Peliteoria ja huutokauppamekanismit

Satu Ruotsalainen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015

Tiivistelmä: Satu Ruotsalainen, *Peliteoria ja huutokauppamekanismit* (engl. *Game theory and auction mechanisms*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 53 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2015.

Tämän tutkielman tarkoituksena on analysoida huutokauppoja peliteorian näkökulmasta. Työn alkupuolella käsitellään kahden pelaajan strategisia pelejä. Strategista peliä sanotaan nollasummapeliksi, jos pelaajien tulosten summa on nolla. Von Neumannin minimax-lauseen mukaan jokaisella kahden pelaajan nollasummapelillä on arvo, joka saavutetaan optimaalisia strategioita käyttämällä. Vastaavasti strateginen peli on yleinen summapeli, jos pelaajien tulosten summa on erisuuri kuin nolla joillakin strategioilla. Osoittautuu, että jokaisessa kahden pelaajan yleisessä summapelissä on ainakin yksi Nashin tasapaino.

Tässä työssä näytetään, että englantilainen ja suljettu toiseksi korkeimman tarjouksen huutokauppa ovat ekvivalentteja tuoton suhteen yksityisten, riippumattomien ja samoin jakautuneiden arvojen tapauksessa. Vastaava tulos pätee hollantilaisen ja suljetun korkeimman tarjouksen huutokaupan välillä. Kun huutokaupat kuvataan bayesiläisinä peleinä, osoittautuu, että symmetrisessä bayesiläisessä Nashin tasapainossa tarjoaja tarjoaa oman arvostuksensa verran suljetussa toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupassa ja alle oman arvostuksensa suljetussa korkeimman tarjouksen huutokaupassa. Lisäksi näytetään, että tietyillä oletuksilla huutokauppamekanismit ovat ekvivalentteja tuoton suhteen edellä mainitussa tapauksessa.

Avainsanat: huutokauppamekanismit, nollasummapelit, peliteoria, yleiset summapelit.

Sisältö

Johdanto

Peliteoria on sovelletun matematiikan osa-alue, joka tutkii päätöksentekotilanteita, joissa pelaajien täytyy tehdä valintoja, jotka vaikuttavat toisten pelaajien tuloksiin ja pelin lopputulokseen. Peliteoriaa sovelletaan useilla eri tieteenaloilla, esimerkiksi taloustieteissä, biologiassa, psykologiassa ja uusimpana tietotekniikassa. Tässä työssä ollaan kiinnostuneita tutkimaan huutokauppoja peliteorian keinoin.

Työssä perehdytään ensiksi kahden pelaajan nollasummapeleihin ja yleisiin summapeleihin, jotta tarvittavat käsitteet ja tulokset ovat käytettävissä huutokauppojen analysoimiseksi. Nollasummapeleissä toisen pelaajan tappio vastaa toisen pelaajan voittoa. Pelaajille on löydettävissä optimaaliset strategiat, joissa pelaajat valitsevat jokaiselle mahdolliselle vaihtoehdolleen kiinteän todennäköisyyden. Keskeinen tulos on von Neumannin minimax-lause, joka takaa, että jokaisella kahden pelaajan nollasummapelillä on optimaaliset strategiat pelaajille ja pelillä on arvo. Pelin arvo on luku, joka kertoo, paljonko pelaaja keskimäärin voittaa tai häviää pelissä, kun pelaajat käyttävät heidän optimaalisia strategioitaan. Lisäksi tarkastellaan keinoja, joilla optimaaliset strategiat ja pelin arvo voidaan löytää.

Yleiset summapelit ovat nollasummapelien yleistys, koska voittojen ei tarvitse vastata tappioita. Näissä peleissä ei ole enää optimaalisia strategioita pelaajille, vaan keskeinen käsite on Nashin tasapaino. Tasapainossa pelaaja ei voi voittaa muuttamalla yksipuolisesti strategiaansa. Edelleen jokaisessa kahden pelaajan yleisessä summapelissä on ainakin yksi Nashin tasapaino, jonka takaa todistettava lause 3.17. Lisäksi näytetään, miten nämä tasapainot voidaan käytännössä löytää.

Huutokaupoista tarkastelun kohteeksi otetaan neljä huutokaupan perustyyppiä, jotka ovat englantilainen, hollantilainen, suljettu korkeimman tarjouksen ja suljettu toiseksi korkeimman tarjouksen huutokauppa. Mallina käytetään yksityisten, riippumattomien ja samoin jakautuneiden arvojen mallia, jossa tarjoajat maksimoivat odotettua tulostaan. Osoittautuu, että tässä mallissa myyjän odotettu tuotto on sama englantilaisessa ja suljetussa toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupassa. Näin käy myös hollantilaisen ja suljetun korkeimman tarjouksen huutokaupan välillä. Lisäksi todistetaan tasapainostrategiat vastaavissa huutokaupoissa. Tässä yhteydessä puhutaan bayesiläisestä Nashin tasapainosta, joka on yleistys Nashin tasapainolle. Syynä tähän on, että tarjoajilla ei ole tietoa toisten tarjoajien arvoista huutokaupattavalle kohteelle. Neljän huutokaupan perustyypin käsittely päätetään hiukan yllättävään tulokseen, joka sanoo, että sopivilla oletuksilla huutokaupat johtavat samaan odotettuun tuottoon myyjälle.

Työn lopuksi tarkastellaan radiotaajuushuutokauppoja esimerkkinä konkreettisista huutokaupoista. Vuonna 1994 Yhdysvalloissa järjestettiin ensimmäinen taajuushuutokauppa. Näissä huutokaupoissa myydään lisenssejä, jotka oikeuttavat radiotaajuuksien käyttämiseen. Johtuen taajuushuutokauppojen monimutkaisuudesta analysoidaan eristettyjä ongelmia yksinkertaistetuissa tapauksissa, joissa on enintään kolme tarjoajaa ja huutokaupattavina kohteina kaksi lisenssiä.

Peliteorian kehittymisen mahdollisti todennäköisyyslaskennan alku, joka liittyi Pierre de Fermat'n ja Blaise Pascalin kirjeenvaihtoon vuonna 1654. Nimittäin peliteorian yksi keskeinen käsite on sekastrategia, joka perustuu todennäköisyyden käsitteeseen. James Waldegrave esitti ensimmäisen tunnetun sekastrategiaratkaisun matriisimuotoisessa pelissä. Waldegrave oli etsinyt strategiaa, joka maksimoisi pelaajan voittamistodennäköisyyden riippumatta siitä, minkä strategian vastustaja valitsee. Tämä tunnetaan nykyisin minimax-ratkaisuna. Se liittyi peliin le Her, joka on kuvailtu Waldegraven kirjeessä Pierre Rémond de Montmortille päiväyksellä 13.11.1713. Pelissä on kaksi pelaajaa ja sitä pelataan tavallisella korttipakalla. Pelin tarkoituksena on saada kortti, joka on arvoltaan suurempi kuin vastustajan kortti. Tarkempi kuvaus pelistä löytyy esimerkiksi Magdalena Hykšován paperista [**10**]. Peliä le Her olivat jo tutkineet de Montmort ja Nicholas Bernoulli keskinäisessä kirjeenvaihdossaan vuonna 1713. Vaikka de Montmort julkaisi peliin liittyvän kirjeenvaihdon, joka sisälsi Waldegraven ratkaisun [**5**], Waldegraven ratkaisu pysyi huomaamattomana hyvin pitkään.

Vuosina 1921-1927 Émile Borel julkaisi muistiinpanojen sarjan [**2**]-[**4**], joka käsitteli symmetrisiä kahden pelaajan nollasummapelejä, joissa on äärellinen määrä puhtaita strategioita jokaiselle pelaajalle. Borel oli ensimmäinen, joka yritti matematisoida strategiapelin. Hän esitteli käsitteen *method of play*, joka vastaa nykyisin puhdasta strategiaa, ja etsi sekastrategioiden ratkaisua, joka on nykyisin minimax-ratkaisu. Vuonna 1921 Borel todisti paperissaan tällaisen ratkaisun olemassaolon tapauksessa, jossa on kolme puhdasta strategiaa jokaiselle pelaajalle. Myöhemmin etsiessään vastaesimerkkiä hän todisti saman viidelle puhtaalle strategialle, minkä hän kuvasi paperissaan [**3**]. Hän uskoi, ettei sitä voi tehdä yleisessä tapauksessa. Paperissa [**4**] hän muotoili ongelman, muttei antanut todistusta.

Vuonna 1928 John von Neumann todisti minkä tahansa äärellisen kahden pelaajan nollasummapelin sekastrategioiden ratkaisun olemassaolon. Hänen tutkielmansa [**23**] edustaa todellista virstanpylvästä peliteorian historiassa. Von Neumann esitti matematisoinnin yleiselle äärelliselle n-pelaajan nollasummapelille. Erikoistapauksessa, jossa pelaajien määrä on kaksi, hän todisti minimax-ratkaisun olemassaolon, joka on tärkeä tulos matriisimuotoisten pelien teoriassa.

Vuonna 1953 Maurice Fréchet julkaisi teoksen *Econometrica Savage's English*, joka sisälsi käännökset Borelin muistiinpanoista [**2**]-[**4**]. Hän nimesi Borelin peliteorian aloitteentekijäksi ja von Neumannin perustajaksi. Väitettä tuki se, ettei Borel tullut olennaisiin tuloksiin pelin ratkeavuudessa. Von Neumannin tutkimus julkaistiin muutamia vuosia myöhemmin, mutta se sisälsi kattavan ja tarkan esittelyn peliteorian yleisistä käsitteistä ja minimax-lauseen todistuksen. Lisäksi tutkimuksella oli huomattavaa vaikutusta peliteorian jatkokehityksessä.

Seuraava tärkeä virstanpylväs oli vuonna 1944 julkaistu laajennettu monografia *Theory of Games and Economic Behavior* [**24**], joka syntyi von Neumannin ja taloustieteilijä Oskar Morgensterin yhteistyön tuloksena. Tätä tapahtumaa pidetään peliteorian alkuna täysimittaisena matemaattisena osa-alueena. Von Neumann ja Morgenstern aloittivat yksityiskohtaisen taloudellisten ongelmien muotoilun ja osoittivat poikkeuksellisen laajat peliteorian käyttömahdollisuudet taloudessa. Monografia sai aikaan peliteorian kehittämisen ja soveltamisen eri aloilla.

Vuonna 1949 John Forbes Nash kirjoitti väitöskirjansa *Non-Cooperative Games*, jossa käsite tasapainopiste otettiin käyttöön ja sen olemassaolo todistettiin. Nykyisin käsite tunnetaan Nashin tasapainona. Tärkeimmät väitöstutkimuksen tulokset julkaistiin lyhyessä muistiinpanossa [**17**] ja yksityiskohtaisemmassa paperissa [**18**] vuosina 1950 ja 1951.

1950- ja 1960-luvuilla peliteoriaa laajennettiin teoreettisesti sekä sovellettiin sodan ja politiikan ongelmiin. 1970-luvulta lähtien peliteorialla on ollut merkittävä rooli talousteoriassa. Peliteoria sai erityistä huomiota vuonna 1994, kun taloustieteilijät Nash, John Harsanyi ja Reinhard Selten palkittiin Nobel-palkinnolla. 1990-luvulla suunniteltiin ja toteutettiin peliteorian soveltamista huutokauppoihin. Merkittävät peliteoreetikot, kuten Robert Wilson, Paul Milgrom ja Preston McAfee, olivat mukana suunnittelemassa radiotaajuuslisenssien oikeanlaista jakamista. Useimpien huutokauppojen suunnittelun tavoitteena oli jakaa resurssit tehokkaammin kuin perinteiset valtiolliset tavat, kuten valitsemalla tai arpomalla lisenssien saajat.

LUKU 1

Peruskäsitteitä

Tutkielman aluksi määritellään käsitteitä ja merkintöjä, joita käytetään myöhemmissä luvuissa. Tämän luvun lähdeteoksina on käytetty Christel ja Stefan Geissin teosta [**7**] sekä Veikko Purmosen luentomonisteita [**20**] ja [**21**].

MÄÄRITELMÄ 1.1. Matriisin $A = A_{p\times n}$ *transpoosi* on $n \times p$ -matriisi $A^\top = A^\top_{n\times p}$, jonka alkioille pätee

$$[A^\top]_{ik} = [A]_{ki}$$

kaikilla $i = 1, ..., n$ ja $k = 1, ..., p$.

MÄÄRITELMÄ 1.2. *Euklidinen skalaari- eli pistetulo* $(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

kaikille $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Edelleen pistetulo määrää *euklidisen normin* $||\cdot||$,

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = (x^\top x)^{1/2}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.3. Olkoot $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Tällöin *x-keskinen r-säteinen avoin pallo avaruudessa* $\mathbb{R}^n$ on joukko

$$B(x; r) = B^n(x; r) := \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y|| < r\},$$

suljettu pallo

$$\bar{B}(x; r) = \bar{B}^n(x; r) := \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y|| \leqslant r\}$$

ja *pallopinta*

$$S(x; r) = S^{n-1}(x; r) := \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y|| = r\}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.4. Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *reunapiste*, jos pätevät

$$B(x; r) \cap A \neq \emptyset$$

ja

$$B(x; r) \cap A^c \neq \emptyset$$

kaikilla $r > 0$.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ määritellään *reuna* ∂A asettamalla

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \text{ on joukon } A \text{ reunapiste}\}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.6. Kuvauksen $f : X \to Y$ *rajoittuma* joukkoon $A \subset X$ on kuvaus

$$f|_A : A \to B : x \mapsto f(x),$$

missä $f(A) \subset B \subset Y$.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Joukon X *identtiseksi kuvaukseksi* kutsutaan kuvausta $id : X \to X$, jolle on voimassa

$$id(x) = x \quad \text{kaikilla } x \in X.$$

MÄÄRITELMÄ 1.8. Joukon $B \subset Y$ *alkukuva* kuvauksessa $f : X \to Y$ on

$$f^{\{-1\}}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.9. Kuvaukselle $f : X \to \mathbb{R}$ määritellään joukko

$$\arg\max_{x \in X} f(x) := \left\{ x \in X : f(x) = \max_{y \in X} f(y) \right\}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.10. Olkoon Ω epätyhjä joukko. Osajoukkojen $A \subseteq \Omega$ kokoelmaa $\mathcal{F}$ kutsutaan *σ-algebraksi* joukossa Ω, jos seuraavat ehdot pätevät.

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.
(2) Jos $A \in \mathcal{F}$, niin $A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$.
(3) Jos $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

MÄÄRITELMÄ 1.11. Paria $(\Omega, \mathcal{F})$, missä $\mathcal{F}$ on σ-algebra joukossa Ω, kutsutaan *mitalliseksi avaruudeksi*. Alkioita $A \in \mathcal{F}$ kutsutaan *tapahtumiksi*.

MÄÄRITELMÄ 1.12. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Kuvausta $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ kutsutaan *todennäköisyysmitaksi*, jos seuraavat ehdot pätevät.

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
(2) Kaikilla $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ siten, että $A_i \cap A_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$, pätee

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

MÄÄRITELMÄ 1.13. Olkoon Ω epätyhjä perusjoukko, $\mathcal{F}$ σ-algebra joukossa Ω ja $\mathbb{P}$ todennäköisyysmitta. Kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kutsutaan *todennäköisyysavaruudeksi*.

MÄÄRITELMÄ 1.14. Pienintä σ-algebraa, joka sisältää joukon $\mathbb{R}$ avoimet joukot, kutsutaan *Borelin σ-algebraksi*, jota merkitään $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Kuvaus $V : \Omega \to \mathbb{R}$ on *satunnaismuuttuja*, jos pätee

$$V^{\{-1\}}(B) \in \mathcal{F} \quad \text{kaikilla } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

MÄÄRITELMÄ 1.16. Satunnaismuuttujan $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *realisaatioksi* kutsutaan reaalilukua $V(\omega)$, missä $\omega \in \Omega$.

MÄÄRITELMÄ 1.17. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $V : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja. Tällöin *todennäköisyysjakauma* on kuvaus $\mathbb{P}_V : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$,

$$\mathbb{P}_V(B) := \mathbb{P}(V^{\{-1\}}(B)), \quad \text{missä } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

MÄÄRITELMÄ 1.18. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $V : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja. Tällöin *kertymäfunktio* on kuvaus $F_V : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F_V(c) : &= \mathbb{P}_V((-\infty, c]) = \mathbb{P}(V^{\{-1\}}((-\infty, c])) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : V(\omega) \in (-\infty, c]\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : V(\omega) \leqslant c\}). \end{aligned}$$

MÄÄRITELMÄ 1.19. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Satunnaismuuttujia $V_i : \Omega \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$, kutsutaan *riippumattomiksi*, jos kaikilla $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pätee

$$\mathbb{P}(V_1 \in B_1, ..., V_n \in B_n) = \mathbb{P}(V_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(V_n \in B_n).$$

MÄÄRITELMÄ 1.20. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Satunnaismuuttujat $V_i : \Omega \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$, ovat *samoin jakautuneita*, jos pätee

$$F_{V_1}(c) = F_{V_2}(c) = \cdots = F_{V_n}(c) \quad \text{kaikilla } c \in \mathbb{R}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.21. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Satunnaismuuttujan $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *odotusarvo* on luku

$$\mathbb{E}[V] = \int_\Omega V \; d\mathbb{P} = \int_\Omega V(\omega) \; d\mathbb{P}(\omega).$$

LUKU 2

Kahden pelaajan nollasummapelit

Tässä luvussa käsitellään kahden pelaajan nollasummapelejä. Pelaajat tekevät valintojaan samanaikaisesti ja näin ollen he eivät voi olla varmoja valintojensa seurauksista. Jokainen pelaaja hyötyy vain toisen pelaajan kustannuksella. Tämän luvun päälähdeteoksina on käytetty Emmanuel Barronin teosta [**1**] ja Yuval Peresin luentomateriaalia [**19**].

Esimerkki 2.1. Tarkastellaan peliä, jossa on kaksi pelaajaa. Pelaajalla 2 on kaksi kolikkoa taskussaan. Hän ottaa joko yhden kolikon vasempaan käteensä tai kaksi kolikkoa oikeaan käteensä. Pelaaja 1 valitsee jommankumman käden ja voittaa kädessä mahdollisesti olevat kolikot.

Tällöin vaihtoehdot 'oikea' ja 'vasen' ovat kummankin pelaajan mahdolliset strategiat ja edelleen joukko {'oikea', 'vasen'} on kummankin pelaajan käytettävissä olevien strategioiden joukko. Kuvausta $u_1 : \{\text{'oikea', 'vasen'}\} \times \{\text{'oikea', 'vasen'}\} \to \mathbb{R}$,

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} 2, \ \textit{jos} & s_1 = \text{'oikea'} = s_2 \\ 1, \ \textit{jos} & s_1 = \text{'vasen'} = s_2 \\ 0, \ \textit{muuten,} & \end{cases}$$

kutsutaan pelaajan 1 tulosfunktioksi. Vastaavasti kuvaus $u_2 : \{\text{'oikea', 'vasen'}\} \times \{\text{'oikea', 'vasen'}\} \to \mathbb{R}$,

$$u_2(s_1, s_2) = -u_1(s_1, s_2),$$

on pelaajan 2 tulosfunktio.

Määritellään strateginen peli yleisessä tapauksessa, koska määritelmää käytetään myös myöhemmissä luvuissa.

Määritelmä 2.2. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Kokoelmaa äärellisiä joukkoja S_i ja kuvauksia $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$, missä $i = 1, ..., n$, kutsutaan *n-pelaajan strategiseksi peliksi.* Se voidaan kuvata kolmikolla

$$G = (N, (S_i), (u_i)),$$

missä $N = \{1, ..., n\}$ on *pelaajien joukko*, joukko S_i on pelaajan $i \in N$ *käytettävissä olevien strategioiden joukko* ja kuvaus u_i on pelaajan i *tulosfunktio*. Joukkoa S_i kutsutaan myös pelaajan i *strategia-avaruudeksi*, jonka alkiot s_i ovat pelaajan i *strategioita*.

Huomautus 2.3. Strategista peliä kutsutaan myös *täyden informaation peliksi*, koska pelaajilla on tieto muiden pelaajien mahdollisista strategioista ja pelin lopputuloksista kaikissa mahdollisissa tilanteissa.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Kahden pelaajan strateginen peli on *nollasummapeli*, jos toisen pelaajan tappio vastaa toisen pelaajan voittoa. Toisin sanoen pätee

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$$

kaikilla $s_1 \in S_1$ ja $s_2 \in S_2$, missä $u_i : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ on pelaajan i tulosfunktio.

MÄÄRITELMÄ 2.5. Kahden pelaajan nollasummapeli voidaan esittää $(m \times n)$*-tulosmatriisina*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matriisin rivit ovat pelaajan 1 mahdollisia strategioita ja sarakkeet pelaajan 2 mahdollisia strategioita. Kun pelaaja 1 valitsee strategian i ja pelaaja 2 strategian j, niin pelaaja 2 maksaa pelaajalle 1 määrän a_{ij}. Esitystä kutsutaan pelin *normaali- tai strategiseksi muodoksi.*

ESIMERKKI 2.6. Jatketaan esimerkkiä 2.1. Pelin tulosmatriisi on seuraavanlainen

Pelaaja 2 Pelaaja 1	Oikea	Vasen
Oikea	2	0
Vasen	0	1

Pelaaja 2 haluaa minimoida tappionsa, jolloin hän valitsee yhden kolikon vasempaan käteensä. Jos pelaaja 1 oppii pelaajan 2 strategian, niin pelaaja 2 häviää yhden kolikon. Pelaajan 2 kannattaakin vaihtaa strategiansa kahteen kolikkoon, jos hän arvelee, että pelaaja 1 tietää hänen alkuperäisen strategiansa. Pelaajan 1 tietomäärä vaikuttaa olennaisesti pelaajan 2 strategian onnistumiseen. Näin ollen pelaaja 2 voi varmistaa enintään yhden kolikon tappion.

Myös pelaaja 1 haluaa maksimoida voittonsa, jolloin hän valitsee oikean käden voittaakseen kaksi kolikkoa. Pelaaja 2 voi varmistaa, ettei pelaaja 1 voita mitään, jos hän arvaa pelaajan 1 strategian. Pelaaja 1 voi varmistaa vain, ettei hän häviä mitään.

MÄÄRITELMÄ 2.7. *Sekastrategia* on strategia, jossa pelaaja valitsee jokaiselle mahdolliselle strategialle jonkin kiinteän todennäköisyyden. *Sekastrategia pelaajalle 1* määritellään vektorina $(p_1, p_2, ..., p_m)^\top$, missä p_i on strategian i pelaamisen todennäköisyys. Vastaavasti *sekastrategia pelaajalle 2* on vektori $(q_1, q_2, ..., q_n)^\top$, missä q_j on strategian j pelaamisen todennäköisyys.

MÄÄRITELMÄ 2.8. *Sekastrategioiden joukko pelaajalle 1* määritellään joukkona

$$\Delta_m := \left\{ p \in \mathbb{R}^m : p_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \right\}$$

ja *pelaajalle 2*

$$\Delta_n := \left\{ q \in \mathbb{R}^n : q_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}.$$

MÄÄRITELMÄ 2.9. *Puhdas strategia* on sekastrategia, jossa tiettyä strategiaa pelataan todennäköisyydellä 1.

MÄÄRITELMÄ 2.10. Olkoon $A = (a_{ij})$ tulosmatriisi. Jos pelaaja 1 pelaa sekastrategiaa p ja pelaaja 2 valitsee sarakkeen j, eli pelaa puhdasta strategiaa j, niin *tulosvektori pelaajalle 2* on

$$p^\top A = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}.$$

Jos pelaaja 2 pelaa sekastrategiaa q ja pelaaja 1 valitsee rivin i, eli pelaa puhdasta strategiaa i, niin *tulosvektori pelaajalle 1* on

$$Aq = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j.$$

Jos pelaaja 1 pelaa sekastrategiaa p ja pelaaja 2 sekastrategiaa q, niin *maksu*, jonka pelaaja 2 maksaa pelaajalle 1, on

$$p^\top A q = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j.$$

ESIMERKKI 2.11. Jatketaan esimerkkiä 2.6. Oletetaan, että pelaaja 1 pelaa sekastrategiaa valitsemalla oikean käden todennäköisyydellä p ja vasemman käden todennäköisyydellä $1-p$, missä $p \in [0,1]$. Tällöin pelaajan 2 odotettu tappio on $2p$ pelaamalla puhdasta strategiaa 'oikea' ja $1-p$ valitsemalla strategian 'vasen'. Jos pelaaja 2 tietää todennäköisyyden p, hän pyrkii minimoimaan odotetun tappionsa, eli hän pelaa strategiaansa, joka vastaa lukujen $2p$ ja $1-p$ minimiä. Tietäen pelaajan 2 minimoivan tappionsa pelaaja 1 pyrkii maksimoimaan voittonsa valitsemalla todennäköisyyden p, eli hän maksimoi lukua $\min\{2p, 1-p\}$. Tällöin saadaan

$$\min\{2p, 1-p\} < \frac{2}{3}, \quad \text{kun } p \neq \frac{1}{3},$$

ja

$$\min\{2p, 1-p\} = \frac{2}{3}, \quad \text{kun } p = \frac{1}{3},$$

josta saadaan $\max\min\{2p, 1-p\} = \frac{2}{3}$. Näin ollen sekastrategia pelaajalle 1 on $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^\top$ ja odotettu voitto on $\frac{2}{3}$ riippumatta siitä, tietääkö pelaaja 2 hänen strategiaansa.

Oletetaan seuraavaksi, että pelaaja 2 pelaa sekastrategiaa valitsemalla oikean käden todennäköisyydellä q ja vasemman käden todennäköisyydellä $1-q$, missä $q \in [0,1]$. Tällöin pelaajan 1 odotettu voitto on $2q$ valitsemalla strategian 'oikea' ja $1-q$ valitsemalla strategian 'vasen'. Jos pelaaja 1 tietää todennäköisyyden q, hän maksimoi odotetun voittonsa, eli hän valitsee strategiansa, joka vastaa lukujen $2q$ ja $1-q$ maksimia. Tällöin vastaavasti pelaaja 2 valitsee todennäköisyyden $q = \frac{1}{3}$ minimoidakseen tappionsa. Sekastrategia pelaajalle 2 on $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^\top$ ja odotettu tappio on $\frac{2}{3}$ riippumatta siitä, tietääkö pelaaja 1 hänen strategiaansa.

Lopuksi huomataan, että sekastrategioiden tapauksessa pelaaja 2 häviää vähemmän pelaajalle 1 kuin puhtaiden strategioiden tapauksessa, esimerkissä 2.6. Lisäksi huomataan, että pelaajan 1 odotettu voitto vastaa pelaajan 2 odotettua tappiota.

2.1. Von Neumannin minimax-lause

Seuraava lause on tämän luvun päätulos, joka sanoo, että jokaisella kahden pelaajan nollasummapelillä on arvo. Ennen lauseen todistamista esitellään aputuloksia, joita tarvitaan todistuksessa.

LAUSE 2.12 (Von Neumannin minimax-lause). *Olkoon A $(m \times n)$-tulosmatriisi, $\Delta_m = \{p \in \mathbb{R}^m : p_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1\}$ sekastrategioiden joukko pelaajalle 1 ja $\Delta_n = \{q \in \mathbb{R}^n : q_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^n q_j = 1\}$ sekastrategioiden joukko pelaajalle 2. Tällöin pätee*

$$\max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^\top A q =: V := \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^\top A q.$$

Lukua V kutsutaan kahden pelaajan nollasummapelin arvoksi.

MÄÄRITELMÄ 2.13. Joukko $K \subseteq \mathbb{R}^d$ on *konveksi*, jos kaikilla $a, b \in K$ pätee

$$\{pa + (1-p)b : p \in [0,1]\} \in K.$$

LEMMA 2.14. *Konveksien joukkojen leikkaus on konveksi.*

TODISTUS. Olkoon $\{K_i\}_{i \in I}$ kokoelma konvekseja joukkoja K_i, missä I on mielivaltainen indeksijoukko. Jos $a, b \in \cap_{i \in I} K_i \subset K_i$ millä tahansa i, niin määritelmän 2.13 nojalla pätee

$$pa + (1-p)b \in K_i$$

kaikilla $p \in [0,1]$. Koska $pa + (1-p)b \in K_i$ kaikilla $i \in I$, niin saadaan

$$pa + (1-p)b \in \cap_{i \in I} K_i.$$

Näin ollen leikkaus $\cap_{i \in I} K_i$ on konveksi. □

LAUSE 2.15 (Separoiva hypertaso -lause). *Oletetaan, että joukko $K \subset \mathbb{R}^d$ on suljettu ja konveksi. Jos vektori $0 \notin K$, niin on olemassa vektori $z \in \mathbb{R}^d$ ja vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$0 < c < z^\top v$$

kaikilla vektoreilla $v \in K$.

TODISTUS. Olkoon joukko K suljettu ja konveksi. Valitaan luku R siten, että R-säteinen 0-keskinen pallo leikkaa joukon K. Kuvaus $f : K \cap \{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| \leqslant R\} \to [0, \infty) : v \mapsto ||v||$ on jatkuva ja määrittelyjoukko on epätyhjä, suljettu ja rajoitettu, joten se on kompakti. Näin ollen kuvaus f saavuttaa infimuminsa jossakin pisteessä $z \in K$, joten voidaan kirjoittaa

$$||z|| = \inf_{v \in K} ||v||. \tag{2.1}$$

Näytetään, että $c < z^\top v$ pätee kaikilla vektoreilla $v \in K$. Olkoon $v \in K$. Koska joukko K on konveksi, niin määritelmän 2.13 mukaan mille tahansa luvulle $\epsilon \in (0,1)$ pätee $\epsilon v + (1-\epsilon) z = z - \epsilon(z - v) \in K$. Koska kohdan (2.1) mukaan vektorilla z on pienin normi, saadaan

$$\begin{aligned}
||z||^2 \leqslant ||z - \epsilon(z-v)||^2 &= (z^\top - \epsilon(z^\top - v^\top))(z - \epsilon(z - v)) \\
&= z^\top z - \epsilon z^\top (z - v) - \epsilon(z^\top - v^\top) z + \epsilon^2 (z^\top - v^\top)(z - v) \\
&= ||z||^2 - 2\epsilon z^\top (z - v) + \epsilon^2 ||z - v||^2.
\end{aligned}$$

Yhtäsuuruudet seuraavat normin määritelmästä. Edelleen saadaan

$$2\epsilon z^\top (z-v) \leqslant \epsilon^2 ||z-v||^2,$$

josta jakamalla saadaan

$$z^\top (z-v) \leqslant \frac{\epsilon}{2} ||z-v||^2.$$

Kun luvun ϵ annetaan lähestyä nollaa, saadaan

$$z^\top z - z^\top v \leqslant 0$$

ja muokkaamalla

$$||z||^2 \leqslant z^\top v.$$

Kun $z \in K$ ja $0 \notin K$, niin pätee $||z|| > 0$. Valitsemalla vakio $c = \frac{1}{2}||z||^2$ saadaan

$$0 < c < 2c = ||z||^2 \leqslant z^\top v$$

kaikilla vektoreilla $v \in K$. □

LEMMA 2.16. *Olkoot X ja Y suljettuja ja rajoitettuja joukkoja avaruudessa $\mathbb{R}^d$. Olkoon lisäksi funktio $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jatkuva molemmissa koordinaateissa. Tällöin pätee*

$$\max_{x\in X} \min_{y \in Y} f(x,y) \leqslant \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x,y).$$

TODISTUS. Olkoon pistepari $(x^*, y^*) \in X \times Y$ annettu. Nyt epäyhtälöt $f(x^*, y^*) \leqslant \sup_{x\in X} f(x, y^*)$ ja $\inf_{y\in Y} f(x^*, y) \leqslant f(x^*, y^*)$ pätevät infimumin ja supremumin määritelmien nojalla. Tällöin saadaan

$$\inf_{y\in Y} f(x^*, y) \leqslant \sup_{x\in X} f(x, y^*). \tag{2.2}$$

Koska epäyhtälö (2.2) pätee millä tahansa muuttujan $x^* \in X$ arvolla, niin se pätee myös supremumilla $\sup_{x^*\in X}$ vasemmalla puolella. Vastaavasti, koska epäyhtälö (2.2) pätee kaikilla muuttujilla $y^* \in Y$, se pätee myös infimumilla $\inf_{y^*\in Y}$ oikealla puolella. Näin ollen saadaan

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) \leqslant \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y).$$

Koska funktio f on jatkuva ja joukot X ja Y ovat suljettuja ja rajoitettuja, niin minimit ja maksimit saavutetaan. Tällöin saadaan väite

$$\max_{x\in X} \min_{y \in Y} f(x,y) \leqslant \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x,y). \qquad \square$$

MÄÄRITELMÄ 2.17. Sanotaan, että tulosvektori $w \in \mathbb{R}^d$ *dominoi* toista tulosvektoria $u \in \mathbb{R}^d$, jos epäyhtälö $w_i \geqslant u_i$ pätee kaikilla $i = 1, ..., d$. Tällöin merkitään $w \geqslant u$.

LAUSEEN 2.12 TODISTUS. Osoitetaan ensin, että sekastrategioiden joukko Δ_n on suljettu ja rajoitettu. Sekastrategioiden joukolle Δ_m päättely menee vastaavalla tavalla. Joukko Δ_n voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \{q \in \mathbb{R}^n : q_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^n q_j = 1\} = \{q_1 \geqslant 0\} \cap \cdots \cap \{q_n \geqslant 0\} \cap \{\sum_{j=1}^n q_j = 1\} \\ &= \{q_1 \geqslant 0\} \cap \cdots \cap \{q_n \geqslant 0\} \cap f^{\{-1\}}(1),\end{aligned}$$

missä kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(q_1, ..., q_n) = \sum_{j=1}^n q_j$, on jatkuva. Tällöin joukko Δ_n on suljettu, koska $\{q_j \geqslant 0\}$ kaikilla $j = 1, ..., n$ ja $\{1\}$ ovat suljettuja joukkoja, alkukuva

$f^{\{-1\}}(1)$ on suljettu ja edelleen suljettujen joukkojen leikkaus on suljettu (katso Veikko Purmosen luentomonisteesta [**20**, s. 24, 35]). Lisäksi joukko Δ_n on rajoitettu, koska pätee $\Delta_n \subset \bar{B}(0,1)$. Nyt epäyhtälö

$$\max_{p\in\Delta_m}\min_{q\in\Delta_n} p^\top Aq \leqslant \min_{q\in\Delta_n}\max_{p\in\Delta_m} p^\top Aq \tag{2.3}$$

seuraa lemmasta 2.16, koska kuvaus $h(p,q) = p^\top Aq$ on jatkuva molemmilla muuttujilla ja sekastrategioiden joukot $\Delta_m \subset \mathbb{R}^m$ ja $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ ovat suljettuja ja rajoitettuja.

Osoitetaan epäyhtälö

$$\max_{p\in\Delta_m}\min_{q\in\Delta_n} p^\top Aq \geqslant \min_{q\in\Delta_n}\max_{p\in\Delta_m} p^\top Aq \tag{2.4}$$

tekemällä vastaoletus

$$\max_{p\in\Delta_m}\min_{q\in\Delta_n} p^\top Aq < \lambda < \min_{q\in\Delta_n}\max_{p\in\Delta_m} p^\top Aq$$

jollain vakiolla $\lambda \in \mathbb{R}$. Määritellään uuden pelin tulosmatriisi $\hat{A}$ siten, että sen alkiot ovat muotoa $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - \lambda$. Koska jokainen alkio matriisissa $\hat{A}$ pienenee vakion λ verran, niin odotetut tulokset jokaiselle sekastrategioiden parille pienenevät myös vakion λ verran. Näin ollen saadaan

$$\max_{p\in\Delta_m}\min_{q\in\Delta_n} p^\top \hat{A}q < 0 < \min_{q\in\Delta_n}\max_{p\in\Delta_m} p^\top \hat{A}q. \tag{2.5}$$

Jokainen sekastrategia $q \in \Delta_n$ pelaajalle 2 antaa tulosvektorin $\hat{A}q \in \mathbb{R}^m$. Merkitään kirjaimella K kaikkien vektoreiden u joukkoa, joille on olemassa voittovektori $\hat{A}q$ siten, että vektori u dominoi vektoria $\hat{A}q$, eli pätee $u \geqslant \hat{A}q$. Toisin sanoen on

$$K = \{u = \hat{A}q + v : q \in \Delta_n, v \in \mathbb{R}^m, v \geqslant 0\}.$$

Alkupäättelyn nojalla sekastrategioiden joukko Δ_n on suljettu ja rajoitettu. Osoitetaan vielä joukon Δ_n konveksisuus. Olkoot q_1, $q_2 \in \Delta_n$. Tällöin pätee

$$\epsilon q_1 + (1-\epsilon)q_2 \in \Delta_n,$$

missä $\epsilon \in [0,1]$, koska $\sum_{j=1}^n \epsilon q_j^1 + (1-\epsilon)q_j^2 = \epsilon\sum_{j=1}^n q_j^1 + (1-\epsilon)\sum_{j=1}^n q_j^2 = 1$. Myös joukko $\{v \in \mathbb{R}^m : v \geqslant 0\}$ on suljettu ja konveksi. Näin ollen joukko K on konveksien joukkojen leikkauksena konveksi lemman 2.14 nojalla ja suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu.

Osoitetaan, että joukko K ei voi sisältää nollavektoria. Tehdään vastaoletus, että joukko K sisältää nollavektorin. Tällöin on sekastrategia $q \in \Delta_n$, jolle pätee $\hat{A}q \leqslant 0$, koska vektori u dominoi vektoria $\hat{A}q$. Edelleen mille tahansa sekastrategialle $p \in \Delta_m$ on $p^\top \hat{A}q \leqslant 0$, joka on ristiriidassa epäyhtälön (2.5) oikean puolen kanssa. Näin ollen joukko K täyttää lauseen 2.15 oletukset. Tällöin on olemassa vektori $z \in \mathbb{R}^m$ ja vakio $c > 0$ siten, että $0 < c < z^\top w$ kaikilla vektoreilla $w \in K$. Toisin sanoen pätee

$$z^\top(\hat{A}q + v) > c > 0 \tag{2.6}$$

kaikilla $q \in \Delta_n$ ja $v \geqslant 0$.

Osoitetaan vielä, että täytyy olla $z_i \geqslant 0$ kaikilla i. Oletetaan vastoin, että $z_j < 0$ jollekin j. Tällöin vektorille $v \in \mathbb{R}^m$, jolle $v_j \to \infty$ ja $v_i = 0$ kaikilla $i \neq j$, on

$$z^\top(\hat{A}q + v) = z^\top\hat{A}q + \sum_j z_j v_j < 0$$

jollakin $q \in \Delta_n$. Tämä on ristiriita epäyhtälön (2.6) kanssa. Lisäksi epäyhtälön (2.6) nojalla kaikki komponentit z_i eivät voi olla nollia. Tällöin on $s = \sum_{i=1}^m z_i > 0$. Normeeramalla saadaan

$$\tilde{p} = \frac{1}{s}(z_1, ..., z_m)^\top = \frac{1}{s} z \in \Delta_m,$$

koska $\frac{z_i}{s} \geqslant 0$ kaikilla $i = 1, ..., m$ ja $\sum_{i=1}^m \frac{z_i}{s} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^m z_i = 1$. Näin ollen saadaan $\tilde{p}^\top \hat{A} q > \frac{c}{s} > 0$ kaikilla $q \in \Delta_n$. Toisin sanoen $\tilde{p}$ on pelaajan 1 sekastrategia, joka antaa positiivisen odotetun tuloksen riippumatta pelaajan 2 sekastrategiasta. Tämä on ristiriita epäyhtälön (2.5) vasemman puolen kanssa, koska sen mukaan pelaaja 1 voi varmistaa parhaimmillaan negatiivisen tuloksen. Näin ollen epäyhtälöistä (2.3) ja (2.4) seuraa lauseen yhtäsuuruus

$$\max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^\top A q = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^\top A q. \qquad \square$$

Määritelmä 2.18. Olkoon A $(m \times n)$-tulosmatriisi. Strategia $\tilde{p} \in \Delta_m$ on *optimaalinen pelaajalle 1*, jos pätee

$$\min_{q \in \Delta_n} \tilde{p}^\top A q = \max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^\top A q.$$

Vastaavasti strategia $\tilde{q} \in \Delta_n$ on *optimaalinen pelaajalle 2*, jos pätee

$$\max_{p \in \Delta_m} p^\top A \tilde{q} = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^\top A q.$$

Lauseen 2.12 seurauksena saadaan seuraava tulos.

Seuraus 2.19. *Jokaisessa kahden pelaajan nollasummapelissä on optimaaliset strategiat pelaajille 1 ja 2.*

Todistus. Lauseen 2.12 nojalla on aina olemassa luku V siten, että

$$\max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^\top A q = V = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^\top A q.$$

Valitaan nyt strategiat $\tilde{p} \in \Delta_m$ ja $\tilde{q} \in \Delta_n$, joille pätevät

$$\min_{q \in \Delta_n} \tilde{p}^\top A q = \max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^\top A q$$

ja

$$\max_{p \in \Delta_m} p^\top A \tilde{q} = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^\top A q.$$

Strategiat $\tilde{p}$ ja $\tilde{q}$ ovat olemassa, koska kuvaus $h(p, q) = p^\top A q$ on jatkuva ja sekastrategioiden joukot Δ_m ja Δ_n ovat suljettuja ja rajoitettuja. Tällöin $\tilde{p}$ ja $\tilde{q}$ ovat optimaalisia strategioita määritelmän 2.18 nojalla. $\square$

Esimerkki 2.20. Osoitetaan, että esimerkissä 2.11 saadut strategiat ovat optimaalisia käyttäen määritelmää 2.18. Näytetään ensin, että strategia $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^\top$ on optimaalinen pelaajalle 1. Koska pelin arvo on $V = \frac{2}{3}$, määritelmän 2.18 nojalla saadaan

$$\min_{q \in \Delta_n} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = \min_{q \in \Delta_n} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = V.$$

Näytetään seuraavaksi, että strategia $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^\top$ on optimaalinen pelaajalle 2. Edelleen määritelmän 2.18 avulla saadaan

$$\max_{p \in \Delta_m} \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \max_{p \in \Delta_m} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = V.$$

Lemma 2.21. *Olkoon $A = (a_{ij})$ tulosmatriisi, V pelin arvo, $\tilde{p} \in \Delta_m$ optimaalinen strategia pelaajalle 1 ja $\tilde{q} \in \Delta_n$ optimaalinen strategia pelaajalle 2. Tällöin pätevät*

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i a_{ij} \geqslant V \quad \textit{kaikilla } j = 1, ..., n$$

ja

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{q}_j \leqslant V \quad \textit{kaikilla } i = 1, ..., m.$$

Todistus. Katso Emmanuel Barronin teoksesta [**1**, s. 32]. □

Huomautus 2.22. Kun molemmat pelaajat käyttävät heidän optimaalisia strategioitaan, saadaan tasan pelin arvo V. Tämän näkee päättelystä

$$\begin{aligned} V &= \sum_{j=1}^{n} V\tilde{q}_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i a_{ij} \right) \tilde{q}_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_i a_{ij} \tilde{q}_j = \sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{q}_j \right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i V = V. \end{aligned}$$

Seuraava lause auttaa optimaalisten strategioiden löytämisessä.

Lause 2.23. *Olkoon $A = (a_{ij})$ tulosmatriisi, V pelin arvo, $\tilde{p} \in \Delta_m$ optimaalinen strategia pelaajalle 1 ja $\tilde{q} \in \Delta_n$ optimaalinen strategia pelaajalle 2. Tällöin pätevät*

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i a_{ij} = V \quad \textit{kaikilla } j\textit{, joille } \tilde{q}_j > 0, \tag{2.7}$$

ja

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{q}_j = V \quad \textit{kaikilla } i\textit{, joille } \tilde{p}_i > 0. \tag{2.8}$$

Todistus. Osoitetaan kohta (2.8). Kohta (2.7) todistetaan vastaavalla tavalla. Tehdään vastaoletus olettamalla, että on k siten, että $\tilde{p}_k > 0$ ja $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\tilde{q}_j \neq V$. Tällöin lemman 2.21 nojalla pätee $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\tilde{q}_j < V$. Edelleen huomautusta 2.22 käyttäen saadaan

$$V = \sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{q}_j \right) < \sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i V = V,$$

mikä on ristiriita. Näin ollen väite on todistettu. □

Von Neumannin minimax-lause, lause 2.12, sanoo, että jokaisella kahden pelaajan nollasummapelillä on aina arvo, mutta se ei anna keinoa löytää sitä. Kuitenkin on olemassa keinoja, joilla tulosmatriisia voidaan yksinkertaistaa optimaalisten strategioiden ja pelin arvon määräämiseksi. Tällaisia keinoja ovat dominaatio ja symmetria, joista ensimmäistä käsitellään seuraavaksi. Symmetriasta löytyy esimerkiksi Yuval Peresin luentomateriaalista [**19**].

2.2. Dominaatio

Tarkoituksena on pienentää tulosmatriisin kokoa, jotta sitä voidaan helpommin tutkia. Tämä tapahtuu poistamalla rivejä tai sarakkeita, joita ei koskaan käytetä, koska aina on parempi rivi tai sarake käytettävissä. Menetelmää kutsutaan *dominaatioksi.*

MÄÄRITELMÄ 2.24. Olkoot vektorit $x_i \in \mathbb{R}^n$ ja kertoimet $\lambda_i \geqslant 0$ kaikilla $i = 1, ..., m$ siten, että $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Tällöin vektori

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$$

on vektoreiden x_i *konveksi kombinaatio.*

MÄÄRITELMÄ 2.25. Sanotaan, että matriisin $A = (a_{lj})$ rivi l *dominoi* riviä i, jos pätee $a_{lj} \geqslant a_{ij}$ kaikilla j. Lisäksi sanotaan, että rivi l *dominoi aidosti* riviä i, jos pätee $a_{lj} > a_{ij}$ kaikilla j. Yleisemmin sanotaan, että rivien osajoukko I *dominoi* riviä i, jos on konveksi kombinaatio β_l, $l \in I$, siten, että kaikille j pätee

$$\sum_{l \in I} \beta_l a_{lj} \geqslant a_{ij}. \tag{2.9}$$

Vastaavasti sanotaan, että sarakkeiden osajoukko J *dominoi* saraketta j, jos on konveksi kombinaatio β_l, $l \in J$, siten, että kaikille i pätee

$$\sum_{l \in J} \beta_l a_{il} \leqslant a_{ij}. \tag{2.10}$$

LAUSE 2.26. *Oletetaan, että kohta (2.9) pätee. Tällöin voidaan poistaa rivi i, koska pelaajalle 1 ei tule tappiota, vaikka hän ei pelaa sitä. Vastaavasti, jos kohta (2.10) pätee, niin voidaan poistaa sarake j, koska pelaajalle 2 ei tule tappiota sarakkeen j pelaamatta jättämisestä.*

TODISTUS. Todistetaan, että jos epäyhtälö (2.9) pätee, niin voidaan poistaa rivi i vaikuttamatta pelin arvoon. Oletetaan, että pätee $\sum_{l \in I} \beta_l a_{lj} \geqslant a_{ij}$ kaikilla j. Pelaaja 1 muuttaa sekastrategian p toiseen strategiaan z siten, että $z_i = 0$, $z_l = p_l + \beta_l p_i$ kaikilla $l \in I$ ja $z_k = p_k$ muuten. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} p^\top A q &= \sum_j \left(\sum_{l \in I} p_l a_{lj} + p_i a_{ij} + \sum_k p_k a_{kj} \right) q_j \\ &\leqslant \sum_j \left(\sum_{l \in I} p_l a_{lj} + \sum_{l \in I} p_i \beta_l a_{lj} + \sum_k p_k a_{kj} \right) q_j = z^\top A q \end{aligned}$$

millä tahansa strategialla q. Näin ollen strategia z, jossa pelaaja 1 ei käytä riviä i, on vähintään yhtä hyvä kuin strategia p pelaajalle 1. Todistus sarakkeille menee vastaavalla tavalla. □

ESIMERKKI 2.27. Tarkastellaan kahden pelaajan peliä, jossa molemmat pelaajat valitsevat numeron joukosta $\{1, 2, ..., n\}$ ja kirjoittavat sen ylös. Sen jälkeen pelaajat vertailevat numeroitaan. Jos numerot eroavat yhdellä, niin pelaaja, jolla on suurempi numero, voittaa euron toiselta pelaajalta. Jos taas numerot eroavat vähintään kahdella, niin pelaaja, jolla on suurempi numero, maksaa kaksi euroa toiselle pelaajalle.

Numeroiden ollessa yhtä suuret kumpikaan pelaaja ei joudu maksamaan mitään toiselle pelaajalle. Saadaan seuraavanlainen tulosmatriisi

Pelaaja 2 Pelaaja 1	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
1	0	-1	2	2	2	$\cdots$	2
2	1	0	-1	2	2		2
3	-2	1	0	-1	2		
4	-2	-2	1	0	-1		
5	-2	-2	-2	1	0		
$\vdots$	$\vdots$					$\ddots$	
n	-2	-2					0

Käyttäen hyväksi lausetta 2.26 tulosmatriisin kokoa voidaan pienentää optimaalisten strategioiden etsimiseksi ja pelin arvon määräämiseksi. Koska matriisissa pätee $a_{1j} \geqslant a_{ij}$ kaikilla $j = 1, ..., n$ ja $i = 4, ..., n$, niin voidaan poistaa rivit i. Vastaavasti, koska pätee $a_{i1} \leqslant a_{ij}$ kaikilla $i = 1, ..., n$ ja $j = 4, ..., n$, niin voidaan poistaa sarakkeet j. Tällöin saadaan seuraavanlainen tulosmatriisi

Pelaaja 2 Pelaaja 1	1	2	3
1	0	-1	2
2	1	0	-1
3	-2	1	0

Olkoon $p^\top = (p_1, p_2, p_3)$ sekastrategia pelaajalle 1. Tällöin odotettavissa olevat maksut pelaajalle 2 jokaisella puhtaalla strategialla 1, 2 ja 3 ovat

$$p^\top A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 - 2p_3, & -p_1 + p_3, & 2p_1 - p_2 \end{pmatrix}.$$

Tiedetään, että $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, jolloin saadaan $p_2 = 1 - p_1 - p_3$. Tällöin odotettavissa olevat maksut tulevat muotoon

$$\begin{pmatrix} 1 - p_1 - 3p_3, & -p_1 + p_3, & 3p_1 + p_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Pelaaja 1 etsii strategiaa (p_1, p_2, p_3) siten, että hän voittaa keskimäärin saman verran riippumatta siitä, mitä puhdasta strategiaa pelaaja 2 käyttää. Merkitään pelin arvoa kirjaimella V. Tällöin lauseen 2.23 nojalla saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} 1 - p_1 - 3p_3 = V \\ -p_1 + p_3 = V \\ 3p_1 + p_3 - 1 = V, \end{cases}$$

joista ratkaisemalla saadaan $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ ja $p_3 = \frac{1}{4}$. Tällöin optimaalinen strategia pelaajalle 1 on $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})^\top$.

Vastaavalla tavalla saadaan määrättyä optimaalinen strategia pelaajalle 2. Olkoon $q^\top = (q_1, q_2, q_3)$ sekastrategia pelaajalle 2. Nyt odotettavissa olevat voitot pelaajalle

1 ovat

$$Aq = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 + 2q_3 \\ q_1 - q_3 \\ -2q_1 + q_2 \end{pmatrix},$$

josta saadaan ratkaistua pelaajan 2 optimaalinen strategia, joka on $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})^\top$. Pelin arvoksi saadaan

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = 0.$$

Huomautus 2.28. Optimaalinen strategia ei välttämättä ole yksikäsitteinen. Tarkastellaan tulosmatriisia

Pelaaja 2 Pelaaja 1	1	2	3
1	2	1	2
2	2	-1	2
3	2	1	2

Käytetään dominaatiota ensiksi riveihin, jolloin saadaan tulosmatriisi

Pelaaja 2 Pelaaja 1	1	2	3
3	2	1	2

Tämän jälkeen käytetään dominaatiota sarakkeisiin, minkä seurauksena saadaan tulosmatriisi

Pelaaja 2 Pelaaja 1	2
3	1

Alkuperäisen pelin optimaalinen strategia pelaajalle 1 on $(0, 0, 1)^\top$ ja pelaajalle 2 $(0, 1, 0)^\top$. Pelin arvoksi saadaan 1.

Tehdään dominaatio toisinpäin. Dominoidaan ensin sarakkeet, jolloin päädytään tulosmatriisiin

Pelaaja 2 Pelaaja 1	2
1	1
2	-1
3	1

Tämän jälkeen dominoidaan rivit, jolloin saadaan tulosmatriisi

Pelaaja 2 Pelaaja 1	2
1	1

Tällöin alkuperäisen pelin optimaalinen strategia pelaajalle 1 on $(1,0,0)^\top$ ja pelaajalle 2 $(0,1,0)^\top$. Pelin arvoksi saadaan 1. Huomataan, että tekemällä dominaatio toisessa järjestyksessä päädytään eri strategiaan. Pelin arvo säilyy kuitenkin samana.

Huomautus 2.29. Optimaaliset strategiat eivät välttämättä pysy samoina prosessissa. Olkoon tulosmatriisi

Pelaaja 2 Pelaaja 1	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	0
3	1	0	2

Olkoon $p^\top = (p_1, p_2, p_3)$ sekastrategia pelaajalle 1. Tällöin odotettavissa olevat maksut pelaajalle 2 ovat

$$p^\top A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1+p_2+p_3, & p_1+2p_2, & p_1+2p_3 \end{pmatrix}.$$

Kuten esimerkissä 2.27, lauseen 2.23 nojalla saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3 = V \\ p_1+2p_2 = V \\ p_1+2p_3 = V, \end{cases}$$

joista saadaan pelin arvoksi $V = 1$, koska pätee $p_1+p_2+p_3 = 1$. Edelleen saadaan ratkaistua pelaajalle 1 optimaalinen strategia, joka on $(p_1, \frac{1}{2}(1-p_1), \frac{1}{2}(1-p_1))^\top$ jollakin $p_1 \in [0,1]$. Vastaavalla tavalla saadaan määrättyä pelaajan 2 optimaalinen strategia, joka on $(q_1, \frac{1}{2}(1-q_1), \frac{1}{2}(1-q_1))^\top$ jollakin $q_1 \in [0,1]$. Huomataan, että pelillä ei ole yksikäsitteisiä optimaalisia strategioita pelaajille 1 ja 2. Kuitenkin pelin arvo on aina yksikäsitteinen ja se on tässä tapauksessa $V = 1$.

Tulosmatriisissa ei ole selvää dominointia. Väitetään, että rivi 1 on dominoitu rivien 2 ja 3 konveksilla kombinaatiolla. Jotta tämä pätisi, täytyy olla jollakin vakiolla $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ voimassa epäyhtälöt

$$\begin{cases} 1 \leqslant \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 \\ 1 \leqslant \lambda \cdot 2 + (1-\lambda) \cdot 0 \\ 1 \leqslant \lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \cdot 2. \end{cases}$$

Järjestelmällä saadaan

$$\begin{cases} 1 \leqslant 1 \\ 1 \leqslant 2\lambda \\ 1 \leqslant 2 - 2\lambda, \end{cases}$$

josta edelleen saadaan ratkaisuksi $\lambda = \frac{1}{2}$. Näin ollen lauseen 2.26 nojalla voidaan poistaa rivi 1.

Uusi tulosmatriisi on muotoa

Pelaaja 2 Pelaaja 1	1	2	3
2	1	2	0
3	1	0	2

Edelleen matriisissa ei ole selvää dominointia. Väitetään, että sarake 1 on dominoitu sarakkeiden 2 ja 3 konveksilla kombinaatiolla. Tällöin saadaan epäyhtälöt

$$\begin{cases} 1 \geqslant \lambda \cdot 2 + (1-\lambda) \cdot 0 = 2\lambda \\ 1 \geqslant \lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \cdot 2 = 2 - 2\lambda, \end{cases}$$

joista saadaan ratkaisuksi $\lambda = \frac{1}{2}$, joka kelpaa. Nyt voidaan poistaa sarake 1, jolloin jäljelle jää tulosmatriisi

Pelaaja 2 Pelaaja 1	2	3
2	2	0
3	0	2

Olkoon nyt $p^\top = (p, 1-p)$ sekastrategia pelaajalle 1. Tällöin odotettavissa olevat maksut pelaajalle 2 ovat

$$p^\top A = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p, & 2-2p \end{pmatrix},$$

josta saadaan ratkaistua optimaalinen strategia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ pelaajalle 1. Olkoon $q^\top = (q, 1-q)$ sekastrategia pelaajalle 2. Odotettavissa olevat voitot pelaajalle 1 ovat

$$Aq = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2q \end{pmatrix},$$

josta saadaan optimaalinen strategia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ pelaajalle 2. Näin ollen alkuperäisen pelin optimaaliset strategiat ovat $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ pelaajalle 1 ja $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ pelaajalle 2. Pelin arvoksi saadaan

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1,$$

joka on sama kuin alkuperäisen pelin arvo.

Lopuksi huomataan, että pelaajat eivät voi enää käyttää alkuperäisen pelin optimaalisia, puhtaita strategioita $(1,0,0)^\top$ ja $(1,0,0)^\top$. Kuitenkin pelin arvo pysyy samana, vaikka strategiat muuttuvat prosessissa.

LUKU 3

Yleiset summapelit

Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan yleisiä summapelejä, jotka ovat yleistys aiemmin käsitellyistä nollasummapeleistä. Jokainen pelaaja voi voittaa tai hävitä riippuen heidän valitsemastaan strategiastaan. Luvun päälähteinä on käytetty Robert Gibbonsin teosta [**8**], Lassi Kuritun luentomonistetta [**13**] ja Yuval Peresin luentomateriaalia [**19**].

Yleinen summapeli on strateginen peli ja se voidaan kuvata kuin määritelmässä 2.2. Erona nollasummapeliin on vain seuraava määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Kahden pelaajan strateginen peli on *yleinen summapeli*, jos pätee

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) \neq 0$$

joillakin $s_1 \in S_1$ ja $s_2 \in S_2$, missä $u_i : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ on pelaajan i tulosfunktio.

MÄÄRITELMÄ 3.2. Kahden pelaajan yleinen summapeli voidaan esittää strategisessa muodossa $(m \times n)$-*tulosmatriisina*

$$C = (a_{ij}, b_{ij}) = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \cdots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix},$$

jonka alkiot ovat järjestettyjä pareja. Ensimmäinen komponentti a_{ij} kuvaa pelaajan 1 tuloksia ja toinen komponentti b_{ij} pelaajan 2 tuloksia, kun pelaaja 1 valitsee strategian i ja pelaaja 2 strategian j. Matriisissa on yhtä monta riviä kuin pelaajalla 1 on puhtaita strategioita ja yhtä monta saraketta kuin pelaajalla 2 on puhtaita strategioita.

Huomautus 3.3. Vaihtoehtoisesti kahden pelaajan yleinen summapeli voidaan esittää parina $(m \times n)$-tulosmatriiseista $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$.

Seuraava esimerkki tunnetaan nimellä *vangin dilemma*. Sen alun perin kehittivät Rand Corporationin tutkijat Merrill Flood ja Melvin Dresher vuonna 1950. Princetonin matemaatikko Albert W. Tucker muotoili sen ja antoi nimen vangin dilemma.

ESIMERKKI 3.4. Kaksi epäiltyä on kiinniotettuna ja kuulusteltavana samasta rikoksesta poliisilla, joka pyytää heitä tunnustamaan. Poliisilla ei ole tarpeeksi todisteita tuomita heitä. Molemmille epäillyille tarjotaan erikseen seuraavaa sopimusta. Jos epäilty tunnustaa ja toinen vaikenee, niin tunnustanut pääsee vapaaksi ja vaiennut saa kymmenen vuotta vankeutta. Jos taas molemmat epäillyt tunnustavat, kumpikin saa kahdeksan vuotta vankeutta. Jos molemmat vaikenevat, kumpikin saa vuoden vankeutta pienistä rikoksista. Saadaan seuraavanlainen tulosmatriisi

Pelaaja 2 Pelaaja 1	Vaikenee	Tunnustaa
Vaikenee	(-1, -1)	(-10, 0)
Tunnustaa	(0, -10)	(-8, -8)

Huomataan, että tunnustamalla pelaaja saa paremman tuloksen kuin vaikenemalla riippumatta toisen pelaajan valinnasta. Kuitenkin tulos on huonompi kummallekin pelaajalle kuin jos molemmat vaikenevat.

Tarkastellaan seuraavaksi yleisiä summapelejä nollasummapelien keinoin.

MÄÄRITELMÄ 3.5. Olkoon A pelaajan 1 ja B pelaajan 2 $(m\times n)$-tulosmatriisi kahden pelaajan yleisessä summapelissä. Strategia $\tilde{p} \in \Delta_m$ on *maxmin-strategia pelaajalle 1*, jos pätee

$$\min_{q\in\Delta_n} \tilde{p}^\top Aq = \max_{p\in\Delta_m} \min_{q\in\Delta_n} p^\top Aq.$$

Vastaavasti strategia $\tilde{q} \in \Delta_n$ on *maxmin-strategia pelaajalle 2*, jos pätee

$$\min_{p\in\Delta_m} p^\top B\tilde{q} = \max_{q\in\Delta_n} \min_{p\in\Delta_m} p^\top Bq.$$

Huomautus 3.6. Maxmin-strategia on nollasummapelin optimaalinen strategia rivipelaajalle. Yleisten summapelien tapauksessa myös pelaaja 2 yrittää maksimoida tuloksensa.

MÄÄRITELMÄ 3.7. Olkoon $A = (a_{ij})$ pelaajan 1 ja $B = (b_{ij})$ pelaajan 2 $(m \times n)$-tulosmatriisi kahden pelaajan yleisessä summapelissä. *Pelaajan 1 turvaraja* määritellään

$$v_1 := \max_{p\in\Delta_m} \min_j \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} = V_A,$$

missä strategia p, joka saavuttaa maksimin, on pelaajan 1 maxmin-strategia ja V_A on nollasummapelin arvo tulosmatriisilla A. Vastaavasti *pelaajan 2 turvaraja* määritellään

$$v_2 := \max_{q\in\Delta_n} \min_i \sum_{j=1}^n b_{ij} q_j = V_{B^\top},$$

missä strategia q, joka saavuttaa maksimin, on pelaajan 2 maxmin-strategia ja $V_{B^\top}$ on nollasummapelin arvo tulosmatriisilla $B^\top = (b_{ji})$.

Huomautus 3.8. Pelaajan 2 turvaraja on $V_{B^\top}$, koska nollasummapelissä tulosmatriisin alkiot edustavat rivipelaajan voittoja ja sarakepelaajan tappioita.

Huomautus 3.9. Pelaaja 1 voi saavuttaa tuloksen v_1 ottamatta huomioon pelaajan 2 tulosmatriisia. Vastaavasti pelaaja 2 voi saavuttaa tuloksen v_2 ilman pelaajan 1 tulosmatriisia. Yleisessä summapelissä pelaaja saa ainakin turvarajansa verran.

Seuraava esimerkki on yksi peliteorian klassikoista, joka tunnetaan nimellä *sukupuolten taistelu*. Monia tilanteita voidaan mallintaa sen avulla, esimerkiksi kaksi yritystä haluavat yhdenmukaistaa tuotteensa, mutta heidän on päätettävä, kumpaa tapaa he seuraavat tai osapuolet haluavat päästä yhteisymmärrykseen, mutta heidän on päätettävä, mitä kieltä he käyttävät.

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan tilannetta, jossa pariskunta valitsee, minkä elokuvan he menevät katsomaan. Nainen haluaa mennä katsomaan komediaa, mutta mies haluaa nähdä jännitystä. Kumpikaan ei halua katsoa elokuvaa yksin. Olkoon nainen pelaaja 1 ja mies pelaaja 2. Tällöin tulosmatriisi on seuraavanlainen

Pelaaja 2 Pelaaja 1	Komedia	Jännitys
Komedia	(4, 1)	(0, 0)
Jännitys	(0, 0)	(1, 4)

Määritetään turvarajat molemmille pelaajille. Tulosmatriisi pelaajalle 1 on

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Olkoon $(p, 1-p)^\top$ sekastrategia pelaajalle 1 ja pelin arvo V_A. Käyttäen määritelmää 3.7 saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} 4p = V_A \\ 1 - p = V_A, \end{cases}$$

joista ratkaisemalla saadaan $p = \frac{1}{5}$. Tällöin pelaajalle 1 maxmin-strategia on $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})^\top$ ja turvaraja on $v_1 = \frac{4}{5}$ riippumatta siitä, mitä pelaaja 2 tekee.

Pelaajalle 2 tulosmatriisi on

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = B^\top.$$

Olkoon $(q, 1-q)^\top$ sekastrategia pelaajalle 2 ja pelin arvo $V_{B^\top}$. Edelleen määritelmän 3.7 avulla saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} q = V_{B^\top} \\ 4(1 - q) = V_{B^\top}, \end{cases}$$

joista ratkaisemalla saadaan $q = \frac{4}{5}$. Näin ollen pelaajalle 2 maxmin-strategia on $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})^\top$ ja turvaraja on $v_2 = \frac{4}{5}$ riippumatta siitä, mitä pelaaja 1 tekee. Huomataan, että molemmat pelaajat saisivat paremman tuloksen valitsemalla sen, jonka toinen haluaa.

3.1. Nashin tasapaino ja sen olemassaolo

Määritelmä 3.11. Olkoon A pelaajan 1 $(m \times n)$-tulosmatriisi. Strategia $p^* \in \Delta_m$ on pelaajan 1 *paras vastaus pelaajan 2 strategiaan* $q \in \Delta_n$, jos pätee

$$p^{*\top} A q \geqslant p^\top A q$$

kaikilla strategioilla $p \in \Delta_m$. Toisin sanoen strategia p^* on sellainen, että

$$\max_{p \in \Delta_m} p^\top A q = p^{*\top} A q.$$

Olkoon B pelaajan 2 $(m \times n)$-tulosmatriisi. Vastaavasti strategia $q^* \in \Delta_n$ on pelaajan 2 *paras vastaus pelaajan 1 strategiaan* $p \in \Delta_m$, jos pätee

$$p^\top B q^* \geqslant p^\top B q$$

kaikilla strategioilla $q \in \Delta_n$. Toisin sanoen strategia q^* on sellainen, että

$$\max_{q \in \Delta_n} p^\top Bq = p^\top Bq^*.$$

MÄÄRITELMÄ 3.12. Olkoon A pelaajan 1 ja B pelaajan 2 $(m \times n)$-tulosmatriisi. Vektoripari (p^*, q^*), missä $p^* \in \Delta_m$ on pelaajan 1 sekastrategia ja $q^* \in \Delta_n$ on pelaajan 2 sekastrategia, määrittää *Nashin tasapainon*, jos pelaaja ei voita poikkeamalla siitä yksipuolisesti. Toisin sanoen pätee

$$p^{*\top} Aq^* \geqslant p^\top Aq^*$$

kaikilla sekastrategioilla $p \in \Delta_m$ ja

$$p^{*\top} Bq^* \geqslant p^{*\top} Bq$$

kaikilla sekastrategioilla $q \in \Delta_n$.

Huomautus 3.13. Strategiapari (p^*, q^*) on Nashin tasapaino, jos ja vain jos strategia p^* on paras vastaus strategiaan q^* ja strategia q^* on paras vastaus strategiaan p^*.

MÄÄRITELMÄ 3.14. Nashin tasapainoa (p^*, q^*) sanotaan *puhtaaksi*, jos p^* ja q^* ovat puhtaita strategioita.

MÄÄRITELMÄ 3.15. Strategiaa p^* kutsutaan *pelaajan 1 tasapainostrategiaksi*. Vastaavasti strategiaa q^* kutsutaan *pelaajan 2 tasapainostrategiaksi*.

MÄÄRITELMÄ 3.16. Peliä sanotaan *symmetriseksi*, jos pätee $m = n$ ja $A_{ij} = B_{ji}$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Strategiaparia (p, q) sanotaan *symmetriseksi*, jos pätee $p_i = q_i$ kaikilla $i = 1, ..., n$.

Seuraavaksi esitellään tämän luvun päätulos. Se on yleistys von Neumannin minimax-lauseelle, lause 2.12. Ennen lauseen todistamista esitellään aputuloksia, joita tarvitaan lauseen todistuksessa.

LAUSE 3.17 (Nashin tasapainon olemassaolo). *Mille tahansa kahden pelaajan yleiselle summapelille on olemassa ainakin yksi Nashin tasapaino.*

MÄÄRITELMÄ 3.18. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$ sen aliavaruus. Sanotaan, että jatkuva kuvaus $f : X \to A$ on *retraktio*, jos pätee

$$f|_A = id_A.$$

MÄÄRITELMÄ 3.19. Topologisen avaruuden aliavaruus $A \subset X$ on avaruuden X *retrakti*, jos on olemassa jatkuva kuvaus $f : X \to A$ siten, että

$$f|_A = id_A.$$

LEMMA 3.20. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin pallon pinta S^n ei ole suljetun yksikköpallon $\bar{B}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| \leqslant 1\}$ retrakti.*

TODISTUS. Katso Lassi Kuritun luentomonisteesta [**13**, s. 101]. □

LAUSE 3.21 (Brouwerin kiintopistelause). *Olkoon $n \geqslant 1$, $\bar{B}^n$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu yksikköpallo ja kuvaus $f : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ jatkuva. Tällöin on olemassa vektori $x \in \bar{B}^n$ siten, että*

$$f(x) = x.$$

Todistus. Tehdään vastaoletus olettamalla, että kuvauksella f ei ole kiintopistettä. Tällöin pätee $f(x) \neq x$ kaikille $x \in \bar{B}^n$. Määritellään nyt kaikille $x \in \bar{B}^n$ puolisuora $L(x)$ asettamalla

$$L(x) = \{f(x) + t(x - f(x)) : t > 0\}.$$

Osoitetaan, että puolisuora $L(x)$ leikkaa pallon pintaa S^{n-1} täsmälleen yhdessä pisteessä. Leikkauskohdissa pätee

$$||L(x)|| = 1$$

eli

$$||f(x) + t(x - f(x))||^2 = 1.$$

Edelleen normin määritelmästä seuraa

$$[(f(x))^\top + (x^\top - (f(x))^\top)t][(f(x)) + t(x - f(x))] = 1,$$

josta kertomalla sulut auki saadaan

$$\begin{aligned}(f(x))^\top f(x) + (f(x))^\top t(x - f(x)) + (x^\top - (f(x))^\top)tf(x)\\ + t^2(x^\top - (f(x))^\top)(x - f(x)) - 1 = 0.\end{aligned}$$

Järjestelemällä ja käyttäen uudelleen normin määritelmää saadaan

$$t^2||x - f(x)||^2 + 2t(f(x))^\top(x - f(x)) + ||f(x)||^2 - 1 = 0, \tag{3.1}$$

josta ratkaisemalla saadaan

$$\begin{aligned} t &= \frac{-2(f(x))^\top(x - f(x)) \pm \sqrt{(2(f(x))^\top(x - f(x)))^2 - 4||x - f(x)||^2(||f(x)||^2 - 1)}}{2||x - f(x)||^2} \\ &= \frac{-(f(x))^\top(x - f(x)) \pm \sqrt{((f(x))^\top(x - f(x)))^2 - ||x - f(x)||^2(||f(x)||^2 - 1)}}{||x - f(x)||^2}. \end{aligned}$$

Yhtälöllä (3.1) on kaksi reaalista ratkaisua, koska diskriminantille pätee

$$\begin{aligned} &((f(x))^\top(x - f(x)))^2 - ||x - f(x)||^2(||f(x)||^2 - 1) \\ &= ((f(x))^\top(x - f(x)))^2 - (||x - f(x)||\ ||f(x)||)^2 + ||x - f(x)||^2 \\ &\geqslant ((f(x))^\top(x - f(x)))^2 - ((x - f(x))^\top f(x))^2 + ||x - f(x)||^2 \\ &= ||x - f(x)||^2 > 0, \end{aligned}$$

missä epäyhtälö seuraa Schwarzin epäyhtälöstä.

Toinen ratkaisuista on negatiivinen ja toinen positiivinen. Aidosti positiivinen ratkaisu on

$$t = \frac{-(f(x))^\top(x - f(x)) + \sqrt{((f(x))^\top(x - f(x)))^2 - ||x - f(x)||^2(||f(x)||^2 - 1)}}{||x - f(x)||^2}.$$

Koska yhtälöllä (3.1) on täsmälleen yksi aidosti positiivinen ratkaisu t, niin puolisuora $L(x)$ leikkaa joukkoa S^{n-1} täsmälleen yhdessä pisteessä $r(x)$. Tällöin on

$$\begin{aligned} r(x) =& f(x) \\ &+ \frac{-(f(x))^\top(x - f(x)) + \sqrt{((f(x))^\top(x - f(x)))^2 - ||x - f(x)||^2(||f(x)||^2 - 1)}}{||x - f(x)||^2} \\ &\cdot (x - f(x)). \end{aligned}$$

Oletuksen mukaan kuvaus f on jatkuva ja vastaoletuksen nojalla pätee $f(x) \neq x$ kaikille x, joten myös kuvaus r on jatkuva.

Jos $||x|| = 1$, niin tällöin on $r(x) = x$. Silloin x on puolisuoran $L(x)$ ja joukon S^{n-1} leikkauspiste. Näin ollen kuvaus $r : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ on jatkuva ja $r|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$, joten kuvaus r on retraktio ja joukko S^{n-1} on joukon $\bar{B}^n$ retrakti. Tämä on ristiriita lemman 3.20 kanssa. □

LEMMA 3.22. *Olkoon joukko $K \subseteq \mathbb{R}^n$ suljettu, konveksi ja rajoitettu sekä sen sisus epätyhjä. Tällöin reuna ∂K ei ole joukon K retrakti.*

TODISTUS. Katso Yuval Peresin luentomateriaalista [**19**, s. 91]. □

LAUSE 3.23 (Brouwerin kiintopistelause konveksissa tapauksessa). *Olkoon joukko $K \subseteq \mathbb{R}^n$ suljettu, konveksi ja rajoitettu. Olkoon lisäksi kuvaus $f : K \to K$ jatkuva. Tällöin on olemassa vektori $x \in K$ siten, että*

$$f(x) = x.$$

TODISTUS. Todistuksen ideana on olettaa, että kuvauksella f ei ole kiintopistettä. Toisin sanoen pätee $f(x) \neq x$ kaikille $x \in K$. Tällöin voidaan määritellä jatkuva kuvaus $r : K \to \partial K$ seuraavalla tavalla. Jokaiselle pisteelle $x \in K$ piirretään suora pisteestä $f(x)$ pisteen x kautta, kunnes suora leikkaa reunan ∂K. Asetetaan $r(x)$ yhtäsuureksi kuin tämä leikkauspiste. Jos taas $f(x) \in \partial K$, asetetaan $r(x)$ yhtäsuureksi kuin suoran ja reunan ∂K leikkauspiste, joka ei ole yhtä suuri kuin $f(x)$. Nyt voidaan osoittaa, että kuvaus $r : K \to \partial K$ on jatkuva, jolloin saadaan ristiriita lemman 3.22 kanssa. Katso Yuval Peresin luentomateriaalista [**19**, s. 92]. □

LAUSEEN 3.17 TODISTUS. Oletetaan, että pelissä on kaksi pelaajaa ja peli on määritelty tulosmatriiseilla $A_{m\times n}$ pelaajalle 1 ja $B_{m\times n}$ pelaajalle 2. Olkoon $K = \Delta_m \times \Delta_n$. Joukko K on konveksi, suljettu ja rajoitettu, koska sekastrategioiden joukot Δ_m ja Δ_n ovat konvekseja, suljettuja ja rajoitettuja lauseen 2.12 todistuksen nojalla. Halutaan määritellä kuvaus $f : K \to K$ strategiaparien joukolta K strategiaparien joukolle K siten, että $f(p, q) = (\tilde{p}, \tilde{q})$.

Määritellään c_i voitoksi, jonka pelaaja 1 saavuttaa vaihtamalla sekastrategian p puhtaaseen strategiaan i, jos voitto on positiivinen. Muuten c_i on nolla. Toisin sanoen sekastrategialle $p \in \Delta_m$ on

$$c_i = c_i(p, q) = \max\{A_{(i)}q - p^\top Aq, 0\}, \tag{3.2}$$

missä $A_{(i)}$ tarkoittaa matriisin A riviä i. Vastaavasti määritellään d_j voitoksi, jonka pelaaja 2 saavuttaa vaihtamalla sekastrategian q puhtaaseen strategiaan j , jos voitto on positiivinen. Toisin sanoen sekastrategialle $q \in \Delta_n$ on

$$d_j = d_j(p, q) = \max\{p^\top B^{(j)} - p^\top Bq, 0\},$$

missä $B^{(j)}$ tarkoittaa matriisin B saraketta j.

Määritellään sekastrategia $\tilde{p} \in \Delta_m$ asettamalla

$$\tilde{p}_i = \frac{p_i + c_i}{\sum_{k=1}^m (p_k + c_k)} = \frac{p_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^m c_k}.$$

Vastaavasti määritellään sekastrategia $\tilde{q} \in \Delta_n$ asettamalla

$$\tilde{q}_j = \frac{q_i + d_j}{\sum_{k=1}^n (q_k + d_k)} = \frac{q_j + d_j}{1 + \sum_{k=1}^n d_k}.$$

Määritellään nyt kuvaus f siten, että $f(p,q) = (\tilde{p},\tilde{q})$. Funktio f on jatkuva, koska c_i ja d_j ovat jatkuvia ja näin ollen $\tilde{p}_i$ ja $\tilde{q}_j$ ovat jatkuvia. Lauseen 3.23 nojalla on olemassa $(p,q) \in K$ siten, että $(p,q) = (\tilde{p},\tilde{q})$.

Osoitetaan, että valinnalle $(p,q) = (\tilde{p},\tilde{q})$ jokainen $c_i = 0$, kun $i \in \{1,...,m\}$, ja $d_j = 0$, kun $j \in \{1,...,n\}$. Tehdään vastaoletus olettamalla esimerkiksi, että $c_1 > 0$. Nyt täytyy olla olemassa $l \in \{1,...,m\}$, jolle $p_l > 0$ ja $p^\top Aq \geqslant A_{(l)}q$. Kohdan (3.2) mukaan tälle puhtaalle strategialle l on $c_l = 0$. Tästä seuraa, että

$$\tilde{p}_l = \frac{p_l}{1+\sum_{k=1}^m c_k} < p_l,$$

koska $c_1 > 0$. Näin ollen saadaan ristiriita oletuksen $(p,q) = (\tilde{p},\tilde{q})$ kanssa. Väite voidaan toistaa kaikilla $i \in \{1,...,m\}$, mikä todistaa, että jokainen $c_i = 0$. Vastaavalla päättelyllä saadaan, että jokainen $d_j = 0$. Tällöin pätee $p^\top Aq \geqslant A_{(i)}q$ kaikilla $i \in \{1,...,m\}$. Tämä tarkoittaa, että

$$p^\top Aq \geqslant p'^\top Aq$$

kaikilla $p' \in \Delta_m$ ja vastaavasti

$$p^\top Bq \geqslant p^\top Bq'$$

kaikilla $q' \in \Delta_n$. Määritelmän 3.12 mukaan strategiapari (p,q) on Nashin tasapaino. $\square$

3.2. Nashin tasapainojen löytäminen

Katsotaan seuraavaksi, miten Nashin tasapainot voidaan käytännössä löytää. Olkoon seuraavanlainen tulosmatriisi

Pelaaja 2 Pelaaja 1	L	R
U	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})
D	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})

Tarkastellaan ensin puhtaita Nashin tasapainoja, jotka voidaan löytää tulosmatriisista. Alleviivataan jokainen rivipelaajan tulos, joka on paras vastaus sarakepelaajan valinnalle. Vastaavasti alleviivataan jokainen sarakepelaajan tulos, joka on paras vastaus rivipelaajan valinnalle. Nyt puhdas Nashin tasapaino on ruutu, jossa molemmat matriisin alkiot on alleviivattu.

Perustellaan määritelmän 3.12 avulla, miksi riittää tarkastella vain puhtaita strategioita, kun toinen pelaaja pelaa omaa puhdasta strategiaansa. Oletetaan, että pelaaja 2 pelaa puhdasta strategiaa $(1,0)^\top$. Tällöin määritelmän 3.12 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\max_{p\in\Delta_m} p^\top Aq^* &= \max_{p\in\Delta_m} \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \max_{p\in\Delta_m} \begin{pmatrix} a_{11}p + a_{21}(1-p), & a_{12}p + a_{22}(1-p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \max_{p\in\Delta_m} a_{11}p + a_{21}(1-p).
\end{aligned}$$

Funktion maksimi saavutetaan reunalla eli arvolla $p = 1$ tai $p = 0$. Samaan tulokseen päädytään tilanteessa, jossa pelaaja 2 pelaa puhdasta strategiaa $(0,1)^\top$. Toisin sanoen riittää tarkastella vain pelaajan 1 puhtaita strategioita, kun pelaaja 2 pelaa omaa puhdasta strategiaansa. Vastaavalla tavalla voidaan käydä läpi tapaukset pelaajan 2 näkökulmasta.

Tarkastellaan seuraavaksi Nashin sekatasapainoja. Oletetaan, että pelaaja 1 pelaa strategiaansa U todennäköisyydellä p ja strategiaansa D todennäköisyydellä $1-p$. Tällöin määritelmän 3.12 nojalla pelaajan 2 molempien valintojen L ja R tulosten on oltava yhtä suuret. Jos odotettu tulos toisella valinnalla olisi suurempi kuin toisella, olisi parempi pelata tätä valintaa useammin. Ehdoksi saadaan

$$b_{11}p + b_{21}(1-p) = b_{12}p + b_{22}(1-p),$$

josta voidaan ratkaista

$$p = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{22} - b_{21} - b_{12} + b_{11}}.$$

Näin ollen sekatasapainostrategia pelaajalle 1 on $(p, 1-p)^\top$ tällä todennäköisyyden p arvolla.

Oletetaan sitten, että pelaaja 2 pelaa strategiaansa L todennäköisyydellä q ja strategiaansa R todennäköisyydellä $1-q$. Vastaavasti määritelmän 3.12 nojalla pelaajan 1 molempien valintojen U ja D tulosten on oltava yhtäsuuret. Ehdoksi saadaan

$$a_{11}q + a_{12}(1-q) = a_{21}q + a_{22}(1-q),$$

josta voidaan ratkaista

$$q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} - a_{21} - a_{12} + a_{11}}.$$

Sekatasapainostrategia pelaajalle 2 on $(q, 1-q)^\top$ tällä todennäköisyyden q arvolla. Edelleen saadaan pelin Nashin sekatasapainoksi (p^*, q^*), missä $p^{*\top} = (p, 1-p)^\top$ ja $q^{*\top} = (q, 1-q)^\top$.

Esimerkki 3.24. Jatketaan esimerkkiä 3.10 ja määrätään pelin tasapainot. Edellisen päättelyn mukaan puhtaat Nashin tasapainot löytyvät tulosmatriisista. Jos pelaaja 2 valitsee 'komedian', niin pelaajan 1 kannattaa myös valita 'komedia'. Samoin, jos pelaaja 2 valitsee 'jännityksen', niin pelaajan 1 kannattaa valita 'jännitys'. Sama pätee myös toisinpäin.

Pelaaja 2 Pelaaja 1	Komedia	Jännitys
Komedia	$(\underline{4}, \underline{1})$	(0, 0)
Jännitys	(0, 0)	$(\underline{1}, \underline{4})$

Näin ollen puhtaat Nashin tasapainot ovat ruudut ('komedia', 'komedia') ja ('jännitys', 'jännitys').

Ratkaistaan seuraavaksi Nashin sekatasapainot. Oletetaan, että pelaaja 1 pelaa strategiaansa 'komedia' todennäköisyydellä p ja ja strategiaansa 'jännitys' todennäköisyydellä $1-p$. Tällöin pelaajan 2 valintojen 'komedia' ja 'jännitys' tulosten on oltava yhtä suuret. Ratkaisemalla yhtälö

$$p = 4(1-p)$$

saadaan $p = \frac{4}{5}$. Näin ollen sekatasapainostrategia pelaajalle 1 on $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})^\top$.

Oletetaan, että pelaaja 2 pelaa strategiaansa 'komedia' todennäköisyydellä q ja strategiaansa 'jännitys' todennäköisyydellä $1-q$. Vastaavasti pelaajan 1 valintojen 'komedia' ja 'jännitys' tulosten on oltava yhtä suuret. Ratkaisemalla yhtälö

$$4q = 1 - q$$

saadaan $q = \frac{1}{5}$. Sekatasapainostrategia pelaajalle 2 on $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})^\top$. Lopuksi saadaan pelin Nashin sekatasapainoksi $[(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})^\top, (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})^\top]$.

Sukupuolten taistelussa tekemällä sitoutumisen, eli pelaamalla vain toista strategiaa, peli kannustaa puhtaaseen Nashin tasapainoon. Huomataan, että tulos pelaajalle, joka ei tee sitoutumista, on korkeampi kuin tulos yksikäsitteisessä Nashin sekatasapainossa. Esimerkissä 3.10 saatiin kummankin pelaajan turvarajaksi $\frac{4}{5}$, joten yleisessä summapelissä pelaaja saa ainakin turvarajansa verran.

Esimerkki 3.25. Osoitetaan, että esimerkissä 3.24 saadut tasapainot ovat todella Nashin tasapainoja. Näytetään, että ('komedia', 'komedia') on puhdas Nashin tasapaino. Käyttäen määritelmää 3.12 saadaan

$$\begin{aligned} p^{*\top} A q^* &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \geqslant 4p = \begin{pmatrix} 4p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p^\top A q^* \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \Delta_2$ ja

$$\begin{aligned} p^{*\top} B q^* &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \geqslant q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = p^{*\top} B q \end{aligned}$$

kaikilla $q \in \Delta_2$. Näytetään seuraavaksi, että ('jännitys', 'jännitys') on puhdas Nashin tasapaino. Kuten edellä, saadaan

$$p^{*\top} A q^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \geqslant 1 - p = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p^\top A q^*$$

kaikilla $p \in \Delta_2$ ja

$$p^{*\top} B q^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \geqslant 4 - 4q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = p^{*\top} B q$$

kaikilla $q \in \Delta_2$.

Osoitetaan lopuksi, että pelin Nashin sekatasapaino on $[(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})^\top, (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})^\top]$. Edelleen käyttäen määritelmää 3.12 saadaan

$$p^{*\top} A q^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \geqslant \frac{4}{5} = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = p^\top A q^*$$

kaikilla $p \in \Delta_2$ ja

$$p^{*\top} B q^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \geqslant \frac{4}{5} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = p^{*\top} B q$$

kaikilla $q \in \Delta_2$.

Seuraava esimerkki tunnetaan nimellä *Cournot'n duopolimalli*, joka on yksi peliteorian klassikoista. Sen kehitti Antoine A. Cournot vuonna 1838. Lisäksi se on yksi teollisen organisaatioteorian kulmakivistä. Strateginen peli määriteltiin määritelmässä 2.2. Esimerkissä tutkitaan tapausta, jossa käytetään tulosmatriisin sijaan tulosfunktiota $u_i : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ pelaajalle i, $i = 1, 2$. Joukko S_i on pelaajan i käytettävissä olevien strategioiden joukko, jonka alkiot s_i ovat pelaajan i strategioita. Tässä tapauksessa aikaisempi Nashin tasapainon määritelmä, määritelmä 3.12, yleistyy suoraan. Ennen esimerkkiä annetaan Nashin tasapainon määritelmä edellä mainitussa tilanteessa.

Huomautus 3.26. Strategiapari (s_1^*, s_2^*) on *Nashin tasapaino*, jos pätee

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geqslant u_1(s_1, s_2^*)$$

kaikilla strategioilla $s_1 \in S_1$ ja

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geqslant u_2(s_1^*, s_2)$$

kaikilla strategioilla $s_2 \in S_2$. Toisin sanoen strategia s_1^* on sellainen, että

$$\max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2^*) = u_1(s_1^*, s_2^*),$$

ja vastaavasti strategia s_2^* on sellainen, että

$$\max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1^*, s_2) = u_2(s_1^*, s_2^*).$$

Esimerkki 3.27. Tarkastellaan kahta yritystä, jotka tuottavat homogeenista tuotetta. Olkoon m_1 yrityksen 1 tuotantomäärä ja m_2 yrityksen 2 tuotantomäärä. Olkoon

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q, \ \mathit{kun} & Q < a \\ 0, \ \mathit{kun} & Q \geqslant a \end{cases}$$

markkinahinta, missä a on positiivinen vakio ja yhteenlaskettu tuotantomäärä on $Q = m_1 + m_2$. Oletetaan, että kokonaiskustannukset yritykselle i, $i = 1, 2$, tuotantomäärällä m_i ovat $C_i(m_i) = c \cdot m_i$, missä c on rajakustannus, $c < a$. Rajakustannus tarkoittaa kokonaiskustannusten muutosnopeutta eli derivaattaa. Lisäksi oletetaan, että yritykset valitsevat tuotantomääränsä samanaikaisesti.

Tässä tapauksessa on kaksi pelaajaa, yritys 1 ja yritys 2. Mahdolliset strategiat kummallekin yritykselle ovat erilaiset tuotantomäärät. Oletetaan, että tuotos on jatkuvasti jaettavissa ja se ei voi olla negatiivinen. Yrityksen i strategia-avaruus on $S_i = [0, \infty)$, missä strategia s_i on tuotantomäärä $m_i \geqslant 0$. Koska $P(Q) = 0$, kun $Q \geqslant a$, niin yritys i ei tuota määrää $m_i > a$.

Oletetaan, että yrityksen tulos on yksinkertaisesti sen tuotto. Tällöin tulos yritykselle i on

$$u_i(m_i, m_j) = m_i[P(m_i + m_j) - c] = m_i[(a - (m_i + m_j)) - c].$$

Cournot'n duopolimallissa tuotantopari (m_1^*, m_2^*) on Nashin tasapaino, jos yritykselle i m_i^* ratkaisee ehdon

$$u_i(m_i^*, m_j^*) = \max_{0 \leqslant m_i < \infty} u_i(m_i, m_j^*) = \max_{0 \leqslant m_i < \infty} m_i[(a - (m_i + m_j^*)) - c].$$

Funktion maksimi löytyy joko reunalta tai derivaatan nollakohdasta. Tässä tapauksessa olettamalla, että $m_j^* < a-c$, ensimmäisen kertaluvun ehto yrityksen i optimointiongelmaan antaa

$$m_i = \frac{1}{2}(a - m_j^* - c).$$

Tällöin, jos tuotantopari (m_1^*, m_2^*) on Nashin tasapaino, yritysten tuotantovalinnoille täytyy päteä

$$\begin{cases} m_1^* = \frac{1}{2}(a - m_2^* - c) \\ m_2^* = \frac{1}{2}(a - m_1^* - c). \end{cases}$$

Ratkaisemalla saatu yhtälöpari saadaan

$$m_1^* = m_2^* = \frac{a-c}{3},$$

joka on vähemmän kuin $a - c$, kuten oletettiin. Tämä strategia on optimaalinen kummallekin yritykselle.

LUKU 4

Peliteorian soveltaminen huutokauppoihin

Tässä luvussa sovelletaan aiemmissa luvuissa esiteltyä teoriaa huutokauppoihin. Aiemmin on käsitelty täydellisen informaation pelejä, joissa ei ole yksityistä informaatiota ja kaikki informaatio on yleisesti kaikkien tiedossa. Huutokauppojen tapauksessa tilanne on kuitenkin erilainen, koska huutokauppoihin kuuluu olennaisena osana epätäydellinen informaatio. Tarkastelun kohteena ovat pääsääntöisesti yhden huutokaupattavan kohteen huutokaupat, joissa kaikki tarjoajat huutavat yhtä samaa kohdetta. Luvun lopuksi tarkastellaan radiotaajuushuutokauppoja, joissa on useampi huutokaupattava kohde. Tämän luvun päälähdeteoksina on käytetty David Easleyn ja Jon Kleinbergin kirjaa [**6**], Robert Gibbonsin teosta [**8**], Paul Klempererin paperia [**11**], Vijay Krishnan kirjaa [**12**] sekä Flavio Menezesin ja Paulo Monteiron teosta [**14**].

4.1. Huutokauppamekanismin perustyypit

Seuraavaksi esitellään neljä huutokauppamekanismin perustyyppiä. Tämän kappaleen lähteenä on käytetty Vijay Krishnan kirjaa [**12**].

Määritelmä 4.1. *Englantilaisessa huutokaupassa* (*nousevan hinnan avoin huutokauppa*) tarjoaminen lähtee myyjän ilmoittamasta minimihinnasta ja tarjoajat tekevät kasvavia tarjouksia. Tarjoaminen jatkuu, kunnes uusia tarjouksia ei tule. Korkeimman tarjouksen tehnyt saa huutokaupattavan kohteen hinnalla, jonka hän tarjosi.

Tässä luvussa mallinnetaan englantilaista huutokauppaa "painikehuutokauppana". Jokainen tarjoaja painaa nappia samaan aikaan, kun hinta nousee jatkuvasti. Tarjoaja putoaa pois huutokaupasta, kun hän ottaa kätensä pois napilta. Huutokauppa loppuu, kun yksi tarjoaja on jäljellä painamassa nappia. Jäljellä oleva tarjoaja saa huutokaupattavan kohteen hinnalla, jolla toiseksi viimeinen tarjoaja lopetti napin painamisen.

Määritelmä 4.2. *Hollantilaisessa huutokaupassa* (*laskevan hinnan avoin huutokauppa*) myyjä ilmoittaa lähtöhinnan, jota hän pudottaa alaspäin. Ensimmäinen tarjoajista, joka ilmoittaa ostavansa huutokaupattavan kohteen, saa sen tarjoamallaan hinnalla.

Määritelmä 4.3. *Suljetussa korkeimman tarjouksen huutokaupassa* jokainen tarjoaja jättää suljetun tarjouksen myyjälle. Myyjä avaa tarjoukset ja korkeimman tarjouksen tehnyt saa huutokaupattavan kohteen tarjoamaansa hintaan.

Vickrey-huutokauppa on William Vickreyn vuonna 1961 kehittämä huutokaupan muoto.

Määritelmä 4.4. *Suljetussa toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupassa*, jota kutsutaan myös *Vickrey-huutokaupaksi*, jokainen tarjoaja jättää suljetun tarjouksen myyjälle. Myyjä avaa tarjoukset ja korkeimman tarjouksen tehnyt saa huutokaupattavan kohteen toiseksi korkeimman tarjouksen hinnalla.

4.2. Yksityinen arvo -huutokaupat

Tässä kappaleessa keskitytään *yksityinen arvo -huutokauppoihin*, joissa jokaisen tarjoajan oma arvo huutokaupattavalle kohteelle on yksityistä informaatiota. On olemassa myös *yhteinen arvo -huutokauppoja*, joissa myytävän kohteen todellinen arvo on sama kaikille tarjoajille, mutta tarjoajilla on erilaista yksityistä tietoa, mikä tämä arvo on. Yhteinen arvo -mallista löytyy esimerkiksi Vijay Krishnan kirjasta [**12**], josta myös seuraavat oletukset on katsottu.

Yksityinen arvo -mallissa oletetaan, että yksi kohde on huudettavissa ja mahdollisten tarjoajien määrä on $n \in \mathbb{N}$. Tarjoaja i, $i = 1, ..., n$, määrittää huutokaupattavalle kohteelle arvon V_i, joka on suurin summa, jonka hän on halukas maksamaan kohteesta. Koska tarjoajat eivät tiedä toisten tarjoajien arvoja, tarjoajien arvoja voidaan mallintaa satunnaismuuttujina V_i.

Esimerkki 4.5. Tarkastellaan satunnaismuuttujaa V_i. Olkoon perusjoukko $\Omega = [0, \infty)$. Tällöin $V_i =$ "tarjoajan i arvo huutokaupattavalle kohteelle", $V_i(\omega) = \omega$, on satunnaismuuttuja, joka on siis kuvaus $V_i : \Omega \to \mathbb{R}$. Satunnaismuuttujan V_i todennäköisyysjakauma on tyypillisesti tasajakauma.

Oletetaan lisäksi, että jokainen satunnaismuuttuja V_i on riippumattomasti ja samoin jakautunut välillä $[0, \infty)$ kasvavan kertymäfunktion F mukaisesti. Oletetaan, että kertymäfunktiolla F on jatkuva tiheysfunktio f, jolle pätee $f = F'$. Lisäksi oletetaan, että pätee $\mathbb{E}[V_i] < \infty$.

Tarjoaja i tietää oman arvostuksensa $v_i \in [0, \infty)$, joka on satunnaismuuttujan V_i realisaatio, ja vain, että muiden tarjoajien arvot ovat riippumattomasti jakautuneita kertymäfunktion F mukaisesti. Kaikki mallin osat, paitsi todelliset arvot, oletetaan olevan kaikkien tarjoajien yleisessä tiedossa. Erityisesti kertymäfunktio F ja tarjoajien määrä n ovat yleisessä tiedossa.

Lisäksi oletetaan, että tarjoajilla ei ole minkäänlaisia maksuvalmius- tai budjettirajoitteita. Tämä tarkoittaa, että jokaisella tarjoajalla on riittävät resurssit maksaa myyjälle arvostuksensa verran. Tällöin jokainen tarjoaja on sekä halukas että kykenevä maksamaan arvostuksensa verran.

Määritelmä 4.6. *Strategia* tarjoajalle i on tarjousfunktio $b_i : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$, joka määrittää hänen korkeimman tarjouksensa eli *strategiansa* $b_i(v_i)$ arvostuksella $v_i \in [0, \infty)$.

Määritelmä 4.7. *Strategia-avaruus* määritellään karteesisena tulona

$$B := B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n,$$

missä B_i on tarjoajan i *strategia-avaruus*, jonka alkiot ovat tarjoajan i tarjouksia $b_i(v_i)$ eli positiivisia reaalilukuja.

Funktio $p : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ määrittää *huutokaupattavan kohteen myyntihinnan* $p(b_1(v_1), ..., b_n(v_n))$ tarjouksilla $(b_1(v_1), ..., b_n(v_n))$. Edelleen funktion p avulla voidaan määritellä tarjoajan i tulos. Ennen määritelmää otetaan käyttöön seuraavat merkinnät merkintöjen lyhentämiseksi.

Merkintä 4.8. Merkinnällä $v_{j\neq i}$ tarkoitetaan tarjoajien $j \neq i$ arvostuksia $(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)$.

Merkintä 4.9. Merkinnällä $(b_j(v_j))_{j\neq i}$ tarkoitetaan tarjoajien $j \neq i$ tarjouksia $(b_1(v_1), ..., b_{i-1}(v_{i-1}), b_{i+1}(v_{i+1}), ..., b_n(v_n))$.

Huomautus 4.10. Edellä mainittujen merkintöjen avulla voidaan tarjoukset $(b_1(v_1), ..., b_n(v_n))$ kirjoittaa lyhyemmin muodossa $(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i})$ ja vastaavasti arvostukset $(v_1, ..., v_n)$ muodossa $(v_i, v_{j\neq i})$.

Määritelmä 4.11. *Tulos* tarjoajalle i on funktio $u_i : B \times [0, \infty)^n \to \mathbb{R}$,

$$u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}) =$$
$$\begin{cases} v_i - p(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}), \ jos & b_i(v_i) > \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\} \\ \frac{1}{k}\left(v_i - p(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i})\right), \ jos & b_i(v_i) = \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\} \\ 0, \ jos & b_i(v_i) < \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\}, \end{cases}$$

missä $b_i(v_i)$ on tarjoajan i tarjous, v_i on tarjoajan i arvostus, $p(\cdot)$ on huutokaupattavan kohteen myyntihinta tarjouksilla $(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i})$ ja $k > 1$ on tasatulosten määrä.

Huomautus 4.12. Tasatilanteessa huutokaupattava kohde jaetaan voittaneiden tarjousten tehneiden kesken yhtä suurella todennäköisyydellä.

Seuraavaksi määritellään tarjoajan i tulos eri huutokauppamekanismeissa.

Määritelmä 4.13. Englantilaisessa, hollantilaisessa ja suljetussa korkeimman tarjouksen huutokaupassa *tulos* tarjoajalle i on funktio $u_i : B \times [0, \infty)^n \to \mathbb{R}$,

$$u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}) = \begin{cases} v_i - b_i(v_i), \ jos & b_i(v_i) > \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\} \\ \frac{1}{k}\left(v_i - b_i(v_i)\right), \ jos & b_i(v_i) = \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\} \\ 0, \ jos & b_i(v_i) < \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\}, \end{cases}$$

missä $b_i(v_i)$ on tarjoajan i tarjous, v_i on tarjoajan i arvostus ja $k > 1$ on tasatulosten määrä.

Huomautus 4.14. Huutokauppamekanismien vertailemiseksi englantilaisessa ja hollantilaisessa huutokaupassa on huomioitu myös tasatulokset.

Määritelmä 4.15. Suljetussa toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupassa *tulos* tarjoajalle i on funktio $u_i : B \times [0, \infty)^n \to \mathbb{R}$,

$$u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}) =$$
$$\begin{cases} v_i - \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\}, \ jos & b_i(v_i) > \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\} \\ \frac{1}{k}\left(v_i - \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\}\right), \ jos & b_i(v_i) = \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\} \\ 0, \ jos & b_i(v_i) < \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\}, \end{cases}$$

missä $b_i(v_i)$ on tarjoajan i tarjous, v_i on tarjoajan i arvostus ja $k > 1$ on tasatulosten määrä.

Merkintä 4.16. Merkintä $B_{j\neq i}$ tarkoittaa karteesista tuloa $B_1 \times \cdots \times B_{i-1} \times B_{i+1} \times \cdots \times B_n$ tarjoajien $j \neq i$ strategia-avaruuksista.

MÄÄRITELMÄ 4.17. Olkoot $b_i'(v_i) \neq b_i(v_i) \in B_i$ tarjoajan i strategioita. Sanotaan, että strategia $b_i'(v_i)$ *dominoi heikosti* strategiaa $b_i(v_i)$, jos pätee

$$u_i(b_i'(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}) \geqslant u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i})$$

kaikilla $(b_j(v_j))_{j\neq i} \in B_{j\neq i}$ ja $(v_i, v_{j\neq i}) \in [0,\infty)^n$ sekä on olemassa ainakin yksi $(b_j(v_j))_{j\neq i} \in B_{j\neq i}$, jolle pätee

$$u_i(b_i'(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}) > u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}).$$

Huomautus 4.18. Sana heikko viittaa yhtäsuuruuteen. Toisin sanoen strategia $b_i'(v_i)$ on aina vähintään yhtä hyvä kuin strategia $b_i(v_i)$ tarjoajalle i.

MÄÄRITELMÄ 4.19. Sanotaan, että strategia $b_i'(v_i)$ on *heikosti dominoiva* strategia, jos se dominoi heikosti tarjoajan i kaikkia muita strategioita.

Lauseiden todistuksissa käytetään seuraavaa merkintää.

MERKINTÄ 4.20. Merkinnällä $u_i(\cdot)$ tarkoitetaan tarjoajan i tulosta $u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i})$ ja merkinnällä $p(\cdot)$ huutokaupattavan kohteen myyntihintaa.

Seuraavien lauseiden todistuksia on katsottu Vijay Krishnan kirjasta [**12**].

LAUSE 4.21. *Suljetussa toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupassa heikosti dominoiva strategia tarjoajalle i on tarjota arvolla*

$$b_i(v_i) = v_i, \quad \textit{missä } v_i \in [0,\infty).$$

TODISTUS. Näytetään, että strategia $b_i(v_i) = v_i$ dominoi heikosti kaikkia muita tarjoajan i strategioita. Olkoon m_i korkein tarjous tarjoajalle i, $m_i := \max_{j\neq i}\{b_j(v_j)\}$.

Oletetaan, että $m_i > v_i$. Tällöin tarjoamalla $b_i(v_i) \leqslant v_i < m_i$ tarjoaja i häviää huutokaupan ja hänen tuloksensa on nolla. Samoin käy tilanteessa, jossa tarjoaja i tarjoaa $v_i < b_i(v_i) < m_i$. Tarjoamalla $b_i(v_i) = m_i > v_i$ tarjoajan i tarjous on yhtä suuri kuin korkein tarjous. Jos hän voittaa huutokaupan, hänen tuloksensa on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - m_i < 0$. Muuten hänen tuloksensa on nolla. Tarjoamalla $b_i(v_i) > m_i > v_i$ tarjoaja i voittaa huutokaupan ja hänen tuloksensa on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - m_i < 0$.

Oletetaan seuraavaksi, että $m_i = v_i$. Tarjoamalla $b_i(v_i) < v_i = m_i$ tarjoaja i häviää huutokaupan ja hänen tuloksensa on nolla. Tilanteessa $b_i(v_i) = v_i = m_i$ tarjoajan i tarjous on yhtä suuri kuin korkein tarjous. Jos hän voittaa huutokaupan, hänen tuloksensa on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - v_i = 0$. Muuten hänen tuloksensa on myös nolla. Jos tarjoaja i tarjoaa $b_i(v_i) > v_i = m_i$, hän voittaa huutokaupan ja hänen tuloksensa on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - v_i = 0$.

Oletetaan lopuksi, että $m_i < v_i$. Tällöin tarjoamalla $b_i(v_i) < m_i < v_i$ tarjoaja i häviää huutokaupan ja hänen tuloksensa on nolla. Tarjoamalla $b_i(v_i) = m_i < v_i$ tarjoajan i tarjous on yhtä suuri kuin korkein tarjous. Jos hän voittaa huutokaupan, hänen tuloksensa on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - m_i > 0$. Muuten hänen tuloksensa on nolla. Tilanteessa $m_i < b_i(v_i) < v_i$ tarjoaja i voittaa huutokaupan ja hänen tuloksensa on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - m_i > 0$. Jos tarjoaja i tarjoaa $b_i(v_i) = v_i > m_i$, niin hän myös voittaa huutokaupan ja hänen tuloksensa on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - m_i > 0$. Lisäksi tarjoamalla $b_i(v_i) > v_i > m_i$ tarjoaja i voittaa huutokaupan ja hänen tuloksensa on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - m_i > 0$.

Kaikissa tilanteissa tarjoaja i päätyy joko samaan tai huonompaan tulokseen kuin tarjoamalla $b_i(v_i) = v_i$. Siten strategia $b_i(v_i) = v_i$ dominoi heikosti kaikkia muita tarjoajan i strategioita, joten se on heikosti dominoiva strategia. □

LAUSE 4.22. *Englantilaisessa huutokaupassa heikosti dominoiva strategia tarjoajalle i on jatkaa tarjoamista, kunnes huutokaupattavan kohteen myyntihinta $p(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j \neq i})$ ylittää oman arvostuksen $v_i \in [0, \infty)$.*

TODISTUS. Näytetään, että strategia ”tarjoa, kunnes $p(\cdot) > v_i$” dominoi heikosti kaikkia muita tarjoajan i strategioita. Oletetaan, että tarjoajan i tarjous $b_i(v_i)$ on korkein tarjous. Tällöin hän voittaa huutokaupan. Tilanteessa $b_i(v_i) > v_i$ tarjoajan i tulos on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - b_i(v_i) < 0$ ja tilanteessa $b_i(v_i) \leqslant v_i$ tarjoajan i tulos on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - b_i(v_i) \geqslant 0$.

Oletetaan seuraavaksi, että tarjoajan i tarjous $b_i(v_i)$ on yhtä suuri kuin korkein tarjous. Jos hän voittaa huutokaupan, hänen tuloksensa tarjouksella $b_i(v_i) > v_i$ on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - b_i(v_i) < 0$ ja tarjouksella $b_i(v_i) \leqslant v_i$ on $u_i(\cdot) = v_i - p(\cdot) = v_i - b_i(v_i) \geqslant 0$. Muuten hänen tuloksensa on nolla.

Oletetaan sitten, että tarjoajan i tarjous $b_i(v_i)$ on vähemmän kuin korkein tarjous. Tarjouksilla $b_i(v_i) > v_i$ tai $b_i(v_i) \leqslant v_i$ tarjoajan i tulos on nolla, koska hän häviää huutokaupan.

Huomataan, että kaikissa tilanteissa tarjoaja i päätyy samaan tai huonompaan tulokseen kuin lopettamalla tarjoamisen, kun hänen arvostuksensa v_i on saavutettu. Näin ollen heikosti dominoiva strategia on tarjota niin kauan kuin myyntihinta on sama kuin oma arvostus. □

MÄÄRITELMÄ 4.23. Kahden huutokaupan samalla tarjoajien joukolla ja samalla strategia-avaruudella sanotaan olevan *strategisesti ekvivalentit*, jos jokaisen tarjoajan odotetut tulokset yhdessä huutokaupassa ovat identtisiä odotettuihin tuloksiin toisessa huutokaupassa.

MÄÄRITELMÄ 4.24. Sanotaan, että kaksi huutokauppaa ovat *ekvivalentteja tuoton suhteen*, jos ne johtavat samaan odotettuun myyntihintaan eli tuottoon myyjälle.

Seuraavien lauseiden todistukset ovat Flavio Menezesin ja Paulo Monteiron teoksesta [**14**].

LAUSE 4.25. *Suljettu toiseksi korkeimman tarjouksen huutokauppa ja englantilainen huutokauppa ovat strategisesti ekvivalentit. Edelleen nämä huutokaupat ovat ekvivalentteja tuoton suhteen.*

TODISTUS. Lauseiden 4.21 ja 4.22 mukaan molemmissa huutokaupoissa heikosti dominoiva strategia on tarjota oman arvostuksensa verran. Tarkastellaan strategioita $(b_1(v_1), ..., b_n(v_n)) = (v_1, ..., v_n)$, jotka ovat lopputulema molemmissa huutokaupoissa. Oletetaan lisäksi, että $b_1(v_1)$ on korkein tarjous ja $b_2(v_2)$ on toiseksi korkein tarjous.

Tällöin suljetussa toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupassa tarjoaja 1 voittaa huutokaupattavan kohteen ja hänen tuloksensa on $u_1(\cdot) = v_1 - p(\cdot) = v_1 - v_2$. Muille tarjoajille tulos on nolla. Lauseen 4.22 mukaan englantilaisessa huutokaupassa tarjoaja, jolla on toiseksi korkein arvostus, lopettaa tarjoamisen, kun hänen arvostuksensa on saavutettu. Tällöin huutokauppa loppuu ja tarjoaja, jolla on korkein arvostus, saa huutokaupattavan kohteen hintaan, joka on yhtä suuri kuin toiseksi korkein arvostus. Näin ollen tarjoajan 1 tulos on $u_1(\cdot) = v_1 - p(\cdot) = v_1 - v_2$. Muille tarjoajille tulos on nolla.

Lisäksi mahdollisessa tasatilanteessa huutokaupattava kohde jaetaan voittaneiden tarjousten tehneiden kesken yhtä suurella todennäköisyydellä. Tällöin, jos tarjoaja 1 saa huutokaupattavan kohteen, hänen tuloksensa on $u_1(\cdot) = v_1 - p(\cdot) = v_1 - v_1 = 0$ kummassakin huutokaupassa. Vastaavasti muille tarjoajille tulos on nolla.

Kuitenkin tarjoajat 1 ja 2 oli valittu mielivaltaisesti. Johtopäätös on, että samat strategiat $(b_1(v_1), ..., b_n(v_n)) = (v_1, ..., v_n)$ molemmissa huutokaupoissa, antavat samat tulokset kaikille tarjoajille. Näin ollen huutokaupat ovat strategisesti ekvivalentit. Edelleen nämä huutokaupat antavat saman odotetun tuoton myyjälle, joten ne ovat ekvivalentteja tuoton suhteen. □

Huomautus 4.26. Ekvivalenssia suljetun toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupan ja englantilaisen huutokaupan välillä sanotaan heikoksi, koska se pätee vain yksityisten arvojen tapauksessa. Tässä tapauksessa huutokaupat ovat strategisesti ekvivalentit ja optimaaliset strategiat näissä huutokaupoissa ovat samat.

Jos arvot eivät ole yksityisiä, niin englantilaisessa huutokaupassa tarjoajat saavat tarjoamisen aikana tietoa, jota he voivat käyttää hyväksi heidän strategioissaan. Suljetussa toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupassa tällaista tietoa ei ole saatavilla. Näin ollen huutokaupat voivat johtaa hyvinkin erilaisiin tuloksiin.

LAUSE 4.27. *Suljettu korkeimman tarjouksen huutokauppa ja hollantilainen huutokauppa ovat strategisesti ekvivalentit. Edelleen nämä huutokaupat ovat ekvivalentteja tuoton suhteen.*

TODISTUS. Tarkastellaan strategioita $(b_1(v_1), ..., b_n(v_n))$, jotka ovat lopputulema molemmissa huutokaupoissa. Oletetaan esimerkiksi, että $b_1(v_1)$ on korkein tarjous.

Tällöin suljetussa korkeimman tarjouksen huutokaupassa tarjoaja 1 voittaa huutokaupattavan kohteen ja hänen tuloksensa on $u_1(\cdot) = v_1 - p(\cdot) = v_1 - b_1(v_1)$. Muille tarjoajille tulos on nolla. Hollantilaisessa huutokaupassa, jos tarjoaja 1 ilmoittaa ostavansa huutokaupattavan kohteen hinnalla $b_1(v_1)$, hänen tuloksensa on $u_1(\cdot) = v_1 - p(\cdot) = v_1 - b_1(v_1)$. Muille tarjoajille tulos on nolla.

Lisäksi mahdollisessa tasatilanteessa huutokaupattava kohde jaetaan voittaneiden tarjousten tehneiden kesken yhtä suurella todennäköisyydellä. Tällöin, jos tarjoaja 1 saa huutokaupattavan kohteen, hänen tuloksensa on $u_1(\cdot) = v_1 - p(\cdot) = v_1 - b_1(v_1)$ kummassakin huutokaupassa. Vastaavasti muille tarjoajille tulos on nolla.

Tarjoaja 1 oli kuitenkin valittu mielivaltaisesti. Johtopäätös on, että mille tahansa tarjoajalle, jolla on korkein tarjous, strategiat $(b_1(v_1), ..., b_n(v_n))$ antavat samat tulokset kaikille tarjoajille, kun samoja strategioita käytetään molemmissa huutokaupoissa. Näin ollen huutokaupat ovat strategisesti ekvivalentit. Edelleen nämä huutokaupat antavat saman odotetun tuoton myyjälle, joten ne ovat ekvivalentteja tuoton suhteen. □

Lauseiden 4.25 ja 4.27 perusteella suljettu toiseksi korkeimman tarjouksen huutokauppa ja englantilainen huutokauppa sekä suljettu korkeimman tarjouksen huutokauppa ja hollantilainen huutokauppa ovat ekvivalentteja. Tällöin voidaan jatkossa tarkastella vain suljettua toiseksi korkeimman tarjouksen huutokauppaa ja suljettua korkeimman tarjouksen huutokauppaa.

Seuraavaksi määritellään yksityinen arvo -huutokauppa pelinä tarjoajien joukossa, jotta voidaan määrätä vastaavat tasapainot. Huomaa, että strategisen pelin määritelmä, määritelmä 2.2, ei sovellu tähän sellaisenaan, koska tarjoajilla on yksityistä informaatiota. Tarjoajan i arvostus v_i kuvaa hänen yksityistä informaatiotaan. Määritelmän lähteenä on käytetty Robert Gibbonsin teosta [**8**].

MÄÄRITELMÄ 4.28. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Kokoelmaa joukkoja $T_i = [0, \infty)$ ja $B_i = \mathbb{R}_+$ sekä kuvauksia $F_i : T_i \to [0, 1]$ ja $u_i : (B_1 \times \cdots \times B_n) \times (T_1 \times \cdots \times T_n) \to \mathbb{R}$, missä $i = 1, ..., n$, kutsutaan *bayesiläiseksi peliksi*. Se voidaan kuvata viisikolla

$$G^* = (N, (T_i), (B_i), (F_i), (u_i)),$$

missä $N = \{1, ..., n\}$ on pelaajien eli *tarjoajien joukko*, joukko $T_i = [0, \infty)$ on tarjoajan $i \in N$ mahdollisten *arvostusten joukko*, jonka alkiot v_i ovat tarjoajan i *arvostuksia*, joukko $B_i = \mathbb{R}_+$ on tarjoajan i *strategia-avaruus*, jonka alkiot $b_i(v_i)$ ovat tarjoajan i *tarjouksia*, missä kuvaus $b_i : T_i \to B_i$ on tarjoajan i *tarjousfunktio*, kuvaus F_i on tarjoajan i *kertymäfunktio* ja kuvaus u_i on tarjoajan i *tulosfunktio*. Kertymäfunktio F_i kertoo, mitä tarjoaja i uskoo muiden tarjoajien arvojen olevan, kun hänen oma arvostuksensa on v_i.

Seuraavaksi annetaan esimerkki, millaiseen epävarmuuteen bayesiläinen malli liittyy.

ESIMERKKI 4.29. Tarkastellaan esimerkkiä 3.10 epävarmassa tilanteessa, jossa pelaaja 1 ei tiedä, haluaako pelaaja 2 katsoa elokuvan yhdessä vai yksin. Tällöin pelaajalla 2 voi ajatella olevan kaksi mahdollista arvostusta 'yhdessä' ja 'yksin'. Vain pelaaja 2 tietää oman arvostuksensa.

Huomautus 4.30. Mikä tahansa yksityinen arvo -huutokauppa voidaan kuvata bayesiläisenä pelinä. Tällöin huutokauppojen tasapainot määritellään bayesiläisten pelien tasapainoina.

Huomautus 4.31. Bayesiläistä peliä kutsutaan myös *epätäydellisen informaation peliksi*, koska jokaisen tarjoajan oma arvostus v_i on yksityistä informaatiota. Bayesiläinen peli on määritelmässä 2.2 määritellyn n-pelaajan strategisen pelin laajennus.

Huomautus 4.32. Bayesiläistä peliä vastaa määritelmän 2.2 mukainen n-pelaajan strateginen peli, missä pelaajien joukko on kaikkien parien (i, v_i) joukko, $i \in N$ ja $v_i \in [0, \infty)$, strategia-avaruus kullekin pelaajalle (i, v_i) on B_i ja tulosfunktio kullekin pelaajalle (i, v_i) on

$$\begin{aligned} u_{(i,v_i)}(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j \neq i}) &:= \int_{\hat{v}_{j\neq i} \in [0,\infty)^{n-1}} u_i(b_i(v_i), (b_j(\hat{v}_j))_{j\neq i}; v_i, \hat{v}_{j\neq i})\, dF^{n-1}(\hat{v}_j) \\ &= \mathbb{E}_{v_{j\neq i}}[u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i})], \end{aligned}$$

missä $u_i(\cdot)$ on määritelmän 4.11 mukainen tulosfunktio ja merkinnällä $dF^{n-1}(\hat{v}_j)$ tarkoitetaan $dF(\hat{v}_1) \cdots dF(\hat{v}_{i-1}) dF(\hat{v}_{i+1}) \cdots dF(\hat{v}_n)$.

Huomautus 4.33. Integrointi voidaan tehdä mitan $dF^{n-1}(\hat{v}_j)$ suhteen, koska tarjoajien arvot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita yleisessä tiedossa olevan kertymäfunktion F mukaisesti.

Yleistetään kahden pelaajan strategisen pelin Nashin tasapainon määritelmä koskemaan mielivaltaista pelaajien lukumäärää $n \in \mathbb{N}$. Strateginen peli määriteltiin määritelmässä 2.2.

Huomautus 4.34. Sovelletaan huomautusta 3.26 seuraavilla valinnoilla. Olkoon n pelaajien lukumäärä, B_i pelaajan i strategia-avaruus ja $u_i : B_1 \times \cdots \times B_n \to \mathbb{R}$ pelaajan i tulosfunktio. Tällöin strategiajoukko $(b_1^*(v_1), ..., b_n^*(v_n))$ on *Nashin tasapaino*, jos kaikille $i \in N$ pätee

$$u_i(b_i^*(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i}) \geqslant u_i(b_i(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i})$$

kaikilla strategioilla $b_i(v_i) \in B_i$. Toisin sanoen strategia $b_i^*(v_i)$ on sellainen, että

$$\max_{b_i(v_i) \in B_i} u_i(b_i(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i}) = u_i(b_i^*(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i}).$$

Bayesiläisen pelin Nashin tasapaino määritellään huomautuksen 4.32 mukaisen strategisen pelin Nashin tasapainona, kuten huomautuksessa 4.34.

MÄÄRITELMÄ 4.35. Strategiajoukko $(b_1^*(v_1), ..., b_n^*(v_n))$ on *bayesiläinen Nashin tasapaino*, jos jokaiselle pelaajalle (i, v_i) pätee

$$u_{(i,v_i)}(b_i^*(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i}) \geqslant u_{(i,v_i)}(b_i(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i})$$

kaikilla $b_i(v_i) \in B_i$, $v_i \in [0, \infty)$ ja $i \in N$. Toisin sanoen strategia $b_i^*(v_i)$ on sellainen, että

$$\max_{b_i(v_i) \in B_i} u_{(i,v_i)}(b_i(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i}) = u_{(i,v_i)}(b_i^*(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i}).$$

MÄÄRITELMÄ 4.36. *Symmetriseksi bayesiläiseksi Nashin tasapainoksi* sanotaan bayesiläistä Nashin tasapainoa, jossa kaikki tarjoajat käyttävät samaa tarjousfunktiota. Tätä merkitään $b(\cdot) = b_i(\cdot)$ kaikille $i \in N$.

MÄÄRITELMÄ 4.37. Tarjoaja i, jonka arvostus on v_i, ilmoittaa arvostuksensa *totuudenmukaisesti*, jos hän ilmoittaa arvostuksekseen v_i. Toisin sanoen hän käyttää strategiaa $b_i(v_i)$.

Seuraavan lemman todistus on John Morganin muistiinpanoista [**16**].

LEMMA 4.38 (Paljastusperiaate). *Mille tahansa bayesiläiselle Nashin tasapainolle on olemassa bayesiläinen peli samalla tasapainolla, jossa tarjoajat ilmoittavat arvostuksensa totuudenmukaisesti.*

TODISTUS. Olkoon strategiajoukko $(b_1^*(v_1), ..., b_n^*(v_n))$ bayesiläinen Nashin tasapaino. Jos tarjoaja i, jonka arvostus on v_i, ilmoittaa arvostuksekseen $\hat{v}_i$, hänen tuloksensa on

$$u_{(i,v_i)}(b_i^*(\hat{v}_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i}) = u_{(i,v_i)}(b_i'(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i})$$

jollakin $b_i'(v_i) \in B_i$. Koska strategiajoukko $(b_1^*(v_1), ..., b_n^*(v_n))$ on bayesiläinen Nashin tasapaino, kaikille $i \in N$ ja $v_i \in [0, \infty)$ pätee

$$u_{(i,v_i)}(b_i^*(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i}) \geqslant u_{(i,v_i)}(b_i'(v_i), (b_j^*(v_j))_{j \neq i})$$

kaikilla $b_i'(v_i) \in B_i$. Tällöin tarjoajan i kannattaa ilmoittaa arvostuksekseen v_i. $\square$

MÄÄRITELMÄ 4.39. Sanotaan, että strategiajoukko $(b_1^*(v_1), ..., b_n^*(v_n))$ on *heikosti dominoivien strategioiden tasapaino*, jos kaikille $i \in N$ pätee

$$u_i(b_i^*(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}) \geqslant u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i})$$

kaikilla $b_i(v_i) \in B_i$, $(b_j(v_j))_{j\neq i} \in B_{j\neq i}$ ja $(v_i, v_{j\neq i}) \in [0, \infty)^n$ sekä on olemassa ainakin yksi $(b_j(v_j))_{j\neq i} \in B_{j\neq i}$, jolle pätee

$$u_i(b_i^*(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}) > u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}).$$

LAUSE 4.40. *Heikosti dominoivien strategioiden tasapaino $(b_1^*(v_1), ..., b_n^*(v_n))$ on bayesiläinen Nashin tasapaino.*

TODISTUS. Koska $(b_1^*(v_1), ..., b_n^*(v_n))$ on heikosti dominoivien strategioiden tasapaino, niin kaikille $i \in N$ pätee

$$u_i(b_i^*(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}) \geqslant u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i})$$

kaikilla $b_i(v_i) \in B_i$, $(b_j(v_j))_{j\neq i} \in B_{j\neq i}$ ja $(v_i, v_{j\neq i}) \in [0, \infty)^n$. Valitsemalla $(b_j(v_j))_{j\neq i} = (b_j^*(v_j))_{j\neq i}$ saadaan

$$u_i(b_i^*(v_i), (b_j^*(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i}) \geqslant u_i(b_i(v_i), (b_j^*(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i})$$

kaikilla $b_i(v_i) \in B_i$, $v_i \in [0, \infty)$ ja $i \in N$. Edelleen ottamalla odotusarvo kummaltakin puolelta saadaan

$$\mathbb{E}_{v_{j\neq i}}[u_i(b_i^*(v_i), (b_j^*(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i})] \geqslant \mathbb{E}_{v_{j\neq i}}[u_i(b_i(v_i), (b_j^*(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i})].$$

Tällöin määritelmän 4.35 nojalla strategiajoukko $(b_1^*(v_1), ..., b_n^*(v_n))$ on bayesiläinen Nashin tasapaino. $\square$

Lauseen 4.21 seurauksena saadaan seuraava tulos.

SEURAUS 4.41. *Suljetussa toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupassa on symmetrinen bayesiläinen Nashin tasapaino jokaiselle tarjoajalle i, joka tarjoaa arvolla*

$$b^*(v_i) = b_i^*(v_i) = v_i, \quad \textit{missä } v_i \in [0, \infty).$$

TODISTUS. Lauseen 4.21 mukaan suljetussa toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupassa heikosti dominoiva strategia tarjoajalle i on tarjota arvolla $b_i(v_i) = v_i$. Edelleen sama pätee kaikille tarjoajille $i \in N$, joten $b_i(v_i) = v_i$ on heikosti dominoivien strategioiden tasapaino. Lauseen 4.40 nojalla $b_i(v_i) = v_i$ on bayesiläinen Nashin tasapaino. $\square$

Huomautus 4.42. Lauseessa 4.21 ja sen seurauksessa ei tarvita oletusta tarjoajien arvojen riippumattomuudesta ja samoinjakautuneisuudesta. Vain oletus yksityisistä arvoista on tärkeä.

MÄÄRITELMÄ 4.43. Tarjoajan i *odotettu tulos* arvostuksella v_i, kun hän ilmoittaa arvostuksekseen $\hat{v}_i$, on

$$\begin{aligned}\Pi_i(\hat{v}_i; v_i) =&(v_i - p(b_i(\hat{v}_i), (b_j(v_j))_{j\neq i})) \cdot \mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ voittaa})\\&+\frac{1}{k}(v_i - p(b_i(\hat{v}_i), (b_j(v_j))_{j\neq i})) \cdot \mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ päätyy tasatulokseen})\\&+ 0 \cdot \mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ häviää})\\=&v_i \cdot \mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ voittaa}) - p(b_i(\hat{v}_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}) \cdot \mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ voittaa})\\&+\frac{v_i}{k} \cdot \mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ päätyy tasatulokseen}) - \frac{1}{k} \cdot p(b_i(\hat{v}_i), (b_j(v_j))_{j\neq i})\\&\cdot \mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ päätyy tasatulokseen})\\=&v_i \cdot \mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ voittaa}) - \mathbb{E}_i[\text{tarjoajan } i \text{ maksu}] + \frac{v_i}{k}\\&\cdot \mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ päätyy tasatulokseen}) - \mathbb{E}_i[i\text{:n maksu tasatilanteessa}],\end{aligned}$$

missä $p(\cdot)$ on huutokaupattavan kohteen myyntihinta, $k > 1$ on tasatulosten lukumäärä, $\mathbb{P}_i$ on tarjoajan i todennäköisyys ilmoitetulla arvostuksella $\hat{v}_i$ ja $\mathbb{E}_i$ on tarjoajan i odotettavissa oleva maksu ilmoitetulla arvostuksella $\hat{v}_i$.

Huomautus 4.44. Tarjoajan i odotettu tulos on $\Pi_i(v_i; v_i)$, kun hän ilmoittaa arvostuksensa totuudenmukaisesti.

Huomautus 4.45. Todennäköisyys voidaan kirjoittaa integraalina, kuten huomautuksessa 4.32. Merkintä $\mathbb{E}_{v_{j\neq i}}[u_i(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i}; v_i, v_{j\neq i})]$ tarkoittaa myös tarjoajan i odotettua tulosta. Tarjoajan i odotetulle tulokselle käytetään lyhyempää merkintää $\Pi_i(\hat{v}_i; v_i)$, koska halutaan korostaa tarjoajan i arvostusta v_i ja hän ilmoittamaansa arvostusta $\hat{v}_i$.

Seuraavan lemman todistus on katsottu Sidney Resnickin kirjasta [**22**].

LEMMA 4.46. *Olkoot satunnaismuuttujat $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, riippumattomia ja samoin jakautuneita. Olkoon lisäksi $F(x)$ yhteinen kertymäfunktio, joka on jatkuva. Tällöin todennäköisyys, että satunnaismuuttujien arvot ovat samat, on nolla.*

TODISTUS. Kirjoitetaan

$$\mathbb{P}(\text{samat}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\neq j}[X_i = X_j]\right) \leqslant \sum_{i\neq j}\mathbb{P}[X_i = X_j],$$

missä epäyhtälö seuraa todennäköisyysjakauman subadditiivisuudesta. Nyt riittää näyttää, että $\mathbb{P}[X_1 = X_2] = 0$. Kaikille n pätee

$$[X_1 = X_2] \subset \bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{k-1}{2^n} < X_1, X_2 \leqslant \frac{k}{2^n}\right].$$

Edelleen monotonisuudesta ja subadditiivisuudesta seuraa

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 = X_2] &\leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbb{P}\left[\frac{k-1}{2^n} < X_1 \leqslant \frac{k}{2^n}, \frac{k-1}{2^n} < X_2 \leqslant \frac{k}{2^n}\right]\\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\mathbb{P}\left[\frac{k-1}{2^n} < X_1 \leqslant \frac{k}{2^n}\right]\right)^2.\end{aligned}$$

Kirjoittamalla $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F((a, b]) = F(b) - F(a)$ saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_1 = X_2] &\leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right) F\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right) \\
&\leqslant \max_{-\infty<k<\infty} F\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right) \\
&\leqslant \max_{-\infty<k<\infty} F\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right) \cdot 1 \\
&= \max_{-\infty<k<\infty} F\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right).
\end{aligned}$$

Koska kertymäfunktio F on jatkuva ja monotoninen avaruudessa $\mathbb{R}$, niin F on tasaisesti jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}$ (katso Sidney Resnickin kirjasta [**22**, s. 67]). Tällöin annetulle $\epsilon > 0$, jolle on $n \geqslant n_0(\epsilon)$, ja kaikille k saadaan

$$F\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right) = F\left(\frac{k}{2^n}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \leqslant \epsilon,$$

joten $\mathbb{P}[X_1 = X_2] \leqslant \epsilon$. □

Huomautus 4.47. Kun tarjoajat käyttävät samaa tarjousfunktiota, tasatulokset ovat mahdollisia vain, jos tarjoajien arvot ovat samat. Lemman tilanteessa tasatulokset eivät ole mahdollisia.

Seuraavan lauseen todistus pohjautuu todistukseen David Easleyn ja Jon Kleinbergin kirjassa [**6**]. Lauseessa oletetaan, että jokaisen tarjoajan arvo on riippumaton ja noudattaa todennäköisyysjakaumaa yli epänegatiivisen reaaliakselin. Todennäköisyysjakauma esitetään sen kertymäfunktion F avulla kaikille tarjoajille i. Oletetaan, että kertymäfunktio F on differentioituva funktio. Lisäksi oletetaan seuraavat kohdat.

(1) Strategia $b = b_i$ on aidosti kasvava, differentioituva funktio jokaiselle tarjoajalle i. Aidosti kasvavuudesta seuraa, että jos kahdella tarjoajalla on erilaiset arvostukset, he tekevät erilaiset tarjoukset. Toisin sanoen tarjoaja, jolla on korkein arvostus, tekee korkeimman tarjouksen ja siten voittaa huutokaupan.
(2) Kaikilla arvostuksilla v_i pätee $b_i(v_i) \leqslant v_i$. Toisin sanoen tarjoajat eivät koskaan tarjoa yli heidän arvostustensa, koska muuten he tekisivät tappiota, jos he voittaisivat huutokaupan.

Lause 4.48. *Suljetussa korkeimman tarjouksen huutokaupassa on symmetrinen bayesiläinen Nashin tasapaino jokaiselle tarjoajalle i, joka tarjoaa arvolla*

$$b^*(v_i) = b_i^*(v_i) = \begin{cases} \frac{n-1}{F^{n-1}(v_i)} \int_0^{v_i} x f(x) F^{n-2}(x)\, dx, \ \textit{jos} & 0 < v_i < \infty \\ 0, \ \textit{jos} & v_i = 0, \end{cases}$$

missä n on tarjoajien lukumäärä ja f on kertymäfunktion F tiheysfunktio.

Todistus. Oletuksen mukaan tarjoajien arvot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Lisäksi yhteinen kertymäfunktio F on differentioituva, joten se on jatkuva. Tällöin lemman 4.46 nojalla tasatulosten todennäköisyys on nolla. Odotettu tulos tarjoajalle i arvostuksella v_i on

$$\begin{aligned}\Pi_i(v_i; v_i) &= (v_i - p(b_i(v_i), (b_j(v_j))_{j\neq i})) \cdot \mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ voittaa})\\ &= (v_i - b_i(v_i)) \cdot \mathbb{P}_i(b_i(v_i) > b_j(v_j) \text{ kaikilla } j \neq i)\\ &= (v_i - b_i(v_i)) \cdot \mathbb{P}_i(v_i > v_j \text{ kaikilla } j \neq i)\\ &= (v_i - b_i(v_i)) \cdot \mathbb{P}_1(v_i > v_1) \cdots \mathbb{P}_{i-1}(v_i > v_{i-1})\mathbb{P}_{i+1}(v_i > v_{i+1}) \cdots \mathbb{P}_n(v_i > v_n)\\ &= (v_i - b_i(v_i)) \cdot F^{n-1}(v_i).\end{aligned}$$

Kolmas yhtäsuuruus seuraa oletuksesta (1), neljäs yhtäsuuruus oletuksesta, että tarjoajien arvot ovat riippumattomia, ja viimeinen yhtäsuuruus oletuksesta, että tarjoajien arvot ovat samoin jakautuneita kertymäfunktion F mukaisesti.

Määritelmän 4.35 mukaan tasapainossa jokaisen tarjoajan strategian täytyy maksimoida odotettu tulos annetuista lopuista strategioista. Olkoon $b_i(\hat{v}_i)$ tarjoajan i strategia millä tahansa muulla arvostuksella $\hat{v}_i \in [0, \infty)$. Tällöin lemman 4.38 nojalla tasapainossa pätee

$$\arg\max_{\hat{v}_i \in [0,\infty)} F^{n-1}(\hat{v}_i)(v_i - b_i(\hat{v}_i)) = v_i.$$

Ensimmäisen kertaluvun ehto antaa

$$\frac{dF^{n-1}(\hat{v}_i)(v_i - b_i(\hat{v}_i))}{d\hat{v}_i} = (n-1)F^{n-2}(\hat{v}_i)F'(\hat{v}_i)(v_i - b_i(\hat{v}_i)) - b_i'(\hat{v}_i)F^{n-1}(\hat{v}_i) = 0$$

ehdolla $\hat{v}_i = v_i$. Edelleen sijoittamalla saadaan

$$(n-1)F^{n-2}(v_i)F'(v_i)v_i - (n-1)F^{n-2}(v_i)F'(v_i)b_i(v_i) - b_i'(v_i)F^{n-1}(v_i) = 0$$

ja järjestelemällä

$$(n-1)F^{n-2}(v_i)F'(v_i)b_i(v_i) + b_i'(v_i)F^{n-1}(v_i) = (n-1)F^{n-2}(v_i)F'(v_i)v_i,$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{dF^{n-1}(v_i)b_i(v_i)}{dv_i} = (n-1)F^{n-2}(v_i)F'(v_i)v_i,$$

missä $F'(v_i) = f(v_i)$. Analyysin peruslause antaa

$$F^{n-1}(v_i)b_i(v_i) = (n-1)\int_0^{v_i} xf(x)F^{n-2}(x)\, dx + C,$$

missä $C = 0$, koska tarjoaja, jonka arvostus on nolla, ei tarjoa mitään oletuksen (2) nojalla. Näin ollen saadaan väite

$$b_i(v_i) = \frac{n-1}{F^{n-1}(v_i)}\int_0^{v_i} xf(x)F^{n-2}(x)\, dx. \qquad \square$$

Esimerkki 4.49. Jos tarjoajien arvot noudattavat tasajakaumaa välillä $[0, 1]$, niin kertymäfunktio on $F(v_i) = v_i$ ja tiheysfunktio $f(v_i) = 1$ kaikille $i \in N$. Tällöin lauseessa 4.48 oleva tasapainostrategia saadaan muotoon

$$b_i^*(v_i) = \frac{n-1}{v_i^{n-1}}\int_0^{v_i} x \cdot x^{n-2}\, dx = \frac{n-1}{v_i^{n-1}} \cdot \frac{1}{n}v_i^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)v_i.$$

Määritelmä 4.50. Tarjoaja on *riskineutraali*, jos hän maksimoi odotettua tulostaan.

Huomautus 4.51. Yksityinen arvo -mallissa oletetaan, että tarjoajat ovat riskineutraaleja. He maksimoivat määritelmän 4.43 lauseketta.

Määritelmä 4.52. Kertymäfunktio F on *atomiton*, jos pätee

$$F(x+h) - F(x-h) \to 0, \quad \text{kun } h \to 0.$$

Huomautus 4.53. Atomiton kertymäfunktio on jatkuva.

Määritelmä 4.54. Huutokauppamekanismi on *tehokas*, jos se jakaa huutokaupattavan kohteen sitä eniten arvostavalle eli tarjoajalle, jolla on korkein arvostus.

Tämän luvun päätulos on seuraava lause, jonka todistus on Paul Klempererin paperista [**11**].

Lause 4.55 (Tuottoekvivalenssilause). *Oletetaan, että jokaisella riskineutraalilla tarjoajalla, joiden määrä on $n \in \mathbb{N}$, on riippumaton yksityinen arvo yksittäiselle huutokaupattavalle kohteelle huutokaupassa. Arvot ovat peräisin yhteisestä kertymäfunktiosta $F(v)$, joka on aidosti kasvava ja atomiton välillä $[\underline{v}, \bar{v}]$. Tällöin mikä tahansa tehokas huutokauppamekanismi, jossa odotettu maksu tarjoajalle arvostuksella $\underline{v}$ on nolla, antaa saman odotetun tuoton myyjälle. Edelleen tarjoaja arvostuksella v_i maksaa saman odotetun maksun missä tahansa tehokkaassa huutokauppamekanismissa.*

Todistus. Tarkastellaan mitä tahansa huutokauppamekanismia jakaa huutokaupattava kohde. Koska tarjoajat ovat riskineutraaleja, he seuraavat heidän tasapainostrategioitaan. Olkoon $\Pi_i(v_i; v_i)$ tarjoajan i odotettu tulos arvostuksella v_i olettaen, että kaikki tarjoajat, mukaan lukien tarjoaja i, seuraavat heidän tasapainostrategioitaan. Olkoon $\mathbb{P}_i(\text{tarjoaja } i \text{ voittaa}) =: \mathbb{P}_i(v_i)$ tarjoajan i todennäköisyys, jolla hän saa huutokaupattavan kohteen, missä hänen arvostuksensa on v_i, hän seuraa tasapainostrategiaansa arvostuksellaan v_i ja kaikki muut tarjoajat seuraavat heidän tasapainostrategioitaan. Oletuksen mukaan tarjoajien arvot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Lisäksi yhteinen kertymäfunktio $F(v)$ on atomiton, joten se on jatkuva. Tällöin lemman 4.46 nojalla tasatulosten todennäköisyys on nolla. Odotettu tulos tarjoajalle i on

$$\Pi_i(v_i; v_i) = v_i \mathbb{P}_i(v_i) - \mathbb{E}_i[\text{tarjoajan } i \text{ maksu arvostuksella } v_i]. \tag{4.1}$$

Lemmasta 4.38 saadaan millä tahansa muulla arvostuksella $\hat{v}_i$, joka tarjoajalla i voisi olla, epäyhtälö

$$\Pi_i(v_i; v_i) \geqslant \Pi_i(\hat{v}_i; \hat{v}_i) + (v_i - \hat{v}_i)\mathbb{P}_i(\hat{v}_i) = \Pi_i(\hat{v}_i; v_i). \tag{4.2}$$

Jos tarjoaja i seuraisi tasapainostrategiaansa arvostuksella $\hat{v}_i$ arvostuksensa v_i sijasta, tarjoaja i maksaisi samat maksut ja voittaisi huutokaupattavan kohteen itselleen samalla todennäköisyydellä kuin tarjoaja arvostuksella $\hat{v}_i$. Kuitenkin, jos tarjoaja i voittaa kohteen, hän arvostaa sitä $(v_i - \hat{v}_i)$ verran enemmän kuin tarjoaja arvostuksella $\hat{v}_i$. Epäyhtälö pätee, koska tasapainossa tämä ero on tuottamaton.

Merkitään $\hat{v}_i = v_i + \Delta v_i$. Tällöin epäyhtälö (4.2) saadaan muotoon

$$\Pi_i(v_i; v_i) \geqslant \Pi_i(v_i + \Delta v_i; v_i + \Delta v_i) + (-\Delta v_i)\mathbb{P}_i(v_i + \Delta v_i). \tag{4.3}$$

Kun otetaan huomioon, että tarjoajan i arvostus voisi olla $v_i + \Delta v_i$, saadaan

$$\Pi_i(v_i + \Delta v_i; v_i + \Delta v_i) \geqslant \Pi_i(v_i; v_i) + \Delta v_i \mathbb{P}_i(v_i). \tag{4.4}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (4.3) ja (4.4) saadaan

$$\mathbb{P}_i(v_i + \Delta v_i) \geqslant \frac{\Pi_i(v_i + \Delta v_i; v_i + \Delta v_i) - \Pi_i(v_i; v_i)}{\Delta v_i} \geqslant \mathbb{P}_i(v_i).$$

Koska

$$\lim_{\Delta v_i \to 0} \mathbb{P}_i(v_i + \Delta v_i) = \mathbb{P}_i(v_i)$$

ja

$$\lim_{\Delta v_i \to 0} \mathbb{P}_i(v_i) = \mathbb{P}_i(v_i),$$

niin saadaan

$$\lim_{\Delta v_i \to 0} \frac{\Delta \Pi_i}{\Delta v_i} = \mathbb{P}_i(v_i).$$

Edelleen analyysin peruslause antaa

$$\Pi_i(v_i; v_i) = \Pi_i(\underline{v}; \underline{v}) + \int_{x=\underline{v}}^{v_i} \mathbb{P}_i(x) dx. \tag{4.5}$$

Tarkastellaan seuraavaksi mitä tahansa kahta tehokasta huutokauppamekanismia, joissa odotettu maksu tarjoajalle i arvostuksella $\underline{v}$ on nolla. Koska määritelmän 4.43 mukaan

$$\mathbb{E}_i[\text{tarjoajan } i \text{ maksu arvostuksella } \underline{v}] = p(b_i(\underline{v}), (b_j(v_j))_{j \neq i}) \cdot \mathbb{P}_i(\underline{v}) = 0,$$

missä $\mathbb{P}_i(\underline{v})$ on tarjoajan i voittamistodennäköisyys arvostuksella $\underline{v}$, niin on oltava $\mathbb{P}_i(\underline{v}) = 0$. Tällöin tarjoaja i arvostuksella $\underline{v}$ ei koskaan voita, joten hänen odotettu tuloksensa on $\Pi_i(\underline{v}; \underline{v}) = 0$. Koska molemmat huutokauppamekanismit ovat tehokkaita, tarjoajalla i on aina sama voittamistodennäköisyys $\mathbb{P}_i(v_i)$ arvostuksella v_i. Koska yhtälön (4.5) oikea puoli sisältää vain termit $\mathbb{P}_i(v_i)$ ja $\Pi_i(\underline{v}; \underline{v})$, tarjoajalla i täytyy olla sama odotettu tulos $\Pi_i(v_i; v_i)$ molemmissa huutokauppamekanismeissa. Yhtälön (4.1) nojalla tämä tarkoittaa, että tarjoaja i arvostuksella v_i maksaa saman odotetun maksun molemmissa huutokauppamekanismeissa. Koska tämä on totta kaikille tarjoajille $i \in N$, myyjän odotettu tuotto on myös sama molemmissa huutokauppamekanismeissa. □

Tuottoekvivalenssilauseen perusteella voidaan kysyä, miksi on olemassa erilaisia huutokauppamekanismeja, jos kaikki mekanismit johtavat samaan odotettuun tuottoon myyjälle. Ensiksi lauseen oletuksia ei voida pitää realistisina, koska todellisuudessa tarjoajien arvot riippuvat toisistaan ja eivät ole samoin jakautuneita. Toisin sanoen toisilla tarjoajilla on enemmän tietoa huutokaupattavan kohteen arvosta kuin toisilla. Toiseksi jokaisella huutokauppamekanismilla on omat etunsa, esimerkiksi englantilainen huutokauppa sopii tilanteisiin, joissa huutokaupattavalle kohteelle halutaan määritellä markkina-arvo.

4.3. Erilaiset huutokauppamekanismit

Seuraavaksi tarkastellaan, millaisia huutokauppamekanismeja on olemassa ja millaisiin tilanteisiin ne sopivat. Päälähteenä tässä kappaleessa on käytetty Jouko Huuskon kandidaatintyötä [**9**].

Englantilainen huutokauppa sopii tilanteisiin, joissa huutokaupattavan kohteen markkina-arvo ei ole tiedossa, kuten taideteokset ja antiikki. Huutokaupan aikana tarjoajat määrittelevät kohteelle arvon tarjoustensa kautta. Ongelmana on, että hinta saattaa jäädä myyjän kannalta alhaiseksi, jos tarjoajat tekevät yhteistyötä. Tarjoajat sopivat keskenään, kuka tarjoaa huutokaupattavalle kohteelle muiden tarjoajien pidättäytyessä tarjoamisesta. Toisaalta tarjoaja saattaa maksaa huutokaupattavasta kohteesta enemmän kuin todellisen hinnan, jos hän haluaa sen. Ilmiötä kutsutaan voittajan kiroukseksi. Tämä johtuu siitä, että tarjoaja, joka tekee korkeimman tarjouksen, pakottaa toiset tarjoajat arvioimaan uudelleen käsityksiään huutokaupattavan kohteen arvosta. Lisäksi tarjoamisprosessi saattaa kestää kauan.

Hollantilaisen huutokaupan etuna on nopeus, koska koskaan ei ole enempää tarjouksia kuin on huutokaupattavia kohteita. Huutokauppaa onkin käytetty kukkien myyntiin Hollannissa, mistä huutokaupan nimi on peräisin. Lisäksi hollantilainen huutokauppa sopii tilanteisiin, joissa halutaan välttää tarjoajien yhteistyötä, koska tarjoamisprosessi ei paljasta toisten tarjoajien arvoja. Ongelmana on, että tarjoaja todennäköisesti maksaa huutokaupattavasta kohteesta enemmän kuin hän oli ajatellut, koska hän haluaa varmistaa kohteen voittamisen itselleen.

Avoimessa huutokaupassa tarjoajat kuulevat toisten tarjoajien tarjoukset, joten he voivat reagoida niihin heti. Huutokaupan etuna pidetäänkin tarjoajien epävarmuuden vähentämistä. Toisaalta avoimuus luo mahdollisuuksia tarjoajien väliseen yhteistyöhön. Lisäksi avoin huutokauppa soveltuu huonosti tilanteisiin, joissa tarjoajien määrä on alhainen.

Suljetut huutokaupat sopivat hyvin tilanteisiin, joissa tarjoajat eivät ole halukkaita paljastamaan arvojaan avoimissa huutokaupoissa. Lisäksi huutokaupat ovat vähemmän alttiimpia tarjoajien yhteistyölle kuin avoimet huutokaupat. Suljettua korkeimman tarjouksen huutokauppaa on käytetty erityisesti julkisissa hankinnoissa ja kaivostoiminnan vuokrasopimusten huutokauppaamisessa.

Seurauksen 4.41 mukaan suljetussa toiseksi korkeimman tarjouksen huutokaupassa tarjoajat tarjoavat oman arvonsa verran, kun taas lauseen 4.48 mukaan suljetussa korkeimman tarjouksen huutokaupassa tarjoajat tarjoavat alle oman arvonsa. Näin ollen suljettu toiseksi korkeimman tarjouksen huutokauppa on suosiollisempi myyjälle, koska tarjoajat tarjoavat siinä enemmän, sillä voittaessaan tarjoaja maksaa toiseksi korkeimman tarjouksen verran. Kuitenkin tätä huutokauppaa on vähän käytetty. Tämä johtuu siitä, että tarjoajat eivät halua paljastaa todellisia arvojaan myyjälle, koska hän voi hyödyntää tai levittää tätä tietoa. Lisäksi tarjoajat voivat epäillä lopputuloksen oikeellisuutta, koska tarjoaja ei maksa sitä, mitä hän tarjoaa.

Huutokauppa voidaan toteuttaa joko yhdellä tai useammalla kierroksella. Yhden kierroksen huutokaupassa jokainen tarjoaja tekee yhden tarjouksen huutokaupattavalle kohteelle. Usean kierroksen huutokaupassa tarjoajat voivat korottaa omia edellisen kierroksen tarjouksiaan. Jokaisella tarjoajalla on käytössään yksi tarjous kullekin huutokaupattavalle kohteelle kierrosta kohden.

Lisäksi on olemassa usean huutokaupattavan kohteen huutokauppoja, joissa myydään kerralla useita kohteita. Huutokaupattavat kohteet ovat yleensä samanlaisia tai liittyvät toisiinsa. Seuraavaksi esitellään tärkeimpiä usean huutokaupattavan kohteen huutokauppojen muotoja.

Samanaikaisessa huutokaupassa tarjoajat voivat tehdä tarjouksia useasta huutokaupattavasta kohteesta samaan aikaan. Huutokaupan etuna on, että tarjoajat voivat muuttaa strategioitaan huutokaupan aikana. Kombinatorisessa huutokaupassa tarjoajat voivat tarjota huutokaupattavien kohteiden yhdistelmille. Jos yhdistelmätarjous ylittää yksittäisten tarjousten summan, niin kohteet myydään yhdistelmänä. Kombinatorisessa huutokaupassa etuna on, että tarjoaja voi paremmin ilmaista mieltymyksiään erityisesti tilanteessa, jossa huutokaupattavat kohteet täydentävät toisiaan.

Peräkkäisessä huutokaupassa huutokaupattavat kohteet myydään erikseen. Tässä ongelmana on hitaus, mutta toisaalta huutokauppa on yksinkertaisempi toteuttaa kuin samanaikainen huutokauppa. Lisäksi tarjoajat eivät voi muuttaa strategioitaan, kuten samanaikaisessa huutokaupassa.

4.4. Radiotaajuushuutokaupat

Esimerkkinä huutokaupoista tarkastellaan radiotaajuushuutokauppoja, jotka viestintäviranomainen Federal Communications Commission (FCC) aloitti vuonna 1994 Yhdysvalloissa. Tämän kappaleen päälähteenä on käytetty Paul Milgromin paperia [**15**]. Seuraavaksi esitellään huutokauppoja koskevat säännöt ja analysoidaan niitä edellä olevan teorian näkökulmasta.

Samanaikainen nouseva huutokauppa kehitettiin alun perin radiotaajuuslisenssien myymiseksi. Se on huutokauppa, jossa on useita huutokaupattavia kohteita ja tarjoaminen tapahtuu kierroksilla. Jokaisella kierroksella tarjoajat tekevät samanaikaisesti suljettuja tarjouksia mille tahansa huutokaupattaville kohteille, joista he ovat kiinnostuneita. Tarjoamisen jälkeen kierroksen tulokset kirjataan ylös. Jokaiselle huutokaupattavalle kohteelle tulokset sisältävät tiedot uusista tarjouksista ja vastaavista tarjoajista sekä olemassa olevasta korkeimmasta tarjouksesta ja vastaavasta tarjoajasta. Alun perin olemassa oleva korkein tarjous on nolla jokaiselle huutokaupattavalle kohteelle. Huutokaupan edetessä uusi olemassa oleva korkein tarjous kierroksen lopussa on suurempi joko aikaisemmasta olemassa olevasta korkeimmasta tarjouksesta tai korkeimmasta uudesta tarjouksesta.

Lisäksi kierroksen tulokset sisältävät vähimmäistarjoukset seuraavalle kierrokselle. Vähimmäistarjoukset on laskettu olemassa olevasta korkeimmasta tarjouksesta lisäämällä siihen ennalta määrätyn tarjouksen verran. Taajuuslisenssien tapauksessa lisäys on tyypillisesti suurempi joko jostakin kiinteästä summasta tai olemassa olevan korkeimman tarjouksen kiinteästä prosenttiosuudesta, joka on viisi tai kymmenen prosenttia.

Tarjous edustaa tarjoajan todellista sitoutumista. Yleisin sääntöjen versio on seuraava. Jos tarjoajalla on mahdollisuus vetää tarjouksensa pois, hän saa siitä rangaistuksen. Jos huutokaupattavan kohteen myyntihinta on vähemmän kuin poisvedetty tarjous, tarjouksensa poisvetäneen tarjoajan täytyy maksaa myyntihinnan ja tarjouksensa välinen erotus.

Huutokaupan aikana tarjoajan aktiivisuutta valvotaan aktiivisuussäännöllä. Se toimii seuraavasti. Ensiksi taajuudelle luodaan määrämittari, joka antaa karkean lisenssin arvon. Tyypillisesti taajuuslisenssin määrämittari perustuu lisensoidun taajuuden kaistanleveyteen ja väestöön lisenssin kattamalla maantieteellisellä alueella. Huutokaupan alussa jokainen tarjoaja vahvistaa alkuperäisen tarjoamiskelpoisuutensa tekemällä talletuksia, jotka kattavat tietyn määrän lisenssejä edellä mainitun määrämittarin mukaan lasketuilla arvoilla. Huutokaupan aikana tarjoajaa pidetään aktiivisena lisenssille kierroksella, jos hän tekee sopivan uuden tarjouksen lisenssille tai hänellä on olemassa oleva korkein tarjous edelliseltä kierrokselta. Jokaisella kierroksella tarjoajan aktiivisuutta rajoitetaan siten, ettei hän saa ylittää kelpoisuuttaan määrämittarin mukaan lasketuilla arvoilla. Jos jätetty tarjous ylittää tarjoajan kelpoisuuden, tarjous yksinkertaisesti hylätään.

Huutokauppa toteutetaan kolmessa vaiheessa, joista jokainen sisältää määrittelemättömän määrän kierroksia. Huutokauppa alkaa ja jatkuu vaiheella yksi, kunnes tarjoamisaktiivisuus laskee tasolle, jossa uusia tarjouksia tehdään lisensseille, jotka muodostavat vain viisi prosenttia koko lisenssimäärästä. Tällöin huutokauppa siirtyy vaiheeseen kaksi. Vastaavalla tavalla huutokauppa siirtyy vaiheesta kaksi vaiheeseen kolme.

Ensimmäisessä vaiheessa tarjoajan, joka haluaa säilyttää kelpoisuutensa, täytyy olla aktiivinen lisensseissä, jotka kattavat tietyn osan f_1 hänen kelpoisuudestaan. Jos tarjoaja, jonka kelpoisuus on x, on aktiivinen lisenssimäärällä $y < f_1 x$ tämän vaiheen aikana, niin hänen kelpoisuutensa vähenee seuraavalla kierroksella arvoon $\frac{y}{f_1}$. Toisessa ja kolmannessa vaiheessa vastaavaa sääntöä sovelletaan, mutta käyttäen osuuksia f_2 ja f_3. Osuudet ovat olleet esimerkiksi $(f_1, f_2, f_3) = (0,6; 0,8; 0,95)$. Kolmannessa vaiheessa tarjoajat tietävät, että huutokauppa on sulkeutumassa, sillä jäljellä oleva kysyntä lisensseille on vain $\frac{1}{f_3}$ kertaa nykyinen aktiivisuustaso. Kuitenkin säännöt tarjoavat viisi aktiivisuussäännön poikkeusta jokaiselle tarjoajalle. Näiden tarkoituksena on estää virheitä tarjousten jättämisprosessissa aiheuttaen tahattomia vähennyksiä tarjoajan kelpoisuudessa.

Tarjoaminen kaikille lisensseille sulkeutuu samanaikaisesti, kun uusia tarjouksia ei tule millekään lisenssille. Kun huutokauppa sulkeutuu, lisenssit myydään tarjoajille, jotka ovat tehneet vastaavat olemassa olevat korkeimmat tarjoukset.

Esimerkki 4.56. Seuraavaksi näytetään, mikä merkitys aktiivisuussäännöllä on taajuushuutokaupoissa. Yksinkertaisuuden vuoksi tarkastellaan samanaikaista nousevaa huutokauppaa, jossa tarjoajina ovat kolme yritystä ja huutokaupattavina kohteina kaksi lisenssiä, A ja B. Oletetaan, että tarjoaja 1 on kelpoinen hankkimaan molemmat lisenssit, tarjoaja 2 ei ole kelpoinen hankkimaan lisenssiä B ja vastaavasti tarjoaja 3 ei ole kelpoinen hankkimaan lisenssiä A. Lisäksi oletetaan, että jokaisella tarjoajalla on kahdenkymmenen dollarin kokonaisbudjetti, jota kokonaismaksut eivät voi ylittää. Taulukossa 1 on listattu tarjoajien arvot lisensseille.

Lisenssi Tarjoaja	A	B	Budjetti
1	15	30	20
2	10	-	20
3	-	15	20

Taulukko 1. Tarjoajien arvot lisensseille ja budjettirajoitteet

Pelin säännöt ovat seuraavat. Aluksi kummankin lisenssin hinta on nolla. Millä tahansa kierroksella tarjoaja voi nostaa tarjoustaan vähintään yhdellä dollarilla mille tahansa lisenssille, johon hänen kelpoisuutensa riittää. Mahdolliset tasatulokset jaetaan sattumanvaraisesti. Kun uusia tarjouksia ei tule millekään lisenssille, huutokauppa sulkeutuu.

Jos tarjoajan 3 arvo on tarjoajien yleisessä tiedossa, niin on olemassa heikosti dominoivien strategioiden tasapaino, jossa tarjoajat 2 ja 3 tarjoavat suoraviivaisesti.

Toisin sanoen tasapainossa tarjoajat 2 ja 3 nostavat tarjouksiaan aina, kun tarjoajilla ei ole olemassa olevaa korkeinta tarjousta ja heidän arvonsa aidosti ylittävät nykyisen korkeimman tarjouksen. Näytetään, että tämä strategia on heikosti dominoiva. Jos tarjoaja lopettaa tarjoamisen ja hänellä ei ole olemassa olevaa korkeinta tarjousta, hänen tuloksensa on nolla. Jos taas tarjoaja jatkaa tarjoamista, vaikka hänen arvonsa lisenssille on vähemmän kuin nykyinen korkein tarjous, hänen tuloksensa on nolla tai negatiivinen. Kaikissa tilanteissa tarjoaja päätyy samaan tai huonompaan tulokseen kuin nostamalla tarjoustaan aina, kun hänellä ei ole olemassa olevaa korkeinta tarjousta ja hänen arvonsa aidosti ylittää nykyisen korkeimman tarjouksen. Tällöin hänen tuloksensa on nolla tai positiivinen.

Tarjoajan 1 vastaava strategia on tarjota suoraviivaisesti lisenssille B ja rajoittaa tarjoamistaan lisenssille A varmistaakseen, että hän voittaa lisenssin B rajoitetulla budjetilla. Jos tarjoaja 1 tarjoaisi suoraviivaisesti myös lisenssille A, hänen budjettinsa ylittyisi. Hänen ei myöskään kannata tarjota suoraviivaisesti lisenssille A ja rajoittaa tarjoamistaan lisenssille B, koska hänen arvonsa lisenssille A on matalampi kuin lisenssille B. Tällöin hänen tuloksensa olisi huonompi kuin tarjoamalla suoraviivaisesti lisenssille B ja rajoittamalla tarjoamistaan lisenssille A.

Jos tarjoajan 3 arvo on yksityistä tietoa, niin edellisen kaltaista tasapainoa ei ole olemassa. Oletetaan, että tarjoajat 2 ja 3 tarjoavat suoraviivaisesti. Tällöin tarjoaja 1 voi saada selville tarjoajan 3 arvon tarjoamalla lisenssille B, kunnes hän varmistaa lisenssin saamisen itselleen. Sen jälkeen tarjoaja 1 käyttää jäljellä olevan budjettinsa lisenssin A voittamiseen itselleen. Tällöin tarjoaja 1 voittaa aina lisenssin B. Jos nyt olisi tasapaino näillä ominaisuuksilla, niin tarjoaja 3 voisi odottaa, kunnes tarjoaja 1 tarjoaa kymmenen tai yksitoista dollaria lisenssille A. Tämän jälkeen tarjoaja 3 tarjoaisi esimerkiksi enemmän kuin viisi dollaria lisenssille B. Tällöin tarjoaja 3 voittaisi lisenssin B ja saisi positiivisen tuloksen.

Molemmilla tarjoajilla 2 ja 3 voi olla kannustin hidastaa tarjoamistaan huutokaupassa. Kumpikin toivoo, että tarjoaja 1 ei kykene kilpailemaan tehokkaasti lisenssistä, koska hän on käyttänyt budjettinsa toiseen lisenssiin. Varsinaisissa taajuushuutokaupoissa aktiivisuussääntö rajoittaa edellä kuvattua odotusstrategiaa. Jos tarjoaja ei ole aktiivinen huutokaupan alussa, hän menettää kelpoisuutensa tarjota myöhemmillä kierroksilla. Näin ollen aktiivisuussääntö auttaa varmistamaan, että huutokauppa loppuu kohtuullisessa ajassa.

Esimerkki 4.57. Edelleen peliteorian avulla voidaan näyttää, että tarjoaminen lisenssien yhdistelmille voi aiheuttaa vapaamatkustajaongelman tarjoajille, jotka tarjoavat vain yksittäisille lisensseille, eli tarjoaja hyötyy toisen tarjoajan tarjouksesta maksamatta kuitenkaan tätä tarjousta.

Tarkastellaan jälleen samanaikaista nousevaa huutokauppaa, jossa tarjoajina ovat kolme yritystä ja huutokaupattavina kohteina kaksi lisenssiä. Tarjoaja 1 on halukas maksamaan neljä dollaria lisenssistä A ja vastaavasti tarjoaja 2 neljä dollaria lisenssistä B. Kumpikaan tarjoaja ei ole kelpoinen hankkimaan muita lisenssejä tai lisenssien yhdistelmiä. Olkoon ϵ pieni ja positiivinen luku. Tarjoajalla 3 on alhaisemmat arvot lisensseille kuin muilla tarjoajilla, mutta hän on kelpoinen ostamaan molemmat lisenssit. Analyysin helpottamiseksi asetetaan budjettirajoitteet tarjoajille. Vastaavat tiedot löytyvät taulukosta 2. Oletetaan lisäksi, että jos tarjous lisenssiparille ylittää yksittäisten tarjousten summan, niin tarjous lisenssiparille voittaa.

Näin ollen tehokas lisenssien jako on lisenssi A tarjoajalle 1 ja lisenssi B tarjoajalle 2, koska heidän arvonsa lisensseille ovat korkeammat kuin tarjoajan 3 arvot. Oletetaan, että tarjoukset annetaan kokonaislukuina. Heikosti dominoivien strategioiden tasapainossa tarjoajat 1 ja 2 tekevät vähimmäistarjoukset jokaisella kierroksella hankkiakseen lisenssit A ja B. Vastaavasti tarjoaja 3 tarjoaa yhden dollarin jokaiselle lisenssille ja sitten luovuttaa.

Lisenssi / Tarjoaja	A	B	AB	Budjetti
1	4	-	-	3
2	-	4	-	3
3	$1+\epsilon$	$1+\epsilon$	$2+\epsilon$	2

Taulukko 2. Tarjoajien arvot lisensseille ja budjettirajoitteet

Jos huutokaupassa sallitaan tarjoaminen lisenssien yhdistelmille, niin tarjoaja 3 ei tarjoa suoraan lisensseille A ja B, vaan hän tarjoaa lisenssiparille AB, koska hän haluaa molemmat lisenssit. Jos hän tarjoaisi erikseen kummallekin lisenssille, voisi käydä niin, että hän saisi vain toisen lisensseistä. Tarjoaminen lisenssien yhdistelmälle luo vapaamatkustajaongelman tarjoajille 1 ja 2. Jos tarjoaja 1 tarjoaa kaksi dollaria lisenssille A ja tarjoaja 2 yhden dollarin lisenssille B, niin yksittäisten tarjousten summa ylittää lisenssiparin tarjouksen, joka voi olla enintään kaksi dollaria. Tällöin lisenssit myydään tarjoajille 1 ja 2. Huomataan, että tarjoajan 1 tarjous lisenssille A auttaa tarjoajaa 2 saamaan lisenssin B. Vastaava pätee tarjoajalle 2. Kumpikin tarjoajista 1 ja 2 haluaisi, että toinen nostaa yksittäistä tarjousta riittävästi voittaakseen tarjoajan 3 tarjouksen.

Jopa täydellisen informaation tapauksessa vapaamatkustajaongelma voi johtaa tehottamaan sekastrategiatasapainoon. Vastaavat tasapainostrategiat ovat seuraavat. Huomaa, että tarjoajat eivät voi tarjota yli budjettinsa. Kierroksella tarjoaja 3 tarjoaa kaksi dollaria lisenssiparille AB. Tällöin hänen tuloksensa on nolla. Tämä strategia on heikosti dominoiva, koska hän päätyy samaan tulokseen tarjoamalla yhden dollarin lisensseille A ja B.

Vastaavasti tarjoaja 1 nostaa lisenssin A hintaa yhdellä dollarilla aina, kun hänellä ei ole olemassa olevaa korkeinta tarjousta tälle lisenssille. Tällöin hänen tuloksensa on nolla tai positiivinen. Tämä strategia on heikosti dominoiva, koska hän päätyy huonompaan tulokseen lopettamalla tarjoamisen, kun hänellä ei ole olemassa olevaa korkeinta tarjousta tälle lisenssille. Vastaavalla tavalla tarjoaja 2 tarjoaa lisenssille B.

Tarkastellaan tuloksia osapelissä sen jälkeen, kun hinnat ovat yksi dollari lisensseille A ja B sekä kaksi dollaria lisenssiparille AB. Jos oletetaan, että tarjoajan 3 tarjous on korkein, osapelin tulosmatriisi tarjoajille 1 ja 2 on seuraavanlainen

Tarjoaja 2 / Tarjoaja 1	Nosta	Älä nosta
Nosta	(2, 2)	(2, 3)
Älä nosta	(3, 2)	(0, 0)

Tällä osapelillä on symmetrinen Nashin tasapaino, jossa tarjoajat 1 ja 2 nostavat tarjouksiaan todennäköisyydellä $\frac{2}{3}$ ja eivät nosta tarjouksiaan todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$. Tämä saadaan kuten esimerkissä 3.24. Tällöin tasapainossa tarjoajalla 3 on mahdollisuus saada molemmat lisenssit todennäköisyydellä $\frac{1}{9}$, vaikka arvo näille lisensseille on vain $\frac{1}{4}$ tarjoajien 1 ja 2 yhteenlasketusta arvosta. Tämä on vältettävissä, jos tarjoamista lisenssien yhdistelmille ei sallita.

Sääntöjen mukaan tarjoaminen kaikille lisensseille sulkeutuu samanaikaisesti, kun uusia tarjouksia ei tule millekään lisenssille. Tällöin, jos lisenssi, joka saa jollakin kierroksella uuden olemassa olevan korkeimman tarjouksen, on korvattavissa toisella lisenssillä tai täydentää toista lisenssiä, hävinnyt tarjoaja voi vastata tähän tarjoamalla korvaavalle lisenssille tai peruuttamalla tarjouksensa täydentävälle lisenssille ja voittaja voi vastata käänteisesti. Kuitenkin samanaikainen lisenssien sulkeminen luo mahdollisuuksia tarjoajien yhteistyöhön.

Esimerkki 4.58. Näytetään, miten samanaikainen lisenssien sulkeminen vaikuttaa huutokaupan lopputuloksiin. Tarkastellaan edelleen yksinkertaistettua mallia samanaikaisesta nousevasta huutokaupasta, jossa on kaksi tarjoajaa ja huutokaupattavina kohteina kaksi lisenssiä. Tarjoajien arvot kummallekin lisenssille ovat kymmenen dollaria. Oletetaan, että tarjoajat ovat kelpoisia hankkimaan molemmat lisenssit.

Tarkastellaan ensin kilpailullista tilannetta. Jos lisenssin hinta on alle kymmenen dollaria ja tarjoajalla ei ole olemassa olevaa korkeinta tarjousta, niin tarjoaja tarjoaa uudelleen tälle lisenssille. Nämä strategiat tarjoajille 1 ja 2 muodostavat pelin heikosti dominoivien strategioiden tasapainon. Tällöin tarjoajan tulos on nolla tai positiivinen.

Näytetään, että tämä strategia on heikosti dominoiva. Jos tarjoaja lopettaa tarjoamisen ja hänellä ei ole olemassa olevaa korkeinta tarjousta, niin hänen tuloksensa on nolla. Jos tarjoaja jatkaa tarjoamista, vaikka lisenssin hinta on yli kymmenen dollaria, niin hänen tuloksensa on nolla tai negatiivinen. Kaikissa tilanteissa tarjoaja päätyy joko samaan tai huonompaan tulokseen kuin jatkamalla tarjoamista, kun hänellä ei ole olemassa olevaa korkeinta tarjousta ja lisenssin hinta on alle kymmenen dollaria. Tämä on niin sanottu kilpailullinen lopputulos ja se johtaa kymmenen dollarin myyntihintaan kummallekin lisenssille. Tällöin tulos molemmille tarjoajille on nolla.

Myös toisenlaiset lopputulokset ovat mahdollisia, kun tarjoajat tekevät yhteistyötä. Tarkastellaan tarjoajan 1 strategiaa. Jos tarjoaja 2 ei tarjoa koskaan lisenssille A ja lisenssi A ei ole saanut tarjouksia, niin tarjoaja 1 tarjoaa yhden dollarin lisenssille A. Muuten hän ei tarjoa uudelleen. Jos taas tarjoaja 2 tarjoaa aina lisenssille A, niin tarjoaja 1 tarjoaa kuten kilpailullisessa tilanteessa. Tarjoaja 2 tarjoaa symmetrisesti. Nämä strategiat tarjoajille 1 ja 2 muodostavat pelin heikosti dominoivien strategioiden tasapainon.

Näytetään vielä, että tarjoajalle 1 strategia, jossa hän tarjoaa yhden dollarin lisenssille A, jos tarjoaja 2 ei tarjoa koskaan lisenssille A ja hän ei ole aiemmin tarjonnut lisenssille A, on heikosti dominoiva. Käyttämällä tätä strategiaa tarjoajan 1 tulos on yhdeksän dollaria. Jos tarjoaja 1 ei tarjoa koskaan lisenssille A, hänen tuloksensa on nolla. Jos hän taas tarjoaa uudelleen lisenssille A, hänen tuloksensa on kahdeksan dollaria. Kaikissa tilanteissa hän päätyy huonompaan tulokseen kuin tarjoamalla yhden dollarin lisenssille A, kun tarjoaja 2 ei tarjoa koskaan lisenssille A ja hän ei ole aiemmin tarjonnut lisenssille A.

Tämä on niin sanottu yhteistyön lopputulos ja se johtaa yhden dollarin myyntihintaan kummallekin lisenssille. Tähän päästään, kun tarjoajat sopivat etukäteen lisenssien jakamisesta. Esimerkiksi tarjoajan 1 täytyy pidättäytyä tarjoamisesta lisenssille B ja vastaavasti tarjoajan 2 lisenssille A, jolloin tarjoaja 1 voittaa lisenssin A ja tarjoaja 2 lisenssin B itselleen. Tällöin tarjoajien yhteistulos on kahdeksantoista dollaria. Huutokaupan jälkeen tarjoajat voivat sopia lisenssien uudelleen jakamisesta. Yhteistyö muuttuu kilpailulliseksi, jos toinen tarjoajista ei pidättäydy tarjoamisesta tietylle lisenssille.

Radiotaajuushuutokaupoissa tarjoajat ovat yrittäneet viestittää aikeistaan toisille tarjoajille tarjoustensa kautta. Tällainen viestittäminen voi alentaa myös huutokaupattavien kohteiden hintoja. Kuitenkaan edellä oleva teoria ei sano mitään tilanteesta, koska tarjoajien arvojen ollessa yksityisiä tällaista tietoa ei ole käytettävissä. Jotta voitaisiin analysoida tällaisia tilanteita, edellä oleva teoria tulisi laajentaa koskemaan yhteinen arvo -huutokauppoja, joissa huutokaupattavilla kohteilla on sama arvo kaikille tarjoajille, mutta tämä arvo riippuu tarjoajien yksityisestä informaatiosta.

Lisäksi edellä oleva teoria kattaa vain yhden huutokaupattavan kohteen huutokauppoja. Jos halutaan tarkastella radiotaajuushuutokauppoja tarkemmin, niin teoriaan pitäisi lisätä usean huutokaupattavan kohteen huutokaupat. Lisäksi, jos halutaan sanoa jotain tarjoamisesta lisenssien yhdistelmille, tulisi teoriaan ottaa mukaan kombinatoriset huutokaupat, joissa sallitaan tarjoaminen huutokaupattavien kohteiden yhdistelmille.

Johtopäätös on, että edellä esitetty teoria toimii lähtökohtana radiotaajuushuutokauppojen käsittelemiseen. Erityisesti tasapainojen ymmärtäminen ei olisi mahdollista ilman yksinkertaista teoriaa. Kuitenkin taajuushuutokauppojen tarkempaan käsittelemiseen vaadittaisiin useiden alueiden kehittämistä, kuten yllä on esitetty.

Kirjallisuutta

[1] Barron, Emmanuel N.: *Game theory : an introduction.* John Wiley & Sons, toinen painos, 2013.

[2] Borel, Émile: *"La théorie du jeu et les équations, intégrales á noyau symétrique gauche".* Comptes Rendus de l' Académie des Sciences, 173: 1304-1308, 1921. (Englanninkielinen käännös: Leonard J. Savage: "The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels", Econometrica, 21: 97-100, 1953.)

[3] Borel, Émile: *"Sur les jeux où interviennent l'hasard et l'habilité des joueurs".* Théorie des probabilités. Paris: Librairie Scientifique, J. Hermann, 204-224, 1924. (Englanninkielinen käännös: Leonard J. Savage: "On games that involve chance and the skill of players", Econometrica, 21: 101-115, 1953.)

[4] Borel, Émile: *"Sur les systémes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu".* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 184: 52-53, 1927. (Englanninkielinen käännös: Leonard J. Savage: "On the systems of linear forms of skew symmetric determinant and the general: theory of play", Econometrica, 21: 116-117, 1953.)

[5] de Montmort, Pierre R.: *Essai d'Analyse sur les jeux de Hazard.* Quillau, toinen painos, 1713.

[6] Easley, David ja Kleinberg, Jon: *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World.* Cambridge University Press, 2010.

[7] Geiss, Christel ja Geiss, Stefan: *An introduction to probability theory.* University of Jyväskylä Lecture Notes 60, 2009.

[8] Gibbons, Robert: *A primer in game theory.* Harvester Wheatsheaf, 1992.

[9] Huusko, Jouko: *Sähköinen huutokauppa.* Tietotekniikan kandidaatintyö, Lappeenrannan teknillinen yliopisto, 2007.

[10] Hykšová, Magdalena: *Several Milestones in the History of Game Theory.* Jubiläen - Chance oder Plage? VII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, 49-56, 2004.

[11] Klemperer, Paul: *Auction Theory : A guide to the Literature.* Journal of Economic Surveys, 13: 227-286, 1999.

[12] Krishna, Vijay: *Auction theory.* Academic Press, 2002.

[13] Kurittu, Lassi: *Algebrallista topologiaa.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 42, 1998.

[14] Menezes, Flavio M. ja Monteiro, Paulo K.: *An introduction to auction theory.* Oxford University Press, 2005.

[15] Milgrom, Paul R.: *Putting auction theory to work: The simultaneous ascending auction.* World Bank, Private Sector Development Department, Private Participation in Infrastructure Division, no. 1986, 1998.

[16] Morgan, John: *Some Notes on the Revelation Principle.* Haas School of Business and Department of Economics, University of California. Haettu viimeksi 22.4.2015 osoitteesta http://faculty.haas.berkeley.edu/rjmorgan/phdba279b/Class%201%20Introduction.pdf.

[17] Nash, John F.: *Equilibrium Points in n-Person Games.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 36: 48–49, 1950.

[18] Nash, John F.: *Non-Cooperative Games.* The Annals of Mathematics, 54: 286–295, 1951.

[19] Peres, Yuval: *Game Theory, Alive.* University of California, 2010. Haettu viimeksi 16.5.2014 osoitteesta http://www.stat.berkeley.edu/∼peres/gtlect.pdf.

[20] Purmonen, Veikko T.: *Euklidiset avaruudet.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 49, 2008.

[21] Purmonen, Veikko T.: *Lineaarinen algebra ja geometria 1.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 58, 2009.

[22] Resnick, Sidney I.: *A Probability Path.* Birkhäuser, 1999.

[23] von Neumann, John: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.* Mathematische Annalen, 100: 295–320, 1928.

[24] von Neumann, John ja Morgenstern, Oskar: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, kolmas painos, 1953.