Analyyttinen jatke ja Riemannin pinnat

Eero Hakavuori

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014

Tiivistelmä: Eero Hakavuori, *Analyyttinen jatke ja Riemannin pinnat* (engl. *Analytic continuation and Riemann surfaces*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 75 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2014.

Tämän tutkielman tavoitteena on esittää, miten analyyttisen funktion määrittelyjoukko laajennetaan Riemannin pinnaksi, joka sisältää informaation kaikista funktion analyyttisistä jatkeista kompleksitasossa. Tätä Riemannin pintaa sanotaan kyseisen analyyttisen funktion Riemannin pinnaksi. Konstruktiota varten täytyy ensin tarkastella analyyttisen jatkeen käyttäytymistä kompleksitasossa, Riemannin pintojen ja kompleksitason välistä yhteyttä sekä perusryhmän ja peitteiden käyttäytymistä Riemannin pintojen kontekstissa. Erityisesti tarkastellaan miten useat kompleksianalyysin perustulokset yleistyvät suoraan Riemannin pinnoille ja Riemannin pintojen analyyttisille funktioille sekä sitä, milloin Riemannin pinnan lokaali homeomorfismi on peite.

Tärkeimpiä tarkasteltavia funktioita tutkielmassa ovat juurifunktiot ja logaritmi. Osoittautuu, että näiden funktioiden analyyttisen jatkeen käyttäytyminen punkteeratussa kiekossa karakterisoi kaikkien punkteeratussa kiekossa vapaasti jatkettavien analyyttisten funktioiden käyttäytymisen. Erityisesti juurifunktion käyttäytymisen tunteminen antaa tavan käsitellä analyyttisen funktion Riemannin pinnan muodostamiseen tarvittavia haarautumispisteitä. Lisäksi tarkastellaan algebrallisten funktioiden analyyttisen jatkeen käyttäytymistä ja sitä, miten algebrallisen funktion Riemannin pinnan konstruktiota voidaan soveltaa algebrallisten käyrien tarkasteluun.

Avainsanat: Analyyttinen jatke, Riemannin pinnat, täydellinen analyyttinen funktio, analyyttisen funktion Riemannin pinta, homotopia, perusryhmä, peite, polun nosto, algebralliset funktiot, algebralliset käyrät.

Sisältö

Johdanto

Reaalisen derivaatan olemassaoloon verrattuna funktion kompleksisen derivaatan olemassaolo on erittäin vahva ominaisuus. Kompleksianalyysin perustulosten mukaan analyyttinen funktio nimittäin on aina äärettömän monta kertaa derivoituva ja saa samat arvot kuin potenssisarjaesityksensä. Tämän avulla saadaan osoitettua, että analyyttiselle funktiolle pisteen alkukuvajoukot ovat diskreettejä joukkoja, mikäli funktio ei ole vakiofunktio. Edelleen, mikäli kaksi samassa alueessa määriteltyä analyyttistä funktiota saavat samat arvot missä tahansa alueen avoimessa osajoukossa, niin ne saavat samat arvot koko määrittelyalueessaan. Erityisesti, jos analyyttisen funktion määrittelyjoukkoa voidaan laajentaa, tämä laajennus, eli analyyttinen jatke, on yksikäsitteinen.

Osoittautuu kuitenkin, että kompleksitason geometria ei ole riittävä käsittelemään analyyttisen jatkeen antamia funktiota. Esimerkiksi neliöjuuren tapauksessa juuren molemmat haarat ovat saman funktion analyyttisiä jatkeita, mutta kompleksitasossa ei voi olla olemassa funktiota, joka antaisi molemmat haarat. Kompleksitasossa analyyttisen jatkeen käsittely johtaakin niin sanottuihin "moniarvoisiin" funktioihin, jolloin hyväksytään, että samassa pisteessä saadaan useita arvoja.

Usein nämä ongelmat vältetään käsittelemällä ainoastaan yhtä funktion haaraa kerrallaan. Esimerkiksi neliöjuuren tapauksessa saadaan jonkin kompleksitason puolisuoran (usein negatiivisen reaaliakselin) ulkopuolella hyvin määritelty analyyttinen funktio. Vaihtoehtoisesti neliöjuuri voidaan määritellä koko kompleksitasossa, mutta joustaa analyyttisyydestä ja jatkuvuudesta jollakin puolisuoralla. Analyyttisen jatkeen ja funktion käyttäytymisen kannalta nämä ovat kuitenkin hyvin keinotekoisia ratkaisuja.

Toinen tapa käsitellä tilanne on ajatella saatava moniarvoinen funktio määriteltyksi usealla kompleksitason kopiolla, joita leikataan ja liimataan sopivasti toisiinsa kiinni. Tämä konstruktio johtaa moniarvoisen funktion määrittelyjoukon käsittelyyn abstraktina pintana, joka kuitenkin lokaalisti käyttäytyy kuten kompleksitaso. Tämä on täsmälleen Riemannin pinnan käsite. Osoittautuu, että jokaisen analyyttisen funktion määrittelyjoukko voidaan laajentaa yksikäsitteiseksi Riemannin pinnaksi siten, että saatava pinta sisältää informaation kaikista alkuperäisen funktion analyyttisistä jatkeista. Tässä mielessä Riemannin pinnat ovat analyyttisten funktioiden luonnollisia maksimaalisia määrittelyjoukkoja. Tällaista maksimaalista määrittelyjoukkoa sanotaan analyyttisen funktion Riemannin pinnaksi.

Topologisten leikkaus- ja liimausoperaatioiden sijaan analyyttisen funktion Riemannin pinnan konstruktion apuvälineenä voidaan käyttää algebrallisen topologian keinoja. Analyyttisen jatkeen tarkastelussa voidaan tutkia mitä analyyttiselle funktiolle tapahtuu, kun seurataan polkuja. Huomataan, että jos seurattavaa polkua muutetaan jatkuvasti, muuttuvat saatavat funktiot myös jatkuvasti. Tämä johtaa klassiseen monodromialauseeseen, joka sanoo, että saman funktion analyyttiset jatkeet homotooppisia polkuja pitkin antavat aina saman lopputuloksen. Homotooppisten polkujen lokaali tarkastelu taas johtaa punkteeratun kiekon perusryhmän tarkasteluun ja tätä kautta analyyttisen jatkeen lokaali käyttäytyminen saadaan karakterisoitua punkteeratun kiekon peitteiden avulla.

Tässä työssä esitettävä analyyttisen funktion Riemannin pinnan konstruktio tehdään nimenomaan tätä kautta. Tarvittavat algebrallisen topologian tulokset polkujen nostoista ja peitteistä käsitellään luvussa 3. Itse konstruktio esitetään luvussa 4, missä näytetään tarkemmin mitä tarkoitetaan sillä, että analyyttisen funktion Riemannin pinta "sisältää informaation kaikista alkuperäisen funktion analyyttisistä jatkeista". Muut tarvittavat aputulokset ja määritelmät analyyttiseen jatkeeseen ja Riemannin pintoihin liittyen esitetään luvuissa 1 ja 2. Viimeisessä luvussa taas tarkastellaan konstruktion sovellusta algebrallisten käyrien teoriaan käyttäen algebrallisia funktioita.

1. Analyyttisen jatkeen muodostaminen

Tämä ensimmäinen luku esittää kompleksitason jonkin alueen analyyttisen funktion määrittelyjoukon laajentamisen, eli analyyttisen jatkeen muodostamisen tekniikoita. Potenssisarjaesityksen, polun jatkeen ja integraalifunktion jatkeen osilta tulokset pohjautuvat enimmäkseen kirjaan [6, Ch. 4] ja osittain myös kirjoihin [10, Ch. 3, 3-1], [1, Ch. 8, 1] ja [9, Ch. 16].

1.1. **Perustuloksia.**

Määritelmä 1.1. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue ja $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Alueen $G \subset \mathbb{C}$ analyyttinen funktio $g : G \to \mathbb{C}$ on funktion f *suora analyyttinen jatke*, jos $D \cap G \neq \emptyset$ ja $g(z) = f(z)$ kaikilla $z \in D \cap G$.

Funktio g on funktion f *aito analyyttinen jatke*, jos alue D on alueen G aito osajoukko.

Kompleksianalyysin perustuloksista seuraa välittömästi, että analyyttisen funktion $f : D \to \mathbb{C}$ suora analyyttinen jatke annettuun alueeseen G on yksikäsitteinen mikäli se on olemassa:

Lemma 1.2. *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ ja $G \subset \mathbb{C}$ alueita, joille $D \cap G \neq \emptyset$. Jos funktiot $g_1 : G \to \mathbb{C}$ ja $g_2 : G \to \mathbb{C}$ ovat funktion $f : D \to \mathbb{C}$ suoria analyyttisiä jatkeita, niin $g_1 = g_2$.*

Todistus. Suoran analyyttisen jatkeen määritelmän nojalla kaikille $z \in D \cap G$ pätee

$$g_1(z) = f(z) = g_2(z),$$

joten edelleen

$$g_1(z) - g_2(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

Koska g_1 ja g_2 ovat alueen G analyyttisiä funktioita, $g_1 - g_2$ on myös alueen G analyyttinen funktio. Yllä olevan perusteella $g_1 - g_2$ on alueessa $D \cap G \subset G$ identtisesti nolla. Edelleen funktion $g_1 - g_2$ on oltava identtisesti nolla koko määrittelyjoukossaan G, joten $g_1 = g_2$. □

Suoran analyyttisen jatkeen määritelmässä ei vaadita, että jatkeen määrittelyjoukko olisi missään mielessä suurempi kuin alkuperäisen funktion määrittelyjoukko. Itse asiassa analyyttisen funktion $f : D \to \mathbb{C}$ rajoittuma mihin tahansa alueeseen $G \subset D$ on edellisen määritelmän mielessä eräs funktion f suora analyyttinen jatke. Jos sen sijaan $G \setminus D \neq \emptyset$, niin voidaan muodostaa funktion f aito analyyttinen jatke asettamalla

$$\tilde{g} : D \cup G \to \mathbb{C}, \quad \tilde{g}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{jos } z \in D \\ g(z), & \text{jos } z \in G \end{cases}$$

Suoran analyyttisen jatkeen määritelmän perusteella $f(z) = g(z)$ alueessa $D \cap G$, joten funktio $\tilde{g} : D \cup G \to \mathbb{C}$ on hyvin määritelty analyyttinen funktio. Selvästi $\tilde{g}(z) = f(z)$ alueessa $D = D \cap (D \cup G)$. Lisäksi $D \subsetneq D \cup G$ oletuksen $G \setminus D \neq \emptyset$ perusteella, joten $\tilde{g}$ on tosiaan funktion f aito analyyttinen jatke.

Huomautus 1.3. Edeltävä konstruktio ei kuitenkaan aina toimi useamman funktion tapauksessa. Jos $g_1 : G_1 \to \mathbb{C}$ ja $g_2 : G_2 \to \mathbb{C}$ ovat funktion $f : D \to \mathbb{C}$ suoria analyyttisiä jatkeita, niin funktio

$$\tilde{g} : D \cup G_1 \cup G_2 \to \mathbb{C}, \quad \tilde{g}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{jos } z \in D \\ g_1(z), & \text{jos } z \in G_1 \\ g_2(z), & \text{jos } z \in G_2 \end{cases}$$

ei välttämättä ole hyvin määritelty analyyttinen funktio. Ongelmana on, että alueiden G_1 ja G_2 leikkausjoukossa ei välttämättä päde $g_1(z) = g_2(z)$ kaikilla $z \in G_1 \cap G_2$, sillä funktiot g_1 ja g_2 eivät välttämättä ole toistensa suoria analyyttisiä jatkeita.

Esimerkki 1.4. Asetetaan

$$\begin{aligned} &D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}, && f : D \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \operatorname{Log} z, \\ &G_1 = \mathbb{C} \setminus \left]-\infty, 0\right], && g_1 : G_1 \to \mathbb{C}, \quad g_1(z) = \operatorname{Log} z \quad \text{ja} \\ &G_2 = \mathbb{C} \setminus \left[0, \infty\right[, && g_2 : G_2 \to \mathbb{C}, \quad g_2(z) = \begin{cases} \operatorname{Log} z, & \text{jos } \operatorname{Arg} z > 0 \\ \operatorname{Log} z + 2\pi i, & \text{jos } \operatorname{Arg} z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tällöin funktiot g_1 ja g_2 ovat molemmat funktion f suoria analyyttisiä jatkeita. Kuitenkin suoraan funktioiden g_1 ja g_2 määritelmistä nähdään, että alemmassa puolitasossa

$$g_2(z) = g_1(z) + 2\pi i \neq g_1(z).$$

Itse asiassa kaikilla negatiivisilla reaaliluvuilla x pätee

$$\lim_{t \to 0+} g_1(x + it) = \ln(|x|) + i\pi \neq \ln(|x|) - i\pi = \lim_{t \to 0-} g_1(x + it),$$

joten funktiolla g_1 ei ole edes jatkuvaa jatketta millekään alueelle, joka sisältäisi osan negatiivisesta reaaliakselista. Vastaavasti käy funktiolle g_2 positiivisella reaaliakselilla, joten funktioilla g_1 tai g_2 ei ole lainkaan aitoja analyyttisiä jatkeita.

1.2. **Jatke potenssisarjaesityksen avulla.** Annetun analyyttisen funktion suoraa analyyttistä jatketta voidaan etsiä käyttäen hyödyksi funktion potenssisarjaesitystä. Olkoon $a \in \mathbb{C}$ ja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

analyyttinen funktio. Olkoon $B(a, r)$ tämän potenssisarjan suppenemiskiekko ja valitaan mikä tahansa piste $b \in B(a, r)$.

Edeltävä potenssisarja suppenee itseisesti kiekossa $B(a, r)$, joten funktion f derivaatat saadaan laskettua termeittäin derivoimalla. Tällöin kaikilla $z \in B(a, r)$ saadaan

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - a)^{n-k}.$$

Merkitään

$$b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(b) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_n (b - a)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (b - a)^{n-k}.$$

Funktion f potenssisarjaesitys pisteen b suhteen on tällöin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(b)(z-b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-b)^k.$$

Olkoon r_b tämän potenssisarjan suppenemissäde, jolloin saadaan analyyttinen funktio

$$g : B(b, r_b) \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-b)^k.$$

Funktio g on funktion f suora analyyttinen jatke, sillä kyseessä on funktion f potenssisarjaesitys pisteen $b \in B(a, r)$ suhteen. Koska f on analyyttinen funktio kiekossa $B(a, r)$, on lisäksi

$$r_b \geq r - |b - a|.$$

Jos $r_b > r - |b - a|$, niin saadaan funktion f aito analyyttinen jatke alueeseen $B(a, r) \cup B(b, r_b)$ kuten aiemmin asettamalla

$$\tilde{g} : B(a, r) \cup B(b, r_b) \to \mathbb{C}, \quad \tilde{g}(z) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, & \text{jos } z \in B(a, r) \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k (z-b)^k, & \text{jos } z \in B(b, r_b) \end{cases}$$

Tarkastellaan seuraavaksi mielivaltaisen alueen $D \subset \mathbb{C}$ tapausta. Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Kiinnitetään piste $a \in D$, jolloin funktiolla f on potenssisarjaesitys

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

pisteen a suhteen. Tällä potenssisarjalla on jokin suppenemissäde $r > 0$. Merkitään lisäksi

$$r_D = \sup\{\delta > 0 : B(a, \delta) \subset D\}.$$

Jälleen tiedetään, että on oltava $r \geq r_D$. Vaikka $r > r_D$, niin vastaavalla päättelyllä kuin edellä ei välttämättä saada funktion f aitoa analyyttistä jatketta alueeseen $D \cup B(a, r)$. Yleisen alueen D tapauksessa on nimittäin mahdollista, että joillakin $z \in D \cap B(a, r)$ on

$$f(z) \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Näin käy muun muassa esimerkin 1.4 funktiolle g_1, kun piste a valitaan läheltä negatiivista reaaliakselia.

1.3. Jatke polkua pitkin.

Määritelmä 1.5. Olkoot D_j alueita ja $f_j : D_j \to \mathbb{C}$ analyyttisiä funktioita kaikilla $j \in \{1, \ldots, n\}$. Järjestetty vektori $(f_1, \ldots, f_n)$ on *suorien analyyttisten jatkeiden ketju*, jos funktio f_{j+1} on funktion f_j suora analyyttinen jatke kaikilla $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Analyyttinen funktio $g : G \to \mathbb{C}$ on funktion f *analyyttinen jatke*, jos on olemassa suorien analyyttisten jatkeiden ketju $(f, f_1, \ldots, f_n, g)$.

Toisin kuin suoran analyyttisen jatkeen kanssa, yleisen analyyttisen jatkeen tapauksessa ei ole yksikäsitteisyyttä edes kun määrittelyjoukko on kiinnitetty. Tämä näkyy muun muassa esimerkin 1.4 käsittelyssä. Esimerkissä muodostettiin logaritmin päähaaran $f : D \to \mathbb{C}$ suorat analyyttiset jatkeet

$$g_1 : G_1 \to \mathbb{C}, \quad g_1(z) = \operatorname{Log} z \quad \text{ja}$$

$$g_2 : G_2 \to \mathbb{C}, \quad g_2(z) = \begin{cases} \operatorname{Log} z, & \text{jos } \operatorname{Arg} z > 0 \\ \operatorname{Log} z + 2\pi i, & \text{jos } \operatorname{Arg} z < 0 \end{cases}$$

jotka eroavat toisistaan alemmassa puolitasossa $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$. Kuitenkin funktion g_1 rajoittuma $g_1|_G$ on funktion g_1 suora analyyttinen jatke, joten $(f, g_1, g_1|_G)$ on suorien analyyttisten jatkeiden ketju. Vastaavasti $(f, g_2, g_2|_G)$ on suorien analyyttisten jatkeiden ketju, joten sekä funktio $g_1|_G$ että funktio $g_2|_G$ ovat funktion f analyyttisiä jatkeita alueeseen G.

Yksikäsitteisyyden kannalta on olennaista se, miten alueeseen G on päästy. Edeltävän esimerkin tapauksessa suorien analyyttisten jatkeiden ketjut antavat määrittelyjoukkojen ketjut

$$(D, G_1, G) \quad \text{ja} \quad (D, G_2, G).$$

Suoran analyyttisen jatkeen yksikäsitteisyys takaa, että jos määrittelyjoukot kiinnitetään suorien analyyttisten jatkeiden ketjussa, saatava analyyttinen jatke on yksikäsitteinen. Toisin sanoen, jos

$$(f : D \to \mathbb{C}, h : G_1 \to \mathbb{C}, \tilde{h} : G \to \mathbb{C})$$

on myös suorien analyyttisten jatkeiden ketju, niin on oltava $\tilde{h} = g_1|_G$.

Monimutkaisemmissa tapauksissa määrittelyjoukkojen ketjun kiinnittäminen on kuitenkin usein hankalaa. Helpompi tapa vastata kysymykseen "*miten alueeseen G on päästy*" onkin kiinnittää polku $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, jonka lähtöpiste on alueessa D ja päätepiste alueessa G. Suorien analyyttisten jatkeiden ketjun sijaan annetaan tällöin jokaiselle polun pisteelle $\gamma(t)$ kyseisen pisteen ympäristössä määritelty analyyttinen funktio ja vaaditaan, että kun erotus $|s - t|$ on pieni, pisteitä $\gamma(t)$ ja $\gamma(s)$ vastaavat funktiot ovat toistensa suoria analyyttisiä jatkeita.

Tällä tavalla päästään jälleen analyyttisen jatkeen yksikäsitteisyyteen (lause 1.9) ja toisaalta suorien analyyttisten jatkeiden ketjusta on helppo siirtyä polkuesitykseen (lemma 1.10) sekä polkuesityksestä on helppo siirtyä suorien analyyttisten jatkeiden ketjuun (lemma 1.11). Kiinnitetään seuraavaksi tarkka määritelmä edellä kuvaillulle ja osoitetaan nämä ominaisuudet.

Määritelmä 1.6. Olkoon $f = f_0 : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ polku, jolle $\gamma(0) \in D$. Olkoon $f_t : D_t \to \mathbb{C}$, $t \in]0,1]$, pisteen $\gamma(t)$ ympäristössä määritelty analyyttinen funktio. Jos on olemassa luvut $\epsilon(t) > 0$ siten, että funktio f_s on funktion f_t suora analyyttinen jatke kun $|s - t| < \epsilon(t)$, niin sanotaan, että funktio f_1 on funktion f *analyyttinen jatke polkua γ pitkin*.

Huomautus 1.7. Yksinkertaisuuden vuoksi jatkossa oletetaan, että kaikki polut ovat määriteltyjä välillä $[0,1]$ ellei toisin mainita. Huomaa, että käytännössä tällä ei ole merkitystä, sillä polku $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ voidaan aina parametrisoida poluksi

$$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \tilde{\gamma}(t) = \gamma((b-a)t + a).$$

Lemma 1.8. *Olkoon $E \subset [0,1]$ suhteellisesti avoin ja suljettu välin $[0,1]$ topologiassa. Tällöin $E = [0,1]$ jos ja vain jos $E \neq \emptyset$.*

Todistus. Väite seuraa suoraan välin $[0,1]$ yhtenäisyydestä, sillä

$$[0,1] = E \cup ([0,1] \setminus E)$$

ja oletuksen mukaan joukot E ja $[0,1] \setminus E$ ovat molemmat avoimia joukon $[0,1]$ topologiassa. Tällöin toisen näistä joukoista on oltava tyhjä ja toisen koko väli $[0,1]$. □

Lause 1.9. *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ polku, jolle $\gamma(0) \in D$. Jos $g : G \to \mathbb{C}$ ja $h : H \to \mathbb{C}$ ovat funktion f analyyttisiä jatkeita polkua γ pitkin, niin on olemassa pisteen $\gamma(1)$ ympäristö $U \subset G \cap H$ siten, että*

$$g(z) = h(z) \quad \textit{kaikilla } z \in U.$$

Todistus. Olkoot

$$g_t : G_t \to \mathbb{C} \quad \text{ja} \quad h_t : H_t \to \mathbb{C}, \quad t \in [0,1],$$

määritelmän 1.6 funktiot, joille

$$g_1 = g, \quad h_1 = h \quad \text{ja} \quad g_0 = f = h_0.$$

Olkoon $E \subset [0,1]$ niiden pisteiden $t \in [0,1]$ joukko, joille on olemassa pisteen $\gamma(t)$ ympäristö $U_t \subset G_t \cap H_t$, jolle

$$g_t(z) = h_t(z) \quad \text{kaikilla } z \in U_t.$$

Lauseen väitettä varten riittää tällöin osoittaa, että $1 \in E$.

Kiinnitetään $t \in [0,1]$ ja olkoon $C \subset G_t \cap H_t$ se joukon $G_t \cap H_t$ yhtenäisyyskomponentti, joka sisältää pisteen $\gamma(t)$. Polun γ jatkuvuuden nojalla on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että

$$\gamma(s) \in C, \quad \text{kun } |s - t| < \delta.$$

Määritelmän 1.6 nojalla taas on olemassa luvut $\epsilon_g(t) > 0$ ja $\epsilon_h(t) > 0$ siten, että funktio g_s on funktion g_t suora analyyttinen jatke, kun $|s - t| < \epsilon_g(t)$, ja funktio h_s on funktion h_t suora analyyttinen jatke, kun $|s - t| < \epsilon_h(t)$. Asetetaan

$$\epsilon = \min\{\delta, \epsilon_g(t), \epsilon_h(t)\}.$$

Oletetaan, että on olemassa $s \in E$, jolle $|s - t| < \epsilon$. Joukon E määritelmän mukaan on olemassa pisteen $\gamma(s)$ ympäristö $U_s \subset G_s \cap H_s$, jossa $g_s = h_s$. Tällöin $g_s = h_s$ myös avoimessa joukossa $V = C \cap U_s$. Luvun ϵ valinnan nojalla funktio g_t on funktion g_s suora analyyttinen jatke ja funktio h_t on funktion h_s suora analyyttinen jatke. Tällöin sekä $g_t|_C$ että $h_t|_C$ ovat funktion $g_s|_V = h_s|_V$ suoria analyyttisiä jatkeita alueeseen C. Edelleen suoran analyyttisen jatkeen yksikäsitteisyyden nojalla $g_t = h_t$ alueessa C. Tällöin mille tahansa pisteelle s', jolle $|s' - t| < \epsilon$, saadaan

$$g_{s'}(z) = g_t(z) = h_t(z) = h_{s'}(z) \quad \text{kaikilla } z \in C \cap G_{s'} \cap H_{s'},$$

joten myös $s' \in E$. Näin ollen joko koko väli $[0,1] \cap\,]t - \epsilon, t + \epsilon[$ sisältyy joukkoon E tai joukkoon $[0,1] \setminus E$.

Toisin sanoen joukko E on sekä avoin että suljettu välillä $[0,1]$. Koska lisäksi $g_0 = f = h_0$, on $0 \in E$. Erityisesti E on epätyhjä, jolloin lemman 1.8 nojalla $E = [0,1]$. Erityisesti $1 \in E$, joten lauseen väite on kunnossa. □

Lemma 1.10. *Olkoon $(f_0, \ldots, f_n)$ suorien analyyttisten jatkeiden ketju. Tällöin on olemassa polku γ siten, että funktio f_n on funktion f_0 analyyttinen jatke polkua γ pitkin.*

Todistus. Olkoon D_j funktion f_j määrittelyjoukko. Koska funktio f_j on funktion f_{j-1} suora analyyttinen jatke, $D_{j-1} \cap D_j \neq \emptyset$ kaikilla $j \in \{1, \ldots, n\}$. Näin ollen kaikilla j voidaan valita jokin piste

$$z_j \in D_{j-1} \cap D_j.$$

Kaikilla $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ alueen D_j polkuyhtenäisyyden nojalla on olemassa polku $\gamma_j : [0, 1] \to D_j$, jolle

$$\gamma_j(0) = z_j \quad \text{ja} \quad \gamma_j(1) = z_{j+1}.$$

Yhdistetty polku

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{n-1} : [0, n-1] \to \mathbb{C}$$

on tällöin polku pisteestä $z_1 \in D_0$ pisteeseen $z_n \in D_n$. Tarkistetaan, että funktio f_n tosiaan on funktion f_0 analyyttinen jatke tätä polkua γ pitkin.

Määritelmää 1.6 varten valitaan funktioiksi f_t polun γ polkua γ_j vastaavalla osalla funktio f_j. Selvästi D_j on polun γ_j jokaisen pisteen ympäristö ja funktio f_j on tämän alueen analyyttinen funktio, joten riittää löytää sopivat luvut $\epsilon(t) > 0$. Toisaalta oletuksen mukaan funktio f_j on funktion f_{j-1} suora analyyttinen jatke kaikilla $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, joten esimerkiksi luvut $\epsilon(t) = 1$ kelpaavat. □

Edellisessä todistuksessa puhuttiin analyyttisestä jatkeesta polkua $\gamma : [0, n-1] \to \mathbb{C}$ pitkin, vaikka määritelmä olikin muotoiltu vain poluille $[0, 1] \to \mathbb{C}$. Tässä käytetään hyödyksi huomautuksen 1.7 havaintoa, että määritelmä yleistyy kuitenkin luonnollisesti millä tahansa välillä määritellylle polulle, kun polku parametrisoidaan välille $[0, 1]$.

On kuitenkin hyvä huomata, että tällainen parametrisointi muuttaa funktioiden f_t indeksoinnin ja muuttaa lukuja $\epsilon(t)$. Esimerkiksi edellä, jos polku $\gamma : [0, n-1] \to \mathbb{C}$ parametrisoidaan lineaarisesti välille $[0, 1]$, lukujen $\epsilon(t) = 1$ sijaan tulee käyttää lukuja $\epsilon(t) = 1/(n-1)$.

Lemma 1.11. *Olkoon $g : G \to \mathbb{C}$ funktion $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen jatke polkua $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ pitkin. Tällöin g on funktion f analyyttinen jatke myös määritelmän 1.5 mielessä.*

Todistus. Määritelmän 1.6 luvut $\epsilon(t)$ määräävät välin $[0, 1]$ avoimen peitteen

$$[0, 1] \subset \bigcup_{t \in [0,1]}]t - \epsilon(t), t + \epsilon(t)[\,.$$

Välin $[0, 1]$ kompaktiuden nojalla on olemassa jokin äärellinen alipeite

$$[0, 1] \subset]t_1 - \epsilon(t_1), t_1 + \epsilon(t_1)[\cup \cdots \cup]t_n - \epsilon(t_n), t_n + \epsilon(t_n)[\,.$$

Voidaan olettaa, että $t_1 < \cdots < t_n$ ja että mikään väleistä ei sisällä toista väliä. Tällöin kaikilla $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ on olemassa jokin piste

$$s_j \in]t_{j+1} - \epsilon(t_{j+1}), t_j + \epsilon(t_j)[\,.$$

Jokaisella $s \in]t_j - \epsilon(t_j), t_j + \epsilon(t_j)[$ funktio f_s on funktion f_{t_j} suora analyyttinen jatke lukujen $\epsilon(t_j)$ määrittelyn perusteella. Erityisesti funktio f_{s_j} on tällöin sekä funktion f_{t_j} että funktion $f_{t_{j+1}}$ suora analyyttinen jatke. Tällöin

$$(f, f_{t_1}, f_{s_1}, f_{t_2}, f_{s_2}, \dots, f_{t_{n-1}}, f_{s_{n-1}}, f_{t_n}, g)$$

on suorien analyyttisten jatkeiden ketju, eli funktio g on funktion f analyyttinen jatke. □

Analyyttisestä jatkeesta polkua γ pitkin saadaan myös analyyttinen jatke mitä tahansa polun γ rajoittumapolkua pitkin luonnollisella tavalla. Nimittäin, jos funktiot f_t, $0 \le t \le 1$, antavat analyyttisen jatkeen polkua γ pitkin, niin funktiot f_t, $0 \le t \le t_0$ antavat analyyttisen jatkeen rajoittumapolkua $\gamma|_{[0,t_0]}$ pitkin. Vastaava pätee myös toiseen suuntaan, eli analyyttiset jatkeet kahta peräkkäistä polkua pitkin voidaan yhdistää:

Lemma 1.12. *Olkoon f analyyttinen funktio. Olkoon funktio g funktion f analyyttinen jatke polkua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ pitkin ja funktio h funktion g analyyttinen jatke polkua $\beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ pitkin. Oletetaan lisäksi, että $\gamma(1) = \beta(0)$. Tällöin funktio h on funktion f analyyttinen jatke yhdistettyä polkua $\alpha = \gamma\beta : [0,2] \to \mathbb{C}$ pitkin.*

Todistus. Olkoot g_t, $0 \le t \le 1$ ja h_t, $0 \le t \le 1$ polkujen γ ja β jatkeiden antamat funktiot. Asetetaan

$$f_t = g_t \quad \text{kun } 0 \le t \le 1 \quad \text{ja} \quad f_t = h_{t-1} \quad \text{kun } 1 \le t \le 2$$

ja osoitetaan, että nämä funktiot antavat funktion f analyyttisen jatkeen polkua α pitkin.

Tarvittavat luvut $\epsilon(t)$ saadaan helposti polkujen γ ja β jatkeiden määräämistä luvuista $\epsilon_g(t)$ ja $\epsilon_h(t)$. Nämä luvut eivät kuitenkaan välttämättä kelpaa sellaisinaan. Ongelmana on, että esimerkiksi väli

$$]t - \epsilon_g(t), t + \epsilon_g(t)[$$

ei välttämättä sisälly kokonaan väliin $[0,1]$, jossa funktiot g_t ovat toistensa suoria analyyttisiä jatkeita. Tämä ongelma voidaan välttää pienentämällä lukuja $\epsilon(t)$, eli asettamalla

$$\epsilon(t) = \begin{cases} \min\{\epsilon_g(t), 1-t\}, & \text{jos } t < 1 \\ \min\{\epsilon_g(1), \epsilon_h(0)\}, & \text{jos } t = 1 \\ \min\{\epsilon_h(t-1), t-1\}, & \text{jos } t > 1 \end{cases}$$

Tällöin funktio f_s on funktion f_t suora analyyttinen jatke, kun $|s-t| < \epsilon(t)$. □

Tarkastellaan lopuksi vielä milloin analyyttinen jatke polkua pitkin antaa alkuperäisen funktion suoran analyyttisen jatkeen johonkin alueeseen. Kiinnitetään tätä varten seuraava määritelmä:

Määritelmä 1.13. Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $G \subset \mathbb{C}$ alue, jolle $G \cap D \ne \emptyset$. Sanotaan, että funktiota f voidaan *jatkaa vapaasti alueessa* G, jos funktiolla f on analyyttinen jatke mitä tahansa alueen G polkua pitkin, jonka lähtöpiste on alueessa D.

Lause 1.14. *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, jota voidaan jatkaa vapaasti alueessa $G \supset D$. Oletetaan, että jokaiselle alueen G suljetulle polulle $\gamma : [0,1] \to G$, jos h on funktion f analyyttinen jatke polkua γ pitkin, niin $f(z) = h(z)$ pisteen $\gamma(1) = \gamma(0)$ jossakin ympäristössä. Tällöin funktiolla f on suora analyyttinen jatke alueeseen G, eli on olemassa analyyttinen funktio $g : G \to \mathbb{C}$, jolle $g|_D = f$.*

Todistus. Kiinnitetään jokin piste $z_0 \in D$ ja valitaan jokaiselle $z \in G$ jokin alueen G polku γ_z pisteestä z_0 pisteeseen z. Koska funktiota f voidaan jatkaa vapaasti alueessa G, jokaiselle $z \in G$ analyyttinen jatke polkua γ_z pitkin antaa jonkin funktion

$$f_z : D_z \to \mathbb{C},$$

missä $D_z \subset G$ on jokin pisteen z ympäristö. Osoitetaan, että asettamalla

$$g : G \to \mathbb{C}, \quad g(z) = f_z(z) \quad \text{kaikilla } z \in G$$

saadaan funktion f suora analyyttinen jatke.

Funktion g analyyttisyyden tarkistamiseksi osoitetaan, että kaikilla $w \in G$

$$g(z) = f_w(z), \quad \text{kun } z \in D_w.$$

Tämä seuraa, jos osoitetaan, että

$$f_{w_1}(z) = f_{w_2}(z) \quad \text{kaikilla } z \in D_{w_1} \cap D_{w_2},$$

kun $D_{w_1} \cap D_{w_2} \neq \emptyset$.

Olkoot w_1 ja w_2 tällaiset pisteet ja olkoon β jokin alueen $D_{w_1} \cup D_{w_2}$ polku pisteestä w_1 pisteeseen w_2. Tällöin

$$\alpha = \gamma_{w_1} \beta \gamma_{w_2}^{-1}$$

on suljettu polku alkaen pisteestä $z_0 \in D$. Oletuksen mukaan funktion f analyyttinen jatke polkua α pitkin täsmää funktion f kanssa jossakin pisteen $z_0 = \alpha(0)$ ympäristössä. Näin ollen voidaan olettaa, että tämä jatke on funktio f itse. Funktiot f_{w_1} ja f_{w_2} taas ovat määritelmiensä mukaan funktion f analyyttiset jatkeet polkuja γ_{w_1} ja γ_{w_2} pitkin. Lemman 1.12 mukaan funktion f analyyttinen jatke polkua

$$\alpha \gamma_{w_2}$$

pitkin on tällöin funktio f_{w_2}. Toisaalta, koska

$$\alpha \gamma_{w_2} = \gamma_{w_1} \beta,$$

tämä on myös funktion f_{w_1} analyyttinen jatke polkua β pitkin. Koska β oli alueen $D_{w_1} \cup D_{w_2}$ mielivaltainen polku, tämä tarkoittaa, että funktio f_{w_2} on funktion f_{w_1} suora analyyttinen jatke, jolloin

$$f_{w_1}(z) = f_{w_2}(z) \quad \text{kaikilla } z \in D_{w_1} \cap D_{w_2}.$$

Näin ollen funktio g on analyyttinen.

Alueessa D funktion f analyyttinen jatke ei anna mitään muuta kuin funktion f itse, joten

$$g(z) = f_z(z) = f(z) \quad \text{kaikilla } z \in D$$

ja lauseen väite on todistettu. □

1.4. **Yhdistetty funktio ja käänteisfunktio.** Yhdistetyn funktion $f = g \circ h$ analyyttisen jatkeen olemassaolo riippuu olennaisesti funktioiden g ja h analyyttisten jatkeiden olemassaolosta. Samoin analyyttisen funktion käänteisfunktioiden analyyttisten jatkeiden olemassaolo riippuu alkuperäisen funktion analyyttisistä jatkeista.

Tulosten muotoilussa täytyy kuitenkin olla tarkkana sen kanssa mitä polkuja tarkastellaan. Esimerkiksi käänteisfunktioiden tarkastelussa yleisesti käänteisfunktion haarat voivat käyttäytyä eri tavoin analyyttisen jatkeen suhteen.

Lause 1.15. *Olkoot $g : G \to \mathbb{C}$ ja $h : D \to G$ analyyttisiä funktioita ja $f = g \circ h$. Oletetaan, että funktiolla h on analyyttinen jatke polkua γ pitkin ja funktiolla g on analyyttinen jatke polkua β pitkin, missä*

$$\beta(t) = h_t(\gamma(t)) \quad \textit{kaikilla } t \in [0, 1].$$

Tällöin funktiolla f on analyyttinen jatke polkua γ pitkin, jonka antavat funktiot

$$f_t = g_t \circ h_t.$$

Todistus. Oletuksen nojalla kaikilla $t \in [0, 1]$ on olemassa pisteen $\gamma(t)$ ympäristössä määritelty analyyttinen funktio $h_t : \tilde{D}_t \to \mathbb{C}$ ja pisteen $h_t(\gamma(t))$ ympäristössä määritelty analyyttinen funktio $g_t : G_t \to \mathbb{C}$. Funktion h_t jatkuvuuden perusteella on olemassa pisteen $\gamma(t)$ ympäristö $D_t \subset \tilde{D}_t$, jolle $h(D_t) \subset G_t$. Tällöin yhdistetty funktio

$$f_t : D_t \to \mathbb{C}, \quad f_t(z) = g_t \circ h_t(z),$$

on hyvin määritelty analyyttinen funktio pisteen $\gamma(t)$ ympäristössä D_t. Osoitetaan, että nämä funktiot antavat funktion f analyyttisen jatkeen polkua γ pitkin. Tätä varten riittää löytää sopivat luvut $\epsilon(t) > 0$ määritelmää 1.6 varten.

Olkoot $\epsilon_g(t)$ ja $\epsilon_h(t)$ vastaavat luvut funktioiden g ja h analyyttisille jatkeille polkuja β ja γ pitkin. Polun γ jatkuvuuden nojalla on olemassa luvut $\delta(t) > 0$ siten, että

$$\gamma(s) \in D_t, \quad \text{kun } |s - t| < \delta(t).$$

Asetetaan

$$\epsilon(t) = \min\{\delta(t), \epsilon_g(t), \epsilon_h(t)\}.$$

Tällöin, jos $|s - t| < \epsilon(t)$, funktio g_s on funktion g_t suora analyyttinen jatke ja funktio h_s on funktion h_t suora analyyttinen jatke, eli

$$h_t(z) = h_s(z) \quad \text{kaikilla } z \in \tilde{D}_t \cap \tilde{D}_s \quad \text{ja}$$
$$g_t(w) = g_s(w) \quad \text{kaikilla } w \in G_t \cap G_s.$$

Lisäksi, koska $\epsilon(t) \leq \delta(t)$, on oltava $\gamma(s) \in D_t \cap D_s$. Näin ollen

$$\emptyset \neq D_t \cap D_s \subset \tilde{D}_t \cap \tilde{D}_s$$

ja kaikilla $z \in D_t \cap D_s$

$$f_t(z) = g_t \circ h_t(z) = g_t \circ h_s(z) = g_s \circ h_s(z) = f_s(z).$$

Siis funktio f_s on funktion f_t suora analyyttinen jatke. □

Määritelmä 1.16. Analyyttinen funktio $f : D \to \mathbb{C}$ on *lokaalisti kääntyvä pisteessä* $a \in D$, jos on olemassa pisteen a ympäristö $U \subset D$ siten, että rajoittumafunktiolla $f|_U : U \to f(U)$ on olemassa analyyttinen käänteisfunktio.

Lause 1.17. *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Tällöin funktio f on lokaalisti kääntyvä täsmälleen niissä pisteissä $z \in D$, joissa $f'(z) \neq 0$. Lisäksi lokaali käänteisfunktio on määrittelyjoukkoa vaille yksikäsitteinen.*

Olemassaolon todistus lauseelle 1.17 löytyy esimerkiksi kirjasta [1, Ch. 4, s. 131, Theorem 11]. Kiinteälle määrittelyjoukolle käänteiskuvauksen yksikäsitteisyys on selvää, sillä bijektiolla on yksikäsitteinen käänteiskuvaus.

Lemma 1.18. *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $\gamma : [0,1] \to D$ polku, jolle $f'(\gamma(t)) \neq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$. Olkoon f_0^{-1} funktion f lokaali käänteisfunktio pisteessä $\gamma(0)$ ja f_1^{-1} lokaali käänteisfunktio pisteessä $\gamma(1)$. Tällöin funktio f_1^{-1} on funktion f_0^{-1} analyyttinen jatke polkua $f \circ \gamma$ pitkin.*

Todistus. Koska funktion f derivaatta on nollasta eroava polulla γ, on jokaisessa pisteessä $\gamma(t) \in D$ olemassa lokaali käänteisfunktio

$$f_t^{-1} : f(U_t) \to U_t,$$

missä $U_t \subset D$ on pisteen $\gamma(t)$ jokin ympäristö. Osoitetaan, että nämä funktiot f_t^{-1} antavat funktion f_0^{-1} analyyttisen jatkeen. Jälleen riittää löytää sopivat luvut $\epsilon(t) > 0$ määritelmää 1.6 varten.

Polun γ jatkuvuuden nojalla on olemassa luvut $\epsilon(t) > 0$ siten, että

$$\gamma(s) \in U_t, \quad \text{kun } |s-t| < \epsilon(t).$$

Tällöin, jos $|s-t| < \epsilon(t)$, joukko $U_s \cap U_t$ ja edelleen myös joukko $f(U_t) \cap f(U_s)$ ovat epätyhjiä. Lisäksi

$$f \circ f_t^{-1}(w) = w = f \circ f_s^{-1}(w) \quad \text{kaikilla } w \in f(U_t) \cap f(U_s),$$

sillä funktiot f_t^{-1} ja f_s^{-1} ovat molemmat funktion f lokaaleja käänteisfunktioita. Koska

$$f_t^{-1}(f(U_t) \cap f(U_s)) \subset U_t$$

ja funktio f on injektiivinen alueessa U_t, on oltava

$$f_t^{-1}(w) = f_s^{-1}(w) \quad \text{kaikilla } w \in f(U_t) \cap f(U_s).$$

Siis funktio f_s^{-1} on funktion f_t^{-1} suora analyyttinen jatke kun $|s-t| < \epsilon(t)$. □

Lause 1.19. *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, jolla on analyyttinen jatke polkua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ pitkin. Jos $f_t'(\gamma(t)) \neq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$, niin funktion f lokaalilla käänteisfunktiolla $f_{\gamma(0)}^{-1}$ on analyyttinen jatke polkua*

$$\beta : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \beta(t) = f_t(\gamma(t))$$

pitkin. Tämän jatkeen antavat lokaalit käänteisfunktiot f_t^{-1}, missä f_t^{-1} on funktion f_t lokaali käänteisfunktio pisteessä $\gamma(t)$.

Todistus. Polun γ jatkuvuuden nojalla on olemassa luvut $\delta(t) > 0$ siten, että

$$\gamma([t-\delta(t), t+\delta(t)] \cap [0,1]) \subset D_t,$$

missä D_t on funktion f_t määrittelyjoukko. Olkoot $\epsilon(t) > 0$ määritelmän 1.6 luvut funktion f analyyttiselle jatkeelle ja asetetaan

$$[a_t, b_t] = [t-\delta(t), t+\delta(t)] \cap [t-\epsilon(t)/2, t+\epsilon(t)/2] \cap [0,1].$$

Soveltamalla lemmaa 1.18 funktiolle f_t nähdään, että funktio $f_{b_t}^{-1}$ on funktion $f_{a_t}^{-1}$ analyyttinen jatke polkua $f_t \circ \gamma|_{[a_t,b_t]}$ pitkin. Toisaalta kaikilla $s \in [a_t, b_t]$, funktio f_s on funktion f_t suora analyyttinen jatke, joten

$$f_t(\gamma(s)) = f_s(\gamma(s)) = \beta(s) \quad \text{kaikilla } s \in [a_t, b_t].$$

Välin $[0,1]$ kompaktiuden nojalla on olemassa esitys

$$[0,1] = [a_{t_1}, b_{t_1}] \cup \cdots \cup [a_{t_n}, b_{t_n}].$$

Tarvittaessa pienentämällä välejä $[a_{t_j}, b_{t_j}]$ voidaan olettaa, että

$$a_{t_1} < b_{t_1} = a_{t_2} < \cdots < b_{t_{n-1}} = a_{t_n} < b_{t_n},$$

jolloin polut γ ja β voidaan jakaa osapolkuihin

$$\gamma = \gamma|_{[a_{t_1},b_{t_1}]} \cdots \gamma|_{[a_{t_n},b_{t_n}]} = \gamma_1 \cdots \gamma_n \quad \text{ja}$$
$$\beta = \beta|_{[a_{t_1},b_{t_1}]} \cdots \beta|_{[a_{t_n},b_{t_n}]} = \beta_1 \cdots \beta_n.$$

Edeltävän päättelyn nojalla funktio $f_{b_j}^{-1}$ on funktion $f_{a_j}^{-1}$ analyyttinen jatke polkua

$$f_{t_j} \circ \gamma_j = f_{t_j} \circ \gamma|_{[a_{t_j},b_{t_j}]} = \beta|_{[a_{t_j},b_{t_j}]} = \beta_j$$

pitkin. Väite seuraa induktiolla lemmasta 1.12, sillä polkujen β_j analyyttiset jatkeet yhdistämällä saadaan funktion f_0^{-1} analyyttinen jatke polkua β pitkin. $\square$

Lauseet 1.15 ja 1.19 yhdistämällä nähdään, että yhdistetyn funktion $f = g \circ h$ analyyttisen jatkeen tunteminen kertoo jotakin funktioiden g ja h analyyttisten jatkeiden välisestä suhteesta.

Seuraus 1.20. *Olkoot $g : G \to \mathbb{C}$ ja $h : D \to G$ analyyttisiä funktioita ja $f = g \circ h$. Oletetaan, että funktiolla f on analyyttinen jatke polkua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ pitkin.*

(1) Jos funktiolla h on analyyttinen jatke polkua γ pitkin ja $h_t'(\gamma(t)) \neq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$, niin funktiolla g on analyyttinen jatke polkua

$$\beta : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \beta(t) = h_t(\gamma(t))$$

pitkin.

(2) Jos funktiolla g on analyyttinen jatke polkua $\beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ pitkin, jolle

$$f_t(\gamma(t)) = g_t(\beta(t)), \quad h(\gamma(0)) = \beta(0), \quad \text{ja} \quad g_t'(\beta(t)) \neq 0 \quad \text{kaikilla } t \in [0,1],$$

niin funktiolla h on analyyttinen jatke polkua γ pitkin.

Todistus. Kohdassa (1) oletuksen $h'(\gamma(t)) = h_0'(\gamma(t)) \neq 0$ nojalla funktio h on kääntyvä pisteen $\gamma(0)$ jossakin ympäristössä U. Tästä saadaan funktiolle g pisteen $\beta(0) = h(\gamma(0))$ ympäristössä $h(U)$ esitys

$$g = f \circ h^{-1},$$

missä h^{-1} on funktion h lokaali käänteisfunktio $h^{-1} : h(U) \to U$.

Lauseen 1.19 nojalla funktiolla h^{-1} on analyyttinen jatke polkua β pitkin ja funktiolla f on oletuksen mukaan analyyttinen jatke polkua

$$t \mapsto \gamma(t) = h_t^{-1} \circ h_t(\gamma(t)) = h_t^{-1}(\beta(t))$$

pitkin. Tällöin lauseen 1.15 nojalla funktiolla g on analyyttinen jatke polkua β pitkin.

Kohdassa (2) on vastaavasti olemassa pisteen $\beta(0) = h(\gamma(0))$ ympäristö V, jossa funktio g on kääntyvä. Edelleen on olemassa pisteen $\gamma(0)$ ympäristö U, jolle $h(U) \subset V$ ja yhdistetty funktio

$$f|_U = g|_V \circ h|_U$$

on hyvin määritelty. Lokaalia käänteisfunktiota $g^{-1} : g(V) \to V$ käyttäen saadaan tällöin alueessa U esitys

$$h = g^{-1} \circ f$$

ja väite seuraa vastaavasti kuin kohdassa (1) soveltamalla lauseita 1.15 ja 1.19. $\square$

Esimerkki 1.21. Olkoon

$$D = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$$

ja tarkastellaan juurifunktion

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\,\mathrm{Arg}(z)/n}$$

analyyttisiä jatkeita. Funktio f on kokonaisen funktion

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = z^n$$

lokaali käänteisfunktio jokaisessa pisteessä $z \in f(D)$. Olkoon γ polku, jolle $\gamma(0) \in f(D)$. Funktion g ainoa derivaatan nollakohta on pisteessä $z = 0$, joten lemman 1.18 nojalla funktiolla f on analyyttinen jatke polkua $g \circ \gamma(t)$ pitkin, mikäli polku γ ei kulje pisteen 0 kautta.

Toisaalta mikä tahansa alueen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ polku β voidaan esittää muodossa

$$\beta(t) = \gamma(t)^n = g \circ \gamma(t)$$

jollekin polulle γ, joten funktiolla f on analyyttinen jatke mitä tahansa alueen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ polkua pitkin, jonka lähtöpiste on alueessa D.

Tarkastellaan tarkemmin ympyräpolun

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{2\pi it}$$

tapausta. Olkoot

$$w_j = \gamma(j/n) = e^{2\pi ij/n}, \quad j \in \{0, \ldots, n-1\}$$

ykkösen juuret. Funktion g käänteisfunktiot g_j^{-1} pisteissä w_j ovat kaikki juurifunktion haarat pisteessä $z = 1$. Lemman 1.18 nojalla funktion g_j^{-1} analyyttinen jatke polkua

$$g \circ \gamma|_{[j/n,(j+1)/n]}$$

pitkin on tällöin funktio g_{j+1}^{-1}, kun tulkitaan että $g_n^{-1} = g_0^{-1}$. Toisaalta

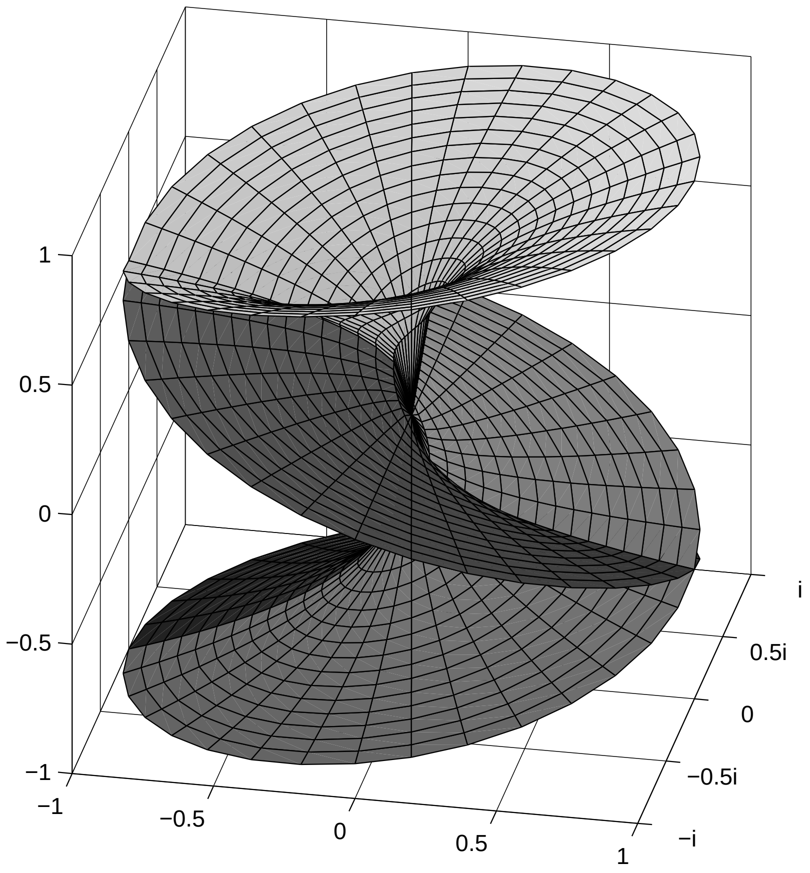
$$g \circ \gamma(t) = e^{2\pi itn},$$

joten mille tahansa välillä $[j/n, (j+1)/n]$, $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, rajoittumapolku

$$g \circ \gamma|_{[j/n,(j+1)/n]}$$

on vain polku γ uudelleen parametrisoituna. Toisin sanoen juurifunktion yhden haaran analyyttinen jatke ympyräpolkua γ pitkin antaa juurifunktion seuraavan haaran. Esimerkiksi päähaaralle $f = g_0^{-1}$ tämä tarkoittaa, että funktion f analyyttinen jatke ympyräpolkua γ pitkin antaa funktion

$$g_1^{-1}(z) = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\mathrm{Arg}(z)+2\pi)/n}.$$



KUVA 1.1. Funktion $f(z) = z^3$ käänteisfunktion eri haarojen reaaliosat yksikkökiekossa.

1.5. **Derivaatta- ja integraalifunktiot.** Olkoon $f : B(a,r) \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $a \in D$ mielivaltainen piste. Määritellään kiekossa $B(a,r)$ integraalifunktio

$$F : B(a,r) \to \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\, dw,$$

missä $[a,z]$ on janapolku pisteestä a pisteeseen z. Olkoon $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ paloittain differentioituva polku, jolle $\gamma(0) = a$ ja oletetaan, että funktiolla f on funktioiden $f_t : B(\gamma(t), r(t)) \to \mathbb{C}$ antama analyyttinen jatke polkua γ pitkin. Asetetaan kaikilla $t \in [0,1]$

$$F_t : B(\gamma(t), r(t)) \to \mathbb{C}, \quad F_t(z) = \int_0^t f_s(\gamma(s))\gamma'(s)\, ds + \int_{[\gamma(t),z]} f_t(w)\, dw.$$

Lemma 1.22. *Funktio $F_\gamma = F_1$ on funktion F analyyttinen jatke polkua γ pitkin.*

Todistus. Olkoot $\epsilon(t) > 0$ määritelmän 1.6 luvut funktioiden f_t määräämälle analyyttiselle jatkeelle. Merkitään $D_t = B(\gamma(t), r(t))$. Tällöin alueessa $D_t \cap D_s$

$$f_t(z) = f_s(z), \quad \text{kun } |s-t| < \epsilon(t).$$

Kun $|s-t| < \epsilon(t)$, alue $D_t \cup D_s$ on kahden toisiaan leikkaavan kiekon yhdisteenä yhdesti yhtenäinen alue. Tällöin alueessa $D_t \cup D_s$ analyyttisen funktion integraali polun yli riippuu vain polun päätepisteistä, joten kaikilla $z \in D_t \cap D_s$

$$\int_{[\gamma(t),z]} f_t(w)\,dw = \int_t^s f_u(\gamma(u))\gamma'(u)\,du + \int_{[\gamma(s),z]} f_s(w)\,dw.$$

Edelleen

$$\begin{aligned}
F_s(z) &= \int_0^s f_u(\gamma(u))\gamma'(u)\,du + \int_{[\gamma(s),z]} f_s(w)\,dw \\
&= \int_0^t f_u(\gamma(u))\gamma'(u)\,du + \int_t^s f_u(\gamma(u))\gamma'(u)\,du + \int_{[\gamma(s),z]} f_s(w)\,dw \\
&= \int_0^t f_u(\gamma(u))\gamma'(u)\,du + \int_{[\gamma(t),z]} f_t(w)\,dw = F_t(z).
\end{aligned}$$

Näin ollen F_s on funktion F_t suora analyyttinen jatke kun $|s-t| < \epsilon(t)$, jolloin F_γ on funktion F analyyttinen jatke polkua γ pitkin. □

Lause 1.23. *Olkoon f analyyttinen funktio ja f' sen derivaattafunktio. Tällöin funktiolla f on analyyttinen jatke polkua γ pitkin, jos ja vain jos funktiolla f' on analyyttinen jatke polkua γ pitkin.*

Todistus. Jos funktiot $f_t : D_t \to \mathbb{C}$ antavat funktion f analyyttisen jatkeen polkua γ pitkin, niin

$$f_t(z) = f_s(z) \quad \text{kaikilla } z \in D_t, \text{ kun } |t-s| < \epsilon(t).$$

Tästä seuraa välittömästi, että

$$f_t'(z) = f_s'(z) \quad \text{kaikilla } z \in D_t, \text{ kun } |t-s| < \epsilon(t),$$

joten funktiot f_t' antavat funktion f' analyyttisen jatkeen.

Toista suuntaa varten olkoot $g_t : D_t \to \mathbb{C}$ funktion f' analyyttisen jatkeen määräämät funktiot. Lemman 1.22 nojalla funktiot

$$G_t : B(\gamma(t), r(t)) \to \mathbb{C}, \quad G_t(z) = \int_0^t g_s(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds + \int_{[\gamma(t),z]} g_t(w)\,dw.$$

määräävät integraalifunktion

$$G : B(\gamma(0), r(t)) \to \mathbb{C}, \quad G(z) = \int_{[\gamma(0),z]} f'(w)\,dw$$

analyyttisen jatkeen polkua γ pitkin. Toisaalta, koska f on funktion f' integraalifunktio,

$$G(z) = \int_{[\gamma(0),z]} f'(w)\,dw = f(z) - f(\gamma(0)).$$

Toisin sanoen $f = G + f(\gamma(0))$, jolloin funktiot $G_t + f(\gamma(0))$ määräävät funktion f analyyttisen jatkeen polkua γ pitkin. □

Esimerkki 1.24. Tarkastellaan logaritmin päähaaran analyyttisiä jatkeita käyttäen lausetta 1.23. Olkoon

$$f : \mathbb{C} \setminus \,]-\infty, 0] \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \mathrm{Log}(z),$$

ja olkoon γ mikä tahansa derivoituva polku, jolle $\gamma(0) \in \mathbb{C} \setminus \,]-\infty, 0]$. Funktion f derivaattafunktiolla $z \mapsto 1/z$ on suora analyyttinen jatke alueeseen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mutta ei analyyttistä jatketta tämän alueen ulkopuolelle. Näin ollen lauseen 1.23 nojalla funktiolla f on analyyttinen jatke polkua γ pitkin, jos ja vain jos polku γ on alueen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ polku.

Lauseen 1.23 todistuksen perusteella analyyttinen jatke polkua γ pitkin on tällöin funktio

$$g : B(\gamma(1), |\gamma(1)|) \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \int_\gamma 1/z \, dz + \int_{[\gamma(1),z]} 1/z \, dz + f(\gamma(0)).$$

Erityisesti, jos γ on suljettu polku, niin

$$\int_{[\gamma(1),z]} 1/z \, dz + f(\gamma(0)) = f(z) - f(\gamma(1)) + f(\gamma(0)) = f(z) = \mathrm{Log}(z)$$

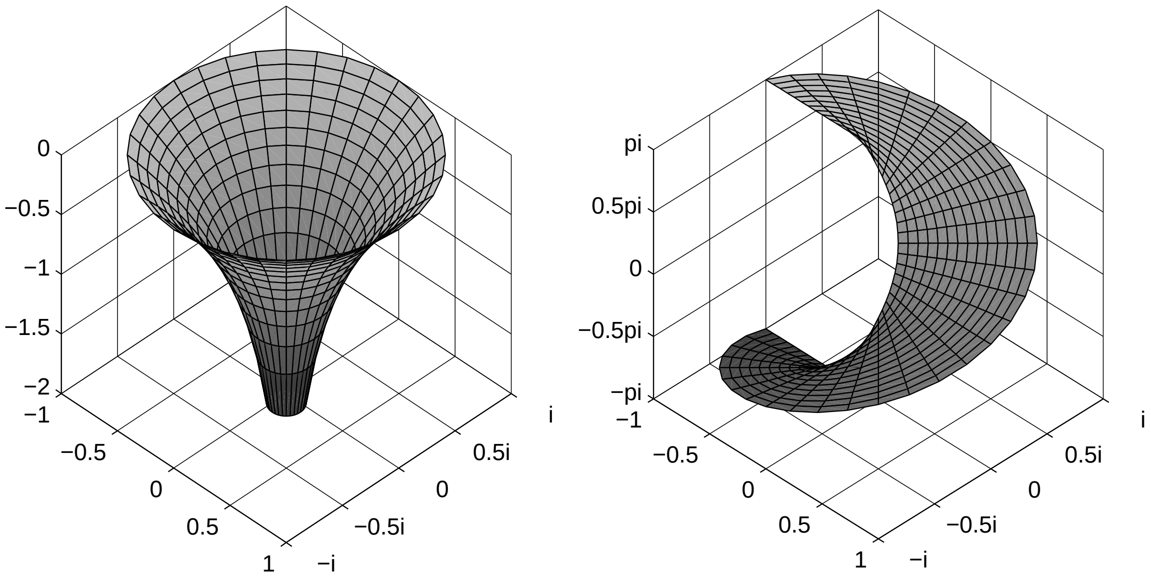
ja residylauseen nojalla

$$\int_\gamma 1/z \, dz = 2\pi i n(\gamma, 0),$$

missä $n(\gamma, 0)$ on polun γ kierrosluku pisteen 0 ympäri. Näin ollen

$$g(z) = 2\pi i n(\gamma, 0) + f(z).$$

Toisin sanoen logaritmin päähaaran f analyyttinen jatke suljettua polkua pitkin antaa funktion $f + 2\pi i k$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$, eli jonkin logaritmin haaran.



Kuva 1.2. Logaritmin päähaaran reaali- ja imaginääriosa.

2. Riemannin pinnat

Tässä luvussa esitetään Riemannin pinnan määritelmä ja perusasioita Riemannin pintojen käsittelystä. Olennaisen roolin Riemannin pintojen käsittelyssä saavat kartat, joiden avulla Riemannin pinnan ja kompleksitason välinen yhteys saadaan aikaan. Luvun yksi tärkeimmistä tavoitteista on tarkistaa, miten useat kompleksianalyysin perustulokset yleistyvät Riemannin pinnoille.

2.1. **Määritelmiä.**

Määritelmä 2.1. Topologinen avaruus X on *Hausdorff-avaruus*, jos mille tahansa kahdelle eri pisteelle on olemassa erilliset ympäristöt. Toisin sanoen, jos $x, y \in X$ ja $x \neq y$, niin on olemassa avoimet joukot $U, V \subset X$, joille $x \in U$, $y \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$.

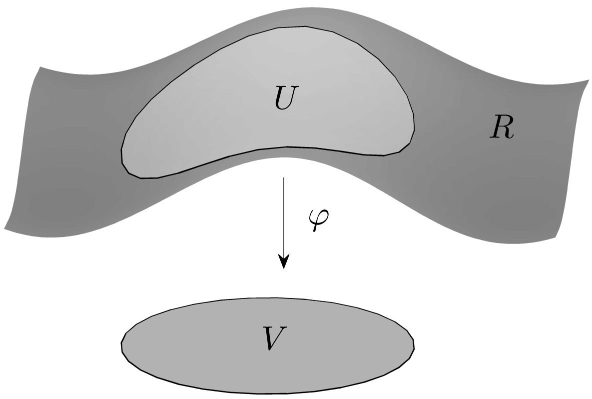
Määritelmä 2.2. Olkoon R yhtenäinen Hausdorff-avaruus ja Φ on kokoelma homeomorfismeja $\varphi : U \to V$, missä $U \subset R$ ja $V \subset \mathbb{C}$ ovat jotkin avoimet joukot. Oletetaan lisäksi, että kokoelman Φ homeomorfismit toteuttavat seuraavat ehdot:

(i) Homeomorfismien $\varphi \in \Phi$ määrittelyjoukot muodostavat avaruuden R avoimen peitteen.

(ii) Jos kahden homeomorfismin $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ määrittelyjoukot leikkaavat, niin *parametrinvaihtokuvaus* $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ on analyyttinen.

Tällöin pari (R, Φ) on *Riemannin pinta.*

Homeomorfismeista $\varphi \in \Phi$ käytetään termejä *kartta* ja *parametrikuvaus.* Lisäksi, jos $a \in R$ on jokin piste ja $\varphi \in \Phi$ on kartta, joka on määritelty tämän pisteen ympäristössä, niin sanotaan, että φ on kartta pisteessä $a \in R$. Lisäksi sanotaan, että kokoelma Φ on *kartasto* tai *karttakokoelma.*



Kuva 2.1. Riemannin pinnan R kartta φ.

Riemannin pinta on erikoistapaus topologisesta 2-monistosta (pinnasta), eli avaruudesta joka on lokaalisti homeomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanssa. Toisin sanoen Riemannin pinta on pinta, jolta vaaditaan lisäehto (ii). Erona yleisen 2-moniston määritelmään on myös se, että Riemannin pinnan määritelmässä ei oleteta topologian numeroituvan kannan olemassaoloa. Edellä asetetuilla oletuksilla tällainen kanta on kuitenkin aina olemassa. Tämän todistus Dirichlet'n ongelmaa soveltaen löytyy esimerkiksi lähteistä [2, Ch. 2, §3, 12C] ja [7, III. 6.].

Yksinkertainen esimerkki Riemannin pinnasta on mikä tahansa kompleksitason alue $D \subset \mathbb{C}$. Tällöin identtinen kuvaus $\mathrm{id} : D \to D$ antaa ainoan tarvittavan kartan. Selvästi alue D on yhtenäinen Hausdorff-avaruus ja kuvaus id on homeomorfismi. Määritelmän ehto (i) on triviaalisti voimassa, kuten myös ehto (ii), sillä ainoa parametrinvaihtokuvaus on $\mathrm{id} \circ \mathrm{id}^{-1} = z \mapsto z$.

Toinen helppo tapaus saadaan annetun Riemannin pinnan avoimesta yhtenäisestä osajoukosta. Jos (R, Φ) on jokin Riemannin pinta ja $S \subset R$ sen avoin yhtenäinen osajoukko, niin avaruudesta S saadaan Riemannin pinta valitsemalla kartoiksi kokoelman Φ karttojen rajoittumat avaruuteen S. Tässäkin tapauksessa ehto (i) on kunnossa, sillä alkuperäisten karttojen määrittelyjoukot peittävät koko avaruuden R, joten avaruus $S \subset R$ tulee varmasti peitettyä. Ehto (ii) on myös helppo tarkistaa, sillä tarkasteltavat parametrinvaihtokuvaukset ovat pinnan R parametrinvaihtokuvausten rajoittumia.

Kompleksitason ulkopuolella ehkä yksinkertaisin Riemannin pinta on Riemannin pallo $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, jolle kartat saadaan kuvauksista

$$\varphi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \varphi_1(z) = z \quad \text{ja} \quad \varphi_2 : \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad \varphi_2(z) = \frac{1}{z}.$$

Tässä tulkitaan, että $1/\infty = 0$ ja Riemannin pallon topologiana käytetään kompleksitason yhden pisteen kompaktifioinnin topologiaa, jolloin pisteen ∞ ympäristöt saadaan joukoista $\mathbb{C} \setminus K \cup \{\infty\}$, missä $K \subset \mathbb{C}$ on jokin kompakti joukko. Tässä topologiassa nähdään helposti, että kuvaukset φ_1 ja φ_2 ovat homeomorfismeja. Parametrinvaihtokuvaukset taas ovat identtinen kuvaus ja kuvaus

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \mapsto 1/z,$$

jotka ovat molemmat selvästi analyyttisiä funktioita.

Määritelmän ehto (ii) takaa, että jokaisella Riemannin pinnalla voidaan mielekkäästi puhua analyyttisestä funktiosta.

Määritelmä 2.3. Olkoot (R, Φ) ja (S, Ψ) Riemannin pintoja. Funktio $f : R \to S$ on *analyyttinen*, jos funktio $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ on analyyttinen funktio määrittelyjoukossaan kaikilla kartoilla $\varphi \in \Phi$ ja $\psi \in \Psi$.

Edellä $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ voi olla hyvin määritelty vain tyhjässä joukossa, jolloin tulkitaan, että kuvaus on triviaalisti analyyttinen. Yleisesti karttojen $\varphi : U_1 \to V_1$ ja $\psi : U_2 \to V_2$ tapauksessa tarkastellaan funktion

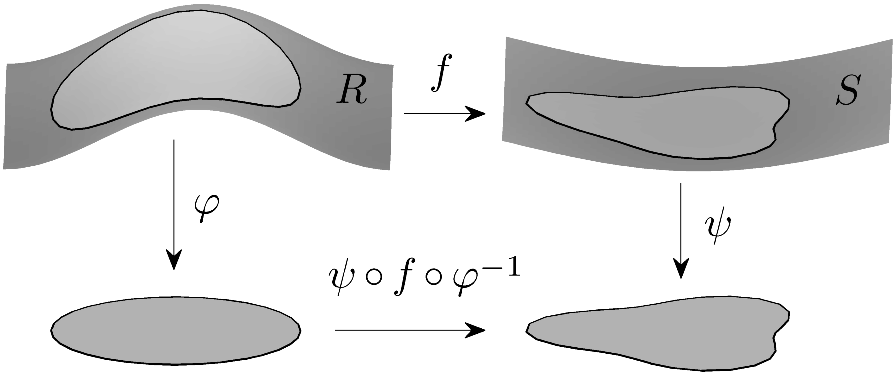
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big|_W : W \to \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(W)$$

analyyttisyyttä, missä

$$W = \varphi(f^{-1}(U_2) \cap U_1).$$

Huomaa, että $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_W$ on tällöin funktio kompleksitason yhdeltä osajoukolta toiselle ja jatkuvan funktion f tapauksessa W on avoin. Näin ollen analyyttisyyden määritelmässä ei jouduta kehäpäätelmään, vaan voidaan hyvin käyttää analyyttisyyden määritelmää kompleksitasossa.

Lisäksi, jos yllä olevassa määritelmässä $R = \mathbb{C}$ tai $S = \mathbb{C}$ varustettuna standardilla kartastolla $\Phi_{\mathbb{C}} = \{\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$, niin määritelmä yksinkertaistuu. Esimerkiksi Riemannin pinnan (R, Φ) funktio $f : R \to \mathbb{C}$ on analyyttinen täsmälleen, kun funktiot $f \circ \varphi^{-1}$ ovat analyyttisiä.



KUVA 2.2. Riemannin pintojen välisen kuvauksen $f : R \to S$ analyyttisyys.

Esimerkki 2.4. Olkoon $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, jolla on napa pisteessä 0. Osoitetaan, että kuvaus

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \to (\mathbb{C}_\infty, \Psi), \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{jos } z \neq 0 \\ \infty, & \text{jos } z = 0 \end{cases}$$

on analyyttinen, missä $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\}$ on Riemannin pallon standardikartasto, eli

$$\psi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \psi_1(z) = z \quad \text{ja} \quad \psi_2 : \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad \psi_2(z) = \frac{1}{z}.$$

Analyyttisyyden määritelmää varten täytyy tarkistaa, että funktiot $\psi_1 \circ \tilde{f}$ ja $\psi_2 \circ \tilde{f}$ ovat analyyttisiä määrittelyjoukoissaan. Olkoon

$$A = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

funktion f nollakohtien joukko. Tällöin

$$\tilde{f}(z) \in \mathbb{C}, \quad \text{kun } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \text{ja}$$
$$\tilde{f}(z) \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}, \quad \text{kun } z \in \mathbb{C} \setminus A.$$

Tarkistettavat funktiot ovat näin ollen

$$\psi_1 \circ \tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad \psi_1 \circ \tilde{f}(z) = f(z), \quad \text{ja}$$
$$\psi_2 \circ \tilde{f} : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}, \quad \psi_2 \circ \tilde{f}(z) = 1/\tilde{f}(z).$$

Ensimmäisen funktion analyyttisyys seuraa suoraan oletuksesta, että funktio $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen. Jälkimmäistä funktiota varten huomataan, että koska funktiolla f on napa pisteessä 0, on olemassa luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että funktio $z \mapsto z^n f(z)$ on analyyttinen funktio koko kompleksitasossa ja

$$\lim_{z \to 0} z^n f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Näin ollen

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^n}{z^n f(z)} = 0 = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\tilde{f}(0)},$$

Toisaalta, koska funktiolla f ei ole nollakohtia joukossa A, sama pätee funktiolle $z \mapsto z^n f(z)$. Näin ollen

$$\frac{1}{\tilde{f}(z)} = \frac{1}{f(z)} = \frac{z^n}{z^n f(z)} \quad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C} \setminus (A \cup \{0\}).$$

Nämä havainnot yhdistäen nähdään, että funktio

$$\psi_2 \circ \tilde{f}(z) = \frac{1}{\tilde{f}(z)} = \frac{z^n}{z^n f(z)}$$

on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus A$.

Vastaavalla päättelyllä nähdään, että itse asiassa mistä tahansa kompleksitason jonkin osajoukon meromorfisesta funktiosta, eli funktioista jolla erikoispisteet ovat korkeintaan napoja, saadaan analyyttinen funktio, kun funktion maalijoukoksi vaihdetaan Riemannin pallo.

2.2. **Kartastot ja analyyttinen rakenne.** Riemannin pinnan R käsittely voidaan palauttaa kompleksitason käsittelyksi karttoja käyttämällä. Määritelmän 2.2 ehto (i) takaa, että jokaisella pisteellä $a \in R$ on olemassa jokin ympäristö U ja homeomorfismi $\varphi : U \to V$ jollekin kompleksitason osajoukolle V. Tällöin ympäristössä U voidaan käyttää kompleksitason koordinaatteja, eli pisteen $b \in U$ käsittelyn sijaan käsitellä kompleksitason pistettä $z = \varphi(b) \in V \subset \mathbb{C}$. Esimerkiksi analyyttisen funktion $f : R \to \mathbb{C}$ tarkastelussa voidaan puhua analyyttisestä funktiosta *lokaaleissa koordinaateissa*, jolloin tarkoitetaan funktiota

$$f \circ \varphi^{-1}$$

jollakin pinnan R kartalla φ. Vastaavasti Riemannin pintojen välinen funktio $f : R \to S$ voidaan esittää lokaaleissa koordinaateissa muodossa

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1},$$

joka on funktio kompleksitason osajoukolta toiselle kompleksitason osajoukolle. Analyyttisyyden määritelmä 2.3 voidaankin nyt muotoilla sanomalla, että Riemannin pintojen välinen funktio on analyyttinen täsmälleen, kun se on analyyttinen kaikissa lokaaleissa koordinaateissa.

Kuitenkin jokaisen pinnan pisteen ympäristössä voi olla (ja usein onkin) monta eri karttaa. Tällöin koordinaattiesitys ei ole yksikäsitteinen, mikä voi joissakin tapauksissa aiheuttaa ongelmia. Tämän takia Riemannin pintoja käsitellessä ollaankin usein kiinnostuneita nimenomaan sellaisista ominaisuuksista, jotka eivät ole riippuvaisia kartan valinnasta.

Määritelmä 2.5. Olkoot (R, Φ) ja (S, Ψ) Riemannin pintoja. Funktio $f : R \to S$ on *konformikuvaus*, jos se on analyyttinen bijektio. Jos tällainen kuvaus f on olemassa, niin sanotaan, että Riemannin pinnat (R, Φ) ja (S, Ψ) ovat *(konformisesti) ekvivalentit.*

Jos keskitytään vain lokaalin koordinaatin valinnasta riippumattomiin ominaisuuksiin, niin huomataan, että kartaston sisällön täsmällinen valinta ei ole olennaista, vaan ainoastaan kyseisen kokoelman määräämällä Riemannin pintojen ekvivalenssiluokalla on merkitystä. Toisin sanoen, jos (R, Φ) ja (S, Ψ) ovat ekvivalentteja Riemannin pintoja, voidaan hyvin tulkita, että (R, Φ) ja (S, Ψ) ovat sama pinta ja käsittely pinnalla S voidaan aina palauttaa pinnalle R niiden välisen konformikuvauksen kautta.

Erityistapaus tästä saadaan, kun kiinnitetään avaruus R ja vaaditaan, että identtinen kuvaus antaa konformikuvauksen eri kartastoilla varustetun avaruuden R välillä.

Lemma 2.6. *Olkoot (R, Φ) ja (R, Ψ) Riemannin pintoja. Tällöin identtinen kuvaus*

$$\mathrm{id} : (R, \Phi) \to (R, \Psi)$$

on konformikuvaus, jos ja vain jos $(R, \Phi \cup \Psi)$ on Riemannin pinta.

Todistus. Identtinen kuvaus on aina bijektio, joten kysymys on ainoastaan identtisen kuvauksen analyyttisyydestä. Suoraan määritelmän 2.3 perusteella taas identtinen kuvaus on analyyttinen, kun funktiot

$$\psi \circ \mathrm{id} \circ \varphi^{-1}$$

ovat analyyttisiä kaikilla $\varphi \in \Phi$ ja $\psi \in \Psi$. Toisaalta, koska (R, Φ) ja (R, Ψ) ovat Riemannin pintoja, kokoelmien Φ ja Ψ sisäiset parametrinvaihtokuvaukset ovat analyyttisiä. Edellisen nojalla siis kokoelman $\Phi \cup \Psi$ parametrinvaihtokuvaukset ovat analyyttisiä täsmälleen kun identtinen kuvaus $\mathrm{id} : (R, \Phi) \to (R, \Psi)$ on analyyttinen. $\square$

Määritelmä 2.7. Olkoon (R, Φ) Riemannin pinta. Kartasto Φ on *täydellinen*, jos ei ole olemassa homeomorfismia $\varphi \notin \Phi$, jolle $(R, \Phi \cup \{\varphi\})$ on Riemannin pinta. Tällöin sanotaan myös, että kokoelma Φ on *analyyttinen rakenne*.

Lause 2.8. *Olkoon (R, Φ) Riemannin pinta. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen analyyttinen rakenne Ψ, jolle $\Phi \subset \Psi$ ja $\mathrm{id} : (R, \Phi) \to (R, \Psi)$ on konformikuvaus.*

Todistus. Olkoon Ψ kaikkien homeomorfismien $\psi : U \to V$ kokoelma, missä $U \subset R$ ja $V \subset \mathbb{C}$ ovat avoimia ja kuvauksen ψ parametrinvaihtokuvaukset karttojen $\varphi \in \Phi$ kanssa ovat analyyttisiä. Selvästi $\Phi \subset \Psi$, joten $\Phi \cup \Psi = \Psi$. Tällöin lemman 2.6 nojalla

$$\mathrm{id} : (R, \Phi) \to (R, \Psi)$$

on konformikuvaus, jos (R, Ψ) ylipäätään on hyvin määritelty Riemannin pinta. Tätä varten riittää tarkistaa, että kaikki kokoelman Ψ parametrinvaihtokuvaukset ovat analyyttisiä. Toisaalta suoraan kokoelman Ψ määrittelyn perusteella funktiot

$$\psi \circ \varphi^{-1} \quad \text{ja} \quad \varphi \circ \psi^{-1}$$

ovat analyyttisiä kaikilla $\psi \in \Psi$ ja $\varphi \in \Phi$. Edelleen mille tahansa kartoille $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$, funktiot

$$\psi_1 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi_2^{-1}, \quad \text{missä } \varphi \in \Phi,$$

ovat analyyttisten funktioiden yhdisteinä analyyttisiä, mistä seuraa, että myös parametrinvaihtokuvaus $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ on analyyttinen.

Kokoelman Ψ täydellisyyden osoittamiseksi oletetaan, että $\psi : U \to V$ on jokin homeomorfismi avoimien joukkojen $U \subset R$ ja $V \subset \mathbb{C}$ välillä, jolle $(R, \Psi \cup \{\psi\})$ on

Riemannin pinta. Tällöin parametrinvaihtokuvausten analyyttisyydestä seuraa, että funktiot
$$\psi \circ \varphi^{-1} \quad \text{ja} \quad \varphi \circ \psi^{-1}$$
ovat analyyttisiä kaikilla $\varphi \in \Phi \subset \Psi \cup \{\psi\}$. Tämä taas on täsmälleen kokoelman Ψ määrittelevä ehto, joten $\psi \in \Psi$ ja kokoelma Ψ on täydellinen.

Yksikäsitteisyyttä varten oletetaan, että Ψ_1 ja Ψ_2 toteuttavat vaaditut ehdot. Kuvausten
$$\mathrm{id} : (R, \Phi) \to (R, \Psi_1) \quad \text{ja} \quad \mathrm{id} : (R, \Phi) \to (R, \Psi_2)$$
analyyttisyydestä seuraa, että kuvaus
$$\mathrm{id} : (R, \Psi_1) \to (R, \Psi_2).$$
on myös analyyttinen. Edelleen lemman 2.6 nojalla $(R, \Psi_1 \cup \Psi_2)$ on Riemannin pinta. Toisaalta, koska Ψ_1 ja Ψ_2 ovat täydellisiä, niin tällöin on oltava
$$\Psi_1 = \Psi_1 \cup \Psi_2 = \Psi_2,$$
joten yksikäsitteisyys on kunnossa. □

Termi analyyttinen rakenne perustuu Riemannin pinnan analyyttisen funktion määritelmään. Jotta voidaan puhua avaruuden R analyyttisestä funktiosta $f : R \to \mathbb{C}$, täytyy kiinnittää jokin kartasto Φ. Toisaalta, jos kartastot Φ_1 ja Φ_2 määräävät saman analyyttisen rakenteen Ψ, niin kuvaukset
$$\mathrm{id} : (R, \Phi_1) \to (R, \Psi) \quad \text{ja} \quad \mathrm{id} : (R, \Phi_2) \to (R, \Psi)$$
ovat analyyttisiä. Edelleen kuvaus
$$\mathrm{id} : (R, \Phi_1) \to (R, \Phi_2)$$
on analyyttinen, jolloin funktio
$$f : (R, \Phi_2) \to \mathbb{C}$$
on analyyttinen, jos ja vain jos funktio
$$f = f \circ \mathrm{id} : (R, \Phi_1) \to \mathbb{C}$$
on analyyttinen. Toisin sanoen pinnoilla (R, Φ_1) ja (R, Φ_2) on täsmälleen samat analyyttiset funktiot. Tässä mielessä voidaan ajatella, että kartaston kiinnittäminen määrää avaruudelle jonkin analyyttisen rakenteen ja tämä analyyttinen rakenne määrää avaruuden analyyttiset funktiot.

Käytännössä Riemannin pinnan kartastoa voidaan käsitellä melko vapaasti. Olennaista on kuitenkin säilyttää kartaston määräämä analyyttinen rakenne. Tämä tarkoittaa, että kartastoon voidaan lisätä tai kartastosta voidaan poistaa tarvittaessa karttoja, kunhan varmistutaan, että näin ensinnäkin saadaan kartasto, ja että saatava kartasto määrää edelleen saman analyyttisen rakenteen.

Esimerkki 2.9. Olkoon (R, Φ) Riemannin pinta.

(i) Olkoon $\varphi : U \to V$ kokoelman Φ homeomorfismi ja olkoon $\tilde{\varphi} = \varphi|_U$. Tällöin parametrinvaihtokuvaukset kuvauksen $\tilde{\varphi}$ kanssa ovat rajoittumakuvauksia vastaavista parametrinvaihtokuvauksista kuvauksen φ kanssa, joten kaikki kokoelman $\Phi \cup \{\tilde{\varphi}\}$ parametrinvaihtokuvaukset ovat analyyttisiä. Näin ollen $(R, \Phi \cup \{\tilde{\varphi}\})$ on ekvivalentti alkuperäisen Riemannin pinnan (R, Φ) kanssa.

(ii) Olkoon $\varphi : U \to V$ kokoelman Φ homeomorfismi, $W \subset \mathbb{C}$ avoin ja $h : V \to W$ konformikuvaus. Asetetaan $\tilde{\varphi} = h \circ \varphi$. Tällöin parametrinvaihtokuvaukset kuvauksen $\tilde{\varphi}$ kanssa ovat muotoa

$$\tilde{\varphi} \circ \psi^{-1} = h \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$

tai

$$\psi \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \circ h^{-1}.$$

Joka tapauksessa kyseessä on analyyttisen funktion h tai h^{-1} yhdiste analyyttisen parametrinvaihtokuvauksen kanssa, joten tässäkin tapauksessa $\Phi \cup \{\tilde{\varphi}\}$ on kartasto ja $(R, \Phi \cup \{\tilde{\varphi}\})$ on ekvivalentti alkuperäisen Riemannin pinnan kanssa.

2.3. **Perusominaisuuksia.** Riemannin pinta käyttäytyy lokaalisti kuin kompleksitason osajoukko, joten kompleksitason lokaalit ominaisuudet periytyvät suoraan Riemannin pinnoille. Muotoillaan seuraavaksi muutamia jatkon kannalta hyödyllisiä kompleksianalyysin perustuloksia Riemannin pintojen tapauksessa. Seuraavissa (R, Φ) ja (S, Ψ) ovat Riemannin pintoja.

Jos $D \subset \mathbb{C}$ on kompleksitason alue ja $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, niin funktion f lokaalin käyttäytymisen pisteessä $a \in D$ määrää pienin luku $k \in \mathbb{N}$, jolle $f^{(k)}(a) \neq 0$. Tällöin funktion f potenssisarjaesitys tässä pisteessä on muotoa

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Tällaisesta pienimmästä luvusta k on mielekästä puhua myös Riemannin pinnan analyyttisen funktion tapauksessa, mutta tässä tapauksessa lokaalien koordinaattien valinnan vapaus yksinkertaistaa analyyttisten funktioiden lokaalia käsittelyä.

Lause 2.10. *Olkoon $f : R \to S$ analyyttinen funktio. Tällöin jokaisen pisteen $a \in R$ ympäristössä on olemassa lokaalit koordinaatit, joissa $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$ jollekin $k \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Olkoot $\tilde{\varphi} \in \Phi$ ja $\psi \in \Psi$ mielivaltaiset lokaalit koordinaatit pisteiden a ja $f(a)$ ympäristöissä. Tarvittaessa siirtäen pisteet $\tilde{\varphi}(a)$ ja $\psi(f(a))$ origoon konformikuvauksilla $z \mapsto z - \tilde{\varphi}(a)$ ja $z \mapsto z - \psi(f(a))$, voidaan olettaa, että kartoille $\tilde{\varphi}$ ja ψ pätee $\tilde{\varphi}(a) = 0$ ja $\psi(f(a)) = 0$. Huomaa, että esimerkin 2.9 kohdan (ii) nojalla konformikuvauksen liittäminen karttaan antaa edelleen pinnan R kartan.

Tällöin $\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ on analyyttinen funktio origon jossakin ympäristössä ja $\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(0) = 0$. Erityisesti tällä funktiolla on olemassa potenssisarjakehitelmä

$$\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolle $a_k \neq 0$. Tällöin

$$\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n = z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-k} =: z^k g(z),$$

missä g on analyyttinen funktio origon ympäristössä ja $g(0) \neq 0$. Koska $g(0) \neq 0$, on olemassa origon ympäristö U, jolle

$$g(U) \subset B(g(0), |g(0)|).$$

Tässä ympäristössä funktio

$$h : U \to \mathbb{C}, \quad h(z) = z\sqrt[k]{g(z)}$$

on hyvin määritelty analyyttinen funktio, jolle $h(0) = 0$ ja $h(z)^k = z^k g(z)$. Funktion h derivaatta on

$$h'(z) = \sqrt[k]{g(z)} + z\frac{1}{k}\sqrt[k]{g(z)^{1-k}},$$

joten $h'(0) = \sqrt[k]{g(0)} \neq 0$. Toisin sanoen on olemassa origon ympäristö $V \subset U$ jossa h on injektiivinen. Jälleen esimerkin 2.9 kohdan (ii) perusteella $\varphi = h \circ \tilde{\varphi}$ on kartta pisteen $a \in R$ jossakin ympäristössä. Koska

$$\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(z) = z^k g(z) = (z\sqrt[k]{g(z)})^k = h(z)^k,$$

funktiolle f saadaan lokaali esitys

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = \psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ h^{-1}(z) = (h \circ h^{-1}(z))^k = z^k.$$

□

Määritelmä 2.11. Analyyttisen funktion $f : R \to S$ *derivaatan nollakohta* on piste $a \in R$, jolle on olemassa kartat $\varphi \in \Phi$ ja $\psi \in \Psi$ pisteiden a ja $f(a)$ ympäristöissä siten, että funktion $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ derivaatalla on nollakohta pisteessä $\varphi(a)$.

Lemma 2.12. *Jos analyyttisellä funktiolla $f : R \to S$ on derivaatan nollakohta $a \in R$, niin $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(a)) = 0$ kaikissa lokaaleissa koordinaateissa $\psi \in \Psi$ ja $\varphi \in \Phi$.*

Todistus. Olkoot $\tilde{\varphi}$ ja $\tilde{\psi}$ kartat, joille

$$(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})'(\tilde{\varphi}(a)) = 0.$$

Jos $\varphi \in \Phi$ ja $\psi \in \Psi$ ovat mitä tahansa muita karttoja, niin funktiot

$$h_1 = \psi \circ \tilde{\psi}^{-1} \quad \text{ja} \quad h_2 = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$$

ovat konformikuvauksia kompleksitason avoimien osajoukkojen välillä. Näitä konformikuvauksia käyttäen saadaan esitys

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = h_1 \circ (\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \circ h_2.$$

Koska lisäksi

$$h_2(\varphi(a)) = \tilde{\varphi}(a),$$

yllä olevasta esityksestä seuraa, että funktiolla f on derivaatan nollakohta myös koordinaateissa φ ja ψ. □

Huomautus 2.13. Vaikka derivaatan nollakohdat ovatkin riippumattomia lokaalin koordinaatin valinnasta, sama ei päde derivaattafunktiolle f'. Toisin sanoen lukua $f'(a)$ ei välttämättä voida määrätä yksikäsitteisesti, mikäli $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(a)) \neq 0$ joissakin lokaaleissa koordinaateissa φ ja ψ.

Yksinkertainen esimerkki tästä saadaan, jos valitaan Riemannin pinnaksi yksikkökiekko $B(0, 1)$ varustettuna epästandardilla parametrikuvausten kokoelmalla $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, missä

$$\varphi_1(z) = z \quad \text{ja} \quad \varphi_2(z) = z/2.$$

Tällöin parametrinvaihtokuvaukset ovat

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z) = 2z \quad \text{ja} \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = z/2,$$

joten parametrinvaihtokuvaukset ovat analyyttisiä ja Riemannin pinta $(B(0,1), \Phi)$ on hyvin määritelty. Jos tarkastellaan funktiota

$$f : (B(0,1), \Phi) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2,$$

niin lokaaleissa koordinaateissa saadaan

$$f \circ \varphi_1^{-1}(z) = z^2 \quad \text{ja} \quad f \circ \varphi_2^{-1}(z) = 4z^2$$

ja edelleen derivaatoille

$$(f \circ \varphi_1^{-1})'(z) = 2z \quad \text{ja} \quad (f \circ \varphi_2^{-1})'(z) = 8z.$$

Nyt missä tahansa pisteessä $a \in B(0,1)$ saadaan derivaatalle $f'(a)$ kaksi ehdokasta

$$(f \circ \varphi_1^{-1})'(\varphi_1(a)) = 2a \quad \text{ja} \quad (f \circ \varphi_2^{-1})'(\varphi_2(a)) = 4a.$$

Tästä huomataan, että derivaatalla on molemmissa lokaaleissa koordinaateissa nollakohta origossa, mutta missä tahansa muussa pisteessä $a \in B(0,1)$ saadaan kaksi vaihtoehtoa derivaatalle $f'(a)$. Ongelma aiheutuu siitä, että Riemannin pinnalla ei lähtökohtaisesti tiedetä parametrikuvausten $\varphi \in \Phi$ käyttäytymisestä muuta kuin parametrinvaihtokuvausten analyyttisyys. Tämä ongelma voidaan kiertää käyttämällä differentiaalimuotoja, jolloin otetaan huomioon lokaalin koordinaatin vaihdon vaikutus derivaattaan ja saadaan derivaatalle koordinaateista riippumaton esitys. Differentiaalimuotojen käsittelyyn voi perehtyä useimmista Riemannin pintoja tai differentiaaligeometriaa käsittelevistä kirjoista. Differentiaalimuotojen käsittelyä Riemannin pintojen kontekstissa löytyy muun muassa kirjasta [3, Ch. 5] ja yleisten (reaalisten) differentioituvien monistojen tapauksessa kirjasta [11, Ch. 1].

Lause 2.14. *Olkoon $f : R \to S$ analyyttinen funktio. Oletetaan, että $W \subset R$ on avoin ja funktio f on vakio joukossa W. Tällöin f on vakiofunktio koko pinnalla R.*

Todistus. Tarkastellaan ensin tapaus $S = \mathbb{C}$. Oletetaan, että $\varphi : U \to V$ on kartta ja funktio f on vakio joukossa U. Tällöin kompleksitason avoimen osajoukon V funktio

$$f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{C}$$

on vakiofunktio. Olkoon $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ jokin toinen kartta, jolle $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Tällöin funktio

$$f \circ \tilde{\varphi}^{-1} = f \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \to \mathbb{C},$$

on vakiofunktio. Toisaalta funktion f analyyttisyyden nojalla funktio $f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ on kompleksitason avoimen osajoukon analyyttinen funktio, joten sen on oltava vakio koko alueessa $\tilde{V}$. Näin ollen funktio f on vakio myös joukossa $\tilde{U}$.

Olkoon $a \in R$ mielivaltainen. Pinnan R on polkuyhtenäisyyden nojalla on olemassa polku $\gamma : [0,1] \to R$ siten, että $\gamma(0) \in W$ ja $\gamma(1) = a$. Polun γ jälki on kompakti joukko ja pinnan R karttojen määrittelyjoukot muodostavat pinnan R avoimen peitteen, joten on olemassa äärellisen monta karttaa $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, joiden määrittelyjoukot $U_1, \ldots U_n$ peittävät polun γ. Oletetaan, että kartat on numeroitu siten, että $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$, $\gamma(0) \in U_1$ ja $a = \gamma(1) \in U_n$.

Koska funktio f on vakio joukossa W funktio f on vakio myös joukossa U_1. Edellisen päättelyn nojalla funktio f on tällöin vakio myös joukoissa $U_2, \ldots, U_n$. Erityisesti se on vakio pisteen $a \in R$ ympäristössä U_n. Toisin sanoen funktio f on lokaalisti vakio pinnalla R, jolloin pinnan R yhtenäisyyden nojalla funktio f on vakiofunktio.

Mielivaltaisen pinnan S tapauksessa voidaan toistaa sama päättely käyttäen kompleksitason tulosta funktioille $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Erona edelliseen päättelyyn on tässä tapauksessa se, että kartan $\varphi \in \Phi$ vaihdon lisäksi pitää tarkastaa kartan $\psi \in \Psi$ vaihto. Muuten todistus on täsmälleen sama kuin edellä. $\square$

Seuraus 2.15. *Olkoon $f : R \to S$ analyyttinen funktio, joka ei ole vakiofunktio. Tällöin*

(i) pisteen $b \in S$ alkukuvajoukolla $f^{-1}(b)$ ei ole kasautumispisteitä ja
(ii) funktion f derivaatan nollakohtien joukolla ei ole kasautumispisteitä.

Todistus. Tehdään molemmissa tapauksissa antiteesi, että $a \in R$ on kyseisen joukon kasautumispiste. Tällöin lokaaleissa koordinaateissa pisteen a ympäristössä piste $\varphi(a)$ on alkukuvajoukon $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\psi(b))$ tai funktion $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ derivaatan nollakohtien joukon kasautumispiste. Molemmissa tapauksissa lausetta vastaava tulos kompleksitasossa kertoo, että funktion $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ on oltava vakio pisteen $\varphi(a)$ ympäristössä. Tällöin lauseesta 2.14 seuraa, että funktio f on vakiofunktio, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. $\square$

Lause 2.16. *Analyyttinen funktio $f : R \to S$ on lokaali homeomorfismi, jos funktion f derivaatalla ei ole nollakohtia.*

Todistus. Olkoon $a \in R$ ja olkoot φ ja ψ kartat pisteiden a ja $f(a)$ ympäristöissä. Koska funktion f derivaatalla ei ole nollakohtia, sama pätee funktiolle $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Erityisesti

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(a)) \neq 0$$

Tällöin lauseen 1.17 nojalla on olemassa pisteen $\varphi(a)$ ympäristö U ja pisteen $\psi \circ f(a)$ ympäristö V, joille funktio

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U \to V$$

on homeomorfismi. Koska kuvaukset φ ja ψ ovat homeomorfismeja, tämä tarkoittaa, että

$$f|_{\varphi^{-1}(U)} = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^{-1}(U) \to \psi^{-1}(V)$$

on homeomorfismi. Koska U on pisteen $\varphi(a)$ ympäristö, $\varphi^{-1}(U)$ on pisteen a ympäristö. Koska piste a oli mielivaltainen, tästä seuraa, että funktio f on lokaali homeomorfismi. $\square$

3. Perusryhmä ja peitteet

Tässä luvussa tarkastellaan polkuja ja peitteitä topologisissa avaruuksissa. Luvun tavoitteina on antaa ehdot sille, milloin lokaali homeomorfismi on peite sekä tarkastella, miten polkujen homotopian määräämän perusryhmän avulla voidaan löytää isomorfismi peitteiden välille. Nämä tulokset tulevat olemaan olennaisessa roolissa seuraavassa luvussa, missä nähdään, että analyyttinen jatke polkua pitkin voidaan tulkita polun nostoksi sopivalle Riemannin pinnalle.

Riemannin pinnoilla on peitteiden ja polkujen kannalta monia hyviä ominaisuuksia. Karttojen olemassaolo nimittäin takaa, että esimerkiksi Riemannin pinnan avoin yhtenäinen joukko on aina polkuyhtenäinen ja että Riemannin pinnan jokaisella pisteellä on yhdesti yhtenäinen ympäristö. Toisaalta analyyttisten funktioiden avulla saadaan helposti lokaaleja homeomorfismeja, sillä analyyttinen funktio, jolla ei ole derivaatan nollakohtia, on tällainen. Koska tavoitteena onkin soveltaa tuloksia nimenomaan Riemannin pintojen tapauksessa, voidaan joissakin lauseissa hieman yksinkertaistaa todistuksia todistamalla tulokset vain Riemannin pinnoille.

Perusryhmän ja peitteiden käsittely pohjautuu enimmäkseen kirjaan [4, Ch. 1] ja lokaalien homeomorfismien ja peitteiden yhteys kirjaan [8, Ch. 6], missä tulokset on käsitelty yleisten topologisten avaruuksien kontekstissa. Topologisten pintojen peitteitä taas on käsitelty kirjoissa [2, Ch.1, §3] ja [10, Ch. 4]. On kuitenkin hyvä huomata, että näissä jälkimmäisissä lähteissä käytetty peitteen käsite poikkeaa hieman tässä työssä ja ensimmäisissä lähteissä käytetystä.

3.1. **Perusryhmä.**

Määritelmä 3.1. Olkoon X polkuyhtenäinen avaruus sekä $\gamma : [0,1] \to X$ ja $\beta : [0,1] \to X$ polkuja, joilla on samat päätepisteet. Polut γ ja β ovat *homotooppiset avaruudessa* X, jos on olemassa jatkuva kuvaus

$$F : [0,1] \times [0,1] \to X,$$

jolle

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \gamma(t) \quad \text{kaikilla } t \in [0,1], \\ F(t,1) &= \beta(t) \quad \text{kaikilla } t \in [0,1], \\ F(0,s) &= \gamma(0) \quad \text{kaikilla } s \in [0,1] \quad \text{ja} \\ F(1,s) &= \gamma(1) \quad \text{kaikilla } s \in [0,1]. \end{aligned}$$

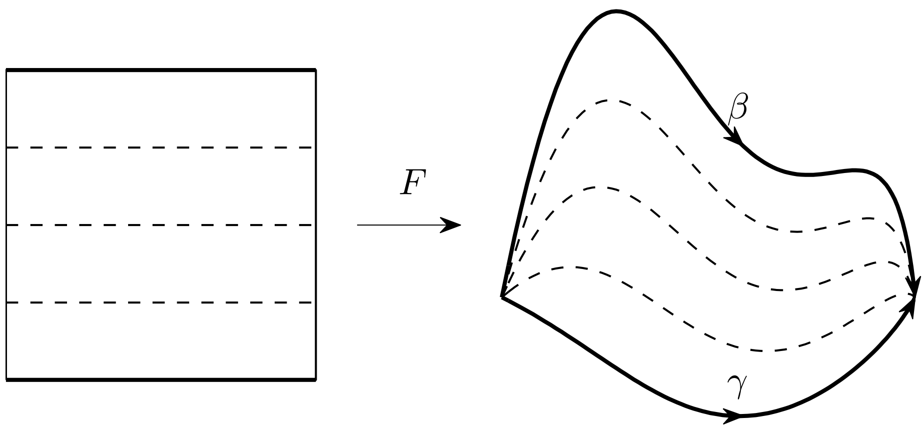
Kuvaus F on *homotopia polusta γ polkuun β*. Merkitään tällöin

$$\gamma \simeq \beta.$$

Homotopia-relaatio $\simeq$ määrää ekvivalenssirelaation avaruuden X poluille. Relaation refleksiivisyys on selvää, sillä kuvaus $F(t,s) = \gamma(t)$ on homotopia polusta γ polkuun γ. Symmetrisyys taas saadaan siitä tiedosta, että jos kuvaus $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ on homotopia polusta γ polkuun β, niin kuvaus

$$\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to X, \quad \tilde{F}(t,s) = F(t, 1-s)$$

on homotopia polusta β polkuun γ.



KUVA 3.1. Homotopia F polusta γ polkuun β.

Transitiivisuutta varten oletetaan, että α, β ja γ ovat polkuja $[0,1] \to X$ siten, että α ja β sekä β ja γ ovat homotooppisia avaruudessa X. Olkoot $F_{\alpha\beta}$ ja $F_{\beta\gamma}$ vastaavat homotopiat. Tällöin kuvaus

$$F : [0,1] \times [0,1] \to X, \quad F(t,s) = \begin{cases} F_{\alpha\beta}(t, 2s), & \text{jos } s \le \frac{1}{2} \\ F_{\beta\gamma}(t, 2s-1), & \text{jos } s \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

on homotopia polusta α polkuun γ.

Huomautus 3.2. Polun jokainen parametrisointi on homotooppinen alkuperäisen polun kanssa. Jos $h : [0,1] \to [0,1]$ on jatkuva, kasvava kuvaus, niin kuvaus

$$F(t,s) = \gamma(t + (h(t) - t)s)$$

on homotopia polusta γ polkuun $\gamma \circ h$. Näin ollen voidaan mielekkäästi puhua myös polkujen $\gamma : [a,b] \to X$ ja $\beta : [c,d] \to X$ homotooppisuudesta parametrisoimalla polut välille $[0,1]$, sillä tulos ei riipu siitä, miten polut parametrisoidaan välille $[0,1]$.

Polkujen yhdiste periytyy luonnollisella tavalla homotopialuokille. Jos polkujen γ ja β yhdistetty polku $\gamma\beta$ on hyvin määritelty, niin sama pätee homotopialuokille $[\gamma]$ ja $[\beta]$. Jos γ ja $\tilde{\gamma}$ ovat homotooppiset polut, sekä β ja $\tilde{\beta}$ ovat toiset homotooppiset polut, joille yhdistetty polku $\gamma\beta$ on määritelty, niin yhdistetyt polut $\gamma\beta$ ja $\tilde{\gamma}\tilde{\beta}$ ovat myös homotooppiset. Näin ollen homotopialuokka $[\gamma\beta]$ määräytyy yksikäsitteisesti homotopialuokkien $[\gamma]$ ja $[\beta]$ perusteella.

Tarkastelemalla pelkästään kiinteästä lähtöpisteestä alkavia suljettuja polkuja voidaan homotopialuokista sanoa enemmänkin. Merkitään pisteestä x_0 lähtevien suljettujen polkujen homotopialuokkien joukkoa symbolilla $\pi_1(X, x_0)$.

Lause 3.3. *Olkoon X topologinen avaruus. Joukko $\pi_1(X, x_0)$ varustettuna polkujen yhdistämisen indusoimalla laskutoimituksella on ryhmä.*

Todistus. Kaikilla $[\gamma], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ polut γ ja β ovat suljettuja polkuja pisteestä x_0, joten yhdistetty polku $\gamma\beta$ on hyvin määritelty. Tällöin lausetta edeltävän päättelyn nojalla $[\gamma\beta]$ on yksikäsitteisesti määritelty, joten polkujen yhdistämisen indusoima laskutoimitus on hyvin määritelty joukossa $\pi_1(X, x_0)$.

Laskutoimitus on assosiatiivinen, sillä polku $(\alpha\beta)\gamma$ on parametrisaatiota vaille sama polku kuin $\alpha(\beta\gamma)$, joten nämä polut ovat homotooppisia.

Laskutoimituksen neutraalialkio on vakiopolun

$$I : [0,1] \to X, \quad I(t) = x_0$$

määräämä ekvivalenssiluokka, sillä γI ja $I\gamma$ ovat parametrisaatiota vaille sama polku kuin γ.

Polkujen γ ja γ^{-1} yhdistetty polku on

$$\gamma\gamma^{-1} : [0,1] \to X, \quad \gamma\gamma^{-1}(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{jos } t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2-2t), & \text{jos } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Määritellään

$$F : [0,1] \times [0,1] \to X, \quad F(t,s) = \begin{cases} \gamma(\min\{2t, s\}), & \text{jos } t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(\min\{2-2t, s\}), & \text{jos } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tällöin kuvaus F on jatkuva, $F(t,0) = x_0$ ja $F(t,1) = \gamma\gamma^{-1}(t)$ kaikilla $t \in [0,1]$. Näin ollen F on homotopia vakiopolusta polkuun $\gamma\gamma^{-1}$. Edelleen $[\gamma][\gamma^{-1}] = [I]$, eli $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$, joten jokaisella joukon $\pi_1(X, x_0)$ alkiolla on hyvin määritelty käänteisalkio. □

Lause 3.4. *Olkoon X polkuyhtenäinen ja $x_0, y_0 \in X$ mielivaltaisia pisteitä. Tällöin ryhmät $\pi_1(X, x_0)$ ja $\pi_1(X, y_0)$ ovat isomorfisia.*

Todistus. Avaruuden X polkuyhtenäisyys takaa pisteestä x_0 lähtevän ja pisteeseen y_0 päättyvän polun α olemassaolon. Jos γ on suljettu polku pisteestä y_0, niin $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ on suljettu polku pisteestä x_0. Jos taas polut γ ja β ovat homotooppisia, niin polut $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ ja $\alpha\beta\alpha^{-1}$ ovat homotooppisia, sillä homotopia säilyy polkujen yhdisteessä. Tämän perusteella kuvaus

$$f : \pi_1(X, y_0) \to \pi_1(X, x_0), \quad f([\gamma]) = [\alpha\gamma\alpha^{-1}],$$

on hyvin määritelty. Vastaavalla päättelyllä polkua α^{-1} käyttäen nähdään, että myös kuvaus

$$g : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0), \quad g([\gamma]) = [\alpha^{-1}\gamma\alpha],$$

on hyvin määritelty. Kuvauksille f ja g pätee

$$\begin{aligned} f(g([\gamma])) &= f([\alpha^{-1}\gamma\alpha]) = [\alpha\alpha^{-1}\gamma\alpha\alpha^{-1}] = [\gamma] \quad \text{ja} \\ g(f([\gamma])) &= g([\alpha\gamma\alpha^{-1}]) = [\alpha^{-1}\alpha\gamma\alpha^{-1}\alpha] = [\gamma], \end{aligned}$$

joten kuvaus g on kuvauksen f käänteiskuvaus, eli kuvaus f on bijektio.

Olkoot γ ja β suljettuja polkuja pisteestä y_0. Tällöin

$$f([\gamma])f([\beta]) = [\alpha\gamma\alpha^{-1}][\alpha\beta\alpha^{-1}] = [\alpha\gamma\beta\alpha^{-1}] = f([\gamma\beta]),$$

joten kuvaus f on homomorfismi. Näin ollen kuvaus f on etsitty isomorfismi ja ryhmät $\pi_1(X, x_0)$ ja $\pi_1(X, y_0)$ ovat isomorfisia. □

Lauseen 3.4 nojalla jokaisella polkuyhtenäisellä avaruudella on isomorfiaa vaille yksikäsitteinen polkuhomotopialuokkien määräämä ryhmä, joten voidaan asettaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 3.5. Polkuyhtenäisen avaruuden X *perusryhmä* on abstrakti ryhmä $\pi_1(X)$, joka on isomorfinen jokaisen ryhmän $\pi_1(X, x_0)$, $x_0 \in X$, kanssa.

Perusryhmä riippuu ainoastaan avaruuden X topologiasta. Toisin sanoen, jos X ja Y ovat homeomorfisia avaruuksia, niin niiden perusryhmät ovat isomorfisia. Osoitetaan tämä lauseessa 3.7.

Määritelmä 3.6. Jatkuvan kuvauksen $f : X \to Y$ *indusoima kuvaus perusryhmälle* on

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)), \quad f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma].$$

Suljetun polun kuva on suljettu polku, joten $[f \circ \gamma]$ yllä tosiaan määrittelee jonkin ryhmän $\pi_1(X, x_0)$ alkion. Lisäksi tämä alkio ei riipu valitusta edustajasta γ. Jos γ_1 ja γ_2 ovat homotooppiset polut, niin on olemassa homotopia $F : [0,1]^2 \to X$ näiden polkujen välillä. Tästä taas seuraa, että $f \circ F : [0,1]^2 \to Y$ on homotopia polkujen $f \circ \gamma_1$ ja $f \circ \gamma_2$ välillä, joten $[f \circ \gamma_1] = [f \circ \gamma_2]$. Näin ollen kuvaus f_* on hyvin määritelty.

Lause 3.7. *Jatkuvan kuvauksen $f : X \to Y$ indusoima kuvaus $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ on ryhmähomomorfismi kaikilla $x_0 \in X$. Lisäksi, jos f on homeomorfismi, niin f_* on isomorfismi.*

Todistus. Olkoot $[\gamma], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$. Tällöin

$$f_*([\gamma][\beta]) = f_*([\gamma\beta]) = [f \circ (\gamma\beta)] = [f \circ \gamma][f \circ \beta] = f_*([\gamma])f_*([\beta]),$$

joten f_* on homomorfismi. Näin ollen f_* on isomorfismi täsmälleen, kun se on bijektio.

Jos f on homeomorfismi, sen käänteiskuvaus f^{-1} on myös jatkuva. Näin ollen kuvauksen f käänteiskuvaus indusoi kuvauksen

$$f_*^{-1} : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(X, x_0).$$

Tämä on kuvauksen f_* käänteiskuvaus, sillä

$$\begin{aligned} f_*^{-1} \circ f_*([\gamma]) &= f_*^{-1}([f \circ \gamma]) = [f^{-1} \circ f \circ \gamma] = [\gamma] \quad \text{kaikilla } [\gamma] \in \pi_1(X, x_0) \quad \text{ja} \\ f_* \circ f_*^{-1}([\beta]) &= f_*([f^{-1} \circ \beta]) = [f \circ f^{-1} \circ \beta] = [\beta] \quad \text{kaikilla } [\beta] \in \pi_1(Y, f(x_0)). \end{aligned}$$

Näin ollen f_* on bijektio ja edelleen isomorfismi. □

Määritelmä 3.8. Polkuyhtenäinen avaruus X on *yhdesti yhtenäinen*, jos sen perusryhmä on triviaali, eli $\pi_1(X) = \{0\}$.

Esimerkki 3.9. Kompleksitason kiekko $B(0,1)$ on yhdesti yhtenäinen. Jos $\gamma : [0,1] \to B(0,1)$ on mikä tahansa suljettu polku, voidaan määritellä jatkuva kuvaus

$$F : [0,1]^2 \to B(0,1), \quad F(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma(0).$$

Tälle kuvaukselle

$$\begin{aligned} F(0,s) &= (1-s)\gamma(0) + s\gamma(0) = \gamma(0), \\ F(1,s) &= (1-s)\gamma(1) + s\gamma(0) = \gamma(0), \\ F(t,0) &= (1-0)\gamma(t) + 0\gamma(0) = \gamma(t) \quad \text{ja} \\ F(t,1) &= (1-1)\gamma(t) + 1\gamma(0) = \gamma(0), \end{aligned}$$

joten F on homotopia polusta γ vakiopolkuun $t \mapsto \gamma(0)$. Näin ollen jokainen suljettu polku on homotooppinen vakiopolun kanssa kiekossa $B(0,1)$, eli

$$\pi_1(B(0,1)) = \{0\}.$$

Lemma 3.10. *Yhdesti yhtenäisen avaruuden X polut γ ja β ovat homotooppiset täsmälleen, kun niillä on samat päätepisteet $\gamma(0) = \beta(0)$ ja $\gamma(1) = \beta(1)$.*

Todistus. Jos poluilla on eri päätepisteet, ne eivät voi olla homotooppiset, sillä tämä vaadittiin jo homotopian määritelmässä. Jos päätepisteet taas ovat samat, niin $\gamma\beta^{-1}$ on avaruuden X suljettu polku. Oletuksen mukaan X on yhdesti yhtenäinen, joten

$$\gamma\beta^{-1} \simeq I.$$

Toisaalta myös

$$\beta^{-1}\beta \simeq I,$$

jolloin

$$\gamma \simeq \gamma I \simeq \gamma\beta^{-1}\beta \simeq I\beta \simeq \beta,$$

eli polut γ ja β ovat homotooppiset. □

Esimerkki 3.11. Tarkastellaan kompleksitason punkteeratun kiekon

$$B^*(0,1) = B(0,1) \setminus \{0\}$$

perusryhmää. Kompleksitason alueena punkteerattu kiekko on polkuyhtenäinen avaruus, joten perusryhmät $\pi_1(B^*(0,1), z_0)$ ovat isomorfisia kaikilla $z_0 \in B^*(0,1)$, joten kantapisteeksi voidaan valita esimerkiksi $z_0 = 1/2$.

Osoitetaan, että jokainen alueen $B^*(0,1)$ pisteestä $1/2$ alkava suljettu polku on homotooppinen täsmälleen yhden ympyräpolun

$$\gamma_k : [0,1] \to B^*(0,1), \quad \gamma(t) = \frac{1}{2}e^{2\pi ikt}, \quad \text{missä } k \in \mathbb{Z},$$

kanssa.

Olkoon $\beta : [0,1] \to B^*(0,1)$ suljettu polku pisteestä $1/2$. Tällöin kuvaus

$$F : [0,1]^2 \to B^*(0,1), \quad F(t,s) = (1-s)\beta(t) + s\frac{\beta(t)}{2|\beta(t)|},$$

on hyvin määritelty homotopia polusta β polkuun

$$\tilde{\beta} : [0,1] \to S(0,1/2), \quad \tilde{\beta}(t) = \frac{\beta(t)}{2|\beta(t)|}.$$

Asetetaan

$$E_+ = \tilde{\beta}^{-1}(1/2) \quad \text{ja} \quad E_- = \tilde{\beta}^{-1}(-1/2)$$

Polun $\tilde{\beta}$ jatkuvuuden nojalla E_+ ja E_- ovat suljettuja joukkoja, joten välin $[0,1]$ osajoukkoina ne ovat kompakteja. Selvästi ne ovat erillisiä joukkoja, joten

$$d(E_+, E_-) = \min\{|x-y|, \quad x \in E_+, y \in E_-\} > 0.$$

Määritellään rekursiivisesti pisteet $t_{2j+1} \in E_-$ ja $t_{2j+2} \in E_+$ ehdoilla

$$\begin{aligned}
&t_0 = 0 \\
&t_{2j+1} = \min\{t \in [t_{2j}, 1], t \in E_-\} \quad \text{ja} \\
&t_{2j+2} = \min\{t \in [t_{2j+1}, 1], t \in E_+\}
\end{aligned}$$

niin suurille j kuin mahdollista. Konstruktion perusteella

$$t_{j+1} - t_j \geq d(E_+, E_-) > 0$$

kaikilla j, joten tällä tavalla saadaan välin $[0,1]$ osavälijako

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1.$$

Välillä $[t_{2j}, t_{2j+1}]$ polku $\tilde{\beta}$ kulkee pisteestä $1/2$ pisteeseen $-1/2$. Olkoon

$$s = \max \tilde{\beta}^{-1}(1/2) \cap [t_{2j}, t_{2j+1}].$$

Tällöin rajoittumapolku $\beta|_{[t_{2j},s]}$ on suljettu polku pisteestä $1/2$, joka ei kulje pisteen $-1/2$ kautta. Toisin sanoen se on yhdesti yhtenäisen joukon

$$S(0,1/2) \setminus \{-1/2\}$$

suljettu polku, joten

$$\tilde{\beta}\Big|_{[t_{2j},s]} \simeq I.$$

Rajoittumapolku $\tilde{\beta}\Big|_{[s,t_{2j+1}]}$ taas on joko yhdesti yhtenäisen joukon

$$S_+(0,1/2) = \{z \in S(0,1/2), \quad \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

tai yhdesti yhtenäisen joukon

$$S_-(0,1/2) = \{z \in S(0,1/2), \quad \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$$

polku pisteestä $1/2$ pisteeseen $-1/2$. Näin ollen tämä rajoittumapolku on lemman 3.10 nojalla homotooppinen joko kaaripolun

$$\alpha_+ : [0,1] \to S_+(0,1/2), \quad \alpha_+(t) = \frac{1}{2}e^{\pi i t},$$

tai kaaripolun

$$\alpha_- : [0,1] \to S_-(0,1/2), \quad \alpha_-(t) = \frac{1}{2}e^{-\pi i t},$$

kanssa. Yhdistäen nämä havainnot, nähdään että

$$\tilde{\beta}\Big|_{[t_{2j},t_{2j+1}]} \simeq \tilde{\beta}\Big|_{[t_{2j},s]} \tilde{\beta}\Big|_{[s,t_{2j+1}]} \simeq I\alpha \simeq \alpha,$$

missä $\alpha = \alpha_+$ tai $\alpha = \alpha_-$. Vastaavalla tarkastelulla polulle $\tilde{\beta}$ osaväleillä $[t_{2j+1}, t_{2j+2}]$ nähdään, että

$$\tilde{\beta}\Big|_{[t_{2j+1},t_{2j+2}]} \simeq \alpha^{-1},$$

missä α^{-1} on polun α_+ tai α_- käänteispolku.

Tällä tavoin nähdään, että polku $\tilde{\beta}$ on homotooppinen polun

$$\alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_3 \ldots \alpha_{m-1} \alpha_m^{-1}$$

kanssa, missä jokainen α_j on joko polku α_+ tai α_-. Lisäksi

$$\begin{aligned}
&\alpha_\pm \alpha_\pm^{-1} \simeq \alpha_\pm^{-1} \alpha_\pm \simeq I \\
&\alpha_+ \alpha_- \simeq \gamma_1 \quad \text{ja} \\
&\alpha_- \alpha_+ \simeq \gamma_{-1}.
\end{aligned}$$

Näin ollen sieventämällä esitys $\alpha_1 \dots \alpha_m^{-1}$ saadaan jokin seuraavista esityksistä:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \dots \alpha_m^{-1} \simeq \alpha_+\alpha_-^{-1} \dots \alpha_+\alpha_-^{-1} \simeq \gamma_k, \\
&\alpha_1 \dots \alpha_m^{-1} \simeq \alpha_-\alpha_+^{-1} \dots \alpha_+\alpha_-^{-1} \simeq \gamma_{-k} \quad \text{tai} \\
&\alpha_1 \dots \alpha_m^{-1} \simeq I \simeq \gamma_0,
\end{aligned}$$

missä $k \in \mathbb{N}$ on termien $\alpha_+\alpha_-^{-1}$ tai $\alpha_-\alpha_+^{-1}$ lukumäärä esityksessä. Edelleen, koska

$$\beta \simeq \tilde{\beta} \simeq \alpha_1 \dots \alpha_m^{-1},$$

polku β on homotooppinen jonkin polun γ_k, $k \in \mathbb{Z}$, kanssa.

Jokainen polku γ_k, $k \in \mathbb{Z}$, määrää jonkin homotopialuokan

$$[\gamma_k] \in \pi_1(B^*(0,1)) = \pi_1(B^*(0,1), 1/2).$$

Edeltävän päättelyn nojalla nämä ovat kaikki ryhmän $\pi_1(B^*(0,1))$ homotopialuokat.

Määritellään kuvaus

$$\varphi : \pi_1(B^*(0,1)) \to \mathbb{Z}, \quad \varphi([\gamma_k]) = k.$$

Jotta tämä kuvaus on hyvin määritelty, täytyy tarkistaa, että $[\gamma_k] \neq [\gamma_l]$ kun $k \neq l$, eli että $\gamma_k \not\simeq \gamma_l$. Jos nämä polut olisivat homotooppiset, niin minkä tahansa punkteeratun kiekon analyyttisen funktion integraali näiden polkujen yli antaa saman tuloksen. Kuitenkin esimerkiksi funktiolle $z \mapsto 1/z$ saadaan

$$\int_{\gamma_k} 1/z \, dz = 2\pi i k.$$

Näin ollen $\gamma_k \not\simeq \gamma_l$, kun $k \neq l$, ja kuvaus φ on hyvin määritelty bijektio. Lisäksi, jos kokonaislukujoukkoa $\mathbb{Z}$ tarkastellaan ryhmänä $(\mathbb{Z}, +)$, kuvaus φ on ryhmähomomorfismi, sillä $\gamma_k\gamma_l \simeq \gamma_{k+l}$, jolloin

$$\varphi([\gamma_k][\gamma_l]) = \varphi([\gamma_{k+l}]) = k + l = \varphi([\gamma_k]) + \varphi([\gamma_l]).$$

Näin ollen kuvaus φ on isomorfismi, eli punkteeratun kiekon homotopiaryhmä $\pi_1(B^*(0,1))$ on isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ kanssa.

3.2. **Lokaalit homeomorfismit ja peitekuvaukset.**

Määritelmä 3.12. Olkoot $\tilde{X}$ ja X topologisia avaruuksia. Jatkuva surjektio $p : \tilde{X} \to X$ on *peite*, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa ympäristö $U \subset X$ siten, että on olemassa erilliset avoimet joukot $V_\alpha \subset \tilde{X}$, $\alpha \in I$, joille

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

ja $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ on homeomorfismi kaikilla $\alpha \in I$.

Edellisestä määritelmästä seuraa välittömästi, että jokainen peite on lokaali homeomorfismi. Toinen suunta ei sen sijaan päde yleisesti, eli jokainen lokaali homeomorfismi ei ole peite. Kuitenkin Riemannin pintojen tapauksessa usein päästään helpommin käsiksi lokaaleihin homeomorfismeihin kuin peitteisiin. Esimerkiksi lauseen 2.16 nojalla analyyttinen funktio, jonka derivaatta ei häviä, on lokaali homeomorfismi.

Tässä luvussa osoitetaan millä lisäoletuksilla lokaalista homeomorfismista saadaan peite. Todistuksissa seurataan pääosin kirjojen [8, Ch. 6] ja [4, Ch. 1] käsittelyä.

Määritelmä 3.13. Olkoon $p : \tilde{X} \to X$ lokaali homeomorfismi ja $f : Y \to X$ jatkuva kuvaus. Kuvauksen f *nosto* on jatkuva kuvaus $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$, jolle $p \circ \tilde{f} = f$.

Esimerkki 3.14. Tärkeä erikoistapaus kuvauksen nostosta on avaruuden X polun γ nosto. Olkoot

$$X = B(0, 3/2) \setminus \overline{B}(0, 1/2) \subset \mathbb{C} \quad \text{ja}$$

$$\tilde{X} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, \theta) \in \mathbb{R}^3, \quad 1/2 < r < 3/2, -\pi < \theta < 3\pi\}.$$

Tällöin projektio

$$p : \tilde{X} \to X, \quad p(x, y, z) = x + iy,$$

on lokaali homeomorfismi. Tarkastellaan polun

$$\gamma : [0, 2\pi] \to X, \quad \gamma(t) = e^{it},$$

nostoja. Pisteen $\gamma(0) = 1 \in X$ alkukuvajoukko on

$$p^{-1}(1) = \{(1, 0, 0), (1, 0, 2\pi)\}.$$

Pisteestä $(1, 0, 0)$ alkaen on olemassa polun γ nosto

$$\tilde{\gamma}_1 : [0, 2\pi] \to \tilde{X}, \quad \tilde{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t, t),$$

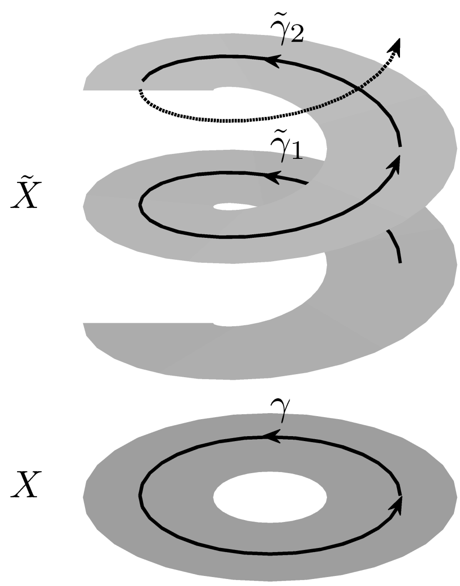
mutta sen sijaan pisteestä $(1, 0, 2\pi)$ alkaen ei ole olemassa polun γ nostoa $\tilde{\gamma}_2$. Nimittäin, jos tällainen nosto $\tilde{\gamma}_2$ olisi olemassa, niin

$$\tilde{\gamma}_2(t) = (\cos t, \sin t, t + 2\pi) \quad \text{kaikilla } 0 \le t < \pi.$$

Kuitenkin pisteen $\gamma(\pi) = e^{i\pi} = -1$ ainoa alkukuvapiste projektion p suhteen on $(-1, 0, \pi)$, jolloin on oltava $\tilde{\gamma}_2(\pi) = (-1, 0, \pi)$. Tällöin

$$\lim_{t\to\pi} \tilde{\gamma}_2(t) = \lim_{t\to\pi} (\cos t, \sin t, t + 2\pi) = (-1, 0, 3\pi) \neq (-1, 0, \pi) = \tilde{\gamma}_2(\pi),$$

joten $\tilde{\gamma}_2$ ei voi olla edes jatkuva.



KUVA 3.2. Polun γ nosto

Määritelmä 3.15. Olkoon $p : \tilde{X} \to X$ lokaali homeomorfismi. Oletetaan, että jokaisella avaruuden X polulla γ ja jokaiselle pisteelle $\tilde{x} \in p^{-1}(\gamma(0))$ on olemassa yksikäsitteinen polun γ nosto $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$, jolle $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$. Tällöin sanotaan, että lokaalilla homeomorfismilla $p : \tilde{X} \to X$ on *yksikäsitteiset polkujen nostot.*

Lokaali homeomorfismi voi olla peite vain, jos sillä on yksikäsitteiset polkujen nostot:

Lemma 3.16. *Olkoon $p : \tilde{X} \to X$ peite ja γ avaruuden X polku. Tällöin jokaisella pisteellä $\tilde{x} \in p^{-1}(\gamma(0))$ on olemassa yksikäsitteinen polun γ nosto $\tilde{\gamma}$, jolle $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$.*

Todistus. Peitteen määritelmän perusteella jokaiselle pisteelle $\gamma(t)$ on olemassa ympäristö U_t, jonka alkukuva koostuu erillisistä joukoista $V_{\alpha,t}$, joille $p|_{V_{\alpha,t}} : V_{\alpha,t} \to U_t$ on homeomorfismi. Polun γ jatkuvuuden perusteella taas löytyy pisteen $t \in [0,1]$ sisältävä väli $I_t \subset [0,1]$, jolle $\gamma(I_t) \subset U_t$.

Välit I_t muodostavat välin $[0,1]$ peitteen, jolloin välin $[0,1]$ kompaktiuden perusteella saadaan luvut

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

siten, että joukot $I_{t_0}, \ldots, I_{t_n}$ antavat edelleen välin $[0,1]$ peitteen. Voidaan myös olettaa, että välien I_{t_k} ja $I_{t_{k+1}}$ leikkaukset ovat epätyhjiä.

Olkoon $\tilde{x}$ jokin pisteen $\gamma(0)$ nosto. Piste $\tilde{x}$ sisältyy täsmälleen yhteen joukkoon V_{α,t_0}, joten polun γ noston täytyy myös välillä I_0 sisältyä tähän joukkoon V_{α,t_0}. Välillä I_0 voidaankin asettaa

$$\tilde{\gamma}(t) = (p|_{V_{\alpha,t_0}})^{-1} \circ \gamma(t).$$

Olkoon $t \in I_{t_0} \cap I_{t_1}$. Tällöin $\gamma(t) \in U_{t_1}$, joten $\tilde{\gamma}(t)$ kuuluu täsmälleen yhteen joukkoon V_{α,t_1} ja edeltävällä päättelyllä $\tilde{\gamma}$ tulee määriteltyä yksikäsitteisesti välillä I_{t_1}. Näin jatkamalla polku $\tilde{\gamma}$ tulee määriteltyä yksikäsitteisesti jokaisella välillä I_{t_k}, eli koko välillä $[0,1]$. □

Jos avaruus $\tilde{X}$ on Hausdorff-avaruus, niin polun noston olemassaolosta seuraa jo noston yksikäsitteisyys. Itse asiassa sama pätee myös minkä tahansa jatkuvan kuvauksen nostolle:

Lemma 3.17. *Olkoot $\tilde{X}$ Hausdorff-avaruus, $p : \tilde{X} \to X$ lokaali homeomorfismi, Y yhtenäinen avaruus ja $f : Y \to X$ jatkuva kuvaus. Jos $\tilde{f}_1 : Y \to \tilde{X}$ ja $\tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ ovat kuvauksen f nostoja, joille $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$ jollekin $y_0 \in Y$, niin $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

Todistus. Olkoon

$$A = \{y \in Y : \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}.$$

Oletuksen mukaan $A \neq \emptyset$. Koska $\tilde{X}$ on Hausdorff-avaruus ja kuvaukset $\tilde{f}_1$ ja $\tilde{f}_2$ jatkuvia, joukko A on suljettu. Tällöin väite seuraa, jos osoitetaan, että A on avoin, sillä tällöin joukko A on yhtenäisen avaruuden Y epätyhjä avoin ja suljettu osajoukko.

Olkoon $y_0 \in A$ ja merkitään

$$\tilde{x}_0 = \tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0) \in \tilde{X} \quad \text{ja} \quad x_0 = p(\tilde{x}_0).$$

Koska p on lokaali homeomorfismi, on olemassa pisteen $\tilde{x}_0$ ympäristö $\tilde{U}$ ja pisteen x_0 ympäristö U, joille

$$p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$$

on homeomorfismi. Koska $\tilde{f}_1$ ja $\tilde{f}_2$ ovat molemmat kuvauksen f nostoja,

$$p \circ \tilde{f}_1 = f = p \circ \tilde{f}_2.$$

Kuvausten $\tilde{f}_1$ ja $\tilde{f}_2$ jatkuvuuden nojalla on olemassa pisteen y_0 ympäristö V, jolle

$$\tilde{f}_1(V) \subset \tilde{U} \quad \text{ja} \quad \tilde{f}_2(V) \subset \tilde{U}.$$

Tällöin

$$\tilde{f}_1\Big|_V = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ f|_V = \tilde{f}_2\Big|_V,$$

eli $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ joukossa V. Erityisesti $V \subset A$, mistä seuraa, että joukko A on avoin. $\square$

Esimerkki 3.18. Esimerkki Hausdorff-ehdon välttämättömyydestä lemmassa 3.17 saadaan reaalilukusuorasta, jolla on kaksi origoa. Olkoon $X = \mathbb{R}$ ja

$$\tilde{X} = \mathbb{R} \cup \{\tilde{0}\}.$$

Joukon $\tilde{X}$ topologian määrää reaalilukujoukon tavallinen topologia, johon lisätään ylimääräisen pisteen $\tilde{0}$ ympäristöt

$$(U \setminus \{0\}) \cup \{\tilde{0}\},$$

missä U on mikä tahansa pisteen $0 \in \mathbb{R}$ ympäristö. Tämä topologinen avaruus $\tilde{X}$ ei ole Hausdorff-avaruus, sillä pisteille 0 ja $\tilde{0}$ ei löydy erillisiä ympäristöjä.

Kuvaus

$$p : \tilde{X} \to X, \quad p(\tilde{0}) = 0 \quad \text{ja} \quad p(x) = x \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

on lokaali homeomorfismi, sillä jokaiselle pisteelle $x \in \tilde{X}$ on olemassa ympäristö joka sisältää vain toisen pisteistä 0 tai $\tilde{0}$. Olkoot

$$\begin{aligned}
&\gamma : [-1,1] \to X, \quad \gamma(t) = t, \\
&\tilde{\gamma}_1 : [-1,1] \to \tilde{X}, \quad \tilde{\gamma}_1(t) = \begin{cases} t, & \text{jos } t \neq 0 \\ 0, & \text{jos } t = 0 \end{cases} \qquad \text{ja} \\
&\tilde{\gamma}_2 : [-1,1] \to \tilde{X}, \quad \tilde{\gamma}_2(t) = \begin{cases} t, & \text{jos } t \neq 0 \\ \tilde{0}, & \text{jos } t = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Tällöin sekä $\tilde{\gamma}_1$ että $\tilde{\gamma}_2$ ovat polun γ nostoja alkaen samasta pisteestä $-1 \in \tilde{X}$, sillä

$$p \circ \tilde{\gamma}_1(t) = p \circ \tilde{\gamma}_2(t) = t = \gamma(t).$$

Kuitenkin

$$\tilde{\gamma}_1(0) = 0 \neq \tilde{0} = \tilde{\gamma}_2(0),$$

joten polun γ nosto ei ole yksikäsitteinen.

Lause 3.19. *Olkoon $p : \tilde{X} \to X$ lokaali homeomorfismi, jolla on yksikäsitteiset polkujen nostot. Olkoot γ ja β avaruuden X homotooppiset polut, sekä $\tilde{\gamma}$ ja $\tilde{\beta}$ näiden polkujen nostot, joille $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Tällöin avaruuden $\tilde{X}$ polut $\tilde{\gamma}$ ja $\tilde{\beta}$ ovat homotooppiset.*

Todistus. Olkoon $F : [0,1]^2 \to X$ homotopia polusta γ polkuun β. Oletuksen mukaan jokaisella avaruuden X polulla on olemassa jokin nosto. Erityisesti jokaisella $s \in [0,1]$ polulla $t \mapsto F(t,s)$ on nosto $t \mapsto \tilde{F}(t,s)$, jolle $\tilde{F}(0,s) = \tilde{\gamma}(0)$. Näin saadaan kuvaus $\tilde{F} : [0,1]^2 \to \tilde{X}$, jolle

$$p \circ \tilde{F}(t,s) = F(t,s) \quad \text{kaikilla } t,s \in [0,1].$$

Osoitetaan, että näin saatu kuvaus $\tilde{F}$ on jatkuva. Kiinnitetään tätä varten $s_0 \in [0,1]$ ja osoitetaan, että kuvaus $\tilde{F}$ on jatkuva janan $[0,1] \times \{s_0\}$ jokaisessa pisteessä.

Koska p on lokaali homeomorfismi, jokaisella pisteellä $\tilde{x} \in \tilde{X}$ on ympäristö $\tilde{U}$, jolle rajoittumakuvaus

$$p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U, \quad \text{missä } U = p(\tilde{U}),$$

on homeomorfismi. Välin $[0,1]$ kompaktiuden ja polun $t \mapsto \tilde{F}(t,s_0)$ jatkuvuuden nojalla on tällöin olemassa välin $[0,1]$ osavälijako

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

ja pisteiden $\tilde{F}(t_j,s_0)$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, ympäristöt $\tilde{U}_j$, joille rajoittumakuvaukset

$$p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \to U_j$$

ovat homeomorfismeja ja

$$\tilde{F}([t_{j-1},t_j] \times \{s_0\}) \subset \tilde{U}_j.$$

Tarkastellaan kuvausta $\tilde{F}$ jananpätkillä $[t_{j-1},t_j] \times \{s_0\}$. Jokaisella $t \in [t_{j-1},t_j]$ piste $F(t,s_0) \in U_j$, joten kuvauksen F jatkuvuuden nojalla on olemassa välit $I_t \subset [0,1]$ ja $J_t \subset [t_{j-1},t_j]$, joille $s_0 \in I_t$, $t \in J_t$ ja

$$F(J_t \times I_t) \in U_j.$$

Välin $[t_{j-1},t_j]$ kompaktiuden nojalla voidaan tarvittaessa osavälijakoa $t_0 < \cdots < t_m$ hienontamalla olettaa, että on olemassa väli $I \subset [0,1]$, $s_0 \in I$, jolle

$$F([t_{j-1},t_j] \times I) \in U_j.$$

Kuvauksen $\tilde{F}$ määritelmän perusteella kaikilla $s \in I$ kuvaus

$$[t_{j-1},t_j] \to \tilde{X}, \quad t \mapsto \tilde{F}(t,s)$$

on polun

$$\alpha : [t_{j-1},t_j] \to X, \quad t \mapsto F(t,s)$$

nosto alkaen pisteestä $\tilde{F}(t_{j-1},s)$. Toisaalta, kuvaus

$$[t_{j-1},t_j] \to \tilde{X}, \quad t \mapsto p|_{\tilde{U}_j}^{-1} \circ F(t,s)$$

on myös polun α nosto, tosin alkaen pisteestä $p|_{\tilde{U}_j}^{-1} \circ F(t_{j-1},s)$. Koska kuvauksella p on yksikäsitteiset polkujen nostot, nämä nostot ovat samat, mikäli ne alkavat samasta pisteestä, eli mikäli

$$\tilde{F}(t_{j-1},s) = p|_{\tilde{U}_j}^{-1} \circ F(t_{j-1},s)$$

Toisaalta, koska $p|_{\tilde{U}_j}$ on injektio, polut alkavat samasta pisteestä, jos $\tilde{F}(t_{j-1},s) \in \tilde{U}_j$. Jos nostot ovat samat, niin

$$\tilde{F}(t,s) = p|_{\tilde{U}_j}^{-1} \circ F(t,s) \quad \text{kaikilla } t \in [t_{j-1},t_j].$$

Erityisesti, jos on olemassa jokin mahdollisesti pienempi väli $J \subset I$, jolle $s_0 \in J$ ja

$$\tilde{F}(t_{j-1}, s) \in \tilde{U}_j \quad \text{kaikilla } s \in J,$$

niin kuvaus $\tilde{F}$ on jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva välillä $[t_{j-1}, t_j] \times J$ ja erityisesti jananpätkällä $[t_{j-1}, t_j] \times \{s_0\}$.

Koska $\tilde{F}(t_{j-1}, s_0) \in \tilde{U}_j$ suoraan osavälijaon valinnan perusteella, jos kuvaus $\tilde{F}$ on jatkuva pisteessä (t_{j-1}, s_0), niin edellä etsitty väli J löytyy jatkuvuuden nojalla. Näin ollen tällaisen välin J löytyminen jollekin $j \in \{1, \ldots, m\}$ takaa vastaavan välin löytymisen kaikille suuremmille indekseille $j+1, j+2, \ldots, m$.

Riittää siis tarkistaa tapaus $j = 1$. Tämä taas seuraa suoraan kuvauksen $\tilde{F}$ konstruktiosta, sillä

$$\tilde{F}(0, s) = \tilde{F}(0, s_0) \in \tilde{U}_1 \quad \text{kaikilla } s \in [0,1].$$

Näin ollen edeltävän päättelyn nojalla kuvaus $\tilde{F}$ on jatkuva janan $[0,1] \times \{s_0\}$ jokaisessa pisteessä. Koska $s_0 \in [0,1]$ oli mielivaltainen, kuvaus $\tilde{F}$ on edelleen jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

Kuvauksen $\tilde{F}$ konstruktion nojalla

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(t, 0) &= \tilde{\gamma}(t), \\
\tilde{F}(t, 1) &= \tilde{\beta}(t) \quad \text{ja} \\
\tilde{F}(0, s) &= \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\beta}(0)
\end{aligned}$$

kaikilla $t, s \in [0,1]$. Lisäksi kuvauksen $\tilde{F}$ jatkuvuuden nojalla $s \mapsto \tilde{F}(1, s)$ on vakiopolun $s \mapsto F(1, s) = \gamma(1) = \beta(1)$ nosto, mistä seuraa, että

$$\tilde{F}(1, s) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\beta}(1).$$

Näin ollen $\tilde{F}$ on homotopia polusta $\tilde{\gamma}$ polkuun $\tilde{\beta}$. □

Lemma 3.20. *Olkoon $\tilde{X}$ polkuyhtenäinen avaruus ja X yhdesti yhtenäinen avaruus. Tällöin jokainen lokaali homeomorfismi $p : \tilde{X} \to X$, jolla on yksikäsitteiset polkujen nostot, on homeomorfismi.*

Todistus. Kuvaus p on lokaalina homeomorfismina jatkuva ja avoin. Lisäksi polkujen nostojen olemassaolon perusteella se on surjektio, joten p on homeomorfismi, mikäli se on injektio.

Olkoot $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in X$ siten, että $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$. Avaruuden $\tilde{X}$ polkuyhtenäisyyden perusteella on olemassa polku $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$, jolle $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ ja $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_1$. Polku $p \circ \tilde{\gamma}$ on tällöin avaruuden X suljettu polku ja $\tilde{\gamma}$ on selvästi polun $p \circ \tilde{\gamma}$ nosto. Koska X on yhdesti yhtenäinen, polku $p \circ \tilde{\gamma}$ on homotooppinen avaruuden X vakiopolun $t \mapsto p(\tilde{x}_0)$ kanssa.

Toisaalta polku $t \mapsto \{\tilde{x}_0\}$ on myös tämän vakiopolun nosto, jolloin lauseen 3.19 nojalla polut $\tilde{\gamma}$ ja $t \mapsto \{\tilde{x}_0\}$ ovat homotooppiset. Erityisesti on oltava $\tilde{x}_1 = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$, jolloin p on injektio ja siten homeomorfismi. □

Lause 3.21. *Olkoot R ja S Riemannin pintoja ja $f : R \to S$ lokaali homeomorfismi jolla on yksikäsitteiset polkujen nostot. Tällöin $f : R \to S$ on peite.*

Todistus. Olkoon $a \in S$ mielivaltainen piste ja $U \subset S$ tämän pisteen yhdesti yhtenäinen ympäristö. Huomaa, että tällainen ympäristö on aina olemassa, sillä käyttäen mitä tahansa karttaa pisteen $a \in S$ ympäristössä yhdesti yhtenäinen ympäristö saadaan esimerkiksi kompleksitason kiekon alkukuvana. Ympäristön U alkukuva $f^{-1}(U)$ voidaan nyt esittää erillisenä yhdisteenä

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha,$$

missä joukot $V_\alpha \subset R$ ovat alkukuvan yhtenäisyyskomponentit.

Jokainen yhtenäisyyskomponentti V_α on Riemannin pinnan R avoimena yhtenäisenä osajoukkona polkuyhtenäinen ja komponentin V_α kuva $f(V_\alpha)$ sisältyy konstruktion perusteella joukkoon U. Toisaalta, joukon U polkuyhtenäisyyden perusteella mille tahansa pisteelle $z \in U$ löytyy polku γ, jolle $\gamma(0) \in f(V_\alpha)$ ja $\gamma(1) = z$. Koska funktiolla f on yksikäsitteiset polkujen nostot, tällä polulla on olemassa nosto $\tilde{\gamma}$, jolle $\tilde{\gamma}(0) \in V_\alpha$. Tällöin polku $\tilde{\gamma}$ on joukon V_α polku, jolle

$$z = \gamma(1) = f(\tilde{\gamma}(1)) \in f(V_\alpha).$$

Tästä seuraa, että

$$f(V_\alpha) = U.$$

Näin ollen mille tahansa alueen U polulle γ joukko $V_\alpha \cap f^{-1}(\gamma(0))$ on epätyhjä. Toisaalta polun γ jokainen nosto sisältyy kokonaan täsmälleen yhteen yhtenäisyyskomponenttiin V_α. Näin ollen jokaisella rajoittumakuvauksella

$$f|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$$

on yksikäsitteiset polkujen nostot. Koska funktio f on lokaali homeomorfismi, myös rajoittumakuvaus $f|_{V_\alpha}$ on lokaali homeomorfismi. Tällöin lemman 3.20 nojalla rajoittumakuvaukset $f|_{V_\alpha}$ ovat homeomorfismeja. Tällöin nämä joukot V_α täyttävät määritelmän 3.12 vaatimukset, joten kuvaus $f : R \to S$ on peite. $\square$

Huomautus 3.22. Lauseen 3.21 tulos pätee myös yleisemminkin, eli lokaalin homeomorfismin ei tarvitse olla kuvaus Riemannin pintojen välillä. Erityisesti avaruuksien R ja S analyyttistä rakennetta ei tarvittu lainkaan. Olennaista on vain se, että lokaalilla homeomorfismilla f on yksikäsitteiset polkujen nostot ja että kuvauksen maaliavaruus on riittävän siisti. Yllä olevassa todistuksessa tarvittiin nimittäin, että maaliavaruudessa jokaisella pisteellä on olemassa pieni yhdesti yhtenäinen ympäristö, eli että avaruus on lokaalisti yhdesti yhtenäinen.

Tätäkin ehtoa voidaan vielä heikentää parantamalla todistusta. Riittää nimittäin, että lokaalin homeomorfismin maaliavaruus on lokaalisti polkuyhtenäinen ja semilokaalisti yhdesti yhtenäinen. Tämän vahvemman tuloksen todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [8, 6.4, Proposition 6.13].

3.3. **Peitteiden isomorfisuus.**

Määritelmä 3.23. Peitteet $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ ja $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ ovat isomorfisia, jos on olemassa homeomorfismi $h : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ siten, että $p_2 \circ h = p_1$.

Riemannin pintojen välisten peitteiden tapauksessa olisi luonnollista vaatia edellisessä määritelmässä homeomorfismin sijaan konformikuvauksen olemassaoloa, jotta pinnan analyyttinen rakenne otetaan myös huomioon topologisen rakenteen lisäksi. Tämä oletus ei kuitenkaan ole tarpeen, sillä mikäli alkuperäiset peitekuvaukset ovat analyyttisiä, niin määritelmän antama homeomorfismi on itse asiassa konformikuvaus.

Lemma 3.24. *Olkoot R, S_1 ja S_2 Riemannin pintoja ja $p_1 : S_1 \to R$ ja $p_2 : S_2 \to R$ analyyttisiä peitteitä. Tällöin jokainen isomorfismi $h : S_1 \to S_2$ on konformikuvaus.*

Todistus. Isomorfismin määritelmän mukaan h toteuttaa yhtälön $p_2 \circ h = p_1$. Koska p_2 on lokaali homeomorfismi ja h on jatkuva, lokaalisti pinnalla S_1 pätee

$$h = p_2^{-1} \circ p_1,$$

jolloin funktion h analyyttisyys seuraa kuvausten p_1 ja p_2^{-1} analyyttisyydestä. Siis h on analyyttinen bijektio, eli konformikuvaus. $\square$

Lemma 3.25. *Olkoon X yhtenäinen avaruus ja $p : \tilde{X} \to X$ peite. Tällöin alkukuvajoukon $p^{-1}(x)$ pisteiden lukumäärä on sama kaikille $x \in X$.*

Todistus. Olkoon $x_0 \in X$ jokin piste. Peitteen määritelmän mukaan on olemassa pisteen x_0 ympäristö $U \subset X$ ja erilliset avoimet joukot $V_\alpha \subset \tilde{X}$, $\alpha \in I$, joille

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

ja rajoittumakuvaus $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ on homeomorfismi. Erityisesti tämä tarkoittaa, että kaikilla $x \in U$ jokaisessa joukossa V_α on täsmälleen yksi alkukuvajoukon $p^{-1}(x)$ alkio. Erityisesti funktio

$$f : X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad f(x) = \#p^{-1}(x),$$

on lokaalisti vakio. Avaruuden X yhtenäisyydestä seuraa tällöin, että funktio f on vakiofunktio, eli että alkukuvajoukon pisteiden lukumäärä on vakio. $\square$

Määritelmä 3.26. Olkoon X yhtenäinen avaruus. Peitteen $p : \tilde{X} \to X$ *aste* on minkä tahansa alkukuvajoukon $p^{-1}(x)$ alkioiden lukumäärä. Merkitään

$$\#p = \#p^{-1}(x).$$

Peitteiden isomorfisuuden tarkastelussa perusryhmän käyttäytyminen on ratkaisevassa roolissa. Tarkastellaan tämän takia peitteen indusoimaa kuvausta perusryhmälle. Perusryhmän käsittelyä varten taas täytyy kiinnittää tarkasteltava kantapiste. Esityksen yksinkertaistamiseksi merkitään jatkossa

$$f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0),$$

millä tarkoitetaan, että f on kuvaus $f : \tilde{X} \to X$, jolle $f(\tilde{x}_0) = x_0$.

Toisin kuin yleisesti jatkuvalle kuvaukselle, peitteen tapauksessa indusoitu kuvaus perusryhmälle on aina injektiivinen:

Lemma 3.27. *Olkoon $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ peite. Tällöin $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ on injektiivinen.*

Todistus. Koska p_* on lauseen 3.7 nojalla homomorfismi, riittää tarkistaa, että ryhmän $\pi_1(X, x_0)$ neutraalialkion alkukuva on täsmälleen ryhmän $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ neutraalialkio. Olkoon $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ homotopialuokka, jolle

$$p_*([\tilde{\gamma}]) = [p \circ \tilde{\gamma}] = 0 \in \pi_1(X, x_0).$$

Tällöin polku $p \circ \tilde{\gamma}$ on homotooppinen vakiopolun $t \mapsto x_0$ kanssa. Selvästi $\tilde{\gamma}$ on polun $p \circ \tilde{\gamma}$ nosto ja $t \mapsto \tilde{x}_0$ on vakiopolun $t \mapsto x_0$ nosto, joten lauseen 3.19 nojalla polku $\tilde{\gamma}$ on homotooppinen vakiopolun $t \mapsto \tilde{x}_0$ kanssa. Toisin sanoen $[\tilde{\gamma}] = 0$ ja p_* on injektio. $\square$

Esimerkki 3.28. (i) Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja

$$f : B^*(0,1) \to B^*(0,1), \quad f(z) = z^n.$$

Asetetaan

$$U_- = B^*(0,1) \setminus \{\lambda \in \mathbb{R} : 0 < \lambda < 1\} \quad \text{ja}$$
$$U_+ = B^*(0,1) \setminus \{\lambda \in \mathbb{R} : -1 < \lambda < 0\}.$$

Joukon U_- alkukuva $f^{-1}(U_-)$ koostuu tällöin pareittain pistevieraista joukoista

$$V_{-,k} = \{z \in B^*(0,1) : \frac{2\pi k}{n} < \arg(z) < \frac{2\pi(k+1)}{n}\}, \quad k \in \{0,\ldots,n-1\}.$$

ja vastaavasti joukon U_+ alkukuva koostuu pareittain pistevieraista joukoista

$$V_{+,k} = \{z \in B^*(0,1) : \frac{2\pi k - \pi}{n} < \arg(z) < \frac{2\pi(k+1) - \pi}{n}\}, \quad k \in \{0,\ldots,n-1\}.$$

Funktio f on injektio missä tahansa joukossa $V_{-,k}$ tai $V_{+,k}$. Toisaalta, koska funktion f derivaatta on punkteeratussa kiekossa nollasta eroava, niin nähdään, että

$$f|_{V_{\pm,k}} : V_{\pm,k} \to U_\pm$$

on homeomorfismi. Tällöin määritelmän 3.12 perusteella $f : B^*(0,1) \to B^*(0,1)$ on peite, sillä mikä tahansa piste $w \in B^*(0,1)$ kuuluu ainakin toiseen avoimista joukoista U_+ tai U_-. Jokaisessa alkukuvajoukossa $f^{-1}(w)$ on täsmälleen n pistettä, joten peitteen f aste on $\#f = n$.

Tarkastellaan vielä peitteen f indusoimaa kuvausta perusryhmälle. Kiinnitetään tarkastelua varten perusryhmän kantapisteeksi $z_0 = 1/2 \in B^*(0,1)$. Koska $f(z_0) = z_0^n = 1/2^n$, tarkasteltavana on siis kuvaus

$$f_* : \pi_1(B^*(0,1), 1/2) \to \pi_1(B^*(0,1), 1/2^n).$$

Esimerkin 3.11 mukaan

$$\pi_1(B^*(0,1), 1/2) = \{\gamma_{1/2}^k, \quad k \in \mathbb{Z}\} = (\mathbb{Z}, +),$$

missä $\gamma_{1/2}$ on suljettu yksinkertainen ympyräpolku

$$\gamma_{1/2} : [0,1] \to B^*(0,1) = \gamma_{1/2}(t) = 1/2e^{2\pi it}.$$

Vastaavasti

$$\pi_1(B^*(0,1), 1/2^n) = \{\gamma_{1/2^n}^k, \quad k \in \mathbb{Z}\} = (\mathbb{Z}, +),$$

Polun $\gamma_{1/2}$ pisteille saadaan

$$f \circ \gamma_{1/2}(t) = f(1/2e^{2\pi it}) = 1/2^n e^{2\pi itn} = \gamma_{1/2^n}^n(t),$$

joten erityisesti

$$f_*([\gamma_{1/2}]) = [f \circ \gamma_{1/2}] = [\gamma_{1/2^n}^n] \in \pi_1(B^*(0,1), 1/2^n).$$

Koska kuvaus f_* on homomorfismi, tästä saadaan edelleen

$$f_*([\gamma_{1/2}^k]) = f_*([\gamma_{1/2}])^k = [\gamma_{1/2^n}^n]^k = [\gamma_{1/2^n}^{nk}].$$

Näin ollen peitteen $f : B^*(0,1) \to B^*(0,1)$ indusoima kuvaus perusryhmälle on

$$f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f_*(k) = nk.$$

Huomaa, että tapauksessa $n = 1$ funktio f on vain identtinen funktio $\mathrm{id} : B^*(0,1) \to B^*(0,1)$ ja tällöin saatava kuvaus f_* on luonnollisesti myös vain $\mathrm{id}_* = \mathrm{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

(ii) Olkoon $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$

$$g : G \to B^*(0,1), \quad g(z) = e^z.$$

Asetetaan $U_- \subset B^*(0,1)$ ja $U_+ \subset B^*(0,1)$ kuten edellisessä kohdassa. Tässä tapauksessa joukon U_- alkukuvajoukko koostuu joukoista

$$V_{-,k} = \{z \in G : 2\pi k - 2\pi < \operatorname{Im} z < 2\pi k\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ja joukon U_+ alkukuvajoukko koostuu joukoista

$$V_{+,k} = \{z \in G : 2\pi k - \pi < \operatorname{Im} z < 2\pi k + \pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tässäkin tapauksessa funktion g derivaatta on nollasta eroava ja g on injektio jokaisessa joukossa $V_{\pm,k}$, joten myös kuvaus $g : G \to B^*(0,1)$ on peite. Tällä kertaa alkukuvajoukot $g^{-1}(w)$ ovat äärettömiä, joten $\#g = \infty$. Perusryhmälle saatava kuvaus taas on tässä tapauksessa huomattavasti yksinkertaisempi kuin edellä. Alue G on nimittäin yhdesti yhtenäinen, joten

$$\pi_1(G) = \pi_1(G, z_0) = \{0\}$$

mille tahansa pisteelle $z_0 \in G$. Tällöin peitteen g indusoima kuvaus perusryhmälle on vain nollakuvaus

$$g_* : \{0\} \to \mathbb{Z}, \quad g_*(0) = 0.$$

Lause 3.29. *Olkoot R, S ja $\tilde{S}$ Riemannin pintoja. Olkoon $p : (\tilde{S}, \tilde{z}_0) \to (S, z_0)$ peite ja $f : (R, w_0) \to (S, z_0)$ jatkuva kuvaus. Jos $f_*(\pi_1(R, w_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{S}, \tilde{z}_0))$, niin kuvauksella f on nosto $\tilde{f} : (R, w_0) \to (\tilde{S}, \tilde{z}_0)$.*

Todistus. Valitaan jokaiselle $w \in R$ jokin pinnan R polku γ_w pisteestä w_0 pisteeseen w. Tällöin polku $f \circ \gamma$ on pinnan R polku pisteestä z_0 pisteeseen $f(w)$. Olkoon β_w tämän polun nosto alkaen pisteestä $\tilde{z}_0$. Määritellään kuvauksen f nosto asettamalla

$$\tilde{f} : R \to \tilde{S}, \quad \tilde{f}(w) = \beta_w(1).$$

Osoitetaan, että tämä määritelmä ei riipu polkujen γ_w valinnoista. Olkoot γ_1 ja γ_2 pinnan R polkuja pisteestä w_0 pisteeseen $w \in R$ ja olkoot β_1 ja β_2 polkujen $f \circ \gamma_1$ ja $f \circ \gamma_2$ nostot. Koska $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ on suljettu polku pisteestä w_0, se määrää jonkin ekvivalenssiluokan $[\gamma_1\gamma_2^{-1}] \in \pi_1(R, w_0)$. Oletuksen nojalla

$$f_*([\gamma_1\gamma_2^{-1}]) \in f_*(\pi_1(R, w_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{S}, \tilde{z}_0)) \subset \pi_1(S, z_0),$$

joten on olemassa avaruuden $\tilde{S}$ suljettu polku α pisteestä $\tilde{z}_0$ siten, että polut $f \circ \gamma_1\gamma_2^{-1}$ ja $p \circ \alpha$ ovat homotooppiset avaruudessa S.

Olkoon β polun $f \circ \gamma_1\gamma_2^{-1}$ nosto alkaen pisteestä $\tilde{z}_0$. Lauseen 3.19 nojalla polut β ja α ovat homotooppiset. Erityisesti β on suljettu polku alkaen pisteestä $\tilde{z}_0$.

Tällöin polun β ensimmäinen puolikas antaa polun $f \circ \gamma_1$ noston ja polun β jälkimmäinen puolikas antaa polun $f \circ \gamma_2$ noston käänteispolun. Toisaalta polut β_1 ja β_2 olivat määritelty näiden polkujen nostoina, jolloin lemmasta 3.16 seuraa, että

$$\beta = \beta_1\beta_2.$$

Erityisesti $\beta_1(1) = \beta_2(1)$, joten pisteen $\tilde{f}(w)$ määritelmä ei riipu valitusta polusta γ_w.

Jos kuvaus $\tilde{f}$ on jatkuva, se on etsitty kuvauksen f nosto, sillä

$$p \circ \tilde{f}(w) = p \circ \beta_w(1) = f \circ \gamma(1) = f(w).$$

Riittää siis tarkistaa, että $\tilde{f}$ on jatkuva jokaisessa pisteessä $w \in R$.

Olkoon $\tilde{U}$ pisteen $\tilde{f}(w)$ ympäristö ja $U = p(\tilde{U}) \subset S$ siten, että

$$p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$$

on homeomorfismi. Tällöin joukko U on pisteen $f(w)$ ympäristö, joten kuvauksen f jatkuvuuden nojalla on olemassa pisteen w ympäristö W, jolle $f(W) \subset U$. Toisaalta, Riemannin pinnan R lokaalin yhtenäisyyden nojalla voidaan olettaa, että W on yhtenäinen.

Olkoon $w' \in W$ jokin toinen piste ja η joukon W polku pisteestä w pisteeseen w'. Olkoon β_w pisteen $\tilde{f}(w)$ määrittelevä polku ja α polun $f \circ \eta$ nosto alkaen pisteestä $\tilde{f}(w) = \beta_w(1)$. Tällöin kuvauksen $\tilde{f}$ määritelmän mukaan

$$\tilde{f}(w') = (\beta_w \alpha)(1),$$

sillä $\gamma_w \eta$ on polku pisteestä w_0 pisteeseen w'. Tällöin α on polku pisteestä $\tilde{f}(w)$ pisteeseen $\tilde{f}(w')$. Toisaalta, koska $f \circ \eta$ on joukon U polku, α on joukon $\tilde{U}$ polku, joten $\tilde{f}(w') \in \tilde{U}$. Näin ollen $\tilde{f}(W) \subset \tilde{U}$, joten kuvaus $\tilde{f}$ on jatkuva pisteessä w. $\square$

Huomautus 3.30. Lauseen 3.29 oletusten kanssa on samankaltainen tilanne kuin lauseessa 3.21, eli käsiteltävien avaruuksien ei tarvitse olla Riemannin pintoja. Tässä tapauksessa tarvittiin ainoastaan nostettavan kuvauksen lähtöavaruudelta lokaalia ja globaalia polkuyhtenäisyyttä. Vahvemman tuloksen todistus löytyy kirjasta [4, 1.3, Proposition 1.33].

Lause 3.29 antaa keinon karakterisoida peitteiden isomorfisuus sen perusteella, miten peitteet kuvaavat lähtöavaruuksiensa perusryhmät.

Lause 3.31. *Olkoot R, S_1 ja S_2 Riemannin pintoja. Peitteet $p_1 : (S_1, w_1) \to (R, z_0)$ ja $p_2 : (S_2, w_2) \to (R, z_0)$ ovat isomorfisia, jos*

$$p_{1*}(\pi_1(S_1, w_1)) = p_{2*}(\pi_1(S_2, w_2)) \subset \pi_1(R, z_0).$$

Todistus. Oletetaan, että $p_{1*}(\pi_1(S_1, w_1)) = p_{2*}(\pi_1(S_2, w_2))$. Koska, $p_{1*}(\pi_1(S_1, w_1)) \subset p_{2*}(\pi_1(S_2, w_2))$, lauseen 3.29 nojalla on olemassa kuvauksen p_1 nosto

$$\tilde{p}_1 : (S_1, w_1) \to (S_2, w_2),$$

jolle $p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1$. Vastaavasti saadaan kuvauksen p_2 nosto

$$\tilde{p}_2 : (S_2, w_2) \to (S_1, w_1),$$

jolle $p_1 \circ \tilde{p}_2 = p_2$. Tällöin

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1 \circ \tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 \quad \text{ja} \\ p_2 &= p_1 \circ \tilde{p}_2 = p_2 \circ \tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2. \end{aligned}$$

Toisin sanoen kuvaus $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1$ säilyttää peitteen p_1 alkukuvajoukot ennallaan ja vastaavasti kuvaus $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$ säilyttää peitteen p_2 alkukuvajoukot.

Koska $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1(w_1) = w_1$ ja $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2(w_2) = w_2$, on oltava

$$\begin{aligned}\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 &= \mathrm{id}_{S_1} \quad \text{ja} \\ \tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 &= \mathrm{id}_{S_2}\,.\end{aligned}$$

Näin ollen kuvaukset $\tilde{p}_1$ ja $\tilde{p}_2$ ovat toistensa käänteiskuvaukset, joten kumpi tahansa kuvauksista antaa etsityn isomorfismin. □

Seuraavan luvun konstruktioiden takia on tarpeen karakterisoida erityisesti punkteeratun kiekon peitteet.

Seuraus 3.32. *Olkoon R Riemannin pinta ja $p : R \to B^*(0,1)$ peite.*

(i) Jos $\#p = n$ jollekin $n \in \mathbb{N}$, niin p on isomorfinen peitteen $B^*(0,1) \to B^*(0,1)$, $z \mapsto z^n$ kanssa.

(ii) Jos $\#p = \infty$, niin p on isomorfinen peitteen $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\} \to B^*(0,1)$, $z \mapsto e^z$ kanssa.

Todistus. Peite p määrää jonkin aliryhmän

$$H = p_*(\pi_1(R)) \subset \pi_1(B^*(0,1)) = \mathbb{Z}.$$

Ainoat kokonaislukujoukon $\mathbb{Z}$ aliryhmät ovat triviaali aliryhmä $\{0\}$ ja aliryhmät $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Esimerkin 3.28 perusteella tiedetään, että peite

$$B^*(0,1) \to B^*(0,1), \quad z \mapsto z^n$$

määrää aliryhmän $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ja peite

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\} \to B^*(0,1), \quad z \mapsto e^z$$

määrää triviaalin aliryhmän $\{0\} \subset \mathbb{Z}$. Näin ollen lauseen 3.31 nojalla peite p ja jokin yllä olevista peitteistä ovat isomorfisia. Väite seuraa siitä, että isomorfismi säilyttää peitteen asteen ja tiedosta, että peitteen $z \mapsto z^n$ aste on n ja peitteen $z \mapsto e^z$ aste on ∞. □

4. Analyyttisen funktion Riemannin pinta

Tämän luvun tavoitteena on muodostaa minkä tahansa analyyttisen funktion perusteella Riemannin pinta ja pinnan analyyttinen funktio, joka sisältää informaation alkuperäisen funktion kaikista analyyttisistä jatkeista. Lisäksi näytetään miten tätä pintaa käyttäen analyyttinen jatke polkua pitkin voidaan tulkita kompleksitason polun nostoksi tälle pinnalle.

Konstruktion idea on peräisin kirjoista [1, Ch. 8, 1] ja [10, Ch. 3, 3-2]. Tässä työssä esitetty konstruktio kuitenkin poikkeaa teknisiltä osiltaan näiden lähteiden konstruktiosta, sillä tässä työssä korostetaan yhteyttä peitteisiin.

4.1. **Funktioelementit.** Olkoon $\mathcal{A}$ kaikkien analyyttisten funktioiden $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, joukko.

Määritelmä 4.1. *Funktioelementti* on pari $(a, f) \in \mathbb{C} \times \mathcal{A}$, missä $f : D \to \mathbb{C}$ on jossakin pisteen a ympäristössä $D \subset \mathbb{C}$ määritelty analyyttinen funktio.

Meromorfinen funktioelementti on pari $(a, f) \in \mathbb{C}_\infty \times \mathcal{A}$, missä f on jossakin pisteen a ympäristössä $D \subset \mathbb{C}_\infty$ määritelty meromorfinen funktio. Toisin sanoen $f : D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio ja raja-arvo $f(a) = \lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}_\infty$ on olemassa.

Huomautus 4.2. Meromorfisten funktioelementtien käsittelyssä pisteen $a = \infty$ punkteeratulla ympäristöllä tarkoitetaan joukkoa $\mathbb{C} \setminus K$, missä $K \subset \mathbb{C}$ on jokin kompakti joukko. Punkteeratulla kiekolla $B^*(\infty, r)$ taas tarkoitetaan joukkoa $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, 1/r)$.

Funktioelementtiä tai meromorfista funktioelementtiä (a, f) käsiteltäessä olennaista on ainoastaan funktion f käyttäytyminen pisteen a ympäristössä. Määritellään tämän takia meromorfisten funktioelementtien ekvivalenssirelaatio $\sim$, asettamalla

$$(a, f : D \to \mathbb{C}_\infty) \sim (b, g : G \to \mathbb{C}_\infty),$$

jos $a = b$ ja on olemassa pisteen a ympäristö $U \subset D \cap G$, jolle $f|_U = g|_U$.

Tämän ekvivalenssirelaation ekvivalenssiluokkia

$$[a, f] \in \mathbb{C}_\infty \times (\mathcal{A}/\sim)$$

sanotaan *analyyttisen funktion haaroiksi pisteessä* a. Jos $(a, f) \sim (a, g)$, eli jos $[a, f] = [a, g]$, niin sanotaan myös, että funktiot f ja g määräävät saman analyyttisen funktion haaran pisteessä a. Samastetaan jatkossa funktioelementti sen määräämän haaran kanssa, jolloin merkitään suoraan $(a, f) = (a, g)$, kun funktiot f ja g määräävät saman haaran pisteessä a.

Yksi syy tehdä tämä samastus saadaan analyyttisen jatkeen käyttäytymisestä. Olkoot $f : D \to \mathbb{C}$ ja $g : G \to \mathbb{C}$ kaksi analyyttistä funktiota pisteen $a \in \mathbb{C}$ joissakin ympäristöissä $D \subset \mathbb{C}$ ja $G \subset \mathbb{C}$, jotka määräävät saman haaran pisteessä a. Tällöin funktioiden f ja g analyyttiset jatkeet mitä tahansa polkua $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ pitkin, jolle $\gamma(0) = a$, antavat täsmälleen saman lopputuloksen, sillä analyyttinen jatke polkua pitkin riippuu vain funktion lokaalista käyttäytymisestä polun lähellä. Lisäksi lauseen 1.9 nojalla saatava analyyttinen jatke määrää yksikäsitteisen analyyttisen funktion haaran $(\gamma(1), h)$. Näin ollen voidaan mielekkäästi sanoa, että funktioelementin, tai täsmällisemmin, analyyttisen funktion haaran $(a, f) = (a, g)$, analyyttinen jatke polkua γ pitkin on funktioelementti $(\gamma(1), h)$.

Huomaa, että tehdyllä samastuksella funktioelementeillä (a, f) ja (a, g) on samat analyyttiset jatkeet vain jos $(a, f) = (a, g)$. Nimittäin, jos (b, h) on sekä funktioelementin (a, f) että funktioelementin (a, g) analyyttinen jatke samaa polkua γ pitkin, niin funktioelementit (a, f) ja (a, g) ovat funktioelementin (b, h) analyyttisiä jatkeita käänteispolkua γ^{-1} pitkin. Tällöin lauseen 1.9 nojalla $(a, f) = (a, g)$. Ilman funktioelementtien ja analyyttisen funktion haarojen samastusta tämä ei päde, sillä yleisesti $f \neq g$.

4.2. **Konstruktion idea.** Analyyttisen funktion Riemannin pinnan pisteitä tulevat olemaan meromorfiset funktioelementit, jotka voidaan jakaa kolmeen luokkaan:

(1) Säännölliset pisteet, eli kompleksitason analyyttisen jatkeen määräämät funktioelementit.
(2) Navat, eli meromorfiset funktioelementit, jotka jossakin punkteeratussa kiekossa vastaavat säännöllisiä funktioelementtejä.
(3) Haarautumispisteet, eli meromorfiset funktioelementit, jotka vastaavat punkteeratussa kiekossa useita analyyttisen funktion haaroja.

Tämän pistejoukon analyyttisen rakenteen ja topologian määrittämistä helpottaa seuraava lause.

Lause 4.3. *Olkoon R joukko ja Φ kokoelma bijektioita $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $\alpha \in I$, missä $U_\alpha \subset R$ on jokin osajoukko ja $V_\alpha \subset \mathbb{C}$ on avoin. Oletetaan, että kokoelman Φ kuvaukset toteuttavat seuraavat ehdot:*

(i) Kokoelman Φ kuvausten määrittelyjoukot U_α peittävät joukon R, eli $R = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.
(ii) Kaikille kokoelman Φ kuvauksille $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ ja $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ joukot

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{C} \quad \textit{ja} \quad \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{C}$$

ovat avoimia ja kuvaus

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

on analyyttinen.

Varustetaan joukko R kokoelman Φ kuvausten indusoimalla topologialla. Jos avaruus R on tässä topologiassa yhtenäinen Hausdorff-avaruus, niin (R, Φ) on Riemannin pinta.

Todistus. Oletetaan, että R varustettuna kokoelman Φ kuvausten indusoimalla topologialla on yhtenäinen Hausdorff-avaruus. Riittää osoittaa, että kokoelman Φ kuvaukset ovat tässä topologiassa homeomorfismeja, sillä tällöin Riemannin pinnan määritelmän ehdot (i) ja (ii) seuraavat suoraan lauseen ehdoista (i) ja (ii).

Avaruuden R topologian kanta koostuu määritelmän mukaan joukkojen $\varphi^{-1}(D)$ äärellisistä leikkauksista, missä $D \subset \mathbb{C}$ on jokin avoin joukko. Erityisesti kuvaukset $\varphi \in \Phi$ ovat triviaalisti jatkuvia, sillä avoimen joukon alkukuva on suoraan määritelmän mukaan avoin. Toisaalta ne ovat oletuksen mukaan myös bijektioita, joten ne ovat homeomorfismeja, jos ja vain jos ne ovat avoimia kuvauksia. Tätä varten taas riittää tarkistaa, että kuvaukselle $\varphi \in \Phi$ joukko $\varphi(B)$ on avoin kaikilla topologian kannan alkioilla B.

Olkoon $\varphi : U \to V$ kokoelmassa Φ ja olkoon

$$B = \bigcap_{j=1}^{n} \varphi_j^{-1}(D_j),$$

missä kuvaukset $\varphi_j : U_j \to V_j$ ovat joitakin kokoelman Φ kuvauksia ja $D_j \subset \mathbb{C}$ ovat avoimia joukkoja. Koska $V = \varphi(U) \subset \mathbb{C}$ on avoin, voidaan olettaa, että $B \subset U$.

Kuvauksen φ bijektiivisyyden nojalla saadaan

$$\varphi(B) = \varphi\left(\bigcap_{j=1}^{n} \varphi_j^{-1}(D_j)\right) = \bigcap_{j=1}^{n} \varphi(\varphi_j^{-1}(D_j) \cap U).$$

Kuvausten φ_j bijektiivisyyttä käyttäen taas saadaan

$$\varphi_j^{-1}(D_j) \cap U = \varphi_j^{-1}(D_j \cap \varphi_j(U \cap U_j)).$$

Näin ollen

$$\varphi(B) = \bigcap_{j=1}^{n} \varphi(\varphi_j^{-1}(D_j) \cap U) = \bigcap_{j=1}^{n} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(D_j \cap \varphi_j(U \cap U_j)).$$

Oletuksen (ii) nojalla joukko $\varphi_j(U \cap U_j) \subset \mathbb{C}$ on avoin, jolloin joukko

$$D_j \cap \varphi_j(U \cap U_j) \subset \mathbb{C}$$

on myös avoin. Edelleen saman oletuksen nojalla kuvaus $\varphi \circ \varphi_j^{-1}$ on analyyttinen, mistä seuraa, että

$$\varphi \circ \varphi_j^{-1}(D_j \cap \varphi_j(U \cap U_j)) \subset \mathbb{C}$$

on avoin. Tällöin joukko

$$\varphi(B) = \bigcap_{j=1}^{n} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(D_j \cap \varphi_j(U \cap U_j))$$

on äärellisen monen avoimen joukon leikkauksena avoin, mistä seuraa, että kuvaus φ on avoin. Näin ollen jokainen kokoelman Φ kuvaus on homeomorfismi. $\square$

Tämän lauseen takia pinnan topologiaa ei tarvitse erikseen määritellä, vaan se saadaan karttojen määrittelyn sivutuotteena. Analyyttisen funktion säännöllisten pisteiden ja napojen tapauksessa nämä kartat voidaan määritellä projektiona

$$\mathbb{C} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad (a, f) \mapsto a.$$

Meromorfisen funktioelementin (∞, f) ympäristön karttakin saadaan käsiteltyä kuvauksella

$$\mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad (a, f) \mapsto 1/a.$$

Haarautumispisteen tapauksessa joudutaan tarkastelemaan hieman tarkemmin analyyttisen jatkeen käyttäytymistä haarautumispisteen ympäristössä, jotta parametrinvaihtokuvaukset saadaan analyyttisiksi. Haarautumispisteiden käsittelyssä olennainen työkalu on luvussa 3 saadut tulokset, erityisesti punkteeratun kiekon peitteiden luokittelu.

4.3. **Säännölliset pisteet.** Kiinnitetään jokin analyyttinen funktio $f_0 : D_0 \to \mathbb{C}$, jonka Riemannin pintaa lähdetään muodostamaan. Olkoon $a_0 \in D_0$ jokin piste ja A kaikkien funktioelementin (a_0, f_0) analyyttisten jatkeiden kokoelma. Toisin sanoen $(a, f) \in A$ jos ja vain jos funktioelementti (a, f) on funktioelementin (a_0, f_0) analyyttinen jatke.

Määritellään joukolle A karttojen kokoelma lausetta 4.3 varten. Jokaisella funktioelementillä $(a, f) \in A$, funktion f potenssisarjaesityksellä pisteessä a on yksikäsitteinen suppenemiskiekko $B(a, r)$. Asetetaan

$$U_{(a,f)} = \{(z, f) : z \in B(a, r)\}.$$

Huomaa, että jos $(a, f) = (a, g)$, niin funktioilla f ja g on sama potenssisarjaesitys pisteessä a, joten joukko $U_{(a,f)}$ on hyvin määritelty. Määritellään tässä joukossa bijektio

$$\varphi_{(a,f)} : U_{(a,f)} \to B(a, r), \quad \varphi_{(a,f)}(z, f) = z.$$

Asetetaan

$$\Phi = \{\varphi_{(a,f)} : (a, f) \in A\}.$$

Kokoelman Φ kuvausten määrittelyjoukot muodostavat joukon A peitteen, sillä jokainen meromorfinen funktioelementti $(a, f) \in A$ sisältyy ainakin joukkoon $U_{(a,f)}$. Näin ollen ainakin lauseen 4.3 ehto (i) on kunnossa. Lisäksi huomataan, että parametrinvaihtokuvaukset

$$\varphi_{(a,f)} \circ \varphi^{-1}_{(b,g)}$$

ovat suoraan kuvausten konstruktion perusteella identtisiä kuvauksia $z \mapsto z$ kahden kiekon $B(a, r) \subset \mathbb{C}$ ja $B(b, s) \subset \mathbb{C}$ leikkauksessa, joten myös ehto (ii) on kunnossa. Näin ollen lauseen 4.3 nojalla (A, Φ) on Riemannin pinta jos se on yhtenäinen Hausdorff-avaruus.

Yhtenäisyyttä varten huomataan, että mille tahansa kahdelle funktioelementille $(a, f), (b, g) \in A$ löytyy analyyttisen jatkeen määritelmän perusteella ketju suoria analyyttisiä jatkeita $(a, f) = (z_0, f_0), (z_1, f_1), \ldots, (z_n, f_n) = (b, g)$. Vastaavat ympäristöt $U_{(z_0,f_0)}, \ldots U_{(z_n,f_n)}$ muodostavat tällöin ketjun avoimia yhtenäisiä joukkoja pisteiden (a, f) ja (b, g) välille, mistä seuraa, että A on yhtenäinen.

Hausdorff-ehtoa varten valitaan mitkä tahansa kaksi eri pistettä $(a, f), (b, g) \in A$. Jos $a \neq b$, niin pisteille $a, b \in \mathbb{C}$ on erilliset ympäristöt $U, V \subset \mathbb{C}$, ja näiden alkukuvat $\varphi^{-1}_{(a,f)}(U)$ ja $\varphi^{-1}_{(b,g)}(V)$ antavat pisteiden (a, f) ja (b, g) erilliset ympäristöt.

Jos taas $a = b$, niin joukot $U_{(a,f)}$ ja $U_{(a,g)}$ antavat suoraan pisteiden (a, f) ja (a, g) erilliset ympäristöt. Jos nimittäin olisi jokin piste

$$(c, h) \in U_{(a,f)} \cap U_{(a,g)},$$

niin funktiot f ja g määräävät saman haaran pisteen c ympäristössä. Erityisesti funktiot f ja g saavat samat arvot pienessä avoimessa joukossa pisteen c ympärillä, jolloin edelleen $f = g$ ja $(a, f) = (a, g)$, mikä on ristiriita. Näin ollen Hausdorff-ehtokin on kunnossa ja (A, Φ) on lauseen 4.3 nojalla Riemannin pinta.

Määritellään tämän Riemannin pinnan funktiot

$$p : A \to \mathbb{C}, \quad p(a, f) = a \quad \text{ja}$$
$$F : A \to \mathbb{C}, \quad F(a, f) = f(a).$$

Lemma 4.4. *Funktiot $p : A \to \mathbb{C}$ ja $F : A \to \mathbb{C}$ ovat analyyttisiä.*

Todistus. Analyyttisyys on lokaali ominaisuus, joten riittää tarkastella funktioita jonkin pisteen $(a, f) \in A$ ympäristössä $U_{(a,f)}$. Olkoon $B(a, r)$ funktion f suppenemiskiekko, jolloin

$$\varphi_{(a,f)}(U_{(a,f)}) = B(a, r).$$

Kaikille $z \in B(a, r)$ saadaan tällöin

$$\begin{aligned} p \circ \varphi_{(a,f)}^{-1}(z) &= p(z, f) = z \quad \text{ja} \\ F \circ \varphi_{(a,f)}^{-1}(z) &= F(z, f) = f(z), \end{aligned}$$

joten funktioiden p ja F analyyttisyys ympäristössä $U_{(a,f)}$ seuraa funktioiden $\mathrm{id}_{B(a,r)}$ ja funktion f analyyttisyydestä. □

Kuvaus $p : A \to \mathbb{C}$ on tämän Riemannin pinnan projektio kompleksitasoon. Kuten edellisen lemman todistuksessa nähtiin, sopivissa lokaaleissa koordinaateissa pisteen $(a, f) \in A$ ympäristössä funktio F on täsmälleen funktio f.

Funktioilla F ja p on Riemannin pinnan A konstruktion seurauksena läheinen yhteys analyyttisen jatkeen kanssa. Edellisen lemman perusteella lokaalisti funktio p on vain identtinen kuvaus, jolloin p on lokaali homeomorfismi. Avaruus A on Riemannin pintana Hausdorff-avaruus, joten lemman 3.17 nojalla kompleksitason polun γ nosto on yksikäsitteinen mikäli nosto on olemassa.

Kiinnitetään jokin funktioelementti $(\gamma(0), f) \in p^{-1}(\gamma(0))$ ja oletetaan, että polulla γ on nosto $\tilde{\gamma}$, jolle $\tilde{\gamma}(0) = (\gamma(0), f)$. Tällöin ehdosta $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ seuraa, että

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), f_t)$$

joillekin funktioelementeille $(\gamma(t), f_t) \in A$. Polun $\tilde{\gamma}$ jatkuvuuden perusteella taas jokaiselle t löytyy $\epsilon > 0$ siten, että

$$\tilde{\gamma}(s) = (\gamma(s), f_s) \in U_{(\gamma(t), f_t)} \quad \text{kun } |s - t| < \epsilon.$$

Tällöin joukon $U_{(\gamma(t), f_t)}$ konstruktion nojalla

$$(\gamma(s), f_s) = (\gamma(s), f_t),$$

eli $f_s = f_t$ jossakin pisteen $\gamma(s)$ ympäristössä. Näin ollen funktioelementit $(\gamma(t), f_t)$ antavat funktioelementin $(\gamma(0), f)$ analyyttisen jatkeen polkua γ pitkin.

Toisaalta jos analyyttinen jatke kompleksitason polkua γ pitkin on olemassa, niin saatavat funktioelementit $(\gamma(t), f_t)$ toteuttavat saman ehdon kuin edellä, jolloin ne määrittelevät Riemannin pinnan A polun $\tilde{\gamma}$, joka on polun γ nosto. Näin ollen analyyttinen jatke vastaa täsmälleen polun nostoa projektion $p : A \to \mathbb{C}$ suhteen.

Lisäksi jokainen funktion f_0 analyyttinen jatke on edellisen lemman todistuksen perusteella olennaisesti vain funktion $F : A \to \mathbb{C}$ rajoittuma. Tämän takia funktio F voidaan mieltää funktion f_0 analyyttiseksi jatkeeksi. Täsmällisemmin sanottuna, jos $U \subset A$ on pinnan A avoin osajoukko, jossa projektio p on injektio, niin

$$F \circ (p|_U)^{-1} : p(U) \to \mathbb{C}$$

on kompleksitason osajoukon $p(U) \subset \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, joka on funktion f_0 analyyttinen jatke.

4.4. **Erikoispisteet ja haarautumispisteet.** Vaikka edellä käsiteltiin jo kaikki funktion f_0 analyyttisen jatkeen määräämät pisteet, Riemannin pintaa A ja funktiota F voidaan vielä laajentaa ottamalla huomioon analyyttisen funktion $F \circ p^{-1}$ navat, haarautumispisteet ja käyttäytyminen äärettömyydessä.

Olkoon $a \in \mathbb{C}_\infty$, $r > 0$ ja oletetaan, että $U \subset A$ on pinnan A alue, jolle $p(U) = B^*(a, r) \subset \mathbb{C}$. Oletetaan lisäksi, että projektiokuvauksen rajoittuma

$$p|_U : U \to B^*(a, r)$$

on peite, jolle $\#p = n \in \mathbb{N}$. Seurausta 3.32 vastaavaa tulosta punkteeratulle kiekolle $B^*(a, r)$ soveltamalla nähdään, että on olemassa konformikuvaus $h : B^*(a, \sqrt[n]{r}) \to U$, jolle

$$p \circ h(z) = a + (z - a)^n, \quad \text{jos } a \in \mathbb{C}$$

tai

$$p \circ h(z) = z^n, \quad \text{jos } a = \infty.$$

Merkitään

$$\zeta = p \circ h : B^*(a, \sqrt[n]{r}) \to B^*(a, r),$$

jolloin kuvaus h voidaan esittää muodossa

$$h(z) = (\zeta(z), f_z).$$

Kiinnitetään jokin piste $z_0 \in B^*(a, \sqrt[n]{r})$ tarkasteltavaksi kantapisteeksi ja merkitään

$$(\zeta(z_0), f) = (\zeta(z_0), f_{z_0}) = h(z_0) \in A.$$

Olkoon γ jokin punkteeratun kiekon $B^*(a, \sqrt[n]{r})$ polku alkaen pisteestä z_0. Tällöin $\zeta \circ \gamma$ on punkteeratun kiekon $B^*(a, r)$ polku alkaen pisteestä $\zeta(z_0)$ ja $h \circ \gamma$ on tämän polun nosto pinnalle $U \subset A$ alkaen pisteestä $(\zeta(z_0), f)$.

Polun noston ja analyyttisen jatkeen vastaavuuden nojalla funktioelementit

$$h \circ \gamma(t) = (\zeta \circ \gamma(t), f_{\gamma(t)})$$

antavat tällöin funktioelementin $(\zeta(z_0), f)$ analyyttisen jatkeen polkua $\zeta \circ \gamma$ pitkin. Edelleen funktioelementit

$$(\gamma(t), f_{\gamma(t)} \circ \zeta)$$

antavat funktion $f \circ \zeta$ analyyttisen jatkeen polkua γ pitkin.

Jos γ on suljettu polku, niin $h \circ \gamma$ on myös suljettu polku, joten funktioelementin $(z_0, f \circ \zeta)$ analyyttinen jatke polkua γ pitkin on funktioelementti $(z_0, f \circ \zeta)$ itse. Lauseen 1.14 nojalla saadaan tällöin analyyttinen funktio

$$g : B^*(a, \sqrt[n]{r}) \to \mathbb{C},$$

jolle

$$(z_0, g) = (z_0, f \circ \zeta)$$

ja kaikilla $z \in B^*(a, \sqrt[n]{r})$ funktioelementti (z, g) on funktion $f \circ \zeta$ analyyttinen jatke pisteeseen z.

Mikäli tällä funktiolla g on poistuva erikoispiste tai napa pisteessä a, niin saadaan meromorfinen funktioelementti (a, g), joka voidaan lisätä aiemmin muodostettuun Riemannin pintaan A.

Määritelmä 4.5. Edellä määritelty meromorfinen funktioelementti (a, g) on analyyttisen funktion Riemannin pinnan

(1) säännöllinen piste, jos $n = 1$ ja a on funktion g poistuva erikoispiste,
(2) napa, jos $n = 1$ ja a on funktion g napa,
(3) kertaluvun n haarautumispiste, jos $n \geq 2$.

Poistuvalla erikoispisteellä äärettömyydessä tarkoitetaan, että funktiolla $z \mapsto g(1/z)$ on poistuva erikoispiste origossa.

Huomautus 4.6. Tapauksessa $n \geq 2$ saatava haarautumispiste (a, g) ei ole yksikäsitteinen. Itse asiassa jokaista kertaluvun n haarautumispistettä vastaa n eri meromorfista funktioelementtiä, sillä konstruktiossa käytetty konformikuvaus $h : B^*(a, \sqrt[n]{r}) \to U$ ei ole yksikäsitteinen, vaan riippuu peitteelle

$$p : U \to B^*(a, r)$$

valitusta kantapisteestä $h(z_0)$. Kuitenkin saatavilla eri funktioelementeillä on yksinkertainen yhteys.

Olkoot

$$h_1 : B^*(a, \sqrt[n]{r}) \to U \quad \text{ja} \quad h_2 : B^*(a, \sqrt[n]{r}) \to U$$

konstruktion konformikuvauksia ja olkoot (a, g_1) ja (a, g_2) näiden avulla saatavat kertaluvun n haarautumispisteet. Asetetaan

$$w_0 = h_2^{-1}(h_1(z_0)).$$

Koska h_1 ja h_2 ovat peitteiden p ja ζ välisiä isomorfismeja, on oltava

$$\zeta(w_0) = p \circ h_2(w_0) = p \circ h_1(z_0) = \zeta(z_0).$$

Erityisesti on olemassa luku $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ ja kierto $s : B^*(a, \sqrt[n]{r}) \to B^*(a, \sqrt[n]{r})$,

$$s(z) = a + e^{2\pi i k/n}(z - a), \quad \text{jos } a \in \mathbb{C}$$

tai

$$s(z) = e^{2\pi i k/n} z, \quad \text{jos } a = \infty,$$

jolle

$$s(z_0) = w_0.$$

Tällöin edelleen

$$h_2 \circ s(z_0) = h_2(w_0) = h_1(z_0).$$

Koska $\zeta \circ s = \zeta$ ja kuvaukset h_1 ja h_2 ovat peiteisomorfismeja, edeltävästä seuraa, että

$$h_2 \circ s = h_1.$$

Edelleen funktioiden g_1 ja g_2 konstruktion perusteella

$$g_2 \circ s = g_1,$$

eli funktiot g_1 ja g_2 ovat kiertoa s vaille samat.

Näytetään seuraavaksi, miten saatu meromorfinen funktioelementti (a, g) lisätään pintaan A. Tapauksessa $n = 1$ funktio ζ on identtinen funktio, jolloin funktio g on funktion f suora analyyttinen jatke. Jos (a, g) on säännöllinen piste ja $a \in \mathbb{C}$, niin $(a, g) \in A$ ja mitään uutta ei saada. Jos (a, g) ei ole säännöllinen, $a \notin \mathbb{C}$ tai $n \geq 2$, niin $(a, g) \notin A$ ja pintaa voidaan laajentaa. Käytetään jälleen lausetta 4.3, jota varten määritellään pisteen (a, g) ympäristö ja tämän ympäristön kartta.

Olkoon $B^*(a,s)$ funktion g suppenemisrengas. Funktion g konstruktion perusteella ainakin mahdollisesti pienemmässä ympäristössä

$$B^*(a,\sqrt[n]{r}) \subset B^*(a,s)$$

jokaiselle pisteelle $z \in B^*(a,\sqrt[n]{r})$ on olemassa funktioelementti

$$h(z) = (\zeta(z), f_z) \in U \subset A,$$

jolle

$$(z,g) = (z, f_z \circ \zeta).$$

Toisaalta funktio ζ laajenee samalla määritelmällä myös punkteerattuun kiekkoon $B^*(a,s)$, jolloin myös kuvaus h laajenee kuvaukseksi

$$h : B^*(a,s) \to A.$$

Pisteelle (a,g) saadaan ympäristö asettamalla

$$U_{(a,g)} = h(B^*(a,s)) \cup \{(a,g)\}.$$

Määritellään tässä ympäristössä kartta $\varphi_{(a,g)} : U_{(a,g)} \to B(a,s^n)$,

$$\varphi_{(a,g)}(\zeta(z), f_z) = z, \quad \varphi_{(a,g)}(a,g) = a, \quad \text{jos } a \in \mathbb{C}$$

tai

$$\varphi_{(\infty,g)}(\zeta(z), f_z) = 1/z, \quad \varphi_{(\infty,g)}(\infty,g) = 0, \quad \text{jos } a = \infty.$$

Tarkistetaan, että $(A \cup \{(a,g)\}, \Phi \cup \{\varphi_{(a,g)}\})$ on hyvin määritelty Riemannin pinta lausetta 4.3 soveltaen. Lauseen ehto (i) on jälleen selvästi voimassa ja ehto (ii) on kunnossa, jos kumpikaan kartoista ei ole $\varphi_{(a,g)}$. Tarkistetaan, että parametrinvaihtokuvaukset myös kartan $\varphi_{(a,g)}$ kanssa ovat analyyttisiä.

Käsitellään ensin tapaus $a \in \mathbb{C}$. Olkoon $\varphi_{(b,f)} \in \Phi$ jokin toinen kartta, jolle

$$U_{(b,f)} \cap U_{(a,g)} \neq \emptyset$$

Merkitään

$$D = \varphi_{(b,f)}(U_{(b,f)} \cap U_{(a,g)}) \subset \mathbb{C}.$$

Jokainen joukon $U_{(b,f)}$ funktioelementti on muotoa (z,f) ja toisaalta jokainen joukon $U_{(a,g)}$ funktioelementti on muotoa $(\zeta(z), f_z)$. Tällöin leikkausjoukossa D on olemassa hyvin määritelty funktion ζ käänteisfunktion haara ζ^{-1}.

Parametrinvaihtokuvaukset ovat tällöin

$$\begin{aligned}
&\varphi_{(b,f)} \circ \varphi_{(a,g)}^{-1}(z) = \varphi_{(b,f)}(\zeta(z), f_z) = \varphi_{(b,f)}(\zeta(z), f) = \zeta(z) \quad \text{ja} \\
&\varphi_{(a,g)} \circ \varphi_{(b,f)}^{-1}(z) = \varphi_{(a,g)}(z,f) = \varphi_{(a,g)}(\zeta(\zeta^{-1}(z)), f_{\zeta^{-1}(z)}) = \zeta^{-1}(z),
\end{aligned}$$

jotka ovat molemmat analyyttisiä, sillä funktiot ζ ja ζ^{-1} ovat analyyttisiä.

Tapauksessa $a = \infty$ taas samoilla perusteluilla saadaan yksikäsitteinen käänteisfunktion ζ^{-1} haara ja parametrinvaihtokuvaukset

$$\begin{aligned}
&\varphi_{(b,f)} \circ \varphi_{(\infty,g)}^{-1}(z) = \varphi_{(b,f)}(\zeta(1/z), f_{1/z}) = \varphi_{(b,f)}(\zeta(1/z), f) = \zeta(1/z) \quad \text{ja} \\
&\varphi_{(\infty,g)} \circ \varphi_{(b,f)}^{-1}(z) = \varphi_{(\infty,g)}(z,f) = \varphi_{(\infty,g)}(\zeta(\zeta^{-1}(z)), f_{\zeta^{-1}(z)}) = 1/\zeta^{-1}(z),
\end{aligned}$$

joiden analyyttisyys seuraa jälleen funktioiden ζ ja ζ^{-1} analyyttisyydestä. Näin ollen ehto (ii) on kunnossa.

Avaruuden $A \cup \{(a,g)\}$ yhtenäisyys seuraa välittömästi avaruuden A yhtenäisyydestä ja pisteen (a,g) ympäristön määritelmästä. Hausdorff-ehdon tarkistamiseksi taas riittää tarkistaa, että pisteellä (a,g) ja kaikilla joukon A pisteillä on erilliset ympäristöt.

Olkoon $(b,f) \in A$. Jos $a \neq b$, niin voidaan valita kompleksitason kiekot $B(a,r)$ ja $B(b,s)$, joille kiekot $B(a,r^n)$ ja $B(b,s)$ ovat erilliset. Tällöin kiekkojen $B(a,r)$ ja $B(b,s)$ alkukuvat kartoissa $\varphi_{(a,g)}$ ja $\varphi_{(b,s)}$ suhteen antavat etsityt erilliset ympäristöt. Tapauksessa $a = b$ taas vastaavasti kuin pinnan A tarkastelussa joukot $U_{(a,g)}$ ja $U_{(b,f)}$ antavat suoraan erilliset ympäristöt pisteille.

Näin ollen avaruus $A \cup \{(a,g)\}$ on yhtenäinen Hausdorff-avaruus ja kokoelma Φ toteuttaa lauseen 4.3 ehdot, joten

$$(A \cup \{(a,g)\}, \Phi \cup \{\varphi_{(a,g)}\})$$

on Riemannin pinta.

Edeltävää päättelyä toistamalla voidaan lisätä yksitellen erikoispisteitä pintaan A. Ainoa ongelma tulee vastaan huomautuksen 4.6 havainnon kanssa. Samaa kertaluvun $n \geq 2$ haarautumispistettä vastaa n eri meromorfista funktioelementtiä, joiden ympäristöt muodostuvat samoista funktioelementeistä. Näin ollen jos kahta samaa haarautumispistettä vastaavaa funktioelementtiä yritetään lisätä pintaan, Hausdorff-ehtoa ei saada kuntoon ja konstruktio epäonnistuu.

Olkoon $\tilde{E}$ kaikkien Riemannin pinnan A erikoispisteiden kokoelma. Olkoon $E \subset \tilde{E}$ jokin osajoukko siten, että kaikille $(a,g) \in \tilde{E}$ on olemassa yksikäsitteinen kierto,

$$\begin{aligned} s(z) &= a + e^{2\pi ik/n}(z-a), \quad \text{jos } a \in \mathbb{C} \quad \text{tai} \\ s(z) &= e^{2\pi ik/n}z, \quad \text{jos } a = \infty, \end{aligned}$$

jolle $(a, g \circ s) \in E$. Tällöin kokoelmassa E on jokaiselle pinnan A erikoispisteelle yksikäsitteinen meromorfinen funktioelementti ja pinta A voidaan täydentää Riemannin pinnaksi $R = A \cup E$ kuten edellä.

Määritelmä 4.7. Riemannin pinta $R = A \cup E$ on *analyyttisen funktion* $f_0 : D_0 \to \mathbb{C}$ *Riemannin pinta.*

Konstruktion alussa kiinnitetty analyyttinen funktio $f_0 : D_0 \to \mathbb{C}$ ei ole olennainen lopputuloksen kannalta, vaan ainoastaan funktion f_0 analyyttisten jatkeiden määräämällä kokoelmalla A on merkitystä. Mille tahansa funktioelementille $(z,f) \in A$ analyyttisellä jatkeella saadaan sama kokoelma A, joten edellisellä konstruktiolla saatava Riemannin pinta R on myös analyyttisen funktion f Riemannin pinta.

Pinnalla A määriteltiin aiemmin analyyttiset funktiot $p : A \to \mathbb{C}$ ja $F : A \to \mathbb{C}$. Laajennetaan nämä funktiot nyt koko pinnalle R. Koska pinta R saattaa nyt sisältää jonkin funktioelementin (∞, f) tai analyyttisen funktion navan, täytyy funktioiden maalijoukko laajentaa Riemannin palloksi $\mathbb{C}_\infty$. Muuten määritelmä on täsmälleen sama kuin aiemmin, eli asetetaan

$$\begin{aligned} p &: R \to \mathbb{C}_\infty, \quad p(z,f) = z \quad \text{ja} \\ F &: R \to \mathbb{C}_\infty, \quad F(z,f) = f(z). \end{aligned}$$

Lause 4.8. *Funktiot $p : R \to \mathbb{C}_\infty$ ja $F : R \to \mathbb{C}_\infty$ ovat analyyttisiä.*

Todistus. Konstruktion perusteella $A \subset R$ on pinnan R avoin osajoukko. Toisaalta myös kompleksitaso on Riemannin pallon avoin osajoukko, joten lemman 4.4 nojalla funktioiden F ja p rajoittumat joukkoon A ovat analyyttisiä. Riittää siis tarkistaa analyyttisyys erikoispisteiden $(a, g) \in E \subset R$ ympäristöissä.

Olkoon $a \in \mathbb{C}$, $(a, g) \in E$ ja ζ pisteen (a, g) konstruktiossa käytetty funktio. Olkoon $\varphi_{(a,g)}$ tätä pistettä vastaava kartta ja merkitään

$$B(a, r) = \varphi_{(a,g)}(U_{(a,g)}).$$

Tällöin kaikilla $z \in B^*(a, r)$

$$\begin{aligned} p \circ \varphi^{-1}_{(a,g)}(z) &= p(\zeta(z), f_z) = \zeta(z) \quad \text{ja} \\ F \circ \varphi^{-1}_{(a,g)}(z) &= F(\zeta(z), f_z) = f_z(\zeta(z)) = f_z \circ \zeta(z) = g(z). \end{aligned}$$

Lisäksi pisteessä $z = a$

$$\begin{aligned} p \circ \varphi^{-1}_{(a,g)}(a) &= p(a, g) = a = \zeta(a) \quad \text{ja} \\ F \circ \varphi^{-1}_{(a,g)}(a) &= F(a, g) = g(a). \end{aligned}$$

Koska funktio g on meromorfinen funktio kiekossa $B(a, r)$, se on analyyttinen kuvauksena $g : B(a, r) \to \mathbb{C}_\infty$. Näin ollen funktioiden p ja F analyyttisyys seuraa funktioiden ζ ja g analyyttisyydestä.

Tapauksessa $a = \infty$ taas vastaavasti kaikilla $z \in B^*(0, r) \subset \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} p \circ \varphi^{-1}_{(\infty,g)}(z) &= p(\zeta(1/z), f_{1/z}) = \zeta(1/z) \quad \text{ja} \\ F \circ \varphi^{-1}_{(\infty,g)}(z) &= F(\zeta(1/z), f_{1/z}) = f_{1/z}(\zeta(1/z)) = g(1/z). \end{aligned}$$

Lisäksi pisteessä $z = 0$

$$\begin{aligned} p \circ \varphi^{-1}_{(\infty,g)}(0) &= p(\infty, g) = \infty = \zeta(\infty) \quad \text{ja} \\ F \circ \varphi^{-1}_{(\infty,g)}(0) &= F(\infty, g) = g(\infty). \end{aligned}$$

Näin ollen tässäkin tapauksessa funktioiden F ja p analyyttisyys seuraa funktioiden ζ ja g analyyttisyydestä. □

Esimerkki 4.9. Aiemmin luvun 1 esimerkeissä 1.21 ja 1.24 tarkasteltiin funktioiden

$$\begin{aligned} f &: B(1, 1) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sqrt[n]{z} \quad \text{ja} \\ g &: B(1, 1) \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \mathrm{Log}(z) \end{aligned}$$

analyyttisen jatkeen käyttäytymistä. Muodostetaan nyt näiden analyyttisten funktioiden Riemannin pinnat ja tarkastellaan saatavia pintoja.

(i) Funktion f tapauksessa analyyttinen jatke antoi n eri analyyttistä funktiota jokaisen pisteen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ympäristössä, eli täsmälleen funktion $z \mapsto z^n$ käänteisfunktion eri haarat. Näin ollen analyyttinen jatke antaa funktioelementtien kokoelman

$$A_f = \{(a, h) : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ ja } h(z)^n = z \text{ pisteen } a \text{ ympäristössä}\}.$$

Esimerkin 1.21 mukaan funktiota f voidaan jatkaa vapaasti alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tällöin analyyttisen jatkeen ja polun noston vastaavuuden, sekä lauseen 3.21 nojalla projektio $p : A_f \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on peite.

Koska jokaisessa pisteessä $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on olemassa n eri analyyttisen funktion haaraa (a, h_j), joille $h_j(z)^n = z$, peitteen p aste on $\#p = n$. Tämän takia mahdollisen haarautumispisteen tarkastelua varten asetetaan

$$\zeta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \zeta(z) = z^n,$$

ja tarkastellaan funktion $f \circ \zeta$ analyyttistä jatketta. Koska $f \circ \zeta(z) = z$, kyseinen analyyttinen jatke on vain kokonainen funktio

$$\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \mathrm{id}(z) = z,$$

jolla on pisteessä 0 on poistuva erikoispiste. Näin ollen saadaan pinnan A_f kertaluvun n haarautumispiste $(0, \mathrm{id})$.

Toisaalta $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ on myös pisteen $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ punkteerattu ympäristö ja vastaava funktio ζ on täsmälleen sama kuin pisteen 0 tapauksessa. Tarkastellaan siis myös funktion $f \circ \zeta$ käyttäytymistä pisteen ∞ ympäristössä. Funktiolla $f \circ \zeta = \mathrm{id}$ on kertaluvun 1 napa pisteessä $z = \infty$, sillä funktiolla

$$z \mapsto f \circ \zeta(1/z) = \mathrm{id}(1/z) = 1/z$$

on 1 kertaluvun napa pisteessä 0. Näin ollen pisteessä ∞ saadaan kertaluvun n haarautumispiste (∞, id).

Mille tahansa muulle pisteelle $a \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ taas voidaan valita pieni kiekko $B(a, r)$, $0 < r < |a|$. Tässä kiekossa mitä tahansa kokoelman A_f funktioelementtiä voidaan jatkaa vapaasti, jolloin erikoispisteiden konstruktiossa saadaan vain säännöllisiä funktioelementtejä $(a, h) \in A_f$, eli mitään ei tarvitse lisätä pintaan A_f.

Tämän nojalla juurifunktion f määräämä Riemannin pinta on

$$R_f = A_f \cup \{(0, \mathrm{id}), (\infty, \mathrm{id})\}.$$

Tarkastellaan hieman tarkemmin haarautumispisteen $(0, \mathrm{id})$ ympäristön karttaa $\varphi_{(0,\mathrm{id})}$. Funktio id on kokonainen funktio, jolloin sen suppenemiskiekko on koko kompleksitaso $\mathbb{C}$. Pisteen $(0, \mathrm{id})$ ympäristö $U_{(0,\mathrm{id})}$ sisältää tällöin kaikki funktioelementit $(\zeta(z), h)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, joille

$$(z, h \circ \zeta) = (z, \mathrm{id}).$$

Tässä $\zeta(z) = z^n$, eli nämä funktioelementit $(\zeta(z), h)$ ovat täsmälleen kaikki kokoelman A_f funktioelementit. Näin ollen

$$U_{(0,\mathrm{id})} = A_f \cup \{(0, \mathrm{id})\} = R_f \setminus \{(\infty, \mathrm{id})\}.$$

Tämä taas tarkoittaa, että kartta $\varphi_{(0,\mathrm{id})}$ antaa konformikuvauksen

$$\varphi_{(0,\mathrm{id})} : R_f \setminus \{(\infty, \mathrm{id})\} \to \mathbb{C}.$$

Vastaavalla tarkastelulla haarautumispisteelle (∞, id) nähdään, että kartta $\varphi_{(\infty,\mathrm{id})}$ antaa konformikuvauksen

$$\varphi_{(\infty,\mathrm{id})} : R_f \setminus \{(0, \mathrm{id})\} \to \mathbb{C}.$$

Toisaalta

$$\varphi_{(0,\mathrm{id})} \circ \varphi^{-1}_{(\infty,\mathrm{id})}(z) = 1/z,$$

mikä tarkoittaa, että kartta $\varphi_{(0,\mathrm{id})}$ laajenee konformikuvaukseksi

$$\varphi : R_f \to \mathbb{C}_\infty.$$

Näin ollen juurifunktion f määräämä Riemannin pinta on itse asiassa Riemannin pallo ja haarautumispisteiden $(0, \mathrm{id})$ ja (∞, id) ympäristöjen kartat $\varphi_{(0,\mathrm{id})}$ ja $\varphi_{(\infty,\mathrm{id})}$ ovat jopa Riemannin pallon standardit kartat.

(ii) Funktion $g(z) = \mathrm{Log}(z)$ tapauksessa analyyttinen jatke antaa jokaisen pisteen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ympäristössä äärettömän monta eri analyyttistä funktiota, eli kaikki logaritmin haarat pisteen z ympäristössä. Tällöin

$$A_g = \{(a, h) : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ ja } e^{h(z)} = z \text{ pisteen } a \text{ ympäristössä}\}.$$

Tässäkin tapauksessa jokaista haaraa voidaan jatkaa vapaasti kiekossa $B(a, r)$, kun $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $0 < r < |a|$, joten riittää tarkistella analyyttistä jatketta pisteiden 0 ja ∞ ympäristöissä.

Toisaalta, minkä tahansa logaritmin haaran analyyttinen jatke jokaista ympyräpolkua

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = re^{2\pi ikt}, \quad k \in \mathbb{N}, r > 0$$

pitkin antaa eri logaritmin haaran. Näin ollen ainoa pinnan A_g osajoukko U, jolle projektio $p : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on peite on $U = A_g$. Tässä tapauksessa $\#p = \infty$ ja tästä ei saada mitään lisättävää pintaan A_g. Näin ollen funktion g määräämä Riemannin pinta on täsmälleen

$$R_g = A_g.$$

5. Algebralliset funktiot

Esimerkin 4.9 kohdassa (i) tarkasteltiin juurifunktion $f(z) = \sqrt[n]{z}$ määräämää Riemannin pintaa. Kuten aiemmin mainittiin, ainoastaan analyyttisen jatkeen määräämällä kokoelmalla A_f on merkitystä analyyttisen funktion Riemannin pinnan kannalta. Juurifunktion tapauksessa tämä kokoelma on täsmälleen kaikkien funktion $z \mapsto z^n$ käänteisfunktion haarojen kokoelma. Toisin sanoen kyseessä on kaikkien polynomiyhtälön

$$P(z, f(z)) = f(z)^n - z = 0$$

toteuttavien funktioelementtien kokoelma.

Vastaavaa tarkastelua voidaan yrittää suorittaa myös minkä tahansa muun polynomiyhtälön

$$P(z, f(z)) = \sum_{j+k \leq n} a_{jk} z^j f(z)^k = 0$$

määräämien funktioelementtien kokoelmalle. Yleisen polynomiyhtälön tapauksessa ongelmaksi muodostuu kuitenkin se, että kaikki saatavan kokoelman funktioelementit eivät välttämättä ole toistensa analyyttisiä jatkeita. Itse asiassa näin käy aina, kun polynomi P voidaan jakaa polynomitekijöihin $P = QR$.

Jaottoman polynomiyhtälön tapauksessa sen sijaan osoittautuu, että tällä konstruktiolla saadaan aina Riemannin pinta. Lisäksi saatava Riemannin pinta on aina kompakti. Hieman yllättävämmin, on myös totta, että jokainen kompakti Riemannin pinta saadaan jonkin jaottoman polynomiyhtälön määräämänä. Tätä jälkimmäistä tulosta ei tässä työssä päästä todistamaan, sillä todistuksen olennainen työkalu on differentiaalimuotojen ja meromorfisten differentiaalimuotojen teoria. Kompaktin Riemannin pinnan määräävän polynomiyhtälön muodostamista on käsitelty esimerkiksi kirjassa [10, Ch. 10].

Tässä luvussa käsitellään jaottoman polynomiyhtälön määräämän Riemannin pinnan konstruktio käyttäen hyödyksi edellisen luvun analyyttisen funktion Riemannin pinnan konstruktiota. Näiden välisen yhteyden osoittaminen seuraa kirjan [1, Ch. 8, 2] käsittelyä. Lisäksi todistetaan, että saatava Riemannin pinta on aina kompakti.

5.1. **Algebralliset funktiot.**

Määritelmä 5.1. *Algebrallinen funktio* on analyyttinen funktio $f : D \to \mathbb{C}$, joka toteuttaa jonkin polynomiyhtälön

$$P(z, f(z)) = a_n(z) f(z)^n + a_{n-1}(z) f(z)^{n-1} + \cdots + a_0(z) = 0$$

missä funktiot $a_0, \ldots, a_n$ ovat yhden muuttujan polynomeja.

Esimerkki 5.2. (i) Kaikki kompleksiset polynomit ovat algebrallisia funktioita, sillä polynomi $f(z) = b_n z^n + \cdots + b_0$ toteuttaa polynomiyhtälön

$$P(z, f(z)) = f(z) - (b_n z^n + \cdots + b_0) = 0.$$

(ii) Polynomien käänteisfunktiot ovat algebrallisia funktioita, sillä funktion

$$f(z) = b_n z^n + \cdots + b_0$$

lokaalille käänteisfunktiolle g pätee

$$z = f(g(z)) = b_n g(z)^n + b_{n-1} g(z)^{n-1} + \cdots + b_0.$$

Tällöin funktio g toteuttaa polynomiyhtälön

$$P(z,g(z)) = b_n g(z)^n + b_{n-1} g(z)^{n-1} + \cdots + b_1 g(z) + b_0 - z.$$

(iii) Kaikki rationaalifunktiot ovat algebrallisia funktioita, sillä rationaalifunktio $f(z) = p(z)/q(z)$ toteuttaa polynomiyhtälön

$$P(z,f(z)) = q(z)f(z) - p(z) = 0.$$

(iv) Myös rationaalifunktioiden käänteisfunktiot ovat algebrallisia funktioita. Jos

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{b_n z^n + \cdots + b_0}{c_m z^m + \cdots + c_0}$$

ja g on funktion f lokaali käänteisfunktio, niin

$$z = f(g(z)) = \frac{p(g(z))}{q(g(z))} = \frac{b_n g(z)^n + \cdots + b_0}{c_m g(z)^m + \cdots + c_0}.$$

Tällöin funktio g toteuttaa polynomiyhtälön

$$P(z,g(z)) = zq(g(z)) - p(g(z)) = c_m z g(z)^m + \cdots + c_0 z - b_n g(z)^n - \cdots - b_0 = 0.$$

Lause 5.3. *Olkoon $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ polynomi ja $z_0 \in \mathbb{C}$. Oletetaan, että $w_0 \in \mathbb{C}$ on polynomin $w \mapsto P(z_0,w)$ ensimmäisen kertaluvun nollakohta. Tällöin on olemassa pisteen z_0 ympäristö D ja analyyttinen funktio $f : D \to \mathbb{C}$, jolle $f(z_0) = w_0$ ja $P(z,f(z)) = 0$ kaikilla $z \in D$.*

Todistus. Polynomilla $w \mapsto P(z_0,w)$ on vain äärellinen määrä nollakohtia, joten on olemassa säde $r > 0$, jolle

$$P(z_0,w) \neq 0 \quad \text{kaikilla } w \in \overline{B}(w_0,r) \setminus \{w_0\}.$$

Määritellään ympyräpolku

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = re^{2\pi i t} + w_0.$$

Koska w_0 on polynomin $w \mapsto P(z_0,w)$ ainoa nollakohta kiekossa $B(w_0,r)$, argumenttiperiaatteen [1, Ch. 4, 5.2, Theorem 20] nojalla

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} \frac{P_w(z_0,w)}{P(z_0,w)}dw = 1,$$

missä $P_w(z_0,w) = \frac{d}{dw}P(z_0,w)$.

Koska $P(z_0,\gamma(t)) \neq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$, on polynomin P jatkuvuuden nojalla on olemassa jokin pisteen z_0 ympäristö D, jossa

$$P(z,\gamma(t)) \neq 0.$$

Näin ollen integraalifunktio

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{P_w(z,w)}{P(z,w)}dw$$

on hyvin määritelty tässä ympäristössä D. Argumenttiperiaatteen nojalla edellinen integraali antaa kaikilla $z \in D$ polynomin $w \mapsto P(z,w)$ nollakohtien lukumäärän kertaluvut huomioiden. Erityisesti tämä integraalifunktio saa vain kokonaislukuarvoja.

Toisaalta polynomien P ja P_w jatkuvuuden nojalla integraalifunktio on jatkuva, joten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P_w(z,w)}{P(z,w)}dw = 1 \quad \text{kaikilla } z \in D.$$

Toisin sanoen jokaisella $z \in D$ polynomilla $w \mapsto P(z,w)$ on täsmälleen yksi ensimmäisen kertaluvun nollakohta. Tämä nollakohta taas saadaan laskettua argumenttiperiaatteen yleistyksen [1, Ch. 4, 5.2, s.152] avulla laskemalla integraali

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma w\frac{P_w(z,w)}{P(z,w)}dw.$$

Asetetaan

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma w\frac{P_w(z,w)}{P(z,w)}dw,$$

jolloin saadaan analyyttinen funktio, jolle $P(z, f(z)) = 0$ ja $f(z_0) = w_0$. □

Lauseen 5.3 soveltamista varten on olennaista tietää missä pisteissä $z \in \mathbb{C}$ polynomilla $w \mapsto P(z,w)$ on vain ensimmäisen kertaluvun nollakohtia. Tätä varten huomataan, että jos w on kertaluvun $k \geq 2$ nollakohta polynomille, niin w on sekä polynomin että sen derivaattapolynomin P_w nollakohta. Näin ollen ongelmana on löytää polynomien P ja P_w yhteiset nollakohdat.

Tarkastellaan tilannetta yleisemmin, eli etsitään polynomien

$$\begin{aligned} P(z,w) &= a_n(z)w^n + \cdots + a_0(z) \quad \text{ja} \\ Q(z,w) &= b_m(z)w^m + \cdots + b_0(z) \end{aligned}$$

yhteisiä nollakohtia. Oletetaan, että polynomin $w \mapsto P(z,w)$ aste on pienempi kuin polynomin $w \mapsto Q(z,w)$ aste, eli että $m \leq n$. Kiinnitetään $z \in \mathbb{C}$ ja sovelletaan polynomien jakoyhtälöä polynomeille $w \mapsto P(z,w)$ ja $w \mapsto Q(z,w)$. Tästä saadaan

$$P(z,w) = S(z,w)Q(z,w) + R(z,w)$$

joillekin polynomeille $w \mapsto S(z,w)$ ja $w \mapsto R(z,w)$, missä polynomin $w \mapsto R(z,w)$ aste on pienempi kuin polynomin $w \mapsto Q(z,w)$ aste. Koska polynomeissa P ja Q termien w^k kertoimet ovat muuttujan z polynomeja $a_k(z)$ ja $b_k(z)$, polynomin $w \mapsto R(z,w)$ termien w^k kertoimet ovat muuttujan z rationaalifunktioita. Näin ollen on olemassa polynomi $c(z)$ siten, että

$$\begin{aligned} S_1(z,w) &= c(z)S(z,w) \quad \text{ja} \\ R_1(z,w) &= c(z)R(z,w) \end{aligned}$$

ovat polynomeja. Tällöin yllä oleva jakoyhtälö voidaan esittää muodossa

$$c(z)P(z,w) = S_1(z,w)Q(z,w) + R_1(z,w).$$

Mikäli polynomi $w \mapsto R_1(z,w)$ ei ole vakiopolynomi, voidaan edeltävä konstruktio toistaa polynomeille $w \mapsto Q(z,w)$ ja $w \mapsto R_1(z,w)$. Tällöin saadaan yhtälö

$$c_2(z)Q(z,w) = S_2(z,w)R_1(z,w) + R_2(z,w)$$

jollekin polynomeille S_2 ja R_2, joille polynomin $w \mapsto R_2(z,w)$ aste on pienempi kuin polynomin R_1. Näin jatkamalla saadaan lopulta polynomi R_l, jonka aste muuttujan w suhteen on 0, jolloin R_l on vain yhden muuttujan polynomi.

Määritelmä 5.4. Edellä konstruoitu polynomi R_l on polynomien P ja Q *resultantti.*

Polynomien P ja Q resultantti R_l sisältää tiedon niistä pisteistä z, joilla polynomeilla $w \mapsto P(z,w)$ ja $w \mapsto Q(z,w)$ on yhteinen nollakohta.

Lemma 5.5. *Olkoot $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ ja $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ polynomeja ja olkoon $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynomien P ja Q resultantti. Jos*

$$P(z,w) = 0 = Q(z,w)$$

joillekin $z, w \in \mathbb{C}$, niin $R(z) = 0$.

Todistus. Jos $P(z,w) = 0 = Q(z,w)$, niin resultantin konstruktiossa käytettyä jakoyhtälöstä

$$c(z)P(z,w) = S_1(z,w)Q(z,w) + R_1(z,w)$$

nähdään, että myös $R_1(z,w) = 0$. Vastaavasti, koska $Q(z,w) = 0 = R_1(z,w)$, myös $R_2(z,w) = 0$. Edelleen konstruktion jakoyhtälöitä seuraten nähdään, että

$$R(z) = R_l(z,w) = 0.$$

□

Lemma 5.6. *Olkoot $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ ja $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ polynomeja. Jos polynomien P ja Q resultantti R on nollapolynomi, polynomeilla P ja Q on vakiopolynomista eroava yhteinen tekijä.*

Todistus. Jos polynomien resultantti $R = R_l$ on nollapolynomi, resultantin konstruktion viimeinen jakoyhtälö on muotoa

$$c_{l-1}(z)R_{l-2}(z,w) = S_l(z,w)R_{l-1}(z,w),$$

missä polynomin R_{l-1} aste muuttujan w suhteen on positiivinen. Tällöin polynomeilla R_{l-2} ja R_{l-1} on vakiopolynomista eroava yhteinen tekijä. Edelleen jakoyhtälöitä seuraamalla nähdään, että sama pätee tällöin myös polynomeille R_{l-3} ja R_{l-2} ja niin edelleen aina polynomeihin P ja Q asti. □

Lause 5.7. *Olkoon*

$$P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad P(z,w) = a_n(z)w^n + \cdots + a_0(z)$$

jaoton polynomi. Tällöin on vain äärellisen monta pistettä $z \in \mathbb{C}$, joissa polynomilla $w \mapsto P(z,w)$ on alle n eri nollakohtaa.

Todistus. Koska polynomi P on jaoton, sen ainoa vakiopolynomista eroava tekijä on polynomi P itse. Toisaalta polynomin P derivaatan P_w aste muuttujan w suhteen on pienempi kuin polynomin P, joten polynomeilla P ja P_w ei ole mitään vakiopolynomista eroavaa yhteistä tekijää. Tällöin lemman 5.6 nojalla polynomin P ja sen derivaattapolynomin P_w resultantti $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ei voi olla nollapolynomi. Erityisesti polynomilla R voi olla vain äärellisen monta nollakohtaa $z_1, \ldots, z_l$. Tällöin kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_l\}$ polynomeilla $w \mapsto P(z,w)$ ja $w \mapsto P_w(z,w)$ ei ole yhteisiä nollakohtia. Erityisesti jokainen polynomin $w \mapsto P(z,w)$ nollakohta on ensimmäisen kertaluvun nollakohta.

Algebran peruslauseen nojalla polynomilla $w \mapsto P(z,w)$ on aina kertaluvut huomioiden asteensa verran nollakohtia. Kun $a_n(z) \neq 0$, polynomin $w \mapsto P(z,w)$ aste on täsmälleen n, jolloin edeltävän päättelyn nojalla tällaisissa pisteissä z polynomilla $w \mapsto P(z,w)$ on täsmälleen n eri nollakohtaa. Toisaalta polynomilla a_n voi olla vain äärellisen monta nollakohtaa $z_{l+1}, \ldots, z_m$, jolloin polynomilla $w \mapsto P(z, w)$ voi olla alle n eri nollakohtaa vain pisteissä $z_1, \ldots, z_m$. □

Lauseessa 5.7 polynomin P jaottomuus oli olennaista. Algebrallisten funktioiden käsittelyn kannalta polynomin jaottomuusoletus ei kuitenkaan ole mitenkään ongelmallinen. Algebrallinen funktio nimittäin toteuttaa aina yhden ja vain yhden jaottoman polynomiyhtälön, kuten seuraavassa lauseessa nähdään.

Lause 5.8. *Jokaiselle algebralliselle funktiolle $f : D \to \mathbb{C}$ on olemassa vakiokerrointa vaille yksikäsitteinen polynomi $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, jolle $P(z, f(z)) = 0$.*

Todistus. Algebrallisen funktion määritelmän mukaan f toteuttaa jonkin polynomiyhtälön $Q(z, f(z)) = 0$. Oletetaan, että polynomi Q voidaan jakaa jaottomiin tekijöihin

$$Q = P_1 P_2 \ldots P_n.$$

Tällöin jokaisessa pisteessä $z \in D$

$$P_1(z, f(z)) P_2(z, f(z)) \ldots P_n(z, f(z)) = Q(z, f(z)) = 0,$$

joten ainakin yhdelle indeksille $j = j(z)$ on oltava $P_j(z, f(z)) = 0$. Olkoon $z_0 \in D$ ja olkoon (z_k) jono pisteitä alueessa D, joille $z_k \to z_0 \in D$. Tällöin on jokin indeksi $j \in \{1, \ldots, n\}$, jolle $j = j(z_k)$ äärettömän monella $k \in \mathbb{N}$. Näissä pisteissä $z_k \in D$ on tällöin

$$P_j(z_k, f(z_k)) = 0$$

jolloin funktion

$$z \mapsto P_j(z, f(z))$$

analyyttisyyden nojalla funktio f toteuttaa jaottoman polynomiyhtälön

$$P(z, f(z)) = P_j(z, f(z)) = 0.$$

Toisaalta, jos $\tilde{P}$ on jokin toinen jaoton polynomi, jolle

$$\tilde{P}(z, f(z)) = 0,$$

niin polynomeilla P ja $\tilde{P}$ on yhteinen nollakohta kaikilla $z \in D$. Tällöin lemman 5.5 nojalla polynomien P ja $\tilde{P}$ resultantille R on oltava $R(z) = 0$ kaikilla $z \in D$. Tällöin resultantti on nollapolynomi, jolloin lemman 5.6 nojalla polynomeilla P ja $\tilde{P}$ on jokin vakiopolynomista eroava yhteinen tekijä. Polynomien P ja $\tilde{P}$ jaottomuuden nojalla on tällöin oltava

$$P = \lambda \tilde{P}$$

jollekin vakiolle $\lambda \in \mathbb{C}$, joten polynomi P on vakiota vaille yksikäsitteinen. □

Lemma 5.9. *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, joka toteuttaa polynomiyhtälön $P(z, f(z)) = 0$. Tällöin funktion f mikä tahansa analyyttinen jatke toteuttaa saman polynomiyhtälön.*

Todistus. Olkoon $g : G \to \mathbb{C}$ funktion f suora analyyttinen jatke. Tällöin $f(z) = g(z)$ kaikilla $z \in D \cap G$, joten

$$P(z, g(z)) = P(z, f(z)) = 0 \quad \text{kaikilla } z \in D \cap G.$$

Koska P on polynomi ja g on analyyttinen, funktio $z \mapsto P(z, g(z))$ on analyyttinen. Toisaalta se on identtisesti nolla joukossa $D \cap G \subset G$, joten sen on oltava nolla koko joukossa G, eli $P(z, g(z)) = 0$ kaikilla $z \in G$.

Funktion f mielivaltaiselle analyyttiselle jatkeelle on suoraan määritelmän perusteella olemassa ketju suoria analyyttisiä jatkeita. Soveltamalla edeltävää päättelyä induktiivisesti ketjun peräkkäisille funktioille nähdään, että funktion f analyyttinen jatke toteuttaa saman polynomiyhtälön kuin f. $\square$

Lause 5.10. *Olkoon $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ jaoton polynomi ja f polynomiyhtälön $P(z, f(z)) = 0$ toteuttava analyyttinen funktio. Olkoot $z_1, \ldots, z_m$ ne pisteet, joissa polynomiyhtälöllä $P(z, w) = 0$ on alle n ratkaisua w. Tällöin funktiota f voidaan jatkaa vapaasti alueessa $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$.*

Todistus. Tehdään antiteesi, että on olemassa polku

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\},$$

jota pitkin funktiolla f ei ole analyyttistä jatketta. Tällöin on olemassa jokin piste $t \in [0, 1]$ siten, että funktiolla f on analyyttinen jatke mitä tahansa osapolkua $\gamma|_{[0,s]}$ pitkin, kun $s < t$, mutta ei ole analyyttistä jatketta polkua $\gamma|_{[0,t]}$ pitkin.

Kuitenkin pisteessä $\gamma(t) \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ on oletuksen mukaan täsmälleen n ratkaisua $w_1, \ldots, w_n$ polynomiyhtälölle

$$P(\gamma(t), w) = 0.$$

Tällöin jokaisen ratkaisun kertaluku on 1, jolloin lauseen 5.3 nojalla näitä ratkaisuja vastaa pisteen $\gamma(t)$ joissakin ympäristöissä analyyttiset funktiot $f_1, \ldots, f_n$, jotka toteuttavat polynomiyhtälön

$$P(z, f_j(z)) = 0.$$

Koska pisteet w_j ovat eri pisteitä, funktioiden f_j jatkuvuuden nojalla on olemassa jokin pisteen $\gamma(t)$ ympäristö D, jolle

$$f_j(D) \cap f_k(D) = \emptyset \quad \text{kaikilla } j \neq k.$$

Polun γ jatkuvuuden perusteella taas on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että $\gamma(s) \in D$, kun $t - \epsilon \leq s < t$. Olkoon g funktion f analyyttinen jatke polkua $\gamma|_{[0,t-\epsilon]}$ pitkin. Lemman 5.9 nojalla funktio g toteuttaa tällöin polynomiyhtälön

$$P(z, g(z)) = 0$$

jossakin pisteen $\gamma(t - \epsilon)$ ympäristössä G. Toisaalta alueessa D pisteet $f_j(z)$ ovat polynomin $w \mapsto P(z, w)$ kaikki nollakohdat, joten kaikilla $z \in G \cap D$

$$g(z) = f_j(z) \quad \text{jollekin } j = j(z) \in \{1, \ldots, n\}.$$

Jos kiinnitetään alueen $G \cap D$ jono (z_k), jolle

$$\lim_{k \to \infty} z_k = \gamma(t - \epsilon),$$

niin on ainakin yksi indeksi $j \in \{1, \ldots, n\}$, jolle

$$g(z_k) = f_j(z_k)$$

äärettömän monella $k \in \mathbb{N}$. Tämä taas tarkoittaa, että

$$g(z) = f_j(z) \quad \text{kaikilla } z \in D \cap G,$$

jolloin funktio f_j on funktion g suora analyyttinen jatke. Koska funktio f_j on analyyttinen funktio pisteen $\gamma(t)$ ympäristössä D, tästä nähdään, että funktiolla g on analyyttinen jatke polkua $\gamma|_{[t-\epsilon,t]}$ pitkin. Edelleen funktiolla f on tällöin analyyttinen jatke polkua $\gamma|_{[0,t]}$ pitkin, mikä on ristiriita luvun t valinnan kanssa. □

Lemma 5.11. *Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ ja $f : B^*(z_0, r) \to \mathbb{C}$ algebrallinen funktio. Tällöin funktiolla f on napa tai poistuva erikoispiste pisteessä z_0.*

Todistus. Käsitellään ensin tapaus $z_0 \in \mathbb{C}$. Algebrallisen funktion määritelmän mukaan on olemassa jokin polynomi

$$P(z, w) = a_n(z)w^n + \cdots + a_0(z),$$

jolle $P(z, f(z)) = 0$ kaikilla $z \in B^*(z_0, r)$. Jos funktiolla f ei ole napaa tai poistuvaa erikoispistettä pisteessä z_0, niin piste z_0 on funktion oleellinen erikoispiste. Tällöin kaikille $m \in \mathbb{N}$ on olemassa jono pisteitä $z_k \in B^*(z_0, r)$, joille $z_k \to z_0$ ja

$$\lim_{k\to\infty} |f(z_k)(z_k - z_0)^m| = \infty.$$

Edelleen

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k)^{-l}(z_k - z_0)^{-m} = 0 \quad \text{kaikilla } l \in \mathbb{N}.$$

Toisaalta kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$P(z_k, f(z_k))f(z_k)^{-n}(z_k - z_0)^{-m} = 0,$$

eli

$$a_n(z_k)(z_k - z_0)^{-m} + \cdots + a_0(z_k)f(z_k)^{-n}(z_k - z_0)^{-m} = 0.$$

Edellisen nojalla tästä seuraa, että

$$\lim_{k\to\infty} a_n(z_k)(z_k - z_0)^{-m} = 0,$$

eli polynomilla a_n on ainakin kertaluvun m nollakohta pisteessä z_0. Koska tämä pätee mille tahansa luvulle $m \in \mathbb{N}$, on oltava

$$a_n(z) \equiv 0,$$

mikä on vastoin alkuperäisen polynomin P valintaa.

Vastaavasti jos funktiolla f olisi oleellinen erikoispiste pisteessä $z_0 = \infty$, niin kaikille $m \in \mathbb{N}$ löytyy jono $z_k \to \infty$, jolle

$$\lim_{k\to\infty} \left| f(z_k)z_k^{-m} \right| = \infty,$$

jolloin edelleen

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k)^{-l}z_k^m = 0 \quad \text{kaikilla } l \in \mathbb{N}.$$

Tarkastelemalla polynomiyhtälöä

$$P(z_k, f(z_k))f(z_k)^{-n}z_k^m = 0$$

nähdään, että

$$\lim_{k\to\infty} a_n(z_k)z_k^m = 0,$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$, mikä on mahdotonta, sillä polynomilla a_n voi olla vain napa tai poistuva erikoispiste äärettömyydessä. □

Lause 5.12. *Olkoon* $P(z,w) = a_n(z)w^n + \cdots + a_0(z)$ *jaoton polynomi ja* $f : D \to \mathbb{C}$ *vastaavan polynomiyhtälön toteuttava algebrallinen funktio. Tällöin jokaisella* $z_0 \in \partial D$ *on olemassa luku* $m \in \mathbb{N}$*, jolle*

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}} f(z)(z-z_0)^m = 0.$$

Lisäksi, jos D *on rajoittamaton, on olemassa luku* $m \in \mathbb{N}$*, jolle*

$$\lim_{\substack{z\to \infty\\ z\in D}} f(z)z^{-m} = 0.$$

Todistus. Olkoon $z_0 \in \partial D$. Koska polynomiyhtälöllä $P(z,w) = 0$ on vain äärellinen määrä pisteitä $z_1, \ldots, z_m$, joissa polynomiyhtälöllä on alle n ratkaisua, on olemassa luku $r > 0$, jolle punkteerattu kiekko $B^*(z_0, r)$ ei sisällä mitään pistettä $z_1, \ldots, z_m$. Lauseen 5.10 nojalla funktiota f voidaan jatkaa vapaasti punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0, r)$. Olkoon A kaikkien funktion f punkteeratun kiekon $B^*(z_0, r)$ analyyttisten jatkeiden määräämä funktioelementtien kokoelma. Tällöin projektio

$$p : A \to B^*(z_0, r), \quad p(z,h) = z,$$

on peite. Peitteen p asteelle pätee $\#p \le n$, sillä jokaisessa pisteessä z on korkeintaan n eri funktioelementtiä (z,h), jotka toteuttavat polynomiyhtälön $P(z, h(z)) = 0$.

Kuten analyyttisen funktion Riemannin pinnan konstruktiossa, peitteen p avulla saadaan analyyttinen funktio

$$g : B^*(z_0, \sqrt[k]{r}) \to \mathbb{C},$$

jolle

$$(z_1, g) = (z_1, f \circ \zeta),$$

missä $k = \#p$, $z_1 \in B^*(z_0, r)$ on konstruktiossa kiinnitetty kantapiste ja ζ on funktio

$$\zeta : B^*(z_0, \sqrt[k]{r}) \to B^*(z_0, r), \quad \zeta(z) = (z-z_0)^k + z_0.$$

Koska $(z_1, g) = (z_1, f \circ \zeta)$, on olemassa pisteen z_1 ympäristö $U \subset B^*(z_0, r)$, jossa $g|_U = f \circ \zeta|_U$. Edelleen, koska funktio f toteuttaa polynomiyhtälön $P(z, f(z)) = 0$,

$$P(\zeta(z), g(z)) = P(\zeta(z), f \circ \zeta(z)) = 0 \quad \text{kaikille } z \in U.$$

Selvästi g on funktion $g|_U$ analyyttinen jatke, jolloin lemman 5.9 nojalla funktio g on algebrallinen funktio, joka toteuttaa polynomiyhtälön

$$P(\zeta(z), g(z)) = a_n(\zeta(z))g(z)^n + \cdots + a_0(\zeta(z)) = 0.$$

Lemman 5.11 nojalla funktiolla g on tällöin napa tai poistuva erikoispiste pisteessä z_0, eli on olemassa luku $\tilde{m} \in \mathbb{N}$, jolle

$$\lim_{z\to z_0} g(z)(z-z_0)^{\tilde{m}} = 0.$$

Tällöin funktiolle f pätee

$$\lim_{z\to z_0} f \circ \zeta(z)(z-z_0)^{\tilde{m}} = 0.$$

Merkitään $\tilde{z} = \zeta(z)$, jolloin

$$z = \zeta^{-1}(\tilde{z}) = (\tilde{z} - z_0)^{1/k} + z_0,$$

sopivalle juurifunktion $z \mapsto z^{1/k}$ haaran valinnalle. Tällä merkinnällä

$$f \circ \zeta(z)(z-z_0)^{\tilde{m}} = f(\tilde{z})(\zeta^{-1}(\tilde{z})-z_0)^{\tilde{m}} = f(\tilde{z})(\tilde{z}-z_0)^{\tilde{m}/k},$$

jolloin mille tahansa kokonaisluvulle $m \geq \tilde{m}/k$

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in D}} f(z)(z-z_0)^m = 0.$$

Jos D on rajoittamaton, sama konstruktio voidaan tehdä jollekin punkteeratulle kiekolle $B^*(\infty, r)$ ja väite

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in D}} f(z)z^{-m} = 0$$

seuraa lemmasta 5.11 funktiolle $g : B^*(\infty, \sqrt[k]{r}) \to \mathbb{C}$ kuten edellä. $\square$

5.2. **Algebrallisen funktion Riemannin pinta.**

Lemma 5.13. *Olkoot $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ eri pisteitä ja $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Jos funktiolla f on napa tai poistuva erikoispiste pisteissä $z_1, \ldots, z_m$ ja ∞, niin f on rationaalifunktio.*

Todistus. Olkoon $k_j \in \mathbb{N}$ navan z_j kertaluku tai $k_j = 0$ mikäli z_j on poistuva erikoispiste. Määritellään funktiot

$$q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad q(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{k_j} = (z-z_1)^{k_1}\ldots(z-z_m)^{k_n} \quad \text{ja}$$
$$p : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}, \quad p(z) = q(z)f(z).$$

Selvästi $f(z) = p(z)/q(z)$ ja q on polynomi, joten riittää osoittaa, että funktio p on myös polynomi.

Koska k_j on navan z_j kertaluku, raja-arvo

$$w_j = \lim_{z\to z_j}(z-z_j)^{k_j}f(z)$$

on olemassa. Tällöin

$$\lim_{z\to z_j} p(z) = \lim_{z\to z_j}\prod_{l=1}^{n}(z-z_l)^{k_l}f(z) = \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n}(z_j-z_l)^{k_l}w_j \in \mathbb{C},$$

eli funktiolla p on poistuva erikoispiste pisteessä z_j. Toisin sanoen p laajenee kokonaiseksi funktioksi $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Oletuksen mukaan funktiolla f on napa tai poistuva erikoispiste äärettömyydessä. Toisaalta polynomilla q on myös napa tai poistuva erikoispiste äärettömyydessä. Näin ollen näiden tulofunktiolla p on napa tai poistuva erikoispiste äärettömyydessä. Lisäksi p on edellisen päättelyn perusteella kokonainen funktio, mistä seuraa että funktion p on oltava polynomi ja edelleen, että f on rationaalifunktio. $\square$

Lause 5.14. *Olkoon $P(z,w) = a_n(z)w^n + \cdots + a_0(z)$ jaoton polynomi ja f_0 polynomiyhtälön $P(z, f_0(z)) = 0$ toteuttava analyyttinen funktio. Tällöin jokainen polynomiyhtälön $P(z, g(z)) = 0$ toteuttava funktioelementti (z, g) on funktion f_0 analyyttinen jatke.*

Todistus. Olkoot $z_1, \ldots, z_m$ ne pisteet, joissa polynomiyhtälöllä $P(z, w) = 0$ on alle n ratkaisua. Olkoon

$$A = \{(z, f) : z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \text{ ja } f \text{ on funktion } f_0 \text{ analyyttinen jatke}\}.$$

Oletetaan, että funktioelementti (z, g) toteuttaa polynomiyhtälön $P(z, g(z)) = 0$. Jos $z \notin \{z_1, \ldots, z_m\}$, niin riittää osoittaa, että $(z, g) \in A$. Jos $z \in \{z_1, \ldots, z_m\}$, voidaan valita jokin piste $\tilde{z} \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ funktion g määrittelyjoukosta. Selvästi $(\tilde{z}, g)$ on funktioelementin (z, g) analyyttinen jatke, joten jälleen riittää osoittaa, että $(\tilde{z}, g) \in A$.

Lauseen 5.10 nojalla projektio

$$p : A \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}, \quad p(z, f) = z$$

on peite ja lauseen 5.3 nojalla tiedetään, että jokaisen pisteen $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ ympäristössä on täsmälleen n eri analyyttistä funktiota f, jotka toteuttavat polynomiyhtälön $P(z, f(z)) = 0$. Näin ollen lauseen väite seuraa, jos osoitetaan, että $\#p = n$.

Olkoon $k = \#p$ ja $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$. Olkoon

$$\{(z_0, f_1), \ldots (z_0, f_k)\} = p^{-1}(z_0)$$

ja olkoon D jokin pisteen z_0 ympäristö, jossa kaikki funktiot f_j ovat hyvin määriteltyjä. Määritellään kuvaus

$$R : D \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad R(z, w) = \prod_{j=1}^{k} (w - f_j(z)).$$

Kertomalla auki kuvauksen R määrittelevä tulo saadaan kuvaukselle R esitys

$$R(z, w) = w^k + s_1(z) w^{k-1} + s_2(z) w^{k-2} + \cdots + s_k(z),$$

missä funktiot $s_j : D \to \mathbb{C}$ ovat symmetriset funktiot

$$\begin{aligned}
s_1(z) &= -\sum_{j=1}^{k} f_j(z), \\
s_2(z) &= \sum_{\substack{j,l=1 \\ j \neq l}}^{k} f_j(z) f_l(z), \\
&\vdots \\
s_k(z) &= (-1)^k \prod_{j=1}^{k} f_j(z).
\end{aligned}$$

Selvästi funktiot s_j ovat analyyttisiä, sillä funktiot f_j ovat analyyttisiä. Lauseen 5.10 mukaan jokaista funktioelementtiä (z_0, f_j) voidaan jatkaa vapaasti alueessa $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$, joten sama pätee funktioille s_j.

Jos γ on alueen $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ suljettu polku pisteestä z_0, niin funktioelementin (z_0, f_j) analyyttinen jatke antaa jonkin toisen funktioelementin (z_0, f_l). Merkitään tätä indeksiä

$$\sigma(j) = l,$$

jolloin tarkastelemalla kaikkien funktioelementtien (z_0, f_j) jatkeita polkua γ pitkin, saadaan jokin permutaatio

$$\sigma : \{1, \ldots, j\} \to \{1, \ldots, j\}.$$

Tällöin esimerkiksi funktion s_1 analyyttinen jatke polkua γ pitkin antaa funktion

$$z \mapsto -\sum_{j=1}^{k} f_{\sigma(j)}(z).$$

Summausjärjestystä muuttamalla nähdään, että tämä on täsmälleen funktio s_1 itse. Vastaavasti jokaiselle funktiolle s_j analyyttinen jatke polkua γ pitkin antaa vain funktion s_j takaisin. Tällöin lauseen 1.14 nojalla saadaan hyvin määritellyt analyyttiset funktiot

$$s_j : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C},$$

jolloin voidaan laajentaa myös funktio R funktioksi $R : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$R(z, w) = w^k + s_1(z)w^{k-1} + s_2(z)w^{k-2} + \cdots + s_k(z).$$

Lauseen 5.12 nojalla jokaisessa pisteessä $z_0 \in \{z_1, \ldots, z_m\}$ on olemassa luvut $m_j \in \mathbb{N}$, joille

$$\lim_{z \to z_0} f_j(z)(z - z_0)^{m_j} = 0.$$

Tästä seuraa, että

$$\lim_{z \to z_0} s_j(z)(z - z_0)^{m_1} \ldots (z - z_0)^{m_k} = 0,$$

joten symmetrisillä funktioilla s_j on napa tai poistuva erikoispiste pisteissä $z_1, \ldots, z_m$. Vastaavasti lauseen 5.12 avulla nähdään, että symmetrisillä funktioilla s_j on napa tai poistuva erikoispiste myös äärettömyydessä, jolloin lemman 5.13 nojalla ne ovat rationaalifunktioita

$$s_j(z) = p_j(z)/q_j(z).$$

Asetetaan kaikilla $j \in \{0, \ldots, k-1\}$

$$b_j(z) = s_{k-j}(z) \prod_{l=1}^{k} q_l(z) = p_j(z) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k-j}}^{k} q_l(z)$$

ja

$$b_k(z) = \prod_{l=1}^{k} q_l(z).$$

Määritellään näiden avulla polynomi

$$Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad Q(z, w) = b_k(z)w^k + \cdots + b_0(z) = R(z, w) \prod_{j=1}^{k} q_j(z).$$

Jokaisessa pisteessä $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$

$$p^{-1}(z) = \{(z, f_1), \ldots, (z, f_k)\}$$

joillekin funktioelementeille $(z, f_1), \dots, (z, f_k) \in A$. Funktioiden s_j konstruktion perusteella

$$\prod_{j=1}^{k}(w - f_j(z)) = w^n + s_1(z)w^{n-1} + \dots + s_n(z),$$

jolloin funktio R voidaan esittää muodossa

$$R(z, w) = \prod_{j=1}^{k}(w - f_j(z)) = 0.$$

Erityisesti kaikille $j \in \{1, \dots, k\}$

$$R(z, f_j(z)) = \prod_{l=1}^{k}(f_j(z) - f_l(z)) = 0.$$

Toisin sanoen mille tahansa funktioelementille $(z, f) \in A$ on oltava $R(z, f(z)) = 0$. Edelleen jokainen funktioelementti $(z, f) \in A$ toteuttaa polynomiyhtälön

$$Q(z, f(z)) = R(z, f(z)) \prod_{l=1}^{k} q_l(z) = 0.$$

Tällöin polynomeilla P ja Q on kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ yhteinen nollakohta $P(z, f(z)) = 0 = Q(z, f(z))$ jollekin $(z, f) \in A$. Edelleen lemmojen 5.5 ja 5.6 nojalla niillä on jokin yhteinen tekijä. Toisaalta P on jaoton polynomi, joten polynomin P on oltava polynomin Q tekijä. Erityisesti polynomin Q asteen on oltava vähintään polynomin P aste, eli $k \geq n$. Polynomin Q konstruktion perusteella taas $k \leq n$, joten

$$\#p = k = n.$$

□

Seuraus 5.15. *Olkoon P jaoton polynomi ja olkoot f ja g algebrallisia funktioita, jotka toteuttavat polynomiyhtälön $P(z, f(z)) = P(z, g(z)) = 0$. Tällöin funktioiden f ja g Riemannin pinnat ovat samat.*

Todistus. Lauseen 5.14 nojalla funktiot f ja g ovat toistensa analyyttisiä jatkeita, joten molempien funktioiden Riemannin pintojen konstruktiossa analyyttinen jatke määrää täsmälleen saman kokoelman funktioelementtejä. Edelleen pinnoilla on samat erikoispisteet, joten pinnat ovat samat. □

Lause 5.16. *Algebrallisen funktion Riemannin pinta on kompakti.*

Todistus. Olkoon R asteen n jaottoman polynomin P määräämän algebrallisen funktion Riemannin pinta ja olkoon $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ pinnan R avoin peite. Koska Riemannin pinnalla on aina numeroituva kanta, on olemassa numeroituva alipeite $\{U_j : j \in \mathbb{N}\}$. Tehdään antiteesi, että tällä peitteellä ei ole äärellistä alipeitettä. Antiteesin nojalla kaikille $j \in \mathbb{N}$,

$$U_1 \cup \dots \cup U_j \neq R,$$

eli on olemassa jokin piste

$$x_j \in U_{j+1} \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_j).$$

Näiden pisteiden projektiot $p(x_j) \in \mathbb{C}_\infty$ muodostavat tällöin Riemannin pallon jonon. Riemannin pallo on kompakti metrinen avaruus, joten jonolla $(p(x_j))$ on olemassa suppeneva osajono $(p(y_j))$. Olkoon

$$z_0 = \lim_{j\to\infty} p(y_j) \in \mathbb{C}_\infty.$$

Olkoon $r > 0$ mikä tahansa luku siten, että jokaisella punkteeratun kiekon pisteellä $z \in B^*(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ polynomiyhtälöllä $P(z, w) = 0$ on n eri ratkaisua w. Olkoon

$$k = \#p^{-1}(z_0).$$

Tällöin $k \leq n$ ja $k < n$ vain jos pinnalla R on jokin haarautumispiste (z_0, g). Joka tapauksessa kiekon $B(z_0, r) \subset \mathbb{C}_\infty$ alkukuvassa $p^{-1}(B(z_0, r))$ on tällöin k yhtenäisyyskomponenttia. Olkoot $V_1, \ldots, V_k \subset R$ nämä yhtenäisyyskomponentit, eli erillisiä avoimia joukkoja, joille

$$V_1 \cup \cdots \cup V_k = p^{-1}(B(z_0, r)).$$

Koska $p(y_j) \to z_0$, on olemassa $j_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $p(y_j) \in B(z_0, r)$ kun $j > j_0$. Tällöin kaikilla $j > j_0$

$$y_j \in V_1 \cup \cdots \cup V_k.$$

Erityisesti on olemassa jokin indeksi $l \in \{1, \ldots, k\}$ siten, että $y_j \in V_l$ äärettömän monella $j > j_0$. Näistä pisteistä saadaan osajono (w_j), jolle selvästi $p(w_j) \to z_0$. Joukossa V_l on yksikäsitteinen alkukuvapiste

$$w \in V_l \cap p^{-1}(z_0),$$

joten $w_j \to w$. Oletuksen mukaan $\{U_j : j \in \mathbb{N}\}$ on pinnan R peite, joten $w \in U_N$ jollekin $N \in \mathbb{N}$.

Alkuperäisen jonon (x_j) konstruktion perusteella voi olla $x_j \in U_N$ vain, kun $j \leq N$. Jono (w_j) on tämän jonon osajono, joten $w_j \in U_N$ vain äärellisen monella indeksillä $j \in \mathbb{N}$. Tämä on ristiriidassa jonon (w_j) konstruktion kanssa, sillä oletuksen mukaan $w_j \to w$. Tämä ristiriita osoittaa, että tällaista jonoa (x_j) ei voi olla olemassa, joten on olemassa peitteen $\{U_j : j \in \mathbb{N}\}$ äärellinen alipeite ja väite on todistettu. $\square$

Esimerkki 5.17. Olkoon

$$P(z, w) = zw^2 + w + 1.$$

Tarkastellaan polynomiyhtälön $P(z, w) = 0$ määräämää Riemannin pintaa. Tämän polynomin derivaatta muuttujan w suhteen on

$$P_w(z, w) = 2zw + 1.$$

Jakoyhtälö polynomeille $w \mapsto P(z, w)$ ja $w \mapsto P_w(z, w)$ antaa

$$P(z, w) = \left(\frac{1}{2}w + \frac{1}{4z}\right) P_w(z, w) + 1 - \frac{1}{4z},$$

mistä saadaan edelleen

$$4zP(z, w) = (2zw + 1)P_w(z, w) + 4z - 1.$$

Polynomiyhtälön $P(z, w) = 0$ kertaluvun $k \geq 2$ nollakohdat saadaan tällöin resultantin

$$R(z) = 4z - 1$$

nollakohdista, eli ainoa tällainen piste on $z = 1/4$. Muut ongelmapisteet saadaan polynomin $w \mapsto P(z,w)$ korkeimman asteen termin kertoimen nollakohdista, eli polynomin

$$a_2(z) = z$$

nollakohdista, joita on täsmälleen yksi, $z = 0$. Näin ollen jokaisella $z \in \mathbb{C}\setminus\{0, 1/4\}$ polynomiyhtälöllä $P(z,w) = 0$ on täsmälleen kaksi ratkaisua. Toisen asteen polynomin ratkaisukaavalla saadaankin suoraan

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z},$$

mistä saadaan pinnan R funktioelementit (z, f_1) ja (z, f_2),

$$f_1(z) = \frac{-1 + \sqrt{1-4z}}{2z} \quad \text{ja} \quad f_2(z) = \frac{-1 - \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Pisteessä $z = 1/4$ on edeltävän päättelyn mukaan jonkin kertaluvun $k \geq 2$ nollakohta, mutta koska polynomin $w \mapsto P(z,w)$ aste on 2, on oltava $k = 2$. Tämä nähdään myös esityksestä

$$P(\tfrac{1}{4}, w) = \tfrac{1}{4}w^2 + w + 1 = \tfrac{1}{4}(w^2 + 4w + 4) = \tfrac{1}{4}(w+2)^2,$$

jossa $w = -2$ on kaksinkertainen juuri polynomiyhtälölle. Pinnalla R on tällöin kertaluvun 2 haarautumispiste $(1/4, g)$. Tätä haarautumispistettä vastaa parametrisaatio

$$\zeta(z) = (z - \tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}.$$

Ratkaisemalla yhtälö

$$P(\zeta(z), w) = ((z - \tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4})w^2 + w + 1 = (z - \tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}(w+2)^2 = 0$$

muuttujan w suhteen saadaan

$$w = -2 \pm 2i(z - \tfrac{1}{4}) = \pm 2iz - 2 \mp \tfrac{1}{2}i,$$

joten funktioksi g kelpaa joko funktio

$$g_1(z) = -2 + 2i(z - \tfrac{1}{4}) = 2iz - 2 - \tfrac{1}{2}i$$

tai funktio

$$g_2(z) = -2 - 2i(z - \tfrac{1}{4}) = -2iz - 2 + \tfrac{1}{2}i.$$

Huomaa, että nämä funktiot tosiaan vastaavat samaa kertaluvun 2 haarautumispistettä, sillä kulman π kierto pisteen $z = 1/4$ ympäri antaa

$$g_1(-(z - \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}) = -2 + 2i(-z + \tfrac{1}{4}) = -2 - 2i(z - \tfrac{1}{4}) = g_2(z).$$

Polynomin $a_2(z) = z$ nollakohdassa $z = 0$ taas polynomiyhtälöllä $P(0,w) = w+1 = 0$ on vain yksi nollakohta $w = -1$. Tässä tapauksessa pitää tarkastella funktioiden f_1 ja f_2 määräämiä haaroja erikseen pisteen $z = 0$ ympäristössä.

Funktion f_1 määrittelevässä yhtälössä

$$f_1(z) = \frac{-1 + \sqrt{1-4z}}{2z}$$

sekä osoittaja että nimittäjä lähestyvät nollaa kun $z \to 0$. Tällöin l'Hospitalin säännön avulla nähdään, että funktiolla f_1 on raja-arvo pisteessä $z = 0$:

$$\lim_{z\to 0} f_1(z) = \lim_{z\to 0} \frac{-1 + \sqrt{1-4z}}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{-4}{4\sqrt{1-4z}} = -1.$$

Erityisesti funktio f_1 laajenee analyyttiseksi funktioksi pisteen $z = 0$ ympäristössä, joten tämä haara vastaa polynomiyhtälön $P(0, w) = 0$ ratkaisua $w = -1$. Funktion f_2 tapauksessa taas osoittaja on pisteen $z = 0$ ympäristössä nollasta eroava, joten funktiolla f_2 on kertaluvun 1 napa pisteessä $z = 0$, eli f_2 on meromorfinen funktio pisteen $z = 0$ ympäristössä. Näin ollen myös pisteessä $z = 0$ on kaksi eri pinnan R meromorfista funktioelementtiä $(0, f_1)$ ja $(0, f_2)$.

Lopuksi tarkastellaan vielä pistettä $z = \infty$. Vastaavasti kuin haarautumispisteen $z = 1/4$ tapauksessa, tarkastellaan polynomiyhtälöä sopivalla parametrisaatiolla.

Pisteen ∞ ympäristössä on jokaiselle pisteelle z kaksi funktioelementtiä $(z, f_1) \in R$ ja $(z, f_2) \in R$. Funktioelementin (z, f_1) analyyttinen jatke suurta yksinkertaista ympyräpolkua pitkin johtaa funktioelementtiin (z, f_2) ja vastaavasti funktioelementin (z, f_2) jatke samaa polkua pitkin johtaa funktioelementtiin (z, f_1), sillä suuret ympyräpolut kiertävät pisteen $z = 1/4$. Toisin sanoen pistettä $z = \infty$ vastaa yksi kertaluvun 2 haarautumispiste ja oikea parametrisaatio on tällöin

$$\zeta(z) = z^2.$$

Ratkaisemalla yhtälö

$$P(z^2, w) = z^2w^2 + w + 1 = 0$$

muuttujan w suhteen saadaan

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2}.$$

Tässä täytyy olla tarkkana miten neliöjuuren haara valitaan, jotta saadaan meromorfinen funktio jossakin kiekossa $B(\infty, r)$. Kun funktio $z \mapsto 1 - 4z^2$ ohittaa negatiivisen reaaliakselin, täytyy neliöjuuren haaran vaihtua. Siis kun z ohittaa imaginääriakselin, neliöjuuren haara vaihtuu. Jälleen saadaan kaksi vaihtoehtoa sopivalle meromorfiselle funktiolle riippuen siitä, kumpi neliöjuuren haara kiinnitetään jossakin pisteessä. Asetetaan

$$s : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \{1, -1\}, \quad s(z) = \begin{cases} 1 & \text{jos } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2} \\ -1, & \text{jos } \operatorname{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{2} \text{ tai } \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(z) \end{cases}$$

jolloin

$$h_1(z) = \frac{-1 + s(z)\sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2} \quad \text{ja} \quad h_2(z) = \frac{-1 - s(z)\sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2}$$

ovat molemmat meromorfisia funktioita pisteen $z = \infty$ ympäristössä. Nämä vastaavat tosiaan samaa haarautumispistettä pisteessä $z = \infty$, sillä $s(-z) = -s(z)$, jolloin kulman π kierto pisteen ∞ ympäri antaa

$$h_1(-z) = \frac{-1 + s(-z)\sqrt{1 - 4(-z)^2}}{2(-z)^2} = \frac{-1 - s(z)\sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2} = h_2(z).$$

Näin ollen polynomiyhtälön $zw^2 + w + 1 = 0$ määräämä Riemannin pinta koostuu funktioelementeistä (z, f_1) ja (z, f_2) kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/4\}$ ja kertaluvun 2 haarautumispisteistä $(1/4, g_1)$ ja (∞, h_1).

Edellä nähtiin, että jaottoman kompleksisen polynomin

$$P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad P(z, w) = \sum_{j+k=0}^{n} a_{j,k} z^j w^k$$

nollakohtien joukko

$$A = \{(z, w) \in \mathbb{C}, \quad P(z, w) = 0\}$$

laajenee kompaktiksi Riemannin pinnaksi, joka saadaan minkä tahansa polynomiyhtälön $P(z, f(z)) = 0$ toteuttavan algebrallisen funktion f Riemannin pintana analyyttisen jatkeen avulla. Tällaista polynomiyhtälön nollakohtien joukkoa A kutsutaan algebralliseksi käyräksi. Toinen lähestymistapa algebrallisten käyrien tarkasteluun saadaan, kun nollakohtia tarkastellaan avaruuden $\mathbb{C}^2$ sijaan kompleksisessa projektiivisessa tasossa $\mathbb{CP}^2$.

Kompleksinen projektiivinen taso on avaruus

$$\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}/\sim,$$

missä ekvivalenssirelaatio $\sim$ määritellään asettamalla

$$(z_0, z_1, z_2) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2) \quad \text{kaikilla } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ ja } (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}.$$

Tarkastelua varten polynomista P muodostetaan vastaava homogeeninen polynomi määrittelemällä

$$\tilde{P} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \quad \tilde{P}(u, z, w) = \sum_{j+k=0}^{n} a_{j,k} z^j w^k u^{n-(j+k)}.$$

Koska homogeeniselle polynomille

$$\tilde{P}(\lambda u, \lambda z, \lambda w) = \lambda^n \tilde{P}(u, z, w) \quad \text{kaikille } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

voidaan mielekkäästi määritellä polynomin $\tilde{P}$ nollakohtien joukko projektiivisessa tasossa

$$\tilde{A} = \{[u, z, w] \in \mathbb{CP}^2, \quad \tilde{P}(u, z, w) = 0\}.$$

Toisaalta, koska

$$\tilde{P}(1, z, w) = \sum_{j+k=0}^{n} a_{j,k} z^j w^k 1^{n-(j+k)} = \sum_{j+k=0}^{n} a_{j,k} z^j w^k = P(z, w),$$

alkuperäinen nollakohtien joukko $A \subset \mathbb{C}^2$ voidaan tulkita joukon $\tilde{A} \subset \mathbb{CP}^2$ osajoukoksi käyttämällä kuvausta

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{CP}^2, \quad \varphi(z, w) = [1, z, w],$$

jolloin $\varphi(A) \subset \tilde{A}$. Joukko $\tilde{A}$ sisältää kuitenkin enemmän tietoa kuin joukko A, sillä nollakohdille

$$[0, z, w] \in \tilde{A}$$

ei ole vastinetta joukossa A. Nämä nollakohdat vastaavat nimittäin aiemmassa käsittelyssä polynomiyhtälön $P(z, w) = 0$ määräämän algebrallisen funktion käyttäytymistä äärettömyydessä $(z \to \infty)$ ja funktion napoja $(w \to \infty)$.

Esimerkiksi edellä käsitellyn polynomin

$$P(z, w) = zw^2 + w + 1$$

tapauksessa vastaava homogeeninen polynomi on

$$\tilde{P}(u, z, w) = zw^2 + u^2 w + u^3.$$

Polynomiyhtälön

$$\tilde{P}(0, z, w) = zw^2$$

nollakohdat projektiivisessa tasossa ovat piste $[0,1,0] \in \mathbb{CP}^2$, jota vastaa edellä käsitelty haarautumispiste (∞, h_1), ja piste $[0,0,1] \in \mathbb{CP}^2$, jota vastaa napa $(0, f_2)$. Tällä tavoin saadaan vastaavuus polynomiyhtälön $P(z,w) = 0$ määräämän algebrallisen funktion Riemannin pinnan ja vastaavan homogeenisen polynomiyhtälön nollakohtien joukon välille. Algebrallisia käyriä kompleksisessa projektiivisessa tasossa on käsitelty tarkemmin esimerkiksi kirjassa [5].

Viitteet

[1] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw-Hill, second edition, 1966.
[2] Lars V. Ahlfors and Leo Sario. *Riemann surfaces.* Princeton University Press, 1960.
[3] Simon Donaldson. *Riemann Surfaces.* Oxford University Press, 2011.
[4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.
[5] Frances Kirwan. *Complex Algebraic Curves.* Cambridge University Press, reprint edition, 1999.
[6] Kunihiko Kodaira. *Complex analysis.* Cambridge University Press, 2007.
[7] Olli E. Lehto. *Riemann Surfaces: Notes of lectures given at the University of Minnesota, winter and spring quarters 1968.* 1970.
[8] Elon Lages Lima. *Fundamental Groups and Covering Spaces.* A K Peters, 2003.
[9] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, second edition, 1974.
[10] George Springer. *Introduction to Riemann Surfaces.* Addison-Wesley, 1957.
[11] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Glenview, Illinois, 1971.