodostaa avajaistanssiin 1 663 200 eri tavalla.

Esimerkki 3.15. Juhlissa neiti Sarah ja herra Robert huomaavat, että heillä on sama syntymäpäivä. Mikä on todennäköisyys sille, että juhlissa olleista 18 henkilöstä ainakin kahdella on sama syntymäpäivä?

Oletetaan, että kaikki syntymäpäivät ovat yhtä todennäköisiä. Kun ei huomioida karkauspäiviä, jokaisella henkilöllä on 365 mahdollista syntymäpäivää. Näin ollen 18 henkilön syntymäpäiville on 365^{18} mahdollisuutta.

Olkoon tapahtuma $A =$ ”ainakin kahdella on sama syntymäpäivä”. Tällöin $\bar{A} =$ ”kaikilla on eri syntymäpäivä” ja $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Lukumäärä sille, kuinka monella eri tavalla kaikilla henkilöillä on eri syntymäpäivä, saadaan joukon $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_{365}\}$ 18-permutaationa, sillä ensimmäisen henkilön syntymäpäivälle on 365 eri mahdollisuutta, toisen henkilön syntymäpäivälle 364 eri mahdollisuutta ja niin edelleen. 365 päivästä muodostetaan siis 18-paikkainen jono, jossa mikään päivä ei voi esiintyä kahta kertaa. Näiden 18-permutaatioiden lukumäärä on siis

$$(365)_{18} = \frac{365!}{(365-18)!},$$

jolloin

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-18)!}}{365^{18}} = 1 - 0,65308858\ldots = 0,34691141\ldots.$$

Vaikka henkilöitä on juhlissa vain 18, yllättäen todennäköisyys on jopa yli $\frac{1}{3}$ sille, että ainakin kahdella henkilöllä on sama syntymäpäivä.

Kun henkilöitä on vähintään 41, vastaava todennäköisyys on yli 90%.

MÄÄRITELMÄ 3.16. Olkoon joukko $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Joukon E alkioista muodostettua k-alkioista osajoukkoa kutsutaan joukon E k-kombinaatioksi.

ESIMERKKI 3.17. Juhlissa on neljä miestä, jotka alkavat kerskua valtavilla lihaksillaan. Merkitään heitä kirjaimilla A, B, C ja D. Jos kaikki vääntävät kättä kerran toisiaan vastaan, kädenvääntömittelöitä on yhteensä 6: AB, AC, AD, BC, BD ja CD.

Erilaisia 2-kombinaatioita on siis kuusi.

LAUSE 3.18. *Joukon $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ k-kombinaatioiden lukumäärä, jota merkitään $\binom{n}{k}$, on*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

TODISTUS. Olkoon x k-kombinaatioiden lukumäärä. Jokaisesta k-kombinaatiosta voidaan tuloperiaatteen mukaan tehdä $k!$ erilaista jonoa eli k-permutaatiota. Näin jokainen k-permutaatio tulee mukaan täsmälleen kerran. Siten

$$x \cdot k! = (n)_k.$$

Lauseen 3.12 avulla saadaan ratkaistua k-kombinaatioiden lukumäärä:

$$x = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad \square$$

HUOMAUTUS 3.19. Käytännössä k-kombinaatioiden lukumäärä kertoo sen, kuinka monella eri tavalla n-alkioisesta joukosta voidaan valita k alkiota.

$\binom{n}{k}$ sanotaan ”n yli k:n”.

On tärkeää huomata, että k-kombinaatiossa valittujen alkioiden järjestyksellä ei ole merkitystä, kun taas k-permutaatiossa järjestyksellä on väliä.

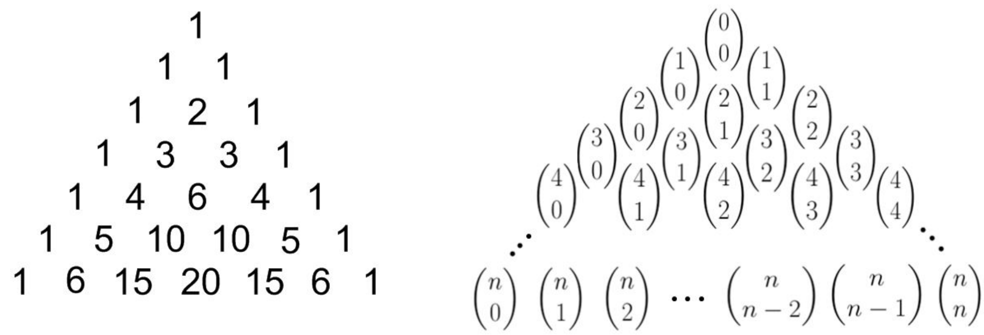
ESIMERKKI 3.20. Kuinka monella eri tavalla 14 juhlavieraan joukosta voidaan valita neljä ihmistä, jotka pääsevät istumaan kuningasparien pöytään?

Istumisjärjestyksellä ei ole väliä, sillä olemme kiinnostuneita vain siitä, ketkä neljä tähän pöytään pääsevät. Halutaan siis selvittää joukon $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_{14}\}$ 4-kombinaatio. Se saadaan lauseen 3.18 avulla:

$$\binom{14}{4} = \frac{14!}{4!(14-4)!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1001.$$

Juhlavieraiden joukosta voidaan siis valita 1 001 eri tavalla neljän ihmisen joukko, joka pääsee kuningasparien pöytään.

HUOMAUTUS 3.21. Lukuja $\binom{n}{k}$ kutsutaan binomikertoimiksi.[1] On sovittu, että $\binom{n}{k} = 0$, jos $k < 0$ tai $k > n$. Binomikertoimet saadaan Pascalin kolmiosta.



KUVA 3.2. Pascalin kolmiossa jokaisella rivillä ensimmäinen ja viimeinen luku on 1. Jokainen muu luku on kahden sen yläpuolella olevan luvun summa. Samat luvut saadaan binomikertoimien avulla, mikä todistetaan lauseessa 3.22.

3.2. * Pascalin kolmio

LAUSE 3.22. *Binomikertoimille pätevät seuraavat yhtäsuuruudet*

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

(3) $\binom{n}{1} = n$ *ja*

(4) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ *("Pascalin sääntö").*

TODISTUS.
(1) Lauseesta 3.18 saadaan

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \binom{n}{n}.$$

(2) Lauseesta 3.18 saadaan

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k))!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

[1]Nimitys seuraa Newtonin binomikaavasta 3.24.

(3) Lauseesta 3.18 saadaan

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

(4) Lauseesta 3.18 saadaan

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{k}{k(n-k+1)} + \frac{n-k+1}{k(n-k+1)}\right) \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n+1}{k(n-k+1)} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k-1)!k(n-k)!(n-k+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Huomautus 3.23. Edellisen lauseen neljäs kohta osoittaa, että binomikertoimet saadaan Pascalin kolmiosta eli kuvan 3.2 kolmiot ovat samat.

Lause 3.24 (Newtonin binomikaava). *Summan $(a+b)$ n. potenssi saadaan binomikertoimien avulla seuraavasti:*

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n.
\end{aligned}$$

Todistus. Todistetaan induktiolla. Kun $n = 1$, saadaan

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} b^1 + \binom{1}{1} a^1 = \frac{1!}{1!0!} b + \frac{1!}{0!1!} a = b + a = (a+b)^1$$

eli väite pätee.

Induktio-oletus:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Induktioväite:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}.\end{aligned}$$

Muutetaan ensimmäisen summan indeksointia:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}.$$

Koska $\binom{n}{-1} = 0$ ja $\binom{n}{n+1} = 0$, saadaan summat muutettua seuraavaan muotoon:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Molemmissa summissa on nyt samat indeksit, joten ne voidaan yhdistää. Lisäksi voidaan ottaa $a^k b^{n+1-k}$ yhteiseksi tekijäksi:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k}.$$

Pascalin säännön (lauseen 3.22 kohta (4)) avulla saadaan yhdistettyä binomikertoimet ja siten

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},$$

jolloin väite on todistettu. □

Esimerkki 3.25. Polynomin $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ kertoimet ovat

$$1 = \binom{3}{0}, 3 = \binom{3}{1}, 3 = \binom{3}{2} \text{ ja } 1 = \binom{3}{3}.$$

Ne voidaan perustella kirjoittamalla $(x+y)^3$ tuloksi $(x+y)^3 = (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$. Kun tämä tulo kerrotaan auki, saadaan termien summa, jossa jokainen termi sisältää kustakin summasta $(x+y)$ joko termin x tai y.

Termi, jossa muuttujaosana on x^3 voidaan valita vain yhdellä tavalla:

$$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y).$$

Termi, jossa muuttujaosana on x^2y voidaan valita seuraavilla tavoilla:

$$\begin{aligned}&(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y),\\&(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y),\\&(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y).\end{aligned}$$

Termi x^2y saadaan siis kolmella eri tavalla. Termiä muodostettaessa tulee valita kolmen tekijän $(x+y)$ joukosta yksi, josta otetaan muuttuja y, jolloin muista tekijöistä otetaan muuttuja x, eli vaihtoehtoja on $\binom{3}{1}$.

Termi, jossa muuttujaosana on xy^2 voidaan valita myöskin kolmella eri tavalla. Nyt pitää valita kaksi tekijää $(x+y)$, joista otetaan muuttuja y, jolloin vaihtoehtoja on $\binom{3}{2}$.

Termi, jossa muuttujaosana on y^3 voidaan valita vain yhdellä tavalla. Kolmen tekijän joukosta pitää valita kolme tekijää, joista otetaan muuttuja y eli vaihtoehtoja on $\binom{3}{3}$.

SEURAUS 3.26. *Joukolla* $E=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ *on* 2^n *osajoukkoa.*

TODISTUS. Joukolla E on $\binom{n}{k}$ k-alkioista osajoukkoa, kun $k=0,1,2,\dots,n$, joten kaikkiaan osajoukkoja on

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Ylläoleva summa on sama kuin Newtonin binomikaavan (lause 3.24) summa, kun $a=b=1$. Niinpä Newtonin binomikaavan vasen puoli saadaan muotoon $(1+1)^n=2^n$ eli n-alkioisella joukolla erilaisia osajoukkoja on 2^n. Samaan tulokseen olisi päästy myös tuloperiaatteen avulla: jokaisen alkion kohdalla on kaksi vaihtoehtoa, ottaa mukaan tai olla ottamatta. Tällöin mahdollisuuksia on $2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2=2^n$, sillä alkioita on n kappaletta. $\square$

LUKU 4

Todennäköisyyksiä äärettömille joukoille

Muutama viikko juhlien jälkeen Erik kutsuu Williamin jälleen luokseen.

- Terve, Wiltsu! Arvaat varmaan, millaista asiaa minulla on mielessäni, Erik toteaa Williamin saavuttua. - Haluan tietää, kannattaako minun osallistua uhkapeliin, johon naapurisaaren kuningas minut haastoi. Siinä heitetään kolikkoa ruudukolle, jossa yhden ruudun sivun pituus on kolikon halkaisija. Jos kolikko peittää jonkin ruudukon neliön kärjen, voitan yhden lantin. Jos kolikko ei peitä minkään ruudukon neliön kärkeä, häviän neljä lanttia.

- Vai että sellaista. Ensin tulee selvittää millä todennäköisyydellä kolikko peittää jonkin ruudukon neliön kärjen.

- Niin arvelinkin. En kuitenkaan keksinyt sinulta saamillani opeilla, miten sen voisi laskea.

- Puhuimme aiemmin vain diskreeteistä satunnaismuuttujista eli satunnaismuuttujista, jotka voivat saada vain äärellisen monta, William pysähtyy hetkeksi miettimään. - Niin, tai numeroituvasti äärettömän monta arvoa. Nyt kolikon pysähtymispaikalle on kuitenkin ylinumeroituvan monta vaihtoehtoa. Se tarkoittaa sitä, ettet pysty luettelemaan kaikkia mahdollisia kolikon pysähdyspaikkoja, jolloin et voi myöskään laskea todennäköisyyttä niin kuin tähän asti olet laskenut.

4.1. Geometrinen todennäköisyys

Kun alkeistapauksia on ylinumeroituvan monta, todennäköisyyksiä voidaan joissain tapauksissa laskea geometrian avulla:

$$P(A) = \frac{\text{suotuisien alkeistapausten geometrinen mitta}}{\text{koko kuvion geometrinen mitta}}.$$

Mitan käsitettä selvitellään tarkemmin luvuissa 9 ja 10. Sitä ennen olevissa esimerkeissä mitoista puhuttaessa on kyse vain tavanomaisista pituuksista tai pinta-aloista.

- Yksinkertainen esimerkki siitä, milloin todennäköisyys voidaan määrittää geometrian avulla, on sinullekin varmasti tuttu onnenpyörä, William huomauttaa.

Esimerkki 4.1. Kuvan 4.1 mukaisessa onnenpyörässä on kahdeksan yhtä suurta sektoria. Osoitin pysähtyy johonkin niistä.

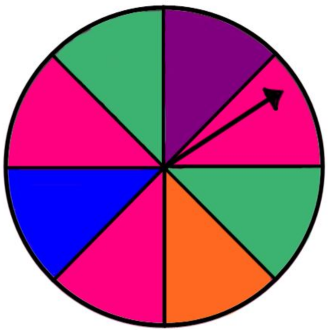
Koko kuvion geometrinen mitta on osoittimen kärjen ”piirtämän” ympyrän kehän pituus eli $2\pi r$, missä r on osoittimen pituus. Tällä kehällä on ylinumeroituvan monta pistettä, johon osoittimen kärki voi pysähtyä. Jokaista sektoria vastaavan kaaren pituus on $\frac{2\pi r}{8}$. Näin ollen pinkkien sektoreiden geometrinen mitta on $3 \cdot \frac{2\pi r}{8}$ ja todennäköisyys, että osoitin pysähtyy pinkille sektorille on

$$P(\text{pinkki}) = \frac{\text{suotuisien alkeistapausten geometrinen mitta}}{\text{koko kuvion geometrinen mitta}} = \frac{3 \cdot \frac{2\pi r}{8}}{2\pi r} = \frac{3}{8}.$$

Vastaavasti muut todennäköisyydet ovat

$$P(\text{vihreä}) = \frac{2 \cdot \frac{2\pi r}{8}}{2\pi r} = \frac{2}{8} \text{ ja}$$

$$P(\text{sininen}) = P(\text{violetti}) = P(\text{oranssi}) = \frac{\frac{2\pi r}{8}}{2\pi r} = \frac{1}{8}.$$



Kuva 4.1. Onnenpyörä.

- Mutta eikö tässä olisi voitu kokonaan unohtaa piit ja ajatella kahdeksaa symmetristä alkeistapausta, jolloin todennäköisyydet eri väreille olisi voitu laskea paljon helpommin? Erik ihmettelee.

- Hyvin huomattu! Sen todella olisi voinut ratkaista tuollakin tavalla. Halusin kuitenkin antaa tämän menetelmän esimerkkinä. Tätä on helpompi soveltaa esimerkiksi niihin tilanteisiin, joissa sektorit eivät olekaan yhtä suuret. Entä jos onnenpyörän sektori valittaisiinkin heittämällä siihen tikkaa eikä nuolta pyörittämällä? Mikä tällöin valittaisiin geometriseksi mitaksi?

- Hmm. Voisiko se olla pinta-ala? Erik vastaa mietteliäänä.

- Kyllä. Tässä tilanteessa todennäköisyydet olisi saatu suotuisten sektoreiden pinta-alojen summan ja koko ympyrän pinta-alan suhteena. On kuitenkin hyvä huomata, että tikan osuminen tietylle sektorille ei ole yhtä satunnainen ilmiö kuin nuolen pyörittäminen. Paitsi jos tikanheittäjä on aivan surkea.

- Niin, joo. Tottakai.

- Mutta nyt pääsemmekin ongelmasi kimppuun, William toteaa.

Esimerkki 4.2. Kolikkoa heitetään ruudukolle, jossa yhden ruudun sivun pituus on kolikon halkaisija. Millä todennäköisyydellä ruudukolle heitetty kolikko peittää neliön kärjen, kun voidaan olettaa, että kolikko osuu varmasti ruudukolle?

Tutkitaan kolikon keskipisteen sijaintia neliöruudukossa. Koska jokaisen neliön ympärillä olevat neliöt sijoittuvat samalla tavalla, riittää tarkastella yhtä neliötä.

Jos kolikon keskipisteen etäisyys neliön kärjestä on pienempi kuin kolikon säde r, kolikko peittää neliön kärjen. Jos siis kolikon keskipiste osuu kuvassa 4.2 olevalle värjätylle alueelle, kolikko peittää neliön kärjen.

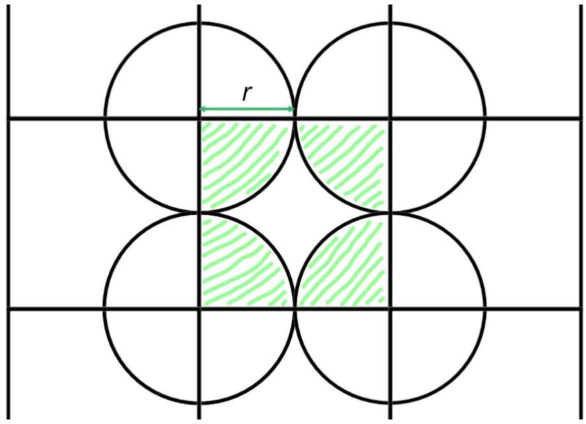
Tapahtuman $A =$ ”ruudukolle heitetty kolikko peittää neliön kärjen” todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{\text{värjätyn alueen pinta-ala}}{\text{neliön pinta-ala}}.$$

Värjätty alue muodostuu neljästä neljänneskolikon pinta-alan kokoisesta alueesta, joten sen pinta-ala on sama kuin yhden kolikon pinta-ala eli πr^2. Neliön pinta-ala on $(2r)^2 = 4r^2$.

Tapahtuman A todennäköisyys on täten:

$$P(A) = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} = 0,785398163\ldots.$$



Kuva 4.2. Jos kolikon keskipiste osuu värjätylle alueelle, kolikko peittää neliön kärjen.

- Kiitos. Nämä geometriset todennäköisyydethän ovat helppoja! Erik ilahtuu.
- Tuohon luuloon ei kannata tuudittautua. Mitäs tästä ongelmasta tuumaat? William kysyy.

Paradoksi 4.3 (Bertrandin paradoksi). Annettuun ympyrään piirretään mielivaltaisesti jänne. Millä todennäköisyydellä jänne on pidempi kuin ympyrän sisään piirretyn tasasivuisen kolmion sivu?

Olkoon tapahtuma A = ”ympyrään piirretty jänne on pidempi kuin ympyrän sisään piirretyn tasasivuisen kolmion sivu”.

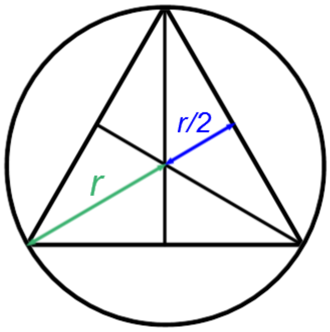
Ympyrän sisällä olevan tasasivuisen kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa suhteessa 1 : 2, mikä seuraa yhdenmuotoisista kolmioista (kuva 4.3). Tällöin jokainen kulmanpuolittaja jakautuu säteen r ja säteen puolikkaan $\frac{r}{2}$ mittaisiin osiin kuvan 4.3 osoittamalla tavalla.

Ympyrään mielivaltaisesti piirrettävän jänteen pituus on välillä $]0, 2r]$.

Ratkaisu A:

Oletetaan, että ympyrän keskipisteen ja jänteen keskipisteen etäisyys valitaan mielivaltaisesti väliltä $[0, r[$.

Kuvasta nähdään, että tasasivuisen kolmion sivun keskipisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä on $\frac{r}{2}$. Tällöin tapahtuman A toteutuessa jänteen keskipisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä on oltava pienempi kuin $\frac{r}{2}$ eli jänteen ja ympyrän keskipisteiden välinen etäisyys tulee olla välillä $[0, \frac{r}{2}[$.



KUVA 4.3. Ympyrän sisällä olevan tasasivuisen kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa suhteessa 1 : 2.

Tapahtuman A geometrinen todennäköisyys on suotuisten alkeistapausten (etäisyys välillä $[0, \frac{r}{2}[$) ja kaikkien alkeistapausten (etäisyys välillä $[0, r[$) geometristen mittojen suhde. Suotuisten alkeistapausten geometrinen mitta on $\frac{r}{2}$ ja kaikkien alkeistapausten geometrinen mitta on r, joten

$$P(A) = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu B:

Oletetaan, että jänteen toinen päätepiste on kiinnitetty ympyrän kehälle ja toinen päätepiste valitaan mielivaltaisesti ympyrän kehältä.

Jos jänteen kiinnitetyn päätepisteen ajatellaan olevan yhdessä tasasivuisen kolmion kärjistä, kuvan 4.3 avulla nähdään, että tapahtuman A toteutuessa toisen päätepisteen on oltava ympyrän kaarella, jonka pituus on $\frac{2\pi r}{3}$.

Suotuisten alkeistapausten geometrinen mitta on nyt $\frac{2\pi r}{3}$ ja kaikkien alkeistapausten geometrinen mitta on $2\pi r$, jolloin tapahtuman A todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{\frac{2\pi r}{3}}{2\pi r} = \frac{1}{3}.$$

Ratkaisu C:

Oletetaan, että jänteen keskipiste valitaan mielivaltaisesti ympyrän sisältä. Tällöin tapahtuman A toteutuessa jänteen keskipisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä on oltava pienempi kuin $\frac{r}{2}$ eli jänteen keskipisteen on oltava $\frac{r}{2}$-säteisen ympyrän sisäpuolella.

Suotuisten alkeistapausten geometrinen mitta on nyt $\frac{r}{2}$-säteisen ympyrän pinta-ala eli $\pi(\frac{r}{2})^2 = \frac{\pi}{4}r^2$ ja kaikkien alkeistapausten geometrinen mitta on koko ympyrän pinta-ala eli πr^2. Tapahtuman A todennäköisyys on näin ollen

$$P(A) = \frac{\frac{\pi}{4}r^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

Saman tapahtuman todennäköisyydelle saatiin siis kolme eri tulosta.

- Uskomatonta! Näistä ratkaisuista kahden on siis pakko olla jotenkin väärin. Mielestäni jokainen ratkaisu oli kyllä hyvin perusteltu, Erik hämmästelee.

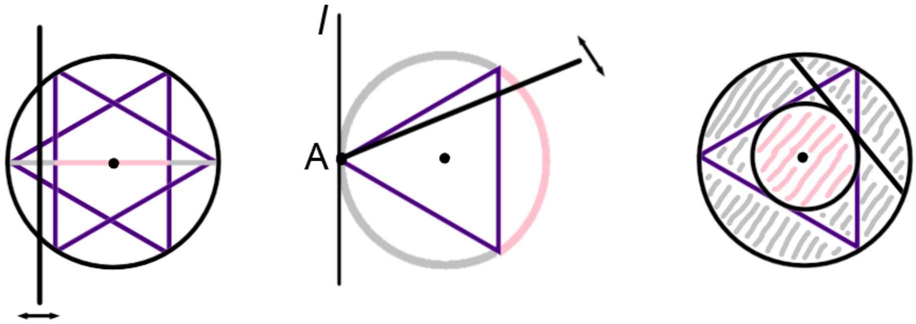
- Olet oikeassa. Jokainen ratkaisu on hyvin perusteltu. Kysymys vain tulkitaan eri tavoin, William vastaa.

Kysymyksen tulkintatavat:

Ratkaisussa A kysymys tulkitaan siten, että ympyrän yli liikkuu vähintään lävistäjän pituinen pystysuora tanko, jolloin ympyrän sisään jäävä osa tangosta vastaa jännettä. Tällöin jokainen tangon pysähtymiskohta on yhtä todennäköinen, jolloin saadaan ratkaisun A mukainen mitta.

Ratkaisussa B kysymys tulkitaan siten, että vastaava tanko on kiinnitetty toisesta päästä ympyrän kehälle pisteeseen A. Tällöin tankoa voidaan kääntää 180° astetta niin, ettei se ylitä suoraa l. Tangon jokainen pysähtymiskulma on yhtä todennäköinen.

Ratkaisussa C kysymys tulkitaan siten, että jänteen keskipiste laitetaan mielivaltaisesti ympyrän sisälle. Tällöin jokainen tangon keskipisteen sijoituspaikka on yhtä todennäköinen.



Kuva 4.4. Ratkaisut A, B ja C. Vaaleanpunainen väri kuvaa suotuisaa tilannetta ja harmaa väri epäsuotuisaa.

- Mutta ei kai se niin voi olla, että ratkaisu riippuu tulkintatavasta? Erik ihmettelee.

- Kyllä se voi, jos kysymys ei ole yksikäsitteinen, William vastaa. - Tässä kysymyksessä ei kerrottu, millä tavoin jänne on ympyrän sisään sijoitettava. Jokainen ratkaisu on siis oikein, sillä kysymys voidaan tulkita monella perustellulla tavalla. Tästä opimme sen, että aina kun puhutaan satunnaisuudesta, on oltava jokin malli siitä, mitä umpimähkäisyys kyseisessä tilanteessa tarkoittaa.

Samassa kuningatar Esme tulee huoneeseen kysyen Erikiltä, mihin aikaan heidän on lähdettävä kolmen tunnin kuluttua alkavaan tapaamiseen, joka on läheisellä saarella.

- Matkustamme tänään lautalla, sillä laivamme on tänään huollossa. Jos lauttaa ei tarvitse odottaa lainkaan, matka kestää 40 minuuttia. En kuitenkaan muista lautan aikataulua, joten saatamme joutua odottamaan 20 minuuttia. Paras lähteä kahden tunnin kuluttua, Erik vastaa. Esmen poistuttua William alkaa kertoa Erikille jatkuvasta satunnaismuuttujasta.

4.2. Jatkuva satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttujia, joiden kertymäfunktio (määritelmä 2.12) on jatkuva funktio, sanotaan usein *jatkuviksi satunnaismuuttujiksi* tai satunnaismuuttujiksi, joilla on jatkuva jakauma.[1] Jatkuvan satunnaismuuttujan arvojoukko on ylinumeroituva. Myös lähtöjoukko on ylinumeroituva, sillä funktion arvojoukko ei voi olla mahtavampi kuin lähtöjoukko.

[1] Joskus jatkuvalla satunnaismuuttujalla tarkoitetaan satunnaismuuttujaa, jonka kertymäfunktio on absoluuttisesti jatkuva. Tällaisella satunnaismuuttujalla on huomautuksen 4.6 mukainen tiheysfunktio. Tämän todistamiseen ei kuitenkaan tässä tutkielmassa perehdytä.

ESIMERKKI 4.4. Aika, jonka Erik ja Esme joutuvat odottamaan lauttaa, on jatkuva satunnaismuuttuja, sillä se voi saada mitä tahansa arvoja välillä $[0 \text{ min}, 20 \text{ min}]$. Yleensä mittaustulokset kuitenkin pyöristetään minuuttien tai sekuntien tarkkuudelle, jolloin näistä luvuista puhuttaessa onkin kyse diskreetistä satunnaismuuttujasta.

MÄÄRITELMÄ 4.5. Satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma tiheysfunktiona f, jos

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

kaikille $a, b \in \mathbb{R}$, joille $a < b$.

HUOMAUTUS 4.6. Funktio f on tiheysfunktio, jos ja vain jos $f \geq 0$, f on integroituva[2] ja epäoleellinen Riemann-integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala on siis 1.

HUOMAUTUS 4.7. Jos satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma tiheysfunktiona f, niin määritelmistä 2.12 ja 4.5 seuraa, että sen kertymäfunktio F on

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

missä $x \in \mathbb{R}$.

Kuten diskreetin satunnaismuuttujan pistetodennäköisyysfunktio, myös jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio sisältää saman informaation kuin kertymäfunktio. Mikäli tiheysfunktio on olemassa, se saadaan analyysin peruslauseen mukaan kertymäfunktion derivaattana kaikissa tiheysfunktion jatkuvuuspisteissä: $f(x) = F'(x)$.

ESIMERKKI 4.8. Olkoon satunnaismuuttuja $T =$ "lautan odottamiseen kuluva aika". Lauttaa joudutaan odottamaan korkeintaan 20 min, joten satunnaismuuttuja saa arvoja väliltä $[0, 20]$. Lautan aikatauluista ei ole tietoa, joten on yhtä todennäköistä joutua odottamaan 0-5 minuuttia, 5-10 minuuttia, 10-15 minuuttia tai 15-20 minuuttia. Sama pätee kaikille yhtä pitkille välin $[0, 20]$ osaväleille.

Satunnaismuuttujan T tiheysfunktio $f(t)$ on

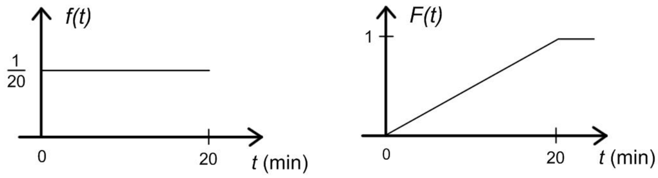
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & \text{kun } t \in [0, 20], \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tämä todella on tiheysfunktio, sillä $f(t) \geq 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, funktio f on integroituva (se on paloittain jatkuva ja sen epäoleellinen Riemann-integraali suppenee) ja funktion kuvaajan ja x-akselin jäävä pinta-ala on $20 \cdot \frac{1}{20} = 1$.

Satunnaismuuttujan T kertymäfunktio $F(t)$ on

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{jos } t \leq 0, \\ \frac{t}{20}, & \text{jos } t \in]0, 20[, \\ 1, & \text{jos } t \geq 20. \end{cases}$$

[2]Tässä tutkielmassa käsitellyt tiheysfunktiot ovat paloittain jatkuvia, ja tällaisen funktion integroituvuus tarkoittaa epäoleellisen Riemann-integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ suppenemista. Yleisesti tiheysfunktion on oltava Lebesgue-integroituva yli kaikkien reaalilukujen. Lebesguen integraalia käsitellään lyhyesti luvussa 10.3.



KUVA 4.5. Satunnaismuuttujan T tiheysfunktion ja kertymäfunktion kuvaajat esimerkin 4.8 tapauksessa.

Kun satunnaismuuttujan X tiheysfunktion arvo on vakio välillä $[a, b]$ ja muualla 0, sanotaan, että satunnaismuuttuja X on *tasaisesti jakautunut* ja sitä merkitään $X \sim \mathrm{Tas}(a, b)$. Tasainen jakauma määritellään täsmällisesti luvussa 7 (määritelmä 7.1).

PARADOKSI 4.9. Valitaan satunnaisesti piste väliltä [0,1]. Todennäköisyys sille, että valittu piste on täsmälleen $\frac{1}{2}$, on nolla, sillä välin [0,1] jokaisen pisteen todennäköisyys tulla valituksi on yhtä suuri, mutta suotuisia alkeistapauksia on ylinumeroituva määrä. Samoin todennäköisyys sille, että valittu piste on täsmälleen jokin pisteistä $\frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{300}, \ldots$, on nolla, sillä kunkin erillisen pisteen todennäköisyys on nolla. Tämä jälkimmäinen tapahtuma vaikuttaa kuitenkin todennäköisemmältä. Onko jälkimmäisellä tapahtumalla oikeasti suurempi todennäköisyys vai ei?[3]

PARADOKSI 4.10. Tikkaa heitettäessä todennäköisyys, että tietyssä ajassa tikka on edennyt tietyn matkan, on jokaiselle etäisyydelle nolla. Kuinka tikka voi liikkua lainkaan?

Oletetaan, että tikka todella liikkuu. Tikka liikkuu ensin puoleen väliin matkaa, siitä puoleen väliin jäljellä olevaa matkaa, siitä puoleen väliin jäljellä olevaa matkaa ja niin edelleen. Kuinka tikka voi koskaan päästä perille tauluun?[4]

Edellisten paradoksien avulla huomataan, että todennäköisyyttä ei voida määritellä jatkuvalle satunnaismuuttujalle samaan tapaan kuin äärellisille tai numeroituvasti äärettömille joukoille (huomautukset 2.4 ja 2.5): mahdottoman tapahtuman todennäköisyys on nolla, mutta tapahtuma, jonka todennäköisyys on nolla, ei välttämättä kuitenkaan ole mahdoton tapahtuma. Tämä johtuu jatkuvan satunnaismuuttujan lähtö- ja arvojoukkojen ylinumeroituvuudesta.

---

[3] Abraham Robinson (1918-1974) loi epsilon-delta -teorialle rinnakkaisen teorian infinitesimaaleista, jotka ovat äärettömän pieniä lukuja. Nollan ja infinitesimaalien välillä tulee tehdä ero. Nollalla jakaminen ei ole sallittua, mutta infinitesimaalilla jakaminen on. Infinitesimaaleilla voidaan siis laskea aivan kuin tavallisilla luvuilla. Jokaisen pisteen todennäköisyys välillä [0,1] on infinitesimaalinen, jolloin todennäköisyys, että tältä väliltä valittu piste on jokin pisteistä $\frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{300}, \ldots$, on infinitesimaalisesti suurempi kuin todennäköisyys, että valittu piste on $\frac{1}{2}$. Lisätietoa infinitesimaaleista löytyy lähteen [**11**] sivulta 199.

[4] Todennäköisyys, että tikka on edennyt tietyssä ajassa tietyn matkan on nolla, tai täsmällisesti sanottuna infinitesimaalinen. Tikan matkan varrella on siis äärettömän monta paikkaa ja todennäköisyys olla kussakin paikassa tietyn ajan kuluttua on infinitesimaalinen. Näiden paikkojen yhdisteen todennäköisyys, eli todennäköisyys sille, että tikka on tietyn ajan kuluttua jossain näistä paikoista, todennäköisyys on 1. Tikka siis voi liikkua ja päästä perille tauluun.

* LAUSE 4.11. *Jos $p_i > 0$ ylinumeroituvan monella $i \in I$, missä I on indeksijoukko, niin*

$$\sum_{i \in I} p_i = \infty$$

TODISTUS. Sivuutetaan. □

Vaikka alkeistapauksia on ylinumeroituvan monta, niiden todennäköisyyksien summan tulisi silti olla 1. Edellisen lauseen perusteella pistetodennäköisyydet eivät kuitenkaan voi olla aidosti positiivisia, jolloin niiden on oltava nollia. Silti niiden summan on oltava 1. Toisaalta vaikka jokaisen alkeistapauksen todennäköisyys onkin 0, mikään niistä ei silti ole mahdoton tapahtuma: jonkin niistä on pakko tapahtua. Ylinumeroituvan perusjoukon tilanteessa todennäköisyyttä ei siis voida määritellä järkevästi perusjoukon numeroituville osajoukoille vaan ainoastaan ylinumeroituville osajoukoille, kuten väleille.

HUOMAUTUS 4.12. Jos satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma tiheysfunktiona f, niin

$$P(X = a) = 0 \text{ kaikilla } a \in \mathbb{R} \text{ ja}$$

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

HUOMAUTUS 4.13. Sekä diskreetin että jatkuvan satunnaismuuttujan X todennäköisyys välillä $a < X \leq b$ saadaan kertymäfunktion avulla:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

ESIMERKKI 4.14. Millä todennäköisyydellä Erik ja Esme joutuvat odottamaan lauttaa yli 15 minuuttia? Entä 2-4 minuuttia?

Todennäköisyydet saadaan laskettua huomautuksen 4.13 avulla, kun kertymäfunktio tiedetään (esimerkki 4.8):

$$P(15 < t < 20) = F(20) - F(15) = \frac{20}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{4}$$

ja

$$P(2 < t < 4) = F(4) - F(2) = \frac{4}{20} - \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

On olemassa muitakin kuin diskreettejä jakaumia ja sellaisia jatkuvia jakaumia, joilla on tiheysfunktio. Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan käsitellä niitä, sillä useimpia käytännön tilanteita voidaan mallintaa diskreetin tai tiheysfunktion omaavan jatkuvan jakauman avulla, tai näitä yhdistämällä. On siis olemassa satunnaismuuttujia, joilla ei ole olemassa tiheysfunktiota. Kaikilla satunnaismuuttujilla on kuitenkin kertymäfunktio. Se kertoo satunnaismuuttujan jakauman, sillä kertymäfunktio ja jakauma kuvaavat samaa asiaa, satunnaismuuttujan arvojen todennäköisyyttä.

- Eeriiik! Esme huutaa. - Oletko valmistautunut lähtöön?

- Ai niin, se tapaaminen. No, olen valmis aivan pian, Erik vastaa Esmelle ja muistuttaa sitten Williamia: - Sinun on nyt sitten tultava joskus toiste kertomaan, että kannattaako minun pelata sitä uhkapeliä. Nyt se jäi vielä selvittämättä.

- Mielelläni!

LUKU 5

Tilastoja

Viikon kuluttua kuningas Erik kutsuu Williamin jälleen luokseen. Tällä kertaa tosin hieman erilaisella asialla - kyse ei olekaan uhkapeli-ongelmasta. Saapuessaan William löytää järkyttyneen näköisen kuninkaan.

- Mikä hätänä? William kysyy.

- Melina aikoo muuttaa pois kotoa toiselle saarelle, Erik vastaa murtuneena.

- Toiselle saarelle? Miksi?

- Pieni, rakas Melina on jo 23-vuotias, joten hän haluaisi saada itselleen miehen. Hän on kuitenkin vakuuttunut siitä, ettei hän löydä tältä saarelta sellaista puolisoa, jonka hän haluaisi.

- Oikeasti? Uskomatonta, William yhtyy kuninkaan suruun. - Millaisen puolison hän sitten haluaisi?

- Mitäs ne vaatimukset olivatkaan? Niitä oli niin monta, että jouduin tekemään niistä listan, Erik pohtii itsekseen ja kaivaa listan taskustaan. - Lyhyet hiukset, ruskeat silmät, 23−27 vuotta vanha, normaalipainoinen, 5−20 cm Melinaa pidempi, hieman keskimääräistä älykkäämpi, pitää lapsista ja kaikkea sellaista. Ja kaiken tämän jälkeen hänen tulisi olla mukava, huomaavainen ja kohtelias, niin että he tulisivat hyvin toimeen keskenään ja nauttisivat toistensa seurasta.

- Kai tältä saarelta löytyy montakin nuo ehdot täyttävää miestä.

- Sitä minäkin sanoin, mutta hän ei usko. Voisitko mitenkään auttaa minua löytämään oikeanlaisia miehiä tältä saarelta? Saat hyvän palkkion avustasi ja erityisen hyvän, jos hän suostuu jäämään tälle saarelle.

- Hyvä on. Voin yrittää löytää vaatimusten mukaisia miehiä tilastollisen tutkimuksen avulla.

5.1. Tilastollinen tutkimus ja tilastollinen todennäköisyys

Tilastollista tutkimusta varten tulee kerätä tarpeellista tietoa, jota kutsutaan *havaintoaineistoksi*. *Perusjoukko* koostuu niistä jäsenistä, esimerkiksi henkilöistä, joista tietoa halutaan kerätä. Jos perusjoukko on sopivan pieni, tarvittavat tiedot voidaan kerätä kaikilta perusjoukon jäseniltä, jolloin on kyse *kokonaisaineistosta*. Monesti perusjoukon suuruuden vuoksi kokonaisaineiston kerääminen on vaikeaa, kallista tai täysin mahdotonta. Näissä tilanteissa tutkitaan *otosta*. Erilaisilla *otantamenetelmillä* pyritään valitsemaan perusjoukosta jäseniä niin, että otos kuvaisi mahdollisimman hyvin perusjoukkoa. Onnistuneilla otoksilla saadut tulokset mahdollistavat riittävän tarkkojen johtopäätösten tekemisen.

Esimerkki 5.1. Perusjoukkona Williamin tutkimuksessa ovat saarella asuvat $23-27$ -vuotiaat miehet, jotka eivät ole sukua prinsessa Melinalle. Heitä on 1374.

Jotta William voisi oikeasti löytää prinsessan vaatimusten kaltaiset miehet, hänen on käytettävä kokonaisaineistoa eli selvitettävä halutut tiedot kaikilta perusjoukon jäseniltä.

Havaintoaineisto koostuu perusjoukon miehiltä selvitetyistä tiedoista: hiusten pituus, silmien väri, painoindeksi, pituus, älykkyys ja pitääkö lapsista vai ei.

- Sellaisten henkilöiden, joilla on ruskeat silmät, lyhyet hiukset ja jotka ovat normaalipainoisia, lukumäärän saamme selville frekvenssien avulla, William kertoo kuninkaalle, kun hän on saanut kerättyä nämä ominaisuudet sisältävän havaintoaineiston.

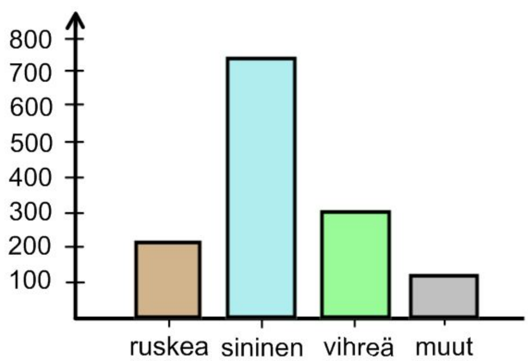
Havaintoaineistoa tulee käsitellä, jotta siitä saadaan olennaiset tiedot näkyviin. Usein havaintoaineistosta lasketaan ensin kullekin muuttujan arvolle *absoluuttinen frekvenssi* f, joka kertoo muuttujan arvon esiintymiskertojen lukumäärän havaintoaineistossa. Tämän jälkeen voidaan laskea *suhteelliset frekvenssit* eli esiintymiskertojen prosentuaaliset osuudet yksiköiden kokonaismäärästä.

Esimerkki 5.2 (Silmien väri). Perusjoukon jäsenistä 216 henkilöllä on ruskeat silmät, 734 henkilöllä siniset silmät, 309 henkilöllä vihreät silmät ja näiden sekoituksia tai muita värejä oli 115 henkilöllä.

	absoluuttinen frekvenssi	suhteellinen frekvenssi
ruskea	216	15,7%
sininen	734	53,4%
vihreä	309	22,5%
muut värit	115	8,4%
yhteensä	1374	100,0%

Kuva 5.1. Silmien väri.

Frekvenssijakaumaa voidaan kuvata pylväsdiagrammilla. Pylväsdiagrammin pystyakselilla voi olla lukumäärien sijaan prosenttiluvut, jolloin on kyse suhteellisista frekvensseistä.



Kuva 5.2. Silmien värin absoluuttinen frekvenssijakauma kuvattuna pylväsdiagrammilla.

Kun frekvenssejä lasketaan järjestyksessä yhteen, saadaan absoluuttinen ja suhteellinen *summafrekvenssi*. Summafrekvenssejä kutsutaan myös *kertymiksi*, koska ne kertovat kertyneiden havaintojen määrän tiettyyn muuttujan arvoon mennessä.

Summafrekvenssejä on järkevä käyttää vain, jos alkeistapaukset voidaan laittaa suuruusjärjestykseen. Esimerkiksi väreistä ei voida sanoa, mikä väri on suurempi kuin jokin toinen, mutta hiusten pituudesta voidaan.

Esimerkki 5.3 (Hiusten pituus). Perusjoukon jäsenistä 216 henkilöllä on ruskeat silmät. Näistä 4 henkilöllä on kalju, 9 henkilöllä siilitukka, 189 henkilöllä lyhyt tukka, 11 henkilöllä keskipitkä tukka ja 3 henkilöllä pitkät hiukset.

	absoluuttinen frekvenssi	suhteellinen frekvenssi	absoluuttinen summafrekvenssi	suhteellinen summafrekvenssi
kalju	4	1,9%	4	1,9%
siili	9	4,2%	13	6,1%
lyhyt	189	87,5%	202	93,6%
keskipitkä	11	5,1%	213	98,7%
pitkä	3	1,4%	216	100,1%

Kuva 5.3. Hiusten pituus. Suhteellisten frekvenssien summa poikkeaa 100,0 prosentista pyöristysten vuoksi.

Jatkuvan muuttujan tapauksessa aineisto yleensä luokitellaan. Luokat ilmoitetaan usein luokkaväleinä. Tunnuslukujen laskemisen ja kuvaajien tekemisen vuoksi tulee tietää luokan keskellä oleva luku, jota kutsutaan *luokkakeskukseksi*:

$$\text{luokkakeskus} = \frac{\text{alaraja} + \text{yläraja}}{2}.$$

Luokkakeskuksen laskemisessa tulee käyttää todellista ala- ja ylärajaa eli huomioida mahdolliset pyöristykset.

Jos frekvenssijakaumaa kuvataan pylväsdiagrammien avulla, jatkuvan muuttujan tapauksessa pylväät piirretään kiinni toisiinsa. Tällaista pylväsdiagrammia kutsutaan *histogrammiksi*. Jos luokat eivät ole tasavälisiä, se tulee huomioida pylväiden leveydessä siten, että pylväiden pinta-alojen suhde luokkien frekvensseihin on vakio. Pylväiden leveyden huomioiminen täten takaa sen, että histogrammi antaa saman tiedon kuin vastaava tiheysfunktio.

Esimerkki 5.4 (Painoindeksi). Painoindeksi lasketaan pituuden ja painon mukaan. Molemmat niistä ovat jatkuvia satunnaismuuttujia. Koska painoindeksi on $\frac{\text{paino (kg)}}{(\text{pituus (m)})^2}$, myös painoindeksi on jatkuva satunnaismuuttuja.

Painoindeksit luokitellaan viiteen luokkaan: alipaino $< 18{,}5$, normaali paino $18{,}5 - 24{,}9$, ylipaino $25{,}0 - 29{,}9$, lihavuus $30{,}0 - 34{,}9$, vaikea lihavuus $35{,}0 - 39{,}9$ ja sairaalloinen lihavuus $> 40{,}0$.

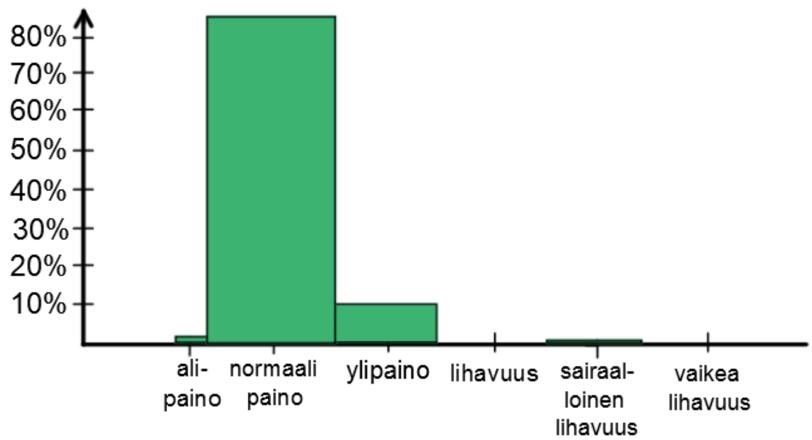
Niitä miehiä, joilla on ruskeat silmät ja lyhyet hiukset, on 189. Näistä miehistä alipainoisia on 2, normaalipainoisia 167, ylipainoisia 19 ja vaikeasti lihavia 1.

	absoluuttinen frekvenssi	suhteellinen frekvenssi	absoluuttinen summafrekvenssi	suhteellinen summafrekvenssi
alipaino < 18,5	2	1,1%	2	1,1%
normaali paino 18,5-24,9	167	88,4%	169	89,5%
ylipaino 25,0-29,9	19	10,1%	188	99,6%
lihavuus 30,0-34,9	0	0,0%	188	99,6%
vaikea lihavuus 35,0-39,9	1	0,5%	189	100,1%
sairaalloinen lihavuus > 40,0	0	0,0%	189	100,1%

Kuva 5.4. Painoindeksi.

Kumpikaan alipainoisista ei ole merkittävästi tai sairaalloisesti alipainoinen, joten heidän painoindeksinsä on välillä $17{,}0 - 18{,}4$. On oleellista tietää luokan alaraja, jotta histogrammi saadaan piirrettyä.

Histogrammin piirtämisessä tulee huomata, että pylväiden leveyksien suhde on sama kuin luokkavälien pituuksien suhde. Alipainoluokan välin pituuden suhde ylipainoluokan välin pituuteen on $\frac{18{,}45-16{,}95}{29{,}95-24{,}95} = \frac{1{,}5}{5}$. Laskussa on huomioitu, että lukua 18,45 suuremmat luvut pyöristyvät lukuun 18,5 ja niin edelleen. Vastaavasti normaalin painoluokan välin pituuden suhde ylipainoluokan välin pituuteen on $\frac{24{,}95-18{,}45}{29{,}95-24{,}95} = \frac{6{,}5}{5}$. Alipainoa kuvaava pylväs on siis kapeampi ja normaalia painoa kuvaava pylväs leveämpi kuin muut.



Kuva 5.5. Painoindeksin suhteellinen frekvenssijakauma kuvattuna histogrammilla.

Klassisen todennäköisyyden laskukaavat soveltuvat tilastollisten todennäköisyyksien laskemiseen. Tilastollisessa todennäköisyydessä käytetään pistetodennäköisyyksien sijaan tilastotietojen avulla tehtyjä ennusteita.

MÄÄRITELMÄ 5.5. Tilastollisia todennäköisyyksiä arvioidaan valmiiden tilastotietojen ja tarkoituksellisten toistokokeiden avulla:

$$P(A) \approx \frac{\text{tapahtuman esiintymiskertojen lukumäärä}}{\text{kokeen toistojen lukumäärä}}.$$

ESIMERKKI 5.6. Todennäköisyys p sille, että satunnaisesti valitulla $23-27$ vuotta vanhalla miehellä, joka asuu saarella eikä ole sukua prinsessalle, on ruskeat silmät on

$$p \approx \frac{\text{ehdot täyttävien ruskeasilmäisten lukumäärä}}{\text{kaikkien ehdot täyttävien lukumäärä}} = \frac{216}{1374} = \frac{36}{229} = 0,15720524\ldots,$$

kun kaikkia ehdot täyttäviä miehiä on 1374 ja heistä ruskeasilmäisiä on 216.

Satunnaisesti valitulla ehdot täyttävällä miehellä on siis noin 16% todennäköisyydellä ruskeat silmät.

- Näin olemme saaneet selville, että $23-27$ -vuotiaita saarella asuvia normaalipainoisia miehiä, joilla on ruskeat silmät, lyhyet hiukset ja jotka eivät ole sukua prinsessalle, on 167.

- Mahtava juttu! Erik toteaa. - Paitsi että vielä on vaatimuksia, joiden pitäisi näiden kohdalla toteutua. Hieman keskimääräistä älykkäämpi ja $5-20$ cm Melinaa pidempi ja sitten ne kaikki mukavuudet sun muut.

- Seuraavaksi voidaan selvittää näiden henkilöiden älykkyyttä erään älykkyystestin avulla. Älykkyystesti antaa älyarvoksi jonkin luvuista $1, 2, \ldots, 10$. Älyarvojen aritmeettisen keskiarvon avulla saamme tietää keskimääräisen älykkyyden ja sen jälkeen saamme tietää, ketkä ovat hieman keskimääräistä älykkäämpiä.

5.2. Tunnusluvut

- Ennen aritmeettisen keskiarvon laskemista kerron sinulle hieman muistakin tunnusluvuista, joita havaintoaineiston avulla voidaan laskea, William sanoo.

Pelkät frekvenssit eivät useinkaan anna riittävän tarkkaa yleiskuvaa aineistosta, minkä vuoksi havaintoaineistosta lasketaan erilaisia tunnuslukuja, joista yleisin on aritmeettinen keskiarvo. Tunnusluvut jaetaan sijaintilukuihin ja hajontalukuihin. *Sijaintiluvut* kertovat muuttujan[1] arvojen sijainnista ja *hajontaluvut* kuvaavat muuttujan arvojen jakautumista keskiarvon ympärille. Käydään ensin läpi yleisimpiä sijaintilukuja.

MÄÄRITELMÄ 5.7. Moodi (Mo) eli tyyppiarvo on yleisin muuttujan arvo eli se arvo, jolla on suurin frekvenssi.

Moodeja voi olla useampi kuin yksi. Luokitellun aineiston tapauksessa moodi ei ole se luokka, jolla on suurin frekvenssi, vaan tämän luokan luokkakeskus.

[1]Tässä ei puhuta satunnaismuuttujasta vaan tilastollisesta muuttujasta. Tilastollisen muuttujan arvot määräytyvät havaintoaineiston mukaan. Satunnaismuuttujien jakaumilla voidaan kuitenkin monesti mallintaa tilastollisten muuttujien käyttäytymistä.

Esimerkki 5.8. Perusjoukon jäsenistä 216 henkilöllä on ruskeat silmät, 734 henkilöllä siniset silmät, 309 henkilöllä vihreät silmät ja näiden sekoituksia tai muita värejä oli 115 henkilöllä. Moodi on ”siniset silmät”, koska sillä on suurin frekvenssi.

$$\text{Mo(silmien väri)} = \text{”siniset silmät”}$$

Määritelmä 5.9. Mediaani (Md) on suuruusjärjestykseen laitetun aineiston keskimmäinen arvo. Jos havaintoja on parillinen määrä, mediaani on keskimmäisten havaintojen keskiarvo, mikäli havainnoille voidaan laskea keskiarvo.

Kun aineisto laitetaan suuruusjärjestykseen, kunkin muuttujan arvon täytyy esiintyä tässä listassa niin monta kertaa, kuin mitä muuttujan arvon frekvenssi on. Erityisesti suurilla aineistolla mediaani on kuitenkin helpompi selvittää suhteellisen summafrekvenssin avulla: mediaani on se arvo, jonka kohdalla summafrekvenssi on ensimmäisen kerran yli 50%. Luokitellun aineiston tapauksessa mediaaniluokka etsitään suhteellisen summafrekvenssin avulla, jolloin mediaanin arvo on mediaaniluokan luokkakeskus.

Esimerkki 5.10. Ruskeasilmäisistä perusjoukon jäsenistä 4 henkilöllä on kalju, 9 henkilöllä siilitukka, 189 henkilöllä lyhyt tukka, 11 henkilöllä keskipitkä tukka ja 3 henkilöllä pitkät hiukset. Mediaani on ”lyhyt tukka”, sillä sen kohdalla suhteellinen summafrekvenssi on ensimmäistä kertaa yli 50% (kuva 5.3) eli

$$\text{Md(hiusten pituus)} = \text{”lyhyt tukka”}.$$

Esimerkki 5.11. Ruskeasilmäisistä, lyhyttukkaisista miehistä alipainoisia (painoindeksi $17,0 - 18,4$) on 2, normaalipainoisia $(18,5 - 24,9)$ 167, ylipainoisia $(25,0 - 29,9)$ 19, lihavia $(30,0 - 34,9)$ 0, vaikeasti lihavia $(35,0 - 39,9)$ 1 ja sairaalloisesti lihavia $(> 40,0)$ 0. Suurin frekvenssi on normaalipainoisten luokassa, jolloin moodi on tämän luokan luokkakeskus:

$$\text{Mo(painoindeksi)} = \frac{18,45 + 24,95}{2} = 21,7.$$

Mediaaniluokka on normaali paino, sillä sen kohdalla suhteellinen summafrekvenssi ylittää 50%. Mediaaniarvo on tämän luokan luokkakeskus eli

$$\text{Md(painoindeksi)} = 21,7.$$

- Seuraavaksi pääsemmekin aritmeettiseen keskiarvoon. Se voidaan laskea jatkuville muuttujille ja niille diskreeteille muuttujille, jotka voidaan laittaa suuruusjärjestykseen. Väreille ei siis voida määrittää mediaanin lisäksi myöskään keskiarvoa. Aritmeettisen keskiarvon avulla saadaan laskettua keskimääräinen älyarvo, William kertoo.

Määritelmä 5.12. Aritmeettinen keskiarvo $\bar{x}$ on

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Aritmeettinen keskiarvo voidaan laskea monesti helpommin frekvenssien avulla:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j x_j}{n},$$

missä x_j on muuttujan arvo (tai luokitellun aineiston tapauksessa luokkakeskus), f_j on muuttujan arvon x_j (tai luokkakeskusta x_j vastaavan luokan) frekvenssi, n on havaintoyksiköiden lukumäärä ja k on muuttujan arvojen tai luokkien lukumäärä.

- Nyt pääsemme siis selvittämään 23−27 -vuotiaiden miesten, jotka eivät ole prinsessalle sukua, keskimääräistä älyarvoa. Oletamme, että silmien väri, hiusten pituus ja painoindeksi eivät vaikuta älykkyyteen. Tällöin näiden aiemmat vaatimukset täyttäneiden älyarvot jakautuvat samalla tavoin kuin kaikkien perusjoukon henkilöiden. Näiden 167 jäljelle jääneen miehen älyarvojen keskiarvo on siis kutakuinkin sama kuin kaikkien perusjoukon miesten älyarvojen keskiarvo, William toteaa.

Esimerkki 5.13. Aiemmat vaatimukset on täyttänyt 167 miestä. Lukumäärät, kuinka moni näistä sai mitäkin älyarvoa, on esitetty kuvassa 5.6.

älyarvo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
henkilöiden lukumäärä	3	5	16	43	52	32	9	4	3	0

Kuva 5.6. Älyarvo.

Älyarvojen $x_i = i$, missä $i = 1, 2, \dots, 10$ keskiarvo $\bar{x}$ saadaan laskettua henkilöiden lukumäärien eli frekvenssien f_i avulla:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{10} f_i x_i}{10} \\
&= \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 43 \cdot 4 + 52 \cdot 5 + 32 \cdot 6 + 9 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 0 \cdot 10}{10} \\
&= \frac{807}{167} = 4,83233532\dots \\
&\approx 4,8.
\end{aligned}$$

- Älyarvojen keskiarvo on siis lähes 5, William toteaa laskemisen jälkeen ja kysyy:
- Voitaisiinko mielestäsi sanoa, että hieman keskimääräistä älykkäämpiä ovat ne miehet, joiden älyarvo on 6 tai 7?

- Kuulostaa hyvältä, Erik vastaa. Miehiä on jäljellä vielä 41.

Huomautus 5.14. Useimmiten keskiarvo kuvaa aineistoa hyvin, mutta ei aina. Jos aineistossa on muutama muita arvoja selvästi suurempi tai pienempi arvo, ne vaikuttavat huomattavasti keskiarvoon. Mediaaniin ne eivät vaikuta juuri lainkaan, sillä kun valitaan suuruusjärjestykseen laitetusta aineistosta keskimmäinen arvo, ei ole merkitystä onko viimeinen luku 100 vai 1000, kun muut luvut ovat lukujen 1 ja 10 välillä. Mediaani ei siis juuri reagoi poikkeaviin arvoihin.

Esimerkki 5.15. Havaintoaineisto on: 2, 5, 3, 2, 2, 8, 8, 6, 3, 9, 7, 100, 4, 5. Suuruusjärjestykseen laitettu aineisto on: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 100. Tällöin mediaani on

$$\frac{5+5}{2} = 5$$

ja keskiarvo puolestaan on

$$\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 + 2 \cdot 5 + 6 + 7 + 2 \cdot 8 + 9 + 100}{14} = \frac{164}{14} = 11,714285\ldots.$$

Jos havaintoaineiston luku 100 korvattaisiin luvulla 1000, mediaani olisi edelleen 5, mutta keskiarvo olisi $\frac{1064}{14} = 76$.

Näissä tapauksissa mediaani kuvaa paremmin havaintoaineistoa.

- Olemme käyneet nyt läpi erilaisia sijaintilukuja, William sanoo ja jatkaa innostuneesti:
- Seuraavaksi käydään läpi yleisimpiä hajontalukuja. Yksinkertaisin hajontaluku on *vaihteluväli,* joka on muuttujan suurimman ja pienimmän arvon erotus, mutta se antaa niin vähän informaatiota, ettei sitä useinkaan käytetä. Yleisin hajontaluku on keskihajonta. Sen määrittelemiseksi määritellään ensin keskipoikkeama ja varianssi.
- Mitä hyötyä näistä hajontaluvuista oikein on? Erik ihmettelee.
- Ne kertovat, kuinka kaukana muuttujan arvot ovat niiden keskiarvosta.

Määritelmä 5.16. Keskipoikkeama on lukujen x_i poikkeamien $x_i - \bar{x}$ itseisarvojen keskiarvo:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}.$$

Määritelmä 5.17. Varianssi s^2 on poikkeamien neliöiden keskiarvo:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

On hyvä huomata, että varianssi $s^2 = 0$, jos ja vain jos muuttuja x on vakio, eli $x_i = x_j$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Varianssin avulla saamme määriteltyä keskihajonnan.

Määritelmä 5.18. Keskihajonta s tai s_n on varianssin neliöjuuri:

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Keskihajonta voidaan laskea myös frekvenssien f_i avulla:

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}},$$

missä k on muuttujan x saamien arvojen (tai luokkien) lukumäärä.

Jos keskihajonta on pieni, muuttujan arvot keskittyvät niiden keskiarvon ympärille. Jos taas keskihajonta on suuri, muuttujan arvot voivat poiketa paljonkin keskiarvostaan.

Esimerkki 5.19. Älyarvojen keskihajonta, kun $\bar{x} = \frac{807}{167}$ (esimerkki 5.13) ja älyarvot x_i ja frekvenssit f_i saadaan kuvasta 5.6, on

$$\begin{aligned} s_n &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} f_i(x_i - \bar{x})^2}{167}} \\ &= \sqrt{\frac{3(1-\frac{807}{167})^2 + 5(2-\frac{807}{167})^2 + 16(3-\frac{807}{167})^2 + \ldots + 3(9-\frac{807}{167})^2 + 0(10-\frac{807}{167})^2}{167}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{58000}{167}}{167}} \\ &= 1,44210713\ldots. \end{aligned}$$

- Älyarvoille laskettu keskihajonta kuvaa sitä, kuinka kaukana yksittäisten ihmisten saamat älyarvot ovat älyarvojen aritmeettisesta keskiarvosta, William selventää. - Saamamme keskihajonta $s_n \approx 1,4$ on melko pieni luku. Se kertoo, että suurin osa ihmisten saamista älyarvoista on lähellä keskiarvoa. Kovin paljoa ei siis ole niitä, joiden älyarvo olisi hyvin matala tai korkea.

- Emmekös tiedä sen jo lukumäärien perusteella? Erik kysyy.

- Tottakai. Keskiarvon ja keskihajonnan eli kahden luvun avulla saamme kuitenkin välitettyä hyvän kuvan muuttujasta 20 luvun sijaan. Jos muuttujan arvoja olisi vaikka 100 tai 1000, frekvenssitaulukosta olisi vaikea saada selvää kuvaa muuttujan käyttäytymisestä, jolloin keskiarvon ja keskihajonnan antaman tiedon tärkeys korostuu.

Jos tarkastellaan kokonaisaineiston sijaan otosta, jonka koko on n, lasketaan otoskeskihajonta s_{n-1}, joka antaa arvion koko perusjoukon keskihajonnalle. Se lasketaan muuten samoin kuin keskihajonta, mutta jakajana on $n-1$:[2]

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

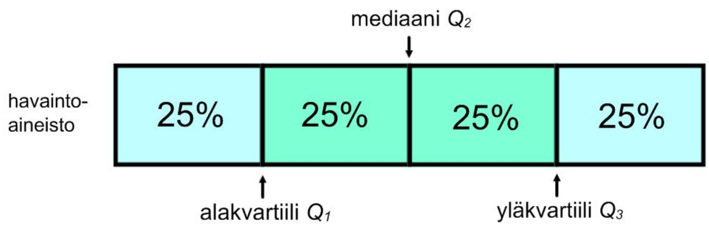
On hyvä huomata, että suurella otoskoolla n keskihajonta ja otoskeskihajonta ovat likimain yhtä suuret.

Kuten aiemmin todettiin, keskiarvo ei kuvaa aineistoa hyvin, jos aineistossa on muutama muita arvoja selvästi suurempi tai pienempi arvo. Näissä tilanteissa myöskään keskihajonta ei kuvaa hyvin muuttujan arvojen jakautumista. Tällöin voidaan käyttää esimerkiksi *kvartiileja*. Kvartiilit jakavat havaintoaineiston neljään yhtä suureen osaan[3], jolloin jokaisessa osassa on 25% havaintoaineiston jäsenistä.

Hajontaa kuvataan ilmoittamalla kvartiiliväli (Q_1, Q_3), jolloin saadaan selville, mille välille osuu keskimmäiset 50% muuttujan arvoista.

[2]Jos keskiarvona $\bar{x}$ käytetään otoskeskiarvoa, parempi arvio koko perusjoukon keskihajonnalle saadaan jakamalla luvulla $n-1$, mutta jos perusjoukon keskiarvo tunnetaan, voidaan keskihajonta laskea otoksesta samoin kuin kokonaisaineistostakin eli jakamalla luvulla n.

[3]Sana kvartiili tulee latinan sanasta quartum, joka tarkoittaa neljättä.



Kuva 5.7. Kvartiilit jakavat havaintoaineiston neljään osaan.

Kvartiilien sijaan muuttujan arvojen jakautumista voidaan kuvata myös esimerkiksi desiilien (havaintoaineisto on jaettu kymmeneen yhtä suureen osaan) tai persentiilien (havaintoaineisto on jaettu sataan yhtä suureen osaan) avulla.[4] Niiden avulla havaintoaineistosta saadaan tarkempaa tietoa.

- Entäs ne muut ominaisuudet nyt sitten? Erik tiedustelee.

- Nähtävästi osa havaintoaineistostani puuttuu. Tässä oli kaikki, mitä voimme tälle päivälle tehdä, William pahoittelee. - Mutta haluaisitko, että selvittäisimme nyt uhkapeliongelmasi, ettei se unohdu?[5]

- Okei, se sopii hyvin.

[4] Yleisnimitys näille kaikille on fraktiili.

[5] Ongelma on esitetty luvun 4 alussa.

LUKU 6

Satunnaismuuttujan odotusarvo ja keskihajonta

Keskiarvo ja keskihajonta kuvaavat tilastollisen muuttujan saamia arvoja. Satunnaismuuttujan arvojen jakautumista kuvataan vastaavasti odotusarvon ja keskihajonnan avulla.

Keskiarvon ja odotusarvon erona on se, että keskiarvo lasketaan todellisesta havaintoaineistosta ja odotusarvo määritetään matemaattiselle mallille. Odotusarvo kertoo, mikä olisi tiettyä matemaattista mallia noudattavan kokeen keskiarvo, jos koetta toistettaisiin äärettömän monta kertaa.

Diskreetin satunnaismuuttujan X arvojoukko on äärellinen, jos X saa arvoja $x_1, x_2, \dots, x_n$, ja numeroituvasti ääretön, jos X saa arvoja $x_1, x_2, \dots$. Odotusarvo lasketaan molemmissa tapauksissa samalla tavoin. Arvojoukon ollessa numeroituvasti ääretön, odotusarvoa ei kuitenkaan välttämättä ole olemassa.

Määritelmä 6.1. Diskreetin satunnaismuuttujan X odotusarvo $E(X)$ on

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i,$$

missä $p_i = P(X = x_i)$ ja $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Odotusarvoa merkitään usein kreikkalaisella kirjaimella μ (myy).

Jos satunnaismuuttujan X arvojoukko on numeroituvasti ääretön, $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$. Mikäli summa ei suppene, sanotaan, että odotusarvoa ei ole olemassa.

Esimerkki 6.2. Nopanheiton mallin odotusarvo μ on

$$\mu = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Odotusarvo ei siis välttämättä ole sellainen arvo, jonka satunnaismuuttuja voi oikeasti saada.

Nopanheitto on todellinen tilanne, mutta matemaattinen malli, jossa jokaisen alkeistapauksen todennäköisyys on täsmälleen $\frac{1}{6}$, kuvaa hyvin nopanheittoa.

Kun nopanheitolle halutaan laskea saatujen silmälukujen keskiarvo, lasketaan todellisten heittotulosten keskiarvo. Jos noppaa heitetään esimerkiksi viisi kertaa, heittotulosten keskiarvo voi hyvin olla vaikka 2,2. Jos noppaa heitetään todella monta kertaa (esimerkiksi miljardi kertaa), heittotulosten keskiarvo tulee suurten lukujen lain mukaan olemaan lähellä odotusarvoa 3,5, mikäli nopanheitto todella "käyttäytyy" mallin mukaan:

* LAUSE 6.3 (Kolmogorovin vahva suurten lukujen laki). *Olkoot* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joilla on olemassa sama odotusarvo* $E(X_i) = \mu$. *Tällöin*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to \mu, \text{ kun } n \to \infty$$

melkein varmasti. Jos $\mu = \infty$, *ylläoleva lauseke kasvaa kohti ääretöntä melkein varmasti.*

TODISTUS. Sivuutetaan. □

* HUOMAUTUS 6.4. ”Melkein varmasti” tarkoittaa, että suppeneminen tai hajaantuminen tapahtuu lukuunottamatta poikkeusjoukkoa, jonka todennäköisyys on 0. (Vastaavasti jos $f(x) = g(x)$ melkein varmasti, niin $P(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$.)

- Nyt olemmekin valmiit ratkaisemaan uhkapeliongelmasi.

ONGELMA 6.5. Kun kolikkoa heitetään ruudukolle, kolikko peittää jonkin ruudukon neliön kärjen todennäköisyydellä $p = \frac{\pi}{4}$. Kannattaako kuninkaan pelata uhkapeliä, jossa hän voittaa yhden lantin, jos kolikko peittää jonkin ruudukon neliön kärjen ja häviää neljä lanttia, jos kolikko ei peitä minkään ruudukon neliön kärkeä?

Ratkaisu:
Jos pelissä kuninkaan tuloksen odotusarvo on suurempi kuin nolla, usean pelikerran jälkeen kuningas jää voitolle ja jos odotusarvo on pienempi kuin nolla, kuningas jää häviölle. Jos pelin odotusarvo on nolla, kuningas ei jää voitolle eikä häviölle.

Satunnaismuuttuja X kuvaa sitä, kuinka monta lanttia kuningas voittaa tai häviää yhdellä kolikonheitolla, joten se saa arvoja $x_1 = 1$ ja $x_2 = -4$. Vastaavat pistetodennäköisyydet ovat $p_1 = \frac{\pi}{4}$ ja $p_2 = 1 - p_1 = \frac{4-\pi}{4}$. Tällöin satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 = \frac{\pi}{4} \cdot 1 + \frac{4-\pi}{4} \cdot (-4) = \frac{5\pi}{4} - 4 = -0,073009183\ldots < 0.$$

Kuninkaan ei siis kannata pelata peliä, sillä hän jää lopulta häviölle.

Jos kuningas häviäisi vain 3 lanttia, kun kolikko ei peitä minkään ruudukon neliön kärkeä, kuninkaan kannattaisi pelata peliä, sillä odotusarvo olisi

$$E(X) = \frac{\pi}{4} \cdot 1 + \frac{4-\pi}{4} \cdot (-3) = \pi - 3 = 0,141592653\ldots > 0.$$

- Mahtavaa! Kiitos tiedosta. Nyt en turhaan tuhlaa rahojani tuohon peliin, Erik kiittelee.
- Ole hyvä vain. Mutta hei, nythän saammekin laskettua odotusarvon myös sille, kuinka kauan lautan odottamiseen menee aikaa, William innostuu.

MÄÄRITELMÄ 6.6. Jatkuvan satunnaismuuttujan X, jonka tiheysfunktio on f, odotusarvo $E(X)$ on

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

mikäli integraali on itseisesti suppeneva eli $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$. Muussa tapauksessa sanotaan, että satunnaismuuttujalla X ei ole odotusarvoa.

ESIMERKKI 6.7. Lasketaan odotusarvo sille, kuinka kauan Erik ja Esme joutuvat odottamaan lauttaa (esimerkin 4.8 oletuksin).

Satunnaismuuttujan $T =$ "lautan odottamiseen kuluva aika" tiheysfunktio $f(t)$ on

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & \text{kun } t \in [0, 20], \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin odotusarvo $E(T)$ on

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \int_{0}^{20} t \frac{1}{20} dt = \Big/_{0}^{20} \frac{1}{40} t^2 = \frac{1}{40} \cdot 20^2 - 0 = 10.$$

Lautan odottamisajan odotusarvo on siis 10 minuuttia.

- Upea juttu, nähdään taas ensi kerralla! Erik toteaa. - Muista ottaa havaintoaineistosi mukaan!

Kotonaan William on edelleen täysin matematiikan pyörteissä, joten hän alkaa tehdä merkintöjä matikkapäiväkirjaansa.

* LAUSE 6.8. *Jos satunnaismuuttujilla X ja Y on odotusarvot $E(X)$ ja $E(Y)$,*

(1) *myös satunnaismuuttujalla $c_1 X + c_2 Y$ on odotusarvo*

$$E(c_1 X + c_2 Y) = c_1 E(X) + c_2 E(Y)$$

(2) *jos lisäksi X ja Y ovat riippumattomia, niin satunnaismuuttujalla XY on odotusarvo*

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

(3) *jos satunnaismuuttujilla X ja Y on sama kertymäfunktio (eli sama jakauma), mitä merkitään $X \sim Y$, niin*

$$E(X) = E(Y).$$

TODISTUS. Sivuutetaan. □

Satunnaismuuttujan odotusarvo kertoo satunnaismuuttujan jakauman sijainnista, aivan kuten keskiarvo kertoo tilastollisen muuttujan sijainnista. Satunnaismuuttujan jakauman muotoa eli sitä, kuinka kaukana arvot ovat keskiarvosta, kuvataan usein keskihajonnan avulla. Nimi on siis sama, jota käytetään tilastollisen muuttujan jakauman muotoa kuvattaessa. Varianssi saadaan vastaavasti keskihajonnan neliönä.

MÄÄRITELMÄ 6.9. Diskreetin satunnaismuuttujan X keskihajonta $D(X)$ on

$$D(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \mu)^2},$$

missä μ on satunnaismuuttujan X odotusarvo $E(X)$. Keskihajontaa merkitään usein kreikkalaisella kirjaimella σ (sigma).

Jos satunnaismuuttujan X arvojoukko on numeroituvasti ääretön ja sen odotusarvo on olemassa, $D(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} p_i(x_i - \mu)^2}$, jos summa suppenee.

ESIMERKKI 6.10. Nopanheiton mallin odotusarvo μ on $\frac{7}{2}$ (esimerkki 6.2) ja sen keskihajonta on

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{\sum_{i=1}^{6} p_i(x_i - \mu)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}(2 - \frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}(3 - \frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}(4 - \frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}(5 - \frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}(6 - \frac{7}{2})^2} \\
&= \sqrt{\frac{35}{12}} = 1,70782512\ldots \\
&\approx 1,7.
\end{aligned}$$

Keskihajonta 1,7 on melko suuri verrattuna siihen, että odotusarvo on 3,5, ja että pienin nopanheitossa saatava arvo on 1 ja suurin 6. Tämän perusteella voidaan arvioida, että suurin osa nopanheitossa saatavista arvoista ei ole keskittynyt hyvin lähelle odotusarvoa, vaan melko suuri osa arvoista poikkeaa enemmänkin odotusarvosta. Odotusarvon perusteella ei voida päätellä, mikä on todennäköinen heittotulos.

MÄÄRITELMÄ 6.11. Jatkuvan satunnaismuuttujan X, jonka tiheysfunktio on f ja jolle on olemassa odotusarvo μ, keskihajonta $D(X)$ on

$$D(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx},$$

mikäli integraali on suppeneva eli $\int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu)^2 f(x)dx < \infty$. Muussa tapauksessa sanotaan, että satunnaismuuttujalla X ei ole keskihajontaa.

Esimerkki 6.12. Satunnaismuuttujan T = "lautan odottamiseen kuluva aika" odotusarvo μ on 10 (esimerkki 6.7) ja sen keskihajonta σ on

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 f(t)dt} \\
&= \sqrt{\int_{0}^{20} (t-10)^2 \cdot \tfrac{1}{20}dt} \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{20}\int_{0}^{20} (t^2-20t+100)dt} \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{20}\Big/_{0}^{20} (\tfrac{1}{3}t^3-10t^2+100t)} \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{20}(\tfrac{1}{3}\cdot 20^3 - 10\cdot 20^2 + 100\cdot 20 - 0)} \\
&= \sqrt{\tfrac{100}{3}} = 5,77350269\ldots \\
&\approx 5,8.
\end{aligned}$$

Keskihajonta on melko suuri, joten voidaan arvioida, että suurin osa satunnaismuuttujan T saamista arvoista ei ole kovinkaan lähellä odotusarvoa. Odotusarvon perusteella ei voida päätellä, mikä on todennäköinen lautan odottamiseen kuluva aika.

Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi kuvaa niiden välistä riippuvuutta: mitä suurempi kovarianssi, sen suurempi riippuvuus.

* Määritelmä 6.13. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joilla on odotusarvot $E(X)$ ja $E(Y)$. Jos lisäksi on olemassa satunnaismuuttujan XY odotusarvo $E(XY)$, niin satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi on

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

* Huomautus 6.14. Satunnaismuuttujan X kovarianssia itsensä kanssa kutsutaan satunnaismuuttujan X varianssiksi, jos odotusarvo $E(X^2)$ on olemassa. Lisäksi erityisesti pätee

$$\mathrm{Var}(X) = E([X-E(X)]^2),$$ [1]

sillä lauseen 6.8 nojalla $E([X-E(X)]^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) = E(X^2) - 2((E(X))^2) + E((E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2 = \mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$.

Kovarianssi ei ole skaalattu suure. Jos halutaan vertailla eri satunnaismuuttujien välillä havaittuja riippuvuuksia, kovarianssit tulee skaalata. Seuraavan määritelmän

[1] Itse asiassa varianssi määritellään yleensä tällä lausekkeella. Voidaan todistaa, että se on yhtenevä määritelmien 6.9 ja 6.11 kanssa.

mukaan skaalaamalla saadaan *korrelaatiokerroin*, joka saa arvoja välillä $[-1, 1]$. Positiiviset luvut merkitsevät positiivista korrelaatiota ja negatiiviset luvut negatiivista korrelaatiota. Jos korrelaatiokerroin on 0, satunnaismuuttujat ovat korreloimattomat. Korrelaatiota käsiteltiin lyhyesti myös huomautuksessa 2.30.

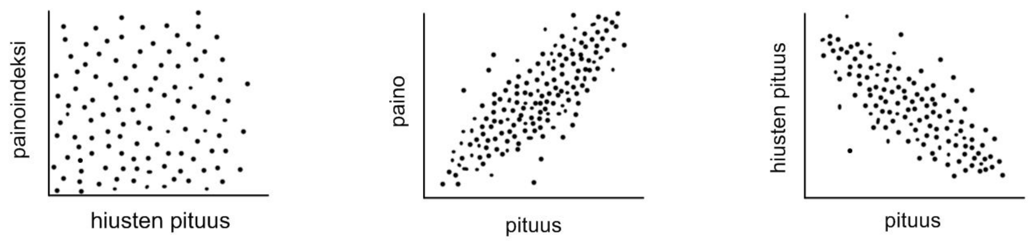
* MÄÄRITELMÄ 6.15. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joilla on varianssit. Satunnaismuuttujien X ja Y korrelaatiokerroin $\mathrm{Corr}(X, Y)$ on

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}, & \text{jos } D(X)D(Y) \neq 0, \\ 0, & \text{jos } D(X)D(Y) = 0. \end{cases}$$

* HUOMAUTUS 6.16. Jos $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$, satunnaismuuttujat X ja Y ovat korreloimattomat. Satunnaismuuttujien riippumattomuudesta seuraa korreloimattomuus. Korreloimattomuudesta ei voida kuitenkaan päätellä, että X ja Y ovat riippumattomat: korrelaatiokerroin voi olla 0, vaikka satunnaismuuttujien X ja Y välillä on funktionaalinen riippuvuus. Esimerkiksi satunnaismuuttujien X ja Y välillä on funktionaalinen riippuvuus, kun $Y = X^2$ ja X noudattaa normitettua normaalijakaumaa, jota käsitellään enemmän luvussa 7.2. Kuitenkin $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 0$, sillä satunnaismuuttujan X noudattaessa normaalijakaumaa $E(X^3) = E(X) = 0$, eli $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$.

Tilastollisten muuttujien X ja Y positiivinen ja negatiivinen korrelaatio sekä korreloimattomuus voidaan päätellä niiden muodostamasta kuvaajasta seuraavan esimerkin mukaisesti.

ESIMERKKI 6.17. William keräsi 1374 miehen tiedot heidän pituudestaan, painostaan ja hiustensa pituudesta. Pituuden ja painon avulla hän sai laskettua heidän painoindeksinsä. Näiden tietojen perusteella hän teki kolme kuvaajaa (kuva 6.1).



KUVA 6.1

Kuvaajassa, jossa muuttujina ovat hiusten pituus ja painoindeksi, pisteet ovat melko tasaisesti jakautuneet koko alueelle. Tästä voidaan päätellä, ettei näiden muuttujien välillä ole korrelaatiota.

Kuvaajassa, jossa muuttujina ovat pituus ja paino, pisteet näyttävät muodostavan nousevan suoran, vaikkakin melko leveän. Tästä voidaan päätellä, että näiden muuttujien välillä on jonkinlainen positiivinen korrelaatio. Karkeasti voidaan sanoa, että mitä pidempi mies, sen painavampi.

Kuvaajassa, jossa muuttujina ovat pituus ja hiusten pituus, pisteet näyttävät muodostavan melko leveän laskevan suoran. Tästä voidaan päätellä, että näiden muuttujien välillä on yllättäen jonkinlainen negatiivinen korrelaatio. Karkeasti voidaan sanoa, että mitä pidempi mies, sen lyhyemmät hiukset.

LUKU 7

Jakaumia

Satunnaismuuttujan jakauma kuvaa sitä, kuinka todennäköisyysmassa jakautuu satunnaismuuttujan arvojen kesken. Tieto satunnaismuuttujan jakaumasta saadaan siis kertymäfunktiosta (tai tiheys- tai pistetodennäköisyysfunktiosta). Odotusarvo ja keskihajonta ovat satunnaismuuttujan jakauman ominaisuuksia.

On paljon tilanteita, joissa käytettävien satunnaismuuttujien kertymäfunktiot ovat rakenteeltaan samanlaiset. Tietyn tyyppiset jakaumat onkin yleistetty ja nimetty. Tässä luvussa käsitellään tasainen jakauma ja normaalijakauma esimerkkeinä jatkuvista jakaumista. Diskreeteistä jakaumista esimerkkeinä ovat geometrinen jakauma, hypergeometrinen jakauma, binomijakauma ja Poisson-jakauma.

7.1. Tasainen jakauma

Erikin ja Esmen lautan odottamisaika (esimerkki 4.8) oli esimerkki tasaisesti jakautuneesta satunnaismuuttujasta. Tasainen jakauma määritellään seuraavasti:

Määritelmä 7.1. Satunnaismuuttuja X noudattaa tasaista jakaumaa välillä $]a, b[$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, eli $X \sim \mathrm{Tas}(a, b)$, jos sillä on tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{kun } x \in]a, b[, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tasaisen jakauman kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{jos } x \in]a, b[, \\ 1, & \text{jos } x \geq b. \end{cases}$$

Erikin ja Esmen lautan odottamisajalle laskettiin odotusarvo ja keskihajonta (esimerkit 6.7 ja 6.12). Yleistämällä nämä laskut välille $]a, b[$ saadaan seuraava lause.

Lause 7.2. *Kun satunnaismuuttuja X noudattaa tasaista jakaumaa eli $X \sim \mathit{Tas}(a, b)$, sen odotusarvo on*

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

ja keskihajonta

$$D(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

TODISTUS. Odotusarvo $E(X)$ on

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \Big/_{\!a}^{\,b} \frac{1}{2\cdot(b-a)}x^2 \\
&= \frac{1}{2\cdot(b-a)}\cdot b^2 - \frac{1}{2\cdot(b-a)}\cdot a^2 = \frac{b^2-a^2}{2\cdot(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2\cdot(b-a)} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}
$$

ja keskihajonta $D(X)$ on

$$
\begin{aligned}
D(X) &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-E(X))^2 f(x)dx} = \sqrt{\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx} \\
&= \sqrt{\frac{1}{b-a}\Big/_{\!a}^{\,b}\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{1}{3(b-a)}\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right]} = \sqrt{\frac{1}{3(b-a)}\cdot 2\cdot\frac{(b-a)^3}{8}} \\
&= \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}.
\end{aligned}
$$

□

7.2. Normaalijakauma

William ja Erik yrittävät edelleen löytää Melinalle sopivaa miestä.

- Meillä on nyt siis 41 miestä, joilla on ruskeat silmät ja lyhyt tukka, jotka ovat normaalipainoisia ja joiden älyarvo on hieman keskimääräistä suurempi, Erik toteaa.

- Seuraavaksi voisimme sitten selvittää ketkä näistä ovat oikeanpituisia. Kuinka pitkä Melina on?

- Melina on 158 senttimetriä pitkä. Miehen tulee siis olla 163–178 senttimetriä pitkä.

- Missäs se havaintoaineistoni olikaan, William ihmettelee penkoessaan tavaroitaan. - No nyt löytyi.

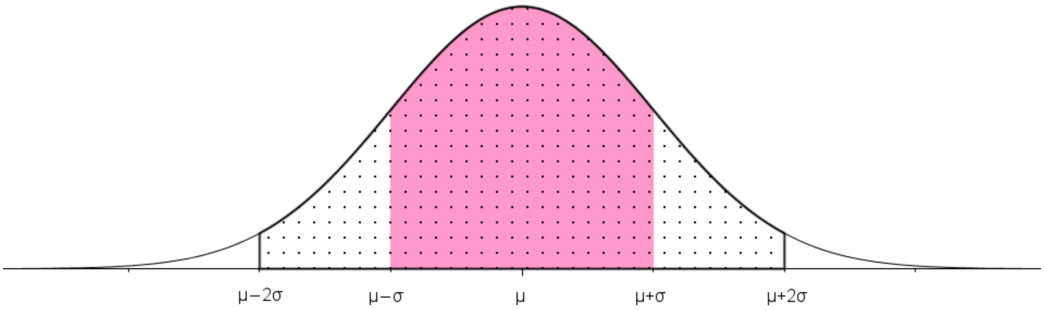
- Onko ketään enää jäljellä? Erik kysyy pelokkaana. Hetken kuluttua William vastaa:
- Onpa hyvinkin! Vielä 32 miestä jäljellä.

- Niin monta, uskomatonta! Tämän on pakko uhmata kaikkia todennäköisyyksiä! Erik huudahtaa.

- Niinkö luulet? Itse asiassa voimme selvittää kyseisen todennäköisyyden normaalijakauman avulla, sillä pituus on likimain normaalijakautunut.

Normaalijakauma on erikoistapaus jatkuvasta todennäköisyysjakaumasta ja se on tärkeä yleisyytensä vuoksi: tilastollisesti ollaan huomattu, että useat populaation yksilöiden ominaisuudet, esimerkiksi pituus ja paino, noudattavat likimain normaalijakaumaa. Normaalijakauman määräävät sen odotusarvo μ ja keskihajonta σ.

Normaalijakauman tiheysfunktion kuvaajaa kutsutaan Gaussin käyräksi. Käyrä on symmetrinen satunnaismuuttujan odotusarvon suhteen ja sen huippukohta on odotusarvon kohdalla. Keskihajonta puolestaan määrää käyrän jyrkkyyden: mitä suurempi hajonta, sen loivempi käyrä. Satunnaismuuttujan arvoista 68% sijaitsee korkeintaan keskihajonnan päässä odotusarvosta (kuvan 7.1 pinkillä värjätty alue) ja noin 95% korkeintaan kahden keskihajonnan päässä odotusarvosta (kuvan 7.1 pilkullinen alue).



Kuva 7.1. Gaussin käyrä.

Määritelmä 7.3. Jatkuva satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa parametrein μ ja σ eli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, jos sen tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

Lause 7.4. *Normaalisti jakautuneen satunnaismuuttujan kertymäfunktio on sen tiheysfunktion määrätty integraali (katso huomautus 4.7):*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} dt.$$

Normaalijakauman kertymäfunktion arvoja on hankala laskea.[1] Normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja voidaan kuitenkin normittaa. Normaalijakautuneen satunnaismuuttujan X normitettu satunnaismuuttuja on $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, joka noudattaa normitettua normaalijakaumaa $N(0,1)$. Tämän jakauman kertymäfunktion arvoja on taulukoitu (kuva 7.2), jolloin todennäköisyydet saadaan laskettua riittävän tarkasti.

Seuraus 7.5. *Normitetun normaalijakauman $N(0,1)$ tiheysfunktio φ saadaan sijoittamalla yleisen normaalijakauman tiheysfunktion kaavaan $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Normitetun normaalijakauman $N(0,1)$ kertymäfunktio Φ on

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

[1] Kyseiset arvot on laskettava numeerisesti, sillä lauseen 7.4 integraalia ei voida esittää alkeisfunktioiden avulla.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5190	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7157	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7969	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8513	.8554	.8577	.8529	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9215	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9492	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

KUVA 7.2. Normitetun normaalijakauman kertymäfunktion arvoja $\Phi(x)$. Esimerkissä 7.6 tarvittavat kertymäfunktion arvot löytyvät taulukon keltaisista ruuduista.

- Nyt voimmekin selvittää, kuinka suuri osa saaren miehistä on $163 - 178$ senttimetriä pitkiä, William sanoo.

Esimerkki 7.6. Saarella asuvien täysi-ikäisten miesten pituus noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla $\mu = 173$ cm ja keskihajonnalla $\sigma = 5$ cm. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun miehen pituus on välillä $163 - 178$ cm?

Normitetaan satunnaismuuttujan arvot $X_1 = 163$ cm ja $X_2 = 178$ cm:

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{163 - 173}{5} = -2 \text{ ja}$$
$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{178 - 173}{5} = 1.$$

Nyt haluttu todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(163 < X < 178) &= P(X < 178) - P(X < 163) \\ &= P(Z < Z_2) - P(Z < Z_1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(2)) \\ &= 0,8413 - (1 - 0,9772) \\ &= 0,8185. \end{aligned}$$

- Voimme siis päätellä, että $81,85\%$ saaren täysi-ikäisistä miehistä on $163 - 178$ senttimetriä pitkiä. Arviolta näistä 41 jäljellä olevasta miehestä on siis $0,8185 \cdot 41 \approx 34$ sopivan pituisia, mikäli voidaan olettaa, että silmien väri, hiusten pituus, painoindeksi ja älykkyys eivät vaikuta pituuteen.
- Oho. 32 miestä olikin siis varsin todennäköistä, Erik yllättyy. - Tai itseasiassa todennäköisempää olisi ollut vielä pari miestä lisää. Vielä tulisi selvittää, ketkä näistä pitävät lapsista.

7.3. * Geometrinen jakauma

Kun halutaan tietää, millä todennäköisyydellä koetta on toistettava k kertaa ennen kuin haluttu tapahtuma A tapahtuu, käytetään geometrista jakaumaa.

Nimestään huolimatta geometrinen jakauma ei liity mitenkään luvussa 4.1 esiteltyyn geometrisen todennäköisyyden käsitteeseen.

Määritelmä 7.7. Satunnaismuuttuja X on geometrisesti jakautunut parametrina p eli $X \sim \text{Geom}(p)$, kun sen arvojoukko on $\{0, 1, 2, \ldots\}$ ja

$$P(X = k) = pq^k,$$

missä $q = 1 - p$.

Esimerkki 7.8. Olkoon tapahtuma A nopanheiton tapahtuma ”heitetään kuutonen”, jolloin sen todennäköisyys on $P(A) = p = \frac{1}{6}$. Olkoon satunnaismuuttuja X = ”heittojen lukumäärä ennen tapahtuman A onnistumista”.

Lasketaan todennäköisyys sille, että vasta neljännellä heitolla saadaan kuutonen:

$$P(X = 3) = pq^3 = (\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^3 = 0,096450617\ldots.$$

Arvojen $X \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ todennäköisyydet on esitetty kuvassa 7.3. Lisäksi on hyvä huomata, että todennäköisyydet ovat positiivisia kaikille arvoille $X \in \mathbb{N}$, esimerkiksi $P(X = 30) = 0,00421272023\ldots$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X=k) = pq^k$	0,167	0,139	0,116	0,096	0,080	0,067	0,056	0,047	0,039	0,032

Kuva 7.3

Lause 7.9. *Kun satunnaismuuttuja X noudattaa geometrista jakaumaa eli $X \sim Geom(p)$, sen odotusarvo on*

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

ja keskihajonta

$$D(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

Todistus. Määritelmän 6.1 avulla saadaan, että geometrisesti jakautuneen satunnaismuuttujan odotusarvo on

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^k \cdot k = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k.$$

Merkitään $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^k$, jolloin $E(X) = \lim_{n\to\infty} pS_n$.

$$\begin{aligned}
pS_n &= S_n - (1-p)S_n \\
&= (1-p) + 2(1-p)^2 + 3(1-p)^3 + \ldots + n(1-p)^n \\
&\quad - (1-p)^2 - 2(1-p)^3 - 3(1-p)^4 - \ldots - n(1-p)^{n+1}) \\
&= (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots + (1-p)^n - n(1-p)^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (1-p)^k - n(1-p)^{n+1}
\end{aligned}$$

Nyt $E(X) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (1-p)^k - \lim_{n\to\infty} n(1-p)^{n+1}$. Tässä

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (1-p)^k &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = -(1-p)^0 + \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \\
&= -1 + \frac{1}{1-(1-p)} = -1 + \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p}
\end{aligned}$$

geometrisen sarjan summan kaavan avulla[2] ja

[2] $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$, jos $|a| < 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(1-p)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1-p)^{-(n+1)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{(1-p)^{-k}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{-(1-p)^{-k}\cdot \ln(1-p)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{-(1-p)^{k}}{ln(1-p)} = 0,\end{aligned}$$

missä toiseksi viimeiseen yhtäsuuruuteen on käytetty l'Hospitalin sääntöä.[3] Näin ollen $E(X) = \frac{1-p}{p}$.

Keskihajonnan todistus sivuutetaan. □

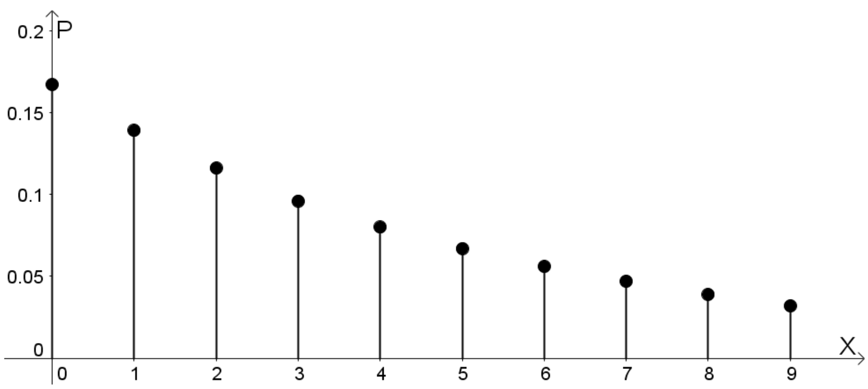
Esimerkki 7.10. Odotusarvo $E(X)$ esimerkin 7.8 mukaiseen tilanteeseen on

$$E(X) = \frac{1-\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$$

ja keskihajonta

$$D(X) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{6}}{(\frac{1}{6})^2}} = \sqrt{30} = 5,47722557\ldots \approx 5,5.$$

Jos siis toistettaisiin koetta ”kuinka monesti pitää heittää noppaa ennen kuin saadaan kuutonen” äärettömän monta kertaa, kokeiden keskiarvo olisi 5.



Kuva 7.4. Esimerkin 7.8 mukaisen satunnaismuuttujan tiheysfunktio välille $[0,9]$.

[3] L'Hospitalin sääntö: Jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ ja jos on olemassa b siten, että $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]b,\infty[$, niin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Funktio $g(k) = (1-p)^{-k}$ on saatu derivoitua huomaamalla, että $(1-p)^{-k} = e^{\ln(1-p)^{-k}} = e^{-k\cdot\ln(1-p)}$.

7.4. * Hypergeometrinen jakauma

- Seuraava tehtävä on etsiä täältä havaintoaineistosta 1374 miehen joukosta näiden jäljelle jääneiden 32 miehen vastaukset, William ilmoittaa.

- No niin, se onkin helppoa, Erik vastaa.

- Helppoa, mutta hidasta. Se tieto täältä löytyy, että näistä 1374 miehestä 1016 pitää lapsista.

- Pystyykö sen tiedon perusteella arvioimaan, kuinka moni näistä 32 miehestä pitää lapsista?

- Se voidaan ainakin laskea, millä todennäköisyydellä heistä pitää vaikka 20 miestä.

- Laske sinä sitä vaan sillä aikaa, kun minä etsin täältä havaintoaineistosta todellisen lukeman, Erik ehdottaa.

Esimerkki 7.11. Tiedetään, että 1374 miehestä 1016 pitää lapsista. Millä todennäköisyydellä 1374 miehen joukosta valituista 32 miehestä 20 pitää lapsista?

Merkitään kysyttyä tapahtumaa A_{20}.

Ajatellaan, että miehellä on vain yksi ominaisuus: ”pitää lapsista” tai ”ei pidä lapsista”. Tätä ominaisuutta ajatellen miehet valitaan satunnaisesti perusjoukosta, sillä lapsista pitäminen ei riipu mitenkään aiemmista ominaisuuksista (silmien väri, hiusten pituus ja niin edelleen), vaikka todellisuudessa aiemmat ominaisuudet vaikuttivatkin 32 miehen otoksen valintaan.

1374 miehen joukosta voidaan poimia 32 miestä $\binom{1374}{32}$ eri tavalla.

Halutaan selvittää todennäköisyys sille tilanteelle, että 32 miehestä 20 pitää lapsista. Nämä 20 lapsista pitävää miestä voidaan valita kaikkien lapsista pitävien miesten joukosta $\binom{1016}{20}$ eri tavalla ja loput 12 miestä, jotka eivät pidä lapsista, voidaan valita $\binom{1374-1016}{32-20}$ eri tavalla.

Suotuisien tapahtumien lukumäärä on siis $\binom{1016}{20}\binom{1374-1016}{32-20}$, joten tapahtuman A_{20} todennäköisyys on

$$P(A_{20}) = \frac{\binom{1016}{20}\binom{1374-1016}{32-20}}{\binom{1374}{32}} = 0,052229414\ldots.$$

- Sain todennäköisyydeksi noin 5%, William toteaa laskujensa jälkeen. - Se on melko iso todennäköisyys kun otetaan huomioon, että tällä todennäköisyydellä lapsista pitäviä on täsmälleen 20 eikä vähintään 20.

- Niin joo. Totta. Sain tulokseksi 23 lapsista pitävää miestä! Enää pitää toivoa, että joku heistä tulee hyvin juttuun Melinan kanssa.

- Mahtavaa! Koska äskeisen laskelmani periaatteella käyttäytyvät satunnaismuuttujat ovat hypergeometrisesti jakautuneita, voimme määrittää odotusarvon sille, kuinka moni 32 miehestä pitää lapsista.

- Mutta mehän tiedämme jo todellisen tilanteen, Erik ihmettelee. - Mitä hyötyä siitä on?
- Ihan vaan mielenkiinnosta haluan selvittää, kuinka kaukana todellinen tilanne on odotusarvosta, William naureskelee.

Tiedetään, että perusjoukossa on N alkiota ja niistä K:lla on haluttu ominaisuus. Kun halutaan tietää, millä todennäköisyydellä perusjoukosta satunnaisesti valitun osajoukon n alkiosta k:lla on haluttu ominaisuus, käytetään hypergeometrista jakaumaa.

Määritelmä 7.12. Satunnaismuuttuja X on hypergeometrisesti jakautunut parametrein N, K ja n eli $X \sim \text{Hyperg}(N, K, n)$, kun sen arvojoukko on $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ja

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

kun $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Lause 7.13. *Kun satunnaismuuttuja X noudattaa hypergeometrista jakaumaa eli $X \sim$ Hyperg(N, K, n), sen odotusarvo on*

$$E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$$

ja keskihajonta

$$D(X) = \sqrt{n\frac{K}{N}\frac{(N-K)}{N}\frac{(N-n)}{(N-1)}}.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 7.14. Odotusarvo esimerkin 7.11 tilanteelle, jossa $N = 1374$, $K = 1016$ ja $n = 32$, on

$$E(X) = 32 \cdot \frac{1016}{1374} = 23,6622998\ldots \approx 24.$$

- Odotusarvo ja todellinen lukema ovat kyllä uskomattoman lähellä toisiaan! William huutaa innostuneena, mutta Erik ei kuule. Hän suunnittelee jo suurta kosintapäivää, jossa 23 prinsessa Melinan toiveiden mukaista miestä voivat vuorollaan yrittää tehdä vaikutuksen Melinaan.

7.5. Binomijakauma

Seuraavana päivänä kuningas ottaa asian ensimmäistä kertaa puheeksi Melinan kanssa.
- Ai mitä te olette tehneet? Melina huutaa Erikille tämän kerrottua Williamin kanssa tekemistään tutkimuksista. - Ja mikä ihmeen kosintapäivä? En mä voi päättää pienen kosintapuheen perusteella kenen kanssa haluan viettää loppuelämäni. Olette sitä paitsi unohtaneet, että hänen tulee olla myös mukava, huomaavainen ja kohtelias. Ja nämäkään ominaisuudet eivät riitä, jos en tule hänen kanssaan toimeen.
- Tapaisit edes heidät, Erik pyytää. - Olemme tehneet kovan työn ajatellen vain sinun parastasi. Sinun puolestasi emme kuitenkaan voi arvioida heidän luonteenlaatuaan.

- Hyvä on, isä. Onpahan tekemistä ensi viikolle. Jos saan tavata kutakin heistä tunnin ajan, saan selville keiden kanssa tulen toimeen ja keiden kanssa en.

....

Myöhemmin samana päivänä Erik kutsuu Williamin luokseen kahville ja kertoo Melinan reaktioista.

- Mitä jos olemmekin tehneet aivan turhaa työtä eikä kukaan heistä miellytä häntä? Erik huokaisee. - Melina on niin tarkka näissä asioissa.

- No kai nyt joku sentään on sopiva, William vastaa ja alkaa pohtia mahdollisia todennäköisyyksiä sille, kuinka monella miehellä on Melinalle sopiva luonteenlaatu.

Esimerkki 7.15. Oletetaan, että todennäköisyydellä $p = 3\%$ satunnaisesti valittu mies on mukava, huomaavainen, kohtelias ja Melina tulee hyvin hänen kanssaan toimeen. Melina tapaa 23 miestä. Millä todennäköisyydellä k henkilöllä on Melinalle sopiva luonteenlaatu?

Voidaan ajatella, että kyseessä on koe, jonka onnistumistodennäköisyys on $p = 3\%$ ja jota toistetaan 23 kertaa. Halutaan selvittää, millä todennäköisyydellä onnistutaan k kertaa.

Yksittäisen suotuisan sarjan todennäköisyys on $p^k(1-p)^{n-k}$ (k onnistumista ja $n-k$ epäonnistumista) ja erilaisia suotuisia sarjoja on $\binom{n}{k}$.

Kysytty todennäköisyys on siis $P(X = k) = \binom{23}{k}(0,03)^k(0,97)^{23-k}$. Todennäköisyydet eri arvoille k on lueteltu kuvan 7.5 taulukossa.

k	0	1	2	3	4	5
P(%)	49,6306	35,3043	12,0107	2,6003	0,4021	0,0005

Kuva 7.5. Sopiva luonteenlaatu.

- No joo. Ei kannata tosiaan toivoa liikoja, William toteaa kuninkaalle. Jos oletetaan, että 3% todennäköisyydellä satunnaisesti valitulla miehellä on Melinalle sopiva luonteenlaatu, niin noin $49,6\%$ todennäköisyydellä yhdelläkään 23 miehestä ei ole sopivaa luonteenlaatua. Toisaalta tämä tarkoittaa myös sitä, että hieman yli 50% todennäköisyydellä ainakin yhdellä miehellä 23 miehestä on sopiva luonteenlaatu.

- Pitihän se arvata. Pian Melina muuttaa täältä pois, ja mitä me Esmen kanssa sitten teemme? Erik pohtii masentuneena.

- Älä vielä menetä toivoasi. Tuo 3% todennäköisyys on vain arvio. Todellisuudessa se voi olla suurempikin. Lasken kuitenkin vielä odotusarvon.

Kun halutaan tietää, millä todennäköisyydellä saadaan k onnistumista, kun koetta, jonka onnistumistodennäköisyys on p, toistetaan n kertaa, käytetään binomijakautunutta satunnaismuuttujaa.

MÄÄRITELMÄ 7.16. Satunnaismuuttuja X on binomijakautunut parametrein n ja p eli $X \sim \text{Bin}(n, p)$, jos sen arvojoukko on $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$ ja

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

missä p on onnistumisen todennäköisyys ja $q = 1-p$ epäonnistumisen todennäköisyys. Todennäköisyyttä kutsutaan binomitodennäköisyydeksi.

LAUSE 7.17. *Kun satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa parametrein n ja p, sen odotusarvo ja keskihajonta ovat*

$$E(X) = np \text{ ja } D(X) = \sqrt{npq}.$$

TODISTUS. Odotusarvoksi saadaan

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np.
\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus saadaan siitä, että summassa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k)!(n-1-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\
&= 1
\end{aligned}$$

lasketaan yhteen kaikki binomijakauman $\text{Bin}(n-1, p)$ pistetodennäköisyydet.

Keskihajonnan todistus sivuutetaan. □

ESIMERKKI 7.18. Odotusarvo μ esimerkin 7.15 mukaiselle tilanteelle, jossa $p = 0,03$ ja $n = 23$, on

$$\mu = 0,03 \cdot 23 = 0,69.$$

- Odotusarvo on 0,69. Ei siis ole lainkaan mahdotonta, että yksi sopiva mies sieltä löytyy! Nyt minun on kuitenkin lähdettävä kotiin, sillä lupasin hoitaa siskoni lapsia tänä iltana, William ilmoittaa.

- Suuret kiitokset kaikesta! Olen yhteydessä sinuun viimeistään sitten, kun prinsessa on tavannut miehet, Erik lupaa.

7.6. * Poisson-jakauma

Viikon kuluttua Williamin ja Erikin tapaamisesta Erik lähettää Williamille tiedon siitä, että peräti kolme miestä olivat Melinan mielestä varteenotettavia vaihtoehtoja, ja että seuraava päivä olisi suuri kosintapäivä. Miehet saapuisivat kosimaan Melinaa kukin vuorollaan ja Melina ilmoittaisi ratkaisunsa illalla kello kuuteen mennessä. Yllättäen William tajuaa harmistuvansa uutisesta, sillä kuninkaanlinnassa vieraillessaan hän oli huomaamattaan kiintynyt Melinaan.

....

Suuren kosintapäivän aamuna William herää koputukseen.

- Äiti sairastui yöllä, Williamin siskontytär kertoo Williamin avattua oven. - Voisitko pitää kauppaa tänään auki hänen puolestaan?

- Onnistuuhan se, William lupaa.

Kaupassa Williamin mielessä pyörii vain Melina ja hänen kosijansa. Kellon lähestyessä viittä William on aivan hermostunut. Hän alkaa pohtia, millä todennäköisyydellä kaupassa ei käy viiden ja kuuden välillä enää yhtään asiakasta.

Kun tiedetään odotusarvo λ (lambda) sille, kuinka monta tapahtumaa sattuu tietyllä aikavälillä ja halutaan tietää, millä todennäköisyydellä tällä aikavälillä sattuu k tapahtumaa, käytetään Poisson-jakaumaa.

MÄÄRITELMÄ 7.19. Satunnaismuuttuja X on Poisson-jakautunut parametrina λ eli $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, kun sen arvojoukko on $\{0, 1, 2, \dots\}$ ja

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

LAUSE 7.20. *Kun satunnaismuuttuja X noudattaa Poisson-jakaumaa eli $X \sim$ Poisson(λ), sen odotusarvo on*

$$E(X) = \lambda$$

ja keskihajonta

$$D(X) = \sqrt{\lambda}.$$

TODISTUS. Sivuutetaan. □

ESIMERKKI 7.21. Kaupassa käy viimeisen tunnin aikana odotusarvoltaan 8 asiakasta. Millä todennäköisyydellä viimeisen tunnin aikana kaupassa ei käy yhtään asiakasta?

Kysytty todennäköisyys on määritelmän 7.19 mukaan

$$P(X = 0) = e^{-8} \cdot \frac{8^0}{0!} = 0,0003354626\dots.$$

- Surkeaa, William toteaa itsekseen. - Kauppa suljetaan! Ei enää uusia asiakkaita! William alkaa huutaa. Viimeisistä asiakkaista selvittyään hän lähtee juoksemaan kohti kuninkaanlinnaa. Vähän ennen kuutta hän saapuu perille.

- Melinaaa! William huutaa päästyään sisälle. Kuningas Erikin suu loksahtaa auki hänen saapuessaan huoneeseen.

- Mitä sinä täällä teet? Erik ihmettelee.

- Missä Melina on?

- Hän on keskittynyt päätöksentekoon tulevan miehensä osalta. Miksi haluat tavata hänet?

- Minulla on hänelle tärkeää asiaa.

- Ei se voi olla niin tärkeää. Hänen on nyt tehtävä päätöksensä.

- Missä hän on? En ota mitään palkkaa vastaan näistä palveluksistani, jos viet minut hänen luoksensa. En vaivaa häntä kuin hetken.

- No hyvä on sitten. Mikäli se vain sopii hänelle.

Erik koputtaa Melinan huoneen oveen ja sanoo: - Williamilla on kuulemma tärkeää asiaa sinulle. Otatko hänet vastaan?

- William? Melina ihmettelee. - Hyvä on.

William astuu huoneeseen ja sulkee oven perässään.

- Rakas Melina. Teit minuun vaikutuksen, kun ensi kertaa kohtasimme. Kuitenkin vasta eilen tajusin, kuinka tärkeäksi olet minulle todella tullut. Järkytyin kuullessani, että tänään sinut voi saada joku mies. Mies, joka en olekaan minä. Epäonnekseni minun on todettava, että minulla on vain noin 70% mieheltä toivomistasi ominaisuuksista. Haluaisin kuitenkin osoittaa sinulle päivittäin 100-prosenttista rakkautta.

William astelee lähemmäs ja polvistuu Melinan eteen.

- Melina, tuletko vaimokseni?

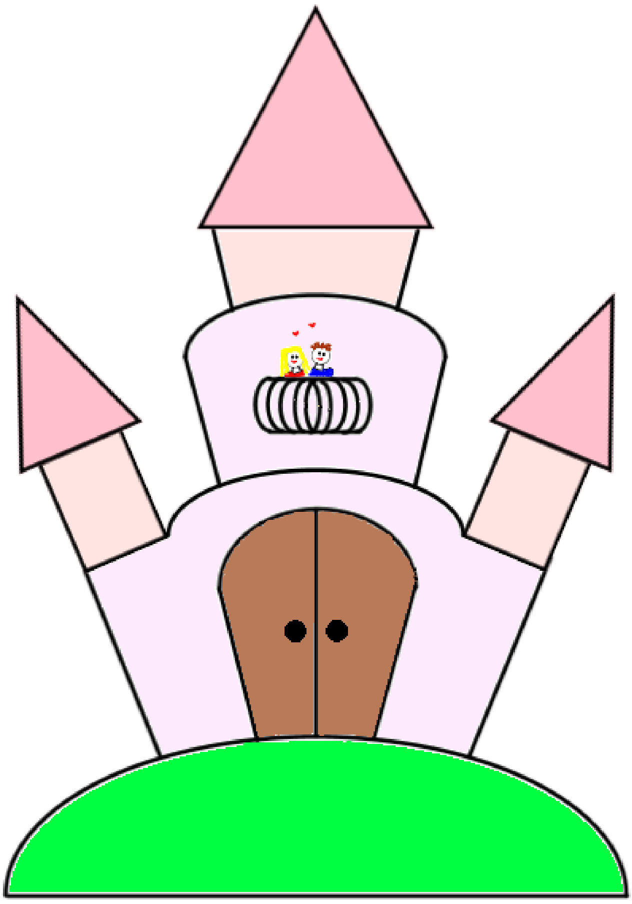
- Melina! Erik huutaa oven takaa ennen kuin Melina ehtii vastata. - Kello on kuusi ja kansa odottaa ulkona ratkaisuasi.

Melina hymyilee varovaisesti Williamille ja astuu sitten parvekkeelleen.

- Tänään olen luvannut ilmoittaa teille tulevan mieheni, Melina aloittaa puheensa. - Vihdoin olen ymmärtänyt sen, että ulkonaista olemusta tärkeämpää on se, mitä ihmisen sisällä on. Tuleva puolisoni on matemaatikko William.

William ei ole uskoa korviaan. Myös Erik ja Esme ovat hämmästyksestä suunniltaan. Melina saapuu parvekkeelta Williamin luokse ja tarttuu hänen kädestään kiinni. Yhdessä he astuvat parvekkeelle ja suutelevat toisiaan kansan hurratessa.

Häiden jälkeen he elivät elämänsä loppuun asti.



LUKU 8

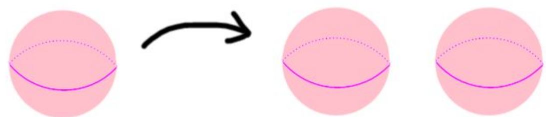
Ongelmia

Myöhemmin matematiikan uudet suuret lupaukset, muiden muassa matemaatikko Williamin ja prinsessa Melinan jälkeläinen, matemaatikko Lennart, alkoivat löytää ongelmia laskiessaan todennäköisyyksiä tietyille tapahtumille – tai pikemminkin laskiessaan tapahtumien geometrisia mittoja.

8.1. Banachin-Tarskin paradoksi

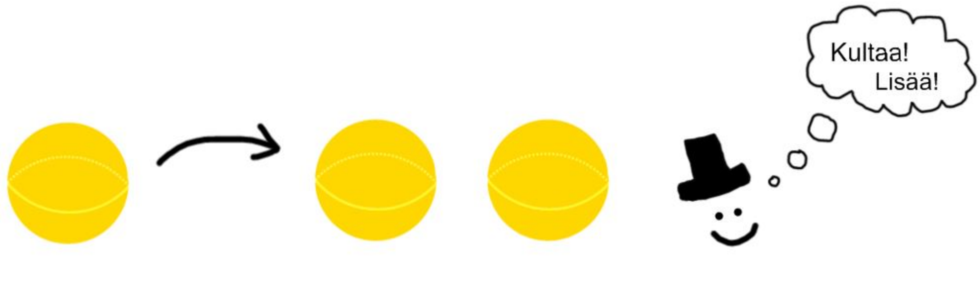
Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ yksikköpallo $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 1\}$ voidaan jakaa viiteen osajoukkoon ja siirtojen ja kiertojen avulla koota uudestaan niin, että saadaan kaksi yksikköpalloa. Tästä voidaan päätellä, että ainakin yhden yksikköpallon B osajoukon "tilavuus" muuttuu.

Geometrinen todennäköisyys sille, että yksikköpallosta satunnaisesti valittu piste kuuluu osajoukkoon $A \subset B$, lasketaan osajoukon A ja yksikköpallon B tilavuuksien suhteena. Koska ainakin toinen "tilavuuksista" muuttuu, geometrista mittaa, ja siten myöskään todennäköisyyttä, ei voida määrittää yksikäsitteisesti joukolle A.



KUVA 8.1. Yhdestä yksikköpallosta saadaan kaksi yksikköpalloa.

Voisiko vastaavaa kokeilla kultapalloihin?



KUVA 8.2. Helppo tapa rikastua?

Samainen avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpallo B voidaan itseasiassa jakaa osajoukkoihin ja koota uudestaan niin, että kootun pallon säde onkin tuhatkertainen alkuperäiseen palloon verrattuna.[1]

8.2. Vitali-joukot

Muodostetaan välin $[0,1]$ osajoukko, jossa on yksi rationaaliluku ja kaikki sellaiset irrationaaliluvut, että minkään kahden luvun erotus ei ole rationaaliluku. Kutsutaan tätä joukkoa Vitali-joukoksi. Kaikille Vitali-joukon V alkioille u ja v pätee siis $v - u \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, kun $u \neq v$. Muodostetaan lisää Vitali-joukkoja siirtäen alkuperäistä Vitali-joukkoa rationaaliluvuilla numeroituvan monta kertaa niin, että niiden yhdiste peittää välin $[0,1]$.

Yritetään nyt laskea Vitali-joukolle geometrinen mitta aivan kuten janalle voidaan laskea pituus. Oletetaan siis, että tämä mitta μ vastaa geometrista havaintoa eli välin mitta on sen pituus. Lisäksi oletetaan, että mitta toteuttaa seuraavat luonnolliset ominaisuudet: joukon mitta ei muutu, kun joukkoa siirretään (siirtoinvarianttius) ja jos $A \subset B$, niin joukon B mitta on suurempi tai yhtä suuri kuin joukon A mitta (monotonisuus).

Välillä $[-1,1]$ on numeroituva määrä rationaalilukuja $q_1, q_2, \ldots$, joten myös siirrettyjä joukkoja $V_k = V + q_k = \{v + q_k \mid v \in V, q_k \in [-1,1]\}$, missä $k = 1, 2, \ldots$, on numeroituva määrä ja nämä joukot ovat pistevieraita eli $V_k \cap V_j = \emptyset$, kun $k \neq j$. Lisäksi $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subset [-1,2]$. Tästä seuraa, että jos joukolle V_k on määritelty mitta $\mu(V_k)$, loogisesti sille tulee päteä $1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V_k) \leq 3$, sillä $\mu([0,1]) = 1 - 0 = 1$ ja $\mu([-1,2]) = 2 - (-1) = 3$.

Koska V_k on joukon V siirto, niin luonnollisesti $\mu(V_k) = \mu(V)$ eli niiden mitat ovat yhtä suuret. Näin ollen $1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V) \leq 3$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä jos $\mu(V) = 0$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(V) = 0$. Jos taas $\mu(V)$ on positiivinen luku, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(V)$ on ääretön. Summa ei siis voi mitenkään olla välillä $[1,3]$.

[1]Banachin-Tarskin paradoksin todistus perustuu valinta-aksioomaan.

Valinta-aksiooma 8.1. Jokaiselle epätyhjälle kokoelmalle $\mathcal{F}$ epätyhjiä joukkoja A_k voidaan muodostaa joukko, joka sisältää täsmälleen yhden alkion jokaisesta joukosta $A_k \in \mathcal{F}$.

Todistuksen läpikäyminen ei kuitenkaan ole oleellista tämän tutkielman kannalta. Lisätietoa Banachin-Tarskin paradoksista löytyy muun muassa teoksesta [**13**].

LUKU 9

Lebesguen mitta

Edellisessä luvussa kohdattiin todennäköisyyden ongelmia, jotka liittyivät mittoihin: erään joukon ”tilavuus” kaksinkertaistui sen osajoukkojen siirtojen ja kiertojen jälkeen, ja reaaliakselilta löytyi osajoukko $V \subset [0,1]$, jolle ei voida määrittää mittaa yksikäsitteisesti. Jos mittaa ei voida määrittää yksikäsitteisesti, ei voida määrittää vastaavaa geometrista todennäköisyyttäkään. Johtuvatko ongelmat mitoista vai joukoista? Kuinka voitaisiin määrittää yksikäsitteisesti koko eli mitta tietylle joukolle?

Integraaliteoriaa kehittäessään matemaatikko Lennart tuli keksineeksi ratkaisun näihin kysymyksiin.[1]

9.1. Geometrinen mitta

Millainen mitan siis tulisi olla, jotta siitä puhuminen olisi mielekästä ja jotta se ei olisi ristiriidassa arjen havaintojen kanssa? Geometrista havaintoa vastaava janan pituus eli mitta avaruudessa $\mathbb{R}$ on kyseisen välin $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ tai $]a,b[$, missä $a < b$, päätepisteiden erotus $b-a$. Suorakulmion pinta-ala eli mitta avaruudessa $\mathbb{R}^2$ saadaan kertomalla suorakulmion sivujen pituudet keskenään. Vastaavasti suorakulmaisen särmiön tilavuus eli mitta avaruudessa $\mathbb{R}^3$ saadaan kertomalla suorakulmaisen särmiön sivujen pituudet keskenään. Välin käsite ja sen geometrinen mitta voidaan yleistää avaruuteen $\mathbb{R}^n$ seuraavan määritelmän mukaisesti.

MÄÄRITELMÄ 9.1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ väli $I \subset \mathbb{R}^n$ on n:n reaalilukuvälin $I_k \subset \mathbb{R}$, missä $k = 1, 2, \dots, n$, karteesinen tulo
$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k \in I_k \text{ kaikilla } k = 1, 2, \dots, n\}$.
Välin $I \subset \mathbb{R}^n$ geometrinen mitta $g(I)$ on

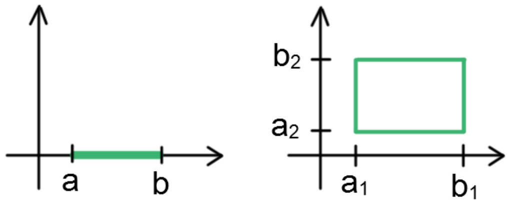
$$g(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k),$$

kun välin I_k päätepisteet ovat a_k ja b_k ja väli I_k on suljettu, avoin tai puoliavoin.

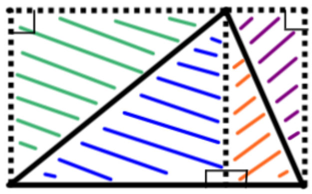
Tyhjän joukon geometrinen mitta $g(\emptyset) = 0$. Surkastuneen välin (ainakin yhdelle k pätee $I_k = \{a_k\}$) geometrinen mitta on myös 0 ja rajoittamattoman välin (ainakin yhdelle k pätee $a_k = -\infty$ tai $b_k = \infty$) geometrinen mitta on ääretön.

Entä miten saadaan laskettua monimutkaisempien kuvioiden mittoja? Esimerkiksi kolmion pinta-ala saadaan johdettua suorakulmion pinta-alasta täydentämällä kolmio suorakulmioksi kuvan 9.2 mukaisesti ja huomaamalla, että kolmion pinta-ala on puolet tämän suorakulmion pinta-alasta.

[1]Todellisuudessa näin teki ranskalainen matematiikko Henri Lebesgue, joka eli 1875-1941.



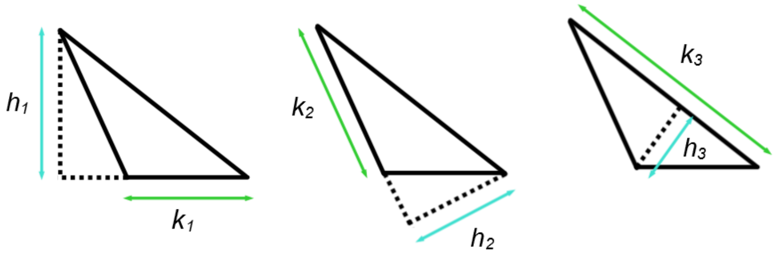
Kuva 9.1. Avaruuden $\mathbb{R}$ välin geometrinen mitta eli pituus on $b-a$ ja avaruuden $\mathbb{R}^2$ välin geometrinen mitta on $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$.



Kuva 9.2. Kolmio on täydennetty suorakulmioksi. Vihreän ja sinisen alueen pinta-alat ovat yhtä suuret samoin kuin violetin ja oranssin alueen. Tämä seuraa kuvassa olevista suorista kulmista, sillä lävistäjällä halkaistun suorakulmion molemmat puolet ovat yhtä suuret.

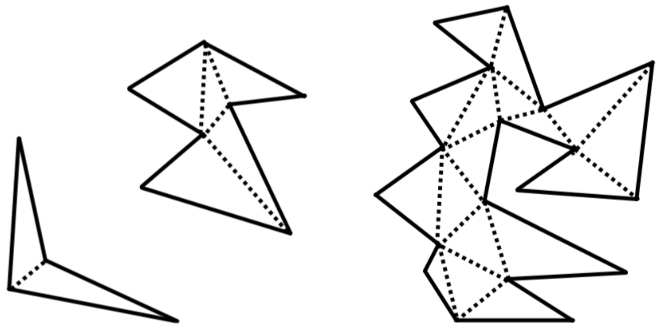
Kolmion pinta-ala lasketaan siis kertomalla kolmion kannan pituus korkeudella ja jakamalla tämä luvulla 2. Luonnollinen vaatimus mitalle on, ettei tulos saa riippua siitä, miten se lasketaan. Kolmion pinta-alan tulee siis olla sama, valittiin kolmion kannaksi mikä tahansa kolmion kolmesta sivusta.

Minkä tahansa nelikulmion pinta-ala puolestaan tulisi saada laskettua jakamalla nelikulmio kahdeksi kolmioksi ja laskemalla yhteen näiden kolmioiden pinta-alat. Vastaavasti myös monimutkaisempien monikulmioiden pinta-ala tulisi saada laskettua jakamalla monikulmio kolmioiksi ja laskemalla yhteen näiden kolmioiden pinta-alat. Haluamme siis, että kuvion pinta-ala on summa niiden pistevieraiden (tai melkein pistevieraiden) joukkojen pinta-aloista, joihin kuvio on jaettu. Melkein pistevierailla joukoilla tarkoitetaan tässä joukkoja, joilla on joitakin yhteisiä pisteitä, vaikkapa yhteinen reuna, mutta yhteisten pisteiden muodostama joukko on nollamittainen.[2] Esimerkiksi välit $[0,1]$ ja $[1,2]$ ovat melkein pistevieraita.



Kuva 9.3. Kolmion pinta-ala $A = \frac{k_1h_1}{2} = \frac{k_2h_2}{2} = \frac{k_3h_3}{2}$.

[2]Joukko A on nollamittainen, jos se voidaan peittää avoimilla väleillä I_k, missä $k = 1,2,\ldots$, siten, että välien I_k geometristen mittojen summa on pienempi kuin mikä tahansa ennalta valittu $\varepsilon > 0$.



KUVA 9.4. Monikulmioiden pinta-ala on yhtä suuri kuin niiden kolmioiden pinta-alojen summa, joihin se on jaettu.

Ympyrän ja muiden pyöreitä muotoja omaavien kuvioiden pinta-alan laskeminen onkin vaikeampi tehtävä. Myös nämä kuviot voidaan täyttää kolmioilla ja laskea näiden kolmioiden summa. Kolmioita tarvitaan kuitenkin äärettömän monta, jotta koko kuvio saadaan niillä täytettyä.[3]

Edellä on huomattu, että geometrista havaintoa vastaavan mitan tulisi olla additiivinen eli numeroituvan (tarvittaessa numeroituvasti äärettömän) monen pistevieraan joukon A_k yhdisteen $\bigcup_{k=1}^n A_k$, missä n voi olla ∞, mitan tulisi olla joukkojen A_k mittojen summa. Joukot A_k ovat pistevieraita, jos $A_k \cap A_j = \emptyset$, kun $k \neq j$. Lisäksi toivottavaa olisi, että mitta voitaisiin määrittää kaikille joukoille ja että joukon mitta pysyy samana siirroissa ja kierroissa.

TOIVEET MITALLE 9.2. Jotta mitoista puhuminen olisi mielekästä, mitan μ tulisi:

(1) vastata geometrista havaintoa (avaruuden $\mathbb{R}$ välin mitta on sen pituus jne.) sekä säilyä siirroissa ja kierroissa,

(2) olla additiivinen: numeroituvan monelle pistevieraalle joukolle A_k

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad \text{ja}$$

(3) olla määritelty kaikille joukoille saaden arvoja välillä $[0, \infty]$ ja $\mu(\emptyset) = 0$.

Seuraavaksi yritetään konstruoida tällainen mitta geometrisen mitan avulla.

9.2. Lebesguen ulkomitta

Geometrista mittaa (määritelmä 9.1) voidaan käyttää avaruuden $\mathbb{R}^n$ välin mittaamiseen. Jotta voitaisiin mitata myös monimutkaisempia joukkoja, jotka eivät ole välejä, konstruoidaan aluksi ulkomitta[4] ja kutsutaan sitä Lebesguen ulkomitaksi. Sen tarkoituksena on antaa arvio joukon mitalle avoimien välien pituuksien summan avulla, jolloin toive mitan additiivisuudesta ei välttämättä toteudu.

[3]Pinta-alojen laskemiseen kehitetyt menetelmät ovat olleet lähtökohtana mittateorialle.

[4]Nimitys ulkomitta johtuu siitä, että konstruointimme tuote ei välttämättä ole mitta.

MÄÄRITELMÄ 9.3. Lebesguen ulkomitta m^* euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ on

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} g(I_k) \mid I_k \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin väli tai tyhjä joukko, } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\},$$

missä $g(I_k)$ on välin I_k geometrinen mitta.

Aiemmin pääteltiin, että ympyrän pinta-ala voidaan laskea täyttämällä ympyrä äärettömän monella kolmiolla ja laskemalla niiden pinta-alat yhteen. Lebesguen ulkomitan määritelmässä käytetään vastaavaa ideaa: Peitetään joukko A avoimilla väleillä I_k. Käyttämällä enemmän, mutta pienempiä välejä, saadaan vähennettyä välien päällekkäisyyttä ja joukon A ulkopuolelle ulottuvia osia. Näiden avoimien välien geometristen mittojen summasta otetaan suurin alaraja, mikä on joukon A Lebesguen ulkomitta.

Lebesguen ulkomitta täyttää selvästi mitalle asetetun toiveen 9.2(3): se voidaan määrittää kaikille joukoille, se saa arvoja välillä $[0, \infty]$ ja $m^*(\emptyset) = 0$, koska $g(\emptyset) = 0$. Entä toteutuvatko muut toiveet? Todetaan aluksi, että Lebesguen ulkomitta on ainakin monotoninen ja subadditiivinen:

LAUSE 9.4. *Lebesguen ulkomitta m^* on*

(1) *monotoninen: jos $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, niin $m^*(A) \leq m^*(B)$ ja*
(2) *subadditiivinen: jos $A_j \subset \mathbb{R}^n$, missä $j = 1, 2, \ldots$, niin*

$$m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j).$$

TODISTUS. (1) Valitaan avoimet välit $I_k \subset \mathbb{R}^n$ siten, että ne peittävät joukon B eli $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Samat avoimet välit peittävät tällöin myös joukon $A \subset B$, joten

$$m^*(B) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} g(I_k) \mid I_k \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin väli tai tyhjä joukko, } B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\} \geq m^*(A).$$

(2) Olkoot $A_j \subset \mathbb{R}^n$, missä $j = 1, 2, \ldots$. Mikäli $m^*(A_j) = \infty$ jollekin j, epäyhtälön oikealle puolelle tulee ∞ ja väite pätee.

Voidaan siis olettaa, että $m^*(A_j) < \infty$ kaikilla j. Tällöin kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa avoimet välit $I_{j,k}$ siten, että $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{j,k}$ ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(I_{j,k}) \leq m^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Summataan molemmat puolet yli kaikkien indeksien j ja saadaan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} g(I_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \varepsilon,$$

sillä $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$. Koska

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{j,k},$$

ja $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{j,k}$ on numeroituva yhdiste, voidaan soveltaa määritelmää 9.3 joukolle $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, jolloin saadaan

$$m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g(I_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \varepsilon.$$

Koska tämä on voimassa kaikille $\varepsilon > 0$, väite pätee. □

Lebesguen ulkomitta on siis subadditiivinen, mutta entä additiivinen? Määritelmänsä mukaan joukon A Lebesguen ulkomitta on suurin alaraja joukon A peittävien avoimien välien I_k pituuksien summasta, ei minimi. Näin ollen välttämättä ei ole olemassa sellaisia avoimia välejä I_k, että $m^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} g(I_k)$, joten Lebesguen ulkomitta ei ole additiivinen. Ei anneta asian kuitenkaan vielä tässä vaiheessa häiritä, sillä seuraavat lauseet osoittavat sen, että additiivisuus on halutuista ominaisuuksista ainoa, jota Lebesguen ulkomitalla ei ole. Todetaan aluksi, että Lebesguen ulkomitta vastaa geometrista havaintoa avaruuden $\mathbb{R}^n$ väleille I. Tämän todistamiseen tarvitaan kuitenkin seuraavaa apulausetta.

Apulause 9.5. *Jos välit $I_k \subset \mathbb{R}^n$ ovat melkein pistevieraita ja $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, niin geometrinen mitta $g(I) = \sum_{k=1}^{n} g(I_k)$.*

Todistus. Löytyy teoksen [**3**] sivuilta 12-14 (Lemma 2.5 ja Proposition 2.6). □

Lause 9.6. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ väli. Tällöin $m^*(I) = g(I)$.*

Todistus. (1a) Olkoon väli I suljettu ja rajoitettu eli $I_k = [a_k, b_k]$, missä $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Selvästi jokaiselle $I_k^{\varepsilon} =]a_k - \varepsilon, b_k + \varepsilon[$, missä $k = 1, 2, \ldots, n$, pätee $I_k^{\varepsilon} \supset I_k$, joten $I \subset I^{\varepsilon}$, missä $I^{\varepsilon} = I_1^{\varepsilon} \times I_2^{\varepsilon} \times \ldots \times I_n^{\varepsilon}$. Tästä seuraa, että

$$m^*(I) \leq g(I^{\varepsilon}) = \prod_{k=1}^{\infty}(b_i - a_i + 2\varepsilon).$$

Kun $\varepsilon \to 0$, niin ylläolevan yhtälön oikea puoli lähestyy arvoa $\prod_{k=1}^{\infty}(b_i - a_i) = g(I)$, joten $m^*(I) \leq g(I)$.

Olkoon sitten $I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, missä I_j on avoin väli avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Koska väli I on suljettu ja rajoitettu, on Heine-Borelin lauseen nojalla[5] olemassa äärellinen määrä avoimia välejä I_j siten, että $I \subset \bigcup_{j=1}^{m} I_j$.

Apulauseen 9.5 mukaan yhdisteen $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ geometrinen mitta on $\sum_{k=1}^{n} g(I_k)$, kun välit $I_k \subset \mathbb{R}^n$ ovat melkein pistevieraita. Tässä välit I_j eivät kuitenkaan välttämättä ole melkein pistevieraita, vaan jotkut välit voivat mennä ”päällekkäin”. Mahdolliset päällekkäisyydet kuitenkin saavat aikaan vain sen, että yhtäsuuruuden sijaan pätee:

$$g(I) \leq \sum_{j=1}^{m} g(I_j).$$

[5]Heinen-Borelin lauseen mukaan jokaisella suljetun ja rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoimella peitteellä on olemassa äärellinen osapeite.

Selvästi pätee myös

$$\sum_{j=1}^{m} g(I_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} g(I_j),$$

ja nyt kun otetaan infimum yli kaikkien tällaisten välikokoelmien, saadaan

$$g(I) \leq \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} g(I_j) \mid I_j \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin väli }, I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\} = m^*(I),$$

joten väite on todistettu suljetuille ja rajoitetuille väleille.

(1b) Oletetaan sitten, että väli $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ on suljettu, mutta ei rajoitettu. Tällöin ainakin yksi komponenttiväli on rajoittamaton. Toisin sanottuna ehdosta $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I$ seuraa, että ainakin yhdelle $k = 1, 2, \ldots, n$ pätee $x_k + m \in I_k$ tai $x_k - m \in I_k$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että ainoastaan ensimmäinen komponenttiväli on rajoittamaton ($k = 1$). Muut tilanteet saadaan vastaavanlaisella päättelyllä.

Oletetaan siis, että kun $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I$, niin $x_1 + m \in I_1$ tai $x_1 - m \in I_1$ kaikille $m \in \mathbb{N}$. Nyt Lebesguen ulkomitan monotonisuuden nojalla

$$m^*(I) = m^*(I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n) \geq m^*([x_1, x_1 + m] \times I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_n)$$

tai

$$m^*(I) \geq m^*([x_1 - m, x_1] \times I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_n).$$

Välien $[x_1, x_1 + m] \times I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_n$ ja $[x_1 - m, x_1] \times I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_n$ jokainen komponenttiväli on rajoitettu, joten aiemmin todistetun nojalla

$$\begin{aligned} m^*([x_1, x_1 + m] \times I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_n) &= g([x_1, x_1 + m] \times I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_n) \\ &= (x_1 + m - x_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) \cdots (b_n - a_n) \\ &= m(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) \cdots (b_n - a_n) \end{aligned}$$

tai

$$m^*([x_1 - m, x_1] \times I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_n) = m(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) \cdots (b_n - a_n).$$

Koska tämä pätee kaikilla $m \in \mathbb{N}$, niin $m^*(I) \geq \infty$ eli $m^*(I) = \infty$. Määritelmän 9.1 mukaan rajoittamattoman välin geometrinen mitta on ääretön, joten $m^*(I) = g(I)$ myös rajoittamattomille suljetuille väleille.

(2) Olkoon väli I avoin eli $I_k =]a_k, b_k[$, missä $a_k, b_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Lebesguen ulkomitan määritelmästä 9.3 seuraa, että $m^*(I) \leq g(I)$, sillä $m^*(I)$ on infimum summasta $\sum_{k=1}^{\infty} g(I_k)$, missä välit I_k ovat avoimia ja $I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.

Olkoon $a_i < \hat{a}_i < \hat{b}_i < b_i$ ja $\hat{I}$ suljettu joukko, joka muodostuu suljetuista väleistä $\hat{I}_k = [\hat{a}_k, \hat{b}_k]$. Monotonisuuden (lause 9.4(1)) ja suljetuille väleille kohdassa (1) todistetun perusteella

$$\begin{aligned} m^*(I) \geq m^*(\hat{I}) &= (\hat{b}_1 - \hat{a}_1)(\hat{b}_2 - \hat{a}_2) \cdots (\hat{b}_n - \hat{a}_n) \\ &\to (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = g(I), \end{aligned}$$

kun $\hat{b}_j \to b_j$ ja $\hat{a}_j \to a_j$. Väite siis pätee avoimille väleille.

(3) Lause voidaan todistaa myös mielivaltaiselle välille $I \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin $\mathrm{Int}I \subset I \subset \bar{I}$, missä $\mathrm{Int}I$ on joukon I sisäpisteiden joukko ja $\bar{I}$ on joukon I sulkeuma.[6] Nyt geometrisen mitan määritelmän 9.1, Lebesguen ulkomitan monotonisuuden ja kohtien (1) ja (2) perusteella

$$g(I) = g(\mathrm{Int}I) = m^*(\mathrm{Int}I) \leq m^*(I) \leq m^*(\bar{I}) = g(\bar{I}) = g(I).$$

Näin ollen mielivaltaiselle välille pätee $g(I) = m^*(I)$. □

Edellisestä lauseesta seuraa, että jokaiselle yhdestä pisteestä $x \in \mathbb{R}^n$ koostuvalle joukolle $m^*(\{x\}) = 0$. Lebesguen ulkomitan subadditiivisuudesta seuraa edelleen, että numeroituvalle joukolle $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ pätee $m^*(A) = 0$. Jokainen numeroituva joukko on siis Lebesguen ulkomitan suhteen nollamittainen. Seuraavat lauseet osoittavat, että Lebesguen ulkomitta todellakin säilyy sekä siirroissa että kierroissa.

Lause 9.7 (Siirtoinvarianssi). *Olkoon $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ siirto, jolloin jollakin $a \in \mathbb{R}^n$ on voimassa $S(x) = x + a$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $m^*(S(A)) = m^*(A)$ kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$.*

Todistus. Avoimen välin $I_k \subset \mathbb{R}^n$ kuvajoukko $S(I_k)$ on avoin väli ja sille pätee $g(S(I_k)) = g(I_k)$.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, missä välit $I_k \subset \mathbb{R}^n$ ovat avoimia. Tällöin $S(A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} S(I_k)$ ja

$$m^*(S(A)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} g(S(I_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(I_k) \leq m^*(A).$$

Myös käänteiskuvaus S^{-1} on siirto, jolle $S^{-1}(x) = x - a$, joten edellisen päättelyn avulla saadaan

$$m^*(A) = m^*(S^{-1}(S(A))) \leq m^*(S(A)).$$

Näin ollen $m^*(S(A)) = m^*(A)$. □

Lause 9.8 (Kiertoinvarianssi). *Olkoon $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kierto, jolloin $K(x_0) = x_0$ jollekin x_0 ja $|K(x) - K(y)| = |x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $m^*(K(A)) = m^*(A)$ kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$.*

Todistus. Sivuutetaan. □

Nyt on siis saatu konstruoitua Lebesguen ulkomitta, joka toteuttaa muut mitalle asetetut toiveet 9.2 paitsi additiivisuuden. Miten additiivisuus saataisiin voimaan?

Vitali-joukot osoittivat, että avaruudesta $\mathbb{R}$ löytyy osajoukko, jolle ei voida määrittää pituutta yksikäsitteisesti. Banachin-Tarskin paradoksi puolestaan osoitti, että siirto- ja kiertoinvarianttius ei toteudu kaikille joukoille: jos Banachin-Tarskin paradoksin yksikköpallon $B \in \mathbb{R}^n$ kaikille viidelle osajoukolle A_k olisi olemassa tilavuusmitta, osajoukkojen yhdisteen $\bigcup_{k=1}^{5} A_k$ tilavuus olisi v ja siirrettyjen ja kierrettyjen osajoukkojen yhdisteen tilavuus $2v$, jolloin mitan yksikäsitteisyys ei toteudu.

Vitali-joukkojen ja Banachin-Tarskin paradoksin avulla nähdään, että kaikille joukoille ei siis voida määrittää yksikäsitteisesti sellaista mittaa, joka toteuttaisi kaikki

[6] Välin I sisäpisteiden joukko $\mathrm{Int}I$ on suurin avoin joukko, joka sisältyy joukkoon I ja sulkeuma $\bar{I}$ on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon I. Erityisesti $\mathrm{Int}I$ on avoin väli ja $\bar{I}$ suljettu väli.

halutut toiveet. Niinpä Lebesguen ulkomitalle ei voida saada additiivisuutta voimaan. Jostain mitalle toivotusta ominaisuudesta on siis luovuttava. Luonnollisinta on luopua siitä toiveesta, että mitta voitaisiin määrittää kaikille joukoille.

9.3. Lebesguen mitta

Kaikki mitalle aiemmin asetetut toiveet eivät siis voi täyttyä yhtä aikaa. Halutaan kuitenkin määritellä niin sanottu tavallinen ja luonnollinen, geometrista havaintoa vastaava mitta, jolle additiivisuus on voimassa. Nimetään se Lebesguen mitaksi ja merkitään sitä kirjaimella m.

Kuten aiemmin on todettu, Lebesguen mittaa konstruoitaessa on luovuttava siitä toiveesta, että jokaisella joukolla olisi mitta. Toisin sanottuna kaikkia joukkoja ei voida mitata tällä Lebesgue-mitalla eli ne eivät ole Lebesgue-mitallisia. Luonnollista on kuitenkin vaatia, että jos joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen, myös sen komplementti A^C on Lebesgue-mitallinen. Vastaavasti jos joukot A ja B ovat Lebesgue-mitallisia, tulisi myös joukkojen $A \setminus B$ ja $B \setminus A$ olla Lebesgue-mitallisia ja jos joukot A_k, joita on numeroituva tai numeroituvasti ääretön määrä, ovat Lebesgue-mitallisia, myös niiden yhdisteen ja leikkauksen tulisi olla Lebesgue-mitallisia.

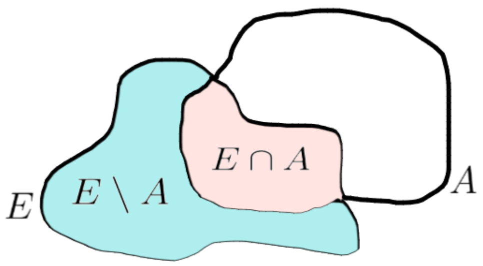
Toiveet Lebesgue-mitallisille joukoille 9.9.
Jos joukot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja $A_k \subset \mathbb{R}^n$, missä $k = 1, 2, \dots$, ovat Lebesgue-mitallisia, niin tällöin myös

(1) A^C on Lebesgue-mitallinen,
(2) $A \setminus B$ ja $B \setminus A$ ovat Lebesgue-mitallisia,
(3) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ on Lebesgue-mitallinen,
(4) $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on Lebesgue-mitallinen ja
(5) $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$, mikäli joukot $A_k \subset \mathbb{R}^n$ ovat lisäksi pistevieraita (additiivisuus).

Mitkä joukot sitten voisivat toteuttaa nämä toiveet? Tarkastellaan aluksi Carathéodoryn ehdon täyttäviä joukkoja.

Määritelmä 9.10 (Carathéodoryn ehto). Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ toteuttaa Carathéodoryn ehdon, jos jokaiselle avaruuden $\mathbb{R}^n$ mielivaltaiselle joukolle E pätee:

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A).$$



Kuva 9.5. Carathéodoryn ehto toteutuu joukolle A, jos kaikille joukoille E pätee $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$.

Carathéodoryn ehdon toteutumista tutkittaessa riittää selvittää päteekö $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$ kaikille $E \subset \mathbb{R}^n$, sillä aiemmin Lebesguen ulkomitalle todistetun subadditiivisuuden nojalla $m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$ pätee kaikille $E \subset \mathbb{R}^n$.

Selvästi joukot $E \cap A$ ja $E \setminus A$ ovat pistevieraita kaikille joukoille E (kuva 9.5). Carathéodoryn ehto on siis eräänlainen äärellinen additiivisuusehto Lebesguen ulkomitalle. Voisikohan olla mahdollista, että Carathéodoryn ehdon täyttävät joukot täyttäisivät Lebesgue-mitallisille joukoille asetetut toiveet?

Aletaan selvittää, ovatko Carathéodoryn ehdon täyttävät joukot todella sellaisia kuin niiden haluttaisiin olevan. Sitä varten todistetaan ensin apulause.

Apulause 9.11. *Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ toteuttaa Carathéodoryn ehdon, jos ja vain jos*

$$m^*(S \cup T) = m^*(S) + m^*(T)$$

kaikilla $S \subset A$ ja $T \subset A^C$.

Todistus. Oletetaan ensin, että A toteuttaa Carathéodoryn ehdon. Tällöin jokainen joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ voidaan jakaa osajoukkoihin $S \subset A$ ja $T \subset A^C$ siten, että $E = S \cup T$. Nyt oletuksen nojalla

$$m^*(E) = m^*(S \cup T) = m^*((S \cup T) \cap A) + m^*((S \cup T) \setminus A).$$

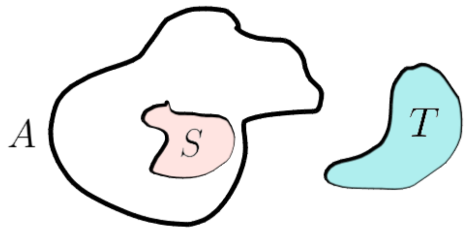
Koska $A \cap (S \cup T) = S \cap A = S$ ja $(S \cup T) \setminus A = T \setminus A = T$, niin saadaan

$$m^*(E) = m^*(S) + m^*(T).$$

Oletetaan sitten, että $m^*(S \cup T) = m^*(S) + m^*(T)$ pätee kaikilla $S \subset A$ ja $T \subset A^C$. Oletuksen nojalla kaikille E pätee

$$m^*(E) = m^*((E \cap A) \cup (E \setminus A)) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A),$$

sillä $E \cap A \subset A$ ja $E \setminus A \subset A^C$. $\square$



Kuva 9.6. Joukot S ja T valitaan siten, että $S \subset A$ ja $T \subset A^C$, kun Carathéodoryn ehdon toteutumista tarkastellaan apulauseen 9.11 avulla.

Toiveet Lebesgue-mitallisille joukoille 9.9(1) ja 9.9(2):
Huomataan, että toive 9.9(1) on erikoistapaus toiveesta 9.9(2), missä $B = \mathbb{R}^n$, sillä tällöin $B \setminus A = A^C$. Oletetaan nyt, että joukot A ja B toteuttavat Carathéodoryn ehdon ja selvitetään apulauseen 9.11 avulla, toteuttaako joukko $A \setminus B$ Carathéodoryn ehdon.

Olkoon $S \subset A \setminus B$ ja $T \subset (A \setminus B)^C$. Oletuksen mukaan joukko B toteuttaa Carathéodoryn ehdon, joten kaikille avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukoille, erityisesti joukolle T, pätee $m^*(T) = m^*(T \cap B) + m^*(T \setminus B)$. Saadaan siis

$$m^*(S) + m^*(T) = m^*(S) + m^*(T \cap B) + m^*(T \setminus B).$$

Oletuksen mukaan myös joukko A toteuttaa Carathéodoryn ehdon. Koska $S \subset A \setminus B \subset A$ ja $T \setminus B \subset (A \cup B)^C \subset A^C$, niin voidaan hyödyntää apulausetta 9.11:

$$m^*(S) + m^*(T \cap B) + m^*(T \setminus B) = m^*(T \cap B) + m^*(S \cup (T \setminus B)).$$

Nyt, koska joukko B toteuttaa Carathéodoryn ehdon ja $T \cap B \subset B$ ja $S \cup (T \setminus B) \subset B^C$, apulauseen 9.11 avulla saadaan

$$\begin{aligned} m^*(T \cap B) + m^*(S \cup (T \setminus B)) &= m^*((T \cap B) \cup (S \cup (T \setminus B))) \\ &= m^*(S \cup (T \cap B) \cup (T \setminus B)) \\ &= m^*(S \cup T), \end{aligned}$$

sillä $T = (T \cap B) \cup (T \setminus B)$.

Näin ollaan siis saatu $m^*(S) + m^*(T) = m^*(S \cup T)$ eli joukko $A \setminus B$ toteuttaa Carathéodoryn ehdon.

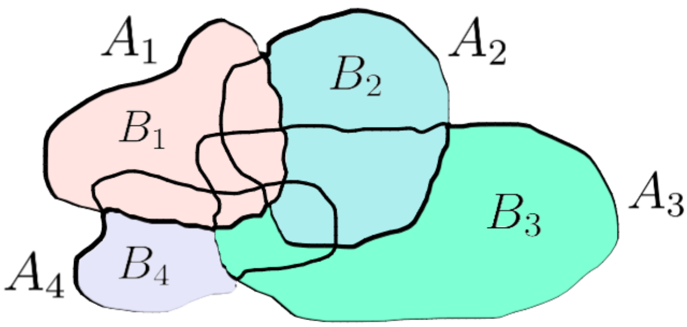
Toiveet Lebesgue-mitallisille joukoille 9.9(3):

Oletetaan, että joukot A_k toteuttavat Carathéodoryn ehdon ja selvitetään, toteuttaako myös näiden joukkojen yhdiste $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ Carathéodoryn ehdon.

Olkoot $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, $B_n = A_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)$, kun $k = 2, 3, \ldots$, jolloin joukot B_k ovat pareittain pistevieraita ja $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. Merkitään lisäksi $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Merkitään $S_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. Todistetaan aluksi induktion avulla, että S_n toteuttaa Carathéodoryn ehdon kaikilla n ja lisäksi kaikille $E \subset \mathbb{R}^n$ pätee

$$\sum_{k=1}^{n} m^*(E \cap B_k) + m^*(E \setminus S_n) \leq m^*(E). \tag{9.1}$$



Kuva 9.7. Joukot $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ ja $B_4 = A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

Kun $n = 1$, $S_1 = B_1 = A_1$ toteuttaa Carathéodoryn ehdon ja lisäksi pätee

$$\begin{aligned} m^*(E \cap B_1) + m^*(E \setminus S_1) &= m^*(E \cap A_1) + m^*(E \setminus A_1) \\ &= m^*(E) \leq m^*(E) \end{aligned}$$

kaikilla $E \subset \mathbb{R}^n$.

Induktio-oletuksen mukaan S_n toteuttaa Carathéodoryn ehdon ja epäyhtälön (9.1). Oletuksen mukaan myös A_{n+1} toteuttaa Carathéodoryn ehdon, joten aiemmin todistetun nojalla myös $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus S_n$ toteuttaa sen. Määritelmästä 9.10 saadaan, että kaikille $E \subset \mathbb{R}^n$ pätee

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(E \cap B_{n+1}) + m^*(E \setminus B_{n+1}) \\ &= m^*(E \cap B_{n+1}) + m^*([(E \setminus B_{n+1}) \cap S_n] \cup [(E \setminus B_{n+1}) \setminus S_n]). \end{aligned}$$

Koska $(E \setminus B_{n+1}) \cap S_n \subset S_n$ ja $(E \setminus B_{n+1}) \setminus S_n \subset S_n^C$ ja induktio-oletuksen mukaan S_n toteuttaa Carathéodoryn ehdon, niin voidaan hyödyntää apulausetta 9.11 ja saadaan

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(E \cap B_{n+1}) + m^*((E \setminus B_{n+1}) \cap S_n) + m^*((E \setminus B_{n+1}) \setminus S_n) \\ &= m^*(E \cap B_{n+1}) + m^*(E \cap B_{n+1}^C \cap S_n) + m^*(E \cap B_{n+1}^C \cap S_n^C) \\ &= m^*(E \cap B_{n+1}) + m^*(E \cap S_n) + m^*(E \cap S_{n+1}^C), \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $S_n \subset B_{n+1}^C$ ja $B_{n+1}^C \cap S_n^C = S_{n+1}^C$. Tästä saadaan Lebesguen ulkomitan subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} &m^*(E \cap B_{n+1}) + m^*(E \cap S_n) + m^*(E \cap S_{n+1}^C) \\ &\quad \geq m^*([E \cap B_{n+1}] \cup [E \cap S_n]) + m^*(E \cap S_{n+1}^C) \\ &\quad = m^*(E \cap S_{n+1}) + m^*(E \cap S_{n+1}^C) \\ &\quad = m^*(E \cap S_{n+1}) + m^*(E \setminus S_{n+1}), \end{aligned}$$

joten joukko S_{n+1} toteuttaa Carathéodoryn ehdon.

Induktio-oletuksen mukaan epäyhtälö (9.1) toteutuu kaikille avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukoille, joten sovelletaan sitä joukkoon $E \cap S_{n+1}$:

$$\begin{aligned} &m^*(E \cap S_{n+1}) + m^*(E \setminus S_{n+1}) \\ &\quad \geq \sum_{k=1}^{n} m^*([E \cap S_{n+1}] \cap B_k) + m^*([E \cap S_{n+1}] \setminus S_n) + m^*(E \setminus S_{n+1}) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{n} m^*(E \cap B_k) + m^*(E \cap B_{n+1}) + m^*(E \setminus S_{n+1}) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{n+1} m^*(E \cap B_k) + m^*(E \setminus S_{n+1}) \end{aligned}$$

Toiseksi viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $S_{n+1} \cap B_k = (\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j) \cap B_k = B_k$ ja $[E \cap S_{n+1}] \setminus S_n = E \cap S_{n+1} \cap S_n^C = E \cap B_{n+1}$.

Näin on siis saatu, että $m^*(E) \geq \sum_{k=1}^{n+1} m^*(E \cap B_k) + m^*(E \setminus S_{n+1})$ eli epäyhtälö (9.1) toteutuu kaikilla n.

Nyt saadaan epäyhtälöstä (9.1)

$$m^*(E) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(E \cap B_k) + m^*(E \setminus S_n) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(E \cap B_k) + m^*(E \setminus A),$$

sillä $S_n = \bigcup_{k=1}^n B_k \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_k = A$ eli $E \setminus A \subset E \setminus S_n$. Koska epäyhtälö (9.1) pätee kaikilla n, niin lähestyttäessä ääretöntä saadaan Lebesguen ulkomitan subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E \cap B_k) + m^*(E \setminus A) \\ &\geq m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E \cap B_k)\right) + m^*(E \setminus A) \\ &= m^*(E \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)) + m^*(E \setminus A) \\ &= m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Näin ollen joukkojen A_k yhdiste A toteuttaa Carathéodoryn ehdon.

Toiveet Lebesgue-mitallisille joukoille 9.9(4):

Oletetaan, että joukot A_k toteuttavat Carathéodoryn ehdon ja selvitetään, toteuttaako myös näiden joukkojen leikkaus $\bigcap_{k=1}^\infty A_k$ Carathéodoryn ehdon.

Joukko $\bigcap_{k=1}^\infty A_k = (\bigcup_{k=1}^\infty A_k^C)^C$ De Morganin kaavojen nojalla. Aiemmin on todistettu, että jos joukot A_k toteuttavat Carathéodoryn ehdon, myös niiden komplementit toteuttavat sen (toive 9.9(1)). Lisäksi on todistettu, että Carathéodoryn ehdon täyttävien joukkojen yhdiste täyttää Carathéodoryn ehdon (toive 9.9(3)). Näin ollen myös Carathéodoryn ehdon täyttävien joukkojen leikkaus toteuttaa Carathéodoryn ehdon.

Toiveet Lebesgue-mitallisille joukoille 9.9(5):

Oletetaan, että joukot A_k ovat pistevieraita ja että ne toteuttavat Carathéodoryn ehdon. Selvitetään, onko Lebesguen ulkomitta m^* joukoille A_k additiivinen eli päteekö $m^*(\bigcup_{k=1}^\infty A_k) = \sum_{k=1}^\infty m^*(A_k)$.

Koska epäyhtälö (9.2) pätee mielivaltaiselle joukolle E, valitaan nyt $E = A$ ja saadaan

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap B_k) + m^*(A \setminus A).$$

Tässä $A \cap B_k = B_k$, koska $B_k \subset \cup_{k=1}^\infty B_k = A$ ja $A \setminus A = \emptyset$. Näin ollen saadaan

$$m^*(\cup_{k=1}^\infty B_k) = m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(B_k).$$

Carathéodoryn ehdon täyttävät joukot todella siis toteuttavat kaikki toiveet Lebesgue-mitallisille joukoille 9.9, joten vihdoin voidaan määritellä Lebesgue-mitalliset joukot ja Lebesguen mitta seuraavasti:

Määritelmä 9.12. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen, jos se toteuttaa Carathéodoryn ehdon eli jos jokaiselle avaruuden $\mathbb{R}^n$ mielivaltaiselle joukolle E pätee $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$.

Lebesgue-mitallisten joukkojen luokkaa merkitään $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Lebesguen mitta on kuvaus $m : \mathcal{M} \to [0, \infty[, m(A) = m^*(A)$.

Nyt voidaan määritelmän 9.12 ja edellä todistetun perusteella todeta, että Lebesgue-mitalle pätee seuraavat ominaisuudet:

Lause 9.13.
Jos joukot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja $A_k \subset \mathbb{R}^n$, missä $k = 1, 2, \ldots$, ovat Lebesgue-mitallisia, niin tällöin myös

(1) *niiden erotus $A \setminus B$ on Lebesgue-mitallinen ja erityisesti komplementti A^C on Lebesgue-mitallinen,*
(2) *yhdiste $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ on Lebesgue-mitallinen,*
(3) *leikkaus $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on Lebesgue-mitallinen ja*
(4) *joukkojen $A_k \subset \mathbb{R}^n$, missä $k = 1, 2, \ldots$, ollessa lisäksi pistevieraita, pätee*

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k).$$

Mitta, joka ollaan nyt saatu konstruoitua, toteuttaa mitalle asetetut toiveet Carathéodoryn ehdon täyttäville joukoille. Herää kuitenkin kysymys siitä, kuinka paljon tällaisia joukkoja todella on ja ovatko esimerkiksi tavanomaiset välit tällaisia. Onko saatu tulos siis oikeasti hyödyllinen ja käyttökelpoinen?

9.4. Lebesgue-mitalliset joukot

Lebesgue-mitallisia joukkoja on itse asiassa todella paljon, esimerkiksi kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ välit ovat Lebesgue-mitallisia. Tämän todistamiseen tarvitaan seuraavaa aputulosta.

Apulause 9.14. *Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen, jos ja vain jos jokaiselle avoimelle välille $I \subset \mathbb{R}^n$ pätee*

$$m^*(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \setminus A).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että joukko A on Lebesgue-mitallinen. Lebesgue-mitallisuuden määritelmästä 9.12 seuraa suoraan, että yhtälö toteutuu.

Oletetaan sitten, että $m^*(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \setminus A)$ jokaiselle avoimelle välille $I \subset \mathbb{R}^n$ ja halutaan osoittaa, että $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$ mielivaltaiselle joukolle $E \subset \mathbb{R}^n$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt on Lebesguen ulkomitan määritelmän mukaan olemassa avoimet välit $I_k \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} g(I_k) \le m^*(E) + \varepsilon$.

Lebesguen ulkomitan subadditiivisuuden avulla saadaan

$$m^*(E) = m^*((E \cap A) \cup (E \setminus A)) \le m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A).$$

Koska $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, niin $(E \cap A) \subset ((\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \cap A)$ ja $(E \setminus A) \subset ((\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \setminus A)$, jolloin Lebesguen ulkomitan monotonisuuden nojalla

$$\begin{aligned} m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) &\leq m^*((\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \cap A) + m^*((\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \setminus A) \\ &= m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \cap A)) + m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \setminus A)). \end{aligned}$$

Subadditiivisuuden, oletuksen ja lauseen 9.6 nojalla

$$\begin{aligned} m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \cap A)) + m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \setminus A)) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (m^*(I_k \cap A) + m^*(I_k \setminus A)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} g(I_k) \\ &\leq m^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ollaan siis saatu $m^*(E) \leq m^*(E) + \varepsilon$. Koska tämä pätee kaikille $\varepsilon > 0$, edellä olevat epäyhtälöt ovatkin yhtäsuuruuksia. Erityisesti $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$ eli väite pätee. □

Nyt voidaankin todistaa varsinainen tulos.

Lause 9.15. *Jokainen väli $I \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen.*

Todistus. Apulauseen 9.14 mukaan riittää osoittaa, että jokaiselle avoimelle välille $J \subset \mathbb{R}^n$ pätee

$$m^*(J) = m^*(J \cap I) + m^*(J \setminus I).$$

Väli $J = (J \cap I) \cup (J \setminus I)$, missä $J \cap I$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ väli. Lisäksi voidaan valita sisuksiltaan pistevieraat välit $J_k \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $J \setminus I = \bigcup_{k=1}^{n} J_k$. Lebesguen ulkomitan subadditiivisuuden, apulauseen 9.5 ja lauseen 9.6 nojalla

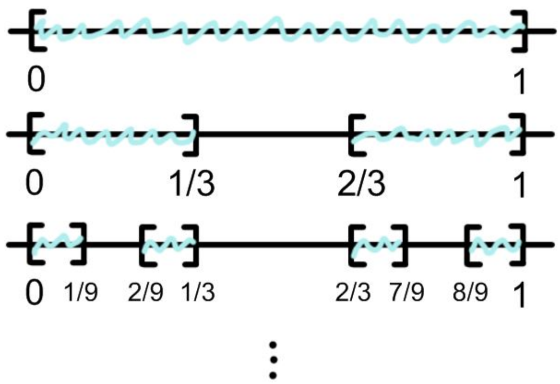
$$\begin{aligned} m^*(J) &\leq m^*(J \cap I) + m^*(J \setminus I) \\ &= m^*(J \cap I) + m^*(\bigcup_{k=1}^{n} J_k) \\ &\leq m^*(J \cap I) + \sum_{k=1}^{n} m^*(J_k) \\ &= g(J \cap I) + \sum_{k=1}^{n} g(J_k) \\ &= g(J) \\ &= m^*(J). \end{aligned}$$

Väite siis pätee. □

Tästä lauseesta seuraa, että myös jokainen piste $x \in \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen ja siten myös jokainen numeroituva joukko $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Ne ovat Lebesguen mitan suhteen nollamittaisia, sillä aiemmin ollaan todettu, että niiden Lebesguen ulkomitta on 0.

Numeroituvien joukkojen lisäksi myös ylinumeroituva joukko voi olla nollamittainen Lebesguen mitan suhteen. Tällainen on esimerkiksi Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko.

Esimerkki 9.16. Olkoon $I = [0,1]$ ja merkitään $I_1^0 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Nyt joukko $I \setminus I_1^0 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Jaetaan joukon $I \setminus I_1^0$ komponentit kolmeen yhtä suureen osaan ja merkitään keskimmäisiä avoimia välejä niistä I_1^1 ja I_2^1. Jaetaan sitten joukon $I \setminus (I_1^0 \cup I_1^1 \cup I_2^1)$ komponentit kolmeen yhtä suureen osaan ja merkitään keskimmäisiä avoimia välejä niistä I_1^2, I_2^2, I_3^2 ja I_4^2. Kun jatketaan näin, saadaan jono avoimia välejä $(I_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$, missä $n = 1, 2, 3, \dots, 2^k$. Joukkoa $I \setminus \bigcup_{n.k} I_n^k$ sanotaan Cantorin $\frac{1}{3}$-joukoksi. Se on ylinumeroituva ja nollamittainen.[7]



Kuva 9.8. Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon konstruointi askel askeleelta.

Tarkastellaan seuraavaksi avoimia joukkoja.

Jokainen avoin joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ voidaan esittää muodossa $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, kun yhdisteeseen kuuluu kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimet välit $I_k \subset A$, joille pätee, että jokaisen komponenttivälin päätepiste on rationaaliluku.

Yhdiste on numeroituva, sillä välien I_k komponenttivälien päätepisteet ovat rationaalilukuja. Koska $I_k \subset A$, niin $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset A$. Toisaalta, koska A on avoin, jokaiselle pisteelle $x \in A$ on olemassa avoin väli $J \subset A$ siten, että $x \in J \subset A$. On siis oltava olemassa yhdisteen väli I_n siten, että $x \in I_n \subset J$. Näin ollen $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.

Jokainen avoin joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ voidaan siis esittää avointen välien $I_k \subset \mathbb{R}^n$ numeroituvana yhdisteenä. Koska edellisen lauseen mukaan jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ väli on Lebesgue-mitallinen ja lauseen 9.13 mukaan Lebesgue-mitallisten joukkojen yhdiste on Lebesgue-mitallinen, olemme todistaneet seuraavan lauseen.

[7] Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon ylinumeroituvuus ja nollamittaisuus todistetaan teoksessa [**2**] sivulta 23 eteenpäin.

Lause 9.17. *Jokainen avoin joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen.*

Lauseen 9.13 mukaan jokaisen Lebesgue-mitallisen joukon komplementti on Lebesgue-mitallinen. Täten myös suljetut joukot avointen joukkojen komplementteina ovat Lebesgue-mitallisia. Edelleen avointen ja suljettujen joukkojen numeroituvat yhdisteet ja leikkaukset ovat lauseen 9.13 nojalla Lebesgue-mitallisia. Näin ollen olemme siis saaneet osoitettua, että kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ niin sanotusti tavalliset joukot (Borel-joukot) ovat Lebesgue-mitallisia. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-joukoiksi kutsutaan niitä joukkoja, jotka saadaan muodostettua avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimista väleistä numeroituvan monella joukko-operaatiolla.[8]

Seuraus 9.18. *Jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-joukko on Lebesgue-mitallinen.*

Edellinen lause ja sen seuraus ovat oleellisia, sillä niiden mukaan ”tavallisia” joukkoja eli avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-joukkoja voidaan mitata ”tavallisesti” eli ne ovat Lebesgue-mitallisia. Lebesgue-mitallisille joukoille pätevät seuraavat luonnolliset laskusäännöt:

Lause 9.19. *Lebesgue-mitallisille joukoille A_k, missä $k = 1, 2, \ldots$, pätee*

(1) *Jos $A_1 \subset A_2$ ja $m(A_1) < \infty$, niin*
$$m(A_2 \setminus A_1) = m(A_2) - m(A_1).$$
(2) *Jos $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, niin*
$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} m(A_k).$$
(3) *Jos $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ja $m(A_n) < \infty$ jollain n, niin*
$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} m(A_k).$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Borel-joukkojen lisäksi on toki olemassa muitakin Lebesgue-mitallisia joukkoja. Lisäksi on hyvä muistaa, että kaikki joukot eivät suinkaan ole Lebesgue-mitallisia.

Lause 9.20. *On olemassa joukko $A \subset \mathbb{R}$, joka ei ole Lebesgue-mitallinen.*

Todistus. Luvussa 8 kuvattujen Vitali-joukkojen $V \subset \mathbb{R}$ tapauksessa oletettiin, että $\mu(V_k) = \mu(V)$ eli että mitta on siirtoinvariantti. Tämän aiheuttamasta ristiriidasta voidaan päätellä, että Vitali-joukot eivät ole Lebesgue-mitallisia joukkoja, eivätkä näin myöskään Borel-joukkoja, sillä Lebesguen mitan siirtoinvarianttius ei toteudu. □

[8]Täsmällinen määritelmä Borel-joukoille annetaan myöhemmin (määritelmä 10.6).

LUKU 10

Yleistä mittateoriaa

Eräänä lamavuotena matemaatikko Lennart joutui työttömäksi, joten hän päätti lähteä Afrikkaan talonrakentajaksi. Paikallisten työkavereiden kanssa tuli kuitenkin hieman ongelmia:

- Minkä kokoinen tästä seinästä on siis tarkoitus tulla? Lennart kysyi työkaveriltaan Chikalta.

- Kaksi sataa, Chika vastasi.

- Siis, kaksi sataa mitä?

- Kaksi sataa.

- Mitä siis tarkoitat? Kaksi sataa jalkaa pitkä vai korkea? Vai että pinta-ala on kaksisataa neliöjalkaa?

- En ymmärrä mitä sinä puhut.

Myöhemmin Lennart ymmärsi Chikan tarkoittaneen, että seinä koostuisi kahdesta sadasta tiilestä. Lennart, joka oli tottunut käsittelemään pituusmittoja ja pinta-alamittoja, innostui ajatuksesta, että mitta voisi olla jotain muutakin, esimerkiksi afrikkalaisen käyttämä lukumäärämitta. Niin hän ryhtyi yleistämään kehittämäänsä Lebesguen mittaa. Luonnollisestikaan mitan ei enää tarvinnut vastata geometrista havaintoa, vaan additiivisuus oli ainoa ominaisuus, jonka Lennart mitalle halusi.[1]

Tähän asti on tarkasteltu Lebesguen mittaa, joka on konstruoitu geometrisen mitan ja Lebesguen ulkomitan avulla. Samalla on huomattu, että kaikki joukot eivät ole Lebesgue-mitallisia, vaan ainoastaan ne joukot, jotka täyttävät Carathéodoryn ehdon. Lebesguen mitta on mitta, joka toteuttaa mitalle asetetut toiveet 9.2(1) ja (2). Mittateoriassa käsitellään muunkinlaisia mittoja, jolloin luovutaan toiveesta 9.2(1). Tässä luvussa yleistetään edellisen luvun pääkohdat, mutta ei kuitenkaan syvennytä enempää mittateoriaan.

10.1. σ-algebra

Lebesgue-mitalliset joukot määriteltiin sen perusteella, että niille saatiin toteutumaan tietyt toiveet (9.9). Vastaavat luonnolliset toiveet halutaan saada toteutumaan yleisestikin mitallisille joukoille. Myöhemmin tullaan huomaamaan, että mitalliset joukot muodostavat kokoelman, joka toteuttaa tietyt ehdot. Tällaista kokoelmaa kutsutaan σ-algebraksi.

MÄÄRITELMÄ 10.1. Kokoelma $\mathcal{F}$ perusjoukon Ω osajoukkoja on σ-algebra, jos
(σ1) $\Omega \in \mathcal{F}$,
(σ2) $A^C \in \mathcal{F}$, kun $A \in \mathcal{F}$ ja
(σ3) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$, kun $A_k \in \mathcal{F}$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$.

[1]Ei perustu tositapahtumiin.

Määritelmässä ei mainita kaikkia vastaavia toiveita kuin aiemmin, esimerkiksi joukkojen $A_k \in \mathcal{F}$, missä $k = 1, 2, \dots$, leikkauksesta ei puhuta mitään. Ehdot ovat kuitenkin riittävät, sillä seuraavassa lauseessa todistetaan, että σ-algebran joukoille toteutuvat myös muut haluamamme ominaisuudet.

LAUSE 10.2. *Olkoon $\mathcal{F}$ σ-algebra. Tällöin*

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
(2) *jos* A, $B \in \mathcal{F}$, *niin myös* $A \cup B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$ *ja* $A \setminus B \in \mathcal{F}$ *ja*
(3) *jos* $A_k \in \mathcal{F}$, *kun* $k = 1, 2, \dots$, *niin myös* $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

TODISTUS.

(1) Koska ehdon (σ1) mukaan perusjoukko $\Omega \in \mathcal{F}$ ja tyhjä joukko $\emptyset = \Omega^C$, niin ehdon (σ2) mukaan myös $\emptyset \in \mathcal{F}$.
(2) Valitaan $A_1 = A, A_2 = B$ ja $A_k = \emptyset$, kun $k \geq 3$. Tällöin $A \cup B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, missä jokainen $A_k \in \mathcal{F}$. Näin ollen ehdon (σ3) mukaan $A \cup B \in \mathcal{F}$.
   De Morganin laista $(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)^C = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^C$ saadaan $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$, joten ehtojen ($\sigma$2) ja ($\sigma$3) perusteella $A \cap B \in \mathcal{F}$.
   Joukkojen erotus $A \setminus B = A \cap B^C$ on ehdon (σ2) perusteella kahden kokoelmaan $\mathcal{F}$ kuuluvan joukon leikkaus, joten edellisen todistuksen perusteella $A \setminus B \in \mathcal{F}$.
(3) De Morganin laista $(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)^C = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^C$ seuraa, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)^C \right)^C = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^C \right)^C.$$

   Ehtojen (σ2) ja (σ3) mukaan tämä joukko kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}$. □

Yleisesti siis jos joukot A_k, missä $k = 1, 2, \dots$, kuuluvat kokoelmaan $\mathcal{F}$, joka on σ-algebra, tällöin kyseiseen σ-algebraan kuuluvat myös ne joukot, jotka saadaan joukoista A_k numeroituvan monella joukko-operaatiolla.

Millaisia joukkokokoelmia nämä σ-algebrat oikein ovat? Usein ne ovat niin suuria eli sisältävät niin monta joukkoa, että niistä on vaikea antaa esimerkkejä. Joudummekin tyytymään muutamaan hieman yksinkertaisempaan esimerkkiin.

ESIMERKKI 10.3.

(a) Kokoelma $\{\emptyset, \Omega\}$ on joukon Ω suppein σ-algebra.

(b) Perusjoukon Ω potenssijoukko $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$, joka siis sisältää kaikki perusjoukon Ω osajoukot, on joukon Ω laajin σ-algebra.

(c) Kun $B \subset \Omega$, kokoelma $\{\emptyset, B, B^C, \Omega\}$ on σ-algebra, mutta kokoelma $\{\emptyset, B, \Omega\}$ ei ole σ-algebra, ellei joukko B ole $\emptyset$ tai Ω.

(d) Kun $\Omega = \mathbb{N}$, niin kokoelma $\{\emptyset, \{1, 3, 5, \dots\}, \{2, 4, 6, \dots\}, \Omega\}$ on σ-algebra.

LAUSE 10.4. *Mielivaltaisen monen σ-algebran $\mathcal{F}_k$ leikkaus $\mathcal{F} = \bigcap_{k \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_k$, missä $\mathcal{I}$ on indeksijoukko, on edelleen σ-algebra.*

TODISTUS. Leikkaus $\mathcal{F}$ on σ-algebra, jos ehdot (σ1)-(σ3) toteutuvat.
Koska $\emptyset \in \mathcal{F}_k$ kaikille $k \in \mathcal{I}$, niin $\emptyset \in \mathcal{F}$. Ehto ($\sigma$1) siis toteutuu.

Kun joukko $A \in \mathcal{F}$, joukko A kuuluu myös jokaiseen kokoelmaan $\mathcal{F}_k$. Koska jokainen $\mathcal{F}_k$ on σ-algebra, niin $A^C \in \mathcal{F}_k$ kaikille $k \in \mathcal{I}$. Näin ollen myös $A^C \in \mathcal{F}$, joten ehto (σ2) toteutuu.

Jos joukot $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, kyseiset joukot $A_1, A_2, \ldots$ kuuluvat myös jokaiseen kokoelmaan $\mathcal{F}_k$. Tällöin yhdiste $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}_k$ kaikilla $k \in \mathcal{I}$, joten $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ ja ehto (σ3) toteutuu. □

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimien joukkojen luokka ei ole σ-algebra, sillä yleensä avoimen joukon komplementti ei ole avoin joukko ja näin ehto (σ2) ei toteudu. Vastaavasti myöskään suljettujen joukkojen luokka ei ole σ-algebra. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimet joukot, joiden muodostamaa kokoelmaa merkitään kirjaimella $\mathcal{A}$, kuitenkin virittävät σ-algebran.

Pienin σ-algebra, joka sisältää kokoelman $\mathcal{A}$, on leikkaus kaikista σ-algebroista, jotka sisältävät kokoelman $\mathcal{A}$. Lauseessa 10.4 on todistettu, että mielivaltaisen monen σ-algebran leikkaus on σ-algebra, joten pienin kokoelman $\mathcal{A}$ sisältävä σ-algebra on todella σ-algebra. Tätä pienintä kokoelman $\mathcal{A}$ sisältävää σ-algebraa kutsutaan *kokoelman $\mathcal{A}$ virittämäksi σ-algebraksi.*

Esimerkki 10.5. Pienin joukon B sisältävä σ-algebra on kokoelma $\{\emptyset, B, B^C, \Omega\}$. Se on siis joukon B virittämä σ-algebra.

Määritelmä 10.6. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimien joukkojen virittämää σ-algebraa sanotaan Borelin σ-algebraksi avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja merkitään $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Joukkoa $A \in \mathcal{B}^n$ sanotaan Borel-joukoksi.

Myös avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettujen joukkojen kokoelma virittää Borelin σ-algebran. Tämä seuraa siitä, että avointen joukkojen virittämään σ-algebraan kuuluvat ehdon (σ2) mukaan avointen joukkojen komplementit eli suljetut joukot.

Ehdoista (σ1)-(σ3) seuraa, että Borelin σ-algebra sisältää kaikki ne joukot, jotka saadaan numeroituvan monella joukko-operaatiolla avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljetuista ja avoimista joukoista. Borel-joukot ovatkin tärkeitä juuri niiden yleisyyden vuoksi. Ne ovat Lebesgue-mitallisia ja niille voidaan todistaa paljon tärkeitä ominaisuuksia.[2]

10.2. Mitta

Lebesguen mittaa konstruoitaessa lähdettiin liikkeelle geometrisesta mitasta g, yleistä mittaa konstruoitaessa lähdetään usein liikkeelle yleisemmästä esimitasta τ. Erilaisista esimitoista saadaan konstruoitua erilaisia mittoja, joilla voidaan mitata muitakin kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja.

Esimitta τ on kuvaus $\tau : \mathcal{K} \to [0, \infty]$, jolle pätee $\tau(\emptyset) = 0$. Lähtöjoukko $\mathcal{K}$ on joukkokokoelma, joka sisältää tyhjän joukon $\emptyset$ ja joukot E_k, missä $k = 1, 2, \ldots$, siten, että $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Esimitasta saadaan konstruoitua ulkomitta μ^* joukolle $A \subset \Omega$ vastaavasti kuin geometrisesta mitasta konstruoitiin Lebesguen ulkomitta:

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_k) \mid E_k \in \mathcal{K}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\}.$$

[2]Luvussa 9 on esitetty joitain ominaisuuksia, mutta paljon muitakin on.

Yleisesti ulkomitta määritellään kuvauksena, joka kuvaa tyhjän joukon nollaksi ja joka on sekä monotoninen että subadditiivinen.

MÄÄRITELMÄ 10.7. Kuvaus $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ on ulkomitta joukossa Ω, kun seuraavat ehdot pätevät:

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(2) Jos $A \subset B \subset \Omega$, niin $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
(3) Numeroituvan monelle pistevieraalle joukolle $A_k \subset \Omega$, missä $k = 1, 2, \ldots$, pätee

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Lauseen 9.4 tapaan voidaan todistaa, että esimitasta τ konstruoitu ulkomitta μ^* todella toteuttaa ulkomitan määritelmän ehdot.

Lisäksi määritellään, että joukko $A \subset \Omega$ on mitallinen ulkomitan μ^* suhteen, jos Carathéodoryn ehto $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ toteutuu jokaiselle joukolle $E \subset \Omega$. Lause 9.13 saa myöskin vastineensa:

LAUSE 10.8. *Oletetaan, että joukot A, B ja A_k, missä $k = 1, 2, \ldots$, ovat μ^*-mitallisia. Tällöin*

(1) *erotus $A \setminus B$ ja komplementti A^C ovat μ^*-mitallisia,*
(2) *yhdiste $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ on μ^*-mitallinen,*
(3) *leikkaus $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on μ^*-mitallinen ja*
(4) *pätee*

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k),$$

mikäli joukot A_k ovat pistevieraita.

TODISTUS. Kuten lauseen 9.13 todistus. □

SEURAUS 10.9. *μ^*-mitallisten joukkojen kokoelma $\{A \mid A$ on μ^*-mitallinen$\}$ on σ-algebra.*

TODISTUS. Joukko Ω on μ^*-mitallinen eli $\Omega \in \{A \mid A$ on μ^*-mitallinen$\}$, sillä se toteuttaa Carathéodoryn ehdon. Näin ollen ehto $(\sigma 1)$ toteutuu.

Lauseen 10.8(1) mukaan jos joukko A on μ^*-mitallinen, myös sen komplementti A^C on μ^*-mitallinen eli ehto $(\sigma 2)$ toteutuu.

Lauseen 10.8(2) mukaan jos joukot A_k, missä $k = 1, 2, \ldots$, ovat μ^*-mitallisia, myös yhdiste $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ on μ^*-mitallinen eli ehto $(\sigma 3)$ toteutuu. □

Nyt mitta μ voidaan määritellä ulkomitan avulla - samaan tapaan kuin Lebesgue-mitta määriteltiin Lebesgue-mitallisten joukkojen kokoelman $\mathcal{M}$ avulla - eli kuvauksena $\mu : \mathcal{F}_{\mu^*} \to [0,\infty], \mu = \mu^*$, missä $\mathcal{F}_{\mu^*}$ on μ^*-mitallisten joukkojen kokoelma ja siten σ-algebra.

Määritelmä 10.10. Kuvaus $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ on mitta joukossa Ω, kun joukko $\mathcal{F}$ on σ-algebra joukossa Ω ja seuraavat ehdot pätevät:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$ ja
(2) numeroituvan monelle pistevieraalle joukolle $A_k \subset \mathcal{F}$, missä $k = 1, 2, \ldots$,

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Määritelmä 10.11. Olkoon Ω epätyhjä joukko ja kokoelma $\mathcal{F}$ σ-algebra joukossa Ω. Paria $(\Omega, \mathcal{F})$ kutsutaan mitalliseksi avaruudeksi. Jos μ on mitta joukossa Ω, kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ kutsutaan mitta-avaruudeksi.

Sanotaan, että mitta μ on äärellinen, jos $\mu(\Omega) < \infty$. Nollamittaisella joukolla tarkoitetaan joukkoa $A \in \mathcal{F}$, jolle $\mu(A) = 0$.

Mitan määritelmästä 10.10 saadaan mitta-avaruuksille muun muassa seuraavia tärkeitä ominaisuuksia. Lebesguen mitalle vastaavia ominaisuuksia on esitetty lauseissa 9.4, 9.13 ja 9.19(1).

Lause 10.12. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus ja joukot A, B ja $A_k \in \mathcal{F}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$. Tällöin*

(1) *jos $A \cap B = \emptyset$, niin $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (äärellinen additiivisuus),*
(2) *jos $A \subset B$, niin $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonisuus),*
(3) *jos $A \subset B$ ja $\mu(A) < \infty$, niin $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$,*
(4) *$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (vahva additiivisuus) ja*
(5) *$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ (subadditiivisuus).*

Todistus.

(1) Olkoon $A_1 = A, A_2 = B$ ja $A_k = \emptyset$, kun $k = 3, 4, \ldots$. Tällöin joukot A_k, missä $k = 1, 2, \ldots$, ovat pistevieraita ja ne kuuluvat joukkoon $\mathcal{F}$. Lisäksi $A \cup B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ja mitan additiivisuuden (määritelmä 10.10) nojalla

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) &= \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \\ &= \mu(A) + \mu(B) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots \\ &= \mu(A) + \mu(B).\end{aligned}$$

(2) Koska $A \subset B$ ja $A, B \in \mathcal{F}$, niin joukko $B = A \cup (B \setminus A)$ ja joukot A ja $B \setminus A$ kuuluvat kokoelmaan $\mathcal{F}$. Lisäksi A ja $B \setminus A$ ovat pistevieraita eli niiden leikkaus on tyhjä joukko, sillä $B \setminus A = B \cap A^C$. Määritelmän 10.10 mukaan

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A). \tag{10.1}$$

(3) Koska $\mu(A) < \infty$, niin yhtälöstä (10.1) saadaan $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A)$.
(4) Kaikille $A, B \in \mathcal{F}$ on

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)),$$

missä joukot $(A \setminus (A \cap B))$, $(A \cap B)$ ja $(B \setminus (A \cap B))$ ovat pistevieraita. Tämän lauseen kohdan (1) perusteella

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus (A \cap B)).$$

Kun lisätään tähän puolittain $\mu(A \cap B)$, saadaan

$$\begin{aligned} &\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

(5) Määritellään pistevieraat joukot $B_k \in \mathcal{F}$ siten, että $B_1 = A_1$ ja $B_k = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$, kun $k \geq 2$.

Tällöin kaikille k pätee $B_k \subset A_k$ ja $\bigcup_{k=2}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Näin ollen tämän lauseen kohdan (2) ja mitan additiivisuuden (määritelmä 10.10) nojalla

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

□

Esimerkki 10.13.

(a) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus ja olkoon $x \in \Omega$ jokin kiinteä alkio. Tällöin

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{kun } x \notin A, \end{cases}$$

on mitta ja sitä kutsutaan Diracin δ-mitaksi tai pisteeseen x keskittyneeksi Diracin mitaksi $\mu = \delta_x$.

(b) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Tällöin

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{kun } A = \emptyset, \\ \#A, & \text{kun } A \text{ on äärellinen joukko}, \\ \infty, & \text{kun } A \text{ on ääretön joukko}, \end{cases}$$

missä merkintä $\#A$ tarkoittaa joukon A alkioiden lukumäärää, on mitta ja sitä kutsutaan lukumäärämitaksi.

Tarkastellaan kokoelmaa $\mathcal{B}$, joka toteuttaa ehdot $(\sigma 1)$: $\Omega \in \mathcal{B}$ ja $(\sigma 2)$: $A^C \in \mathcal{B}$, kun $A \in \mathcal{B}$. Seuraavan lauseen mukaan, jos kokoelmassa $\mathcal{B}$ on additiivinen kuvaus μ, jolle $\mu(\emptyset) = 0$, voimme laajentaa kuvauksen mitaksi kokoelmaan, jolle myös ehto $(\sigma 3)$ pätee, eli kokoelman $\mathcal{B}$ virittämään σ-algebraan. Tietyllä lisäehdolla tämä laajennus on ainutlaatuinen.

Lause on erittäin oleellinen, sillä additiivinen kuvaus μ, jolle $\mu(\emptyset) = 0$, on helpompi määrittää kokoelmaan, joka toteuttaa ehdot $(\sigma 1)$ ja $(\sigma 2)$ kuin suoraan σ-algebraan. Kuvauksen μ avulla konstruoitu mitta voidaan lauseen mukaan määrittää kaikille joukoille, jotka saadaan kokoelman $\mathcal{B}$ joukoista numeroituvan monella joukko-operaatiolla, eli kaikille joukoille, joista yleensä ollaan kiinnostuneita.

LAUSE 10.14 (Carathéodoryn lause). *Olkoon $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ additiivinen kokoelmassa $\mathcal{B}$, jolle pätee ehdot (σ1), (σ2) ja $\mu(\emptyset) = 0$. Ulkomitan μ^*,*

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \mid A_k \in \mathcal{B}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\},$$

rajoittuma mitallisten joukkojen luokkaan on funktion μ laajennus mitaksi kokoelman $\mathcal{B}$ virittämään σ-algebraan.

Lisäksi, jos μ on äärellinen, niin laajennus on äärellinen ja jos $\mathcal{B}$ sisältää kasvavan jonon joukkoja $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, joille $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$ ja $\mu(A_k) < \infty$ kaikille $k = 1, 2, \ldots$, laajennus on yksikäsitteinen.

TODISTUS. Sivuutetaan. (Todistus löytyy teoksen [**10**] sivuilta 38-43.) □

10.3. Integraaliteoriaa

Reaalifunktioiden integroinnissa on pohjimmiltaan kyse pinta-alojen laskemisesta, joten voidaan helposti päätellä, että integraaleilla voisi olla jotain tekemistä mittojen kanssa.

Yleisesti käytetyn Riemannin integraalin ongelmana on sen rajaavuus: kaikki funktiot eivät ole Riemann-integroituvia. Lebesgue halusi ratkaista ongelman ja kehitti Lebesguen integraalin, jolla saadaan samat tulokset Riemann-integroituville funktioille kuin Riemannin integraalilla, mutta jota voidaan käyttää joillekin sellaisillekin funktioille, joille Riemannin integraalia ei voida määrittää. Riemannin integraalia laskettaessa jaetaan lähtöjoukko osaväleihin, kun taas Lebesguen integraalia laskettaessa jako tehdään arvojoukolle.

Ominaisuus, jota Riemann-integraalilla ei ole, on että välillä $[a, b]$ pisteittäin suppenevalle jonolle Riemann-integroituvia funktioita f_k pätee

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx.$$

Kyseinen ominaisuus olisi kuitenkin erittäin hyödyllinen ja käyttökelpoinen integraalilaskennassa. Lebesgue-integraali onkin kehitetty niin, että mikäli $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ tai mikäli on olemassa integroituva funktio g siten, että $|f_k| \le g$, tämä ominaisuus on voimassa.[3]

Mitta voidaan määritellä vain mitallisille joukoille, vastaavasti (Lebesguen) integraali voidaan määritellä vain (Lebesgue-)mitallisille funktioille.

MÄÄRITELMÄ 10.15.

(1) Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Funktio $f : A \to]-\infty, \infty[$ on Lebesgue-mitallinen, jos jokaisella $a \in \mathbb{R}$ alkukuva

$$f^{-1}(]a, \infty[) = \{x \in A \mid f(x) > a\}$$

on Lebesgue-mitallinen. Yhtäpitävästi voidaan vaatia, että joku alkukuvista $f^{-1}([a, \infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, a])$, $f^{-1}(]-\infty, a[)$ on Lebesgue-mitallinen.

[3] Funktion integroituvuus määritellään myöhemmin (määritelmä 10.16).

(2) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus ja $A \in \mathcal{F}$. Funktio $f : A \to]-\infty, \infty[$ on mitallinen, jos jokaisella $a \in \mathbb{R}$ alkukuva

$$f^{-1}(]a, \infty[) = \{x \in A \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}.$$

Yhtäpitävästi voidaan vaatia, että $f^{-1}([a, \infty[) \in \mathcal{F}$, $f^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ tai $f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{F}$.

Lebesgue kehitti integraalin aluksi funktioille, jotka saavat vain äärellisen monta arvoa. Mielivaltaista funktiota f arvioidaan näillä niin kutsutuilla yksinkertaisilla funktioilla g, jolloin mielivaltaisen funktion integraali saadaan näiden yksinkertaisten funktioiden integraalien supremumina, kun $g \leq f$.

Määritelmä 10.16. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Jos funktio $f : \Omega \to [0, \infty[$ on (Lebesgue-)mitallinen, niin sen (Lebesguen) integraali on

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup\{\int g \, \mathrm{d}\mu \mid g \text{ on yksinkertainen funktio ja } g \leq f\},$$

missä yksinkertaisella funktiolla tarkoitetaan mitallista funktiota, joka saa vain äärellisen monta arvoa. Funktio on integroituva, jos yllä olevan integraalin arvo on äärellinen. Muussa tapauksessa funktio ei ole integroituva.

Jos funktion f maalijoukko on $]-\infty, \infty[$, integraali saadaan laskettua huomaamalla, että funktio f on erotus funktion positiiviosasta $f^+ = \max\{f, 0\}$ ja negatiiviosasta $f^- = \max\{-f, 0\}$, jotka saavat vain positiivisia arvoja. Mikäli funktion f sekä positiivi- että negatiiviosan integraalit ovat äärettömiä, funktion f integraalia ei voida määrittää. Jos joko positiivi- tai negatiiviosa on ääretön, funktio ei ole integroituva.

LUKU 11

Todennäköisyysmitta

Hieman myöhemmin matemaatikko Konstantin, joka oli hyvin perehtynyt Lennartin luomaan mittateoriaan, löysi käsiinsä matemaatikko Williamin todennäköisyyslaskennasta kirjoittaman teoksen. Hän huomasi, että todennäköisyys on itse asiassa mitta, ja loi todennäköisyyslaskennalle kunnollisen matemaattisen pohjan mittateorian avulla.[1]

Todennäköisyys P on mitan erikoistapaus, jossa perusjoukon eli alkeistapausten joukon Ω todennäköisyys on aina 1. Todennäköisyyttä voidaankin kutsua myös todennäköisyysmitaksi. Mitta-avaruutta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kutsutaan todennäköisyysavaruudeksi ja σ-algebran $\mathcal{F}$ joukkoja tapahtumiksi.

Määritelmä 11.1. Kuvaus $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, missä $\mathcal{F}$ on σ-algebra, on todennäköisyys, jos:
(TN1) $P(\emptyset) = 0$,
(TN2) $P(\Omega) = 1$ ja
(TN3) $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$, kun $A_k \in \mathcal{F}$ ja $A_k \cap A_j = \emptyset$ kaikille $k \neq j$.

Luvussa 2 lähdettiin liikkeelle diskreeteistä todennäköisyyksistä. Huomautuksen 2.5 kanssa yhtenevä määritelmä saadaan seuraavasti:

Olkoon $\Omega = \{x_1, x_2, \dots\}$ numeroituva joukko ja olkoon (p_k), missä $k = 1, 2, \dots$, jono reaalilukuja välillä $[0, 1]$ siten, että $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Tällöin mitallisessa avaruudessa $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ funktio $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$,

$$P(A) = \sum_{k: x_k \in A} p_k,$$

on diskreetti todennäköisyysmitta. Kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ kutsutaan diskreetiksi todennäköisyysavaruudeksi.

Määritelmän 11.1 ehdosta (TN3) saadaan pistevieraiden joukkojen A_k, missä $k = 1, 2, \dots, n$, yhdisteen todennäköisyys, kun valitaan $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$, sillä $P(\emptyset) = 0$:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Huomataan, että saatu yhtälö on sama kuin seurauksessa 2.16.

[1]Todellisuudessa venäläinen matemaatikko A. N. Kolmogorov (1903-1987) julkaisi todennäköisyyden aksioomat (määritelmät 10.1 ja 11.1) vuonna 1933. Sitä ennen todennäköisyyslaskennalla ei ollut kunnollista matemaattista pohjaa vaan todennäköisyyksiä laskettiin samalla tavoin päättelemällä kuin tämän kirjan luvuissa 2-7, kuitenkin hyvällä menestyksellä.

Luvussa 4 puhuttiin geometrisista todennäköisyyksistä. Mittateoriaa tarvitaan siellä, jotta voidaan tietää, mitkä joukot ovat mitallisia eli mille joukoille voidaan geometrinen mitta määrittää. Jos geometrista mittaa ei voida määrittää jollekin joukolle, ei voida määrittää geometrista todennäköisyyttäkään. Tästä meille oli esimerkkinä Banachin-Tarskin paradoksi.

Luvussa 4 puhuttiin myös jatkuvista satunnaismuuttujista ja luvussa 6 määritettiin satunnaismuuttujan odotusarvo tiheysfunktion avulla. Nyt satunnaismuuttuja ja sen odotusarvo määritellään suoraan ilman tiheysfunktiota:

MÄÄRITELMÄ 11.2. Perusjoukossa Ω määriteltyä mitallista funktiota $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kutsutaan satunnaismuuttujaksi.

Satunnaismuuttujan $X : \Omega \to \mathbb{R}$ odotusarvo on sen Lebesguen integraali:

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}P,$$

missä P on todennäköisyys.

Satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ määrää arvojoukkoonsa todennäköisyysmitan $P_X : \mathcal{B} \to [0,1], P_X(A) = P(X \in A)$. Tätä todennäköisyysmittaa P_X kutsutaan satunnaismuuttujan X jakaumaksi. Jos P_X on jatkuva Lebesguen mitan suhteen Borelin joukkojen σ-algebrassa[2], niin on olemassa Lebesgue-mitallinen funktio f, joka saa vain epänegatiivisia arvoja ja joka toteuttaa ehdon $P_X(B) = \int_B f\,\mathrm{d}m$, missä m on Lebesguen mitta, kaikille avaruuden $\mathbb{R}$ Borelin joukoille.

Edellä saatua funktiota f kutsutaan satunnaismuuttujan X tiheysfunktioksi. Todennäköisyys, että piste x kuuluu joukkoon B saadaan siis integroimalla epänegatiivista, Lebesgue-mitallista funktiota f joukon B yli, aivan kuten luvussa 4 tehtiin. Tiheysfunktion avulla satunnaismuuttujan odotusarvon lauseke saadaan samaan muotoon kuin määritelmässä 6.6.

[2] P_X on jatkuva Lebesguen mitan m suhteen, jos ehdosta $m(E) = 0$ seuraa, että $P_X(E) = 0$ kaikilla $E \in \mathcal{B}$.

Kirjallisuutta

[1] Sami Alatupa, Sanna Hassinen, Mika Leikas, Timo Taskinen ja Tapani Tolonen: *Pitkä Sigma 6 Todennäköisyys ja tilastot*, ensimmäinen painos, Kustannusosakeyhtiö Tammi, 2010.

[2] Sirkka-Liisa Eriksson ja Pasi Vahimaa: *Mitta ja integraaliteoria*, Tampere, 1994, luettu 29.8.2014, `http://matriisi.ee.tut.fi/~erikssos/mitta/LOPPUv07.pdf`.

[3] John K. Hunter: *Measure theory*, California, 2011, luettu 2.6.2015, `www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_notes.pdf`.

[4] Paavo Jäppinen, Alpo Kupiainen ja Matti Räsänen: *Calculus 4 Tilastotiedettä ja todennäköisyyslaskentaa, Lukujonot ja sarjat.* uudistetun laitoksen 1-3. painos, Kustannusosakeyhtiö Otava, 2001.

[5] Tero Kilpeläinen: *Mitta- ja integraaliteoria*, Jyväskylä, 2004, luettu 20.7.2015, `http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATS110.pdf`.

[6] Mika Koskenoja: *Sattuman matematiikkaa 1 - klassinen todennäköisyys*, Matematiikkalehti Solmu 2/2002, luettu 27.6.2014, `http://solmu.math.helsinki.fi/2002/2/sattuma/`.

[7] Matti Lehtinen: *Matematiikan historia*, Matematiikkalehti Solmu, 2000, luettu 27.6.2014, `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/`.

[8] Ronald Meester: *A natural introduction to probability theory*, Amsterdam, 2003, luettu 23.6.2014, `http://www.few.vu.nl/~RWJ.Meester/onderwijs/stochastics/book.pdf`.

[9] Veikko T. Purmonen: *Mitta- ja integraaliteoriaa*, toinen painos, Jyväskylän yliopistopaino, 1997.

[10] René L. Schilling: *Measures, integrals and martingales*, ensimmäinen painos, Cambridge University Press, 2005.

[11] Gábor J. Székely: *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Budabest, käännetty painos, D. Reidel Publishing Company, 1986.

[12] Pekka Tuominen: *Todennäköisyyslaskenta 1*, toinen tarkistettu painos, Limes ry, 1993.

[13] Leonard M. Wapner: *The Pea and the Sun: A Mathematical Paradox*, A K Peters, 2005.